

LA PROPIEDAD DE BAIRE EN IDEALES SOBRE  $\mathbb{N}$

JHAN HADDER HERNÁNDEZ TUNUBALÁ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

LA PROPIEDAD DE BAIRE EN IDEALES SOBRE  $\mathbb{N}$

JHAN HADDER HERNÁNDEZ TUNUBALÁ

Trabajo de grado para optar al título de  
Matemático

Director  
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin  
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

## DEDICATORIA

Al siguiente conjunto,  $\mathcal{VIDA} = \{Yolanda, Oscar, Thalys, Fifo, Cris\}$ .

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, quiero agradecerle a mi director Carlos, no sólo por su tiempo dedicado a asesorarme en la elaboración de este trabajo, sino por todo lo que me ha enseñado a lo largo de estos 4 años. De igual manera, agradezco la amplia ayuda que me brindaron mis compañeros y profesores. Por último, y no menos importante, a la mejor beca que puedo tener: el amor de mis padres.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>8</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
1.1. Filtros e Ideales . . . . .	10
1.2. El espacio de Cantor . . . . .	13
<b>2. LA PROPIEDAD DE BAIRE EN IDEALES SOBRE <math>\mathbb{N}</math></b>	<b>18</b>
2.1. Categoría de Baire . . . . .	18
2.2. Una ley 0-1 topológica . . . . .	21
2.3. Teorema de Jalali-Naini & Talagrand . . . . .	24
2.4. Existencia de familias $\mathcal{I}$ -casi disjuntas . . . . .	26
<b>3. INTERSECCIÓN DE ULTRAFILTROS LIBRES</b>	<b>31</b>
3.1. Propiedades de la función $S$ . . . . .	31
3.2. El rol de las familias casi disjuntas . . . . .	36
3.3. Propiedad de Baire en intersecciones de ultrafiltros . . . . .	40
3.4. Un teorema de partición tipo Hindman . . . . .	41
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>43</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** LA PROPIEDAD DE BAIRE EN IDEALES SOBRE  $\mathbb{N}$  \*

**AUTOR:** JHAN HADDER HERNÁNDEZ TUNUBALÁ \*\*

**PALABRAS CLAVE:** IDEALES, ULTRAFILTROS, PROPIEDAD DE BAIRE, ESPACIO DE CANTOR, TEOREMA DE JALALI-NAINI&TALAGRAND, TEOREMAS DE PARTICIÓN TIPO HINDMAN.

### DESCRIPCIÓN:

Un ideal sobre un conjunto  $S$  es una colección de subconjuntos de  $S$  que tiene al conjunto vacío y es cerrada bajo subconjuntos y uniones finitas. Dado un espacio topológico  $X$ , se dice que  $A \subseteq X$  tiene la propiedad de Baire, si existe un abierto  $U$ , tal que su diferencia simétrica con  $A$  es un conjunto magro (i.e, una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte). Un ultrafiltro sobre  $S$  es la noción dual de ideal. Si dotamos al conjunto  $2^X$  con la topología producto, entonces podemos pensar a los ideales y ultrafiltros sobre  $X$  como subconjuntos de  $2^X$ , y estudiar si poseen la propiedad de Baire.

En esta tesis nos enfocamos en el caso  $X = \mathbb{N}$ , es decir, estudiamos la propiedad de Baire en ideales (y ultrafiltros) dentro del espacio de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$ . En primer lugar, presentamos una caracterización de cuando un ideal sobre  $\mathbb{N}$  tiene la propiedad de Baire, resultado que se conoce como el Teorema de Jalali-Naini<sup>12</sup>. Posteriormente, demostramos el teorema de Plewik<sup>3</sup> que establece que las intersecciones y uniones de una cantidad menor al continuo de ultrafiltros libres sobre no tienen la propiedad de Baire. Finalmente, exploramos una aplicación de estos resultados en el contexto de teoremas de partición tipo Hindman.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

<sup>1</sup> Michel Talagrand. «Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables». En: *Studia Mathematica* 67.1 (1980), págs. 13-43.

<sup>2</sup> Seyed-Assadollah Jalali-Naini. «The Monotone Subsets of Cantor Space, Filters and Descriptive Set Theory.» Tesis doct. University of Oxford, 1976.

<sup>3</sup> Szymon Plewik. «Intersections and unions of ultrafilters without the Baire property». En: *Bull. Pol. Acad. Sci. Math* 35.11-12 (1987), págs. 805-808.

## ABSTRACT

**TITLE:** THE BAIRE PROPERTY IN IDEALS ON  $\mathbb{N}$  \*

**AUTHOR:** JHAN HADDER HERNÁNDEZ TUNUBALÁ \*\*

**KEYWORDS:** IDEALS, ULTRAFILTERS, BAIRE PROPERTY, CANTOR SPACE, THEOREM OF JALALI-NAINI&TALAGRAN, HINDMAN'S TYPE THEOREMS.

### DESCRIPTION:

An ideal on a set  $S$  is a collection of subsets of subsets of  $S$  that contains the empty set and is closed under taking subsets and finite unions. Given a topological space  $X$ , a set  $A \subseteq X$  is said to have the Baire property if there exists an open set  $U$  such that the symmetric difference between  $A$  and  $U$  is meager (i.e., a countable union of nowhere dense sets). An ultrafilter on  $S$  constitutes the dual notion of an ideal. When  $2^X$  is endowed with the product topology, ideals and ultrafilters on  $X$  can be regarded as subsets of  $2^X$ , allowing us to investigate whether they possess the Baire property.

In this thesis, we focus on the case  $X = \mathbb{N}$ , analyzing the Baire property for ideals and ultrafilters as subsets of the Cantor space  $2^{\mathbb{N}}$ . First, we show a characterization of when an ideal on  $\mathbb{N}$  has the Baire property, a result known as the Jalali-Naini–Talagrand Theorem <sup>12</sup>. Next, we prove Plewik's theorem <sup>3</sup>, which establishes that intersections and unions of fewer than continuum many free ultrafilters lack the Baire property. Finally, as an application, we explore a partition theorem for the interval  $[0, 1]$  and the Cantor space, specifically addressing Hindman-type partition theorems.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

En el estudio de estructuras combinatorias sobre conjuntos infinitos, los filtros e ideales ocupan un lugar central como herramientas fundamentales en áreas como topología, teoría de conjuntos y análisis funcional. Particularmente, la interacción entre propiedades topológicas (como la propiedad de Baire) y características combinatorias de estas familias de subconjuntos ha sido un eje fructífero de investigación. En este contexto, los trabajos seminales de M. Talagrand establecieron un paralelismo profundo entre la categoría de Baire y la medibilidad en filtros.

El punto de partida de este trabajo es el Teorema de Talagrand (1980), que establece una equivalencia fundamental: Dado  $\mathcal{F}$  un filtro sobre un conjunto infinito  $S$ ,  $\mathcal{F}$  es magro si, y solo si, existe una sucesión  $\{I_n\}$  de subconjuntos finitos de  $S$ , dos a dos disjuntos, tal que para todo  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F$  intersecta a todos los elementos de la sucesión, salvo en una cantidad finita. Dado que todo filtro se puede escribir como la intersección de una familia de ultrafiltros, este resultado plantea la siguiente pregunta: ¿qué cardinalidad debe tener una familia de ultrafiltros para que su intersección sea magra? Talagrand demostró que tanto la intersección de familias numerables como aquellas de tamaño menor al continuo no son magras, siendo el segundo resultado dependiente del Axioma de Martin.

Este trabajo persigue dos objetivos articulados:

1. Sistematizar y clarificar los fundamentos teóricos de estos resultados, con énfasis en el caso  $S = \mathbb{N}$ .
2. Profundizar en las implicaciones de estos teoremas, conectándolos con problemas de partición de tipo Hindman (Prömel-Voigt, 1990) y demostrando cómo S. Plewik (1987) aprovechó estas ideas para evitar el Axioma de Martin en contextos de intersecciones de ultrafiltros.

Nuestra elección de enfocarnos en  $\mathbb{N}$  no es meramente técnica: al restringirnos a los naturales, las construcciones en las demostraciones adquieren un aspecto más intuitivo, permitiendo desentrañar aspectos no evidentes en el caso general. Esta especificidad, sugerida en el título del trabajo, se revela clave para simplificar demostraciones sin perder generalidad conceptual.

El Capítulo 2 sienta los preliminares. Revisamos filtros, ideales y ultrafiltros no principales, destacando su dependencia del Axioma de Elección. Posteriormente, introducimos el espacio de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$  como ambiente natural para estudiar la propiedad de Baire, dotado de la topología producto. Aquí asumiremos que el lector está familiarizado con Topología.

El Capítulo 3 constituye el núcleo teórico. Presentamos el Teorema de Jalali-Naini & Talagrand como piedra angular, demostrando cómo caracteriza ideales con la propiedad de Baire. Adicionalmente, exploramos otros resultados como la ley 0-1 topológica y la existencia de familias  $\mathcal{I}$ -casi disjuntas.

El Capítulo 4 finaliza nuestro trabajo proporcionando una alternativa para demostrar lo que Talagrand hizo. Detallamos cómo Plewik aprovechó los resultados de Prömel-Voigt<sup>1</sup> para demostrar que intersecciones de ultrafiltros no principales carecen de la propiedad de Baire.

---

<sup>1</sup> Hans Jürgen Prömel y Bernd Voigt. «A partition theorem for  $[0, 1]$ ». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* (1990), págs. 281-285.

## 1. PRELIMINARES

### 1.1. Filtros e Ideales

En 1930, A. Tarski<sup>2</sup> estaba interesado en dar condiciones necesarias y suficientes para resolver el siguiente problema: Dado un conjunto  $S$  y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ , bajo qué condiciones necesarias y suficientes, existe una función  $m$  que satisfice

- a) Para todo  $X \subseteq S$ ,  $m(X) = 0$  o  $m(X) = 1$ .
- b) Si  $X_1, X_2 \subseteq S$ , son disjuntos, entonces  $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$ .
- c) Si  $X \in \mathcal{A}$ , entonces  $m(X) = 0$ .
- d)  $m(S) = 1$ .

La respuesta a este problema es que  $m$  existe si, y solo si, hallamos una familia de subconjuntos de  $S$  que extienda a  $\mathcal{A}$  y que cumpla con otras condiciones. Dicha familia resulta ser un ultrafiltro sobre  $S$ . El objetivo de esta sección es entender qué es un ultrafiltro y mostrar la existencia de ultrafiltros que no contienen subconjuntos finitos de  $S$ . Para ello nos guiaremos de<sup>3</sup> en lo referente a las definiciones y proposiciones.

**Definición 1.1.1.** Sea  $S$  un conjunto. Diremos que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$  es un **filtro** sobre  $S$  si se cumplen las siguientes condiciones.

- (a)  $S \in \mathcal{F}$ .
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{F}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .
- (c) Si  $A \in \mathcal{F}$  y  $A \subseteq B \subseteq S$ , entonces  $B \in \mathcal{F}$ .

Si  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , diremos que  $\mathcal{F}$  es un filtro propio. Para lo que resta de la sección, todo filtro será propio, a menos que se indique lo contrario.

---

<sup>2</sup> Alfred Tarski. «Une contribution à la théorie de la mesure». fre. En: *Fundamenta Mathematicae* 15.1 (1930), págs. 42-50.

<sup>3</sup> Karel Hrbacek y Thomas Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded*. Crc Press, 2017.

**Definición 1.1.2.** Diremos que un filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $S$  es **principal** si existe  $A \subseteq S$  tal que  $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : A \subseteq X\}$ . Caso contrario, diremos que  $\mathcal{F}$  es **no-principal**.

**Proposición 1.1.3.** Sea  $S$  un conjunto infinito. Entonces, la familia de subconjuntos cofinitos de  $S$  es un filtro no principal sobre  $S$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : S \setminus X \text{ es finito}\}$ . Es directo verificar que  $\mathcal{F}$  es un filtro. Veamos que no es principal. Razonemos por contradicción. Supongamos que  $\mathcal{F}$  es principal. Entonces, existe  $A_0 \subseteq S$ , tal que  $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : A_0 \subseteq X\}$ . Observemos que  $A_0 \in \mathcal{F}$ , lo cual implica que  $A_0$  es infinito. Así,  $A_0 \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$ , para algún  $x \in A_0$ , una contradicción.  $\square$

**Definición 1.1.4.** Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre un conjunto  $S$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es un **ultrafiltro** si para cualquier  $X \subseteq S$ ,  $X \in \mathcal{F}$  o  $S \setminus X \in \mathcal{F}$ .

**Definición 1.1.5.** Diremos que un filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $S$  es **libre** si  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ .

**Observación 1.1.6.** Un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  sobre  $S$  es libre  $\iff \mathcal{U}$  no es principal  $\iff \mathcal{F} \cap \text{FIN}(S) = \emptyset$ .

**Definición 1.1.7.** Una colección  $\mathcal{G}$  de subconjuntos de  $S$  tiene la propiedad de las intersecciones finitas (PIF) si toda intersección finita de elementos de  $\mathcal{G}$  es no vacía.

**Lema 1.1.8.** Sea  $G$  una colección no vacía de subconjuntos de  $S$  que tiene la PIF. Entonces existe un filtro sobre  $S$  que extiende a  $G$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(S)$  con la PIF. Definamos  $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : \exists Y \in \text{FIN}(\mathcal{G}) \cap Y \subseteq X\}$ , donde  $\text{FIN}(\mathcal{G})$  son los subconjuntos finitos de  $\mathcal{G}$ . No es difícil verificar que  $\mathcal{F}$  es un filtro que extiende a  $\mathcal{G}$ .  $\square$

**Lema 1.1.9.** Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $S$ . Entonces,  $\mathcal{F}$  es un ultrafiltro si, y solo si,  $\mathcal{F}$  es  $\subseteq$ -maximal.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{F}$  es un ultrafiltro que no es maximal. Sea  $\mathcal{F}'$  un filtro sobre  $S$ , tal que  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$ . Entonces, existe  $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ . Dado que  $\mathcal{F}$  es ultrafiltro,  $S \setminus A \in \mathcal{F}$ . Por lo tanto,  $S \setminus A \in \mathcal{F}'$ , una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{F}$  no es un ultrafiltro sobre  $S$ . Entonces, existe  $A \subseteq S$ , tal que  $A \notin \mathcal{F}$  y  $S \setminus A \notin \mathcal{F}$ . Sea  $G = \mathcal{F} \cup \{A\}$ . No es difícil mostrar que  $G$  tiene la PIF, luego, existe un ultrafiltro  $\mathcal{F}'$  que extiende propiamente  $\mathcal{F}$ . Esto muestra que  $\mathcal{F}$  no es maximal.  $\square$

**Lema 1.1.10.** Si  $\mathcal{A}$  es un conjunto de filtros sobre  $S$  y si para cada  $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ ,  $F_1 \subseteq F_2$  o  $F_2 \subseteq F_1$ , entonces  $\bigcup \mathcal{A}$  es un filtro sobre  $S$

*Demostración.* Sea  $F = \bigcup \mathcal{A}$ .

1. Claramente  $S \in F$ , pues cada elemento de  $\mathcal{A}$  contiene a  $S$ .
2. Dados  $A, B \in F$ , existen  $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ , tales que  $A \in F_1$  y  $B \in F_2$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $F_1 \subseteq F_2$ . Así,  $A \in F_2$  y como  $F_2$  es un filtro, se sigue que  $A \cap B \in F_2$ . Por lo tanto,  $A \cap B \in F$ .
3. Supongamos que  $A \in F$  y  $A \subseteq B \subseteq S$ . Entonces, existe  $C \in \mathcal{A}$ , tal que  $A \in C$ . Dado que  $C$  es filtro, entonces  $B \in C$ . Por consiguiente,  $B \in F$ .

□

**Teorema 1.1.11.** Todo filtro sobre  $S$  se puede extender a un ultrafiltro sobre  $S$ .

*Demostración.* Sea  $F_0$  un filtro sobre  $S$  y definamos  $(P, \subseteq)$  como el conjunto parcialmente ordenado de filtros sobre  $S$  que contienen a  $F_0$ . Por el Lema 1.1, si  $\mathcal{C}$  es una cadena, entonces  $\mathcal{C}$  es acotada. Por lo tanto, el lema de Zorn nos garantiza la existencia de un filtro  $F \in P$  que es maximal. Se sigue por el Lema 1.1.9 que  $F$  es un ultrafiltro sobre  $S$  que extiende a  $F_0$ . □

El anterior teorema se le atribuye a Tarski <sup>4</sup>. Este resultado garantiza la existencia de ultrafiltros libres, como veremos a continuación.

**Corolario 1.1.12.** Existen ultrafiltros que no son principales.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  el filtro de los cofinitos de  $S$ . Ya vimos en la Proposición 1.1.3 que  $\mathcal{F}$  no es principal. Luego, por el Teorema 1.1.11, existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  que extiende a  $\mathcal{F}$ . Claramente  $\mathcal{U}$  no es principal; caso contrario,  $\mathcal{F}$  sería principal, lo cual no es posible. □

Para finalizar esta sección, presentaremos el concepto de un ideal sobre un conjunto  $S$  y su conexión con los filtros. De hecho, dado un filtro  $\mathcal{F}$ , podemos asociar a él un ideal sobre  $S$ , y viceversa, a todo ideal  $\mathcal{I}$  le podemos asociar un filtro.

---

<sup>4</sup> En realidad, lo que Tarski demostró es que podía extender un ideal y que esta extensión tuviera la propiedad de ultrafiltro. En la demostración no se usa directamente el Lema de Zorn, si no el axioma de elección y recursión transfinita, Alfred Tarski. «Une contribution à la théorie de la mesure». fre. En: *Fundamenta Mathematicae* 15.1 (1930), págs. 42-50.

**Definición 1.1.13.** Sea  $S$  un conjunto. Diremos que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(S)$  es un **ideal** si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{I}$ , entonces  $A \cup B \in \mathcal{I}$ .
- (c) Si  $B \in \mathcal{I}$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $A \in \mathcal{I}$ .

Si  $S \notin \mathcal{I}$ , diremos que  $\mathcal{I}$  es un ideal propio.

**Ejemplo 1.1.14.** Sea  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A(n) = |A \cap n|$ . Diremos que

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

es la **densidad** del conjunto  $A$ , siempre que dicho limite exista. El conjunto  $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\}$  es un ideal sobre  $\mathbb{N}$ .

**Ejemplo 1.1.15.** Si  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $S$ , entonces  $\mathcal{I} = \{S \setminus X : X \in \mathcal{F}\}$  es un ideal sobre  $S$ . Dicho ideal se conoce como el **ideal dual** de  $\mathcal{F}$ .

## 1.2. El espacio de Cantor

Para definir el espacio de Cantor, recordemos cómo se define el producto cartesiano generalizado.

**Definición 1.2.1.** Sea  $J$  un conjunto no vacío y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia de conjuntos indexada por  $J$ . Definimos el producto cartesiano generalizado de  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  como el conjunto

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = \left\{ x : J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha : x \text{ es una función y } \forall \alpha \in J \ x(\alpha) \in A_\alpha \right\}.$$

**Observación 1.2.2.** Si  $x \in \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ , denotaremos a  $x(j)$  por  $x_j$ .

Ahora veamos de qué manera podemos definir una subbase para una topología sobre  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ . Empecemos introduciendo la función proyección.

**Definición 1.2.3.** Sea  $J$  un conjunto no vacío y  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia de conjuntos indexada por  $J$ . Dado  $\beta \in J$ , definamos la función  $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$  por  $\pi_\beta(x) = x_\beta$ , para todo  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ .

**Definición 1.2.4.** Sea  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia de espacios topológicos indexada por un conjunto no vacío  $J$ . Definamos  $S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$ , para todo  $\beta \in J$ , y  $S = \bigcup_{\beta \in J} S_\beta$ . A la topología generada por la subbase  $S$  la llamaremos topología producto sobre  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ .

**Proposición 1.2.5.** La topología producto sobre  $\prod_{\alpha} X_\alpha$  tiene como base la colección de elementos  $\prod_{\alpha} U_\alpha$ , donde  $U_\alpha$  es abierto de  $X_\alpha$  y  $U_\alpha = X_\alpha$  excepto en una cantidad finita de índices.

Cuando  $J = \mathbb{N}$  y  $X_\alpha = \{0, 1\}$ , llamaremos al producto  $\prod_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  el espacio de Cantor. Adoptando la notación de teoría de conjuntos, denotaremos al espacio de Cantor por  $2^{\mathbb{N}}$ . Sea  $2^{<\omega}$  el conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos. Por la proposición anterior, los abiertos básicos del espacio de Cantor son sucesiones infinitas que extienden una sucesión finita de ceros y unos, es decir, el conjunto

$$N_t = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \forall i \in \text{dom}t \ x(i) = t(i)\},$$

donde  $t \in 2^{<\omega}$ , es un abierto básico de  $2^{\mathbb{N}}$ . Más aún,  $N_t$  también es cerrado.

Podemos definir un orden parcial para el caso en el que una sucesión (finita o infinita) de ceros y unos extiende a otra. Dados  $x, y$ ,  $x \preceq y \iff \forall i \in \text{dom}x \ x(i) = y(i)$ .

**Proposición 1.2.6.** Si  $N_s \subseteq N_t$ , entonces  $t \preceq s$ .

*Demostración.* Sea  $i \in \text{dom}t$  y escojamos  $x \in 2^{\mathbb{N}}$  que extienda a  $s$ . Por hipótesis,  $x \in N_t$ , luego,  $x(i) = t(i) = s(i)$ , para todo  $i \in \text{dom}t$ .  $\square$

Observe que el recíproco de la anterior proposición también es cierto. Por consiguiente,  $N_s \subseteq N_t \iff t \preceq s$ .

Ahora veamos algunas de las propiedades del espacio de Cantor que estaremos usando en los siguientes capítulos. Dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in 2^{\mathbb{N}}$ , denotaremos por  $x \upharpoonright n$  a la restricción de  $x$  en  $n$ .

**Proposición 1.2.7.**  $2^{\mathbb{N}}$  es Hausdorff.

*Demostración.* Sean  $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$  distintos. Escojamos el menor  $i \in \mathbb{N}$ , tal que  $x(i) \neq y(i)$ . Entonces,  $N_{x \upharpoonright (i+1)} \cap N_{y \upharpoonright (i+1)} = \emptyset$ .  $\square$

Definamos  $d: 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\}}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Se puede verificar que  $d$  es una métrica sobre  $2^{\mathbb{N}}$ . Veamos que dicha métrica induce la topología producto sobre el espacio de Cantor.

**Lema 1.2.8.** Dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$ , entonces  $d(x, y) < \frac{1}{n} \iff y \in N_{x|n}$ .

*Demostración.* Si  $x = y$ , no hay nada que demostrar. Supongamos que  $x \neq y$  y denotemos por  $m$  el menor natural en el que  $x$  y  $y$  difieren. Así,

$$\begin{aligned} d(x, y) = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n} &\iff n < m+1 \\ &\iff n \leq m \\ &\iff y \in U_{x|n}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.2.9.**  $2^{\mathbb{N}}$  es metrizable.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B}$  la base generada por la métrica  $d$  y  $\mathcal{B}'$  la base para la topología producto.

- Veamos que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ . Sea  $x \in B_d(x, \epsilon)$ , donde  $\epsilon > 0$ . Escojamos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq B_d(x, \epsilon)$ . Se sigue del Lema 1.2.8 que  $N_t \subseteq B_d(x, \frac{1}{n})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ .
- Ahora mostremos que  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ . Fijemos  $t \in 2^{<\omega}$  y  $x \in N_t$ . Si escogemos  $n$  como la longitud de  $t$ , nuevamente se sigue por el Lema 1.2.8 que  $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq N_t$ . Por consiguiente,  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ .

Esto muestra que el espacio de Cantor es metrizable.

□

**Proposición 1.2.10.**  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  es completo.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de Cauchy en  $2^{\mathbb{N}}$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces, existe  $N_k \geq 1$ , tal que  $d(x_n, x_m) < \frac{1}{k+1}$ , siempre que  $n, m \geq N_k$ . Esto nos dice que los términos de la sucesión a partir de  $N_k$  coinciden en sus primeras  $k$  coordenadas. Definamos  $x \in 2^{\mathbb{N}}$  por  $x(k) = x_{N_k}(k)$ . Afirmando que  $x$  es el límite de la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ . En efecto, fijemos  $\epsilon > 0$ ; luego, existe  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{1}{r+1} < \epsilon$ . Escojamos  $N = \max\{N_0, \dots, N_r\}$ . Entonces, para todo  $n \geq N$ ,  $d(x_n, x) \leq \frac{1}{r+1} < \epsilon$ .  $\square$

Adicionalmente, como veremos a continuación, el espacio de Cantor es compacto. Para ello, utilizaremos el hecho de que todo espacio métrico  $(X, d)$  es compacto si y solo si  $(X, d)$  es totalmente acotado y completo (véase <sup>5</sup>).

**Proposición 1.2.11.**  $2^{\mathbb{N}}$  es compacto.

*Demostración.* Mostremos que  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  es totalmente acotado. Dado  $\epsilon > 0$ , escojamos  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ . Sea  $X = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \forall i \geq n, x(i) = 0\}$ . Entonces,  $X$  es finito y  $2^{\mathbb{N}} = \bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$ . Esto muestra que  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  es totalmente acotado. Dado que  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  es completo, entonces  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  es compacto.  $\square$

Dado  $F \in \text{FIN}(\mathbb{N})$ , definamos  $B_F = \{A \subseteq \mathbb{N} : F \subseteq A\}$ . Entonces,  $\mathcal{B} = \{B_F : F \in \text{FIN}(\mathbb{N})\}$  es una base para una topología sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Considere la función  $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  por  $f(A) = \chi_A$ , donde  $\chi_A$  es la función característica de  $A$ . Dado que  $f$  es un homeomorfismo, podemos identificar familias de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  (por ejemplo, los ideales y los filtros), como subconjuntos del espacio de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$  con su topología producto. Este hecho será importante para los capítulos posteriores.

Finalizaremos esta sección con algunas funciones que serán usadas a lo largo de este trabajo. De ahora en adelante, denotaremos el espacio de Cantor por  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 1.2.12.** La función complementación  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , definida por  $f(X) = \mathcal{C} \setminus X$ , para todo  $X \subseteq \mathbb{N}$ , es un homeomorfismo.

*Demostración.* Sea  $s \in 2^{<\omega}$ . Entonces,  $f^{-1}(N_s) = N_t$ , donde  $t \in 2^{<\omega}$  es tal que,  $t(i) = 0$  si  $s(i) = 1$  y  $t(i) = 1$  si  $s(i) = 0$ . Esto muestra que  $f$  es continua.

Dado que  $\mathcal{C}$  es compacto, entonces  $A$  es compacto, para todo  $A \subseteq \mathcal{C}$  cerrado. Luego, por la continuidad de  $f$ ,  $f(A)$  es compacto. Por lo tanto,  $f(A)$  es cerrado, ya que  $\mathcal{C}$  es Hausdorff. Esto muestra que  $f$  es cerrada y, por consiguiente,  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$

---

<sup>5</sup> J. Munkres. *Topology*. Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series. Pearson, 2017.

**Proposición 1.2.13.** Dado  $F \in \text{FIN}(\mathbb{N})$ , definamos  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  por  $g(A) = A \Delta F$ . Entonces,  $g$  es un homeomorfismo.

Dada  $t \in 2^{<\omega}$ , denotaremos por  $\text{len } t$  a la longitud de  $t$ .

*Demostración.* Sea  $F \in \text{FIN}(\mathbb{N})$  y  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definida como en el enunciado de la proposición. Mostremos que  $g$  es continua. Sea  $t \in 2^{<\omega}$  y consideremos los siguientes casos.

I) *Caso*  $\text{len } F \leq \text{len } t$ . Definamos  $s: \text{dom } t \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$s(i) = \begin{cases} 1 - t(i), & i \in F; \\ t(i), & i \notin F. \end{cases}$$

Entonces,  $g^{-1}(N_t) = N_s$ .

II) *Caso*  $\text{len } t < \text{len } F$ . Fijemos  $x \in \mathcal{C}$  y definamos  $s_x: \text{dom } F \rightarrow 0, 1$  por

$$s(i) = \begin{cases} 1 - t(i), & i \in F \cap \text{dom } t; \\ t(i), & i \in \text{dom } t \setminus F; \\ x(i), & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por consiguiente,  $g^{-1}(N_t) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} N_{s_x}$ .

Lo anterior muestra que  $g$  es continua. Además, dado que  $\mathcal{C}$  es compacto y Hausdorff, entonces  $g$  es cerrada. Por lo tanto,  $g$  es un homeomorfismo.  $\square$

## 2. LA PROPIEDAD DE BAIRE EN IDEALES SOBRE $\mathbb{N}$

Este capítulo se centra en caracterizar los ideales principales sobre  $\mathbb{N}$  que tienen la propiedad de Baire: Teorema de Jalali-Naini & Talagrand. Adicionalmente, mostraremos algunas consecuencias de dicho resultado e introduciremos la noción de familias casi disjuntas. Nuestra guía serán <sup>6</sup> y <sup>7</sup>.

### 2.1. Categoría de Baire

Para definir que un conjunto tenga la propiedad de Baire, se necesita saber qué son los conjuntos magros y densos en ninguna parte.

**Definición 2.1.1.** Dado  $X$  un espacio topológico, diremos que  $A \subseteq X$  es **denso en ninguna parte** si  $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ .

**Observación 2.1.2.** Dado que  $X \setminus \text{int}(\overline{A}) = \overline{(X \setminus A)}$ , un conjunto  $A$  es denso en ninguna parte si, y solo si, el complemento de su clausura es denso.

**Ejemplo 2.1.3.** Consideremos  $\mathbb{R}$  con su topología usual. Entonces  $\mathbb{Q}$  no es denso en ninguna parte pues  $\text{int}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.1.4.**  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  es denso en ninguna parte.

**Ejemplo 2.1.5.** El conjunto ternario de Cantor es denso en ninguna parte en  $[0, 1]$ .

**Ejemplo 2.1.6.** En todo espacio sin puntos aislados y Hausdorff, los conjuntos unipuntuales son densos en ninguna parte.

**Proposición 2.1.7.** Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces  $A \subseteq X$  es denso en ninguna parte si, y solamente si, para todo abierto no vacío  $V$  de  $X$ , existe un abierto no vacío  $U \subseteq V$  tal que  $U \cap A = \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es denso en ninguna parte. Entonces,  $X \setminus \overline{A}$  es denso. Dado  $V \subseteq X$  abierto no vacío, tenemos que  $(X \setminus \overline{A}) \cap V \neq \emptyset$ . Basta escoger  $U = (X \setminus \overline{A}) \cap V$ .

---

<sup>6</sup> Anush Tserunyan. «Introduction to descriptive set theory». En: *Preprint* (2016).

<sup>7</sup> Carlos Uzcátegui Aylwin y Carlos Augusto Di Prisco. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes, 2020.

Recíprocamente, veamos que  $X \setminus \bar{A}$  es denso. Sea  $V \subseteq X$  abierto no vacío. Por hipótesis, existe  $U \subseteq V$  abierto no vacío tal que  $U \cap A = \emptyset$ . Escojamos  $a \in U \cap (X \setminus A)$ , entonces  $U \cap A \setminus \{a\} = \emptyset$ . Por consiguiente,  $a$  no es punto de acumulación de  $A$ . Esto muestra que  $a \in V \cap (X \setminus \bar{A})$ .  $\square$

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $A, U \subseteq X$ .*

- a)  *$A$  es denso en ninguna parte si, y solo si,  $\bar{A}$  es denso en ninguna parte.*
- b) *Si  $U$  es abierto, entonces  $\partial U$  es cerrado y denso en ninguna parte.*
- c) *Si  $U$  es abierto denso, entonces  $X \setminus U$  es denso en ninguna parte.*
- d) *Los subconjuntos de  $X$  densos en ninguna parte forman un ideal.*

*Demostración.* a) Es directo pues  $\text{int}\bar{A} = \overline{\text{int}A}$ .

b) Se tiene inmediato por la Observación 2.1.2.

c) Dado que  $U$  es abierto, entonces  $\partial U = \bar{U} \cap (X \setminus U)$ . Así,  $\partial U$  es disjunto de  $U$ . Si suponemos que  $\text{int}\partial U$  es no vacío, existe un abierto no vacío  $V \subseteq X$  tal que  $V$  intersecta a  $U$ . Esto implica que  $\partial U \cap U \neq \emptyset$ , una contradicción.

d) Denotemos por  $\text{NWD}(X)$  a los subconjuntos de  $X$  que son densos en ninguna parte. Claramente  $\emptyset \in \text{NWD}(X)$ . Supongamos que  $A, B \in \text{NWD}(X)$  y sea  $V$  un abierto no vacío de  $X$ . Por la Proposición 2.1.7, existe  $U_1 \subseteq V$  abierto no vacío tal que  $U_1 \cap A = \emptyset$ . Aplicando nuevamente la Proposición 2.1.7, dado que  $B \in \text{NWD}(X)$ , existe un abierto no vacío  $U_2 \subseteq U_1$ , tal que  $U_2 \cap B = \emptyset$  y  $U_2 \cap A = \emptyset$ . Por lo tanto,  $U_2 \subseteq V$  y  $U_2 \cap (A \cup B) = \emptyset$ , es decir,  $A \cup B \in \text{NWD}(X)$ .  $\square$

**Definición 2.1.9.** *Dado  $X$  un espacio topológico, diremos que  $A \subseteq X$  es un conjunto **magro (o de primera categoría)** si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Si  $A$  no es magro, decimos que  $A$  es **de segunda categoría**. Si  $X \setminus A$  es magro, diremos que  $A$  es **comagro**.*

**Definición 2.1.10.** *Un  $\sigma$ -ideal sobre un conjunto  $X$  es un ideal que es cerrado bajo uniones numerables.*

**Ejemplo 2.1.11.** Los subconjuntos magros de  $X$ , que denotaremos por  $\text{MGR}(X)$ , son un  $\sigma$ -ideal. Evidentemente,  $\emptyset \in \text{MGR}(X)$ . Ser cerrado bajo uniones numerables es una consecuencia del hecho de que la unión numerable de una unión numerable resulta una unión numerable.

Por último, si  $B \in \text{MGR}(X)$ , entonces  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ , donde  $V_n \in \text{NWD}(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por consiguiente, dado  $A \subseteq B$ , como  $V_n \cap A \in \text{NWD}(X)$ , se sigue que  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \cap A)$  es magro.

El ejemplo anterior muestra que la familia dual de subconjuntos comagros de  $X$  es un filtro cerrado bajo intersecciones numerables.

¿Bajo qué condiciones las propiedades de ser denso en ninguna parte y ser magro se pueden relativizar? Dicho de otro modo, ¿bajo qué condiciones dichas propiedades se preservan en subespacios? Si  $Y \subseteq X$  es un subespacio y  $U \in \text{NWD}(Y)$  (respectivamente  $\in \text{MGR}(Y)$ ), entonces  $U \in \text{NWD}(X)$  (respectivamente  $\in \text{MGR}(X)$ ). ¿Es cierto el recíproco? No es difícil mostrar que si  $Y$  es abierto, entonces el recíproco es cierto.

Los siguientes resultados nos serán bastante útiles en los capítulos posteriores.

**Proposición 2.1.12.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \in \text{MGR}(X)$ . Entonces, existe una sucesión creciente de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte,  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ .

*Demostración.* Por hipótesis,  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ , donde  $V_n$  es denso en ninguna parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $F_0 = V_0$  y supongamos que hemos construido  $F_0, \dots, F_n$ . La prueba se sigue definiendo  $F_{n+1} = F_n \cup \overline{V_{n+1}}$ .  $\square$

**Proposición 2.1.13.** Sea  $X$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (a) Todo abierto no vacío de  $X$  no es magro.
- (b) Todo comagro en  $X$  es denso.
- (c) La intersección numerable de abiertos densos en  $X$  es un conjunto denso.

*Demostración.* (a)  $\implies$  (b). Sea  $V \in \text{MGR}(X)$ . Por hipótesis,  $\text{int}(X \setminus V) = \emptyset$ , luego  $V$  es denso.

(b)  $\implies$  (c). Sea  $U_n$  abierto denso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Veamos que  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  es denso. Por la Proposición 2.1.8,  $X \setminus U_n$  es denso en ninguna parte. Por lo tanto,  $X \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus U_n)$  es magro, es decir,  $A$  es comagro. Por hipótesis, se sigue que  $A$  es denso.

(c)  $\implies$  (a). Razonemos por contradicción. Sea  $U \subseteq X$  un abierto no vacío y magro. Así,

$$X \setminus U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus V_n) \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \overline{V_n}) = A.$$

Dado que  $X \setminus \overline{V_n}$  es abierto denso, entonces  $A$  es denso. Luego,  $U \cap A \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $(X \setminus U) \cap U \neq \emptyset$ , una contradicción.  $\square$

**Definición 2.1.14.** *Un espacio topológico  $X$  es llamado **espacio Baire** si satisface alguna de las afirmaciones de la Proposición 2.1.13.*

**Proposición 2.1.15.** *Si  $X$  es un espacio Baire y  $U \subseteq X$  es abierto, entonces  $U$  es Baire.*

*Demostración.*  $V \in \text{MGR}(U)$  si, y solo si,  $V \in \text{MGR}(X)$ . La proposición se sigue inmediatamente ya que  $X$  es Baire.  $\square$

**Teorema 2.1.16.** *(Teorema de Categoría de Baire) Todo espacio completamente metrizable es Baire. Todo espacio localmente compacto Hausdorff es Baire.*

La prueba del Teorema de Categoría de Baire es un resultado clásico que aparece en muchos libros. Para ver la demostración se puede consultar <sup>8</sup>, por mencionar solo uno.

## 2.2. Una ley 0-1 topológica

**Definición 2.2.1.** *Dado un espacio topológico  $X$ , diremos que  $A \subseteq X$  tiene la **propiedad de Baire**, si existe un conjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \Delta U$  es magro.*

Una  $\sigma$ -**álgebra** sobre un conjunto no vacío  $X$  es una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  que es cerrada bajo complementación, uniones numerables y satisface que  $X \in \mathcal{A}$ . Denotaremos por  $\text{BP}(X)$  a los subconjuntos de  $X$  que tienen la propiedad de Baire.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico. La clase de conjuntos que tienen la propiedad de Baire es una  $\sigma$ -álgebra; además, es la más pequeña que contiene a los abiertos y a los conjuntos magros.*

---

<sup>8</sup> Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Springer Science & Business Media, 2012.

*Demostración.* En primer lugar, mostremos que  $BP(X)$  es una  $\sigma$ -álgebra. Es evidente que  $\emptyset \in BP(X)$ . Supongamos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $A_n$  tiene la propiedad de Baire. Entonces, existe  $U_n$  abierto tal que  $(A_n \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A_n)$  es magro, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Si escogemos  $A = \bigcup_n A_n$  y  $U = \bigcup_n U_n$ , tenemos que

$$A \Delta U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \Delta U_n).$$

Por el Ejemplo 2.1.11 concluimos que  $A$  tiene la propiedad de Baire.

Ahora, supongamos que  $A \in BP(X)$ . Luego,  $A \Delta U$  es magro, para algún abierto  $U$ . Por la Proposición 2.1.8,  $\partial U$  es denso en ninguna parte. Observemos que los conjuntos  $A \setminus \bar{U} \subseteq A \setminus U$  y  $\bar{U} \setminus A \subseteq \partial U \cup (U \setminus A)$  son magros. Por lo tanto,  $(X \setminus A) \Delta (X \setminus \bar{U}) = A \Delta \bar{U}$  es magro. Esto completa la prueba de que  $BP(X)$  es una  $\sigma$ -álgebra.

Los abiertos y los conjuntos magros tienen la propiedad de Baire, esto es consecuencia inmediata de la definición. Así que la prueba se concluye si demostramos la minimalidad de  $BP(X)$ . Sea  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra con dicha propiedad y tomemos  $A \in BP(X)$ . Entonces, existe un abierto  $U$  tal que  $A = M \Delta U$ , donde  $M$  es magro. Como  $\mathcal{A}$  es  $\sigma$ -álgebra, concluimos que  $A \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $BP(X) \subseteq \mathcal{A}$ .  $\square$

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $X$  un espacio Baire y  $A \subseteq X$ . Supongamos que  $A \in BP(X)$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a)  $A$  es comagro
- b) Para todo abierto no vacío  $V \subseteq X$ ,  $V \cap A$  no es magro.

*Demostración.* a)  $\implies$  b). Razonemos por contradicción. Supongamos que  $A$  es comagro, es decir,  $X \setminus A$  es magro y sea  $V \subseteq X$  abierto no vacío tal que,  $V \cap A$  es magro. Dado que  $V \setminus A \subseteq X \setminus A$ , entonces  $V \setminus A$  es magro. Por lo tanto,  $V = (V \setminus A) \cup (V \cap A)$  es magro. Esto implica que  $X$  no es Baire, una contradicción.

b)  $\implies$  a). Dado que  $A$  tiene la propiedad de Baire, entonces  $X \setminus A$  tiene la propiedad de Baire. Por consiguiente, si suponemos que  $X \setminus A$  no es magro, existe  $V \subseteq X$  abierto no vacío tal que  $(X \setminus A) \Delta V$  es magro. Esto implica que  $V \cap A$  es magro.  $\square$

**Definición 2.2.4.** *Diremos que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$  es **cerrado bajo cambios finitos**, o es un **conjunto cola**, si  $A \Delta F \in \mathcal{A}$  para todo  $F \subseteq \mathbb{N}$  finito y todo  $A \in \mathcal{A}$ .*

**Ejemplo 2.2.5.** Si  $\mathcal{I}$  es un ideal sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $\text{FIN}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}$ , entonces  $\mathcal{I}$  es cerrado bajo cambios finitos.

**Teorema 2.2.6** (Primera ley 0-1 topológica). Sea  $X$  un espacio Baire y  $G$  un grupo de autohomeomorfismos de  $X$  con la siguiente propiedad de homogeneidad: Si  $U, V$  son abiertos no vacíos en  $X$ , existe  $g \in G$  tal que  $g(U) \cap V \neq \emptyset$ . Supongamos que  $A \subseteq X$  es  $G$ -invariante (es decir,  $g(A) = A$  para cualquier  $g \in G$ ). Si  $A$  tiene la propiedad de Baire, entonces  $A$  es magro o comagro.

*Demostración.* Razonemos por contradicción. Supongamos que  $A$  no es magro ni comagro. Por la Proposición 2.2.3, existe un abierto no vacío  $V \subseteq X$ , tal que  $V \cap A$  es magro. De la definición de la propiedad de Baire, existe  $U \subseteq X$ , abierto no vacío, tal que  $U \setminus A$  es magro, es decir,  $A$  es magro en  $U$ . Por hipótesis,  $g(U) \cap V \neq \emptyset$ , para algún  $g \in G$ . Dado que  $g$  es un homeomorfismo y  $A$  es  $G$ -invariante, entonces  $A$  es magro en  $g(U)$ . Observemos que  $g(U) \cap V \subseteq (g(U) \setminus A) \cup (V \cap A)$ . Por lo tanto,  $g(U) \cap V$  es un abierto no vacío magro, una contradicción.  $\square$

**Corolario 2.2.7.** Si  $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$  es cerrado bajo cambios finitos y tiene la propiedad de Baire, entonces  $\mathcal{A}$  es magro o comagro.

*Demostración.* Definamos  $G = \{g_F : F \in \text{FIN}(\mathbb{N})\}$ , donde  $g_F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es el homeomorfismo definido por  $g_F(A) = A \Delta F$ , para todo  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $G$  tiene la propiedad de homogeneidad. En efecto, sean  $s, t \in 2^{<\omega}$  tales que  $N_s$  y  $N_t$  son no vacíos. Escojamos  $x \in N_s$  y consideremos los siguientes casos.

- I) **Caso**  $n = \text{len } s \leq \text{len } t = k$ . Definamos  $A = \{i \in \text{dom}(s) : s(i) \neq t(i)\}$  y  $B = \{i \in \text{dom}(t) : i \geq n \wedge x(i) \neq t(i)\}$ . Así,  $g_F(x) \in N_t$ , donde  $F = A \cup B$ . Por consiguiente,  $g_F(N_s) \cap N_t \neq \emptyset$ .
- II) **Caso**  $n > k$ . Definamos  $F = \{i \in \text{dom}(t) : s(i) \neq t(i)\}$ . Entonces,  $g_F(x) \in g_F(N_x) \cap N_t$ .

Es directo ver que  $\mathcal{A}$  es  $G$ -invariante. Por lo tanto, se sigue por el Teorema 2.2.6 que  $\mathcal{A}$  es magro o comagro.  $\square$

**Proposición 2.2.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Entonces,  $A \subseteq X$  es denso en ninguna parte si, y solo si,  $f(A)$  es denso en ninguna parte.

*Demostración.* Sea  $U \subseteq Y$  abierto no vacío. Dado que  $f$  es continua, entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto no vacío en  $X$ . Por la Proposición 2.1.7, existe  $W \subseteq f^{-1}(U)$  abierto no vacío, tal que  $W \cap A = \emptyset$ . Tomemos  $V = f(W)$ . Así,  $V \subseteq U$  es abierto no vacío y  $V \cap f(A) = \emptyset$ . Se sigue de la Proposición 2.1.7 que  $f(A)$  es denso en ninguna parte. El recíproco se prueba de manera análoga.  $\square$

**Corolario 2.2.9.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Entonces,  $A \subseteq X$  es magro si, y solo si,  $f(A)$  es magro.*

*Demostración.* Por hipótesis,  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  si, y solo si,  $f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(V_n)$ , donde  $V_n$  es denso en ninguna parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, por la proposición anterior,  $f(A)$  es magro.  $\square$

**Corolario 2.2.10.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Entonces,  $A \subseteq X$  tiene la propiedad de Baire si, y solo si,  $f(A)$  tiene la propiedad de Baire.*

*Demostración.* Por el corolario anterior, existe  $V \subseteq X$  abierto, tal que  $A \Delta V$  es magro en  $X$ , si y solo si  $f(A \Delta V) = f(A) \Delta f(V)$  es magro en  $Y$ . Por lo tanto,  $f(A)$  tiene la propiedad de Baire.  $\square$

### 2.3. Teorema de Jalali-Naini & Talagrand

La tarea de mostrar directamente que un ideal sobre  $\mathbb{N}$  es magro puede ser bastante complicada. En ocasiones, resulta más sencillo hallar una partición de  $\mathbb{N}$  en subconjuntos finitos que cumplan con ciertas condiciones. La manera de simplificar esta tarea es de lo que nos habla el teorema de esta sección. Por otra parte, la propiedad (c) en el teorema que sigue tiene consecuencias interesantes de carácter combinatorio (ver la Proposición 3.4.11).

**Teorema 2.3.1** (Jalali-Naini <sup>2</sup>, Talagrand <sup>1</sup>). *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal propio sobre  $\mathbb{N}$  que contiene todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire en  $2^{\mathbb{N}}$ .
- (b)  $\mathcal{I}$  es magro en  $2^{\mathbb{N}}$ .
- (c) Existe una sucesión estrictamente creciente de naturales  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que, para todo conjunto  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito,

$$\bigcup_{k \in M} [n_k, n_{k+1}) \notin \mathcal{I},$$

donde  $[n_k, n_{k+1})$  representa un intervalo de número naturales.

*Demostración.* (b)  $\implies$  (a). Es consecuencia de la Proposición 2.2.2. Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire. Por el Ejemplo 2.2.5 y el Corolario 2.2.7, tenemos que  $\mathcal{I}$  es magro o comagro. Supongamos que  $\mathcal{I}$  es comagro y sea  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definida por  $f(A) = \mathbb{N} \setminus A$ , para todo  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Dado que  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f(\mathcal{I})$  es comagro. Observemos que  $\mathcal{I} \cap f(\mathcal{I}) \neq \emptyset$  (caso contrario,  $\mathcal{I}$  sería magro y comagro). Luego, existe  $A \in \mathcal{I} \cap f(\mathcal{I})$ . Esto implica que  $A \in \mathcal{I}$  y  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto,  $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$ , una contradicción.

(c)  $\implies$  (b). Supongamos que existe una sucesión como en (c). Dado  $i \in \mathbb{N}$ , definamos  $Z_i = \{A \in \mathcal{C} : \forall k \geq i [n_k, n_{k+1}) \not\subseteq A\}$ . Así,  $\mathcal{I} \subseteq \bigcup_i Z_i$ . Caso contrario, si  $A \in \mathcal{I} \setminus \bigcup_i Z_i$ , entonces para todo  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $k(i) \geq i$ , tal que  $[n_{k(i)}, n_{k(i)+1}) \subseteq A$ . Si escogemos  $M = \{k(i) : i \in \mathbb{N}\}$ , por hipótesis tenemos que  $\bigcup_{k \in M} [n_k, n_{k+1}) \in \mathcal{I}$ , un absurdo. Sea  $U_k = \{A \in \mathcal{C} : [n_k, n_{k+1}) \not\subseteq A\}$ . Dado  $\alpha \in \mathcal{C} \setminus U_k$ , escojamos  $s = \alpha \upharpoonright (n_{k+1} + 1)$ . Entonces,  $\alpha \in U_s \subseteq \mathcal{C} \setminus U_k$ , lo cual muestra que  $U_k$  es cerrado, para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Es directo ver que  $Z_i = \bigcap_{k \geq i} U_k$ . Luego, basta demostrar que  $Z_i$  tiene interior vacío. Sea  $s \in 2^{<\omega}$  y definamos  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$\alpha(i) = \begin{cases} s(i), & i \in \text{dom}(s); \\ 1, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,  $\alpha \in U_s \setminus Z_i$ , así que  $Z_i$  es denso en ninguna parte y por consiguiente  $\mathcal{I}$  es magro.

(b)  $\implies$  (c). Dado que  $\mathcal{I}$  es magro, existe una sucesión  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  como en la Proposición 2.1.12 tal que  $\mathcal{I} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} F_n$ . Supongamos que hemos construido dos sucesiones  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\{s_k\}_{k \geq 1}$  en  $\mathbb{N}$  y  $2^{<\omega}$ , respectivamente, que satisfacen lo siguiente:

- (I)  $\text{dom}(s_k) \subseteq [n_{k-1}, n_k)$  y
- (II)  $N_{s_k} \cap F_k = \emptyset$ , para todo  $k \geq 1$ .

Sea  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito,  $A = \bigcup_{k \in M} [n_k, n_{k+1})$  y supongamos que  $A \in \mathcal{I}$ . Si  $A' = \bigcup_{k \in M} s_k^{-1}(1)$ , por (I), tenemos que  $A' \subseteq A$  y en consecuencia,  $A' \in \mathcal{I}$ . Por consiguiente, existe  $k' \in \mathbb{N}$  tal que  $A' \in F_{k'}$ . Dado que  $M$  es infinito, podemos escoger  $k \in M$ , con  $k > k'$  tal que  $A' \in F_k$ , pues  $F_{k'} \subseteq F_k$ . Observemos que  $s_k(i) = 1 \iff i \in A' \iff \chi_{A'}(i) = 1$ , donde  $\chi_{A'}$  es la

función característica de  $A'$ . Por lo tanto,  $\chi_{A'} \in N_{s_k}$ . De (II), concluimos que  $\chi_{A'} \notin F_k$ , un absurdo. Esto muestra que  $A \notin \mathcal{I}$ .

Ahora, garanticemos la existencia de las sucesiones  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\{s_k\}_{k \geq 1}$ . Tomemos  $n_0 = 0$ . Dado que  $F_1$  es denso en ninguna parte, entonces  $\mathcal{C} \setminus F_1$  es denso y abierto. Por consiguiente, existe  $s_1 \in 2^{<\omega}$ , tal que  $N_{s_1} \cap F_1 = \emptyset$ . Escojamos  $n_1$  como un número natural mayor que  $\max(\text{dom}(s_1))$ . Asumamos que hemos construido  $n_0, \dots, n_k$  y  $s_1, \dots, s_k$ . Sea  $\{x_i : 1 \leq i \leq 2^{n_k}\}$  una enumeración de  $2^{n_k}$ . Nuestro objetivo será definir  $t_i \in 2^{<\omega}$  de tal manera que

$$\text{a) } (n_k \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) \cap D_i = \emptyset \text{ y}$$

$$\text{b) } N_{t_i^*} \cap F_{k+1} = \emptyset,$$

donde  $D_i = \text{dom}(t_i)$  y  $t_i^* = x_i \cup t_1 \cup \dots \cup t_i$ , para todo  $i = 1, \dots, 2^{n_k}$ . Dado que  $F_{k+1}$  es denso en ninguna parte, entonces  $\mathcal{C} \setminus F_{k+1}$  es denso y abierto. Así, existe  $r_1 \in 2^{<\omega}$ , tal que  $N_{r_1} \subseteq N_{x_1} \cap (\mathcal{C} \setminus F_{k+1})$ . Luego,  $x_1 \preceq r_1$  y  $N_{r_1} \cap F_{k+1} = \emptyset$ . Tomemos  $t_1 = r_1 \setminus x_1$ . De manera similar, existe  $r_2 \succeq x_2 \cup t_1$ , tal que  $N_{r_2} \cap F_{k+1} = \emptyset$ , lo cual permite definir  $t_2 = r_2 \setminus (x_2 \cup t_1)$ . En general, existe  $t_i = r_i \setminus (x_i \cup t_1 \cup \dots \cup t_{i-1})$ , donde  $r_i \succeq x_i \cup t_1 \cup \dots \cup t_{i-1}$  es tal que  $N_{r_i} \cap F_{k+1} = \emptyset$ .

Sea  $n_{k+1} = \max(n_k \cup D_1 \cup \dots \cup D_{2^{n_k}})$  y  $s_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{2^{n_k}} t_j$ . Afirmamos que, si  $\alpha \in N_{s_{k+1}}$ , entonces  $\alpha \notin F_{k+1}$ . En efecto, sea  $x = \alpha \upharpoonright n_k$ , luego, existe  $i \leq 2^{n_k}$ , tal que  $x = x_i$ . Por consiguiente,  $\alpha \in N_{t_i^*}$ , y por b),  $\alpha \notin F_{k+1}$ . Esto completa la prueba. □

## 2.4. Existencia de familias $\mathcal{I}$ -casi disjuntas

En esta sección veremos cómo podemos generalizar el Teorema 2.3.1 a ideales sobre un conjunto numerable  $X$ , junto con algunas aplicaciones. En particular, mostraremos la existencia de familias  $\mathcal{I}$ -casi disjuntas de tamaño el continuo, donde  $\mathcal{I}$  es un ideal sobre  $\mathbb{N}$  magro.

**Proposición 2.4.1.** *Un ultrafiltro no principal sobre  $\mathbb{N}$  no tiene la propiedad de Baire.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro no principal sobre  $\mathbb{N}$ . Definamos  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , por  $f(A) = \mathbb{N} \setminus A$ , para todo  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Observemos que  $\mathcal{I} = f(\mathcal{U})$  es el ideal dual de  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  no es principal,  $\mathcal{I}$  contiene todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . Sea  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de números naturales. Dado que  $\mathcal{U}$  es ultrafiltro, entonces  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [n_{2k}, n_{2k+1}) \in \mathcal{I}$

o  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [n_{2k+1}, n_{2k+2}) \in \mathcal{I}$ , es decir, en cualquier caso podemos hallar un conjunto infinito  $M \subseteq \mathbb{N}$  para el cual la condición (c) del Teorema 2.3.1 no se satisface. Por consiguiente,  $\mathcal{I}$  no tiene la propiedad de Baire y como  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $\mathcal{U}$  no tiene la propiedad de Baire.  $\square$

Podemos generalizar el Teorema 2.3.1 para ideales sobre un conjunto numerable, como lo menciona el siguiente teorema. Denotaremos por  $\text{FIN}(X)$  al conjunto de los subconjuntos finitos de  $X$ .

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal propio sobre un conjunto numerable  $X$  tal que  $\text{FIN}(X) \subseteq \mathcal{I}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a)  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire en  $2^X$ .
- b)  $\mathcal{I}$  es magro.
- c) Existe una partición  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $X$  en subconjuntos finitos, tal que, para todo  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito,

$$\bigcup_{k \in M} F_k \notin \mathcal{I}.$$

*Demostración.* b)  $\implies$  a). Es consecuencia de la Proposición 2.2.2.

Fijemos  $g: X \rightarrow \mathbb{N}$  una función biyectiva y  $f: 2^X \rightarrow \mathcal{C}$  una función dada por  $f(A) = g(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ . Observemos que  $f$  es un homeomorfismo.

a)  $\implies$  b). Supongamos que  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire en  $2^X$ . Dado que  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f(\mathcal{I})$  tiene la propiedad de Baire en  $\mathcal{C}$ , así que por el Teorema 2.3.1,  $f(\mathcal{I})$  es magro en  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{I}$  es magro en  $2^X$ .

c)  $\implies$  b). Sea  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una partición de  $X$  como en c). Construiremos una sucesión estrictamente creciente  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  para poder aplicar el Teorema 2.3.1. Definamos  $n_0 = \min g(F_0)$  y  $n_1 = \max g(F_1)$ . Escogiendo  $m_2 > n_1$ , existe  $j_2 \in \mathbb{N}$ , tal que  $m_2 \in g(F_{j_2})$ . Tomemos  $n_2 = \max g(F_{j_2})$  y asumamos que hemos construido  $n_0, \dots, n_k$ . Dado  $m_{k+1} > n_k$ , existe  $j_{k+1}$  tal que  $m_{k+1} \in g(F_{j_{k+1}})$ . Definamos  $n_{k+1} = \max g(F_{j_{k+1}})$ . Afirmamos que, para todo  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito,  $A = \bigcup_{k \in M} [n_k, n_{k+1}) \notin f(\mathcal{I})$ . Supongamos que esto no es cierto. Entonces, existe  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tal que  $B = g^{-1}(A)$ , para algún  $B \in \mathcal{I}$ . Así,  $B = \bigcup_{k \in M} g^{-1}([n_k, n_{k+1})) \supseteq \bigcup_{k \in M} F_k$ , lo cual implica que  $\bigcup_{k \in M} F_k \in \mathcal{I}$ , un absurdo. Por el Teorema 2.3.1,  $f(\mathcal{I})$  es magro en  $\mathcal{C}$  y por lo tanto,  $\mathcal{I}$  es magro en  $2^X$ .

b)  $\implies$  c) Supongamos que  $\mathcal{I}$  es magro en  $X$ . Dado que  $f(\mathcal{I})$  es magro en  $\mathcal{C}$ , existe una sucesión estrictamente creciente  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , como en el Teorema 2.3.1. Definamos  $F_k = g^{-1}([n_k, n_{k+1}))$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Es directo ver que  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una partición de  $X$ . Afirmamos que  $\bigcup_{k \in M} F_k \notin \mathcal{I}$ , para todo  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito. Supongamos que no. Entonces,  $A = \bigcup_{k \in M} F_k \in \mathcal{I}$ , para algún  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito. Esto implica que  $\bigcup_{k \in M} [n_k, n_{k+1}) \in f(\mathcal{I})$ , lo cual es una contradicción. Esto completa la prueba.  $\square$

**Ejemplo 2.4.3.** El ideal  $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} A \cap (\{n\} \times \mathbb{N}) \text{ es finito}\}$  sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tiene la propiedad de Baire en  $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ .

En efecto, definamos  $F_k = \{(k - i, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \in k + 1\}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $A = \bigcup_{k \in M} F_k$ . Entonces,  $A \cap (\{0\} \times \mathbb{N})$  es infinito. Así,  $A \notin \mathcal{I}$ . Es inmediato ver que  $\text{FIN}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}$ ; luego, se sigue del Teorema 2.4.2 que  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire en  $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ .

Denotaremos por  $[X]^\infty$  al conjunto de los subconjuntos infinitos de  $X$ . Dado  $\mathcal{I}$  un ideal sobre un conjunto numerable  $X$ , para el cual  $\text{FIN}(X) \subseteq \mathcal{I}$ , diremos que  $\mathcal{I}$  tiene la **propiedad de Fréchet** si para todo  $A \subseteq X$  con  $A \notin \mathcal{I}$ , existe  $B \subseteq A$  infinito tal que,  $[B]^\infty \cap \mathcal{I} = \emptyset$ .

**Ejemplo 2.4.4.** Sea  $\mathcal{I}$  el ideal del Ejemplo 2.4.3. Entonces  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Fréchet.

Sea  $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $A \notin \mathcal{I}$ . Entonces,  $A \cap (\{n\} \times \mathbb{N})$  es infinito, para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Es suficiente escoger  $B = A \cap (\{n\} \times \mathbb{N})$ .

**Proposición 2.4.5.** Todo ideal propio con la propiedad de Fréchet tiene la propiedad de Baire.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $X$  con la propiedad de Fréchet. Escojamos  $A \notin \mathcal{I}$ . Por definición, existe  $B \subseteq A$  infinito, tal que  $[B]^\infty \cap \mathcal{I} = \emptyset$ . Sea  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una partición en subconjuntos finitos de  $X \setminus B$  y  $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$  una enumeración de  $B$ . Definamos  $F_k = G_k \cup \{b_k\}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Observemos que  $\{F_k\}$  es una partición de  $X$  en subconjuntos finitos. Además, dado  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito,  $Y = \bigcup_{k \in M} F_k \notin \mathcal{I}$ . En efecto, supongamos que existe  $M \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tal que  $Y \in \mathcal{I}$ . Así,  $\bigcup_{k \in M} \{b_k\} \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto,  $[B]^\infty \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ , una contradicción. Se sigue del Teorema 2.4.2 que  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de Baire.  $\square$

**Definición 2.4.6.** Diremos que dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **casi disjuntos** si  $A \cap B$  es finito. Una colección de conjuntos infinitos  $\{A_i : i \in I\}$  es una **familia casi disjunta** si  $A_i$  y  $A_j$  son casi disjuntos, para cada  $i \neq j$ .

A Sierpinski se le atribuye la existencia de familias casi disjuntas de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  del tamaño del continuo. Antes de presentar dicho resultado, veamos que las familias casi disjuntas se preservan bajo imágenes inversas de funciones biyectivas.

**Lema 2.4.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función biyectiva. Entonces,  $\{A_i : i \in I\}$  es una familia casi disjunta sobre  $X$ , si y solo si  $\{f(A_i) : i \in I\}$  es una familia casi disjunta sobre  $Y$ .

*Demostración.* Sean  $i, j \in I$  distintos. Dado que  $A_i \cap A_j$  es finito y  $f$  es biyectiva, entonces  $f(A_i \cap A_j) = f(A_i) \cap f(A_j)$  es finito. Por lo tanto,  $\{f(A_i) : i \in I\}$  es casi disjunta. El recíproco se prueba de forma análoga.  $\square$

**Teorema 2.4.8** (Sierpiński<sup>9</sup>). Existen familias casi disjuntas de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  de la cardinalidad del continuo.

*Demostración.* Sea  $2^{<\omega}$  el conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos. Definamos  $A_x = \{x \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}$ , para todo  $x \in 2^{\mathbb{N}}$ . Entonces,  $\{A_x : x \in 2^{\mathbb{N}}\}$  es una familia casi disjunta de subconjuntos de  $2^{<\omega}$ . En efecto, dados  $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$  diferentes, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) \neq y(n)$ . El conjunto  $A_x \cap A_y$  no tiene sucesiones de longitud mayor que  $n$ . Caso contrario,  $x(n) = y(n)$ . Así,  $A_x \cap A_y$  es finito. Por consiguiente,  $\{A_x : x \in 2^{\mathbb{N}}\}$  es casi disjunta. Dado que  $2^{<\omega}$  es numerable, existe una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow 2^{<\omega}$  biyectiva. La prueba se sigue por el Lema 2.4.7.  $\square$

La anterior prueba no corresponde con la original dada por Sierpiński. De hecho, existen más pruebas de este resultado. El lector interesado puede consultar<sup>10</sup>.

**Corolario 2.4.9.** Dado  $m \in \mathbb{N}$ , existe una familia de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  casi disjunta y del tamaño del continuo cuyos elementos contienen números naturales mayores que  $m$ .

*Demostración.* Sea  $m \in \mathbb{N}$  y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia como en el Teorema 2.4.8. Definamos  $B_i = A_i \setminus \{n \in A_i : n \leq m\}$ , para todo  $i \in I$ . Entonces,  $\{B_i : i \in I\}$  es la familia deseada.  $\square$

<sup>9</sup> Waclaw Sierpiński. «Sur une décomposition d'ensembles». En: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 35 (1928), págs. 239-242.

<sup>10</sup> Stefan Geschke. «Almost disjoint and independent families (Aspects of Descriptive Set Theory)». En: *Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University* 1790 (2012), págs. 1-9.

Podemos generalizar el concepto de familia casi disjunta como se muestra a continuación.

**Definición 2.4.10.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $X$ . Diremos que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$  es una familia  $\mathcal{I}$ -casi disjunta si  $A \cap B \in \mathcal{I}$ , para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ .*

Observemos que cuando  $\mathcal{I} = \text{FIN}(X)$ , entonces la definición anterior coincide con la de familia casi disjunta. Adicionalmente, existen familias  $\mathcal{I}$ -casi disjuntas de tamaño  $2^{\aleph_0}$ , como consecuencia del Teorema 2.3.1.

**Proposición 2.4.11.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $\text{FIN}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}$ . Si  $\mathcal{I}$  es magro, entonces existe una familia  $\mathcal{I}$ -casi disjunta del tamaño del continuo.*

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{I}$  es magro, existe una sucesión  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  como en el Teorema 2.3.1. Sea  $\mathcal{A}'$  una familia casi disjunta de subconjuntos de naturales de tamaño el continuo. Definamos  $\mathcal{A} = \{\bigcup_{k \in A} [n_k, n_{k+1}) : A \in \mathcal{A}'\}$ . Afirmamos que  $\mathcal{A}$  es la familia que queremos. Observemos que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+$  es consecuencia inmediata del Teorema de Jalali-Naini & Talagrand. Sean  $X_A, X_B \in \mathcal{A}$ , para algunos  $A, B \in \mathcal{A}'$  y  $X = \bigcup_{k \in A \cap B} [n_k, n_{k+1})$ . Mostremos que  $X_A \cap X_B = X$ . Basta probar que  $X_A \cap X_B \subseteq X$ . Fijemos  $x \in X_A \cap X_B$ . Entonces, existen  $m \in A$  y  $r \in B$  tal que  $x \in [n_m, n_{m+1}) \cap [n_r, n_{r+1})$ . Si  $m < r$  o  $r < m$ ,  $[n_m, n_{m+1}) \cap [n_r, n_{r+1}) = \emptyset$ . Por consiguiente,  $m = r$  y  $x \in X$ . Dado que  $A \cap B$  es finito, se sigue que  $X$  es finito y, por lo tanto,  $X \in \mathcal{I}$ .

□

### 3. INTERSECCIÓN DE ULTRAFILTROS LIBRES

El objetivo de este capítulo es demostrar un teorema de Plewik <sup>3</sup> que dice que la unión e intersección de menos del continuo de ultrafiltros libres no tiene la propiedad de Baire. Dado que todo filtro se puede escribir como intersección de ultrafiltros, la siguiente proposición nos dice que si queremos encontrar un filtro con la propiedad de Baire, debemos considerar una familia de tamaño mayor o igual al continuo.

**Proposición 3.0.1.** *Todo filtro es igual a la intersección de una familia de ultrafiltros.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $S$ . Definamos

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S) : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro sobre } S \text{ y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}.$$

Afirmamos que  $\bigcap \mathcal{L} = \mathcal{F}$ . Claramente,  $\mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{L}$ . Así que basta probar que  $\bigcap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ . Sea  $A \in (\bigcap \mathcal{L}) \setminus \mathcal{F}$ . Definamos  $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{S \setminus A\}$ . Entonces,  $\mathcal{G}$  tiene la PIF. Fijemos  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  y mostremos que  $F_1 \cap \dots \cap F_n \cap (S \setminus A) \neq \emptyset$ . Si  $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$ , tenemos que  $F \in \mathcal{F}$ . Supongamos que  $F \cap (S \setminus A) = \emptyset$ . Así,  $F \subseteq A$ , lo cual implica que  $A \in \mathcal{F}$ , una contradicción. Esto muestra que  $\mathcal{G}$  tiene la PIF. Por el Lema 1.1.8, existe un filtro  $\mathcal{F}'$  que extiende a  $\mathcal{G}$ , luego, se sigue del Teorema 1.1.11 que  $\mathcal{F}'$  está contenido en algún ultrafiltro sobre  $S$ . Por consiguiente,  $A \notin \bigcap \mathcal{L}$ , un absurdo.  $\square$

#### 3.1. Propiedades de la función $S$

Definamos  $S: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  por

$$S(V) = \sum_{n \in V} 2^{-(n+1)},$$

para todo  $V \subseteq \mathbb{N}$ . Antes de enunciar algunas propiedades de  $S$ , veamos como esta función actúa sobre ciertos subconjuntos de  $\mathcal{C}$ . En lo que resta, consideraremos a  $\mathcal{C}$  y  $[0, 1]$  con sus topologías usuales.

**Ejemplo 3.1.1.**  $S(N_t) = [S(t), S(t) + 2^{-(\max t + 1)}]$ , para todo  $t \in 2^{<\omega}$ . Además,  $S(N_t \cap [\mathbb{N}]^\infty) = (S(t), S(t) + 2^{-(\max t + 1)}]$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $m \in \mathbb{N}$  y consideremos el filtro principal  $\mathcal{F}$  generado por  $m$ . Entonces,  $S(\mathcal{F}) = [2^{-(m+1)}, 1]$ . Más aún, supongamos que  $\mathcal{F}$  es un filtro principal. Así, existe  $A \subseteq$

$\mathbb{N}$  tal que,  $A \subseteq X$ , para todo  $X \in \mathcal{F}$ . Por lo tanto,  $S(\mathcal{F}) = \bigcap_{n \in A} \{S(X) : n \in X\} = \bigcap_{n \in A} [2^{-(n+1)}, 1] = [2^{-(m+1)}, 1]$ , donde  $m = \min A$ .

**Ejemplo 3.1.3.** Si  $x$  es un subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , entonces existe  $x'$  infinito tal que  $S(x) = S(x')$ . Denotemos  $m = \max\{k : x(k) = 1\}$ . Es suficiente con definir  $x' \in \mathcal{C}$  por

$$x'(i) = \begin{cases} x(i), & i < m, \\ 0, & i = m, \\ 1, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

**Proposición 3.1.4.** La función  $S$  es sobreyectiva. Si restringimos  $S$  a los subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ , entonces  $S$  es inyectiva.

*Demostración.* Para mostrar que  $S$  es sobreyectiva consideremos el siguiente algoritmo.

1. Tomemos  $y \in [0, 1]$
2. Multipliquemos a  $y$  por 2.
3. Almacenemos  $\lfloor 2y \rfloor$  como el siguiente bit de la expansión binaria.
4. Actualicemos  $y$  a  $2y - \lfloor y \rfloor$ .
5. Si  $2y - \lfloor y \rfloor = 0$  o se repite un patrón, entonces terminamos.

El anterior algoritmo nos proporciona un método para escribir a  $y$  en expansión binaria. Se puede demostrar que el paso 3 del algoritmo nos genera una sucesión de ceros y unos,  $\{b_k\}_{k \geq 1}$ , de tal manera que  $y = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^k}$ . Para todo  $k \geq 1$ , definamos  $x_k = b_k - 1$ . Entonces,  $x = x_1x_2x_3 \cdots$  satisface que  $S(x) = y$ . Esto muestra que  $S$  es sobreyectiva.

Sea  $G$  el conjunto de sucesiones en el espacio de Cantor que tienen infinitos ceros y infinitos unos, es decir,  $G$  representa los subconjuntos infinitos de números naturales. Mostremos que  $S$  es inyectiva en  $G$ . Fijemos  $x, y \in G$  tal que  $x \neq y$ . Escojamos  $i$  como el mínimo natural en el que difieren  $x$  y  $y$ . Sean  $a = S(x \cap \mathbb{N} \setminus \{0\})$  y  $b = S(y \cap \mathbb{N} \setminus \{0\})$ . Si  $a \neq b$ , entonces inmediatamente  $S(x) \neq S(y)$ . Si por el contrario,  $a = b$ , entonces,  $S(x) \neq S(y)$  pues  $x(i) \neq y(i)$ . Por lo tanto  $S$  restringida a  $G$  es inyectiva. □

**Proposición 3.1.5.**  $S$  es continua.

*Demostración.* Sea  $U \subseteq [0, 1]$  abierto. Para cada  $p \in U$ , existe  $\epsilon_p > 0$  tal que  $(p - \epsilon_p, p + \epsilon_p) \subseteq U$ . Escojamos  $k_p \in \mathbb{N}$  y  $V_p \subseteq \mathbb{N}$  de tal manera que  $2^{-(k_p+1)} < \epsilon_p$  y  $S(V_p) = p$ . Definamos  $t_p: k_p \rightarrow 2$  por

$$t_p(i) = \begin{cases} 1, & i \in V_p \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad \forall i \in k_p.$$

Observemos que,

$$S(V) = \sum_{n \in V \cap k_p} 2^{-(n+1)} + \sum_{n \geq k_p} 2^{-(n+1)}, \text{ para todo } V \subseteq \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |S(V) - p| &= \left| \sum_{n \in V, n \geq k_p} 2^{-(n+1)} - \sum_{n \in V_p, n \geq k_p} 2^{-(n+1)} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n \in V, n \geq k_p} 2^{-(n+1)} \right| + \left| \sum_{n \in V_p, n \geq k_p} 2^{-(n+1)} \right| \\ &= 2^{-k_p} + 2^{-k_p} \\ &< \frac{\epsilon_p}{2} + \frac{\epsilon_p}{2} = \epsilon_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $S^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} N_{t_p}$ . El mismo argumento de la prueba sirve para mostrar los casos  $0 \in U$  y  $1 \in U$ .  $\square$

**Observación 3.1.6.** Si tenemos un espacio topológico  $X$ ,  $G \subseteq X$  denso y  $U \subseteq X$  abierto no vacío. Entonces,  $G$  es denso en  $U$ .

**Lema 3.1.7.** Sea  $G$  los elementos del espacio de Cantor que tienen infinitos ceros e infinitos unos. Entonces,

1.  $G$  es  $G_\delta$  denso.
2. Dado  $U$  abierto en  $[0, 1]$  con  $U \subseteq \overline{S(A)}$ , entonces  $S^{-1}(U) \cap G \subseteq \overline{A}$ .

*Demostración.* Es inmediato ver que  $G$  es denso, pues todo abierto básico del espacio de Cantor tiene elementos con infinitos ceros e infinitos unos. Para ver que  $G$  es  $G_\delta$ , mostremos que  $\mathcal{C} \setminus G$  es  $F_\sigma$ . Sea  $B$  el conjunto de los subconjuntos cofinitos de  $\mathbb{N}$ .

Observemos que,  $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$  y  $\text{FIN}(\mathbb{N}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ , con  $F_i = \{x \in \mathcal{C} : \forall k \geq i \ x(k) = 0\}$  y  $M_i = \{x \in \mathcal{C} : \forall k \geq i \ x(k) = 1\}$  conjuntos cerrados, para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\mathcal{C} \setminus G = B \cup \text{FIN}(\mathbb{N})$ , se sigue que  $\mathcal{C} \setminus G$  es  $F_\sigma$ .

Supongamos que  $U \subseteq [0, 1]$  es un abierto tal que  $U \subseteq \overline{S(A)}$ . Sea  $x \in S^{-1}(U) \cap G$ . Entonces,  $S(x) \in \overline{A}$ , es decir, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $A$  tal que,  $\{S(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $S(x)$ . Afirmamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene límite  $x$ . Dado que  $\mathcal{C}$  es compacto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x'$ . Por la continuidad de  $S$ ,  $S(x_n) \rightarrow S(x') = S(x)$ , ya que  $[0, 1]$  es Hausdorff. Veamos que  $x'$  no puede ser finito. Si este fuera el caso,  $S(x) \neq S(x')$ , ya que  $x$  no contiene al máximo de  $x'$ . Esto muestra que  $x' \in G$ . Por lo tanto,  $x = x'$ , y concluimos que  $S^{-1}(U) \cap G \subseteq \overline{A}$ . □

**Proposición 3.1.8.**  $A \subseteq \mathcal{C}$  es denso en ninguna parte si, y solo si,  $S(A) \subseteq [0, 1]$  es denso en ninguna parte.

*Demostración.* Asumamos que  $S(A) \notin \text{NWD}([0, 1])$ . Entonces, existe un abierto no vacío  $U$  tal que  $U \subseteq \overline{S(A)}$ . Dado que  $S$  es continua y sobreyectiva, entonces  $S^{-1}(U)$  es abierto y no vacío. Sea  $G$  como en el Lema 3.1.7. Como  $G$  es denso, se sigue por la observación anterior que,  $S^{-1}(U) \cap G$  es denso en  $S^{-1}(U)$ . En consecuencia, dado  $x \in S^{-1}(U)$  y  $V$  una vecindad de  $x$ ,  $V \cap S^{-1}(U) \cap G \neq \emptyset$ , esto es, existe  $y \in V \cap S^{-1}(U) \cap G \subseteq V \cap \overline{A}$ , pues  $S^{-1}(U) \cap G \subseteq \overline{A}$ . Por lo tanto,  $V \cap A \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $x \in \overline{A}$ . Esto muestra que  $S^{-1}(U) \subseteq \overline{A}$ , es decir,  $A$  no es denso en ninguna parte.

Recíprocamente, supongamos que  $A$  no es denso en ninguna parte. Por consiguiente, existe  $t \in 2^{<\omega}$  tal que  $N_t \subseteq \overline{A}$ . Dado que  $S(\overline{A}) \subseteq \overline{S(A)}$ , entonces  $S(N_t) \subseteq \overline{S(A)}$ . Observemos que  $S$  es cerrada, ya que  $\mathcal{C}$  es compacto,  $[0, 1]$  es Hausdorff y  $S$  es continua. En consecuencia,  $S(N_t)$  es cerrado, más aún, es un intervalo. Por lo tanto, existe un abierto  $(a, b) \subseteq S(\overline{A}) \subseteq \overline{S(A)}$ . Esto muestra que  $S(A) \notin \text{NWD}([0, 1])$ . □

**Corolario 3.1.9.**  $A \subseteq \mathcal{C}$  es magro si, y solo si,  $S(A)$  es magro.

*Demostración.* Supongamos que  $A \in \text{MGR}(\mathcal{C})$ . Entonces  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ , donde  $V_n \in \text{NWD}(\mathcal{C})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por la Proposición 3.1.8,  $S(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(V_n)$  es magro.

Recíprocamente, asumamos que  $S(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , donde  $U_n \in \text{NWD}([0, 1])$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, por la Proposición 3.1.8,  $A \subseteq S^{-1}(S(A)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^{-1}(U_n)$  es magro. □

**Proposición 3.1.10.**  $X \subseteq \mathcal{C}$  tiene la propiedad de Baire si, y solo si,  $S(X)$  tiene la propiedad de Baire.

*Demostración.* Supongamos que  $A \in \text{BP}(\mathcal{C})$ . Entonces,  $A = U \Delta M$ , donde  $U$  es abierto y  $M$  es magro. Así,  $S(A) = S(U) \Delta S(M)$ . Por el Corolario 3.1.9,  $S(M)$  es magro; luego, es suficiente mostrar que  $S(U)$  tiene la propiedad de Baire. Dado que  $\mathcal{C}$  es compacto,  $U$  es la unión numerable de compactos, y por ser  $S$  continua y  $[0, 1]$  Hausdorff, se sigue que  $S(U)$  es  $F_\sigma$ . Recordemos que los conjuntos que tienen la propiedad de Baire son una  $\sigma$ -álgebra que contiene a los conjuntos borelianos. Por consiguiente,  $S(U)$  tiene la propiedad de Baire.

El recíproco del teorema es inmediato ya que,  $A \subseteq S^{-1}(V) \Delta S^{-1}(M)$ ,  $S$  es continua y  $S$  preserva conjuntos magros.  $\square$

**Lema 3.1.11.** Sea  $O$  un abierto no vacío de  $[0, 1]$ . Entonces existe  $I \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  tal que  $[S(I), S(I) + 2^{-(x+1)}] \subseteq O$ , donde  $x = \sup I$ .

*Demostración.* Fijemos  $O$  un abierto no vacío. Entonces  $O = U \cap [0, 1]$ , donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}$ . Sabemos que  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (p_n, q_n)$ . Escojamos  $n_0 \in \mathbb{N}$  y mostremos que existe  $I \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ , tal que  $[S(I), S(I) + 2^{-(x+1)}] \subseteq (p_{n_0}, q_{n_0}) \cap [0, 1]$ . Consideremos los siguientes casos.

1. *Caso*  $(p_{n_0}, q_{n_0}) \subseteq [0, 1]$ . Si  $\frac{1}{2} \in (p_{n_0}, q_{n_0})$ , podemos definir, para todo  $n \geq 1$ , la sucesión  $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ . Entonces, para  $\epsilon = q_{n_0} - \frac{1}{2}$ , existe  $N \geq 1$  tal que  $|x_n - \frac{1}{2}| < \epsilon$ , para todo  $n \geq N$ . Así, basta tomar  $I = \{0, N + 1\}$ .

Si  $\frac{1}{2} \notin (p_{n_0}, q_{n_0})$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $(p_{n_0}, q_{n_0}) \subseteq (0, \frac{1}{2})$ . Fijemos  $x \in (p_{n_0}, q_{n_0})$  y construyamos una sucesión  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  tal que,  $|x_k - x| < \frac{1}{2^{k+1}}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomemos  $x_1 = \frac{1}{4}$  y supongamos que  $x_1, \dots, x_{k-1}$  han sido definidos de tal manera que  $|x_i - x| < \frac{1}{2^{i+1}}$ , para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Si  $(p_{n_0}, q_{n_0}) \subseteq [x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{2^k}]$ , definimos  $x_k$  como el punto medio de este intervalo cerrado. Caso contrario, definimos  $x_k$  como el punto medio de  $[x_{k-1} - \frac{1}{2^k}, x_{k-1}]$ . Así,  $|x_k - x| < \frac{1}{2^{k+1}}$ , para todo  $k \geq 1$ . Esto muestra que  $\{x_k\}$  converge a  $x$ . Por consiguiente, podemos escoger  $N \geq 1$ , tal que  $x_N \in (p_{n_0}, q_{n_0})$ . Por el caso previo, existe  $I \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  como en el enunciado del lema.

2. *Caso*  $p_{n_0} < 0$  y  $q_{n_0} < 1$ . El razonamiento es el mismo; bisecar. En efecto, la sucesión  $\{\frac{1}{2^n}\}$  converge a 0. Así, podemos hallar  $N \geq 1$  tal que  $x_N < q_{n_0}$ . Es suficiente con tomar  $I = \{N\}$ .

3. *Caso*  $p_{n_0} < 1$  y  $1 < q_{n_0}$ . Definamos  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ . Dado que  $\{s_n\}$  converge a 1, entonces existe  $N \geq 1$  tal que  $s_N \in (p_{n_0}, 1)$ . Por lo tanto,  $I = \{0, \dots, N\}$  satisface con lo que queremos.

Para el caso en el que  $(0, 1) \subseteq (p_{n_0}, q_{n_0})$ , podemos tomar cualquier conjunto  $I$  finito no vacío. Esto completa la prueba.  $\square$

**Lema 3.1.12.** *Sea*  $J \subseteq \mathbb{N}$  *finito, no vacío y sea*  $m \in \mathbb{N}$ . *Si*

$$[S(J), S(J) + 2^{-(x+1)}] \subseteq (0, 2^{-(m+1)}),$$

*donde*  $x = \max J$ , *entonces*  $\min J > m$ .

*Demostración.* Sea  $U = \{\alpha \in \mathcal{C} : (\forall i \leq m \alpha_i = 0) \wedge \{i > m : \alpha_i = 1\} \text{ es infinito}\}$ . Afirmamos que,  $(0, 2^{-(m+1)}) \subseteq S(U)$ . En efecto, dado  $x \in (0, 2^{-(m+1)})$ , existe  $A \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tal que  $S(A) = x$ . Observemos que  $\min A > m$ , caso contrario,  $x \notin (0, 2^{-(m+1)})$ , un absurdo. En consecuencia,  $A \in U$ . Lo anterior muestra que  $[S(J), S(J) + 2^{-(x+1)}] \subseteq S(U)$ . Así,  $S(J) = S(V)$ , para algún  $V \in U$ . Escojamos  $J' \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tal que  $S(J) = S(J')$ . Dado que  $S$  es inyectiva en los subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ , se sigue que  $J' = V$ . Por lo tanto,  $J' \in U$ , lo cual implica que  $\min J > m$ , por la condición de que  $S(J) = S(J')$ .  $\square$

**Proposición 3.1.13.** *Sea*  $\{A_i\}_{i \geq 1}$  *una sucesión de subconjuntos finitos de*  $\mathbb{N}$  *disjuntos dos a dos, entonces*  $S(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} S(A_i)$ .

*Demostración.* Sea  $a_k = \sum_{i=1}^k S(A_i)$ , la sucesión de sumas parciales de  $\sum_{i \geq 1} S(A_i)$ . Entonces, dado que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ ,  $a_k = \sum_{i \in A} 2^{-(i+1)} \leq S(\bigcup_{i \geq i} A_i)$ , donde  $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Por lo tanto,  $\sum_{i \geq 1} S(A_i) \leq S(\bigcup_{i \geq 1} A_i)$ .

Sea  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  una enumeración del conjunto  $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ . Entonces  $S(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} 2^{-(x_i+1)}$ . Denotemos por  $b_k$  a la suma parcial de esta última serie, esto es,  $b_k = \sum_{i=1}^k 2^{-(x_i+1)}$ . Observemos que, para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $n_i$ , tal que,  $x_i \in A_{n_i}$ . Por consiguiente,  $b_k \leq S(A_{n_1}) + \dots + S(A_{n_k}) \leq \sum_{i \geq 1} S(A_i)$ . Esto muestra que  $S(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} S(A_i)$ .  $\square$

### 3.2. El rol de las familias casi disjuntas

Con el fin de facilitar la notación, adoptaremos la convención de que todo número natural  $n$  corresponde con el conjunto  $\{0, \dots, n-1\}$ .

**Lema 3.2.1.** Sea  $X \subseteq [0, 1]$  con la propiedad de Baire. Supongamos que para cada número real positivo  $r$ ,  $X \cap [0, r]$  no es magro. Entonces, existe una sucesión no vacía  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\text{FIN}(\mathbb{N})$ , disjunta dos a dos, tal que para cada subconjunto infinito  $V$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{n \in V} S(I_n) \in X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  tiene la propiedad de Baire. Entonces,  $X = W \Delta M$ , donde  $W \subseteq [0, 1]$  es abierto y  $M \in \text{MGR}([0, 1])$ . Sea  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión como en la prueba de la Proposición 2.1.12. Entonces, para todo  $r > 0$ ,  $W \cap [0, r]$  no es magro y  $W \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq X$ . Queremos construir una sucesión  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  que cumpla las siguientes condiciones:

- I)  $x_{n-1} < \inf I_n$ , donde  $x_{n-1} = \sup I_{n-1}$ .
- II) Para cualquier  $A \subseteq n$ ,  $[\sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n), \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + 2^{-(x_n+1)}] \subseteq W \setminus F_n$ .

Observemos que  $W \setminus F_0$  es abierto en  $[0, 1]$  y no es vacío, así que por el Lema 3.1.11, existe  $I_0 \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ , tal que  $[S(I_0), S(I_0) + 2^{-(x_0+1)}] \subseteq W \setminus F_0$ . Supongamos que hemos construido  $I_0, \dots, I_{n-1}$  como en I) y II) definamos  $I_n$ . Fijemos  $A \subseteq n$  y denotemos  $y_A = \sum_{k \in A} S(I_k)$ .

Afirmamos que  $(W \setminus F_n - y_A) \cap [0, 2^{-(x_{n-1}+1)}]$  no es magro. En efecto, si suponemos lo contrario,  $(W \setminus F_n) \cap [y_A, y_A + 2^{-(x_{n-1}+1)}]$  es magro. Observemos que si  $r = y_A + 2^{-(x_{n-1}+1)}$ , entonces

$$\begin{aligned} W \cap [0, r] &= ((W \setminus F_n) \cap [y_A, r]) \cup (W \cap F_n \cap [0, y_A]) \\ &\subseteq ((W \setminus F_n) \cap [y_A, r]) \cup F_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $W \cap [0, r]$  es magro, una contradicción. Lo anterior implica que  $O = (W \setminus F_n - y_A) \cap (0, 2^{-(x_{n-1}+1)}) \neq \emptyset$ . Aplicando nuevamente el Lema 3.1.11, existe  $I_n \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  tal que  $[S(I_n), S(I_n) + 2^{-(x_n+1)}] \subseteq O$ . Por consiguiente,  $[y_A + S(I_n), y_A + S(I_n) + 2^{-(x_n+1)}] \subseteq W \setminus F_n$  y por el Lema 3.1.12,  $\min I_n > x_{n-1}$ . Esto completa la construcción.

Hemos mostrado que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $A \subseteq n$ ,

$$B = \left[ \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n), \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + 2^{-(x_n+1)} \right] \subseteq W \setminus F_n.$$

Finalmente, probemos que para cualquier  $V \subseteq \mathbb{N}$  infinito,  $\sum_{k \in V} S(I_k) \in X$ . Sea  $V \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos los siguientes casos.

- **Caso  $n \in V$ .** Denotemos  $A = n \cap V$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) &< \sum_{k \in V} S(I_k) = \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + \sum_{k \in V, k > n} S(I_k) \\
&< \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + \sum_{k > \min I_{n+1}} 2^{-(k+1)} \\
&= \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + 2^{-(\min I_{n+1} + 1)} \\
&< \sum_{k \in A} S(I_k) + S(I_n) + 2^{-(x_n + 1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\sum_{k \in V} S(I_k) \in B$ , lo cual muestra que  $\sum_{k \in V} S(I_k) \in W \setminus F_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $\sum_{k \in V} S(I_k) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (W \setminus F_n) \subseteq X$ .

- **Caso  $n \notin V$ .** Dado que  $V$  es infinito, podemos escoger  $m > n$  en  $V$  y realizar el mismo razonamiento del caso anterior, teniendo en cuenta el hecho de que  $W \setminus F_m \subseteq W \setminus F_n$ .

En cualquiera de los casos concluimos que para cualquier subconjunto infinito de números naturales  $V$ ,  $\sum_{k \in V} S(I_k) \in X$ . □

**Lema 3.2.2.** *Si  $X \subseteq [0, 1]$  no es magro y tiene la propiedad de Baire, entonces existe una familia casi disjunta  $\mathcal{A}$  del tamaño del continuo tal que  $S(\mathcal{A}) \subseteq X$ .*

*Demostración.* Mostremos que existe  $J \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  tal que  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \setminus X$  es magro, donde  $m = \sup J$ . Dado que  $X$  tiene la propiedad de Baire, entonces existe un abierto  $U \subseteq [0, 1]$  tal que  $U \setminus X$  es magro. Por el Lema 3.1.11, existe  $J \in \text{FIN}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$  tal que  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \subseteq U$ . Luego,  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \setminus X \subseteq U \setminus X$ , lo cual implica que  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \setminus X$  es magro.

Afirmamos que el conjunto

$$A = \{x \in [0, 1] : x + S(J) \in X\}$$

satisface las hipótesis del Lema 3.2.1. En efecto, definamos la función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = x - S(J)$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Dado que  $f$  es un homeomorfismo en su imagen y  $X$  tiene la propiedad de Baire, entonces  $A = f(X)$  tiene la propiedad de Baire. Razonemos por contradicción para mostrar que  $A \cap [0, r]$  no es magro, para cualquier real positivo  $r$ . Supongamos que existe  $r > 0$  tal que  $A \cap [0, r]$  es magro. Consideremos los siguientes casos.

i) *Caso*  $2^{-(m+1)} < r$ . Observemos que

$$(A \cap [0, r]) + S(J) = (A + S(J)) \cap [S(J), r + S(J)] = X \cap [S(J), S(J) + r].$$

Esto garantiza que  $X \cap [S(J), S(J) + r]$  es magro, pues  $f$  es un homeomorfismo y estamos suponiendo que  $A \cap [0, r]$  es magro. Por otra parte, ya que

$$X \cap [S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \subseteq X \cap [S(J), S(J) + r]$$

y  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}] \setminus X$  es magro, concluimos que  $[S(J), S(J) + 2^{-(m+1)}]$  es magro, lo que contradice que  $[0, 1]$  es Baire.

ii) *Caso*  $r \leq 2^{-(m+1)}$ . Un razonamiento análogo nos permite concluir que  $[S(J), S(J) + r]$  es magro, un absurdo.

En cualquiera de los casos, hemos mostrado que  $A \cap [0, r]$  no es magro, para todo  $r > 0$ . Por lo tanto, existe una sucesión  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como en el Lema 3.2.1. Sea  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  como en el Corolario 2.4.9. Definamos

$$\mathcal{A} = \left\{ J \cup \bigcup_{n \in B} I_n : B \in \mathcal{B} \right\}.$$

Veamos que  $\mathcal{A}$  es casi disjunta. Si  $X, Y \in \mathcal{A}$ , entonces

$$X \cap Y \subseteq J \cup \bigcup_{n \in B_X \cap B_Y} I_n = Z,$$

para algunos  $B_X, B_Y \in \mathcal{B}$ . Como  $\mathcal{B}$  es casi disjunta, entonces  $Z$  es finito, y por consiguiente,  $X \cap Y$  también lo es. Esto muestra que  $\mathcal{A}$  es casi disjunta.

Dado  $I \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $I = J \cup \bigcup_{n \in B} I_n$ , para algún  $B \in \mathcal{B}$ . Así,  $S(I) = S(J) + S(\bigcup_{n \in B} I_n) = S(J) + \sum_{n \in B} S(I_n)$ . Por el Lema 3.2.1,  $\sum_{n \in B} S(I_n) \in A$ . Por lo tanto,  $S(I) \in X$ . Esto completa la prueba.

□

### 3.3. Propiedad de Baire en intersecciones de ultrafiltros

En esta sección denotaremos por  $F$  a la función complementación  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , dada por  $F(X) = \mathbb{N} \setminus X$  para todo  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Como vimos en la Proposición 1.2.12,  $F$  resulta ser un homeomorfismo. Recordemos también que como consecuencia del Teorema de Jalali-Naini & Talagrand todo ultrafiltro libre sobre  $\mathbb{N}$  no es magro. Sin embargo, podemos probar este resultado directamente como se muestra a continuación.

**Proposición 3.3.1.** *Todo ultrafiltro libre sobre  $\mathbb{N}$  no es magro.*

*Demostración.* Razonemos por contradicción. Supongamos que  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro libre sobre  $\mathbb{N}$  que es magro. Por el Corolario 2.2.9,  $F(\mathcal{U})$  es magro; luego,  $\mathcal{U} \cup F(\mathcal{U})$  es magro. Observemos que, dado  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,

$$A \in \mathcal{U} \circ \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U} \circ F(\mathbb{N} \setminus A) \in F(\mathcal{U}) \iff A \in \mathcal{U} \circ A \in F(\mathcal{U}).$$

Por lo tanto,  $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup F(\mathcal{U})$ . Una contradicción, ya que  $\mathcal{C}$  es Baire. □

Si  $\mathcal{G}$  es una familia de filtros denotamos con  $\cap \mathcal{G}$  el filtro que se obtiene intersectando todos los filtros en  $\mathcal{G}$ .

**Lema 3.3.2.** *Sea  $\mathcal{G}$  una familia de ultrafiltros sobre  $\mathbb{N}$ . Entonces  $S(F(\cap \mathcal{G}) \setminus \text{FIN}(\mathbb{N})) = [0, 1] \setminus S(\cup \mathcal{G})$ .*

*Demostración.* ( $\subseteq$ ) Sea  $x \in S(F(\cap \mathcal{G}) \setminus \text{FIN}(\mathbb{N}))$ . Entonces,  $x = S(V)$ , para algún  $V \in F(\cap \mathcal{G}) \setminus \text{FIN}(\mathbb{N})$ . Así,  $V$  es infinito y  $V = F(W)$ , donde  $W \in \cap \mathcal{G}$ . Por consiguiente, para cualquier ultrafiltro  $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ ,  $W \in \mathcal{U}$ , y por la definición de ultrafiltro,  $V = F(W) = \mathbb{N} \setminus W \notin \mathcal{U}$ , es decir,  $V \notin \cup \mathcal{G}$ . Esto muestra que  $x \notin S(\cup \mathcal{G})$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \notin S(\cup \mathcal{G})$ . Dado que  $S$  es sobreyectiva, escojamos  $V \subseteq \mathbb{N}$  infinito, tal que  $x = S(V)$  y  $V \notin \cup \mathcal{G}$ . Entonces, para cualquier ultrafiltro  $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ ,  $F(V) \in \mathcal{U}$ . Por lo tanto,  $V \in F(\cap \mathcal{G}) \setminus \text{FIN}(\mathbb{N})$ . □

**Corolario 3.3.3.** *Sea  $\mathcal{G}$  una familia de ultrafiltros libres sobre  $\mathbb{N}$ . Entonces,  $S(\cup \mathcal{G})$  tiene la propiedad de Baire, si y solamente si  $S(F(\cap \mathcal{G}))$  tiene la propiedad de Baire.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S(\cup\mathcal{G}) \in \text{BP}([0, 1]) &\iff [0, 1] \setminus S(\cup\mathcal{G}) \in \text{BP}([0, 1]) \quad (\text{Proposición 2.2.2}) \\ &\iff S(F(\cap\mathcal{G})) \in \text{BP}([0, 1]) \quad (\text{Lema 3.3.2}) \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.3.4.** *Sea  $\mathcal{G}$  una familia de ultrafiltros libres sobre  $\mathbb{N}$ . Entonces,  $S(\cup\mathcal{G})$  tiene la propiedad de Baire si, y solamente si,  $S(\cap\mathcal{G})$  tiene la propiedad de Baire.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S(\cup\mathcal{G}) \in \text{BP}([0, 1]) &\iff S(F(\cap\mathcal{G})) \in \text{BP}([0, 1]) \quad (\text{Corolario 3.3.3}) \\ &\iff F(\cap\mathcal{G}) \in \text{BP}(\mathcal{C}) \quad (\text{Proposición 3.1.10}) \\ &\iff \cap\mathcal{G} \in \text{BP}(\mathcal{C}) \quad (\text{Corolario 2.2.10}) \\ &\iff S(\cap\mathcal{G}) \in \text{BP}([0, 1]) \quad (\text{Proposición 3.1.10}) \end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos demostrar uno de los objetivos principales de esta tesis.

**Teorema 3.3.5** (Plewik<sup>3</sup>). *Sea  $\mathcal{G}$  una familia no vacía de ultrafiltros libres sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $|\mathcal{G}| < 2^{\aleph_0}$ . Entonces  $\cap\mathcal{G}$  y  $\cup\mathcal{G}$  no tienen la propiedad de Baire.*

*Demostración.* Razonemos por contradicción. Supongamos que  $S(\cup\mathcal{G})$  tiene la propiedad de Baire. Afirmamos que  $S(\cup\mathcal{G})$  no es magro, caso contrario,  $\cup\mathcal{G}$  es magro. Luego, cualquier ultrafiltro en  $\mathcal{G}$  es magro, lo cual contradice la Proposición 1.1.6. Por el Lema 3.2.2, existe una familia casi disjunta del tamaño del continuo  $\mathcal{A}$  tal que  $S(\mathcal{A}) \subseteq S(\cup\mathcal{G})$ . Así,  $\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{G}$ . Esto implica que existe  $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$  tal que  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{U}| \geq 2$ . Escojamos  $A, B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ . Entonces,  $A \cap B \in \mathcal{U} \cap \text{FIN}(\mathbb{N})$ , un absurdo. Por lo tanto,  $S(\cup\mathcal{G})$  no tiene la propiedad de Baire. Luego, por el Corolario 3.3.4,  $S(\cap\mathcal{G})$  no tiene la propiedad de Baire, y por la Proposición 3.1.10,  $\cup\mathcal{G}$  y  $\cap\mathcal{G}$  no tienen la propiedad de Baire. Esto completa la prueba. □

### 3.4. Un teorema de partición tipo Hindman

Concluiremos este capítulo con el resultado que sirvió como motivación para el trabajo hecho por Plewik. El Teorema de Hindman menciona lo siguiente: Dada una partición

de  $\mathbb{N}$  en finitas clases, existe un subconjunto infinito  $A \subseteq \mathbb{N}$ , tal que todas sus sumas finitas (sin repetición) pertenecen a una única clase. Pensemos ahora en  $[0, 1]$ . ¿Dada una partición finita de  $[0, 1]$ , existen infinitos números reales cuyas sumas finitas o infinitas (sin repetición) pertenezcan a la misma clase?

Asumiendo el axioma de elección, se puede mostrar (véase <sup>1</sup>) que la respuesta a esta pregunta es negativa. Esto es, existe una partición  $A_0, A_1$  de  $[0, 1]$  tal que para cualquier sucesión de reales positivos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n < 1$ ,  $\sum_{n \in J} x_n \in A_0$  y  $\sum_{n \in I} x_n \in A_1$ , para algunos  $I, J \subseteq \mathbb{N}$  infinitos.

Por otro lado, si cada una de las clases de la partición del intervalo unitario tiene la propiedad de Baire, entonces la respuesta a la anterior pregunta es afirmativa. Esto es lo que demostraron Prömel y Voight.

**Teorema 3.4.1** (Prömel & Voight, <sup>1</sup>). *Sea  $X_0, \dots, X_r$  una partición de  $[0, 1]$  tal que,  $X_i \in \text{BP}([0, 1])$ , para todo  $i \in \{0, \dots, r\}$ . Entonces, existen  $j \leq r$  y una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de reales positivos para los cuales  $\sum_{n \in V} x_n \in X_j$ , para cualquier  $V \subseteq \mathbb{N}$  no vacío.*

*Demostración.* Sea  $j \leq r$  tal que  $X_j$  satisface las hipótesis del Lema 3.2.1. Así, existe  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como en el Lema 3.2.1. Sea  $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ , donde  $V_n$  es infinito, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $V_i \cap V_k = \emptyset$ , siempre que  $i \neq j$ . Definamos  $t_n = \bigcup_{k \in V_n} I_k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $\sum_{n \in V} S(t_n) \in X_j$ , para cualquier  $V \subseteq \mathbb{N}$  no vacío. En efecto, fijemos  $V \subseteq \mathbb{N}$  no vacío y denotemos  $A = \bigcup_{k \in V} V_k$ . Entonces, por el Lema 3.2.1,

$$\sum_{n \in V} S(t_n) = \sum_{n \in V} \sum_{k \in V_n} S(I_k) = \sum_{n \in A} S(I_n) \in X_j,$$

pues  $A$  es infinito. □

Como consecuencia inmediata tenemos un teorema de partición para el espacio de Cantor.

**Corolario 3.4.2.** *Sea  $X_1, \dots, X_r$  una partición de  $\mathcal{C}$  en clases con la propiedad de Baire. Entonces, existen  $j \leq r$  y una sucesión  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$ , disjuntos dos a dos, tal que  $\bigcup_{n \in V} I_n \in X_j$ , siempre que  $V \subseteq \mathbb{N}$  no sea vacío.*

*Demostración.* Sea  $X_1, \dots, X_r$  una partición tal que  $X_i \in \text{BP}(\mathcal{C})$ , para todo  $i \leq r$ . Entonces, por la Proposición 3.1.10,  $S(X_1), \dots, S(X_r)$  es una partición tal que cada clase tiene la propiedad de Baire. Sea  $j \leq r$  y  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como en el Teorema 3.4.1 y fijemos  $V \subseteq \mathbb{N}$  no

vacío. Por lo tanto,

$$\sum_{n \in V} S(I_n) \in S(X_j) \iff \bigcup_{n \in V} I_n \in S^{-1}(S(X_j)) = X_j.$$

□

## Bibliografía

- Geschke, Stefan. «Almost disjoint and independent families (Aspects of Descriptive Set Theory)». En: *Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 1790* (2012), págs. 1-9 (vid. pág. 29).
- Hrbacek, Karel y Thomas Jech. *Introduction to set theory, revised and expanded*. Crc Press, 2017 (vid. pág. 10).
- Jalali-Naini, Seyed-Assadollah. «The Monotone Subsets of Cantor Space, Filters and Descriptive Set Theory.» Tesis doct. University of Oxford, 1976 (vid. págs. 6, 7, 24).
- Kechris, Alexander. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. pág. 21).
- Munkres, J. *Topology*. Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series. Pearson, 2017 (vid. pág. 16).
- Plewik, Szymon. «Intersections and unions of ultrafilters without the Baire property». En: *Bull. Pol. Acad. Sci. Math* 35.11-12 (1987), págs. 805-808 (vid. págs. 6, 7, 31, 41).
- Prömel, Hans Jürgen y Bernd Voigt. «A partition theorem for  $[0, 1]$ ». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* (1990), págs. 281-285 (vid. págs. 9, 42).
- Sierpiński, Waclaw. «Sur une décomposition d'ensembles». En: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 35 (1928), págs. 239-242 (vid. pág. 29).
- Talagrand, Michel. «Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables». En: *Studia Mathematica* 67.1 (1980), págs. 13-43 (vid. págs. 6, 7, 24).
- Tarski, Alfred. «Une contribution à la théorie de la mesure». fre. En: *Fundamenta Mathematicae* 15.1 (1930), págs. 42-50 (vid. págs. 10, 12).
- Tserunyan, Anush. «Introduction to descriptive set theory». En: *Preprint* (2016) (vid. pág. 18).

Uzcátegui Aylwin, Carlos y Carlos Augusto Di Prisco. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes, 2020 (vid. pág. 18).