

*SHADOWS* EN AGUJEROS NEGROS ESTACIONARIOS Y AXIALMENTE  
SIMÉTRICOS

JESÚS ANDRÉS ARRIETA VILLAMIZAR  
JUAN MANUEL VELÁSQUEZ CADAVID

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2019

*SHADOWS EN AGUJEROS NEGROS ESTACIONARIOS Y AXIALMENTE  
SIMÉTRICOS*

JESÚS ANDRÉS ARRIETA VILLAMIZAR  
JUAN MANUEL VELÁSQUEZ CADAVID

Trabajo de grado para optar por el título de  
físico

Director:  
Fabio Duvan Lora Clavijo  
Físico, M.Sc., Ph.D.

Codirector:  
Oscar Mauricio Pimentel  
Físico, M.Sc.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2019

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1 OBJETIVOS	18
2 FORMALISMO DE HAMILTON–JACOBI EN RELATIVIDAD GENERAL	19
2.1 Formalismo hamiltoniano en relatividad general . . . . .	19
2.2 Transformaciones canónicas . . . . .	20
2.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi . . . . .	22
3 ESPACIO–TIEMPO DE KERR	24
3.1 Formalismo de Hamilton–Jacobi en el espacio–tiempo de Kerr . . . . .	27
3.2 Órbitas esféricas de fotones . . . . .	32
3.2.1 Movimiento radial . . . . .	32
3.2.2 Movimiento latitudinal . . . . .	36
3.2.3 Ejemplos de órbitas esféricas . . . . .	38
4 <i>SHADOW</i> DE UN AGUJERO NEGRO	46
4.1 <i>Shadows</i> en un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico . .	46
4.2 Parámetros de impacto . . . . .	49
4.3 <i>Shadow</i> analítico de un agujero negro de Kerr . . . . .	51
5 PUNCH: UN NUEVO CÓDIGO PARA EL TRAZADO DE RAYOS EN RELATIVIDAD GENERAL	55
5.1 Trazado inverso de rayos . . . . .	55
5.2 El código . . . . .	56
5.3 Lente gravitacional . . . . .	60
6 MÉTRICA–Q	64
7 CONCLUSIONES	68
BIBLIOGRAFÍA	70
ANEXOS	74

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Agujero negro al interior de M87 . . . . .	15
Figura 2	Trayectorias de las S-estrellas que orbitan en torno a Sagitario A* . . . . .	16
Figura 3	Arrastre gravitacional de un agujero negro de Kerr . . . . .	26
Figura 4	Distribución espacio-temporal de un agujero negro de Kerr. . . . .	27
Figura 5	Dependencia de $\xi$ y $\eta$ en función de $r$ . . . . .	34
Figura 6	Potencial efectivo radial . . . . .	35
Figura 7	Coordenada radial en función del parámetro de rotación $ a $ . . . . .	36
Figura 8	Órbitas esféricas alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación extrema . . . . .	40
Figura 9	Órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación $a = 0.8 - 1$ . . . . .	41
Figura 10	Órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación $a = 0.8 - 2$ . . . . .	42
Figura 11	Órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación $a = 0.8 - 3$ . . . . .	43
Figura 12	Órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación $a = 0.01 - 1$ . . . . .	44
Figura 13	Órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación $a = 0.01 - 2$ . . . . .	45
Figura 14	Tríada de vectores ortogonales . . . . .	47
Figura 15	Parámetros de impacto . . . . .	50
Figura 16	Silüeta del <i>shadow</i> de un agujero negro de Kerr . . . . .	54
Figura 17	Trazado inverso de rayos . . . . .	56
Figura 18	Ligadura hamiltoniana para fotones . . . . .	58
Figura 19	<i>shadow</i> numérico y promedio de la norma $L_1$ del error para un agujero negro de Kerr . . . . .	59
Figura 20	Esfera celeste . . . . .	61
Figura 21	Representación gráfica del espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	61
Figura 22	Deflexión en la trayectoria de los fotones en presencia de un agujero negro . . . . .	62
Figura 23	Lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr . . . . .	63
Figura 24	<i>Shadow</i> producido por la métrica- $q$ para $0 \geq q \geq -0.5$ . . . . .	65

Figura 25	Lente gravitacional producido por la métrica- $q$ . . . . .	66
Figura 26	Reducción al espacio-tiempo de Minkowski desde la métrica- $q$ .	67
Figura 27	Función $f(r, a)$ . . . . .	77

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Radiotelescopios en la red VLBI . . . . .	14
---------	---	----

## LISTA DE ANEXOS

<b>A</b>	<b>Condiciones de órbitas esféricas de fotones</b>	<b>75</b>
A.1	Interpretación física $\xi$ y $\eta$ . . . . .	75
A.2	Radios límite de la fotorregión . . . . .	77

## RESUMEN

**TÍTULO:** *SHADOWS* EN AGUJEROS NEGROS ESTACIONARIOS Y AXIALMENTE SIMÉTRICOS \*

**AUTORES:** JESÚS ANDRÉS ARRIETA VILLAMIZAR, JUAN MANUEL VELÁSQUEZ CADAVID \*\*

**PALABRAS CLAVE:** *SHADOWS*, AGUJEROS NEGROS, GEODÉSICAS, MÉTODOS NUMÉRICOS.

### DESCRIPCIÓN:

Actualmente, la detección del agujero negro supermasivo al interior de la galaxia M87 otorgó la primera imagen real de estos cuerpos compactos. Esto posible al medir directamente la sombra o el shadow que este genera, aportando una prueba más a la relatividad general en el régimen de campo fuerte. En el presente trabajo se construyó el código PUNCH, el cual permite simular el comportamiento de los fotones en las inmediaciones de un agujero negro estacionario y axialmente simétrico, con el fin de simular el shadow y el lente gravitacional que este produce. Para su calibración, se desarrolló la teoría de órbitas esféricas alrededor de un agujero negro de Kerr y se dedujo una expresión analítica que permitió delimitar el borde del shadow. Al comparar los resultados numéricos y teóricos, se encontró una disminución en el tamaño del shadow numérico, debido a que la solución analítica está calculada en el infinito. Además, se obtuvo una primera noción de la geometría del espacio-tiempo en las inmediaciones de los agujeros negros a través del lente gravitacional que estos generan. Finalmente, como una primera aplicación del código, se simuló el shadow de un cuerpo compacto con deformación cuadrupolar arbitraria de masa descrito por la métrica- $q$ , en donde se observó que a partir de valores específicos del parámetro de deformación, aparece una fuerte dependencia de las condiciones iniciales sobre el lente gravitacional, lo cual sugiere un comportamiento caótico en la trayectoria de los fotones.

---

\*Trabajo de grado

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph. D. Codirector: Óscar Mauricio Pimentel Díaz, M. Sc.

## ABSTRACT

**TITLE:** STATIONARY AND AXISYMMETRIC BLACK HOLE SHADOWS \*

**AUTHORS:** JESÚS ANDRÉS ARRIETA VILLAMIZAR, JUAN MANUEL VELÁZQUEZ CADAVID \*\*

**KEYWORDS:** SHADOWS, BLACK HOLES, GEODESICS, NUMERICAL METHODS.

### DESCRIPTION:

Currently, the detection of the supermassive black hole inside the M87 galaxy gave the first real image of these compact bodies, which was possible by directly measuring the shadow it generates, providing further evidence of general relativity in the field regime strong. In the present work, the PUNCH code was constructed, which allows simulating the behavior of photons in the vicinity of a stationary and axially symmetrical black hole, in order to simulate the shadow and the gravitational lens that it produces. For its calibration, the spherical orbits theory was developed around a Kerr black hole, from which an analytical expression was deduced that allowed to delimit the shadow's edge. When comparing the numerical and theoretical results, a decrease in the size of the numerical shadow was found, because the analytical solution is calculated at infinity. In addition, a first notion of the geometry of space-time in the vicinity of black holes was obtained through the gravitational lens that they generate. Finally, as a first application of the code, the shadow of a compact body with arbitrary quadrupole mass deformation described by the Qmetric was simulated, where it was observed that from strong values of the deformation parameter, a strong dependence of the initial conditions on the gravitational lens, which suggests a chaotic behavior in the path of the photons.

---

\*Bachelor thesis

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Oscar Mauricio Pimentel Díaz, M.Sc.

## INTRODUCCIÓN

[...] *Me atuve obstinadamente al precepto del genial teórico L. Boltzmann, de dejar la elegancia para los sastres y zapateros. Las dificultades que radican en la teoría propiamente dicha creo no habérselas ocultado al lector, mientras que las bases físicas empíricas de la teoría las he tratado deliberadamente para que al lector no le ocurra lo que al caminante, a quien los árboles no le dejan ver el bosque.*

Albert Einstein, *Sobre la teoría de la Relatividad Especial y General*.  
Diciembre de 1916.

El siglo XX fue una época en donde el avance científico creció vertiginosamente y surgieron las teorías que establecieron las bases de la física moderna. El 2 de Diciembre de 1915, Albert Einstein presentó ante la Academia Prusiana de Ciencias uno de sus mayores éxitos científicos, la teoría de la Relatividad General (EINSTEIN, 1915). Una de sus predicciones son los agujeros negros: cuerpos compactos cuyo campo gravitatorio es tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar de ellos, y su nacimiento es el resultado del colapso gravitacional que sufren las estrellas supermasivas al momento de su muerte. Están caracterizados por un horizonte de eventos que marca el límite de no retorno, en donde todo lo que cruce se desconecta causalmente del exterior. Este horizonte recubre una singularidad en su interior en donde la curvatura espacio-temporal diverge. Pese a ser soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, el estudio de los agujeros negros no tuvo un incipiente interés sino hasta los años 70, pues las observaciones sugerían la existencia de algún cuerpo con un campo gravitatorio extremadamente fuerte que pudiese explicar el comportamiento de ciertos fenómenos astrofísicos (EINSTEIN, 1939) .

Es por esta razón que los esfuerzos de la comunidad científica por conocer más sobre estos objetos ha sido el catalizador de nuevos avances tecnológicos que pueden dar pistas sobre su comportamiento. Un ejemplo de esto es el proyecto LIGO (sigla proveniente de *Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*), que detectó por primera vez ondas gravitacionales causadas, de acuerdo al modelo, por la coalescencia de dos agujeros negros (ABBOTT, 2016). Este acontecimiento marcó un precedente en la astrofísica y la cosmología, brindando una nueva oportunidad para comprender la naturaleza de estos cuerpos compactos. Sin embargo, esta fue una evidencia indirecta de su existencia, pues la detección de los mismos radica en la observación de la “sombra” o *shadow* que estos generan: aquella región oscura sobre un fondo lumínico que puede ser vista al apuntar los telescopios hacia el agujero negro. La radiación que emana del centro de las galaxias con masas superiores a  $10^{12}M_{\odot}$  (BAMBI, 2018) suponen la existencia de un agujero negro supermasivo en el centro de cada una de estas (LYNDEL-BELL, 1969) . Por esta razón, la cooperación de proyectos *Event horizon Telescope* (EHT y BHC por sus siglas en inglés, respectivamente), han focalizado sus esfuerzos en observar el *sha-*

del agujero negro supermasivo al interior de la galaxia *M87*, utilizando una red de radiotelescopios distribuidos en ambos hemisferios del planeta (los cuales se muestran en la tabla 1) mediante la técnica de interferometría de muy larga base, conocida por sus siglas en inglés como VLBI (THOMSON, 2008). Esta consiste en recolectar datos en tiempo real y luego procesarlos mediante una supercomputadora, lo cual hace de dicha colaboración un solo telescopio virtual de alta resolución.

Proyecto	Telescopio	Locación
PdBI	Plateau de Bure Interferometer	Grenoble, Francia
IRAM	Institut de Radioastronomie Millimetrique	Pico Veleta, España
SMT	Submillimeter Telescope Observatory	Monte Graham, Arizona
JCMT	James Clerk Maxwell Telescope	Mauna Kea, Hawaii
SMA	Submillimeter Array	Mauna Kea, Hawaii
LMT	Large Millimeter Telescope	Sierra Negra, México
APEX	Atacama Pathfinder Experiment	Cerro Chajnantor, Chile
CARMA	Combined Array for Research in Millimeter-wave Astronomy	Montañas Inyo, California
ALMA	Atacama Large Millimeter/submillimeter Array	Cerro Chajnantor, Chile
SPT	South Pole Telescope	Base Amundsen-Scott, Polo sur
GLT	Greenland Telescope	Summit Station, Groenlandia

Tabla 1: Radiotelescopios en la red VLBI.

Cuadro adaptado del libro *The Shadow of Black Holes An Analytic Description* (GRENZEBACH, 2016).

Luego de 7 días de observación y dos años de tratamiento de datos, este proyecto arrojó los primeros resultados el 10 de abril de 2019, presentando al mundo la primera imagen real de un agujero negro supermasivo (figura 1), cuya masa es aproximadamente  $6.5 \times 10^9 M_{\odot}$  y está ubicado a una distancia aproximada de 17.9 Mpc (COLLABORATION, 2019).

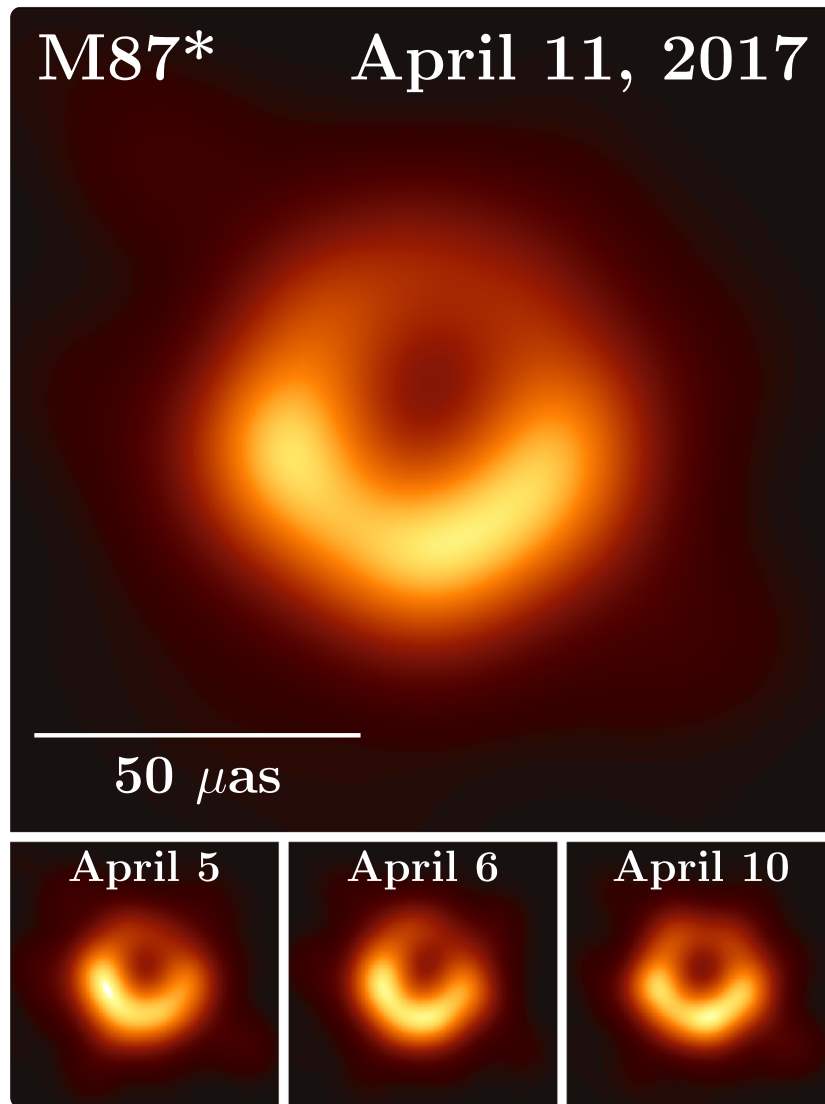


Figura 1: *Shadow* del agujero negro al interior de la galaxia M87. La imagen fue tomada del trabajo original *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole* (COLLABORATION, 2019), y muestra las observaciones tomadas por el EHT entre los días 5 y 11 de abril de 2017.

Por otra parte, las pruebas que soportan la hipótesis de un agujero negro supermasivo con una masa aproximada de  $4 \times 10^6 M_{\odot}$ , en el centro de la Vía Láctea, se extienden a 26 años de observaciones llevadas a cabo por la colaboración *GRAVITY*. Estas se enfocaron en el seguimiento de las trayectorias de las estrellas en torno a una región conocida como Sagitario A\* (ABUTER, 2018), como se ilustra en la figura (2). En especial, la órbita que sigue la estrella S0-2 mostró que la Relatividad General describe con exactitud la dinámica de los cuerpos en presencia de un campo gravitacional intenso (ABUTER, 2018).

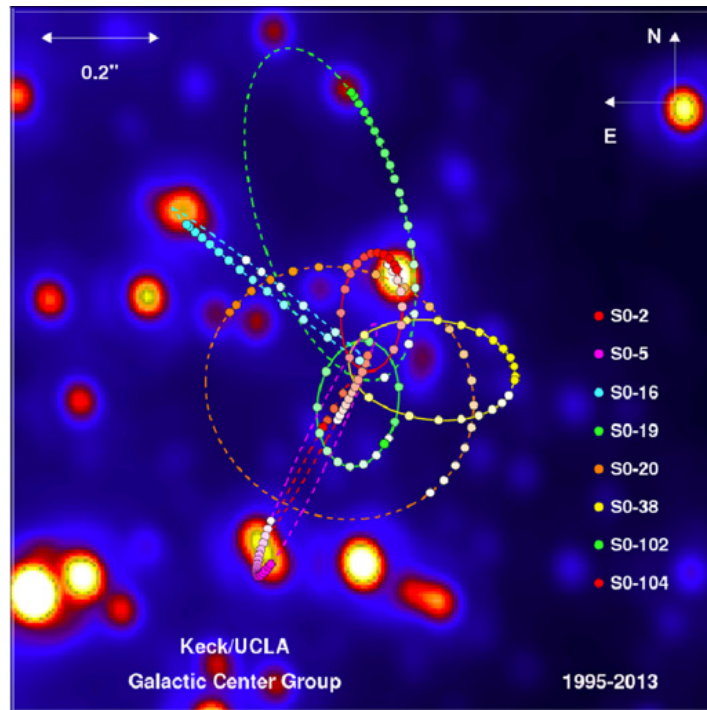


Figura 2: Trayectorias de las S-estrellas que orbitan en torno a Sagitario A\* (SCHÖDEL, 2014). Créditos: S. Sakai/A.Ghez/Keck Observatory/UCLA Galactic Center Group.

No obstante, la identidad de dicha fuente gravitacional sigue siendo un misterio. Se especula que no solo un agujero negro puede generar tal campo gravitatorio; en consecuencia, se han propuesto otras soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein como estrellas gravitacionales de vacío (*gravastars*) (MAZUR, 2002), estrellas compactas anisotrópicas con membrana (*holostars*) (PETRI, 2003) o estrellas de bosones (SCHUNCK, 2008). La prueba determinante radica entonces en la detección del *shadow*, en donde se han adelantado trabajos en esta dirección (FALCKE, 2000). El avance teórico en el estudio de los *shadows* se ha desarrollado en paralelo al progreso observacional, de tal manera que se dispone de una gama de posibilidades que permita encajar el fenómeno observado con alguna de las predicciones teóricas. A continuación, se presenta un breve listado bibliográfico en donde se exponen algunos trabajos concernientes al estudio de los *shadows*, entre los cuales se abordan temas como:

- *Shadows* en teorías alternativas (AMARILLA, 2017).
- *Shadows* de agujeros negros rotantes en presencia de branas con constante cosmológica (EIROA, 2018).
- *Shadows* de agujeros rotantes cargados inmersos en quintaesencia (ISLAMIA).
- *Shadows* de agujeros negros de Kerr con y sin pelo (CUNHA, 2016).

- *Shadows* de agujeros negros simétricamente esféricos y con singularidades desnudas (SHAIKH, 2019).
- *Shadows* de agujeros negros en sistemas binarios y lentes gravitacionales fuertes (CINHA, 2018).
- *Shadows* de agujeros negros de Kerr como agujeros de gusano (AMIR, 2019).
- *Shadows* de agujeros negros recubiertos de plasma (HUANG, 2018).
- *Shadows* de agujeros negros rotantes inmersos en un fluido perfecto con constante cosmológica (HAROON, 2019).

Es evidente que los *shadows* de objetos compactos son un tema de actual interés que genera altas expectativas entre la comunidad científica, pues su descubrimiento ha sido una nueva confirmación a la teoría de la Relatividad General en el régimen de campo fuerte. Por esta razón, en el presente trabajo se construye el código PUNCH, con el cual es posible simular el *shadow* y lente gravitacional producido por un agujero negro estacionario y axialmente simétrico. Para su calibración, se muestran los resultados obtenidos en el caso del espacio–tiempo de Kerr, en donde se compara la solución numérica con la analítica. Finalmente, una primera aplicación del código es simular el *shadow* y lente gravitacional producido por un cuerpo compacto con deformación cuarupolar arbitrario de masa, en donde se evidencia un comportamiento que sugiere caos en la trayectoria de los fotones.

El trabajo se divide de la siguiente forma. En el **capítulo 1** se desarrolla el formalismo de Hamilton–Jacobi en relatividad general, para lo cual es necesario estudiar el formalismo hamiltoniano y las transformaciones canónicas. En el **capítulo 2** se estudia el espacio–tiempo de Kerr y se aplica el formalismo de Hamilton–Jacobi con el fin de desarrollar la teoría de órbitas esféricas para fotones, en donde se muestran distintas simulaciones numéricas. En el **capítulo 3** se desarrolla la teoría *shadows* en un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico, y fue posible obtener una expresión que permite esbozar el *shadow* analítico para un agujero negro de Kerr. En el **capítulo 4** se muestra la construcción del código PUNCH y se exponen las simulaciones numéricas del *shadow* y el lente gravitacional de un agujero negro de Kerr, obtenidas mediante el trazado inverso de rayos. En el **capítulo 5** se muestran los resultados de las simulaciones numéricas del *shadow* y el lente gravitacional producidos por un cuerpo compacto con deformación cuadrupolar arbitraria de masa, como primera aplicación del código.

Finalmente, la signatura de la métrica adoptada fue  $(-, +, +, +)$ , y se emplearon unidades geometrizadas en donde  $G = c = 1$ . Adicionalmente, el valor de la masa de la fuente gravitacional se tomó  $M = 1$  para todos los cálculos. Por otra parte, los índices griegos en los cuadvectores corren de 0 a 3: la componente  $x^0$  corresponde a la parte temporal y  $x^i$ , a las componentes espaciales. Además, se emplea el convenio de Einstein, en donde los índices repetidos representan una suma.

## 1. OBJETIVOS

### Objetivo General

Estudiar los *shadows* producidos por un agujero negro estacionario y axialmente simétrico mediante simulaciones numéricas.

### Objetivos Específicos

1. Reproducir el formalismo de *shadows* para agujeros descritos por un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico.
2. Construir un módulo numérico basado en este formalismo para simular *shadows* en cualquier espacio-tiempo.
3. Calibrar dicho módulo mediante el cálculo del *shadow* producido por el espacio-tiempo de Schwarzschild y Kerr.
4. Caracterizar los *shadows* en la métrica–q asociados al parámetro de deformación cuadrupolar de masa arbitrario.

## 2. FORMALISMO DE HAMILTON–JACOBI EN RELATIVIDAD GENERAL

En el estudio de los *shadows* es indispensable conocer las trayectorias que trazan las partículas de prueba alrededor de un objeto compacto. Para ello, es preciso desarrollar un plantemiento con principios físicos que permitan abordar el concepto de geodésica en un espacio–tiempo curvo. En consecuencia, existen diferentes formalismos que permiten describir la dinámica de dicha partícula, entre los cuales se encuentran el formalismo lagrangiano o el hamiltoniano, que recurren a  $n$  y  $2n$  ecuaciones diferenciales de segundo y primer orden, respectivamente, donde  $n$  es el número de coordenadas generalizadas. En la presente sección se empleará el formalismo de Hamilton–Jacobi para el desarrollo de la teoría de *shadows* en el espacio–tiempo de Kerr (VIEIRA, 2015). Este método reduce el conjunto de ecuaciones a una sola ecuación diferencial parcial no lineal, y para su construcción se recurre al formalismo hamiltoniano y a las transformaciones canónicas en el contexto de la relatividad general.

### 2.1. Formalismo hamiltoniano en relatividad general

Las ecuaciones de movimiento de una partícula pueden obtenerse a partir del principio integral de Hamilton (GOLDSTEIN, 1980), el cual establece que es posible describir la dinámica de un sistema a través de la acción, definida como

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda) d\lambda, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano,  $\lambda$  es un parámetro afín,  $(x^\mu) = (x^0, x^i)$  son las coordenadas espacio–temporales y  $\dot{x}^\mu$  representa las derivadas de las coordenadas respecto a dicho parámetro. En el marco de la relatividad general, el lagrangiano para una partícula de prueba libre de fuerzas externas se expresa como

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son las componentes covariantes del tensor métrico y se asume que estas solo dependen de las coordenadas. Ahora, mediante el principio variacional, a partir de la ecuación (??) se obtienen las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.3)$$

en donde se pueden identificar las componentes del cuadrimomento

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad p^\nu = \dot{x}^\nu. \quad (2.4)$$

Por otra parte, es posible establecer una relación entre el formalismo lagrangiano y hamiltoniano a través de la transformación de Legendre

$$\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu), \quad (2.5)$$

de tal manera que al diferenciar el hamiltoniano se tiene

$$d\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = p_\mu d\dot{x}^\mu + \dot{x}^\mu dp_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)}{\partial x^\mu} dx^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)}{\partial \dot{x}^\mu} d\dot{x}^\mu. \quad (2.6)$$

Adicionalmente, el hamiltoniano es una función que depende explícitamente de  $x^\mu$  y  $p_\mu$ , por lo cual se puede calcular el diferencial total de dicha función, obteniendo así

$$d\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = \frac{\partial \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu)}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu)}{\partial p_\mu} dp_\mu, \quad (2.7)$$

y al comparar las expresiones (2.7) y (2.6) se obtienen las ecuaciones canónicas Hamilton

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu}. \quad (2.8)$$

Finalmente, a partir del lagrangiano de la ecuación (2.2) se puede encontrar una expresión particular para el hamiltoniano recurriendo nuevamente a la transformación de Legendre (2.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) &= p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = p_\mu p^\mu - \frac{1}{2} p_\mu p^\mu, \\ \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\frac{1}{2} \mu^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $\mu$  representa la masa en reposo de la partícula de prueba. Con todo lo anterior se tienen las herramientas necesarias para describir el movimiento de dichas partículas inmersas en un campo gravitacional: solucionar las ecuaciones (2.3) o (2.8) es equivalente a resolver la ecuación de la geodésica, la cual se puede obtener a partir de las ecuaciones de Euler–Lagrange (HOBSON, 2006).

## 2.2. Transformaciones canónicas

Dada la libertad que existe en la elección de  $x^\mu$  y  $p_\mu$ , es posible encontrar un hamiltoniano en un marco auxiliar de coordenadas para el cual dicho conjunto de variables sea cíclico. En consecuencia, el problema se simplifica con respecto al original. Una transformación canónica es una transformación de coordenadas y momentos  $(x^\mu, p_\mu) \rightarrow (\tilde{x}^\mu, \tilde{p}_\mu)$ , en general de la forma

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\mu, p_\mu), \quad \tilde{p}_\mu = \tilde{p}_\mu(x^\mu, p_\mu), \quad (2.10)$$

de tal manera que exista una transformación inversa y se preserve la estructura y validez de las ecuaciones de movimiento de Hamilton (SOLDOVIERI, 2018)

$$\dot{\tilde{p}}_\mu = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{x}^\mu}, \quad \dot{\tilde{x}}^\mu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_\mu}, \quad (2.11)$$

donde  $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}^\mu, \tilde{p}_\mu)$  denota el hamiltoniano en el nuevo sistema coordenado. Para determinar la forma del nuevo hamiltoniano y su relación con el original se parte de la acción expresada en ambos sistemas de coordenadas

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\lambda, \quad \tilde{S} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{x}^\mu, \dot{\tilde{x}}^\mu) d\lambda, \quad (2.12)$$

de tal forma que  $\delta S = \delta \tilde{S} = 0$  por el principio variacional, así

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}) d\lambda = 0. \quad (2.13)$$

Es importante recalcar que si bien la variación de la acción es cero, esto no implica que los términos en el integrando en la ecuación (2.13) sean iguales, puesto que esta igualdad solo se da para valores específicos de  $\lambda$  en los puntos extremos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (GOLDSTEIN, 1980). Sin embargo, es posible encontrar una función  $F$  que satisfaga (SOLDOVIERI, 2018)

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}) d\lambda = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \quad (2.14)$$

Ahora, al reescribir (2.14) en términos de la transformada de Legendre se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) - \tilde{p}_\mu \dot{\tilde{x}}^\mu + \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}^\mu, \tilde{p}_\mu), \quad (2.15)$$

de lo cual se puede observar que

$$F = F(x^\mu, \tilde{x}^\mu, p_\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda), \quad (2.16)$$

donde  $F$  se conoce como función generatriz, a partir de la cual es posible establecer una relación entre ambos sistemas de coordenadas. Ahora, de acuerdo a (2.10) es posible reducir el número de variables de las cuales depende la función generatriz, de  $4n$  a  $2n$  variables canónicas, además de la dependencia del parámetro afín (SOLDOVIERI, 2018). Con base en lo anterior, se plantean las siguientes funciones

$$F_1 = F(x^\mu, \tilde{x}^\mu, \lambda), \quad F_2 = F(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda), \quad (2.17)$$

$$F_3 = F(\tilde{x}^\mu, p_\mu, \lambda), \quad F_4 = F(p_\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda),$$

en donde  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  pueden determinarse a partir de  $F_1$  mediante una transformación de Legendre, y la elección de cualquiera de estas funciones depende del problema a resolver.

### 2.3. Formalismo de Hamilton-Jacobi

A través de este formalismo se pretende encontrar coordenadas cíclicas en el marco auxiliar, de tal forma que a partir de estas puedan determinarse las ecuaciones de movimiento en el marco de coordenadas original (GOLDSTEIN, 1980). De las expresiones (2.11) es claro que esto se da cuando el hamiltoniano es constante para todo  $\tilde{x}^\mu$  y  $\tilde{p}_\mu$ , así

$$\dot{\tilde{p}}_\mu = 0 \rightarrow \tilde{p}_\mu = \alpha_\mu, \quad \dot{\tilde{x}}^\mu = 0 \rightarrow \tilde{x}^\mu = \beta^\mu, \quad (2.18)$$

donde  $\alpha_\mu$  y  $\beta^\mu$  son un conjunto de constantes arbitrarias, con las cuales es posible realizar una transformación inversa hacia las coordenadas originales a partir de las auxiliares. Esto se puede realizar mediante la función generatriz, así, de la ecuación (2.15) se tiene que

$$dF = p_\mu dx^\mu - \tilde{p}_\mu d\tilde{x}^\mu + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})d\lambda. \quad (2.19)$$

Ahora, es necesario discernir cuál de las cuatro funciones generatrices es conveniente emplear en la transformación dada por (2.19). Como la dependencia del hamiltoniano es sobre las variables canónicas, es de intuir que las funciones  $F_2$  y  $F_3$  son una buena opción. Adicionalmente, las componentes del tensor métrico en la ecuación (2.9) dependen explícitamente de las coordenadas originales, por lo tanto, la función elegida es  $F_2$ , la cuál se renombrará a partir de ahora como  $S$ , así

$$F_2(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda) = S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda). \quad (2.20)$$

Como se mencionó anteriormente, la función  $S$  puede obtenerse a partir de  $F_1$ , al aplicar la regla de Leibniz en la ecuación (2.19)

$$d(F_1 + \tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu) = p_\mu dx^\mu + d\tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})d\lambda, \quad (2.21)$$

en donde es posible reconocer que  $S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda) = F_1(x^\mu, \tilde{x}^\mu, \lambda) + \tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu$  a través de la transformación de Legendre. Por otra parte, al diferenciar  $S$  se obtiene

$$dS(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda) = \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial \tilde{p}_\mu} d\tilde{p}_\mu + \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda, \quad (2.22)$$

y al comparar las expresiones (2.21) y (2.22) es posible establecer las siguientes relaciones

$$p_\mu = \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial x^\mu}, \quad \tilde{x}^\mu = \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial \tilde{p}_\mu}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (2.23)$$

Finalmente, como cualquier valor constante del hamiltoniano dará como resultado coordenadas cíclicas para  $\tilde{p}_\mu$  y  $\tilde{x}^\mu$ , por simplicidad, se busca la transformación canónica que haga  $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}^\mu, \tilde{p}_\mu) = 0$ , de lo cual se concluye que la transformación que anula el hamiltoniano en el marco auxiliar está dada por

$$\mathcal{H} \left( x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) + \frac{\partial S(x^\mu, \tilde{p}_\mu, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.24)$$

La expresión (2.24) se conoce como ecuación de Hamilton-Jacobi, a partir de la cual es posible determinar completamente la dinámica de un sistema. Esta depende de  $2n + 1$  variables y de las primeras derivadas de  $S$ . Puede observarse de las relaciones en (2.23) que la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi provee inmediatamente los momentos originales al derivar  $S$  con respecto a  $x^\mu$ , y las coordenadas generalizadas en el marco originar al derivar  $S$  respecto a  $\tilde{p}_\mu$  e invertir la solución.

### 3. ESPACIO–TIEMPO DE KERR

La primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein en el vacío fue derivada por Karl Schwarzschild en 1916 ([SCHWARZSCHILD, 1916](#)), y describe la geometría espacio–temporal en las inmediaciones de un agujero negro estático y esféricamente simétrico. Sin embargo, una solución más realista desde el punto de vista astrofísico fue presentada por Roy Kerr en 1963 ([KERR, 1963](#)), la cual representa la deformación espacio–temporal producida por un agujero negro rotante, estacionario y axialmente simétrico, es decir, las componentes del tensor métrico no dependen explícitamente del tiempo  $t$  ni de la coordenada azimutal  $\phi$ . El elemento de línea que describe esta geometría en coordenadas de Boyer–Lindquist  $\{t, r, \theta, \phi\}$  ([LINDQUIST, 1967](#)) está dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\phi + \left(\frac{\Sigma}{\Delta}\right) dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\phi^2, \quad (3.1)$$

tal que

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \text{y} \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (3.2)$$

donde  $a = J/M$  es el parámetro de rotación que relaciona el momento angular de giro  $J$  y la masa  $M$  de la fuente gravitacional. Por otra parte, debido a los términos cruzados puede intuirse que la métrica no es estática, pues ante una inversión temporal se altera el sentido de giro y por lo tanto el elemento de línea. En consecuencia, para que la geometría espacio–temporal permanezca invariante es necesario aplicar simultáneamente las transformaciones  $t \rightarrow -t$  y  $\phi \rightarrow -\phi$ . Adicionalmente, de la ecuación (3.1) se pueden estudiar tres casos de interés:

1. La geometría de Kerr es asintóticamente plana: cuando  $r \rightarrow \infty$ , el elemento de línea reduce al espacio–tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas.
2. Cuando  $a \rightarrow 0$ , para  $M \neq 0$ , el elemento de línea reproduce el espacio–tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild ([SCHWARZSCHILD, 1916](#)).
3. Cuando  $M \rightarrow 0$ , para  $a \neq 0$ , corresponde al caso en donde no hay fuente gravitacional y se reduce al espacio–tiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas, descrito por el elemento de línea ([EZEQUIEL, 2016](#))

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.3)$$

cuya relación con las coordenadas cartesianas está dada por las siguientes transformaciones

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (3.4)$$

Además, las expresiones en (3.4) satisfacen la ecuación de un elipsoide de revolución para superficies de  $r$  constante

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \quad (3.5)$$

donde puede identificarse que  $a$  es el responsable de la deformación, y en el caso de  $a = 0$  se recupera la simetría esférica.

Aunado a lo anterior, es posible apreciar que esta geometría no está exenta de singularidades espacio–temporales. En primera instancia, a partir de la ecuación (3.1) es claro que existen singularidades cuando

$$\Sigma = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \quad \text{y} \quad \Delta = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0.$$

La primera igualdad se cumple solo si  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ , mientras que la segunda expresión se satisface si  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Puede demostrarse que la única singularidad física se da en este último caso. Además, de la ecuación (3.5) puede verse que la singularidad gravitacional de un agujero negro de Kerr es un anillo de radio  $a$  en el plano ecuatorial ( $z = 0$ ), es decir

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Por otra parte, las superficies delimitadas por  $r_{\pm}$  corresponden con el horizonte de eventos externo ( $r_+$ , superficie exterior) y el horizonte de eventos interno ( $r_-$ , superficie interior). Es importante resaltar que en el caso de  $a = 0$ , la singularidad real permanece en  $r_- = 0$ , mientras que en  $r_+ = 2M$  se reproduce el horizonte de eventos de Schwarzschild (WHEELER, 2000). Otra característica del espacio–tiempo de Kerr es el arrastre gravitacional que genera el agujero negro al rotar (HOBSON, 2006), como se esboza en la figura (3). Esto implica que las partículas circundantes no caen súbitamente hacia el horizonte de sucesos, sino que entran en una región en donde es posible escapar de la atracción gravitatoria y nada puede permanecer estático (PENSORE, 1971).

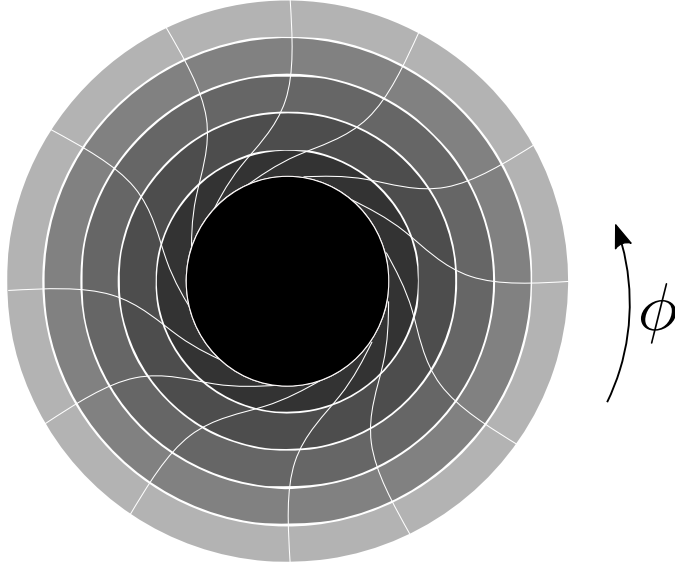


Figura 3: representación gráfica del arrastre gravitacional producido por un agujero negro que rota respecto a su eje de simetría, visto desde  $\theta = 0$ . En esta ilustración, el agujero negro rota en sentido antihorario y las líneas curvas otorgan una noción de la deformación del enmallado espacio–temporal.

Con base en lo anterior, se definen las superficies de límite estático (PENSORE, 1971), en donde  $dr = d\theta = d\phi = 0$ , por lo tanto el elemento de línea de la ecuación (3.1) toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2. \quad (3.6)$$

En el caso de partículas lumínicas y tipo tiempo se cumple que  $ds^2 \leq 0$ , por lo cual

$$g_{tt} = - \left( 1 - \frac{2M}{\Sigma} \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta \geq 0. \quad (3.7)$$

Esta desigualdad se satisface en los intervalos

$$0 \leq r \leq r_e^- \quad \text{y} \quad r_e^+ \leq r < \infty, \quad (3.8)$$

donde  $r_e^- = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$  y  $r_e^+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$  corresponden con los radios de las superficies de límite estático o ergosuperficie interna y externa, respectivamente. En este orden de ideas, se define la ergorregión (o ergosfera) como la zona comprendida entre el horizonte de eventos externo y la ergosuperficie externa, en donde ninguna partícula, ni siquiera la luz, puede mantenerse estática. En esta región, las partículas pueden extraer momento y energía, y así verse forzadas a describir distintas trayectorias. En la figura (4) se esquematiza la distribución espacio–temporal de un agujero negro de Kerr, en donde se ilustra cada una de las superficies previamente mencionadas.

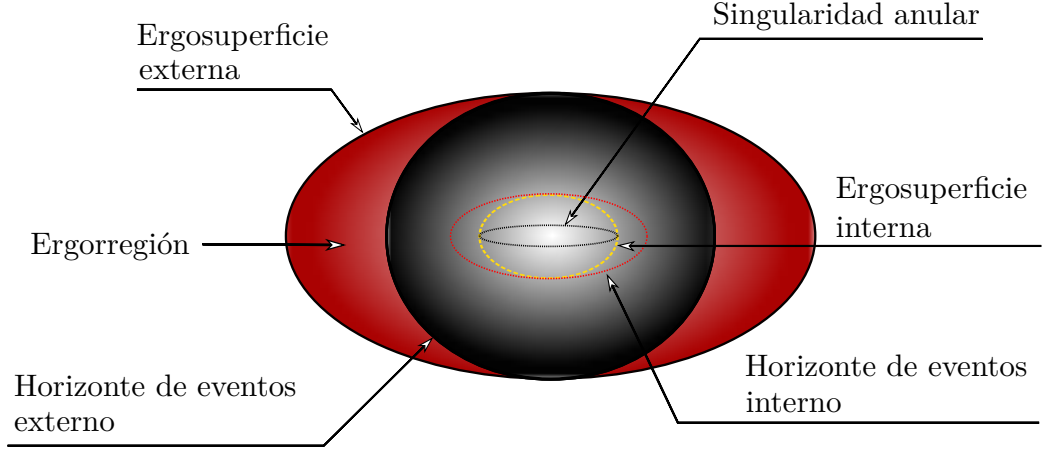


Figura 4: representación gráfica del espacio–tiempo de Kerr, en donde se ilustran las distintas superficies de radio constante y la singularidad anular. Puede apreciarse cómo la ergorregión externa, comprendida entre  $r_+$  y  $r_e^+$ , envuelve el horizonte de eventos externo, puesto que  $r_+ < r_e^+$ . Por el contrario, la ergorregión interna está contenida dentro del horizonte de sucesos interno, ya que  $r_- > r_e^-$ . Adicionalmente, cuando  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , cada uno de los horizontes de eventos coincide con las respectivas ergosuperficies. Además, en  $\theta = \pi/2$  la ergosuperficie externa coincide con el horizonte de eventos de Schwarzschild, y la interna con la singularidad anular. Imagen adaptada de (VISSER, 2007).

Finalmente, entre todas las trayectorias que pueden trazar los fotones alrededor de un agujero negro de Kerr, son de particular interés aquellas que se mueven sobre una superficie de radio constante, pues estas delimitan la zona más cercana al agujero negro en la cual los fotones pueden permanecer en una órbita inestable, como se estudiará en la sección (3.2). En consecuencia, para describir la dinámica de los fotones, se recurre al formalismo de Hamilton–Jacobi presentado en la sección (2.3).

### 3.1. Formalismo de Hamilton–Jacobi en el espacio–tiempo de Kerr

Al reemplazar el hamiltoniano para una partícula de prueba dado por la expresión (2.9) en la ecuación de Hamilton–Jacobi (2.24), se obtiene que

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.9)$$

en donde  $g^{\mu\nu}$  son las componentes contravariantes del tensor métrico en el espacio–tiempo de Kerr

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Sigma\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2 \theta], \quad g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma}, \quad (3.10)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta}, \quad g^{t\phi} = -\frac{a}{\Delta\Sigma}(r^2 + a^2 - \Delta).$$

Ahora, al reemplazar los momentos de la ecuación (2.23) en la expresión (3.9) se tiene

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.11)$$

de tal manera que se recurre al método de separación de variables para solucionar la ecuación de Hamilton-Jacobi, en donde se plantea una solución de la forma (GOLDS-TEIN, 1980)

$$S(t, r, \theta, \phi, \lambda) = S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi) + S_\lambda(\lambda). \quad (3.12)$$

Por otra parte, el hecho de que la métrica de Kerr sea estacionaria y axialmente simétrica implica que  $t$  y  $\phi$  son coordenadas cíclicas en el hamiltoniano, por lo tanto se conserva la energía  $E$  y el momento angular azimutal  $L$ . Así, de la expresión (2.23) se obtiene que

$$-E = \frac{dS_t}{dt} \Rightarrow S_t = -Et, \quad L = \frac{dS_\phi}{d\phi} \Rightarrow S_\phi = L\phi,$$

donde el signo negativo de la energía se debe a la signatura de la métrica adoptada (CHANDRASEKHAR, 1998). Esto permite reescribir la ecuación (3.12) en términos de dichas constantes

$$S(t, r, \theta, \phi, \lambda) = -Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\lambda(\lambda), \quad (3.13)$$

y con lo anterior, la ecuación (3.11) toma la forma

$$\frac{1}{2} (g^{tt} E^2 + g^{\phi\phi} L^2 - 2g^{t\phi} LE + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2) = -\frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda}. \quad (3.14)$$

Es posible apreciar que el lado izquierdo de la ecuación (3.14) corresponde al hamiltoniano, cuya normalización satisface que

$$\frac{1}{2} (g^{tt} E^2 + g^{\phi\phi} L^2 - 2g^{t\phi} LE + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2) = -\frac{1}{2}\mu^2, \quad (3.15)$$

por lo cual

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\mu^2 \Rightarrow S_\lambda = \frac{1}{2}\mu^2 \lambda,$$

así, la solución general (3.13) se expresa como

$$S(t, r, \theta, \phi, \lambda) = -Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2}\mu^2\lambda. \quad (3.16)$$

A partir de ahora, se concentrará la atención en la ecuación (3.15), y para efectos prácticos en los cálculos se procede a realizar la siguiente sustitución

$$A = g^{tt}E^2 + g^{\phi\phi}L^2 - 2g^{t\phi}LE, \quad (3.17)$$

tal que al reemplazar las componentes del tensor métrico inverso de la ecuación (3.10), se tiene

$$\begin{aligned} A &= -\frac{E^2}{\Sigma\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta] + \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma\Delta \sin^2\theta} L^2 + \frac{2aLE}{\Delta\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) \\ &= -\frac{1}{\Sigma\Delta} [E^2(r^2 + a^2)^2 + L^2a^2 - 2aLE(r^2 + a^2)] + \frac{E^2a^2 \sin^4\theta + L^2 - 2aLE \sin^2\theta}{\Sigma \sin^2\theta} \\ &= -\frac{1}{\Sigma\Delta} [E(r^2 + a^2) - La]^2 + \frac{1}{\Sigma \sin^2\theta} [Ea \sin^2\theta - L]^2, \end{aligned}$$

entonces, la ecuación (3.15) se reescribe de la siguiente manera

$$-\frac{1}{\Sigma\Delta} [E(r^2 + a^2) - La]^2 + \frac{1}{\Sigma \sin^2\theta} [Ea \sin^2\theta - L]^2 + \frac{\Delta}{\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{\Sigma} p_\theta^2 = -\mu^2.$$

Ahora, al multiplicar ambos miembros de la expresión por  $\Sigma\Delta \sin^2\theta$ , se obtiene

$$\begin{aligned} &-[E(r^2 + a^2) - La]^2 \sin^2\theta + \Delta(Ea \sin^2\theta - L)^2 + \Delta^2 \sin^2\theta p_r^2 + \Delta \sin^2\theta p_\theta^2 \\ &= -\Sigma\Delta \sin^2\theta \mu^2, \end{aligned}$$

y al expandir  $\Sigma$

$$\begin{aligned} &\frac{-[E(r^2 + a^2) - La]^2 \sin^2\theta + \Delta^2 \sin^2\theta p_r^2 + r^2\Delta \sin^2\theta \mu^2}{\Delta \sin^2\theta} = \\ &-\frac{\Delta[a^2\Delta \sin^2\theta \cos^2\theta \mu^2 + (Ea \sin^2\theta - L)^2 + \sin^2\theta p_\theta^2]}{\Delta \sin^2\theta}, \end{aligned}$$

de tal manera que, luego de un poco de álgebra, se logran separar las variables  $r$  y  $\theta$

$$\underbrace{\frac{-[E(r^2 + a^2) - La]^2 + \Delta^2 p_r^2 + r^2\Delta \mu^2}{\Delta}}_{f(r)} = \underbrace{-a^2 \cos^2\theta \mu^2 - \left(aE \sin\theta - \frac{L}{\sin\theta}\right)^2 - p_\theta^2}_{f(\theta)}.$$

Esta igualdad se satisface si

$$f(r) = f(\theta) = -K,$$

donde  $K$  es una constante de acoplamiento, a partir de la cual es posible definir una tercera constante de movimiento  $Q$  que relacione la energía y el momento angular azimutal

$$Q = K - (aE - L)^2. \quad (3.18)$$

Esta se conoce como constante de Carter ([CARTER, 1968](#)), y permite describir de manera independiente la dinámica en dirección radial y latitudinal. Y para determinar las ecuaciones de movimiento se procede a escribir las funciones  $f(r)$  y  $f(\theta)$  en términos de dicha constante

- Para  $f(r)$  :

$$Q = \frac{[E(r^2 + a^2) - La]^2 - \Delta^2 p_r^2 - \Delta r^2 \mu^2}{\Delta} - (aE - L)^2,$$

$$\Delta^2 p_r^2 = [E(r^2 + a^2) - La]^2 - \Delta[Q + (aE - L)^2 + r^2 \mu^2],$$

y recordando que

$$\dot{r} = p^r = g^{rr} p_r = \frac{\Delta p_r}{\Sigma} \quad \Rightarrow \quad p_r = \frac{\Sigma \dot{r}}{\Delta},$$

entonces

$$\dot{r} = \pm \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma}, \quad \mathcal{R} = [E(r^2 + a^2) - La]^2 - \Delta[Q + (aE - L)^2 + r^2 \mu^2]. \quad (3.19)$$

- Para  $f(\theta)$  :

$$Q = a^2 \mu^2 \cos^2 \theta - \left( aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2 + p_\theta^2 - (aE - L)^2,$$

$$p_\theta^2 = Q + (aE - L)^2 - a^2 \mu^2 \cos^2 \theta - \left( aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= Q - a^2 \mu^2 \cos^2 \theta + a^2 E^2 + L^2 - a^2 E^2 \sin^2 \theta - \frac{L^2}{\sin^2 \theta}$$

$$= Q - a^2 \mu^2 \cos^2 \theta + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= Q - \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right],$$

y al igual que en el caso anterior

$$\dot{\theta} = p^\theta = g^{\theta\theta} p_\theta = \frac{p_\theta}{\Sigma} \quad \Rightarrow \quad p_\theta = \Sigma \dot{\theta},$$

entonces

$$\dot{\theta} = \pm \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma}, \quad \Theta = Q - \cos^2 \theta \left[ a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (3.20)$$

- Para completar el conjunto de ecuaciones de movimiento es necesario tener en cuenta que

$$p^t = \dot{t} = g^{t\mu} p_\mu = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_\phi,$$

$$p^\phi = \dot{\phi} = g^{\phi\mu} p_\mu = g^{\phi\phi} p_\phi + g^{\phi t} p_t,$$

con lo cual se obtienen las dos ecuaciones restantes

$$\dot{t} = \frac{[(r^2 + a^2) - a^2 \Delta \sin^2 \theta] E - 2MarL}{\Sigma \Delta}, \quad (3.21)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Sigma \Delta} \left( 2MarE + L \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right). \quad (3.22)$$

Es necesario aclarar que el formalismo de Hamilton–Jacobi se desarrolló hasta el punto en donde fue posible separar las variables  $r$  y  $\theta$ , y así obtener los momentos

$$p_r = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \quad p_\theta = \sqrt{\Theta}, \quad (3.23)$$

con los cuales se determina una expresión para las coordenadas  $x^\mu$  al integrar el conjunto de ecuaciones (3.19–3.22). Sin embargo, esto también puede realizarse al continuar el desarrollo del formalismo y reemplazar los momentos de (3.23) en la solución general (3.16), donde se obtiene que

$$S(t, r, \theta, \phi, \lambda) = \frac{\mu^2}{2} \lambda - Et + L\varphi \pm \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr \pm \int_{\theta_0}^\theta \sqrt{\Theta} d\theta, \quad (3.24)$$

en cuyo caso, el paso a seguir es derivar la función  $S$  respecto a cada una de las constantes  $\alpha_\mu$ , y así obtener un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas para cada valor de  $\lambda = \lambda_k$ . El hecho de que estas constantes sean arbitrarias ofrece la posibilidad de elegir el conjunto  $\{\alpha_\mu\} = \{\mu^2, E, Q, L\}$ , y así obtener finalmente una expresión equivalente para las coordenadas  $x^\mu$ , con las cuales es posible describir la dinámica de una partícula de prueba que circunda alrededor de un agujero negro de Kerr. No obstante, todo este proceso requiere de un tratamiento matemático más complejo en contraste al desarrollado inicialmente (VIEIRA, 2015). Por esta razón, luego de comparar ambos métodos se descartó este último, y a partir de ahora se continuará con el estudio del conjunto de ecuaciones (3.19–3.22).

## 3.2. Órbitas esféricas de fotones

El estudio de las geodésicas nulas alrededor de un agujero negro es de particular interés, pues las trayectorias que siguen los fotones modifican la percepción óptica que un observador distante puede llegar a tener de estos cuerpos compactos. Algunos estudios muestran que existe un radio límite donde los fotones pueden orbitar en el plano ecuatorial alrededor de un agujero negro de Kerr, sin ser atrapados por su atracción gravitacional (BARDEEN, 1972b). Sin embargo, esto puede extenderse al caso tridimensional, en donde los fotones se mueven sobre una superficie de radio constante. Entonces, se reescriben las ecuaciones (3.19–3.20) con el fin de realizar un análisis de este tipo de órbitas, y así determinar las condiciones iniciales para las cuales estas trayectorias sean plausibles. En el caso de partículas nulas se tiene  $\mu = 0$ , por lo cual

$$\Sigma^2 \dot{r}^2 = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta[Q + (aE - L)^2], \quad (3.25)$$

$$\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = Q - \cos^2 \theta \left[ \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right]. \quad (3.26)$$

Para mayor practicidad en los cálculos, es conveniente realizar una reparametrización de la forma (BARDEEN, 1972b)

$$\xi = \frac{L}{E}, \quad \eta = \frac{Q}{E^2}, \quad (3.27)$$

de tal manera que al dividir las ecuaciones (3.25) y (3.26) por  $E^2$ , estas pueden reescribirse en términos de los parámetros (3.27), así

$$\left( \frac{\Sigma}{E} \right)^2 \dot{r}^2 = (r^2 + a^2 - a\xi)^2 - \Delta[\eta + (a - \xi)^2]. \quad (3.28)$$

$$\left( \frac{\Sigma}{E} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \eta - \cos^2 \theta \left[ \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \right]. \quad (3.29)$$

A continuación, se procede a realizar un análisis independiente del movimiento radial y latitudinal.

**3.2.1. Movimiento radial** Es claro que las condiciones necesarias para obtener órbitas esféricas están dadas por

$$\dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0,$$

lo cual se garantiza ya que la coordenada  $r$  debe permanecer constante. Por otra parte, al expandir  $\Delta$  y desarrollar los procesos algebraicos de la ecuación (3.28), se obtiene

una expresión más cómoda para determinar los puntos de retorno en dirección radial

$$\left(\frac{\Sigma}{E}\right)^2 \dot{r}^2 = \mathcal{R}(r) = r^4 + r^2(a^2 - \eta - \xi^2) + 2Mr[\eta + (a - \xi)^2] - a^2\eta = 0,$$

de tal forma que al derivar la expresión anterior respecto a  $\lambda$  se tiene que

$$2\left(\frac{\Sigma}{E}\right)^2 \dot{r}\ddot{r} + \frac{4r\dot{r}^2}{E}\left(\frac{\Sigma}{E}\right) = \dot{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0,$$

y por la condición de órbitas esféricas,  $\dot{r} = 0$

$$\left(\frac{\Sigma}{E}\right)^2 \ddot{r}^2 = 2r^3 + r(a^2 - \eta - \xi^2) + M[\eta + (a - \xi)^2] = 0,$$

por lo tanto, se satisfacen las equivalencias

$$\dot{r} = 0 \equiv \mathcal{R} = 0, \quad \ddot{r} = 0 \equiv \frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0. \quad (3.30)$$

Para cada superficie de  $r$  constante se tiene un par  $\{\xi, \eta\}$  que satisface las condiciones de órbitas esféricas. Se procede entonces a determinar los valores de dichas constantes al resolver el sistema de ecuaciones conformado por las expresiones en (3.30). Al calcular las raíces se obtienen dos tipos de soluciones (apéndice A.1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{r^2 + a^2}{a}, & \xi_2 &= -\frac{r^3 - 3Mr^2 + a^2r + a^2M}{a(r - M)}, \\ \eta_1 &= -\frac{r^4}{a^2}, & \eta_2 &= -\frac{r^3(r^3 - 6Mr^2 + 9M^2r - 4a^2M)}{a^2(r - M)^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

El par  $\{\xi_1, \eta_1\}$  se descarta ya que estos carecen de sentido físico, ya que para  $\eta < 0$  el radio de la órbita esférica está por dentro del horizonte de eventos (apéndice A.1). Por esta razón, a partir de ahora las etiquetas  $\xi$  y  $\eta$  corresponderán con  $\{\xi_2, \eta_2\}$ . En la figura (5) se muestra la dependencia de  $\xi$  y  $\eta$  en función de  $r$ .

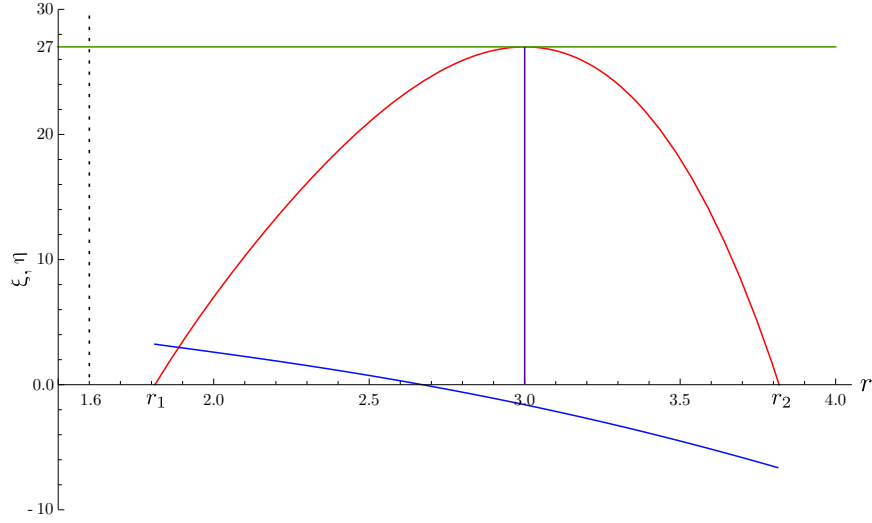


Figura 5: dependencia de  $\xi$  (curva azul) y  $\eta$  (curva roja) en función de  $r$ , para un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.8$ . Puede apreciarse que existen dos raíces  $r_1$  y  $r_2$  de  $\eta$  al exterior del horizonte de eventos  $r_+ = 1.6$  (línea vertical punteada), para los cuales se satisface que  $\eta \geq 0$ . Además, en  $r = 3$  (línea vertical púrpura) se obtiene el valor máximo  $\eta = 27$  (línea horizontal verde), el cual es independiente del parámetro de rotación. Por otra parte,  $\xi$  no tiene ninguna restricción entre  $r_1$  y  $r_2$ , sin embargo, es evidente que  $\xi$  y  $\eta$  no pueden tomar simultáneamente el valor de cero.

Para cada par  $\{\xi, \eta\}$ , es importante conocer cuáles son los puntos de retorno en la trayectoria de cada fotón. Para ello, se define el potencial efectivo radial como  $V(r) = E$  (BARDEEN, 1972a), al resolver para  $E$  a partir de la condición de órbitas esféricas  $\mathcal{R} = 0$ , así

$$V(r) = \frac{2MraL + \sqrt{(2MraL)^2 + [r^4 + a^2r^2 + 2Mra^2][(Q + L^2)\Delta - a^2L^2]}}{r^4 + a^2r^2 + 2Mra^2}. \quad (3.32)$$

Entonces, para determinar los puntos de retorno se calcula  $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ , en donde se obtienen 7 raíces: cuatro complejas y tres reales, dos negativas y una positiva. De lo anterior se concluye que los fotones solo tienen un punto de retorno en el intervalo  $r_+ < r < \infty$  (BARDEEN, 1972b). Así mismo, con el criterio de la segunda derivada se obtuvo que  $\frac{d^2V(r)}{dr^2} < 0$ , por lo cual, el punto de retorno coincide con un punto de equilibrio inestable. En otras palabras, una pequeña perturbación puede hacer que los fotones que tracen una órbita esférica caigan hacia el agujero negro o escapen hacia el infinito, como se aprecia en la figura (6).

De lo anterior, se puede inferir que el radio de las órbitas esféricas delimita una región de captura de fotones, usualmente conocida como fotosfera o fotorregión (TEO, 2003). La importancia de esta radica en el hecho de constituir la zona más cercana al agujero negro a partir de la cual es posible extraer información. Como se mencionó al

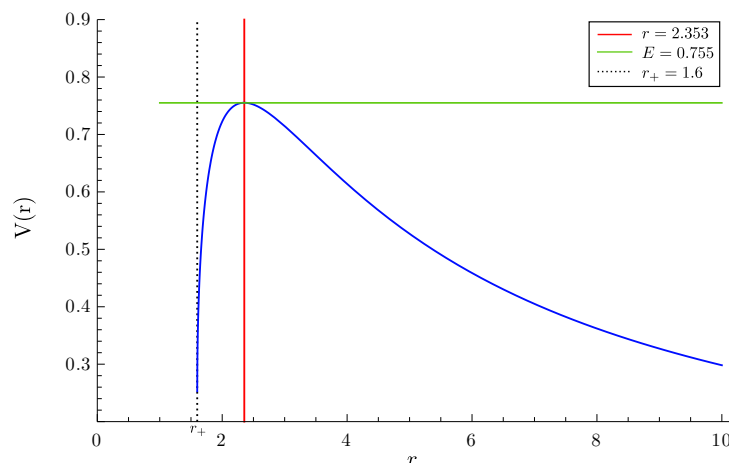


Figura 6: potencial efectivo radial para un fotón que puede trazar una órbita esférica. La línea punteada representa el radio del horizonte de eventos  $r_+ = 1.6$  para un agujero negro de Kerr con parámetro de rotación  $a = 0.8$ , y la línea en rojo corresponde con el radio de la órbita esférica  $r = 2.353$ . Es posible apreciar que si un fotón traza este tipo de órbitas, una ligera perturbación puede hacer que caiga hacia el horizonte de eventos o escape hacia el infinito. Para un fotón con momento angular  $L = 1$  y constante de Carter  $Q = 10$ , la energía que debe portar es  $E = 0.755$ , correspondiente con la línea verde tangente al punto de equilibrio inestable. Además, el potencial  $V(r) \rightarrow 0$  en el límite donde  $r \rightarrow \infty$ , lo cual corrobora que el espacio-tiempo de Kerr es asintóticamente plano. La gráfica fue reproducida del trabajo *Black hole shadows* (VIEIRA, 2015).

inicio de la sección, la forma aparente de un agujero negro depende de las geodésicas nulas, y se hace énfasis en la palabra “aparente”, puesto que existe una brecha entre el horizonte de eventos y la fotorregión, como se aprecia en la figura (6). Es decir, para un observador distante no es posible ver directamente el horizonte de eventos. En consecuencia, es necesario determinar cuál es rango de la fotorregión, puesto que  $r$  no puede tomar cualquier valor ya que se debe satisfacer la condición  $\eta \geq 0$ . Por consiguiente, se procede a realizar un análisis de los valores extremos para los cuales  $\eta = 0$  (apéndice A.2). El cálculo de las raíces da como resultado

$$r_1 = 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos \left( -\frac{|a|}{M} \right) \right] \right\}, \quad (3.33)$$

$$r_2 = 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos \left( \frac{|a|}{M} \right) \right] \right\}, \quad (3.34)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  corresponden con los radios para órbitas circulares prógradas y retrógradas, respectivamente (BARDEEN, 1972b). Entonces, el ancho de la fotorregión está determinado por los valores de  $r$  permitidos para que existan órbitas esféricas ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ), el cual depende de la rotación del agujero negro. En la figura (7) se muestra la dependencia de  $r_1$  y  $r_2$  en función de  $a$ .

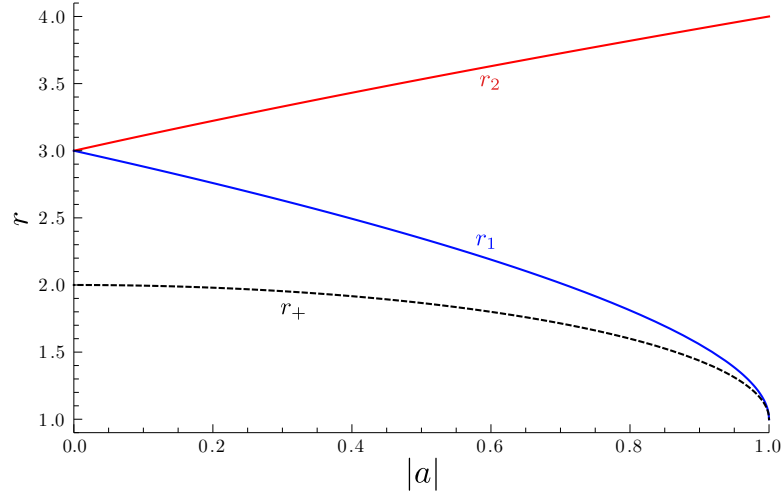


Figura 7: coordenada  $r$  en función del parámetro de rotación  $|a|$ . La curva en negro representa el radio del horizonte de eventos, y las curvas en azul y rojo corresponden a  $r_1$  y  $r_2$ . Cuando  $|a| = 0$ ,  $r_1$  y  $r_2$  coinciden el único radio permitido para la existencia de órbitas esféricas en  $r = 3$ , y el radio del horizonte de eventos se ubica en  $r_+ = 2$  (THORNE, 1973). En el caso de rotación máxima  $|a| = 1$ ,  $r_1$  coincide con el horizonte de eventos de Kerr ( $r_+ = 1$ ), mientras  $r_2$  toma el valor máximo posible en  $r = 4$ .

Finalmente, un aspecto interesante a resaltar es que los fotones que trazan órbitas prógradas pueden acercarse más al horizonte de eventos, en contraste con aquellos que trazan órbitas retrógradas, las cuales son atrapadas por la atracción gravitacional desde una distancia mayor.

**3.2.2. Movimiento latitudinal** En primera instancia, se realiza un cambio de variable de la forma

$$u = \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{du}{d\lambda} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} = -\dot{\theta} \sin \theta,$$

y al considerar la relación trigonométrica  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ , la expresión para los puntos de retorno en (3.26) toma la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Sigma}{E}\right)^2 \dot{u}^2 = \Psi(u) &= (1 - u^2)\eta - u^2(1 - u^2) \left[ \frac{\xi^2}{1 - u^2} - a^2 \right] \\ &= (1 - u^2)\eta - u^2 [\xi^2 - a^2(1 - u^2)] \geq 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Al calcular las raíces de la ecuación (3.35) se obtiene

$$u_{ret}^2 = \frac{(a^2 - \eta - \xi^2) \pm \sqrt{(a^2 - \eta - \xi^2)^2 + 4a^2\eta}}{2a^2}, \quad (3.36)$$

donde puede verse que los puntos de retorno dependen de la rotación del agujero negro y de las constantes de movimiento, por lo cual se realiza un análisis de estas dependencias.

### Partículas sin momento angular

Al considerar fotones con  $L = 0$ , de la expresión (4.13) es claro que  $\xi = 0$ , así, de (3.36) se tiene que

$$u_{ret}^2 = \frac{(a^2 - \eta) \pm \sqrt{(a^2 - \eta)^2 + 4a^2\eta}}{2a^2}.$$

Los casos en donde  $\eta \leq 0$  se descartan puesto que, como se ha mencionado,  $\eta < 0$  no tiene sentido físico y el par  $\{\xi = 0, \eta = 0\}$  no satisface la condición de órbitas esféricas, como se puede apreciar en la figura (5). Entonces, para  $\eta > 0$

$$u_{ret}^2 = \frac{a^2 - \eta \pm (a^2 + \eta)}{2a^2} \begin{cases} u_{ret_{1,2}} = \pm \frac{\sqrt{-\eta}}{a}, \\ u_{ret_{3,4}} = \pm 1, \end{cases}$$

en donde es claro que  $u_{ret_{1,2}}$  se descartan, debido a la raíz negativa. Por lo cual,  $u_{ret_{3,4}}$  corresponden con los puntos de retorno

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi.$$

En otras palabras, los fotones con momento angular inicial  $L = 0$  pueden cruzar los polos.

### Partículas con momento angular

Al considerar el momento angular de las partículas, de la ecuación (3.36) se pueden estudiar los casos en donde  $\eta \geq 0$ .

1.  $\eta = 0$  :

$$u_{ret}^2 = \frac{a^2 - \xi^2 \pm (a^2 - \xi^2)}{2a^2} \begin{cases} u_{ret_{1,2}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}, \\ u_{ret_3} = 0. \end{cases}$$

Del apéndice (A.1) se puede apreciar que si  $\eta = 0$ , entonces  $\xi^2 > a^2$ , de esta forma las raíces  $u_{ret_{1,2}}$  se descartan. Por lo cual,  $u_{ret} = 0$  corresponde con el único punto de retorno  $\theta = \pi/2$ . Es decir, el fotón está confinado al plano ecuatorial en una órbita circular.

2.  $\eta > 0$  :

Para este caso, es evidente  $u_{ret}t^2$  en (3.36) debe ser mayor que cero, así

$$u_{ret}^2 = \frac{(a^2 - \eta - \xi^2) + \sqrt{(a^2 - \eta - \xi^2)^2 + 4a^2\eta}}{2a^2}.$$

Además, el rango permitido para  $u$  oscila entre  $0 \leq |u| \leq 1$ , de tal manera que al evaluar estos casos extremos en (3.35) se tiene que

$$\Psi(u)|_{u=0} = \eta, \quad \Psi(u)|_{u=1} = -\xi^2,$$

donde puede verse que los puntos de retorno satisfacen

$$u_{ret}^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \theta_{ret} < \pi.$$

En consecuencia, un fotón con  $L \neq 0$  y  $\eta > 0$  no puede atravesar los polos. Por otra parte,  $\Psi(u) > 0$  en  $\theta = \pi/2$ , lo cual implica que el fotón cruza en repetidas ocasiones el plano ecuatorial.

**3.2.3. Ejemplos de órbitas esféricas** A continuación, se muestra un conjunto de ejemplos correspondientes a órbitas esféricas, cuyos datos iniciales se construyeron a partir de las condiciones estudiadas previamente, y fueron reproducidas de los trabajos (VIEIRA, 2015) y (TEO, 2003). Las simulaciones se realizaron en FORTRAN 90 al resolver las ecuaciones de movimiento mediante un integrador Runge–Kutta 4 con paso fijo. Es preciso aclarar que las expresiones (3.19)–(3.22) se emplearon para realizar un análisis de las condiciones requeridas para la generación de datos iniciales, mas no se resolvieron numéricamente. Esto se debe a que el estudio de órbitas esféricas en el espacio–tiempo de Kerr es un caso particular que permite realizar una separación entre la componente radial y latitudinal, mientras que en otro tipo de geometrías descritas por elementos de línea más complejos, esto no es posible. Además, debido a las raíces cuadráticas presentes en estas ecuaciones el error numérico tiende a aumentar (LEVIN, 2008); en consecuencia, se empleó el formalismo hamiltoniano y se solucionaron las ecuaciones dinámicas en (2.8).

Por otra parte, todas las simulaciones fueron inicializadas en  $t_0 = 0$ , lanzadas desde el plano ecuatorial  $\theta_0 = \pi/2$  y debido a la simetría axial,  $\phi_0$  puede tomar cualquier valor. En este formalismo es necesario alimentar el código de momentos iniciales: por simplicidad, la energía fue tomada  $E = 1$  para todas las órbitas, pues un valor distinto solo conduce a un reescalamiento del parámetro afín;  $L$  se obtuvo de la expresión (3.31) dado el radio de la órbita y la rotación del agujero negro; por otra parte, la condición de órbitas esféricas impone que  $p_r = 0$  a lo largo de toda la simulación, y  $p_{\theta_0}$  se determinó a partir de la ligadura hamiltoniana para fotones  $\mathcal{H} = 0$ .

En la figura (8) se muestran seis órbitas (tres prógradas y tres retrógradas) alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 1$ , reproducidas de (TEO, 2003).

Cada una de estas corresponde a la trayectoria de un fotón, en donde se evidencia un comportamiento característico dependiendo de las condiciones iniciales. La figura (8–a) corresponde al caso en donde el fotón no tiene momento angular azimutal. Debido al arrastre gravitacional, este es obligado a moverse en dirección de la rotación del agujero negro, lo cual puede constatararse de la ecuación (3.22), en donde  $\dot{\phi}$  depende del parámetro  $a$ . Además, ya que  $L = 0$  el fotón puede cruzar los polos, como se mostró en el estudio de los puntos de retorno latitudinales. En la figura (8–b) se observa la trayectoria de un fotón con  $p_\theta$  cercano a  $\sqrt{27}$ , con lo cual la componente latitudinal influye en mayor medida en el movimiento. Esto se hace más evidente en la figura (8–c), correspondiente a un fotón con momento angular latitudinal máximo, el cual cruza de forma perpendicular el plano ecuatorial, en donde  $\dot{\phi} = 0$ . Por otra parte, en la figura (8–d) se muestra la órbita de un fotón con momento angular  $L = -6$ , en donde la componente azimutal predomina en el movimiento, pues cruza el plano ecuatorial con menor inclinación que en los casos anteriores; sin embargo, a pesar que la magnitud de  $L$  es alta, el hecho de que sea una órbita retrógrada implica que el arrastre gravitacional disminuye la magnitud de  $\dot{\phi}$ . En contraparte, la imagen (8–e) muestra un fotón con momento angular  $L = 1.999$ , en donde es claro que el arrastre gravitacional aumenta el movimiento en dirección azimutal, y el fotón cruza casi de forma paralela el plano ecuatorial. Finalmente, la figura (8–f) corresponde a un fotón con valores intermedios de  $L$  y  $p_\theta$ , en donde no son muy apreciables los efectos descritos previamente.

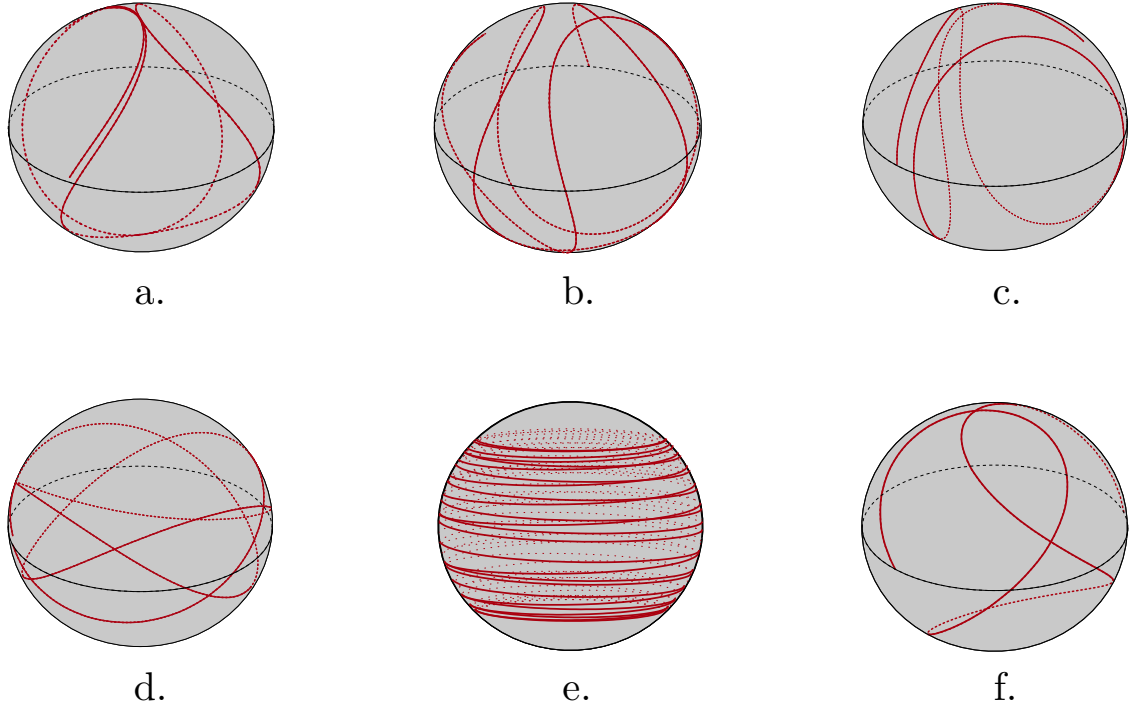
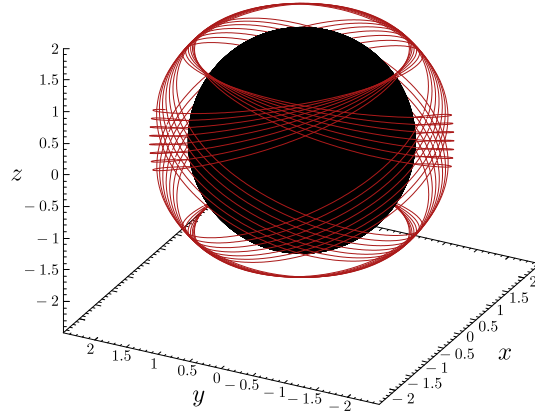


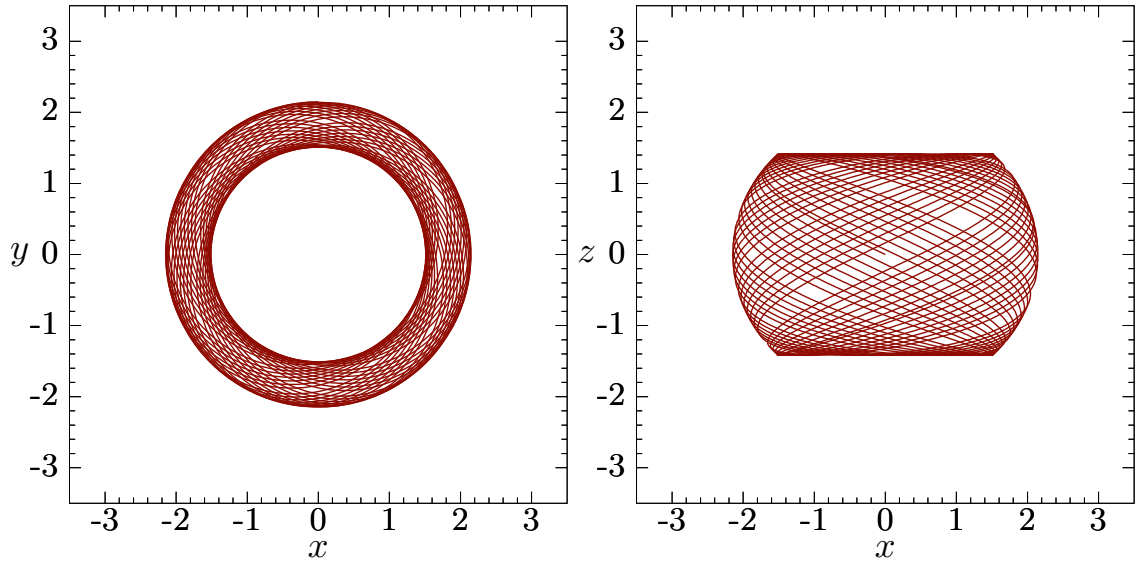
Figura 8: órbitas esféricas alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación máxima  $a = 1$ . Todas las trayectorias fueron trazadas sobre una esfera gris imaginaria, mapeada de las coordenadas de Boyer–Lindquist a cartesianas mediante las transformaciones (3.4). Todas las órbitas tienen un paso de integración  $d\lambda = 0,01$ , a excepción de la figura e., cuyo paso fue  $d\lambda = 0,0005$ . Las condiciones iniciales para cada órbita fueron:

- (a.)  $r = 1 + \sqrt{2}$ ,  $p_\theta = -(11 + 8\sqrt{2})^{1/2}$ ,  $L = 0$  y  $\lambda_f = 20$ .
- (b.)  $r = 1 + \sqrt{3}$ ,  $p_\theta = -(12 + 8\sqrt{3})^{1/2}$ ,  $L = -1$  y  $\lambda_f = 30$ .
- (c.)  $r = 3$ ,  $p_\theta = -(27)^{1/2}$ ,  $L = -2$  y  $\lambda_f = 30$ .
- (d.)  $r = 1 + 2\sqrt{2}$ ,  $p_\theta = -(16\sqrt{2} - 13)^{1/2}$ ,  $L = -6$  y  $\lambda_f = 50$ .
- (e.)  $r = 1.999$ ,  $p_\theta = -(3.2590)^{1/2}$ ,  $L = 1.999$  y  $\lambda_f = 3$  y  $\lambda_f = 3$ .
- (f.)  $r = 2$ ,  $p_\theta = -4$ ,  $L = 1$  y  $\lambda_f = 10$ .

Aunado a lo anterior, se muestran cinco órbitas esféricas (tres prógradas y dos retrógradas) para un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.8$  (figuras 9 – 11), y  $a = 0.01$  (figuras 12 – 13), reproducidas del trabajo (VIEIRA, 2015). En las simulaciones se dispuso de una esfera negra que representa el horizonte de eventos,  $r_+ = 1.6$  para el primer conjunto de gráficas, y  $r_+ = 1.999$  para el segundo. Además, se realiza una proyección sobre los planos  $xy$  y  $xz$  para cada órbita, y el valor final de  $\lambda$  es mayor para estas simulaciones, con el fin de tener una mejor ilustración del comportamiento de las órbitas. Finalmente, la interpretación física de los resultados es análoga al estudio realizado previamente.

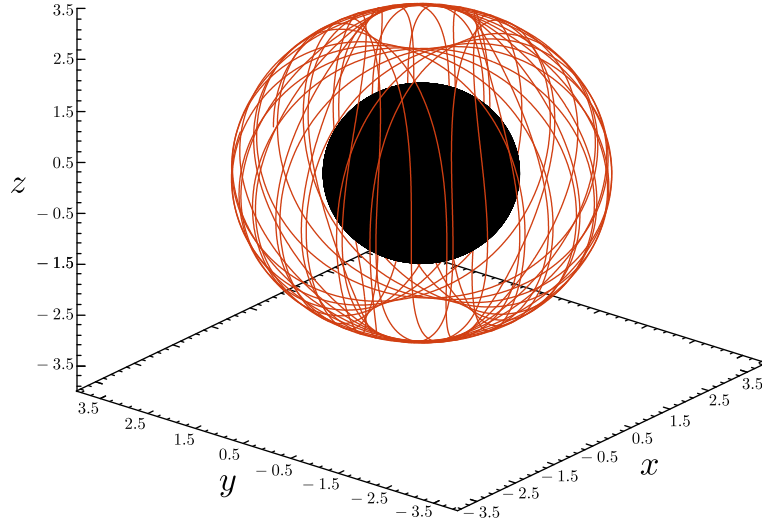


(a) Órbita esférica

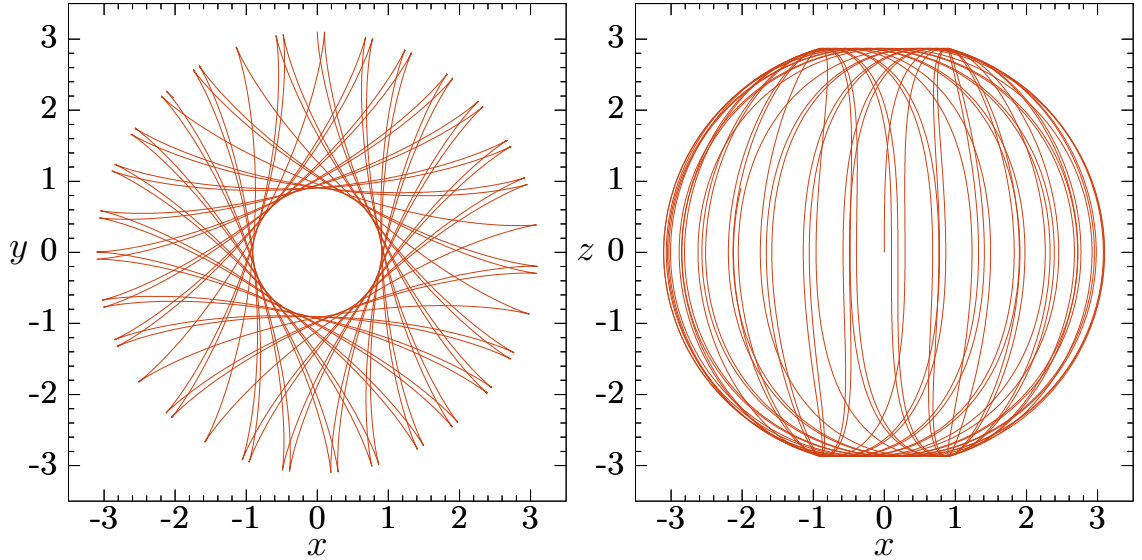


(b) Proyecciones sobre los planos  $xy$  y  $xz$

Figura 9: órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.8$  y datos iniciales  $r = 1.99219458$ ,  $p_{\theta_0} = -2.59495445$  y  $L = 2.62651754$ . El paso de integración empleado fue  $d\lambda = 0.01$ , hasta  $\lambda = 150$ . Puede apreciarse que el fotón no cruza por los polos, y el rango de oscilación latitudinal permitido es  $44,6^\circ \leq \theta \leq 135,3^\circ$ . La brecha entre el horizonte de eventos y la fotoesfera es  $\Delta r = 0.392195$ .

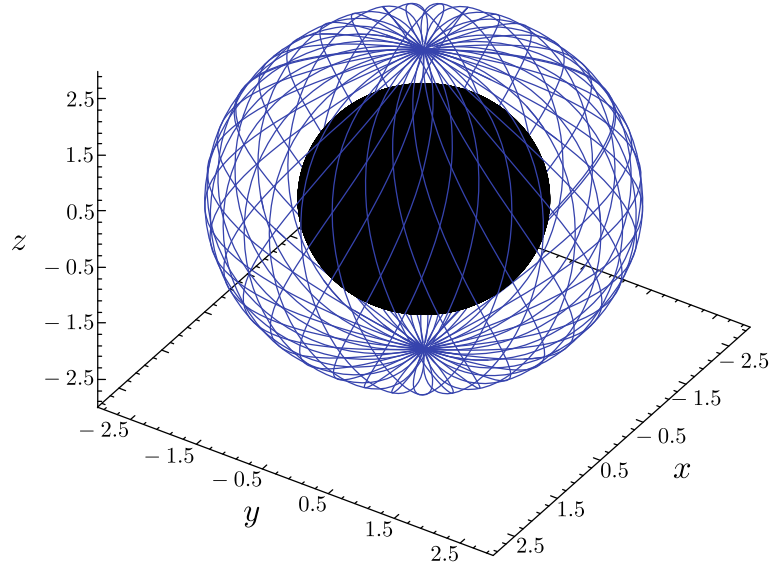


(a) Órbita esférica

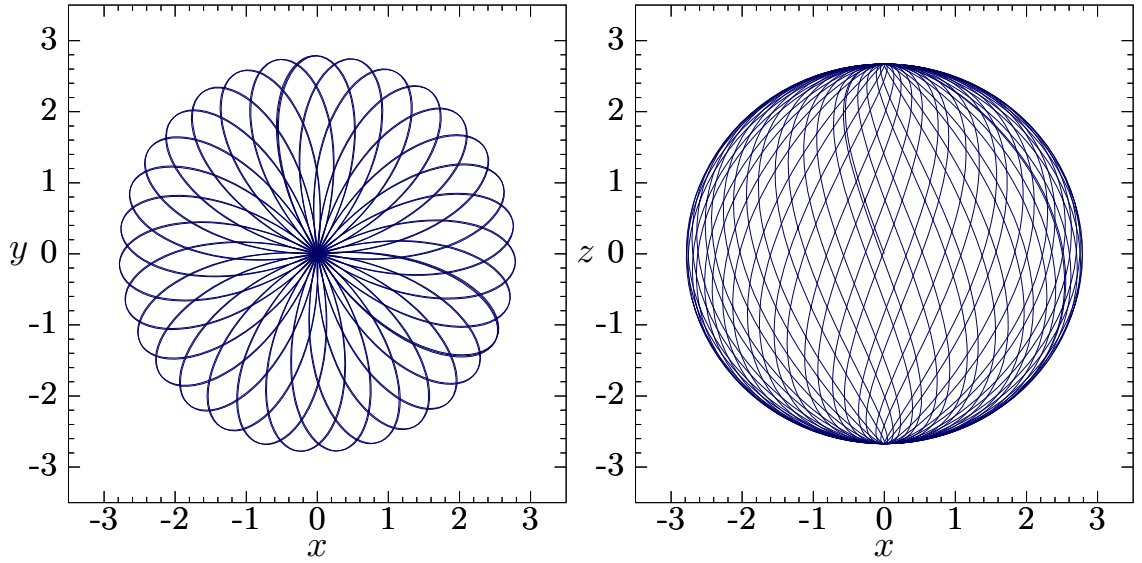


(b) Proyecciones sobre los planos  $xy$  y  $xz$

Figura 10: órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.8$  y datos iniciales  $r = 3$ ,  $p_{\theta_0} = -5.19615242$  y  $L = -1.6$ . El paso de integración empleado fue  $d\lambda = 0.01$ , hasta  $\lambda = 300$ . Se aprecia que el fotón no cruza por los polos, y el rango de oscilación latitudinal es  $16.94^\circ \leq \theta \leq 163.05^\circ$ . La brecha entre el horizonte de eventos y la fotosfera es  $\Delta r = 1.4$ . Los picos en la proyección sobre el plano  $xy$  se deben a que  $\dot{\phi} = 0$  en  $\theta = \pi/2$ . Esto quiere decir que los fotones cruzan de manera perpendicular el plano ecuatorial, lo cual se evidencia en la proyección  $xz$ .

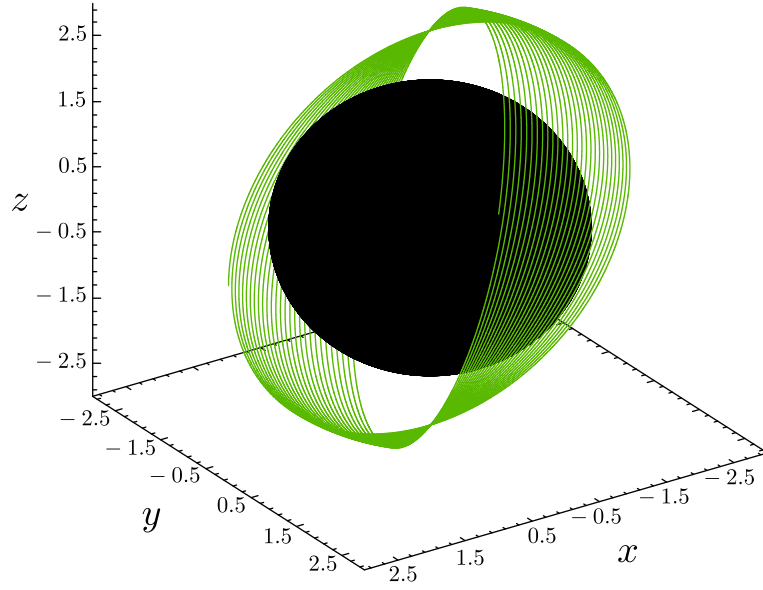


(a) Órbita esférica

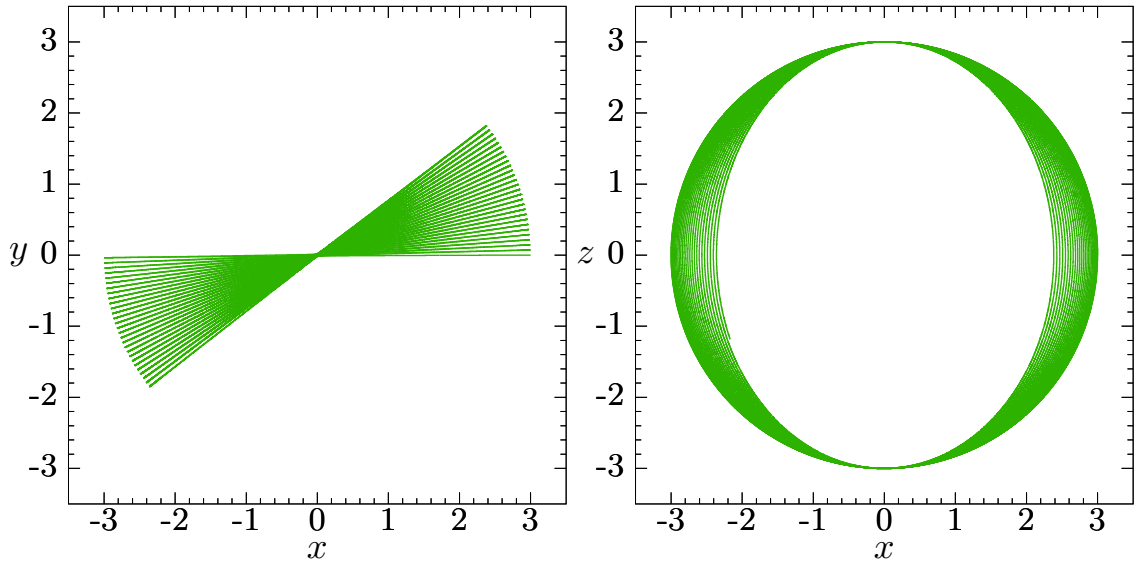


(b) Proyecciones sobre los planos  $xy$  y  $xz$

Figura 11: órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.8$  y datos iniciales  $r = 2.67062182$ ,  $p_{\theta_0} = -4.92026688$  y  $L = 0$ . El paso de integración empleado fue  $d\lambda = 0.1$ , hasta  $\lambda = 300$ . Puede apreciarse que el fotón cruza por los polos, entonces, el rango de oscilación latitudinal permitido es  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ . La brecha entre el horizonte de eventos y la fotosfera es  $\Delta r = 1.07062$ . Es importante destacar que los fotones cruzan el plano ecuatorial con velocidad angular  $\dot{\phi} \neq 0$ , a pesar de no tener momento angular azimutal.

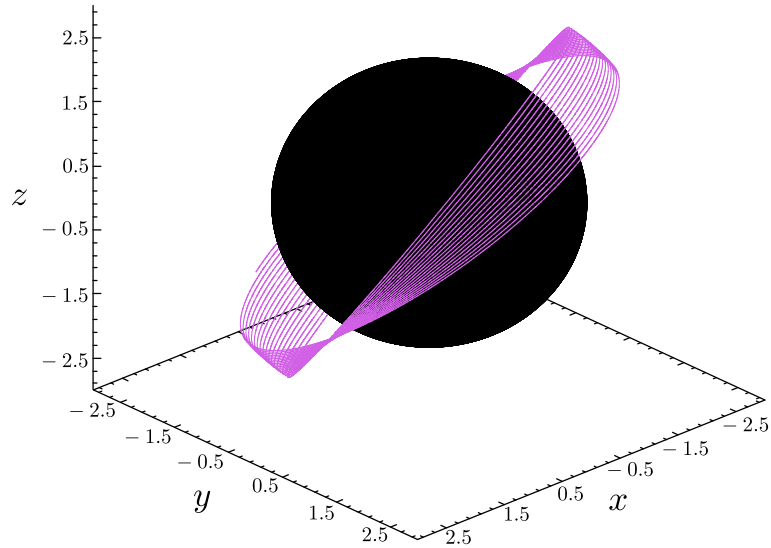


(a) Órbita esférica

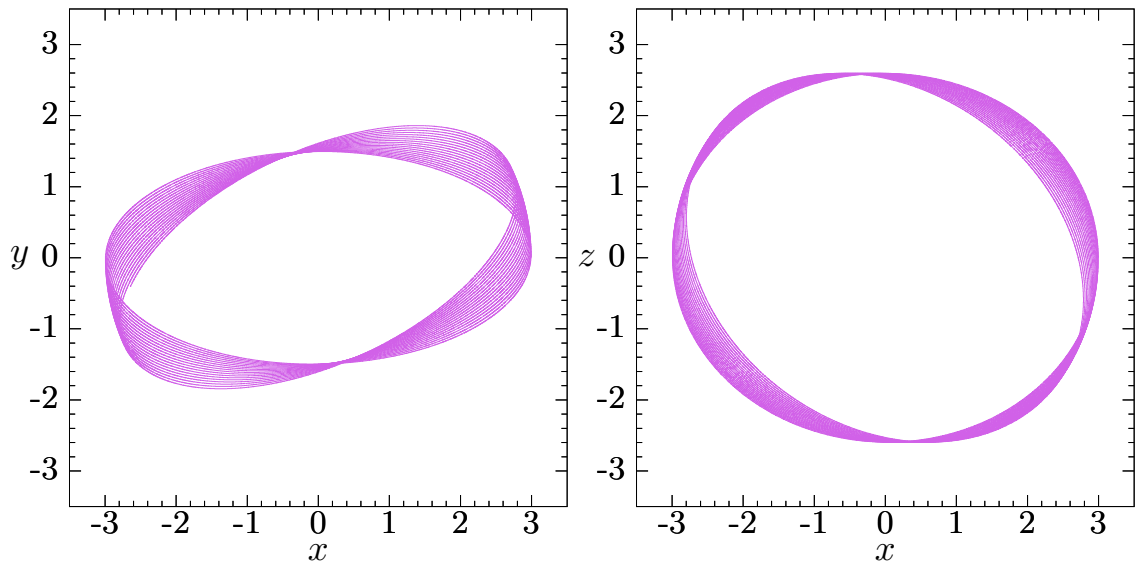


(b) Proyecciones sobre los planos  $xy$  y  $xz$

Figura 12: órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.01$  y datos iniciales  $r = 3$ ,  $p_{\theta_0} = -5.19615242$  y  $L = -0.02$ . El paso de integración empleado fue  $d\lambda = 0.001$ , hasta  $\lambda = 200$ . Puede apreciarse que el fotón cruza cerca de los polos, y el rango de oscilación latitudinal permitido es  $0,22^\circ \leq \theta \leq 179,77^\circ$ . La brecha entre el horizonte de eventos y la fotosfera es  $\Delta r = 1.001$ . El hecho de considerar un fotón con momento angular cercano a cero y un agujero negro con rotación lenta, implica que el movimiento del mismo oscila casi en un plano de  $\phi$  constante. Además, los picos sobre la proyección del plano  $xy$  indican que el fotón cruza el plano ecuatorial perpendicularmente.



(a) Órbita esférica



(b) Proyección sobre los planos  $xy$  y  $xz$

Figura 13: órbita esférica alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.01$  y datos iniciales  $r = 2.99419311$ ,  $p_{\theta_0} = -4.49276966$  y  $L = 2.5905449396664544$ . El paso de integración empleado fue  $d\lambda = 0.001$ , hasta  $\lambda = 200$ . Puede apreciarse que el fotón no cruza por los polos, y el rango de oscilación latitudinal permitido es  $29,96^\circ \leq \theta \leq 150,03^\circ$ . La brecha entre el horizonte de eventos y la fotoesfera es  $\Delta r = 0.995193$ .

Posterior al estudio de órbitas esféricas, lo siguiente es estudiar las trayectorias de los fotones provenientes de una fuente lumínica, que al ser detectadas formarán la imagen aparente del agujero negro, como se estudiará en el siguiente capítulo.

## 4. *SHADOW* DE UN AGUJERO NEGRO

La mayoría de la información que se obtiene del espacio exterior proviene de la radiación electromagnética; por lo cual, el estudio de las geodésicas nulas es de gran interés astrofísico. En el caso de los agujeros negros, debido a su naturaleza no es posible obtener una imagen directa de los mismos, pues no radían ni reflejan. En consecuencia, la información que se puede obtener de estos cuerpos proviene de los fotones que pasan más cerca del horizonte de sucesos y logran escapar de la atracción gravitacional. La radiación atrapada conformará una mancha negra sobre el fondo brillante que ilumine la visión de un observador distante, cuyos telescopios apunten hacia el agujero negro. Esta mancha oscura recibe el nombre de “sombra”, o el *shadow* de un agujero negro, y es lo más cercano a una imagen que se puede obtener de estos cuerpos compactos. A continuación, se muestran las herramientas necesarias para lograr esbozar el *shadow* de un agujero negro estacionario y axialmente simétrico.

### 4.1. *Shadows* en un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico

Sea  $\{\hat{e}_\mu\}$  una base de cuadvectores que permite describir un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico en un sistema coordenado cualesquiera, de tal manera que el producto interno entre los vectores base se define como

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son las componentes del tensor métrico asociado al elemento de línea

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi. \quad (4.2)$$

Debido al carácter estacionario y a la simetría axial, es claro que  $g_{0i} = 0$  para  $i \neq 3$ , y  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Es decir,  $\hat{e}_t$  y  $\hat{e}_\phi$  correspondientes a la parte temporal y azimutal no son ortogonales entre sí, pero sí lo son respecto a  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_\theta$ . Por otra parte, mediante  $\{\hat{e}_\mu\}$  es posible encontrar una base ortonormal asociada a un observador localmente inercial, tal que

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

donde  $\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu$  satisface el producto interno lorentziano y  $\eta_{\mu\nu}$  corresponde la métrica de Minkowski. Cada cuadvector  $\hat{e}_\mu$  puede ser escrito como una combinación de vectores

linealmente independientes, de manera general

$$\hat{e}_t = A_t \hat{e}_t + B_t \hat{e}_r + C_t \hat{e}_\theta + D_t \hat{e}_\phi, \quad (4.4)$$

$$\hat{e}_r = A_r \hat{e}_t + B_r \hat{e}_r + C_r \hat{e}_\theta + D_r \hat{e}_\phi, \quad (4.5)$$

$$\hat{e}_\theta = A_\theta \hat{e}_t + B_\theta \hat{e}_r + C_\theta \hat{e}_\theta + D_\theta \hat{e}_\phi, \quad (4.6)$$

$$\hat{e}_\phi = A_\phi \hat{e}_t + B_\phi \hat{e}_r + C_\phi \hat{e}_\theta + D_\phi \hat{e}_\phi, \quad (4.7)$$

lo cual puede reescribirse como

$$\hat{e}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \hat{e}_\nu, \quad (4.8)$$

donde  $[\Lambda_\mu{}^\nu]$  es una matriz de cambio de base de la forma

$$[\Lambda_\mu{}^\nu] = \begin{pmatrix} A_t & B_t & C_t & D_t \\ A_r & B_r & C_r & D_r \\ A_\theta & B_\theta & C_\theta & D_\theta \\ A_\phi & B_\phi & C_\phi & D_\phi \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

y cada una de sus componentes es un número real. Ahora, el problema radica en encontrar las 16 componentes de la matriz de transformación. Sin embargo, el hecho de que tres vectores sean ortogonales simplifica la tarea, puesto que cualquier vector colineal a cada uno de estos forma una tríada de vectores ortogonales entre sí. La elección de dicha tríada fue  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ , tal como se ilustra en la figura (14), pues la parte espacial de la métrica de Minkowski coincide con el espacio euclideo debido a la signatura adoptada.

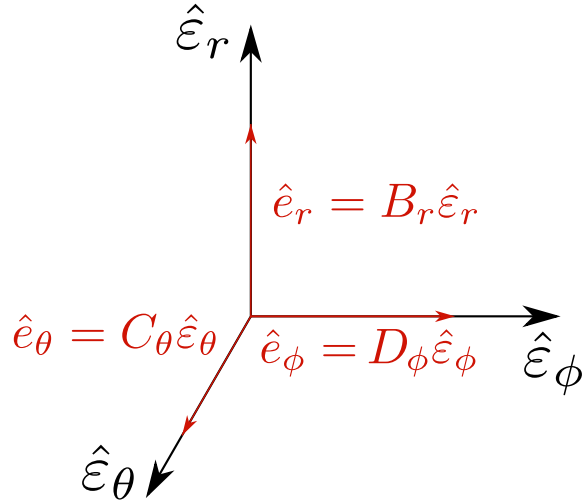


Figura 14: representación geométrica de la tríada ortogonal de vectores espaciales en dos marcos de referencia. Los vectores en negro corresponden a un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico, mientras que los vectores en rojo corresponden al espacio-tiempo de Minkowski.

Con base en lo anterior, la matriz de transformación en (4.9) se reduce a

$$[\Lambda_\mu^\nu] = \begin{pmatrix} A_t & B_t & C_t & D_t \\ 0 & B_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_\phi \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Por otra parte, es posible construir un cuarto vector ortogonal asociado a la base  $\{\hat{\varepsilon}_\mu\}$  mediante el procedimiento de Gram-Schmidt, tal que

$$\hat{\varepsilon}_\perp = \hat{\varepsilon}_t - \frac{\hat{\varepsilon}_t \cdot \hat{\varepsilon}_r}{|\hat{\varepsilon}_r|^2} \hat{\varepsilon}_r - \frac{\hat{\varepsilon}_t \cdot \hat{\varepsilon}_\theta}{|\hat{\varepsilon}_\theta|^2} \hat{\varepsilon}_\theta - \frac{\hat{\varepsilon}_t \cdot \hat{\varepsilon}_\phi}{|\hat{\varepsilon}_\phi|^2} \hat{\varepsilon}_\phi = \hat{\varepsilon}_t - \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \hat{\varepsilon}_\phi.$$

Siguiendo esta línea

$$\hat{e}_t \propto \hat{\varepsilon}_\perp \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_t = \alpha \left( \hat{\varepsilon}_t - \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \hat{\varepsilon}_\phi \right),$$

y al comparar con la expresión (4.4) se tiene

$$B_t = C_t = 0, \quad A_t = \alpha, \quad D_t = -A_t \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}.$$

Así, los vectores de la base localmente inercial toman la forma

$$\hat{e}_t = A_t \left( \hat{\varepsilon}_t - \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \hat{\varepsilon}_\phi \right), \quad \hat{e}_r = B_r \hat{\varepsilon}_r, \quad \hat{e}_\theta = C_\theta \hat{\varepsilon}_\theta, \quad \hat{e}_\phi = D_\phi \hat{\varepsilon}_\phi,$$

cuyas constantes se determinan a partir de la condición de ortonormalización de Minkowski

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = -1, \quad \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = 1, \quad \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1, \quad \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = 1,$$

por lo cual

$$A_t^2 \left( \hat{\varepsilon}_t - \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \hat{\varepsilon}_\phi \right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad A_t = \pm \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}},$$

$$B_r^2 \hat{\varepsilon}_r \cdot \hat{\varepsilon}_r = 1 \quad \Rightarrow \quad B_r = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}},$$

$$C_\theta^2 \hat{\varepsilon}_\theta \cdot \hat{\varepsilon}_\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad C_\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}},$$

$$D_\phi^2 \hat{\varepsilon}_\phi \cdot \hat{\varepsilon}_\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad D_\phi = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}.$$

De esta forma, los vectores de la base localmente inercial se escriben

$$\hat{e}_t = -\sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}} \left( \hat{\varepsilon}_t - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \hat{\varepsilon}_\phi \right), \quad (4.11)$$

$$\hat{e}_r = \frac{\hat{\varepsilon}_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\hat{\varepsilon}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \hat{e}_\phi = \frac{\hat{\varepsilon}_\phi}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}.$$

Los signos de las constantes se eligieron de tal manera que el espacio–tiempo sea asintóticamente plano. Finalmente, la matriz de cambio de base se reescribe como

$$[\Lambda_\mu{}^\nu] = \begin{pmatrix} A_t & 0 & 0 & -A_t \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

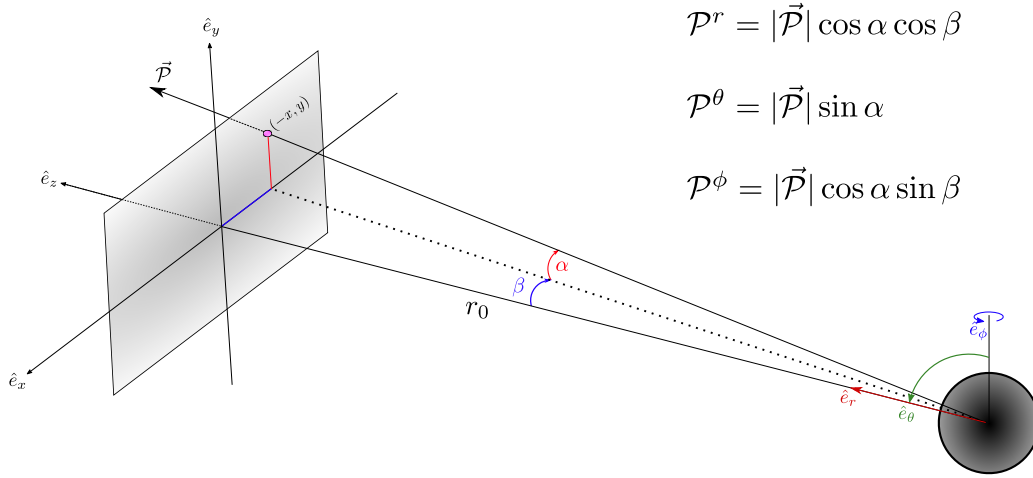
donde

$$A_t = \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}.$$

Una vez conocida la transformación que relaciona las mediciones en un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico con las de un observador localmente inercial, es necesario saber qué registra este observador si se ubica en el infinito.

## 4.2. Parámetros de impacto

Para visualizar el *shadow* de un agujero negro, es necesario traducir la información de los fotones que orbitan en las inmediaciones del mismo. Se define entonces como parámetros de impacto a todos los puntos  $(x, y)$  del plano imagen en donde un observador localizado en el infinito realiza las mediciones (VIEIRA, 2015), lo cual se ilustra en la figura (15).



$$\mathcal{P}^r = |\vec{\mathcal{P}}| \cos \alpha \cos \beta$$

$$\mathcal{P}^\theta = |\vec{\mathcal{P}}| \sin \alpha$$

$$\mathcal{P}^\phi = |\vec{\mathcal{P}}| \cos \alpha \sin \beta$$

Figura 15: ilustración del plano imagen asociado a un observador inercial ubicado a una distancia  $r_0$  del agujero negro. La posición final de cada fotón se caracteriza a través de la parte espacial del cuadrimomento  $\vec{\mathcal{P}}$  medido por dicho observador (la componente temporal es irrelevante ya que no influye en la trayectoria de los fotones), cuyo origen es tomado en el centro del agujero negro. Los parámetros de impacto están relacionados con los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , donde  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $\vec{\mathcal{P}}$  y su proyección en el plano  $xz$ , y  $\beta$  corresponde al ángulo formado entre dicha proyección y  $r_0$ . Además, el observador se ubica de tal manera que la dirección radial coincida con el eje  $z$ , en donde es claro que  $\hat{e}_x = \hat{e}_\phi$  y  $\hat{e}_y = -\hat{e}_\theta$ .

Debido a que el observador está ubicado en el infinito, es posible realizar una aproximación de ángulos pequeños, por lo cual

$$x = -\beta r_0, \quad y = \alpha r_0, \quad (4.13)$$

y para los momentos se tiene que

$$\mathcal{P}^r = |\vec{\mathcal{P}}|, \quad \mathcal{P}^\theta = \alpha |\vec{\mathcal{P}}|, \quad \mathcal{P}^\phi = \beta |\vec{\mathcal{P}}|. \quad (4.14)$$

Las componentes  $\mathcal{P}^\alpha$  corresponden a los momentos en el marco inercial, y se determinan a partir de los momentos canónicos mediante la transformación (4.12)

$$\mathcal{P}^\alpha = \eta^{\alpha\mu} \Lambda_\mu^\nu p_\nu, \quad (4.15)$$

y de manera explícita se tiene que

$$\mathcal{P}^t = A_t \left[ E + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} L \right] = \mathcal{E}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{P}^r = \frac{p_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \mathcal{P}^\theta = \frac{p_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \mathcal{P}^\phi = \frac{L}{\sqrt{g_{\phi\phi}}},$$

donde  $\mathcal{E}$  es la energía en el nuevo marco de referencia. Adicionalmente, la magnitud del cuadrimomento satisface la ligadura hamiltoniana

$$|\mathcal{P}|^2 = -(\mathcal{P}^t)^2 + (\mathcal{P}^r)^2 + (\mathcal{P}^\theta)^2 + (\mathcal{P}^\phi)^2 = 0, \quad (4.17)$$

por lo cual, las expresiones en (4.14) toman la forma

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}^\theta}{\mathcal{P}^t}, \quad \beta = \frac{\mathcal{P}^\phi}{\mathcal{P}^t}, \quad (4.18)$$

de tal manera que al sustituir (4.18) en (4.13)

$$x = -r_0 \frac{\mathcal{P}^\phi}{\mathcal{P}^t}, \quad y = r_0 \frac{\mathcal{P}^\theta}{\mathcal{P}^t}. \quad (4.19)$$

Puede verse que las ecuaciones en (4.19) son una expresión general de los parámetros de impacto para una métrica estacionaria y axialmente simétrica, las cuales solo dependen de las componentes de la métrica.

### 4.3. *Shadow* analítico de un agujero negro de Kerr

Para el caso particular de la métrica de Kerr, al sustituir las expresiones (4.16) en (4.19) se obtiene

$$x = -r_0 \frac{L}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \left[ \frac{1}{A_t \left( E + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} L \right)} \right], \quad y = \pm r_0 \frac{\sqrt{\Theta}}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \left[ \frac{1}{A_t \left( E + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} L \right)} \right], \quad (4.20)$$

donde

$$\Theta = Q - \cos^2 \theta \left( \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - E^2 a^2 \right). \quad (4.21)$$

Ya que el espacio-tiempo de Kerr es asintóticamente plano, al tomar el límite cuando  $r_0 \rightarrow \infty$  los parámetros de impacto en (4.20) adoptan la forma

$$x = -\frac{\xi}{\sin \theta}, \quad y = \pm \sqrt{\eta - \cos^2 \theta \left( \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta} - a^2 \right)}. \quad (4.22)$$

La ecuación (4.22) es la solución analítica para el *shadow* de un agujero negro de Kerr, en donde los puntos  $(x, y)$  están parametrizados por la coordenada radial  $r$  a través de  $\xi$  y  $\eta$  dados por las expresiones en (3.31). Como se mencionó en la sección anterior, la fotorregión, delimitada por los radios  $r_1$  (3.33) y  $r_2$  (3.34), es la zona más cercana al agujero negro a partir de la cual se puede extraer información. En consecuencia, cualquier valor  $r_1 \leq r \leq r_2$  representa un punto en el plano imagen correspondiente a

una órbita esférica. Para un mayor análisis de este resultado, se combinan las expresiones en (4.22) y se obtiene (FROLOV, 2011)

$$(x - a \sin \theta)^2 + y^2 = \frac{4(2r^3 - 3r^2 + a^2)}{(r - 1)^2}. \quad (4.23)$$

Es importante resaltar que (4.23) no corresponde con la ecuación de una circunferencia, pues cada valor de  $r$  es asignado a un único par  $(x, y)$ . Sin embargo, a partir de esta se pueden estudiar ciertos casos de interés.

1.  $a \ll 1$  :

En primera instancia, se realiza una expansión en serie de Taylor a primer orden de las ecuaciones (3.30), con el fin de encontrar los respectivos valores de  $\eta$  y  $\xi$  para el caso de rotaciones lentas, de lo cual se obtiene

$$r^3 - r(\eta + \xi^2) + 2(\eta + \xi^2) - 4a\xi = 0, \quad 3r^2 - \eta + \xi^2 = 0.$$

El radio permitido para que existan órbitas esféricas en este régimen se determina al despejar  $\eta$  de la segunda ecuación y sustituirlo en la primera, de tal forma que al resolver las raíces por el método de perturbaciones (FROLOV, 2011)

$$r = 3 - \frac{2a\xi}{9} \quad \Rightarrow \quad \eta = 27 - \xi^2 - 4a\xi.$$

Para un observador localizado en plano ecuatorial, la ecuación (4.22) se reduce a

$$x = -\xi, \quad y = \pm\sqrt{\eta},$$

y al reemplazar el valor de  $\eta$  para rotaciones lentas, la ecuación (4.23) adopta la forma

$$(x - 2a)^2 + y^2 = 27.$$

Puede verse que si  $a = 0$ , el observador ubicado en el infinito mide que la silueta del *shadow* es una circunferencia de radio  $3\sqrt{3}$ , que se traduce a una órbita esférica con  $r = 3$ . Además, el horizonte de eventos mapea en el plano imagen como una circunferencia de radio 4, lo cual reafirma que es imposible observarlo directamente. Por otra parte, si  $a \neq 0$ , la forma del *shadow* sigue siendo una circunferencia de radio  $3\sqrt{3}$ , desplazada en un factor  $2a$  en dirección de la rotación del agujero negro. Finalmente, para un observador ubicado por fuera del plano ecuatorial, la única diferencia con respecto al análisis anterior es que el desplazamiento está dado por un factor de  $2a \sin \theta$  (FROLOV, 2011).

2.  $a = 1$  :

En el caso de un agujero negro de Kerr con rotación extrema visto desde el plano ecuatorial, al combinar las ecuaciones (4.22) y (3.30) se obtiene

$$x = r^2 - 2r - 1, \quad y^2 = r^3(4 - r),$$

a partir de las cuales es posible determinar el dominio en el eje  $x$ . El rango de la fotorregión se da entre  $1 \leq r \leq 4$ ; en consecuencia, los valores de  $x$  permitidos en el plano imagen son  $-2 \leq x \leq 7$ , y para cada uno de los límites se tienen las coordenadas  $(-2, \pm\sqrt{3})$  y  $(7, 0)$ . Es necesario aclarar que  $r_1 = 1$  coincide con el horizonte de eventos, por lo cual todos los puntos sobre el eje  $x = -2$  representan una asíntota. Así, un observador distante registra un achatamiento en la parte izquierda del *shadow* con una línea vertical que une los puntos  $y = \pm\sqrt{3}$ , y se curva a medida que se acerca a  $x = 7$ . Este achatamiento se puede explicar debido a que los fotones detectados en  $x < 0$  trazan órbitas progradas, por lo cual se acercan más al horizonte de eventos, en contraste con aquellos que siguen órbita retrógradas y son detectados en  $x > 0$ . Adicionalmente, cuando  $x = 0$  corresponde a fotones sin momento angular azimutal, lo cual se da en  $y = (11 + 8\sqrt{2})^{1/2}$ . Finalmente, un observador ubicado en alguno de los polos detectará fotones con  $L = 0$ , como se verifica de la ecuación (4.22). En este caso, solo hay un radio permitido para que existan órbitas esféricas,  $r_3 = 1 + \sqrt{2}$ , y de la ecuación (4.23) se puede constatar que el borde del *shadow* corresponde con una circunferencia de radio 4.83.

En la figura (16) se aprecian los resultados producto del análisis anterior, donde se ilustran distintas siluetas del *shadow* de un agujero negro de Kerr con diferentes valores del parámetro de rotación, para un observador ubicado tanto en el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  como en el polo  $\theta = 0.01$ . Se escogió un dominio de los parámetros de impacto  $(x, y) \in \{-8, 8\}$ , de tal manera que fuese posible apreciar la influencia de  $a$  sobre el *shadow* en una transición desde lentas hasta máximas rotaciones.

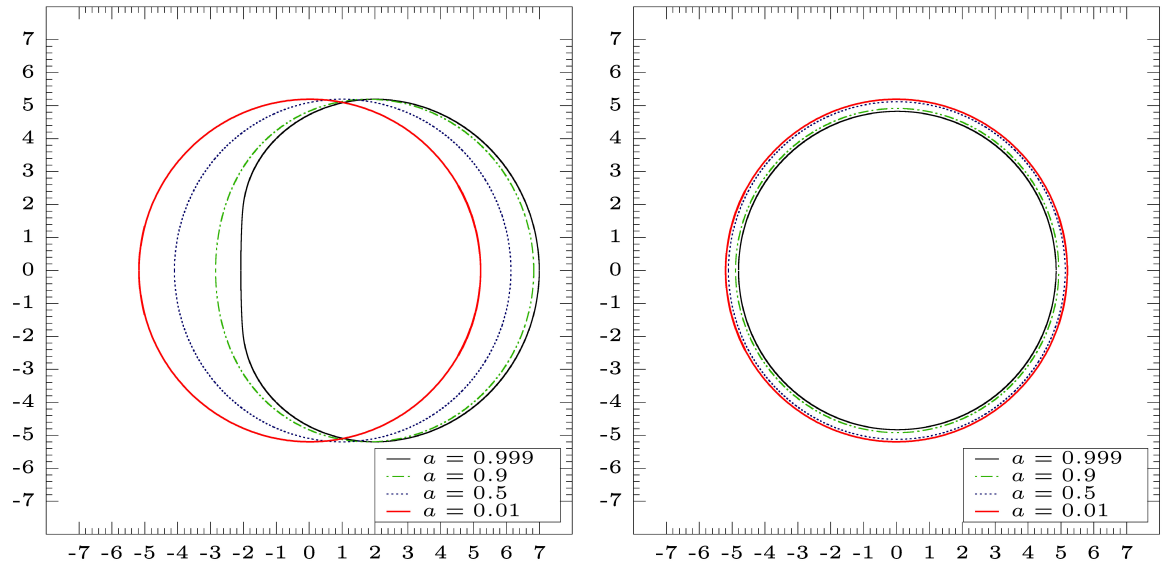


Figura 16: silueta del *shadow* de un agujero negro de Kerr con parámetros de rotación  $a = 0.999$ ,  $a = 0.9$ ,  $a = 0.5$ , y  $a = 0.01$ . Visto desde el plano ecuatorial (izquierda), puede apreciarse que a medida que este parámetro aumenta, el *shadow* presenta un achatamiento cada vez mayor y se desplaza hacia la derecha, en contraposición a rotaciones lentas, para las cuales el *shadow* se aproxima a una circunferencia centrada en el origen. Por otra parte, visto desde el polo norte (derecha), las siluetas del *shadow* corresponden con circunferencias concéntricas debido a la simetría axial; en otras palabras, la influencia de la rotación afecta solo el tamaño del *shadow*, mas no su forma.

Para deducir la solución analítica del *shadow* en el espacio–tiempo de Kerr, fue necesario separar la componente radial y latitudinal a través de la constante de Carter mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi. Sin embargo, no es posible realizar el mismo procedimiento para métricas más complejas; por lo cual, es menester recurrir a métodos numéricos que permitan integrar las ecuaciones de la geodésica alrededor de la fuente gravitacional.

## 5. PUNCH: UN NUEVO CÓDIGO PARA EL TRAZADO DE RAYOS EN RELATIVIDAD GENERAL

En la sección anterior, a partir de (4.22) se ilustró la silueta del *shadow* de un agujero negro de Kerr; sin embargo, esta expresión es insuficiente para describir el espacio–tiempo al exterior de la fotosfera, por lo cual no es posible visualizar el entorno que rodea la fuente gravitacional. Para lograr obtener la información que escapa a la solución analítica, es necesario evolucionar las ecuaciones de la geodésica para partículas nulas en un espacio–tiempo estacionario y axialmente simétrico. A raíz de este problema nace PUNCH, un nuevo código con el cual es posible simular las trayectorias de los fotones bajo la influencia del campo gravitacional, y así obtener la imagen aparente del cuerpo compacto.

### 5.1. Trazado inverso de rayos

Para visualizar la geometría espacio–temporal alrededor de un cuerpo compacto, es necesario analizar la trayectoria de los fotones que orbitan en sus inmediaciones y traducir la información de aquellos que escapan y logran ser detectados. En esencia, este es el algoritmo principal de PUNCH, y para entender su funcionamiento se plantean dos escenarios:

**Escenario 1:** una fuente lumínica emite rayos de luz en todas las direcciones. De entre todos, se pueden encontrar aquellos que orbitan alrededor del objeto compacto, otros que son atrapados por la atracción gravitacional, o incluso aquellos que ni siquiera se acercan al cuerpo que se desea observar. Los fotones que escapan y convergen en el observador representan una mínima fracción de toda la radiación emitida originalmente por la fuente, lo cual se traduce en desperdicio de tiempo de cómputo. En otras palabras, este escenario no es óptimo y por lo tanto es descartado.

**Escenario 2:** el plano imagen es el origen de las geodésicas nulas que evolucionan hacia atrás en el tiempo. El verdadero interés radica en los fotones que convergen en el observador, y no en seguir todos aquellos que son emanados por la fuente brillante. Por lo cual, no es descabellado concentrarse únicamente en las primeras y realizar una reconstrucción de la fuente de la cual provienen. Este método es conocido en la literatura como trazado inverso de rayos (*backward ray-tracing*), y es un estándar en cuanto se refiere a la simulación de *shadows* numéricos (VINCENT, 2011). En la figura (17) se ilustra este método, en donde se asume la fuente gravitacional como un agujero negro: las trayectorias que caen hacia el horizonte de eventos se clasifican con el color negro, por lo cual son geodésicas que, si bien numéricamente parten del observador, físicamente

nunca llegan a ser detectadas.

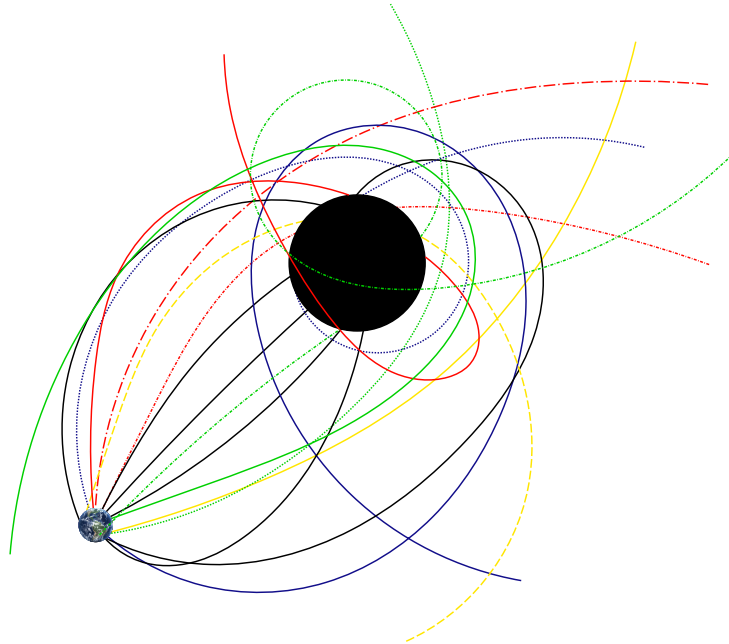


Figura 17: representación gráfica del trazado inverso de rayos: la Tierra es el observador desde el cual son emitidos los fotones y la esfera negra hace el papel de un agujero negro. Las líneas representan geodésicas nulas, entre las cuales se encuentran aquellas que son atrapadas por la atracción gravitacional (líneas negras) y las que logran escapar hacia el infinito (líneas de color).

## 5.2. El código

Como ya se ha mencionado, los fotones que impactan en el plano imagen pueden ser descritos al asignar a cada uno de estos un par de puntos  $(x, y)$ . De esta forma, el código inicia con el seccionamiento de dicho plano al realizar un enmallado numérico, cuyo dominio y resolución son arbitrarios. Posteriormente, de las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.19) se inicia la generación de las condiciones iniciales. Debido a que la energía no afecta directamente el movimiento de los fotones, por simplicidad se decidió tomar  $\mathcal{E}$  igual a la unidad. De esta forma, al despejar los momentos canónicos de la expresión (4.16) se obtiene un conjunto de condiciones iniciales con el cual es posible evolucionar

las ecuaciones de la geodésica

$$\begin{aligned}
 p_\theta &= \frac{y\sqrt{g_{\theta\theta}}}{r_0}, & E &= \frac{1}{A_t} + \frac{xg_{t\phi}}{r_0\sqrt{g_{\phi\phi}}}, \\
 L &= -\frac{x\sqrt{g_{\phi\phi}}}{r_0}, & p_r &= \sqrt{g_{rr} [1 - (\mathcal{P}^\theta)^2 - (\mathcal{P}^\phi)^2]}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Aquí,  $r_0$  hace parte del conjunto de coordenadas iniciales  $\{t_0, r_0, \theta_0, \phi_0\}$  necesarias para integrar las ecuaciones. El código está dotado de cuatro Runge–Kutta: RK4 (clásico), Fehlberg 4(5), Dormand–Prince 4(5) y Cash–Karp 4(5), de los cuales RK4 es de paso fijo y los demás son de paso adaptativo. A lo largo del proceso de integración debe mantenerse la ligadura para fotones  $\mathcal{H} = 0$ , lo cual garantiza la veracidad de los resultados. El código fue calibrado al simular el *shadow* de un agujero negro de Kerr, y comparar los resultados con la solución analítica. En la figura (18) se muestran distintos valores del hamiltoniano en función del parámetro afín  $\lambda$  para una órbita tridimensional asociada a un fotón que escapa de la atracción gravitacional. Las ecuaciones dinámicas se resolvieron mediante un integrador RK4 para diferentes pasos  $d\lambda$  hasta un valor final  $\lambda = 200$ . En esta se aprecia cómo la ligadura hamiltoniana decrece a medida que  $d\lambda$  disminuye a la mitad, convergiendo al orden del integrador a partir de la curva naranja, en donde el valor del hamiltoniano es del orden de  $10^{-8}$ , a partir de la cual se evidencia ruido asociado al error de la máquina. Esto se traduce en que no es necesario un paso de integración tan bajo para que se mantenga la ligadura hamiltoniana en un rango de confianza.

Por otra parte, la clasificación de las órbitas en aquellas que caen al horizonte de eventos y las que no, se da a través de la ecuación

$$r_+ = 1 + \sqrt{1 - a^2}, \tag{5.2}$$

es decir, cuando  $r \leq r_+$  se asigna a el par  $(x, y)$  el color negro. Es necesario mencionar que dependiendo de las coordenadas empleadas para describir el espacio–tiempo, cerca al horizonte de eventos la dinámica de las ecuaciones puede ser o no muy alta. En el caso de las coordenadas de Boyer–Lindquist hay una singularidad de coordenadas en  $r_+$ , por cual el error numérico aumenta. En consecuencia, se recurre a un pequeño “amortiguador”  $\delta_r$ , de tal forma que el código interprete que si  $r \leq r_H + \delta_r$ , la partícula cayó al horizonte de eventos y asigne al par  $(x, y)$  el color negro. De lo contrario, al concluir el ciclo iterativo se asume que la partícula proviene de una fuente lumínica y se asigna un color distinto. Adicionalmente, se calcula el promedio de la norma  $L_1$  del error

$$N = \frac{1}{l} \sum_{k=1} |error_k| * d\lambda_k, \tag{5.3}$$

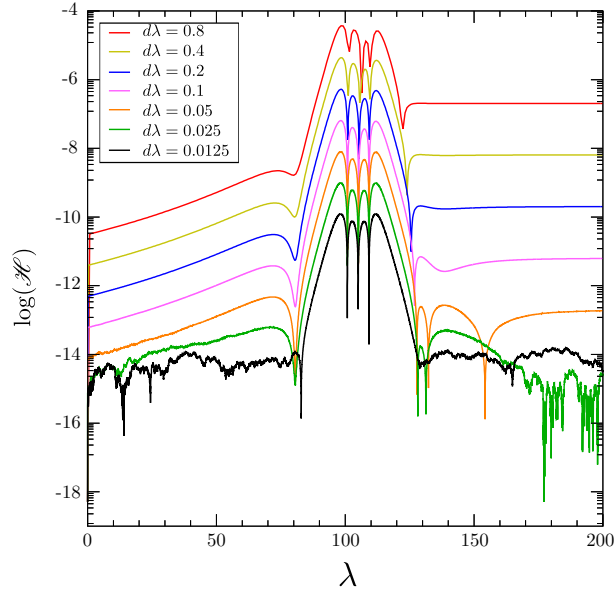


Figura 18: cálculo numérico de la ligadura hamiltoniana, en escala logarítmica, a lo largo del parámetro afin para distintos valores  $d\lambda$  empleando un integrador RK 4. Estos resultados corresponden a un fotón que logra escapar de la atracción gravitacional, y es lanzado desde una distancia  $r_0 = 100$  en dirección al agujero negro. Puede apreciarse que para cada paso  $d\lambda$ , el hamiltoniano crece suavemente a medida que se acerca al horizonte de eventos, mientras que en las inmediaciones del mismo su valor aumenta de manera abrupta debido a la fuerte dinámica en la región. Posteriormente, cuando escapa de la atracción gravitacional, el hamiltoniano empieza a decrecer hasta converger a cierto valor.

donde  $l$  es el número de iteraciones,  $|error_k| = |\mathcal{H}_{num_k} - \mathcal{H}_{teo}|$  y  $d\lambda_k$  es el  $k$ -ésimo paso del parámetro afin. En la figura (19) se presenta el *shadow* numérico de un agujero negro de Kerr y el promedio de la norma del error. Se empleó un paso fijo en el RK4, y aprovechando que los RK con coeficientes Dormand–Prince 4(5), Fehlberg 4(5) y Cash–Karp 4(5) proveen soluciones de cuarto y quinto orden, fueron los elegidos para adaptar el paso de las iteraciones, al restar las soluciones de ambos órdenes y definir una tolerancia de control para el paso.

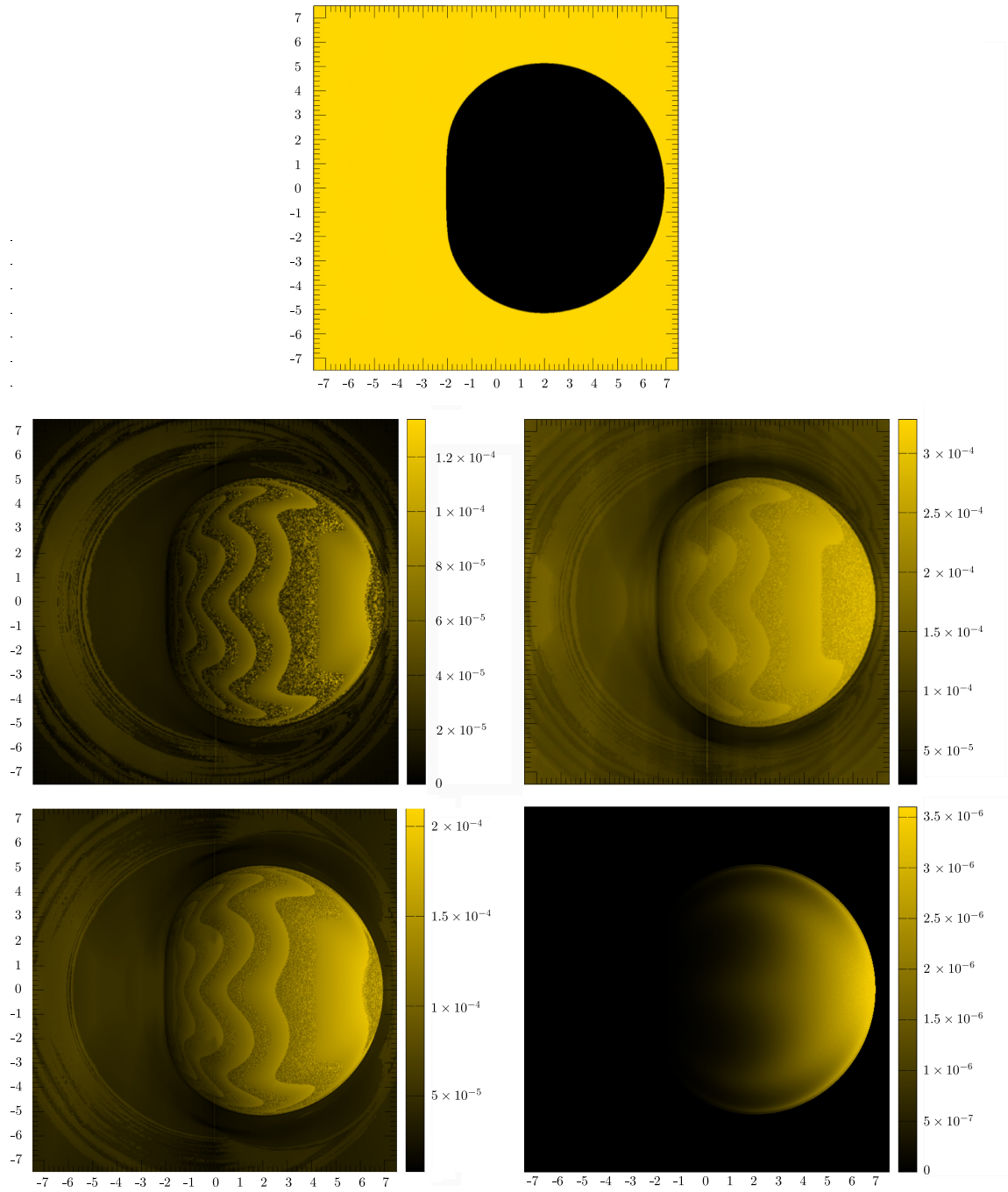


Figura 19: *shadow* numérico y promedio de la norma  $L_1$  del error para un agujero negro de Kerr, con parámetro de rotación  $a = 0.999$  visto desde el plano ecuatorial e inicializado desde  $r = 100$ . Los resultados del *shadow* numérico con los distintos integradores son los mismos (imagen superior), sin embargo, difieren en la exactitud con la cual se realiza el proceso iterativo. En la fila del medio se muestran los promedios de la norma  $L_1$  calculados mediante los RK Dormand-Prince 4(5) y Fehlborg 4(5), y en la fila inferior, aquellos calculados mediante los RK Cash-Karp y RK4. Este último se empleó con un paso de integración constante  $d\lambda = 4 \times 10^{-4}$ , en donde es claro que la norma del error es menor en comparación con los métodos adaptativos.

Es claro que la norma del error disminuye considerablemente para los integradores con paso fijo, en contraste con los métodos adaptativos; sin embargo, estos últimos requieren de un tiempo de cómputo mucho menor en relación a los primeros. Es aquí en donde se presenta una disyuntiva, pues se hace necesario optimizar el proceso de integración y sacrificar exactitud por velocidad. Aun así, la norma del error calculada mediante el paso adaptativo es bien comportada y no representa un resultado del cual se deba desconfiar. Con base en lo anteriormente expuesto, se concluyó que el Runge–Kutta con coeficientes Cash–Karp 4(5) es el integrador óptimo, pues si bien no es el que mejor mantiene la norma, es el más rápido entre los integradores empleados, y las diferencias no son sustanciales para descartarlo. Por esta razón, los resultados que se expondrán a partir de ahora fueron calculados empleando este método.

Finalmente, al comparar el resultado numérico con el analítico, se encuentra que el *shadow* numérico es un poco menor en tamaño, pues el achatamiento a la izquierda se da en  $x = -1.984$  y el borde a la derecha en  $x = 6.9248$ , no exactamente en  $x = -2,07813$  y  $x = 6.99833$ , correspondientes a los extremos teóricos en el caso de  $a = 0.999$ . Esto se debe a que la solución analítica está calculada en el infinito, y numéricamente no es posible simular un observador con estas características; además, al inicializar el movimiento en radios mucho mayores implica que el error se acumula cada vez más entre las iteraciones. Con lo anterior, se concluye que la calibración del código es óptima y se da paso a estudiar la influencia del campo gravitacional en la trayectoria de los fotones, como se verá a continuación.

### 5.3. Lente gravitacional

Una vez construido el código, se procede a realizar una clasificación de órbitas que permita dilucidar el efecto de la gravedad sobre las geodésicas nulas. En este punto es necesario definir cuál es la fuente desde la cual serán emitidos los rayos de luz. En la realidad, no importa en qué dirección se observe hacia el firmamento, siempre habrá una fuente brillante iluminando en la bóveda celeste; por lo tanto, se puede modelar todo el universo como una gran esfera de luz, también conocida como esfera celeste, desde la cual son emanados los fotones. Supóngase que esta es concéntrica con el agujero negro y envuelve al observador en Tierra dentro de sí, como se ilustra en la figura (20). De tal forma, la clasificación se realiza de la siguiente manera: si  $r \leq r_+ + \delta_r$ , entonces corresponde a un punto negro en el plano imagen; si el fotón logra escapar de la atracción gravitacional y  $r \geq r_{ec}$ , donde  $r_{ec}$  es el radio de la esfera celeste, se detiene el proceso de integración y se asigna un color dependiendo del sector de la esfera en donde haya golpeado. De esta forma, es posible apreciar la deflexión de la luz en presencia de un objeto compacto. A este fenómeno se le conoce como lente gravitacional, y otorga resultados interesantes al momento de la observación. En el caso del espacio–tiempo de Minkowski (figura 21), los rayos salen del observador en línea recta, con lo cual se obtienen cuatro cuadrantes correspondientes a la imagen real de la esfera celeste.

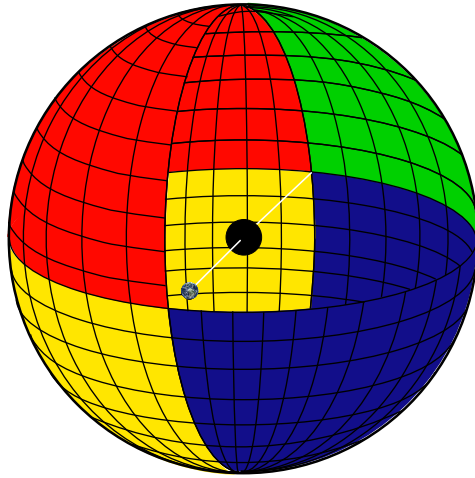


Figura 20: esquematización de la esfera celeste: cascarón esférico seccionado en cuatro colores que contiene en su interior el agujero negro (concéntrico a la esfera) y al observador (representado por el planeta Tierra), ambos unidos por una línea blanca que indica la dirección de observación. Las líneas negras representan el enmallado espacio–temporal, útil para apreciar los efectos gravitacionales sobre la trayectoria de los fotones. El radio de la esfera celeste se tomó igual para todas las simulaciones subsiguientes:  $r_{ec} = 200$ . Imagen adaptada del artículo *What does a binary black hole merger look like?* (BOHN, 2015).

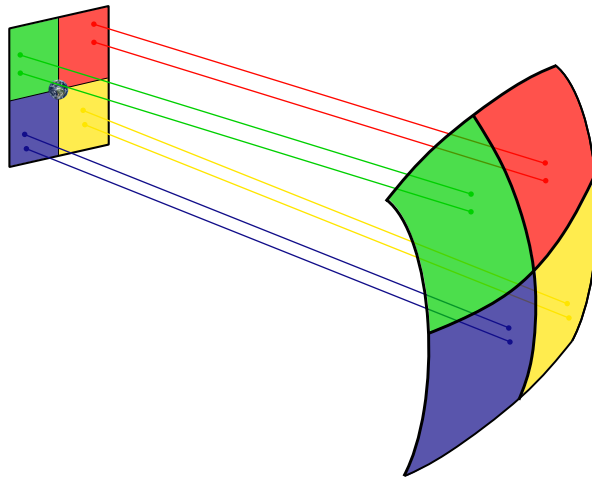


Figura 21: representación gráfica de la trayectoria de los fotones en el espacio–tiempo de Minkowski. El observador está viendo directamente a la esfera celeste, y en ausencia de alguna fuente de campo gravitacional la trayectoria de los fotones no se ve alterada. Por consiguiente, se obtiene una imagen de los colores en los que está seccionada la esfera.

Por otra parte, cuando un objeto masivo se interpone entre el observador y la fuente, el campo gravitacional que genera defleca la trayectoria de los fotones. De esta forma, al

interponer un cuerpo supermasivo, como un agujero negro (figura 22), estas trayectorias se ven tan curvadas que es posible que un fotón emitido en una región de la esfera celeste aparenta haber sido emitido de una zona diferente.

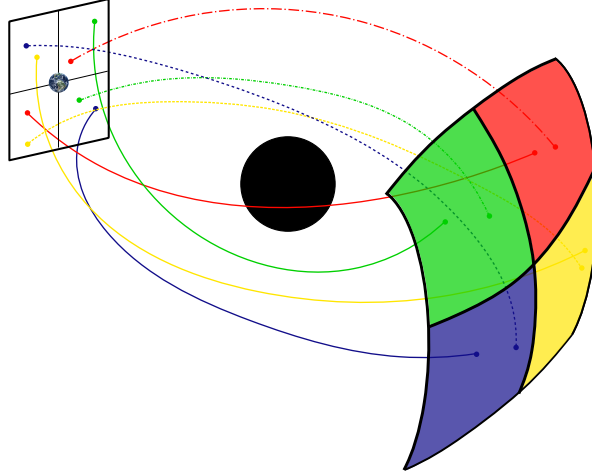


Figura 22: representación gráfica de la deflexión en la trayectoria de los fotones en presencia de un agujero negro. Debido al fuerte campo gravitacional, algunos fotones emitidos desde un cuadrante pueden ser detectados en el plano imagen como si hubiesen tenido un punto de origen distinto.

A continuación, se presentan las simulaciones numéricas del lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr, para diferentes valores del parámetro de rotación visto desde el plano ecuatorial; además, de un contraste con el espacio-tiempo plano. En la fila superior izquierda de la figura (23) se tiene el espacio-tiempo de Minkowski, en donde se puede observar que las líneas del enmallado no son del todo rectas debido a la curvatura misma de la esfera. En el cuadrante superior derecho se muestra el caso de rotación nula  $a = 0$ , correspondiente con un agujero negro de Schwarzschild. Debido a la simetría esférica, se obtiene el mismo patrón independientemente del plano de observación. Un efecto apreciable del lente gravitacional es el llamado anillo de Einstein (EINSTEIN, 1936), en donde la fuente lumínica aparenta ser un anillo concéntrico con el agujero negro. Este fenómeno aparece cuando el observador, el objeto compacto y la fuente están alineados (BOZZA, 2005). Una de sus principales características es que en su interior la imagen sufre una inversión, debido a que el ángulo de deflexión en la trayectoria de los fotones es mucho mayor (BOHN, 2015). Adicionalmente, puede observarse un segundo anillo cerca del borde del *shadow*, en donde las imágenes se invierten nuevamente.

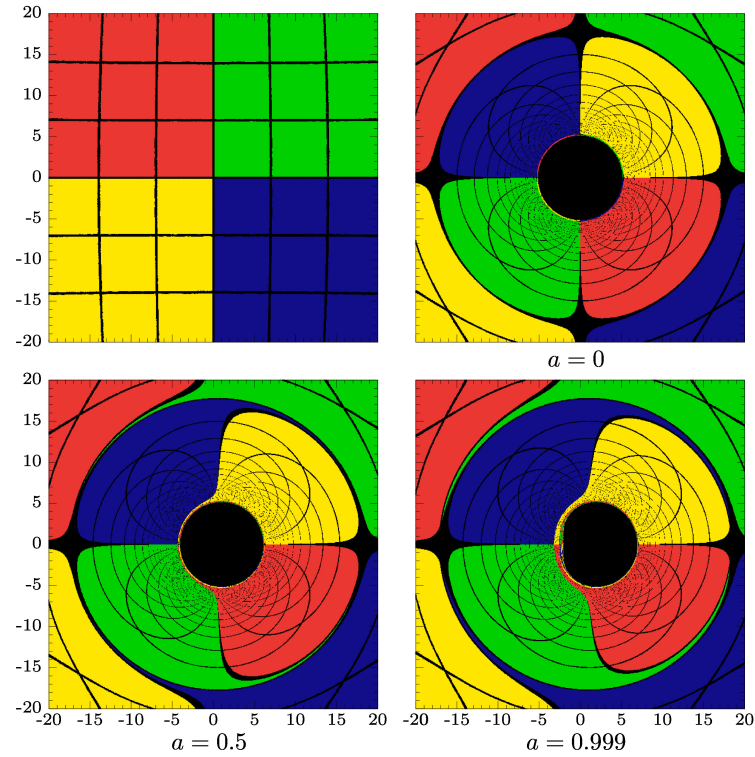


Figura 23: lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist, visto desde el plano equatorial a una distancia  $r = 100$  y ubicado en  $\phi = 0$ . En la fila superior, de izquierda a derecha, se muestra el espacio–tiempo de Minkowski y el caso de un agujero negro de Schwarzschild ( $a = 0$ ). En la fila inferior, de izquierda a derecha, se observa un un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.5$  y  $a = 0.999$ .

En la parte inferior de la figura (23) se muestra el lente gravitacional producido por un agujero negro de Kerr con rotación  $a = 0.5$  y  $a = 0.999$ . Al igual que en caso de Schwarzschild, también se observa un anillo de Einstein; sin embargo, lo que resalta a primera vista es la asimetría que se presenta en el lente debido a la deformación del *shadow*. En la imagen inferior izquierda se aprecia cómo se prolongan los cuadrantes en azul y verde a lo largo del borde interior del anillo, lo cual genera una “oreja” en color amarillo y rojo; esta, a su vez, se extiende a lo largo de la silueta del *shadow*. Todo como consecuencia del arrastre gravitacional debido al giro del agujero negro, cuyos efectos son más notorios a medida que la rotación aumenta. En el cuadrante inferior derecho de la figura (23) puede verse que no solo la oreja se prolonga por el borde del *shadow*, sino que además lo envuelve. Adicionalmente, se observa una sucesión consecutiva de anillos de Einstein parciales en las cercanías del borde achatado del *shadow*, como consecuencia de la rotación extrema. Finalmente, una característica en común es la deformación que sufren las líneas del enmallado espacio–temporal, lo que provee la noción de curvatura debido al campo gravitacional.

## 6. MÉTRICA–Q

Una primera aplicación del código PUNCH consiste en calcular numéricamente el *shadow* y el lente gravitacional producido por un cuerpo compacto con deformación cuadrupolar arbitraria de masa descrito por una métrica estática, conocida en la literatura como métrica– $\gamma$ , métrica– $\delta$  o métrica– $q$  (QUEVEDO, 2010). El elemento de línea que describe esta geometría, en coordenadas de Schwarzschild, está dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1+q} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-q} \times \left[ \left(1 + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2Mr}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2\right) + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (6.1)$$

donde  $M$  representa la masa del objeto compacto y  $q$  el parámetro de deformación cuadrupolar: oblata para  $q > 0$  y prolata si  $q < 0$ . Una característica de este espacio–tiempo es que presenta singularidades desnudas en el rango  $q \in (-1, -1 + \sqrt{3/2}]/\{0\}$  (QUEVEDO, 2010), lo cual es de particular interés, pues si observaciones astronómicas llegasen a detectar singularidades descritas por este elemento de línea, se descartarían automáticamente la conjetura de censura cósmica y el teorema de no pelo. Por otra parte, en ausencia de una expresión que delimite cada singularidad desnuda, y aprovechando que esta es real, el código interpreta que por encima de cierto valor de la ligadura hamiltoniana el foton alcanza esta región; por lo cual, se asigna el color negro al respectivo par  $(x, y)$  del plano imagen. Con el fin de apreciar el impacto de la deformación sobre las geodésicas de los fotones, se ajustó el dominio de integración numérico de dos maneras:

1.  $x, y \in [-20, 20]$  para  $0 \geq q \geq -0.5$ .
2.  $x, y \in [-3, 3]$  para  $-0.5 \leq q \leq -1$ .

En la figura (24) se muestra el *shadow* y el lente gravitacional generado por un objeto compacto para el primer rango de valores de  $q$ . Puede verse que para  $q = 0$  se reduce al espacio–tiempo de Schwarzschild, mientras que al disminuir  $q$ , el *shadow* se deforma prolatamente, lo cual se hace más evidente al comparar los casos para  $q = -0.166$  y  $q = -0.5$ . Además, el decrecimiento de los efectos gravitacionales se ve reflejado en la disminución del tamaño del anillo de Einstein. Por otra parte, es posible apreciar que el comportamiento de los fotones no dista en gran medida del caso de Schwarzschild hasta  $q = -0.5$ . Sin embargo, a partir de este valor se identificó que el dominio inicial era muy grande y el *shadow* se distorsionaba tanto que era imposible apreciarlo después de cierto punto.

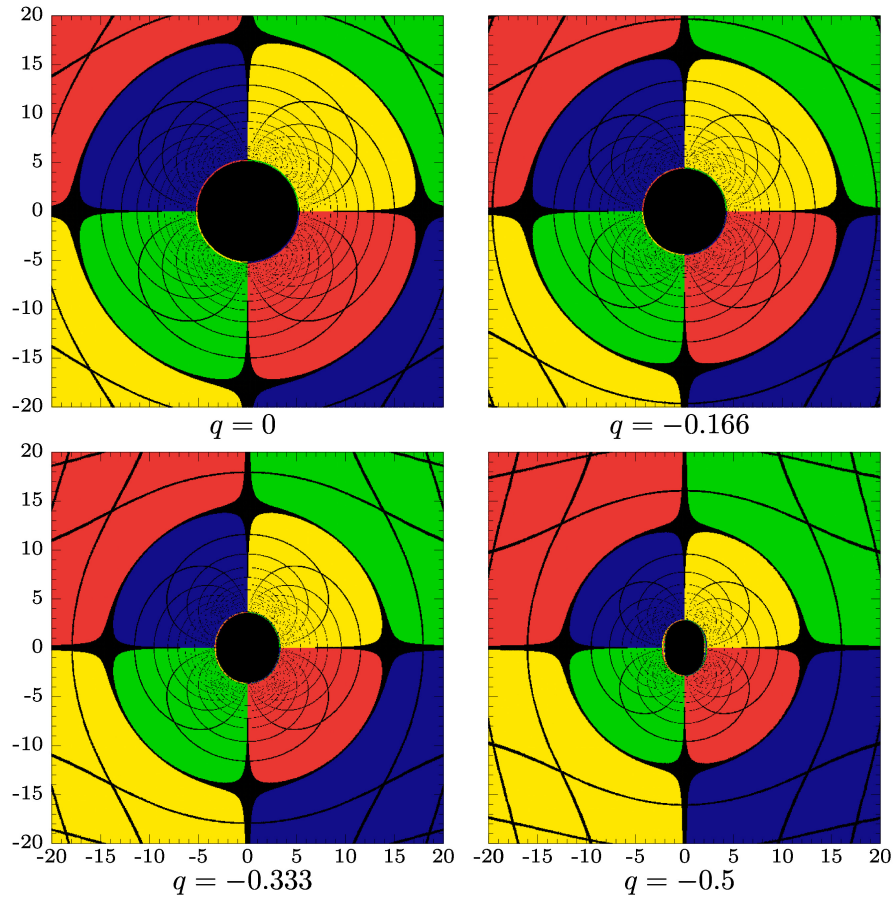


Figura 24: *shadow* y lente gravitacional generado por un objeto compacto con deformación cuadrupolar de masa dado en el primer dominio. En la fila superior, de izquierda a derecha, se tiene el espacio-tiempo de Schwarzschild para  $q = 0$  y el cambio en el tamaño del anillo de Einstein para  $q = -0.166$ . En la parte inferior se aprecia cómo la forma del *shadow* se vuelve cada vez más prolata con el decrecimiento de  $q$ . Además, es claro que el comportamiento general en todos los casos es el mismo, sin embargo, en  $q = -0.5$  es posible observar la aparición de pseudoanillos en los laterales del *shadow*.

Por lo anterior, se consideró el segundo rango de valores de  $q$ , donde la observación se da al interior del anillo de Einstein y el rango de valores de  $q$  marca una transición importante. Esto se evidencia en la figura (25), donde existen puntos muy cercanos en el plano imagen que corresponden a colores distintos, lo cual implica una fuerte dependencia del sistema a las condiciones iniciales: pequeñas variaciones de las mismas cambian significativamente la trayectoria de los fotones, lo cual sugiere un comportamiento caótico en las inmediaciones de la fuente gravitacional a medida que la deformación aumenta.

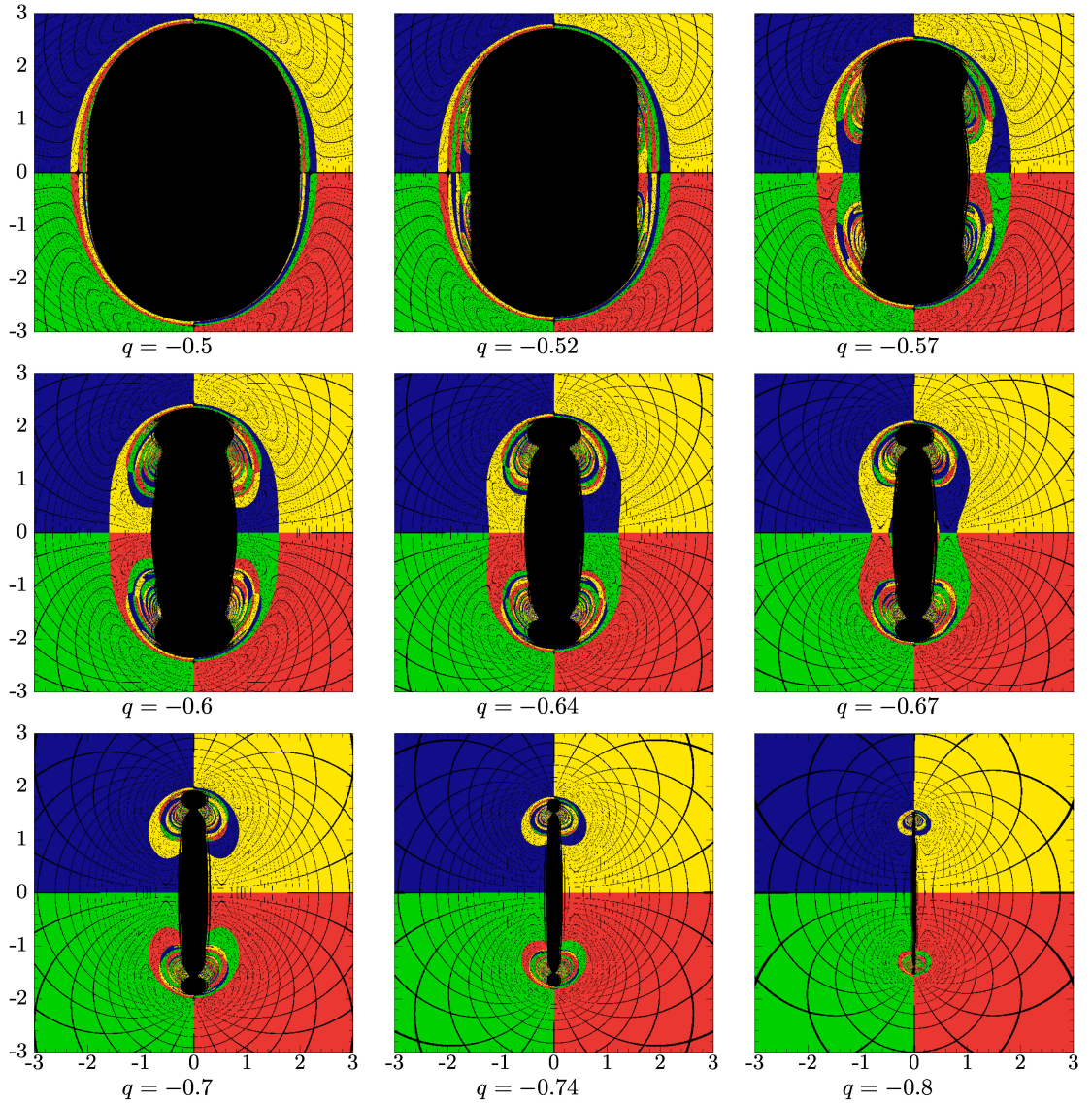


Figura 25: distorsión del *shadow* y comportamiento caótico en la trayectoria de los fotones que orbitan en las inmediaciones de una fuente gravitacional con singularidades desnudas descrita por la métrica  $-q$ . Puede apreciarse la generación de una zona caótica para  $q < -0.5$ , asociada a la aparición de abultamientos en los extremos del *shadow*; adicionalmente, es claro que su tamaño decrece a medida que también lo hace  $q$ .

En la parte superior de la figura (25) es claro que  $q = -0.5$  es un valor crítico, pues valores inferiores implican un comportamiento caótico de los fotones en regiones específicas alrededor del *shadow*. En  $q = -0.52$  los pseudoanillos más internos se deforman, agrupándose en zonas caóticas localizadas en los laterales del *shadow*. Este comportamiento es más evidente en  $q = -0.57$ , donde las regiones caóticas se concentran en los abultamientos que aparecen en los extremos del *shadow*, que también sufre un leve

ensanchamiento en  $y = 0$ . Adicionalmente, el pseudoanillo interior forma una cintura, mientras que el exterior no presenta deformaciones. Puede verse que en  $q = -0.6$  la cintura se rompe y se agrupa en la región caótica, mientras que el tamaño del *shadow* decrece y se hace más delgado, y a medida que sigue disminuyendo el valor de  $q$  el proceso se repite.

Por otra parte, en este mismo rango de valores, se ve cómo las líneas negras se van reordenando gradualmente. Esto indica que la métrica  $-q$  reduce al espacio-tiempo de Minkowski cuando  $q \rightarrow -1$ . Lo anterior mencionado se ilustra con mayor detalle en la figura (26), donde la región caótica ha desaparecido para  $q = -0.9$  y los abultamientos se redujeron a dos puntos desde los cuales se curva el enmallado; en  $q = -0.95$  se aprecia cómo aparece nuevamente el anillo de Einstein. Finalmente, cuando  $q = -1$ , se reduce al espacio-tiempo plano.

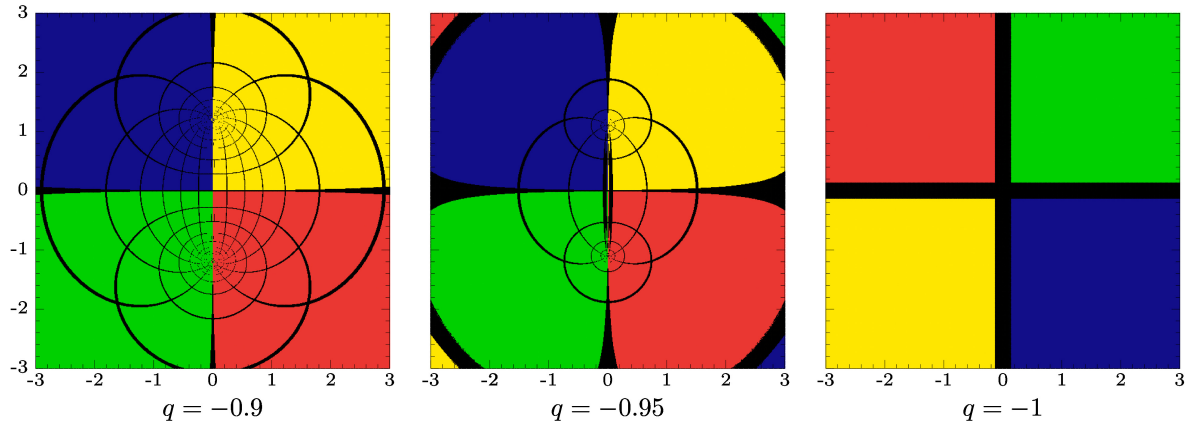


Figura 26: puede apreciarse que tanto el *shadow* como la zona caótica no son apreciables en  $q = -0.9$ , y que el anillo de Einstein se reduce hasta el punto en donde entra en el dominio para  $q = -0.95$ . Finalmente, para  $q = -1$  se reduce al espacio-tiempo de Minkowski.

Finalmente, la descripción del impacto cuadrupolar sobre el *shadow* solo se realizó para valores negativos del mismo, ya que deformaciones oblatas no representan diferencias significativas respecto al caso de Schwarzschild. Además, la influencia de la deformación prolata es apreciable solo en las inmediaciones de la fuente gravitacional, a diferencia de soluciones más exóticas, en donde ligeras deformaciones del momento cuadrupolar representan un gran cambio en la forma del *shadow* (WANG, 2018).

## 7. CONCLUSIONES

A través del formalismo de Hamilton–Jacobi fue posible separar la componente radial y latitudinal en el espacio–tiempo de Kerr, lo cual permitió realizar un estudio independiente de las mismas para órbitas esféricas de fotones alrededor de un agujero negro modelado por esta solución. Se encontró que este tipo de órbitas son inestables, y que el rango de radios permitidos para su existencia conforma la fotorregión. Para el caso de rotación máxima  $1 < r \leq 4$ , y en caso de rotación nula, la fotorregión corresponde a un único radio en  $r = 3$ . Además, en las simulaciones realizadas se obtuvieron diferentes comportamientos en estas trayectorias debido a la influencia de los momentos, en donde fotones con  $L = 0$  se ven forzados a moverse en dirección de la rotación del agujero negro debido al arrastre gravitacional, y es capaz de cruzar los polos, a diferencia de fotones con  $L \neq 0$ , cuyos puntos de retorno latitudinales se oscilan  $0 < \theta < \pi$ . Por otra parte, a medida que  $p_\theta$  aumenta, los fotones cruzan con mayor inclinación el plano ecuatorial, hasta el punto de cruzarlo de manera perpendicular cuando  $p_\theta = \pm\sqrt{27}$ , mientras que en  $p_\theta = 0$  está confinado a moverse en una órbita circular en el plano ecuatorial.

Posteriormente, con desarrollo de la teoría de *shadows* fue posible establecer una relación entre un observador ubicado en las cercanías de la fuente gravitacional, y otro localizado en el infinito, obteniendo una expresión general de los parámetros de impacto. En el caso particular del espacio–tiempo de Kerr, se ilustró la silueta *shadow* analíticamente; esto fue posible debido a la independencia de la coordenada radial y latitudinal, y así los puntos  $(x, y)$  del plano imagen quedaron totalmente parametrizados a través de  $r$  para cada valor de  $\theta$  constante. Se encontró que para lentas rotaciones ( $a \ll 1$ ) la silueta del *shadow* coincide con una circunferencia de radio  $r = 3\sqrt{3}$  desplazada hacia la derecha en un factor  $2a \sin \theta$ , mientras que en el caso de rotación extrema ( $a = 1$ ), visto desde el plano ecuatorial, aparece una asíntota en  $x = -2$  y un desplazamiento hacia la derecha hasta  $x = 7$ , en donde es evidente que los fotones que trazan órbitas progradas pueden acercarse más al agujero negro sin ser atrapados por la atracción gravitacional. Por otra parte, en  $\theta = 0$ , se obtuvo que la forma del *shadow* siempre es una circunferencia centrada en el origen, es decir, la influencia de la rotación solo afecta en el tamaño de la silueta. Aunado a lo anterior, se observó que las soluciones analíticas que se puedan obtener de los *shadows*, otorgan una primera visión de la forma aparente de los cuerpos compactos. Sin embargo, no proveen suficiente información del espacio–tiempo, en donde no es intuitivo imaginar el comportamiento de las partículas circundantes. A raíz de este problema, la construcción del código PUNCH permitió obtener las geodésicas alrededor de una fuente gravitacional estacionaria y axialmente simétrica. El código se calibró al realizar las simulaciones en el espacio–tiempo de Kerr, en donde se encontró que para el cálculo numérico de la ligadura hamiltoniana para fotones, empleando un integrador de paso fijo RK4, no fue necesario un paso de integración tan bajo para

tener un rango de confianza de la misma. A partir de  $d\lambda = 0.05$  apareció ruido asociado al error de máquina, y el valor del hamiltoniano es del orden de  $10^{-8}$  en las inmediaciones del horizonte de eventos. Adicionalmente, a medida que el paso de integración disminuyó a la mitad, se obtuvo que el integrador converge al orden del método utilizado. Por otra parte, al comparar los *shadows* numéricos obtenidos a través de un RK Cash–Carp 4(5) de paso adaptativo y el RK4 de paso fijo, se encontró la norma del error en órdenes de magnitud de  $10^{-5}$  y  $10^{-7}$ , respectivamente. No obstante, el tiempo de cómputo empleado por el RK4 fue mucho mayor en relación al primero, por lo cual se sacrificó exactitud por rapidez en este tipo de simulaciones. Por último, el proceso de calibración finalizó al comparar la solución analítica del *shadow* con los resultados numéricos, y se encontró que este último es menor en tamaño, pues los extremos se dieron en  $x = -1.984$  y  $x = -6.9248$ , en lugar de  $x = -2.07813$  y  $x = 6.99833$ , correspondientes a los valores teóricos calculados en el infinito. Por otra parte, se implementó la clasificación de colores para las órbitas que escapan hacia el infinito, en donde fue posible apreciar fenómenos como el lente gravitacional y el anillo de Einstein, en donde se evidenció el impacto del campo gravitacional del agujero negro sobre la trayectoria de los fotones.

Poseer un código con las características de PUNCH otorgó la libertad de estudiar un espacio–tiempo más exótico descrito por la métrica– $q$ . Gracias a la clasificación de las órbitas, se observó una dependencia del sistema a las condiciones iniciales. Esto se evidenció al aumentar la deformación del cuerpo compacto, en donde apareció un comportamiento caótico en la trayectoria de los fotones que orbitan en inmediaciones del *shadow*. Los resultados presentados pueden servir como un soporte numérico que permita obtener más plantillas con las cuales se puedan contrastar los datos observacionales recolectados por el EHT y el BHC.

Finalmente, la proyección para trabajos posteriores tiene como fin equipar el código para el estudio de un espacio–tiempo más general, lo cual permitirá simular escenarios astrofísicos más realistas, como el estudio de agujeros negros con discos de acreción o sistemas binarios, y así comparar los resultados con otros códigos como GYOTO (VINCENT, 2011) o SACRA (SHIBATA, 2008).

## Referencias

- ABBOTT, B. (Physical Review Letter, **119**, 2016). *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger* .
- ABRAMOWITZ, M. (Dover Publication, 1964). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* .
- ABUTER, R. (Astronomy and Astrophysics, **615**, 2018). *Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole* .
- AMARILLA, L. (The Fourteenth Marcel Grossman Meeting, 2017.). *Shadows of rotating black holes in alternative theories* .
- AMIR, M. (Classical and Quantum Gravity, **36**, 2019). *Shadow images of Kerr-like wormholes* .
- BAMBI, C. (Annalen der Physik, **530**, 2018.). *Astrophysical Black Holes: A Compact Pedagogical Review* .
- BARDEEN, J. (Black Holes Les Astres Occluse, Les Houches, 1972b). *Timelike and null geodesics in the Kerr metric* .
- BARDEEN, J. (The Astrophysical Journal, **178**, 1972a). *Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation* .
- BOHN, A. (Classical and Quantum Gravity, **32**, 2015.). *What does a binary black hole merger look like?* .
- BOZZA, V. (General Relativity and Gravitation, **37**, 2005.). *Gravitational Lensing and Microlensing* .
- CARTER, B. (Physical Review, **174**, 1968.). *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields* .
- CHANDRASEKHAR, S. (Clarendon Press, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998). *The Mathematical Theory of Black Holes* .
- CINHA, P. (General Relativity and Gravitation, **50**, 2018.). *Shadows and strong gravitational lensing: a brief review* .

- COLLABORATION, T. E. H. T. (The Astrophysical Journal Letters, **815**, 2019). *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole* .
- CUNHA, P. (International Journal of Modern Physics D, **25**, 2016.). *Shadows of Kerr black holes with and without scalar hair* .
- EINSTEIN, A. (Annals of Mathematics, **40**, 1939.). *On a Stationary System With Spherical Symmetry Consisting of Many Gravitating Masses* .
- EINSTEIN, A. (Science, **84**, 1936.). *Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field* .
- EINSTEIN, A. (Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1915). *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* .
- EIROA, E. (The European Physical Journal C, **78**, 2018.). *Shadow cast by rotating braneworld black holes with a cosmological constant* .
- EZEQUIEL, F. (arXiv:1611.05832v3, 2016). *Geometrical models for the study of astrophysical systems with spheroidal symmetry imbedded in a standard cosmology: The case of cosmic voids* .
- FALCKE, H. (The Astrophysical Journal Letters, **28**, 2000.). *Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center* .
- FROLOV, V. (Oxford University Press, 2011). *Introduction to Black Hole Physics* .
- GENZEL, R. (Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **39**, 2014.). *Massive Black Holes: Evidence, Demographics and Cosmic Evolution* .
- GENZEL, R. (Reviews of Modern Physics, **82**, 2010.). *The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster* .
- GOLDSTEIN, H. (Addison-Wesley Publishing Company, 1980). *Classical Mechanics* .
- Addison-Wesley series in physics.
- GREENSTEIN, J. (The Astrophysical Journal, **140**, 1964.). *The Quasi-Stellar Radio Sources 3C 48 And 3C 273* .
- GRENZEBACH, A. (Springer International Publishing, **1**, 2016.). *The shadow of black holes, an analytic description* .

- HAHN, S. and LINDQUIST, R. (Annal of physics, **29**, 1964.). *The Two-Body Problem in Geometrodynamics* .
- HAROON, S. (Physical Review D, **99**, 2019). *Shadow and Deflection Angle of Rotating Black Holes in Perfect Fluid Dark Matter with a Cosmological Constant* .
- HOBSON, M. (Cambridge University Press,2006). *General Relativity: An Introduction for Physicists* .
- HUANG, Y. (International Journal of Modern Physics D, **27**, 2018). *Revisiting the shadow of a black hole in the presence of a plasma* .
- ISLAMIA, J. *Rotating charge black holes shadow in quintessence* . arXiv:1711.02898v1, 2017.
- KERR, R. (Physical Review Letters, **11**, 1963). *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics* .
- LEVIN, J. (Physical Review D, **77**, 2008). *A periodic table for black hole orbits* .
- LIEBLING, S. (arXiv:gr-qc/12.025809v3, 2017). *Dinamical Boson Stars* .
- LINDQUIST, R. (Journal of Mathematical Physics, **8**, 1967.). *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric* .
- LYNDEL-BELL, D. (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **152**, 1971). *On Quasars, Dust and the Galactic Centre* .
- LYNDEL-BELL, D. (Nature, **223**, 1969.). *Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars* .
- MATTHEWS, T. (The Astrophysical Journal, **138**, 1963.). *Optical Identificatin of 3C 48, 30 196, and 3C 286 With Stellar Objects* .
- MAZUR, P. (National Acad Sciences, 2002). *Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes* .
- MELIA, F. (Nature, **223**, 2001.). *The Supermassive Black Hole at the Galatic Center* .
- NICKALLS, R. (The Mathematical Gazette, **77**, 2006). *Viète, Descartes and the cubic equation* .
- PENSORE, R. (Nature, **229**, 1971.). *Extraction of Rotational Energy from a Black Hole* .

- PETRI, M. (arXiv:gr-qc/0306063v3, 2004). *Compact anisotropic stars with membrane - a new class of exact solutions to the Einstein field equations* .
- PETRI, M. (arXiv:gr-qc/0306066v2, 2003). *The holostar - a self-consistent model for a compact self-gravitating object* .
- QUEVEDO, H. (International Journal of Modern Physics D, **20**, 2010.). *Mass Quadrupole as a Source of Naked Singularities* .
- REES, M. (Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **22**, 1984.). *Black Hole Models for Active Galactic Nuclei* .
- SCHMIDT, M. (Observations of the California Institute of Technology: Radio Observatory, **197**, 1963.). *3C 273: A Star-Like Object With Large Red-Shift* .
- SCHUNCK, F. (arXiv:astro-ph/0801.0307v1, 2008). *General relativistic boson stars* .
- SCHWARZSCHILD, K. (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, **7**, 1916). *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* .
- SCHÖDEL, R. (Classical and Quantum Gravity, **31**, 2014.). *The nuclear cluster of the Milky Way: our primary testbed for the interaction of a dense star cluster with a massive black hole* .
- SHAIKH, R. (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **482**, 2019). *Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities* .
- SHIBATA, M. (Physical Review D, **78**, 2008.). *Simulating coalescing compact binaries by a new code SACRA* .
- SOLDOVIERI, T. (Universidad de Zulia, 2018). *Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton* .
- TEO, E. (General Relativity and Gravitation, **35**, 2003.). *Spherical Photon Orbits Around a Kerr Black Hole* .
- THOMSON, A. (Wiley New York et al, 2008.). *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy* .
- THORNE, K. (Princeton University Press, 1973). *Gravitation* .
- VIEIRA, P. (universidad de coimbra, 2015). *Black hole shadows - Sombras de buracos*

*negros* .

VINCENT, F. (Classical and Quantum Gravity, **28**, 2011.). *GYOTO: a new general relativistic ray-tracing code* .

VISSER, M. (arXiv:0706.0622v3, 2007). *The Kerr spacetime: A Brief introduction* .

WANG, M. (Physical Review D, **98**, 2018.). *Chaotic shadow of a non-Kerr rotating compact object with quadrupole mass moment* .

WHEELER, J. (Addison Wesley Longman, 2000). *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity* .

## A. Condiciones de órbitas esféricas de fotones

### A.1. Interpretación física $\xi$ y $\eta$

A continuación, se muestran las condiciones que deben satisfacerse para que existan órbitas esféricas en el espacio–tiempo de Kerr. En primera instancia, se resuelve el sistema de ecuaciones conformado por las expresiones en (3.30)

$$\mathcal{R}(r) = r^4 + Ar^2 + Br + C = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{dr} = 4r^3 + 2Ar + B = 0. \quad (\text{A.2})$$

donde

$$A = (a^2 - \eta - \xi^2), \quad B = 2M[\eta + (a - \xi)^2], \quad C = -a^2\eta.$$

Al despejar  $B$  de (A.2) y sustituirlo en (A.1) se obtiene

$$-3r^4 - Ar^2 + C = 0,$$

de tal forma que al expandir los términos y despejar  $\eta$ , se tiene que

$$\eta = \frac{3r^4 + r^2(a^2 - \xi^2)}{(r^2 - a^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora, al combinar las ecuaciones (A.3) y (A.2), y multiplicar por  $(r^2 - a^2)/2$  en ambos lados de la igualdad

$$\xi^2 [a^2(r - M)] - \xi [2aM(r^2 - a^2)] + 2r^2a^2M - a^4M + 3r^4M - a^4r - r^5 - 2a^2r^3 = 0,$$

de lo cual se obtiene una ecuación cuadrática en  $\xi$ , cuyas raíces están dadas por

$$\xi = \frac{2aM(r^2 - a^2) \pm \sqrt{D}}{2a^2(r - M)}, \quad (\text{A.4})$$

con

$$D = 16a^2r^4M^2 - 16Ma^2r^3(r^2 + a^2) + 4a^2r^2(r^2 + a^2)^2. \quad (\text{A.5})$$

Para el espacio–tiempo de Kerr,  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ , y con esto la ecuación (A.5) de puede reescribir como

$$D = 4a^2r^2\Delta^2,$$

así, la ecuación (A.4) toma la forma

$$\xi = \frac{M(r^2 - a^2) \pm r\Delta}{a(r - M)} \Rightarrow \quad (\text{A.6})$$

$$\xi_1 = \frac{r^2 + a^2}{a}, \quad \xi_2 = -\frac{r^3 + ar^2 + Ma^2 - 3Mr^2}{a(r - M)}. \quad (\text{A.7})$$

De esta forma, al reemplazar cada una de las expresiones de (A.7) en (A.3), se obtiene que

$$\eta_1 = -\frac{r^4}{a^2}, \quad \eta_2 = -\frac{r^3(r^3 - 6Mr^2 + 9M^2r - 4a^2M)}{a^2(r - M)^2}. \quad (\text{A.8})$$

Una vez calculadas las raíces, es necesario realizar un estudio sobre cada una de estas para determinar su significado físico. En primera instancia, el par  $\{\xi_1, \eta_1\}$  satisface la relación

$$\eta_1 + (\xi_1 - a)^2 = 0, \quad (\text{A.9})$$

por lo cual, la ecuación (3.29) se reescribe como

$$\left(\frac{\Sigma}{E}\right)^2 \dot{\theta}^2 = -\left(a \sin \theta - \frac{\xi_1}{\sin \theta}\right)^2. \quad (\text{A.10})$$

Es claro que el lado derecho de la ecuación (A.10) debe ser mayor o igual a cero. El rango de la desigualdad se determina a partir de los puntos en donde la ecuación se anula, por lo cual basta solo con estudiar las raíces de la ecuación. De lo anterior, se encuentra que

$$\xi_1 = a \sin^2 \theta, \quad \eta_1 = -a^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{A.11})$$

Un fotón caracterizado por el par  $\{\xi_1, \eta_1\}$  traza una órbita esférica de radio  $r = a \cos \theta$ , sin embargo, este siempre se da al interior del horizonte de eventos<sup>1</sup>, entonces es automáticamente descartado. El estudio del par  $\{\xi_2, \eta_2\}$  realiza en la subsección (3.2.1). Por otra parte, a partir de los puntos de retorno en la ecuación (3.36), es claro que se debe satisfacer la relación

$$\sqrt{4a^2\eta + (a^2 - \eta + \xi^2)^2} > 0. \quad (\text{A.12})$$

Para el caso de  $\eta < 0$ , esta solo se cumple si

$$f(r) = a^2 - \eta - \xi^2 > 0, \quad (\text{A.13})$$

---

<sup>1</sup>En el caso de un agujero negro de rotación extrema,  $a = \pm 1$ , dicha órbita coincide con el horizonte de eventos si  $\cos \theta = \pm 1$ .

sin embargo, para todo  $r > r_+$  se tiene que  $f(r) < 0$ . Lo anterior se puede apreciar al despejar  $\xi^2$  de la expresión (A.3) y se reemplaza en (A.13), de esta forma

$$f(r, a) = - \left( 3r^2 + \frac{a^2}{r^2} \eta \right), \quad (\text{A.14})$$

de tal manera que al expandir  $\eta = \eta_2$  se tiene que

$$f(r) = - \frac{2r(r^3 - 3rm^2 + 2a^2m)}{(r - m)^2}. \quad (\text{A.15})$$

En la figura (27) se puede apreciar el comportamiento de  $f(r, a)$  para los radios permitidos de órbitas esféricas entre el rango  $0 \leq a \leq 1$ , en donde es claro que  $f(r, a) < 0$  en  $r > r_+$ .

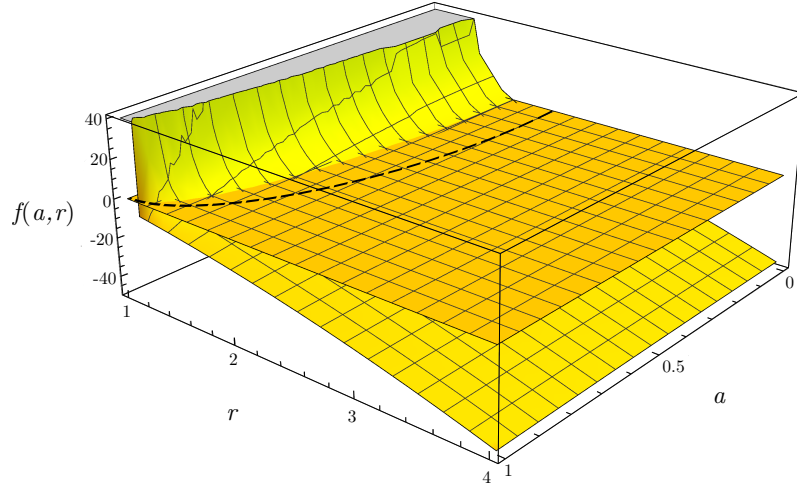


Figura 27: gráfica de la función  $f(r, a)$  en el rango permitido de órbitas esféricas. Se dispuso de una superficie en amarillo oscuro para  $f(r, a) = 0$ , donde es apreciable que dicha función puede tener valores positivos al interior del horizonte de eventos (línea negra punteada), sin embargo, siempre es negativa al exterior del mismo para todos los valores del parámetro de rotación  $a$ .

De esta forma,  $\eta < 0$  es descartado. En conclusión, la condición de órbitas esféricas debe satisfacer  $f(r, a) = a^2 - \eta - \xi^2 < 0$ . El estudio para  $\eta \geq$  se estudia en la subsección (3.2.2)

## A.2. Radios límite de la fotorregión

En primera instancia, se parte de la ecuación

$$r^3 - 6Mr^2 + 9M^2r - 4a^2M = 0, \quad (\text{A.16})$$

de tal manera que al dividir por  $M^3$  y plantear el cambio de variable

$$x = \frac{r}{M}, \quad a_0 = \frac{a}{M}; \quad 0 \leq a_0^2 \leq 1 \quad (\text{A.17})$$

la ecuación cúbica (A.16) toma la forma

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4a_0 = 0. \quad (\text{A.18})$$

Entonces, para solucionar la ecuación anterior, primero se determinarán las raíces de un polinomio genérico de tercer orden

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (\text{A.19})$$

y al realizar la sustitución

$$x = t - \frac{b}{3}, \quad (\text{A.20})$$

la expresión (A.19) adopta la forma

$$\left(t - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(t - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(t - \frac{b}{3}\right) = 0,$$

$$t^3 + t \underbrace{\frac{3c - b^2}{3}}_p + \underbrace{\frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27}}_q = 0,$$

puede verse que aún mantiene la forma cúbica

$$t^3 + pt + q = 0, \quad (\text{A.21})$$

de tal forma que al usar la sustitución [NICKALLS \(2006\)](#)

$$t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \theta; \quad p < 0$$

se tiene que

$$2^3 \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(-\frac{p}{3}\right) \cos^3 \theta + 2p \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \theta = -q \quad (\text{A.22})$$

y al usar algunas relaciones trigonométricas es posible mostrar que [ABRAMOWITZ \(1964\)](#)

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos(3\theta); \quad \cos(3\theta) = \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \quad (\text{A.23})$$

de lo que se tiene

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right] - \frac{2\pi}{3} k; \quad k = \overline{0, 2} \quad (\text{A.24})$$

donde  $k$  ofrece las tres posibles soluciones de la ecuación cúbica, cuya forma general tiene la forma

$$x = -\frac{b}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right] - \frac{2\pi}{3} k \right). \quad (\text{A.25})$$

Ahora, para el problema en cuestión, se tiene que

$$b = -6, \quad c = 9, \quad d = -4a_0^2, \quad (\text{A.26})$$

por lo cual

$$p = -3, \quad q = 2 - 4a_0^2, \quad (\text{A.27})$$

así, de la solución general (A.25)

$$x = 2 + 2 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos (2a_a^2 - 1) - \frac{2\pi}{3} k \right]. \quad (\text{A.28})$$

Para tener mayor practicidad en los cálculos y simplificar la expresión anterior, se prueba que

$$\arccos (2a_o^2 - 1) = 2 \arccos (|a_a|). \quad (\text{A.29})$$

Para ello, se parte de la forma compleja del  $\arccos \beta$

$$\arccos \beta = i \ln(\beta - i\sqrt{1 - \beta^2}), \quad 0 \leq \beta^2 \leq 1 \quad (\text{A.30})$$

ya que  $0 \leq a_0^2 \leq 1$  es posible definir  $\beta = 2a_0^2 - 1$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \arccos (2a_o^2 - 1) &= i \ln \left( 2a_o^2 - 1 - i\sqrt{4a_o^2 - 4a_o^4} \right), \\ &= i \ln \underbrace{\left( 2a_o^2 - 1 - 2|a_o| i\sqrt{1 - a_o^2} \right)}_{(|a_0| - i\sqrt{1 - a_0^2})^2}, \\ &= 2i \ln \left( |a_a| - i\sqrt{1 - a_o^2} \right) = 2 \arccos (|a_o|). \end{aligned}$$

De esta forma, la solución general toma la forma

$$x = 2 \left( 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos(|a_0|) - \frac{2\pi}{3} k \right] \right),$$

y al retomar la variables originales, se tiene

$$r = 2m \left\{ 1 + \cos \left( \frac{2}{3} \arccos \left( \frac{|a|}{m} \right) - \frac{2\pi}{3} k \right) \right\}. \quad (\text{A.31})$$

Entonces, al tomar los respectivos valores de  $k$

- $k = 0$

$$r = r_2 \equiv 2m \left\{ 1 + \cos \left( \frac{2}{3} \arccos \left( \frac{|a|}{m} \right) \right) \right\}, \quad (\text{A.32})$$

la cual corresponde con el radio de la órbita estable más interna en el espacio–tiempo de Kerr para fotones que siguen una órbita retrógrada.

- $k = 1$

$$\theta = \frac{2}{3} \arccos |a_o| - \frac{2\pi}{3}, \quad (\text{A.33})$$

y por medio de identidades trigonométricas, se tiene

$$\arccos(y) = \pi - \arccos(-y) \Rightarrow \theta = -\frac{2}{3} \arccos(-|a_o|)$$

$$r = r_1 \equiv 2m \left\{ 1 + \cos \left( \frac{2}{3} \arccos \left( -\frac{|a|}{m} \right) \right) \right\}, \quad (\text{A.34})$$

la cual corresponde con el radio de la órbita estable más interna en el espacio–tiempo de Kerr para fotones que siguen una órbita prógrada.