

Conocimiento especializado sobre la función lineal de un profesor de matemáticas en formación

Giovanny Alberto Segura Herrera

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magister en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias de la Especialidad Matemática Educativa

Codirector

Eric Flores Medrano

Doctor en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A Dios a quien amo, adoro y reconozco como mi único señor. Él ha sido, es y seguirá siendo mi luz, mi fortaleza y mi salvación.

A mis padres Alberto Segura y Gloria Herrera, quienes con esfuerzo, amor y dedicación siempre velaron por mi salud y bienestar.

A mi esposa Laura por ser mi compañera de mil batallas, mi ayuda idónea y mi regalo de Dios.

A mi hermana Yenny Paola por ser mi mayor ejemplo de superación.

A mis dos preciosas sobrinas, Danna y Gabriela, a las cuales amo con todo mi corazón.

Agradecimientos

A Dios, pues siempre me da su amor, fuerza y consuelo para seguir adelante en medio de todas las adversidades. Mi vida entera es por Él y para Él.

A mis amados padres, Alberto Segura y Gloria Herrera, quienes en todo momento creyeron en mis capacidades y me acompañaron con profundo amor a lo largo de mis procesos de aprendizaje y crecimiento personal.

A mi hermosa esposa Laura, pues con su paciencia y tierno amor me motiva a cumplir mis metas personales y académicas.

A la mejor hermana mayor de todas, Yenny Paola, quien durante toda mi vida me cuidó y apoyó en el desarrollo de mis metas.

A mi directora de tesis, la Doctora Sandra Evelyn Parada Rico, por brindarme su amistad, paciencia, apoyo y disposición a lo largo de mi formación, sin ella, este logro no sería posible.

Al Doctor Eric Flores Medrano por codirigir este trabajo, su disposición y orientación fueron valiosas en mi proceso de formación.

A mis evaluadores, la Doctora Ivonne Sandoval y el Doctor Gonzalo Espinoza Vásquez, por el preciado tiempo dedicado a la evaluación de este trabajo, sus orientaciones fueron fundamentales.

A mis profesores de la maestría, Sandra Parada, Jorge Fiallo, Solange Roa, y Luis Ángel Pérez, quienes con su experiencia y dedicación orientaron mi formación como investigador.

A mi compañero y amigo Jaiver Rey, por sus aportes a este trabajo.

A la Universidad Industrial de Santander mi alma mater, a la Escuela de Matemáticas y el grupo EDUMAT-UIS, pues se convirtieron en mi segundo hogar.

¡Infinitas gracias!

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código 70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Tabla de contenido

Introducción.....	12
1 Algunos antecedentes y planteamiento del problema	15
1.1 Conocimiento del profesor de matemáticas.....	15
1.2 Algunos trabajos relacionados al concepto de función lineal.....	18
1.3 Estudios sobre función lineal y MTSK	20
1.4 Planteamiento del problema.....	23
2 Marco teórico: Modelo MTSK	24
2.1 El subdominio KoT: una interpretación del conocimiento sobre la función lineal	28
2.1.1 Definiciones, propiedades y sus fundamentos:	29
2.1.2 Registros de representación:	31
2.1.3 Procedimientos:.....	32
2.1.4 Fenomenología y aplicaciones:	33
2.2 El Subdominio KFLM: una interpretación del conocimiento sobre la función lineal	34
2.2.1 Teorías de Aprendizaje	34
2.2.2 Fortalezas y dificultades	35
2.2.3 Formas de interacción con el contenido matemático	36
2.2.4 Intereses y expectativas	36
3 Metodología.....	37
3.1 Contexto de la investigación y selección del caso	38
3.1.1 Contexto de la investigación.....	38
3.1.2 Selección del caso de estudio.....	39

3.2 Selección de las fuentes de información.....	43
3.3 Selección y sistematización de los datos.	43
3.3.1 Revisión y selección de las evidencias de conocimiento	44
3.3.2 Sistematización y etiqueta de los datos	45
3.4 Análisis sobre el conocimiento especializado de Felipe	48
4 Conocimiento de Felipe sobre la Función Lineal (F.L.)	50
4.1 Descriptores del KoT de Felipe sobre la F.L.	50
4.1.1 Definiciones, propiedades y fundamentos de la FL	50
4.1.1.1 Definición de F.L. (KoT-D-1).....	50
4.1.1.2 Definición de dominio de función (KoT-D-2).....	55
4.1.2 Registros de representación de la F.L.....	56
4.1.2.1 Representación gráfica en el plano cartesiano (KoT-R-1).....	57
4.1.2.2 La representación tabular (KoT-R-2)	60
4.1.2.3 La representación algebraica (KoT-R-3)	62
4.1.3 Procedimientos de la F.L.	64
4.1.3.1 Proceso para plantear la expresión algebraica (KoT-P-1)	64
4.1.3.2 Cálculo del valor de la pendiente de recta (KoT-P-2)	66
4.1.4 Fenomenología y aplicaciones de la F.L.	67
4.1.4.1 Fenomenología que se modela por medio de la F.L. (KoT-F-1)	67
4.1.4.2 La F.L. como proporción (KoT-F-2)	70
4.1.4.3 La F.L. como variación (KoT-F-3).....	71
4.2 Descriptores del KFLM de Felipe sobre la F.L.	73
4.2.1 Teorías de aprendizaje asociadas a la F.L.....	73

4.2.1.1 Desarrollo del pensamiento variacional (KFLM-T-1).....	73
4.2.1.2 Conceptualización de la F.L desde sus características (KFLM-T-2)	75
4.2.1.3 Las TICS para el aprendizaje de la F.L (KFLM-T-3)	77
4.2.2 Fortalezas y dificultades de los estudiantes al aprender la F.L.	78
4.2.2.1 Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del cálculo diferencial (KFLM-F-1)	78
4.2.3 Formas de interacción con el contenido matemático (F.L.)	80
4.2.3.1 Interacción del estudiante con la F.L mediado por GeoGebra (KFLM-I-1).....	81
4.2.4 Intereses y expectativas de los estudiantes	82
4.2.4.1 Contextos de interés para los estudiantes (KFLM-E-1)	83
4.3 Algunas relaciones dentro del conocimiento especializado de Felipe	84
4.3.1 Las situaciones de variación y cambio en el aprendizaje de la F.L.	84
4.3.2 GeoGebra un mediador para el aprendizaje de la F.L.	85
4.3.3 Representaciones de la F.L. en GeoGebra.	86
4.4 Algunas reflexiones sobre el proceso de formación Felipe	86
4.4.1 Un estudio a la didáctica del cálculo	87
4.4.2 El trabajo colaborativo en la CoP.....	88
4.4.3 Un estudio para atender la diversidad en clase de matemáticas	91
5 Conclusiones.....	93
5.1 Conocimiento especializado de Felipe en el KoT.....	94
5.2 Conocimiento especializado de Felipe en el KFLM	95
5.3 Generalidades y perspectivas.....	96
Referencias bibliográficas.	98

Lista de tablas

Tabla 1. Colores asignados según la categoría de conocimiento45

Tabla 2. Numeración de los fragmentos según el documento46

Lista de Figuras

Figura 1. Esquema del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge.....	26
Figura 2. Ejemplo de la selección de evidencias de conocimiento.....	44
Figura 3. Fragmentos con tomados de las fuentes de información.....	46
Figura 4. Ejemplo del uso de la numeración especial.....	47
Figura 5. Sistematización de las evidencias de conocimiento.....	49
Figura 6. Recomendación de la CoP sobre la definición de dominio.	56
Figura 7. Construcción de Felipe en GeoGebra.....	57
Figura 8. Representación en GeoGebra diferenciando por clima	58
Figura 9. Uso de la hoja de cálculo de GeoGebra	60
Figura 10. Uso de la vista algebraica de GeoGebra.....	62
Figura 11. Procedimiento para calcular el valor de la pendiente.....	66
Figura 12. Llenado de tanque a razón constante como fenómeno de estudio	69
Figura 13. Felipe hace uso de GeoGebra	76
Figura 14. Rúbrica de evaluación: Aspectos históricos, epistemológicos y didácticos.	89
Figura 15. Rúbrica de evaluación: Principio II del DUA.....	89
Figura 16. Comentarios y recomendaciones de la CoP	90
Figura 17. Recomendación de la profesora en ejercicio.	91
Figura 18. Felipe reconoce la función afín.....	92
Figura 19. Función por partes en el nivel 4	93

Resumen

Título: Conocimiento especializado sobre la función lineal de un profesor de matemáticas en formación*

Autor: Giovanni Alberto Segura Herrera **

Palabras clave: Conocimiento especializado, Función Lineal, Profesor de matemáticas en formación.

Descripción: El presente documento presenta los resultados de una investigación de corte cualitativo, a partir de un estudio de caso que tuvo por objetivo: Caracterizar el conocimiento especializado evidenciado por un profesor de matemáticas en formación en el marco del MTSK, mientras desarrolla su trabajo de grado sobre la función lineal y la atención a la diversidad en el aula. Nuestro estudio se fundamentó teórica y metodológicamente en el modelo MTSK el cual nos permitió dar cumplimiento al objetivo a partir de una metodología que consistió en cuatro fases: estudio y selección del caso de estudio, selección de las fuentes de información, selección y sistematización de los datos, y el análisis del conocimiento evidenciado.

Entre los resultados destacamos que el profesor en formación reconoce la variación y la proporcionalidad como características importantes en la conceptualización de la función lineal, esto lo llevó a reconocer fenómenos y situaciones de variación y cambio, que sean estudiadas por medio GeoGebra. Estos aspectos en su conocimiento especializado fueron consolidados en gran medida, gracias a la retroalimentación que recibe en la participación de una Comunidad de Práctica de educadores matemáticos, desde lo cual consideramos que nuestra investigación resalta la importancia de caracterizar el MTSK de un profesor durante procesos de desarrollo profesional con el fin de establecer cómo se consolidan cambios en su conocimiento especializado.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Programa académico. Director: Sandra Evelyn Parada Rico. Codirector: Eric Flores Medrano

Abstract

Title: Specialized knowledge about linear function of a trainee mathematics teacher*

Author: Giovanni Alberto Segura Herrera**

Key Words: Specialized Knowledge, Linear Function, Mathematics Teacher's in Training

Description: This document presents the results of a qualitative research, based on a case study that had the following objective: to characterise the specialised knowledge evidenced by a mathematics teacher in training within the framework of the MTSK, while developing his degree work on the linear function and attention to diversity in the classroom. Our study was based theoretically and methodologically on the MTSK model, which allowed us to fulfil our objective based on a methodology consisting of four phases: study and selection of the case study, selection of the sources of information, selection and systematisation of the data, and analysis of the knowledge evidenced.

Among the results we highlight that the trainee teacher recognises variation and proportionality as important characteristics in the conceptualisation of the linear function, this led him to recognise phenomena and situations of variation and change, which are studied by means of GeoGebra. These aspects in his specialised knowledge were consolidated to a large extent, thanks to the feedback he receives in the participation of a Community of Practice of mathematics educators, from which we consider that our research highlights the importance of characterising a teacher's MTSK during professional development processes in order to establish how changes in his specialised knowledge are consolidated.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Programa académico. Director: Sandra Evelyn Parada Rico. Codirector: Eric Flores Medrano

Introducción

Investigaciones sobre la formación (inicial o continua) del profesor de matemáticas tomaron mayor relevancia en la educación matemática durante las últimas décadas muy seguramente debido a que la labor docente juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta hipótesis se confirma a través de las diferentes investigaciones en el área (de corte curricular, cognitivo y de evaluación de las diferentes ramas de la didáctica de la matemática), donde de manera explícita o implícita se termina confirmando el protagonismo del profesor, por aspectos como su disposición, conocimientos, práctica o reflexiones.

A pesar de reconocerse la importancia del profesor en los procesos de enseñanza y aprendizaje y por ende su formación, los programas de desarrollo profesional no logran abarcar con la profundidad necesaria aspectos teóricos de la didáctica, matemática y pedagogía que son fundamentales para en el desarrollo de su práctica docente.

Al respecto, Ponte (1999) estudia este aspecto desde los conocimientos del profesor, afirmando que “...los docentes no pueden ejercer su función con competencia y calidad sin una formación adecuada para impartir las materias o conocimientos a su cargo, sin un conjunto básico de conocimientos y habilidades profesionales orientados a su práctica docente” (p. 1), pero, ¿qué y cómo son estos conocimientos?, son cuestiones relevantes para que los programas de desarrollo profesional adecúen sus procesos y momentos de formación. Algunos trabajos han realizado importantes acercamientos a una respuesta para la pregunta anterior (Rojas, 2014; Montes, 2015; Escudero, 2015; Aguilar, 2016; Liñán, 2017; Espinoza, 2020) destacando aspectos de la naturaleza del profesor. Al respecto, Escudero (2015) realiza una síntesis sobre la naturaleza del conocimiento del profesor, con características descritas a continuación:

- *Situado y contextualizado*: El conocimiento del profesor es producto de sus actividades, contextos y de la cultura donde se desarrolla.
- *Personal*: El conocimiento del profesor depende de sus experiencias de vida y como docente, además de sus valores, creencias, y actitudes. Lo que lo hace particular y diferente al de otros.
- *Social*: La mayoría de concepciones del individuo están enmarcadas por la experiencia dentro de contextos sociales, aunque existe un margen en el que el sujeto puede ampliar sus concepciones mediante una reflexión consiente (Ponte, 1994).
- *Dinámico, Integrado y Complejo*: El conocimiento del profesor se compone por diferentes tipos de saberes los cuales son difíciles de aislar entre sí, pues poseen un carácter integrador, además cuando uno de estos saberes aumenta o se profundiza repercutiendo en los demás, resaltándose su complejidad, por ende, el conocimiento no es estático, crece y se transforma a través de sus experiencias profesionales y una reflexión consiente sobre ellas.
- *Parcialmente tácito*: En ocasiones el profesor no es capaz de describir el saber que sus acciones evidencian, es decir, el conocimiento tiene una componente que surge de manera espontánea por la necesidad de resolver problemas, es un saber desde la acción (Schön, 1987), el cual por medio de la reflexión se puede convertir en conocimiento desde la acción.
- *Práctico*: El conocimiento del profesor es desde y para la práctica, es decir, la fuente del conocimiento del profesor proviene de su experiencia profesional, y es este conocimiento la base para desarrollar su práctica. Vale la pena resaltar que las experiencias por sí solas no son suficientes para generar el conocimiento, es necesario que reflexione teóricamente sobre sus experiencias.

Complemento a lo anterior, Climent (2002) afirma que la práctica del profesor debe entenderse en un sentido amplio (no solo aquella que ocurre dentro del aula de clase), por ejemplo, se incluyen: planeaciones de clase, reflexiones sobre su experiencia docente, incluso el diseño de material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de un tema. Por ello, consideramos que un aporte en esta línea es el estudio del conocimiento de un profesor en un proceso de formación en el que se pudo visualizar el carácter *dinámico*, en un *contexto* determinado por ambientes colaborativos entre educadores matemáticos.

Para ello, realizamos una investigación de corte cualitativo, a partir de un estudio de caso (Stake, 1999) de tipo instrumental, que nos permitió entender las particularidades del conocimiento *personal* de un profesor, que desarrolló su trabajo de grado (para obtener el título de profesor de matemáticas) en el cual centró su atención en dos aspectos: La función lineal y la atención a la diversidad en el aula de matemáticas. Un aspecto a destacar del proceso de formación del caso seleccionado es la participación que tuvo en un proyecto de investigación desarrollado por una Comunidad de Práctica (CoP) con fundamento en la teoría social de Wenger (1998).

Este tipo de comunidades se conforman por personas que comparte una preocupación, un conjunto de intereses y/o problemas alrededor de un tema, y que profundizan sus conocimientos en esta área a través de entornos colaborativos para construir conocimiento a beneficio de cada uno de sus miembros (Wenger, 1998).

Con base en lo anterior, consideramos enmarcar (desde lo teórico y metodológico) nuestra investigación en el modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) ya que facilita caracterizar la naturaleza y complejidad del conocimiento específico del profesor de matemáticas a partir de sus categorías de análisis (Escudero, 2015) y desde los diferentes *escenarios de su práctica* (Flores et al., 2013) debido a

que nuestras fuentes de información son documentos que registran el proceso de un profesor mientras construye un diseño didáctico alrededor de la función lineal.

La estructura del documento está comprendida en cinco capítulos: i) Algunos antecedentes y el planteamiento del problema; ii) Marco teórico: Modelo MTSK; iii) Metodología de la investigación; iv) Resultados sobre el conocimiento de Felipe; y v) Conclusiones.

1 Algunos antecedentes y planteamiento del problema

En este capítulo mencionamos aquellos trabajos y reportes de investigación (en educación matemática) que nos permitieron consolidar el problema de investigación, y los organizamos en tres líneas: i) Aquellos referentes del conocimiento del profesor de matemáticas y que son el fundamento de nuestro marco teórico (el modelo MTSK); ii) Algunos trabajos relacionados al concepto de función lineal; iii) Aquellos estudios relacionados con el modelo MTSK y la función lineal; y iv) Planteamiento del problema de investigación

1.1 Conocimiento del profesor de matemáticas

Buena parte de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas se han enfocado en sus conocimientos, creencias y concepciones y las relaciones que existen entre ellas como se presenta en Thompson (1992). La importancia de investigar sobre el conocimiento del profesor se explica en trabajos como el de Hill et al., (2008) en el que se logra concluir que los profesores con un mayor dominio del tema que enseñan tienen mayores posibilidades de responder de manera positiva a las necesidades que puedan presentar sus alumnos.

Investigadores como Ponte, (1999; 2012) y Climent (2002) han denominado este conocimiento específico del profesor como *conocimiento profesional*, el cual se define como el “conjunto de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y de los cuales hace uso en el

desarrollo de su labor docente” (Climent, 2002, p. 52). A lo largo de su trabajo nuestro caso de estudio enfatizó que este conocimiento se va desarrollando a lo largo de sus experiencias. Asimismo, Carrillo et al. (2014) reconocen que el conocimiento profesional y el desarrollo profesional forman un complemento, ya el conocimiento del profesor son el sustento para sus reflexiones en su desarrollo profesional, pero este último provee también aprendizajes que luego se consolidan en conocimiento.

Por otra parte, el conocimiento profesional debe ser entendido desde y para la práctica del docente. Según Ponte (2012) el conocimiento del profesor de matemáticas está sujeto a diversas influencias su especificidad radica en que está orientada a una actividad: enseñar matemáticas a un grupo de alumnos. Lo anterior se puede considerar como una relación inminente entre teoría y práctica para ejercer su labor de manera efectiva.

Esta relación entre teoría y práctica fue estudiada por García (2005), en donde establece que la práctica es otro momento en el que el profesor complementa su conocimiento profesional. En ese sentido, los profesores movilizan sus conocimientos para crear situaciones para enseñar. Al respecto Flores et al. (2013) mencionan diferentes escenarios donde los profesores movilizan sus conocimientos, entre los cuales se destacan momentos de diseño y planeación.

Otro aspecto que ha sido ampliamente estudiado es ¿cómo se estructura el conocimiento profesional? o ¿cuál es su contenido?, lo cual nos remonta a trabajos como el de Shulman (1986), considerándose como uno de los primeros en estudiar este aspecto. En este trabajo el autor considera tres tipos de conocimiento; el conocimiento del contenido de la materia; el conocimiento didáctico de la materia; y el conocimiento curricular. Este aporte de Shulman de estudiar el

conocimiento pedagógico y matemático del profesor de manera conjunta, permite dar cuenta de la complejidad del conocimiento profesional del profesor.

Tomando como base los trabajos de Shulman, Débora Ball y sus colaboradores proponen estudiar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas desde el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) en Ball et al. (2008). Esta propuesta consiste en estudiar el conocimiento en dominios de conocimiento similares a los que propone Shulman, incluyendo subdominios de conocimiento como el conocimiento especializado del contenido (SCK por sus siglas en inglés) el cual es definido por los autores como el conjunto de aquellos conocimientos y habilidades matemáticas relacionadas con la su enseñanza, es decir, un conocimiento exclusivo del profesor de matemáticas distinguiéndolo del conocimiento de otros profesionales que también hacen uso de la matemática, lo cual lleva a estudiar y entender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas como un conocimiento especializado.

Otro subdominio que incluyen es el Conocimiento común del contenido (CCK por sus siglas en inglés) orientado a aquel conocimiento matemático que no es exclusivo para la enseñanza de la matemática, al parecer el modelo considera a estos dos conjuntos de conocimientos como disjuntos lo que genera dificultades al momento de entender el conocimiento del profesor.

De acuerdo con Carrillo et al. (2018) uno de los aspectos que dificultan en el uso del MKT, es que algunos subdominios se superponen, es decir, no existe una buena delimitación entre algunos de ellos lo que dificulta el análisis, por ejemplo, entre el SCK y el CCK. Otra característica importante del conocimiento profesional del profesor es que es desde y para la práctica, entendiendo que la práctica no es solo la que transcurre en el aula de clase (Carrillo et al., 2014) pero, en el modelo MKT, se centra en la práctica de la clase, obviando conocimientos que los

profesores pueden poner en juego en otros momentos de práctica, por ejemplo, diseñar y planificar la enseñanza de un tema.

Como solución a las dificultades anteriormente descritas, y como un aporte en aras de una mejor comprensión del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, surge el modelo MTSK, en el cual también tiene como fundamento el trabajo de Shulman, y los potenciales avances del trabajo de Ball y sus colaboradores (Carrillo et al., 2014).

El modelo MTSK considera el conocimiento del profesor de matemáticas como especializado, en todos los aspectos que lo componen, diferente al MKT, que consideraba esa especialidad en algunos subdominios.

1.2 Algunos trabajos relacionados al concepto de función lineal

Coincidimos con Barajas et al., (2016) cuando asegura que tradicionalmente los profesores de matemáticas instruyen al estudiante a la realización procesos algebraicos mecánicos cuando enseñan el concepto de función, por ende, dan poca importancia al estudio de situaciones que implican la variación y el cambio. Aspecto que dificulta a sus estudiantes un buen acercamiento al concepto función lineal (Villa, 2008).

La razón a estas dificultades en la enseñanza del concepto puede provenir de la limitada visión de los profesores sobre el concepto de función, de hecho, esta hipótesis no es reciente, en Even (1993) se reportaron los vacíos conceptuales sobre el concepto de función de un grupo de profesores, lo cual afectó notablemente sus conocimientos pedagógicos, pues presentaban a sus estudiantes una regla que debían seguir sin profundizar en la comprensión de la misma.

Aunado a esta dificultad, Posada y Villa (2006) afirman que los conceptos de variación y proporción son rutas para una mejor comprensión de la función lineal, pero no son usados para su

enseñanza debido al poco dominio que manejan los profesores en este aspecto, debido a ello, los autores desarrollaron una propuesta didáctica en la que se introduce a la función lineal desde una perspectiva variacional, lo que les permitió concluir que este tipo de funciones sirven como modelo matemático para los fenómenos que implican variaciones, cuya razón de cambio es constante, es decir, la constante de proporcionalidad es el elemento central para identificar el concepto como un modelo matemático. Por otra parte, los autores destacan el análisis histórico–epistemológico como elemento que favorece la enseñanza del concepto, ya que proveen al estudiante vías de acceso para lograr la conceptualización.

En el trabajo de Gutiérrez y Parada (2007) caracterizan el tratamiento de representaciones y sus conversiones en estudiantes de ingeniería cuando estudian tres situaciones de variación que se modelan por medio de funciones afines, reportando que los estudiantes usan la representación gráfica, algebraica y aritmética en función del fenómeno estudiado, esto quiere decir que los estudiantes se ven influenciados a usar distintos registros de representación de acuerdo al contexto de la situación. Por ende, la dificultad en articular las diferentes representaciones de la función.

Roldan (2013) diseña e implementa (en estudiantes entre 13 y 14 años de edad) una secuencia didáctica para la enseñanza de la función lineal, desde la cual también reporta la importancia de las representaciones de la función lineal y afín (tabular, gráfica cartesiana, algebraica y verbal) y el equilibrio en el uso y articulación entre ellas a partir del estudio de diferentes contextos. El autor concluye que el aprendizaje de este concepto requiere que el estudiante tome distancia de la definición formal presentada de forma tradicional por el profesor y libros de texto y que por medio de la experimentación y la creación de modelos construya y llegue a su propia definición. En ese sentido la recomendación es que el estudiante no memorice

o mecanice el modelo lineal, sino que, por medio del estudio de fenómenos, sus datos y las diferentes representaciones pueda darle sentido a los aspectos teóricos como la pendiente, razón de cambio (constante), interceptos, entre otros.

Lo anterior nos permitió entender lo complejo que puede llegar a ser la enseñanza y aprendizaje de la función lineal (y afín) por sus aspectos didáctico-matemáticos, además de los métodos tradicionales de enseñanza que se caracterizan por presentar la función lineal desde su definición formal sin que el estudiante pueda comprender la naturaleza del concepto y la idoneidad de sus representaciones.

1.3 Estudios sobre función lineal y MTSK

Si bien, no encontramos trabajos sobre el conocimiento del profesor sobre la función lineal que se enmarquen en un estudio desde el MTSK, sí tomamos en consideración trabajos como el de Espinoza (2015) en el que propone descriptores de conocimientos relacionados a las categorías del subdominio KoT sobre el concepto de función, para ello realiza un análisis didáctico usando como fuentes de información un par de textos de matemáticas sobre cálculo en educación superior y documentos oficiales del currículo chileno, entre ellos la guía del profesor y para el estudiante en octavo básico sobre el concepto de función. Desde este análisis identifica posibles descriptores del conocimiento en profesores sobre el concepto de función asociados a las cuatro categorías del subdominio KoT (definiciones propiedades y sus fundamentos, registros de representación, procedimiento y, fenomenología y aplicaciones). A continuación, mencionamos algunos descriptores resultados de dicho análisis:

- *Definiciones propiedades y sus fundamentos:* Conocimiento sobre la definición de función, la propiedad de linealidad de una función, el concepto de constante de proporcionalidad y la determinación para representar la función.
- *Registros de representación:* Conocimiento sobre la representación tabular de la función y su construcción, lenguaje algebraico (expresión algebraica o ecuación funcional), la representación en el plano cartesiano, con material concreto (geoplano, o softwares de geometría dinámica), Reconoce las diferencias entre la representación de una relación funcional de una no funcional.
- *Procedimientos:* Conocimiento o Dominio sobre la resolución de ecuaciones como herramienta en la determinación de imágenes y pre imágenes, Operatoria con números racionales, la ubicación de puntos en el plano cartesiano, la evaluación de expresiones algebraicas.
- *Fenomenología y Aplicaciones:* Conocimiento sobre distintos contextos que se modelan por medio de la función como variación proporcional o cambio lineal, los ámbitos numéricos que son factibles trabajar en el nivel en que enseña, Conoce distintos significados de la función como correspondencia, como proceso de entrada-salida o de transformación.

Si bien, los anteriores descriptores fueron identificados para el tema de función, nos guiaron en la identificación de aquellos relacionados a la función lineal y afín, de hecho, algunos de ellos se relacionan directamente con la función lineal, por ejemplo: “*la propiedad de linealidad de una función, el concepto de constante de proporcionalidad y la determinación para representar la función*”.

Posteriormente, en Espinoza (2020), el autor consolida su investigación en la caracterización del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas experto sobre el concepto de función. En su trabajo presenta cuatro etapas para caracterizar el conocimiento del caso seleccionado: i) identificar evidencias e indicios sobre las intervenciones del profesor cuando enseña el concepto de función; ii) Describir conjuntos de evidencias en términos del modelo MTSK lo que dio origen a indicadores o descriptores de conocimiento del profesor; iii) Establecer relaciones dentro de los conocimientos identificados en las fases anteriores para darle sentido como parte de una red interconectada; iv) Interpretar las relaciones en el conocimiento como integrales desde las distintas dimensiones en la enseñanza del concepto de función.

Uno de los aspectos más relevantes en la metodología usada es la selección de un profesor experto, pues se tenía como hipótesis que al ser un profesor con gran experiencia usaría un mayor número de estrategias y conocimientos para la enseñanza del concepto lo cual validó con los resultados de su investigación, ya que logró evidenciar gran densidad de conocimientos matemáticos asociados a los subdominios KPM y KoT, en este último, mostrando variedad de significados de la función. En los conocimientos didácticos presentaron mayor equilibrio en cuanto a la cantidad de descriptores por subdominio. Por último, se validó también el rol central que el MTSK le da a la matemática, pues, los conocimientos didácticos que evidenció el profesor fueron fuertemente influenciados por sus conocimientos matemáticos, especialmente en la forma de organizar la enseñanza de la función y las estrategias usadas para su enseñanza.

En general, el conocimiento de este profesor sobre la función se orientó hacia lo procedimental, por ejemplo, al cálculo de imágenes, la construcción de representaciones y cálculo de inversas, también el estudio de propiedades de inyectividad, epiyectividad y biyectividad de la

función, pero, no se incluye el uso de la función como herramienta que va más allá de operatorio y ni como objeto matemático que puede resultar útil en la modelación de fenómenos de la vida real, tampoco relaciona la función con la proporcionalidad o el cambio lineal.

1.4 Planteamiento del problema.

Teniendo en cuenta lo anterior, y que en la Universidad Industrial de Santander (Escuela de Matemáticas), se conformó una CoP de educadores matemáticos que tiene por objetivo principal desarrollar una serie de diseños didácticos que permitieran dar atención a la diversidad en el aula de matemáticas usando como documento orientador el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) (Pastor, 2019).

Quienes realizan este proceso de diseño, son en su mayoría futuros profesores de matemáticas que realizan su trabajo de grado dispuestos a participar en nuestra investigación, proporcionando su consentimiento y los documentos que registraran su proceso de diseño en el marco de la CoP menciona anteriormente

Seleccionado el futuro profesor de matemáticas que participó en nuestra investigación como caso de estudio (aspecto que se profundiza en el capítulo 3) y luego de una revisión a las fuentes de información observamos un mayor número de evidencias de conocimiento asociadas al KoT y KFLM, por lo cual planteamos como pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado se evidencia en un profesor de matemáticas que desarrolla su trabajo de grado sobre la función lineal y la atención a la diversidad en el aula?

Para lograr dar respuesta a esta pregunta, plantemos como objetivo: Caracterizar el conocimiento especializado evidenciado por un profesor de matemáticas en formación en el marco

del MTSK, mientras desarrolla su trabajo de grado sobre la función lineal y la atención a la diversidad en el aula.

2 Marco teórico: Modelo MTSK

La definición de conocimiento según Schoenfeld (2010) es la información de un individuo que pone a su disposición para usar y resolver problemas, lograr metas y desarrollar tareas. Y es esta la definición que adoptan los autores del modelo como base para posicionarse frente a lo que es el conocimiento del profesor, de hecho, en Carrillo et al. (2014) se reconoce este conocimiento (el conocimiento profesional) como inherente a la práctica docente.

El modelo MTSK facilita la caracterización y comprensión de la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, gracias a su estructura y categorías de análisis, pero ¿qué se entiende por especializado? Este carácter especializado es una de los elementos más importantes de este modelo comparado con otros.

Según Scheiner et al. (2017), este carácter especializado se refiere no a un tipo de conocimiento, sino a un estilo de conocimiento, lo que conlleva a estudiar no solo qué conocimientos tiene el profesor, sino cómo surge, dando la perspectiva de un conocimiento no estático, sino que está sujeto al cambio (en gran parte, gracias a la reflexión sobre su práctica).

De acuerdo con los autores, esta perspectiva del conocimiento del profesor invita a estudiar la formación del profesor desde un enfoque holístico, criticando la adquisición de conocimientos de forma separada llevando a que los programas de formación de docentes de matemáticas deban diseñarse de manera integrada para ayudar a los docentes a combinar conocimientos de diversas disciplinas, incluidas, entre otras, las matemáticas, la educación y la psicología, creando así estilos

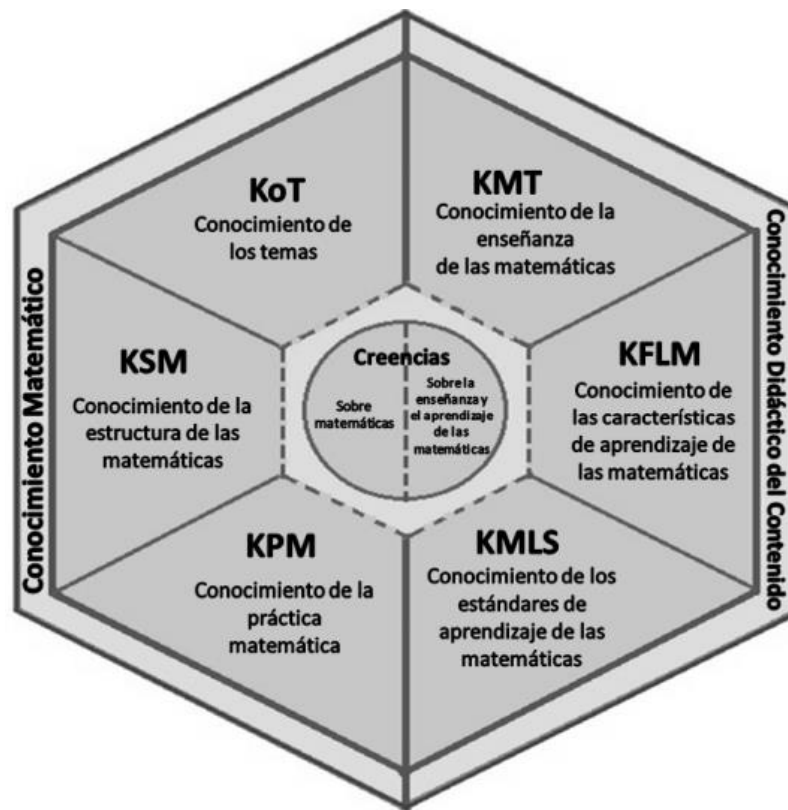
novedosos de conocimiento que capaciten a los docentes para remodelar el camino. (Scheiner et al., 2017)

La idea de caracterizar el conocimiento especializado de un profesor durante un *proceso de formación* resulta compatible con las bases teóricas del modelo MTSK, ya que nos permite no solo observar y caracterizar su *estilo* de conocimiento, sino dar cuenta de la influencia de los espacios de formación y reflexión que pueden influir en su conocimiento especializado. Aunado a lo anterior, la estructura de modelo facilita al investigador realizar un acercamiento más profundo a aquellos conocimientos que el profesor evidencie durante su práctica gracias a sus categorías de análisis. A continuación, presentamos de manera general la estructura del modelo.

Estructura del modelo MTSK

En el esquema hexagonal del modelo (Figura 1) se pueden distinguir los aspectos del conocimiento del profesor que facilitan su caracterización (MK: Mathematical Knowledge; KoT: Knowledge of Topics; KSM: Knowledge of the Mathematical Structure; KPM: Knowledge of Practices in Mathematics; PCK: Pedagogical Content Knowledge; KMT: Knowledge of Mathematics Teaching; KFLM: Knowledge of Features of Learning Mathematics; KMLS: Knowledge of Mathematics Learning Standards, en Carrillo et al., (2013)), basándose en dos dominios de conocimiento (y un tercero referido a las creencias del profesor): a) el dominio del conocimiento Matemático (MK) y b) el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK).

De acuerdo con Carrillo *et al.*, (2018), el modelo se estructura de manera jerárquica en dominios, subdominios, categorías que integran el conocimiento especializado del profesor como sigue:

Figura 1. Esquema del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*

Nota. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) con siglas de los subdominios en inglés, Fuente: Escudero (2015, p.25)

- a) Se proponen dentro del MK tres subdominios que conforman el conocimiento matemático del profesor: i) Conocimiento de los temas (KoT), el cual da cuenta del qué y cómo conoce el profesor en cuanto a lo matemático (más adelante explicaremos con más detalle este subdominio); ii) Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), es el conocimiento del profesor acerca de las conexiones entre elementos matemáticos. (El KSM solo considera las conexiones interconceptuales, mientras que las conexiones intraconceptuales se consideran en

KoT); iii) Conocimiento de la práctica matemática (KPM), hace referencia a la manera como el profesor procede al hacer matemáticas.

- b) El PCK también se divide tres subdominios: i) Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) se refiere a aquel conocimiento del profesor que requiere para comprender cómo los estudiantes entienden y construyen el conocimiento relacionado al tema de estudio; ii) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Al igual que el subdominio anterior, está estrechamente ligado al contenido que se va a enseñar y en él se incluye el conocimiento de las distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales (Flores et al., 2013); iii) Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), se refiere al conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado.

Este dominio, como bien presenta su nombre, se refiere al conocimiento del profesor para la práctica de enseñar, lo que involucra conocer también, la manera en la que el estudiante aprende un cierto contenido matemático y lo referente al currículo que orienta la secuencia escolar.

Es fácil creer que este dominio (PCK) está desligado del dominio anterior, pero, contrario a esto, el enfoque del PCK está relacionado con la Matemática misma (Carrillo *et al.*, 2018). De hecho, estos dos dominios deben complementarse y relacionarse para comprender la naturaleza del conocimiento del profesor.

Como mencionamos anteriormente, para lograr el objetivo en términos de nuestra investigación, decidimos enfocar nuestro análisis en dos subdominios del modelo, i) el

Conocimiento de los temas (KoT) del dominio MK y ii) el Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) del dominio PCK.

El primero de estos subdominios lo elegimos debido a que al hacer la revisión de las fuentes de información (documentos que registran el proceso del profesor en formación) y contrastarlos con los subdominios y sus respectivas categorías encontramos que hay mayor información del conocimiento del profesor relacionado a definiciones, fenomenología y aplicaciones, representaciones y procedimientos siendo estas las categorías representativas del subdominio KoT.

Elegimos también, el subdominio KFLM teniendo en cuenta que el profesor orientó todos sus esfuerzos por atender la diversidad en el aula de clase lo que quiere decir, que debió hacer un esfuerzo por conocer y mostrar lo que conoce en relación a las características de aprendizaje de los estudiantes a quienes va dirigido el diseño.

A continuación, profundizamos sobre estos dos subdominios, aclarando cuáles y en qué consisten sus categorías de conocimiento, además del cómo las abordamos para el tema de la función lineal.

2.1 El subdominio KoT: una interpretación del conocimiento sobre la función lineal

Entendemos por “tema”, lo establecido por Carrillo *et al.*, (2018) “el término tema se refiere a elementos de contenido dentro de las áreas de conocimiento definibles que conforman el programa de estudios de matemáticas” (p.242). Por ende, el conocimiento de los temas o KoT describe el qué y de qué manera el profesor conoce el tema que enseña, lo que implica un conocimiento aún más profundo que aquel que espera sus estudiantes aprendan, por ejemplo, definiciones, propiedades, procedimientos, representaciones, aplicaciones, entre otros, elementos asociados al tema.

Desde el modelo MTSK se proponen cuatro categorías de conocimiento asociadas este subdominio (Carrillo *et al.*, 2018). Ente las cuales están: i) Definiciones, propiedades y sus fundamentos; ii) Registros de representación; iii) Procedimientos y iv) Fenomenología y sus aplicaciones. A continuación, se describen estas categorías, de acuerdo con lo presentado en Carrillo et al., (2018):

2.1.1 Definiciones, propiedades y sus fundamentos:

En esta categoría encontramos el conocimiento del profesor sobre la definición del objeto a enseñar y las propiedades que lo definen. De acuerdo con Espinoza (2020), además de las propiedades que hacen definible al objeto matemático, se consideran también aquellas propiedades que se deducen de otros objetos y sus fundamentos: conocimientos sobre teoremas, axiomas y otras propiedades que justifican el trabajo en el tema. También aquí, intervienen las adaptaciones que el profesor realizar sobre las definiciones matemáticas.

La definición de función lineal está condicionada por algunas propiedades como la proporcionalidad, al respecto, Fiol & Fortuny (como se citó en Roldan, 2013), mencionan que “la proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable” (p.45). Es decir, se puede entender la función lineal como una relación proporcional, la cual se expresa de la forma $y=k*x$ en donde k es la constante de proporcionalidad y x e y son las cantidades variables. Otra propiedad asociada a esta última que particulariza la función lineal y afín es la razón de cambio constante que se da entre las cantidades que covarían.

Desde su representación geométrica la definición de función lineal también toma sentido, de hecho, entre los trabajos que fueron clave en el desarrollo de la noción de función están aquellos

dedicados al estudio de los lugares geométricos (Roldan, 2013). Entendemos por lugar geométrico aquel conjunto de puntos en el plano cartesiano que verifican una regla o relación entre cantidades que varían, Gómez et al., (2016) aportan una definición un poco más formal al respecto:

Si un punto $Q(x,y)$ en el plano cartesiano pertenece a un lugar geométrico L , la condición que debe cumplir dicho punto Q conduce a una ecuación entre las variables x e y que es la llamada ecuación del lugar geométrico L . (p.70)

Definición similar a esta, enunció Fermat (1607-1665), por lo cual terminó estableciendo que para las ecuaciones de primer grado su respectivo lugar geométrico es una línea recta.

Por otra parte, Roldan (2013) caracteriza la función lineal desde su expresión analítica, describiendo cada uno de los parámetros presentes, de la siguiente manera:

Una función lineal tiene la expresión analítica $y = f(x) = mx + b$, Donde m y b son números reales y $m \neq 0$. m es la pendiente o razón de cambio de y con respecto a x y, b es la intersección de la gráfica con el eje vertical. (p.38)

Desde nuestra perspectiva, consideramos que la pendiente de la recta tiene una connotación geométrica, mientras que la razón de cambio tiene una connotación de variación.

Finalmente, reconocemos al igual que Roldan (2013), que pueden existir ciertas diferencias en algunos textos de nivel básico, técnico o profesional sobre lo que se considera como función lineal y/o función afín, en algunos de ellos la función lineal es presentada como una línea recta en la que la ecuación requiere que $b=0$, en caso contrario se le denomina función afín (Nuestra investigación concuerda con esta postura). En otros se le denomina función lineal a cualquiera de los dos casos.

2.1.2 Registros de representación:

Esta categoría se refiere al conocimiento del profesor sobre las diferentes formas para representar el tema, por ejemplo: gráfica, algebraica, aritmética, pictográfica, verbal, simbólica, entre otras; y su habilidad para articular y transitar por las diferentes representaciones (Carrillo et al., 2018).

Para clarificar esta categoría en términos de la función lineal, tomamos en consideración las representaciones más comunes de la función según Sierra et al., (1998), la cuales son:

Descripciones verbales: Enunciados orales o escritos en los que describe el comportamiento de situaciones que implican una relación entre dos o más variables, como puede ocurrir en los fenómenos naturales, sociales, matemáticos, entre otros.

Tablas de valores: Listado de valores de las variables independientes y sus correspondientes variables dependientes organizadas en dos filas o columnas

Gráficas: El registro gráfico se puede realizar en el plano cartesiano mediante una línea recta o curva de la relación entre variables y de forma pictórica como un diagrama sagital en el que se muestra la relación entre dos conjuntos o como un trazo a mano alzada sin los ejes cartesianos como referentes.

Expresiones algebraicas: son fórmulas que relacionan las dos variables que intervienen en una función.

Si bien estas cuatro expresiones representan la función, cada una desempeña un papel importante como procesos, esta idea la expresan Godino et al., (2014) como sigue:

La representación gráfica conecta con las potencialidades de la visualización para formar conceptos y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres. (p. 203)

En concordancia con lo anterior, reconocemos la importancia del uso de los diferentes registros de representación en la enseñanza de la función, además de la adecuada conexión entre ellos.

2.1.3 Procedimientos:

El conocimiento en esta categoría se enfoca en entender ¿Cómo y cuándo hacer algoritmos convencionales o alternativos asociados al tema?, es decir, se refiere a que el profesor conozca las condiciones necesarias y suficientes para aplicar un determinado procedimiento, también cuestiona ¿por qué hacer ese procedimiento? relacionado a los principios que subyacen de los algoritmos.

De acuerdo con Espinoza (2020), algunos ejemplos de conocimiento relacionadas a esta categoría asociados a la función son: simplificaciones o expansión de expresiones, técnicas para resolver ecuaciones, determinar el dominio y recorrido de la función, hallar los puntos de corte con los ejes, las cuales también aplican para el caso particular de la función lineal. Entre los procedimientos más característicos del tema está la forma como determina la pendiente de la recta, la ecuación de la recta.

2.1.4 Fenomenología y aplicaciones:

Se considera el conocimiento del profesor sobre los contextos y situaciones que cuando se estudian contribuyen a la generación de conocimiento matemático para la comprensión del tema. Carrillo et al., (2018) proponen un ejemplo que nos aclara qué tipo de conocimiento se relaciona a esta categoría:

Un ejemplo sencillo es el conocimiento que tiene el maestro de diferentes contextos asociados con el concepto de fracción y sus significados. Asimismo, dentro del conocimiento fenomenológico del docente sobre el tema estaría incluida la conciencia de sus usos y aplicaciones. (p.42)

Desde los registros más antiguos, como lo es de la antigua Babilonia, se mostraba gran interés por los fenómenos astronómicos, incluso problemas de la física y movimiento llevaron a establecer los distintos acercamientos a la noción de función (Ruiz, 1994), específicamente para la función lineal, es preciso aclarar que son aquellas situaciones en donde la razón de cambio entre las variables es constante; las que dan paso a observar de manera más clara este tipo de funciones. Por ello, se puede ver a la proporcionalidad directa e indirecta (sus fenómenos y aplicaciones) como oportunidades para tener un mayor acercamiento a una noción de función lineal más clara y precisa.

Concordamos con estos autores, al describir el subdominio KoT como ese conocimiento profundo del tema, detallado por las cuatro categorías anteriores, siendo de esa manera que se reconoce la complejidad de los objetos matemáticos que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2 El Subdominio KFLM: una interpretación del conocimiento sobre la función lineal

Este subdominio hace referencia a los conocimientos del profesor sobre las formas en las que el estudiante puede aprender cierto tema, es aquí cuando se pueden observar los conocimientos del profesor cuando ve el tema (en nuestro caso la función lineal) como objeto de aprendizaje, en ese sentido, el profesor usa conocimientos para entender la manera en que sus estudiantes piensan y construyen el conocimiento (Carrillo et al., 2018). Este subdominio también toma en consideración las ideas previas que tienen los estudiantes acerca del concepto de estudio y el proceso del estudiante cuando interactúa con el concepto (Fuentes, 2020).

Para comprender este aspecto del conocimiento del profesor, disponemos de cuatro categorías según lo establecido en Carrillo et al., (2014): i) se refiere a las *teorías de aprendizaje* sobre el tema en cuestión; ii) *Fortalezas y dificultades* de los estudiantes al estudiar y aprender el tema; iii) Las *Formas de interacción con el contenido* matemático que tienen los estudiantes al intentar comprender el tema; iv) los *Intereses y expectativas* que tienen los estudiantes al interactuar con el objeto matemático.

A continuación, precisamos cada uno de ellos junto a algunos ejemplos del conocimiento que se puede encontrar relacionados a la función lineal.

2.2.1 Teorías de Aprendizaje

Este es el conocimiento que tiene el profesor acerca de las posibles formas de aprehensión asociadas a la naturaleza misma del contenido matemático, en ese sentido se considera el conocimiento sobre teorías o estructuras institucionales (por ejemplo, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau), adaptadas o incluso personales sobre el proceso de desarrollo cognitivo del estudiante ya sea de forma general (en matemáticas) o específica para un tema o contenido

matemático (Carrillo et al., 2014). También se incluye conocimiento sobre resultados de investigaciones en la didáctica de la matemática o de su propia experiencia docente.

En cuanto a la función lineal, la noción de variación y el pensamiento variacional son considerados en algunos trabajos como base para el estudio del cálculo diferencial, en lo que por supuesto está incluido el estudio del concepto de función como variación (Fiallo y Parada, 2018). Acorde a esta perspectiva variacional en Gómez (2013), reconoce que las representaciones juegan un rol fundamental, a partir del estudio y articulación de las diferentes representaciones de la función (Simbólica, gráfica, tabular, diagramas y expresiones verbales).

2.2.2 Fortalezas y dificultades

Esta categoría considera el conocimiento que tiene el profesor sobre las capacidades, facilidades, obstáculos, errores y dificultades que generalmente presentan los estudiantes al interactuar con el contenido matemático a enseñar y que el profesor puede usar para potenciar y hacer significativo el aprendizaje de sus estudiantes.

Las dificultades que puede identificar el profesor son de tres tipos (Liñán, 2017); i) los epistemológicos, como las que señala Ruiz (1994), que se dieron durante la génesis del concepto, como lo fue concebir la variable como una incógnita, lo que llevaba a estudiar la relación entre cantidades desde las ecuaciones y no como de las funciones, es decir, se obviaba el aspecto dinámico del concepto; ii) Los didácticos, que se pueden generar a causa de la enseñanza, por ejemplo, para el caso específico de la función lineal. Espinoza (2020) señala que un posible error es el de señalar que la relación de proporción entre dos cantidades que covarían solo se caracteriza por el hecho de que una variable aumento y la otra también (para el caso de la proporcionalidad directa) pero, se omite que la condición de esta relación es la razón de cambio constante; por

último, iii) las dificultades de tipo ontológicas, es decir aquellas relacionadas al desarrollo cognitivo del estudiante.

2.2.3 Formas de interacción con el contenido matemático

Según Carrillo et al., (2018), este es el conocimiento que tiene el profesor sobre los procedimientos y estrategias convencionales y no convencionales que utilizan los alumnos para hacer matemáticas, así como la terminología utilizada para expresarse sobre el contenido matemático. Este aspecto del conocimiento del profesor es importante, ya que le permite interpretar y comprender las acciones de sus estudiantes (Zakaryan et al., 2018).

Por ejemplo, el profesor puede reconocer que el estudiante necesita más de dos puntos para poder graficar en el plano cartesiano, por ende, los estudiantes evalúan la variable más de dos veces para identificar el tipo de función por la forma de la gráfica, por otro lado, Aparicio y Cantoral (2006), reportan que los estudiantes puede representar de manera gestual el grado de inclinación de una recta para el caso de las funciones afines o lineales, también, señalan que los estudiantes usan palabras como “cortar” o “saltar” para referirse a la discontinuidad o intersecciones para las representaciones gráficas en el plano cartesiano.

2.2.4 Intereses y expectativas

Esta categoría hace referencia al conocimiento del profesor acerca de los gustos e intereses de los estudiantes, ya que estos pueden ser un elemento que posibilite la elección de las representaciones adecuadas del objeto matemático, de situaciones o fenómenos de estudio que son potenciales escenarios de aprendizaje y a su vez, sean contextos cercanos del estudiante, favoreciendo la motivación del estudiante.

Díaz, Belmar y Poblete (2018) estudiaron la relación entre las emociones de los estudiantes y la modelación de funciones, desde lo cual señalan que para aquellos estudiantes que consideran difícil aprender matemáticas, no es suficiente con la enseñanza recibida para comprender los contenidos, contrario a esto, se frustran y se aburren con la materia provocando una mala disposición y una baja autopercepción sobre su aprendizaje. En esta investigación los autores lograron observar que los estudiantes con mejores niveles de emocionalidad lograron resolver los problemas por medio de la modelación con la función lineal. Es por ello que los aspectos emocionales de los estudiantes suelen ser elementos que orientan al profesor a seleccionar correctamente los problemas, situaciones, fenómenos y/o contextos que pueden aumentar la motivación del estudiante y a reducir los niveles de ansiedad.

3 Metodología

Nuestra investigación se desarrolla bajo la metodología de corte cualitativo, descriptivo, ya que se ajusta a lo que pretende nuestro objetivo, el cual es describir y comprender el conocimiento del profesor, para ello diseñamos nuestra investigación como un estudio de caso de tipo instrumental de único caso (Stake, 1999), ya que pretendemos estudiar la complejidad y particularidad en un contexto, profundizando en las particularidades del caso sin la pretensión de generalizar, pero, reconocemos que los resultados de este estudio son relevantes para dar cuenta de algunos procesos de reflexión para la consolidación de conocimientos durante el desarrollo de ambientes colaborativos.

La metodología se desarrolló en cinco fases que, si bien no son estrictamente secuenciales, sí son etapas que dan sentido y dirección para llegar a nuestro objetivo: i) Contextualización de la investigación y selección del caso; ii) Selección de las fuentes de información; iii) Selección y sistematización de los datos; y iv) Análisis sobre el conocimiento especializado de Felipe

3.1 Contexto de la investigación y selección del caso

En la búsqueda de nuestro caso de estudio consideramos profesores que estuvieran pasando por un proceso de formación y en el que se desarrollara dentro de un ambiente de trabajo colaborativo, ya que allí se reúnen personas con un mismo objetivo fortaleciendo la determinación para alcanzarlo, aportando diferentes perspectivas basadas en su experiencia, lo cual enriquece el trabajo común desde la innovación, las interacciones y el diálogo (Boavida y Ponte, 2002). A continuación, describimos las características de la CoP de donde fue seleccionado nuestro caso de estudio y las razones por las que consideramos como buen informante al profesor en formación que participaba en la CoP.

3.1.1 Contexto de la investigación

Inicialmente centramos nuestra atención en un proyecto desarrollado por una CoP de educadores matemáticos (profesores e investigadores en formación, e investigadores expertos) en la UIS que tenían como objetivo: *Construir diseños didácticos de matemáticas para la educación básica, ajustados a una estructura curricular flexible y adaptable, en los que se haga uso de variadas tecnologías que permitan el acceso a estudiantes con necesidades educativas*. Este proyecto es financiado por el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación del Gobierno Nacional de Colombia. Actualmente (enero de 2024), se han desarrollado más de 20 diseños didácticos alrededor de diferentes temas y niveles escolares de primaria y secundaria; algunos de ellos aún se encuentran bajo valoración de expertos.

Los diseños mencionados fueron propuestos en su mayoría por profesores en formación (estudiantes de pregrado para profesores de Matemáticas) en el marco de su trabajo de grado; es decir, eran estudiantes de últimos semestres del pregrado que reportaron su proceso de formación en dos momentos; Trabajo de grado 1 (T.G.1.) en el primer semestre del año 2022 y Trabajo de grado 2 (T.G.2.) en el segundo semestre del año 2022.

Durante este proceso, los profesores debían hacer una revisión cuidadosa en la literatura que les permitiera sentar las bases teóricas del objeto Matemático, su didáctica y los aspectos curriculares, además de investigaciones relacionadas con la atención a la diversidad en clase de matemáticas, posterior a dicha revisión desarrollaban el diseño didáctico en su versión preliminar, para ser sometido a una rúbrica de evaluación propuesta por la CoP, lo que daba a los profesores herramientas para realizar los ajustes necesarios y así plantear una versión final del diseño didáctico.

Los profesores no solo recibían aportes de la CoP por medio de la rúbrica, también lo hacían en diferentes reuniones o informes sobre los diseños, incluso, la CoP creó un diplomado para profesores en ejercicio con el fin de llevar a las aulas algunos de estos diseños didácticos. Con esto los diseñadores recibían aportes que les permitían una reflexión desde lo matemático, lo didáctico, lo pedagógico y lo curricular.

3.1.2 Selección del caso de estudio

Para nuestra investigación seleccionamos un estudiante para profesor de matemáticas quien al momento de la recolección de la información tenía 29 años, es originario de la ciudad de Bucaramanga, Colombia, su formación académica (universitaria) la realizó en la UIS y al que denominamos Felipe (seudónimo). Felipe formaba parte de la CoP anteriormente descrita, teniendo como objetivo plantear un diseño didáctico alrededor de la función lineal. Felipe fue seleccionado porque su trabajo pasó por todos los procesos de revisión y evaluación propuestos por la CoP: i) construir un diseño didáctico como trabajo de grado; ii) haber valorado el diseño bajo la rúbrica; iii) contar con datos de pilotaje del diseño. Las siguientes son características

relevantes de nuestro caso que se tuvieron en cuenta para su selección y para el análisis de sus conocimientos:

- **Formación académica:** Felipe inicia sus estudios de pregrado como estudiante de matemáticas logrando avanzar hasta el sexto nivel del programa (aproximadamente el 80% del plan de estudios), pero decide no continuar y reanudar su formación académica en la carrera de licenciatura en matemáticas (programa dirigido a estudiantes para profesor de matemáticas) en el cual homologa las asignaturas relacionadas con el área de matemáticas, y da inicio a cursar asignaturas de didáctica de la matemática y de pedagogía.

Esta característica en Felipe resulta muy interesante porque, mientras él se formaba como matemático no consideraba la posibilidad de usar sus conocimientos para la enseñanza, lo cual lo llevó a repensar y reflexionar sobre sus conocimientos durante gran parte de su formación didáctica y pedagógica (incluyendo su trabajo de grado). El caso de Felipe resulta compatible con las ideas propuestas por Scheiner et al., (2017) ya que nos invitan a pensar el carácter especializado del conocimiento como un estilo (más que un tipo de conocimiento) en el que se considera no como algo estático, sino que está constantemente expuesto al cambio.

- **Un acercamiento a la didáctica del cálculo:** Durante su T.G.1. Felipe cursa la asignatura de didáctica del cálculo en la que se promueve el estudio del cambio y la variación desde situaciones problema, favoreciendo el desarrollo de los procesos de comunicación; razonamiento; elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; y representación. Procesos que están conceptualizados en MEN (2006) y que orientan las bases teóricas de Fiallo y Parada (2018), usadas para el desarrollo de

esta asignatura. Sumado a lo anterior, durante el curso se estudian las potencialidades de GeoGebra como herramienta que facilita el estudio del cambio y la variación desde una perspectiva dinámica. Lo anterior resulta ser un espacio en el que el profesor puede reflexionar sobre lo que podría ser una conceptualización más precisa de la función lineal.

- **Su diseño fue implementado por un grupo de profesores:** Felipe cuenta con dos informes de la implementación de su diseño para realizar los ajustes debidos a la versión final del mismo, el primero de ellos proviene de una profesora que participó en el diplomado; el segundo, provino de la implementación del diseño en un estudiante con discapacidad visual, tal implementación fue realizada por un grupo de estudiantes para profesores de matemáticas.

Otros aspectos que llevaron a Felipe a reflexionar sobre sus conocimientos (orientados a su práctica docente), y posteriormente a su posible reestructuración, fueron aquellos que lo desafiaron a atender la diversidad en el aula de matemáticas, para lo cual decidió plantear un diseño con actividades flexibles pensando en las diferentes capacidades, talentos y obstáculos que los estudiantes puedan presentar al aprender la función lineal. A continuación, los describimos:

- **Elección de un contexto:** El diseño didáctico busca dar respuesta a una pregunta desafiante relacionada a un contexto de interés para los estudiantes, y que además sirva como hilo conductor para el estudiante que lo desarrolla; esta pregunta es *¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?* Este contexto presenta gran riqueza de oportunidades para estudiar el modelo lineal.

El cobro por consumo de agua en el hogar se puede modelar por medio de la función lineal y afín ya que, y está determinado de manera general por las siguientes cantidades: i) cada metro cúbico de agua tiene un valor de 1281 pesos colombianos (COP) (según la descripción hecha por Felipe); ii) el cobro fijo mensual, el cual se realiza en la factura sin importar la cantidad de metros cúbicos consumido; y iii) Un subsidio o contribución dependiendo del estrato de la vivienda, para los estratos 1, 2 y 3 reciben un subsidio (descuentos) el cual se aplica siempre y cuando no sobrepase un cierto límite de metros cúbicos, en caso de pasar este límite, se debe pagar el mismo lo mismo que pagaría un hogar de estrato 4, es decir, no recibe ningún subsidio, por último, para los estratos 5 y 6, deben realizar un aporte que corresponde a un porcentaje establecido del precio de su factura.

- **El DUA como orientador para atender la diversidad en el aula de matemáticas:** Según Jácome y Parada (2023), el DUA establece algunos lineamientos generales para atender la diversidad que necesitan repensarse para la enseñanza de las matemáticas, lo cual resulta ideal para el caso de Felipe, ya que, debido a su formación matemática este aspecto lo invita a reestructurar su conocimiento especializado para la enseñanza de la función lineal.
- **Niveles de profundidad:** Para lograr dar atención a la diversidad, Felipe desarrolla tres diseños didácticos (que buscan responder la misma pregunta problematizadora) que corresponden a un nivel de dificultad o profundidad diferente que se adaptan a las características particulares de los estudiantes (con base en las orientaciones del DUA). Desde esas múltiples estrategias que surgen para la construcción de estos tres niveles,

se pueden identificar oportunidades para tener una mejor caracterización de su conocimiento especializado.

3.2 Selección de las fuentes de información

El proceso realizado por Felipe en T.G.1. consistió en elaborar un documento que contenía todas las bases teóricas y metodológicas para poder desarrollar el diseño didáctico, este documento es denominado propuesta de trabajo de grado, de forma paralela realizó un diseño didáctico preliminar para ser sometido a la revisión de la CoP como se describió en el apartado anterior. Estos documentos fueron una importante fuente de información sobre la primera mitad de su proceso. También consideramos algunos informes en los que recibió sugerencias por parte de la CoP, pero como brindaron poca información sobre sus conocimientos o simplemente porque fueron informes que nos fueron escritos por Felipe, no fueron considerados en la selección y sistematización de datos, pero sí fueron citados algunos como fragmentos de informes extra.

T.G.2. también se conformó principalmente por dos documentos, el primero de ellos es la tesis de grado, en la que retoma gran parte de los aspectos teóricos y metodológicos de la propuesta, con algunas modificaciones, además, agregó un capítulo de resultados en el que redacta los aportes de la CoP, cómo los tuvo en cuenta para realizar las debidas modificaciones al diseño didáctico en su versión final, entre otros resultados; el otro documento es el diseño didáctico en su versión final, este también toma como base el diseño preliminar al cual le realiza algunas modificaciones, agregando algunas definiciones, reestructurando las preguntas y la secuencia de las mismas.

3.3 Selección y sistematización de los datos.

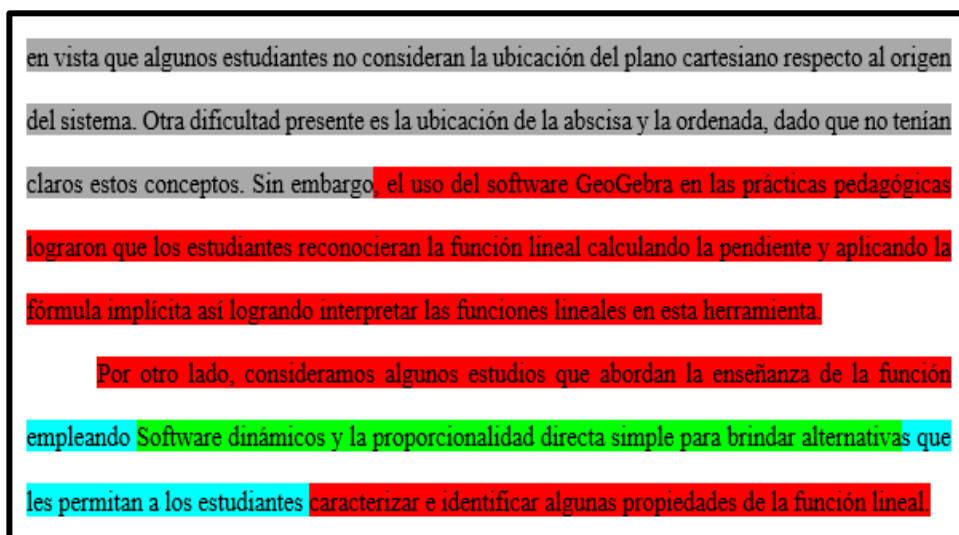
Consideramos que nuestra investigación hace un aporte desde lo metodológico, no solo porque consideramos fuentes de información diferentes a las habituales (observación de la práctica

del profesor en el aula), sino porque diseñamos una técnica para la selección de la información que resultó muy práctica y ordenada, al igual que la sistematización de los datos por medio de una matriz que nos permite establecer la relación entre fuentes de información y las categorías de conocimiento del MTSK lo que nos dio una visión global de todo el conconmiendo que evidenció Felipe en su proceso. A continuación, describimos cada proceso de selección y sistematización.

3.3.1 Revisión y selección de las evidencias de conocimiento

Luego de una revisión general de los documentos, se procedió a resaltar algunas transcripciones de Felipe, esto porque representaban una posible evidencia de conocimiento, para que en el proceso de análisis pudiésemos identificar los datos. En la figura 2 se presenta la selección de un fragmento.

Figura 2. Ejemplo de la selección de evidencias de conocimiento



Nota. Información tomada de Plata (2023)

En términos de practicidad elegimos un color para cada categoría de conocimiento de tal forma que al revisar el documento podamos sistematizar con mayor facilidad estos datos. En la tabla 1, presentamos los ocho colores usados según la categoría.

Tabla 1. Colores asignados según la categoría de conocimiento

Subdominio	COLOR	CATEGORÍA DE CONOCIMIENTO DEL MTSK
KoT	CELESTE	Categoría 1: Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	AMARILLO	Categoría 2: Registros de representación
	ROSA	Categoría 3: Procedimientos
	VERDE	Categoría 4: Fenomenología y sus aplicaciones
KFLM	AZUL	Categoría 5: Teorías de aprendizaje
	GRIS	Categoría 6: Fortalezas y dificultades
	ROJO	Categoría 7: Formas de interacción con el contenido
	MORADO	Categoría 8: Intereses y expectativas

Nota. Autoría propia

3.3.2 Sistematización y etiqueta de los datos

Posterior a la selección de estas posibles evidencias, procedimos a transcribir fragmentos de los documentos en los que se pudieron encontrar una o más evidencias de conocimiento (incluyendo de diferentes categorías). Estos fragmentos se sistematizaron en una tabla de cuatro columnas (ver figura 3), organizadas así: i) el número de la etiqueta del fragmento; ii) el número de página del documento donde fue seleccionada; iii) la transcripción del fragmento; y iv) observaciones que explican la razón por la que fue considerado este fragmento como un elemento para analizar.

Figura 3. Fragmentos con tomados de las fuentes de información

D - DISEÑO BORRADOR			
Fragm.	Pág	Fragmentos	Observaciones
14°	1	Martin, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m ³). El video que encontró Martin es el siguiente: https://www.youtube.com/watch?v=wGNKB2uivtM . Después de ver el video e investigar un poco más, Martin realiza una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor de m ³ de consumo de agua en Colombia es de \$1.281.	Presenta el contexto de interés para los estudiantes Reconoce que el fenómeno de consumo de agua en el hogar favorece el estudio de la función lineal Explicita la representación verbal
15°	2	Martin no comprende bien de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a 7 m ³ , para el estrato 1: $(1.281 * 7 + 6.773) * 0.30 = 4.722$. Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos (7 m ³), por el valor del metrocúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), y a ese resultado se multiplica por el subsidio $(1 - 0.70 = 0.30)$. Además, el profesor le recuerda a Martin que si en el hogar se consume más desde 13 m ³ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.	Reconoce que una dificultad para el estudiante es modelar una situación o fenómeno por medio de una expresión algébrica. Conoce el procedimiento para modelar la expresión analítica. Identifica el dominio durante el proceso

Nota. Autoría propia

Los fragmentos fueron enumerados (como se observa en la primera columna de la figura 3) en el orden que fueron redactados por Felipe, siendo que el primer grupo de fragmentos corresponden a la propuesta, el segundo al diseño didáctico preliminar, el tercer grupo a la tesis y el último al diseño didáctico final. En la tabla 2 se presenta cómo fue asignada la numeración de los fragmentos según el documento de donde fue extraído.

Tabla 2. Numeración de los fragmentos según el documento

Momento	Documento	Número del fragmento
T.G.1	Propuesta	1* al 13
	Diseño preliminar	14° al 23°
T.G.2	Tesis	24 al 39
	Diseño Final	40 al 43

Nota. Autoría propia

Es de esperarse que gran parte de las ideas en T.G.1. fueran retomadas en T.G.2. lo que nos llevó a establecer una numeración especial, agregamos al número del fragmento un asterisco (*) si la transcripción está presente en la propuesta y en la tesis, y agregar el signo de número ordinal (°) si la transcripción seleccionada está en el diseño preliminar y en la versión final.

Figura 4. Ejemplo del uso de la numeración especial

3*	8-9	El desarrollo del pensamiento variacional en la educación matemática en Colombia nos invita a reflexionar sobre las dificultades asociadas a los conceptos de este pensamiento. En particular, es fundamental abordar uno de los conceptos principales en la enseñanza del cálculo como lo es la función, en este caso, la función lineal. Es importante desarrollar el concepto función lineal en los últimos años de secundaria, dado que esto permite dar tratamiento a fenómenos de variación. Desde esta propuesta queremos hacer un diseño didáctico que de importancia a las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender este concepto para dar tratamiento a la variación constante, presente en el modelo lineal, además, considerar las particularidades de los estudiantes.	1. Nuevamente reconoce que el aprendizaje de la función lineal, es necesario realizar un acercamiento desde un desarrollo al pensamiento variacional 2. Variación constante característica principal 3. La función como variación
20°	12	Una forma de medir la “inclinación” de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos para cualquier par de puntos la pendiente como la razón de cambio entre el valor a pagar por cada metro cúbico. Simbólicamente: La pendiente m de una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ $m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Conocimiento sobre la definición de pendiente de recta Explica el proceso para determinar el valor de la pendiente de la recta

Nota. Autoría propia

En la figura 4, se presentan dos ejemplos de esta numeración, primero del fragmento 3 (F-3*) el cual fue tomado del documento *propuesta*, y también se encuentra (de forma similar) en el documento *tesis*. El segundo, del fragmento 20 (F-20°) que fue seleccionado del *diseño preliminar*, pero también está presente en la *versión final*. De esta forma también esperamos identificar con mayor facilidad aquellos cambios en el conocimiento de Felipe. Esta codificación se usa en la presentación de los resultados (Capítulo 4) citando la transcripción los fragmentos dentro de

paréntesis cuadrados (así: [F-20°]) y la transcripción se presentará en el párrafo siguiente al que fue enunciado.

3.4 Análisis sobre el conocimiento especializado de Felipe

Basándonos en las evidencias encontradas planteamos descriptores que responden a la pregunta ¿Qué conoce el profesor? Cada una de las ocho categorías cuenta con sus respectivos descriptores, lo que permite facilitar el análisis posterior de los mismos. Estos descriptores fueron sistematizados en una matriz como se muestra en la Figura 5.

La disposición y organización de esta matriz permite observar en cuáles fragmentos se encuentran las evidencias de cada descriptor, ya que de manera horizontal se puede ver la cantidad de evidencias encontradas para cada uno, y de manera vertical se pueden observar cuales categorías (y descriptores) se encuentran presentes en cada uno de los fragmentos, esto último facilita establecer relaciones dentro del conocimiento especializado de Felipe lo que nos llevó a observar el aspecto holístico e integral del conocimiento especializado (Scheiner et al., 2017).

Sobre este último aspecto, seleccionamos aquellos fragmentos que presentaban relaciones entre las categorías de los dos subdominios estudiados, estas se analizaron y explicaron en subcapítulos 4.3.

Por último, nos apoyamos en algunos informes extra de Felipe, sus reflexiones en el documento de la tesis, su participación en la CoP, entre otros procesos de formación durante el desarrollo de su trabajo de grado, decidimos plantear algunas reflexiones sobre el conocimiento de Felipe con el fin de entender cómo surgió su conocimiento, resaltando los factores en su formación influyeron en su conocimiento evidenciado.

Figura 5. Sistematización de las evidencias de conocimiento

			Fragmentos de las fuentes de información																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
Subdominio	Categorías	Descriptores	TRABAJO DE GRADO 1 (T.G.1.)																					TRABAJO DE GRADO 2 (T.G.2.)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
			Propuesta											Diseño: Primera versión										Tesis																			Diseño final																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
			1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*	8*	9*	10	11*	12*	13	14*	15*	18*	19*	20*	21*	22*	23*	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos (D)	1	Definición de la F.L.			1		1		3			1					1								1	1			1				1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										

Nota. Elaboración propia.

4 Conocimiento de Felipe sobre la Función Lineal (F.L.)

En este capítulo describimos el conocimiento evidenciado en Felipe a lo largo de todo su proceso de formación (desde el contexto del estudio) desde los subdominios KoT y KFLM. Conocimiento que en términos de Espinoza (2020), nos permite dar cuenta de qué y de qué forma conoce el profesor el tema que enseña (en el caso de Felipe en relación a F.L.)

4.1 Descriptores del KoT de Felipe sobre la F.L.

Como se mencionó en la metodología, los descriptores del conocimiento de Felipe surgieron desde las evidencias recolectadas y su respectiva relación con las cuatro categorías del subdominio KoT, es decir: i) Definiciones, propiedades y sus fundamentos; ii) Registros de Representación; iii) Procedimientos y iv) Fenomenología y Aplicaciones. A continuación, realizamos dicha descripción.

4.1.1 Definiciones, propiedades y fundamentos de la FL

Esta categoría se analiza a partir de tres descriptores de conocimiento: i) Definición de función lineal; y ii) Definición de dominio de función.

4.1.1.1 Definición de F.L. (KoT-D-1)

En un primer momento, en la propuesta del trabajo de grado encontramos que Felipe define la función lineal, como se muestra en [F-10].

[F-10] Felipe: para esta investigación se adoptará el concepto de función lineal como una relación de dependencia entre dos cantidades que varían y en las cuales a cada valor de variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Desde esta definición, se percibe que él describe la función en términos generales sin especificar características de la función lineal, misma que usa para plantear los objetivos de su trabajo, como se observa en [F-3*]

[F-3*] Felipe: Desde esta propuesta queremos hacer un diseño didáctico que dé importancia a las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender este concepto y así dar tratamiento a la variación constante, presente en el modelo lineal...

En el fragmento anterior, Felipe destaca que una característica principal de este tipo de funciones (lineales) es la variación constante, esta evidencia se consolida con una actividad que él propone en [F-19°]. Con esa actividad el profesor pretendía que el estudiante identificara la proporcionalidad que existe entre los metros cúbicos de agua consumidos y el cobro en COP que se da en la factura de servicio.

[F-19°] Actividad propuesta por Felipe: d. ¿Qué precio tendrá una factura cuyo consumo sea igual a 5 m^3 y 6 m^3 ? ¿por qué?

e. ¿Cuál es la diferencia entre los valores a pagar en la factura por el consumo de 5 m^3 y 6 m^3 ?

f. ¿Qué precio tendrá una factura cuyo consumo sea igual a 11 m^3 y 12 m^3 ? ¿por qué?

g. ¿Cuál es la diferencia entre los valores a pagar por los consumos de 11 m^3 y 12 m^3 respectivamente?

h. ¿Compara los dos valores de las diferencias encontradas en el inciso e) y en inciso g)? ¿Hay alguna similitud?

Al comparar las diferencias que resultan en esta actividad, Felipe pretende que los estudiantes identifiquen la proporcionalidad entre cantidades y de esta forma puedan deducir la variación constante. Felipe clarifica esta evidencia durante T.G.2 como se muestra en [F-30].

[F-30] Felipe: Siguiendo con la actividad en el inciso f) se espera que los estudiantes logren identificar la diferencia entre los valores obtenidos en las tablas anteriores, esto con el fin de que el estudiante *logre identificar esta variación como una variación constante...*

Por lo anterior, logramos evidenciar que Felipe reconoce la variación constante como una característica fundamental en la definición de la F.L. (también la función afín) y desde la cual espera que sirva como un camino para la conceptualización del estudiante. En [F-5*] Felipe usa como referente algunas investigaciones en las que se identifica como una dificultad común en los estudiantes.

En [F-5*] Felipe usa como referente algunas investigaciones en las que se identifica como una dificultad común en los estudiantes.

[F-5*] Felipe: Asimismo, algunos errores que se evidenciaron en los resultados son: el de concebir la función como una ecuación...

Si bien, Felipe no considera la función como una ecuación, ¿cómo logró diferenciarlas? En su T.G.2 él presenta algunos aspectos que permiten diferenciar la función de la ecuación, como se observa en [F-26]

[F-26] Felipe: Si bien las ideas de cambio y cantidad variable se encontraban en los pensamientos griegos quienes consideraron al cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. *Hablar de esta forma llevó a los matemáticos de la época a hablar acerca de las incógnitas e indeterminaciones más que de variables. Esto condujo a la proporción y ecuaciones, no a las funciones.*

Por lo anterior, se evidencia que Felipe destaca la variación como una característica inherente a la F.L. En ese sentido, él destaca otra característica del concepto, pues en el diseño didáctico intentó destacar la proporcionalidad directa como una alternativa que favorecía el

aprendizaje del concepto. En [F-7*] él describió lo anterior basado en otra investigación (que toma como base en su trabajo de grado):

Por lo anterior, se evidencia que Felipe destaca la variación como una característica inherente a la F.L. En ese sentido, él destaca otra característica del concepto, pues en el diseño didáctico intentó destacar la proporcionalidad directa como una alternativa que favorecía el aprendizaje del concepto. En [F-7*] él describió lo anterior basado en otra investigación (que toma como base en su trabajo de grado):

[F-7*] Felipe: Las autoras [refiriendo a Ibarra y Moreno (2010)] resaltan el uso de gráficos y tablas utilizados por los estudiantes para la formulación de problemas, involucrando las situaciones relacionadas con la vida cotidiana, *teniendo en cuenta que los alumnos identificaron el concepto de función con la característica del tipo $y = kx$ siendo k la constante de proporcionalidad y la alineación de los puntos que lo conforman.*

La última parte de la transcripción llamó nuestra atención, pues Felipe considera la F.L. como una alineación de puntos, lo que nos indica que él aborda la F.L. como lugar geométrico (LG), ya que de acuerdo con Gómez (2016) un LG es “el conjunto de todos puntos del plano que verifican una propiedad determinada.” (p.3). Este conocimiento se evidencia con más claridad en otra transcripción tomada de [F-7*], ya que basado en Giraldo (2012) citado en Plata (2023), Felipe reconoce la importancia de enseñar la función lineal como LG:

[F-7*] Felipe: El autor destaca el uso de las TIC como una herramienta facilitadora en los procesos de enseñanza. Estas le permitieron abordar la enseñanza de la función lineal como lugar geométrico a través de la mediación de software como Cabri o GeoGebra.

Otro elemento importante que evidenciamos en T.G.1. es que Felipe identificó a la F.L. de la forma $y = mx + b$ con $b \neq 0$. En el fragmento [F-15°] Felipe explicó al estudiante la forma en la que podía determinar la expresión analítica:

[F-15°] **Felipe:** Martín no comprende bien de dónde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$(1.281 * 7 + 6.773) * 0.30 = 4.722$$

El procedimiento anterior corresponde al modelo de una función afín ya que el parámetro $b = 6773 * 0.3$, pero, en un informe extra que él realizó, encontramos que se refirió a este modelo como una F.L.

Felipe en un informe extra: Con este momento se pretende que el estudiante en los tres diferentes niveles de dificultad identifique las variables que pueden ayudar a encontrar *el valor de una función lineal*, en el consumo de agua en el hogar, cada nivel cuenta con su grado de dificultad.

Pero, la omisión de la función afín que evidenció Felipe, cambió en el T.G.2, pues como se observa en [F-35] Felipe hace mención de ella:

[F-35] **Felipe:** Se observará en los diferentes niveles una *función afín* y una *función lineal*, esto se hace con el fin de trabajar en la interpretación y ver como los estudiantes logran relacionar estas pautas en la actividad.

En una actividad posterior, Felipe propone una actividad de llenado de tanque a una razón constante la cual se modela por medio de una función afín. En la figura de [F-37] se observa esta función en su representación tabular.

[F-37] **Felipe:** Para el nivel de profundidad 4, la actividad tiene el mismo objetivo de los niveles anteriores sin embargo la complejidad para este momento de la clase se presenta en la Figura 18.

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	5	8	11	14		

En esta actividad, se pretende que el estudiante, a pesar de estar trabajando con la función lineal, identifique que lo que se encuentra presente en esta tabla es una función afín, por ello se pretende trabajar el proceso de comparación tal y como lo hablan Fiallo y Parada (2018), donde él debe comparar y calcular las magnitudes presentes y razonar acerca de los procedimientos analíticos a través del análisis de la tabla.

En esta transcripción, se observa que la función afín fue identificada por Felipe como aquella que tiene la forma $y = mx + b$ con $b \neq 0$, ya que el punto de corte con el eje y no está en (0,0)

En resumen, evidenciamos que Felipe conoce la definición de función como una relación entre dos cantidades variables, una independiente y la otra dependiente, además la reconoce como un lugar geométrico y que va más allá de ser una ecuación, por el hecho de usar cantidades variables y no incógnitas. De manera particular, reconoce la función lineal y afín desde la variación constante y la proporcionalidad características fundamentales para describir el concepto.

4.1.1.2 Definición de dominio de función (KoT-D-2)

Felipe provee una definición de dominio de función en T.G.2. atendiendo las sugerencias que emergieron de la valoración del diseño por la rúbrica. En la figura 6, se muestra esta recomendación que tomamos de un informe extra de Felipe.

Figura 6. Recomendación de la CoP sobre la definición de dominio.

4. El concepto de dominio aparece de la nada. Rompe la secuencia en relación con la situación. En mi opinión, la definición del concepto pierde importancia, lo relevante es analizar la variable y los posibles valores que puede tomar dada la situación.

Nota. Información tomada de Plata (2023)

La definición que finalmente presentó Felipe en su TG2 pretendió usar un lenguaje cercano al estudiante, tal como se observa en [F-42].

[F-42] Felipe: RECUERDA QUE: El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

Cuando Felipe menciona “valores de x que pueden sustituirse” posiblemente se está refiriendo a que el dominio es el conjunto de valores para los cuales la función está definida según la definición de dominio en Encyclopedia of mathematics (2012), este ajuste o adaptación de la definición pudo deberse a la necesidad de flexibilizar el lenguaje para dar atención a la diversidad de capacidades de los diferentes estudiantes.

Según Parada et al., (2011) el uso poco cuidadoso del lenguaje por parte del docente puede generar una interpretación limitada del concepto en el estudiante. En el caso de Felipe la definición de dominio que conoce se muestra desconectada (acorde con los comentarios en la figura 6) de la definición de función que él conoce (KoT-D-1).

4.1.2 Registros de representación de la F.L.

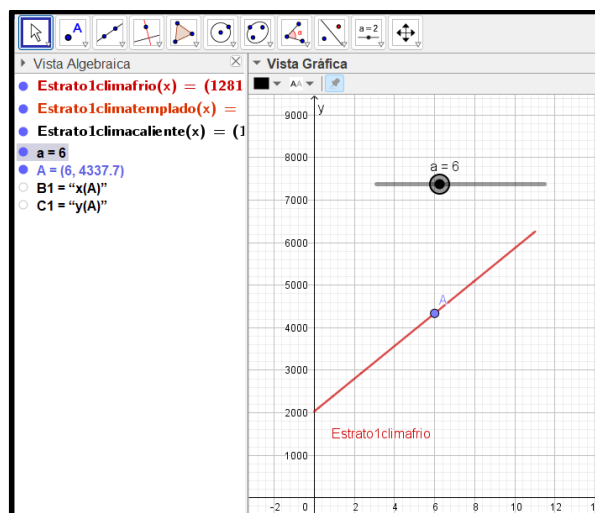
Esta categoría se analiza a partir de tres descriptores de conocimiento: i) Representación gráfica en el plano cartesiano; ii) Representación tabular, y iii) Representación algebraica.

4.1.2.1 Representación gráfica en el plano cartesiano (KoT-R-1)

Las representaciones gráficas de la F.L construidas por Felipe se encontraron a lo largo del diseño didáctico, y fue por medio de estas construcciones que logramos evidenciar su conocimiento al respecto.

En la figura 7, se puede observar la representación de la situación de cobro por consumo de agua en GeoGebra hecha por Felipe. Para esta construcción él debía conocer que la disposición predeterminada que tenían los ejes, no le permitiría a los estudiantes ver la gráfica, es por esto que podemos suponer que Felipe conoce la importancia de los ejes en el plano cartesiano además de la relación que guardan con las variables de la función, esto último, porque el cobro se realiza en miles (COP) y el consumo de agua en unidades cúbicas.

Figura 7. Construcción de Felipe en GeoGebra

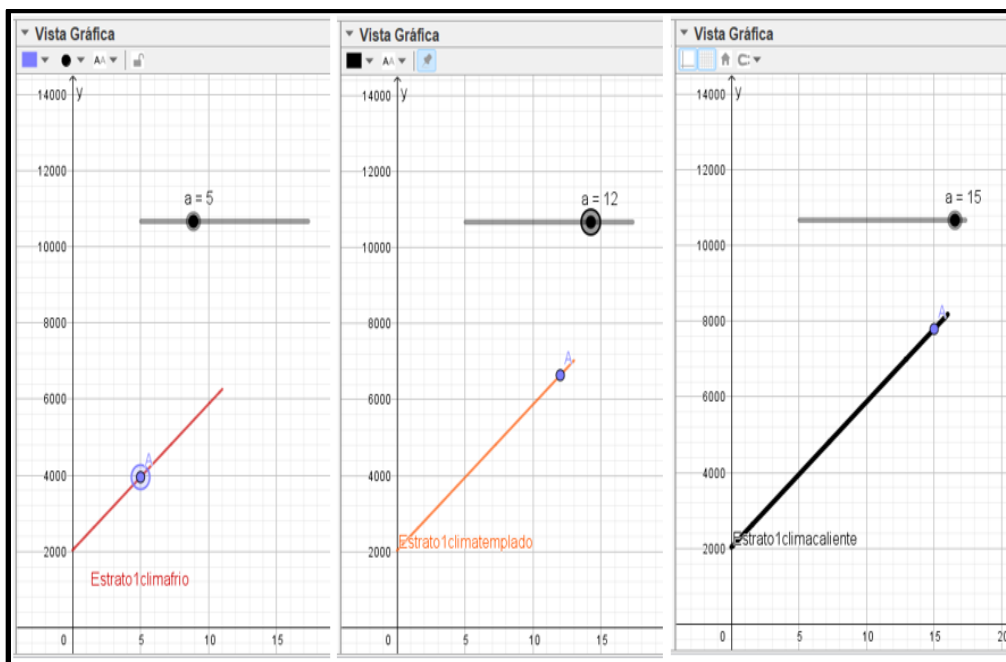


Nota. Información tomada de Plata (2023)

Identificar el dominio de las funciones es otro aspecto importante en la modelación por medio de la representación gráfica, lo cual también lo consideramos como un conocimiento de Felipe pues, (de manera implícita) dispuso de un deslizador en el applet para

que el estudiante pudiera identificar el conjunto de valores en los que está definida la función teniendo en cuenta el clima (frío, templado y cálido) como se observa en la figura 8.

Figura 8. Representación en GeoGebra diferenciando por clima



Nota. Información tomada de Plata (2023)

Felipe también consideró que desde esta representación en GeoGebra se puede resaltar la variación de las cantidades, al respecto en [F-31] él menciona los aspectos que espera resaltar con el software.

[F-31] Felipe: En el nivel de profundidad 2, lo ideal es dar camino a las diferentes representaciones que pueden presentarse en esta actividad, para ello se presenta en Applets de GeoGebra. Aquí se comienza con una breve explicación y una presentación de las rectas que se generan al modelar los consumos de los diferentes estratos tal y como se trabajó en el momento anterior. *Esta actividad tiene*

como fin, que el estudiante manipule y nuevamente pueda observar la variación ya desde un ámbito más tecnológico.

Por último, Felipe reconoció la representación gráfica de la función por partes que modela el cobro por consumo de agua. En la figura de [F-41], se observa que al mover el deslizador y tomar un valor de x fuera del dominio (consumo básico para estratos 1, 2 y 3) establecido para la primera función, el cobro hace “un salto” lo que requirió el uso de otra función.

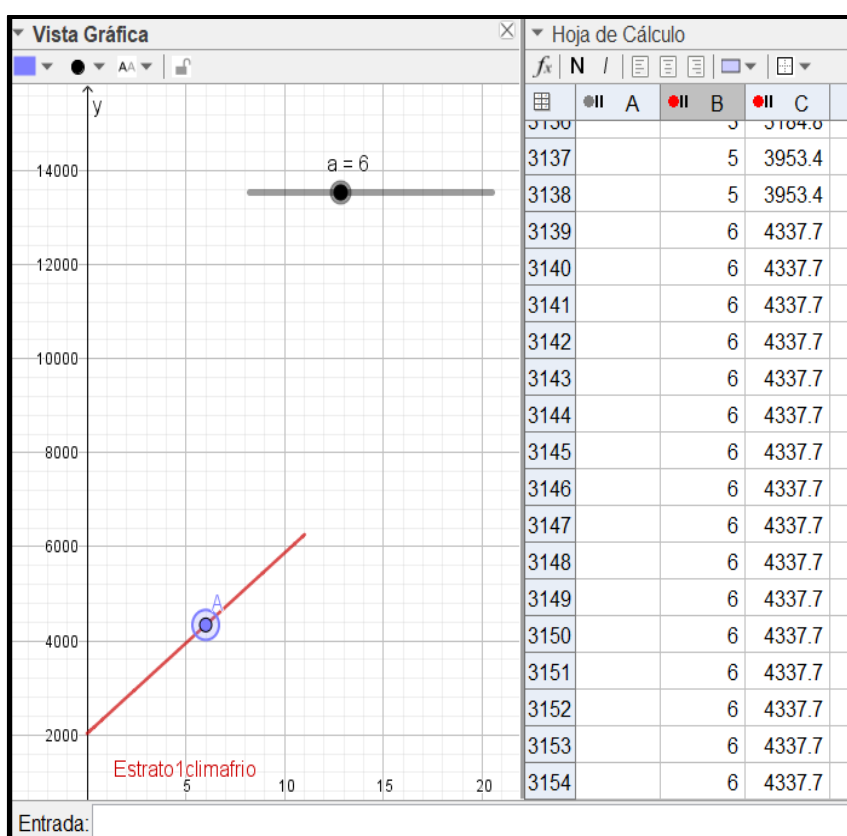
En concordancia con lo anterior, Rueda (2016) destaca que los elementos principales para la construcción de la representación gráfica en el plano cartesiano, son la selección y etiquetado de los ejes, la selección de la escala, la identificación de la unidad y el trazado, aspectos necesarios para la representación en GeoGebra y que, por ende, son conocimientos de Felipe (como se observa en las figuras 6 y 7).

Por otra parte, observamos que Felipe conoce la representación gráfica de la F.L como una *graficación covariacional*, en término de Dolores y Salgado (2009), debido a que según los autores el elemento central de este tipo de graficación es el cambio y no sólo la ubicación de los puntos como sucede en la formas tradicional, por ende, el enfoque se hace en la representación de los cambios (aumento o disminución de una variable y sus efectos en la otra) y no sólo de los puntos de la gráfica. Siendo estos aspectos los que destaca gracias al uso de GeoGebra (como se observó en las construcciones de Felipe mostradas en las figuras 7 y 8).

4.1.2.2 La representación tabular (KoT-R-2)

Felipe aprovechó la herramienta *hoja de cálculo* en GeoGebra para representar de manera tabular la F.L. En el applet que él diseñó muestra una tabla dinámica que registra los valores numéricos que van tomando las coordenadas del punto variable sobre la recta, tal como se observa en la figura 9.

Figura 9. Uso de la hoja de cálculo de GeoGebra



Nota. Información tomada de Plata (2023)

Sumado a lo anterior, Felipe propone una actividad en [F-18°] con la que se evidencia que conoce cómo se conectan la representación tabular con la representación gráfica.

[F-18°] Felipe: *Abra la hoja de cálculo y mueve el punto A ¿Qué representan las coordenadas del punto A ($x(A)$, $y(A)$)?*

En esta transcripción se observa que Felipe conoce que los datos registrados en la tabla (hoja de cálculo en GeoGebra) dan cuenta de la covariación de las cantidades a medida que se desliza el punto A sobre la recta.

Felipe también hizo uso de algunas tabulaciones a lo largo del diseño didáctico, tal como se aprecia en [F-36] con las que esperaba resaltar la proporcionalidad directa como un fundamental en la conceptualización de la F.L.

[F-36] Felipe: Para el nivel de Profundidad 2, se abre la actividad con la situación presentada anteriormente, sin embargo, en este momento se encuentra una situación con una tabla tal y como se muestra en la Figura, *esta tabla aquí mencionada tiene como finalidad la interpretación de la función como proporción*, para ello, los estudiantes deben analizar bien la situación e identificar qué es lo que sucede con esta información.

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6	9	12	15

Lo descrito anteriormente por Felipe concuerda con las ideas de Ibarra y Moreno (2010) quienes destacan el uso de la representación tabular para establecer la correspondencia entre las magnitudes involucradas en una situación de proporcionalidad

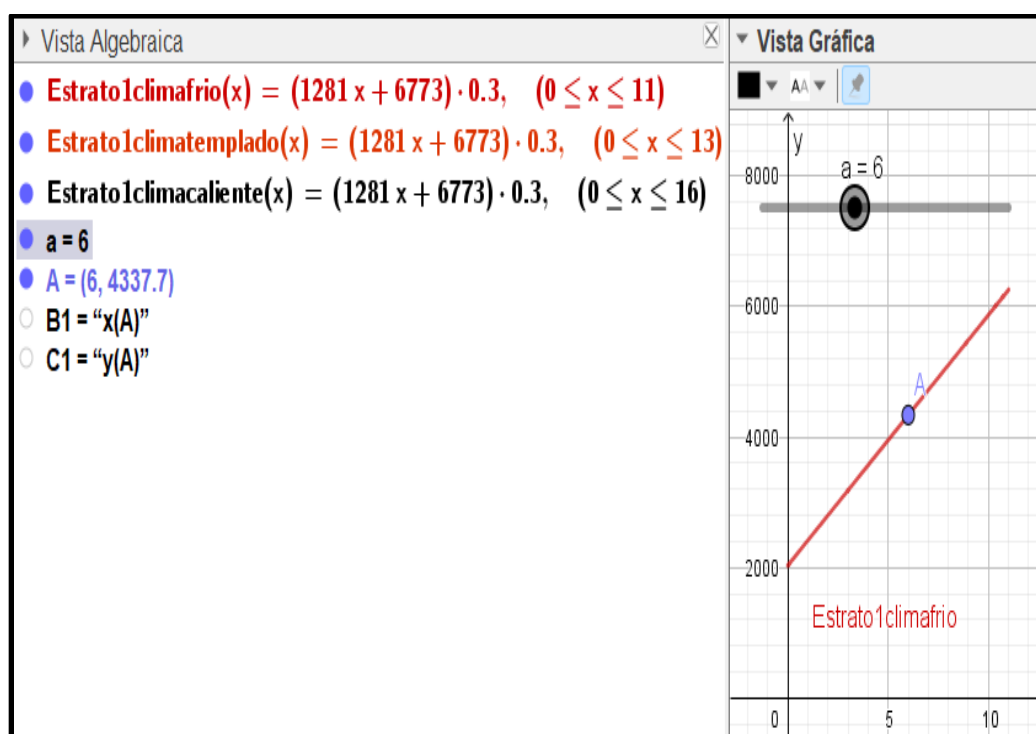
Inferimos que con la disposición de la tabla esperaba resaltar la constante de proporcionalidad, como sucede en el caso de la proporcionalidad de fracciones, ya que excepto por 0/0, las demás parejas guardan la relación de proporción (constante de proporcionalidad 3).

4.1.2.3 La representación algebraica (KoT-R-3)

En la figura 10, se observa la construcción que realizó Felipe para modelar la situación de cobro por consumo de agua para el estrato 1 y en ella muestra la representación algebraica por medio de la herramienta *vista algebraica* en GeoGebra.

El conocimiento de la representación algebraica se deduce por el correcto uso que hizo de GeoGebra ya que para representar gráfica y algebraicamente en el software es necesario introducir en la barra de entrada la respectiva expresión algebraica.

Figura 10. Uso de la vista algebraica de GeoGebra



Nota. Información tomada de Plata (2023)

En esta representación observamos que Felipe delimita los valores que la variable independiente puede tomar, debido a que el porcentaje de descuento (70%) solo aplica hasta un consumo máximo de 11 m³ si es para clima frío, 13 m³ para clima templado y 16 m³ para

clima cálido. Esto nos indicó que Felipe reconoció el dominio en la representación algebraica como un elemento que permitió conectar la representación algebraica y la gráfica, pues sin esta aclaración el software grafica una recta con dominio igual a $(-\infty, \infty)$.

Por otra parte, Felipe identifica la representación algebraica de la F.L a partir de la ecuación de la recta, lo cual concuerda con la concepción de Rueda (2016), quien concibe la representación algebraica de una función como una fórmula implícita en la que se usa lenguaje matemático formal, en [F-6*] se observa la fórmula que conoce Felipe

[F-21°] Felipe: FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y en *general*:

$$y = mx + b$$

Es a partir de esta ecuación canónica que Felipe logró reconocer los dos parámetros (la pendiente y el corte con el eje y) de la F.L que determinan su comportamiento, en [F-6*] él los describe.

[F-6*] Felipe: Lo mencionado anteriormente, permitirá proponer el diseño en el cual se tenga en cuenta las relaciones de covariación entre las variables, las distintas representaciones de la función lineal, asimismo, las posibles interpretaciones que se le dan a *la pendiente* y *el intercepto* para que el estudiante reconozca de esta manera los distintos comportamientos que generan estos parámetros.

Con base en lo anterior deducimos que Felipe reconoce la conexión entre la representación algebraica y la gráfica de la F.L. desde dos aspectos; i) el dominio de la función; y ii) dos parámetros de la ecuación de la recta, los cuales determinan el comportamiento gráfico la pendiente de la recta (inclinación) y el corte con el eje y (ubicación de la recta en el plano).

4.1.3 Procedimientos de la F.L.

Esta categoría se analiza a partir de dos descriptores de conocimiento: i) Proceso para plantear el modelo algebraico; y ii) Cálculo del valor de la pendiente de recta.

4.1.3.1 Proceso para plantear la expresión algebraica (KoT-P-1)

Identificamos dos procedimientos que conoce Felipe: el primero de ellos lo explica desde la identificación de las cantidades que determinan el comportamiento de la función, y el segundo por medio de la ecuación punto-pendiente, por lo que requiere de un punto y la pendiente de la recta.

El primer procedimiento que Felipe conoce lo presenta en el diseño didáctico a modo de ejemplo, con el que pretendía orientar al estudiante para que pudieran plantear la expresión algebraica. Tal como se observa en [F-15°].

[F-15°] Felipe: Martín no comprende de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$(1.281 * 7 + 6.773) * 0.30 = 4.722$$

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$)

Pero, más allá de que Felipe conozca cómo establecer la expresión algebraica desde el caso particular del consumo de agua y llegue a la generalización, identifica cuáles parámetros son variables y cuales son constantes, como se observa en la tabla de [F-40].

[F-40] Felipe: Con la información del video y la tabla 1, completa cada tabla teniendo en cuenta que el consumo básico para clima frío es igual a $11m^3$. Rellene los recuadros con el valor correspondiente

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobro
$9m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$5m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$6m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$11m^3$	$(\square \times \square + \square) \times \square$	6.259
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

En esta tabla, Felipe repitió el proceso de calcular el cobro para diferentes consumos de agua en metros cúbicos con el fin de que los estudiantes pudieran identificar las cantidades que varían (discriminándolas de las cantidades constantes). Confirmamos la deducción anterior, gracias a lo descrito por Felipe en un informe extra, el cual mostramos a continuación:

Felipe en un informe extra: Para estas actividades, desde el inciso *a* al *e*, sirven como guía de orientación para que los estudiantes puedan identificar las variables y analizar el comportamiento de estas mismas.

El segundo procedimiento que conoce Felipe para plantear la expresión algebraica, es usar la fórmula de la pendiente, para la cual requiere un punto y la pendiente. En la figura de [F-32] se observa el procedimiento en mención.

[F-32] Felipe: Para finalizar este momento se presenta la ecuación de la recta tal y como se muestra en la Figura 8, estas definiciones se encuentran a lo largo de los otros dos niveles de profundidad.

FORMULA DE LA ECUACION DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO
 Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto (x_0, y_0) en general:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Felipe evidencia que conoce un procedimiento “mecánico” para plantear la expresión algebraica como lo es por medio de la ecuación punto-pendiente, pero, que a su vez resulta ser un procedimiento práctico en ciertas situaciones, el otro procedimiento está más relacionado a la modelación de un fenómeno, ya que considera las cantidades involucradas en él y cómo estas determinan la relación de correspondencia.

4.1.3.2 Cálculo del valor de la pendiente de recta (KoT-P-2)

Como se mencionó en KoT-D-2, Felipe conceptualizó la pendiente de recta desde la situación de consumo de agua, es decir, desde un caso particular pretendía generalizar la definición para el estudiante, en este caso sucede algo similar, pues en la instrucción que él da a los estudiantes en el diseño didáctico, usa el fenómeno de consumo de agua para ejemplificar este proceso, tal como se observa en la figura 11.

Figura 11. Procedimiento para calcular el valor de la pendiente

La **pendiente** m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Este conocimiento de Felipe está relacionado con el descriptor anterior, ya que, según Martínez de la Rosa (2013) comprender el concepto de pendiente requiere de una clara conexión entre sus distintas representaciones y la relación entre la ecuación de la recta, la gráfica y el contexto. Es importante incidir en la idea de razón de cambio y obtener modelos matemáticos que muestren su utilidad en situaciones reales.

De acuerdo con el autor, el procedimiento que Felipe conoce está conectado con la forma en la que plantea la ecuación de la recta, pues usó la fórmula de la ecuación de la recta de forma implícita.

En esta misma transcripción Felipe incluye la aclaración de que la pendiente de la recta no se puede calcular en caso de ser vertical, es decir, considera que esta es una de las condiciones para proceder a medir su “inclinación” de lo contrario la pendiente es indefinida.

4.1.4 Fenomenología y aplicaciones de la F.L.

Esta categoría se analiza a partir de tres descriptores: i) Fenomenología que se modela por medio de la F.L; ii) La F.L como proporción, y iii) La F.L como variación.

4.1.4.1 Fenomenología que se modela por medio de la F.L. (KoT-F-1)

En el documento de la tesis, Felipe reconoce el consumo de agua en los hogares como un fenómeno que ofrece la oportunidad para que los estudiantes estudien la función lineal, debido a la relación que existe entre la variable consumo en metros cúbicos de agua y la variable cobro en COP, guardan una relación de proporcionalidad directa. En [F-28] él describe el uso de esta fenomenología.

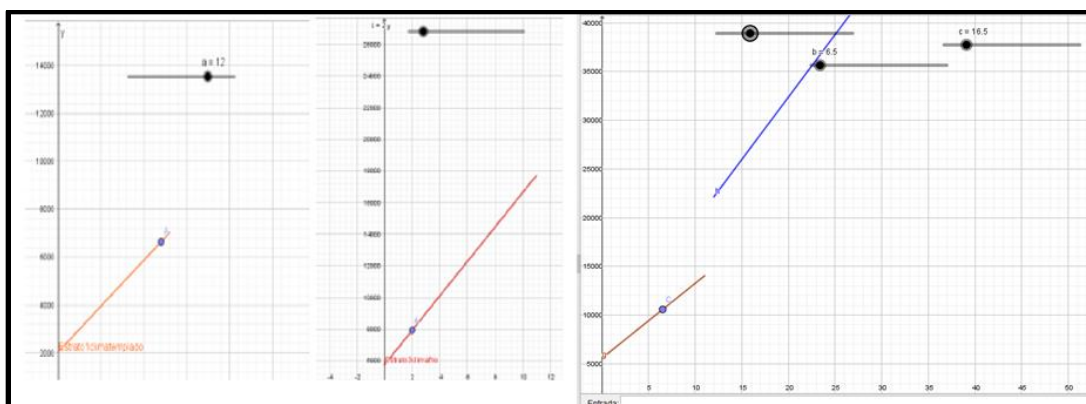
[F-28] Felipe: Para dar continuidad al desarrollo de este apartado, se presenta la siguiente pregunta problematizadora “¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en el

hogar?”, cuyo propósito es incentivar a los estudiantes a indagar y entender un poco acerca de la función lineal en un contexto de la vida cotidiana

Resaltamos que Felipe considere esta situación como un contexto de la vida cotidiana, pues resulta compatible con las ideas de Campeón-Becerra et al., (2018) quienes afirman que el aprendizaje de la función se hace mucho más significativo cuando se plantean secuencias didácticas relacionadas con el contexto del estudiante desde las cuales pueda emplear su propia experiencia para dar solución a la problemática planteada.

Adicionalmente, Felipe reconoce que este fenómeno permite estudiar la función lineal por partes o tramos, debido a que el consumo básico estipulado para los estratos 1, 2 y 3. En [F-33] él menciona esta oportunidad y la manera como lo representó en GeoGebra.

[F-33] Felipe: por otra parte, el mayor cambio se evidencia en el nivel de profundidad 4, tal como se puede observar en la Figura, donde se procede a trabajar una función por partes para los diferentes estratos



En el diseño didáctico, Felipe incluyó la exploración de otro fenómeno, el llenado de tanque con el fin de ofrecerle al estudiante otra oportunidad de explorar las características y propiedades de la F.L, en [F-35] él describe esta actividad.

[F-35] Felipe: En este momento para todos los niveles de profundidad se presenta la situación de un llenado de tanque, el cual tiene como objetivo identificar la función como proporción, tal como lo menciona Ruiz (1998). Aquí se observará en los diferentes niveles que en algunos se encontrará una función afín y una función lineal.

En concordancia a lo anterior, Felipe identificó que este fenómeno debe tener una característica importante para que permita la exploración de la F.L (llenado a razón constantes) tal como él lo describe en la figura 12.

Figura 12. Llenado de tanque a razón constante como fenómeno de estudio

Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón constante.						
Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos						
X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6	9	12	15

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Por lo anterior, identificamos que Felipe reconoce algunos aspectos inherentes a los fenómenos de estudio de tal forma que ofrezcan oportunidades de explorar las características y propiedades de la F.L a los estudiantes.

Uno de estos aspectos es que permitan el estudio de situaciones de cambio y variación, el otro es que la relación entre las cantidades involucradas sea proporcional, ya que la constante de proporcionalidad será a su vez, la pendiente de la recta.

En adición a lo anterior, el objetivo de Felipe al proponer estas situaciones de la vida cotidiana era el de incentivar al estudiante (como se observa en [F-28]) lo cual se acopla a lo

planteado por el MEN (1998) quienes afirman al modelar estas situaciones el estudiante encuentra sentido y significado al objeto matemático, esto sucede siempre que las situaciones estén ligadas a experiencias cotidianas y significativas para el estudiante.

El cobro por consumo de agua en el hogar resulta ser una situación cercana al estudiante promedio de Colombia, pero que al mismo tiempo ofrece oportunidades al estudiante para explorar la función lineal, la función afín, incluso la función por partes, aspectos que destacamos del conocimiento de Felipe.

4.1.4.2 La F.L. como proporción (KoT-F-2)

A lo largo de todo su trabajo de grado, Felipe consideró la proporcionalidad directa como un fenómeno que permite explorar algunas características fundamentales de la F.L. En [F-7*] se observa esta propuesta.

[F-7*] Felipe: Por otro lado, consideramos algunos estudios que abordan la enseñanza de la función empleando Software dinámicos y la proporcionalidad directa simple para proporcionar alternativas que les permitan a los estudiantes caracterizar e identificar algunas propiedades de la función lineal.

En [F-39], Felipe describe la manera en la que se realiza esta aproximación al concepto de F.L a través de la proporcionalidad directa basado en Ibarra y Moreno (2010) citado en Plata (2023).

[F-39] Felipe: A lo largo del diseño se estudia la función lineal $f(x) = mx$ como variación y proporción pues esto les permite a los estudiantes identificar la constante de proporcionalidad presente entre las variables de estudio, la cual corresponde a la pendiente de la recta

En la última transcripción, Felipe hizo mención de la relación de proporcionalidad que tienen las variables de estudio, aspecto que también es estudiado por Fiol y Fortuny (1990) en donde afirman que: “La proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse

bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable” (p.83)

Con base a lo que afirman estos autores, consideramos que Felipe conoce la proporcionalidad directa simple como un fenómeno que al estudiarse permite un acercamiento a la conceptualizar la F.L. gracias a que también consideró la variación en las cantidades de estudio como elemento fundamental.

4.1.4.3 La F.L. como variación (KoT-F-3)

En [F-3*] Felipe reconoció el uso situaciones de cambio y variación para aproximarse al concepto de función, y en el caso particular de la F.L. esta variación debe ser constante.

[F-3*] Felipe: Es importante desarrollar el concepto función lineal en los últimos años de secundaria, dado que esto permite dar tratamiento a fenómenos de variación. Desde esta propuesta queremos hacer un diseño didáctico que dé importancia a las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender este concepto para dar tratamiento a la variación constante, presente en el modelo lineal, además, considerar las particularidades de los estudiantes.

En [F-30], Felipe presenta una actividad del diseño didáctico con la que pretendía que el estudiante pudiera identificar la variación constante presente en el modelo.

[F-30] Felipe: Actividad Inicial

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobro
$9m^3$	$(1281 \times \boxed{} + 6773) \times 0.30$	
$5m^3$	$(1281 \times \boxed{} + 6773) \times 0.30$	
$11m^3$	$(\boxed{} \times \boxed{} + \boxed{}) \times \boxed{}$	6.259
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

Siguiendo con la actividad en el inciso f) se espera que los estudiantes logren identificar la diferencia entre los valores obtenidos en las tablas anteriores, con el fin de que el estudiante logre identificar esta variación como una variación constante, dando así a entender la función como variación descrita por Ruiz (1998).

La actividad descrita anteriormente por Felipe consistía en calcular las diferencias entre pares consecutivos, es decir, la diferencia de precio en las facturas de 5 a $7 m^3$, luego de 7 a $9 m^3$, y 9 a $11 m^3$, y al comparar estas diferencias permitiría ver que eran iguales debido a la variación constante.

Esta aproximación al concepto de F.L por medio de situaciones de variación usado por Felipe concuerda con la concepción de pensamiento variacional propuesta en Acevedo et al., (2007) el cual indaga por:

el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa y al concepto de función.

(p. 23)

Es por lo anterior que, creemos que Felipe reconoció y usó en el diseño didáctico situaciones de variación y cambio como una oportunidad para que el estudiante reconociera regularidades y patrones (como se observa en la actividad de [F-30]) propios de la F.L como la razón de cambio constante presente en el modelo lineal.

4.2 Descriptores del KFLM de Felipe sobre la F.L.

Como se mencionó en la metodología, los descriptores del conocimiento de Felipe surgieron desde las evidencias recolectadas y su respectiva relación con las cuatro categorías del subdominio KFLM, es decir: i) Teorías de aprendizaje; ii) Fortalezas y dificultades; iii) Formas de interacción con el contenido; y iv) Intereses y expectativas. A continuación, realizamos dicha descripción.

4.2.1 Teorías de aprendizaje asociadas a la F.L.

Esta categoría se analiza a partir de tres descriptores: i) Desarrollo del pensamiento variacional desde situaciones problema; ii) Aproximación a la F.L. desde sus diferentes representaciones, características y propiedades; y iii) Las TICS como herramientas que facilitan el proceso de aprendizaje.

4.2.1.1 Desarrollo del pensamiento variacional (KFLM-T-1)

Felipe contempló algunas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática que pretendió abordar y solucionar desde su diseño didáctico. Él describe una de estas dificultades en la propuesta y la tesis, tal como se observa en [F-1*]

[F-1*] Felipe: Se considera que, como docentes debemos tener presentes las dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos para no incurrir en el error de presentar a los estudiantes

los objetos matemáticos de estudio, como una teoría axiomatizada y terminada, por el contrario, ofrecer oportunidades de aprendizaje donde sean ellos quienes construyan el conocimiento.

Por ende, Felipe decidió tomar como referencia el trabajo de Fiallo y Parada (2014) citado en Plata (2023), ya que con esta propuesta espera ofrecerle al estudiante la oportunidad de construir su conocimiento, como se puede ver en otra transcripción tomada de [F-1*]

[F-1*] Felipe: Es, por tanto, Fiallo y Parada (2014) nos muestran un camino en la construcción del pensamiento variacional mediante la resolución de problemas donde promueven el análisis de situaciones de variación y cambio, donde emerge el concepto de función y se presenta al estudiante a través de las diferentes representaciones: tabular, gráfico, algebraico y verbal, para de esta manera, contribuir en la comprensión del objeto matemático.

El desarrollo del pensamiento variacional por medio del estudio de situaciones que puedan modelar los estudiantes va en concordancia con el MEN (2004) quienes caracterizan el pensamiento variacional como “la capacidad que tiene el estudiante para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas” (p. 17).

Para el caso de la función lineal, Felipe aclaró que estas situaciones de variación y cambio deben estar orientadas a visibilizar la proporcionalidad como elemento inherente al concepto de la F.L. Lo anterior, es descrito por Felipe en [F-39]

[F-39] Felipe: Se espera que los estudiantes analicen la variación e identifiquen la constante de proporcionalidad la cual corresponde a la pendiente de la recta, pues de acuerdo con Ibarra y Moreno (2010), la función lineal debe estudiarse a partir de la formulación de problemas a través de la proporción.

De hecho, se evidencia que Felipe concibe la F.L (como se observa muestra en KoT-F-2) de acuerdo a la concepción dada por García et al., (1997): "una función es lineal si

cualquier cambio en la variable independiente causa un cambio proporcional o un incremento en la variable dependiente" (p. 49). Quizá por esto, Felipe considera la proporcionalidad como una característica necesaria en las situaciones de variación y cambio que usó en el diseño didáctico.

Con base a estas evidencias pudimos inferir que Felipe considera la variación (constante) y la constante de proporcionalidad como elementos imprescindibles en la exploración que hace el estudiante por medio de situaciones problema como vía para el desarrollo del pensamiento variacional.

4.2.1.2 Conceptualización de la F.L desde sus características (KFLM-T-2)

Felipe recalcó en su trabajo la intención de usar nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje en las que no solo se haga énfasis a lo procedimental, tal como se visualiza en [F-4*]

[F-4*] Felipe: En efecto, la importancia de abordar el problema se fundamenta en la necesidad que tienen las aulas de atender los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje, de esta manera, permitir a los estudiantes más que la realización de prácticas algorítmicas y repetitivas, encaminarlos a la comprensión de los objetos matemáticos de estudio, en este caso particular, las funciones lineales desde sus distintos registros de representación, sus características y propiedades.

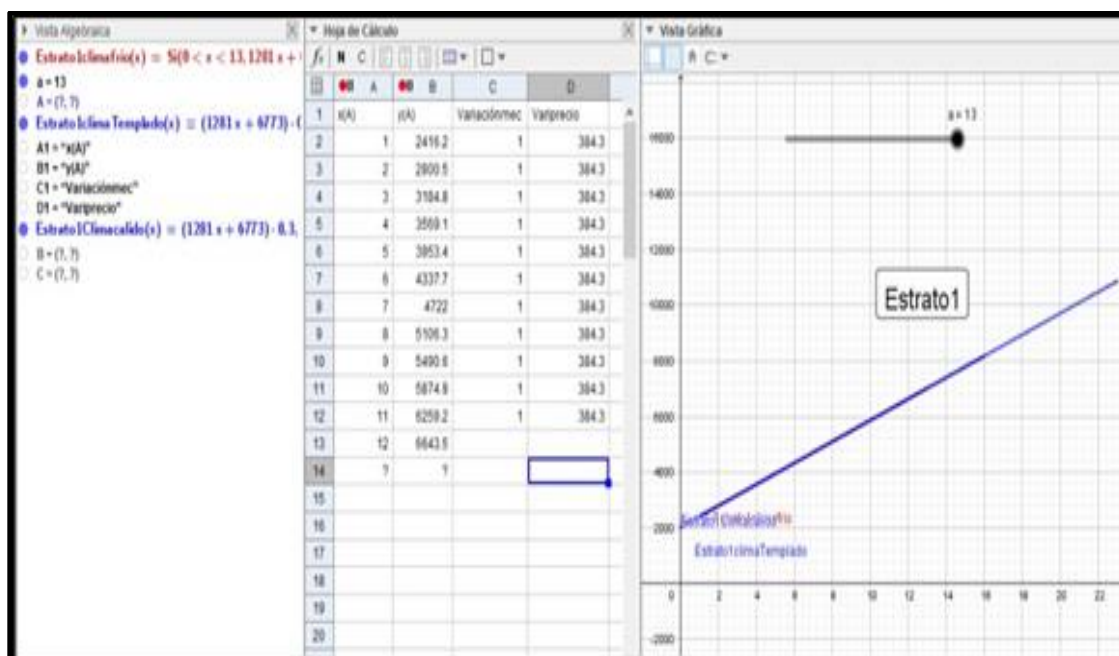
En ese sentido, entendemos que Felipe pretendía que los estudiantes realizaran una aproximación al concepto de F.L por medio de sus características, muchas de las cuales fueron identificadas como conocimientos de Felipe en algunos de los descriptores anteriores, como lo son la proporcionalidad directa, la variación constante y sus diferentes representaciones (gráfica, tabular y algebraica)

En [F-12*], Felipe mencionó la importancia que tuvieron las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) para que el estudiante pudiera reconocer los atributos de este tipo de funciones basado en Giraldo (2012) citado en Plata (2023).

[F-12*] Felipe: Por otro lado, Giraldo (2012) teniendo como base la teoría del aprendizaje significativo, propone la enseñanza de la función lineal a través de los conocimientos previos de los estudiantes y resaltando el uso de las TIC a la hora de abordar los conceptos de manera que se puedan visualizar las características de una función lineal.

La herramienta TIC que usó Felipe fue GeoGebra ya que esta le permitió resaltar las características de la F.L gracias a sus herramientas dinámicas. En la figura 13 se muestra un applet construido por Felipe en este software.

Figura 13. Felipe hace uso de GeoGebra



Nota. Información tomada de Plata (2023)

En [F-6*] Felipe, describe cuáles son las características de la F.L. que espera destacar con el fin de dar vía a la conceptualización del objeto matemático.

[F-6*] Felipe: ...Lo mencionado anteriormente, permitirá proponer un diseño en el cual se tenga en cuenta las relaciones de covariación entre las variables, las distintas representaciones de la función lineal, asimismo, las posibles interpretaciones que se le dan a la pendiente y el intercepto para que el estudiante reconozca de esta manera los distintos comportamientos que generan estos parámetros.

Gracias a estas evidencias podemos suponer que, Felipe consideró que el aprendizaje de la función lineal debería darse desde la exploración de sus diferentes representaciones (tabular, gráfica y algebraica), y características (proporcionalidad y variación constante) aprovechando el dinamismo que ofrece GeoGebra.

Autores como Mena (2014) reconocen, al igual que Felipe, el potencial de este tipo de herramientas digitales para que el estudiante identifique las propiedades del objeto matemático, además de permitir la exploración de manera intuitiva y sin la necesidad de fórmulas que pueden carecer de sentido.

4.2.1.3 Las TICS para el aprendizaje de la F.L (KFLM-T-3)

Felipe dedicó buena parte de su trabajo a la construcción de applets en el software de GeoGebra con las que pretendía ofrecer al estudiante una exploración más detallada del objeto matemático. En [F-7*] se exponen las razones por las que Felipe consideró este recurso como una “alternativa” para el aprendizaje de la F.L.

[F-7*] Felipe: Por otro lado, consideramos algunos estudios que abordan la enseñanza de la función empleando Software dinámicos y la proporcionalidad directa simple para proporcionar alternativas que les permitan a los estudiantes caracterizar e identificar algunas propiedades de la función lineal...

Este conocimiento de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de la F.L que tiene Felipe concuerda con las ideas de Arteaga et al., (2019) quienes consideran a este software como un candidato de extraordinario valor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, porque además permite estimular y desarrollar la creatividad de los alumnos, al permitirle descubrir y construir los conocimientos que son objeto de estudio.

4.2.2 Fortalezas y dificultades de los estudiantes al aprender la F.L.

Esta categoría se analiza a partir del descriptor de conocimiento: i) Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del cálculo diferencial.

4.2.2.1 Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del cálculo diferencial (KFLM-F-1)

Felipe identificó algunas dificultades de los estudiantes cuando aprenden el concepto de función basándose en López y Sosa (2008), citado en Plata (2023). En [F-5*] se pueden observar estas dificultades descritas por él.

[F-5*] **Felipe:** López y Sosa (2008), el propósito de su investigación son los factores que influyen en las dificultades del aprendizaje y errores cometidos por los alumnos en el nivel medio superior cuando manipulan el concepto de función. Algunos de ellos se muestran en la Tabla 2.

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada
Obtener una expresión analítica o grafica de una función que modele un fenómeno	Esquema que responde a situaciones muy similares	La enseñanza del concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis de este	Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o situaciones de variación

La primera dificultad identificada por Felipe es aquella cuando el estudiante no diferencia entre la función y la ecuación, según Felipe (como se observa en la tercera columna de la

tabla en [F-5*]) esta dificultad tiene relación con el aspecto epistemológico del concepto ya que la función tiene relación con lo algebraico y lo geométrico. Otra razón a esta dificultad es descrita por Felipe en [F-26].

[F-26] Felipe: Si bien las ideas de cambio y cantidad variable se encontraba en los pensamientos griegos quienes consideraron al cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Hablar de esta forma llevó a los matemáticos de la época a hablar acerca de las incógnitas e indeterminaciones más que de variables. Esto condujo a la proporción y ecuaciones, no a las funciones.

La anterior transcripción de Felipe evidencia que conoce que esta dificultad se debe a que los estudiantes fácilmente pueden confundir la variable con la incógnita, por ende, la función con la ecuación.

La segunda dificultad de los estudiantes que conoce Felipe (en [F-5*]), es la relacionada a la modelación de fenómenos por medio de la expresión analítica. Para el reconocimiento de esta dificultad, Felipe se basó en López y Sosa (2008) quienes consideran que esta dificultad se debe a que los estudiantes (por lo general) están acostumbrados a trabajar casi exclusivamente los aspectos procedimentales del objeto de estudio, dejando de lado el estudio de situaciones problema y su respectiva modelación.

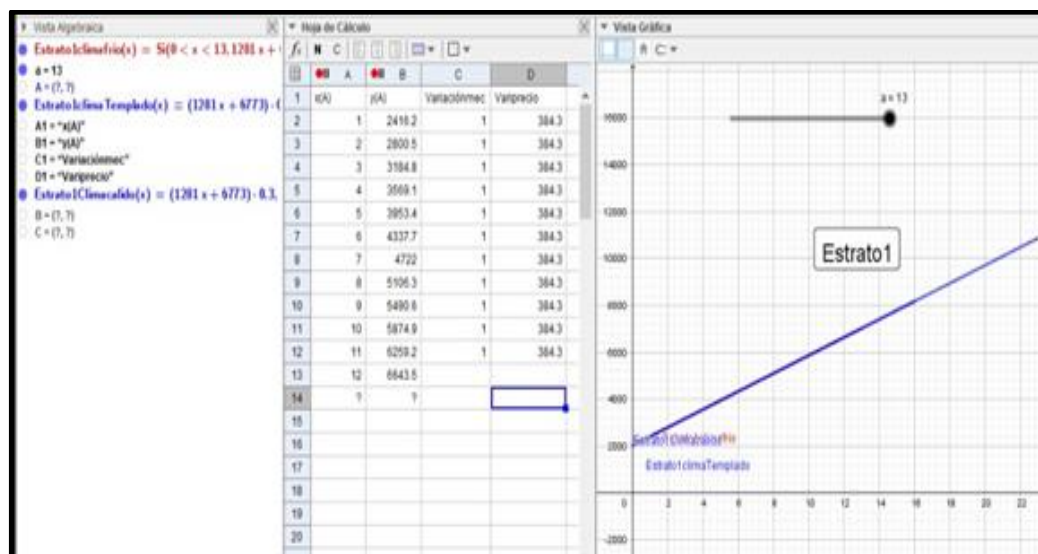
En otra transcripción tomada de [F-5*] Felipe identificó otra dificultad que tienen los estudiantes al momento de representar la función de forma gráfica en el plano cartesiano.

[F-5*] Felipe: Otra dificultad, es que no conocían que el primer número dado es la abscisa y el segundo la ordenada, destacando que la mayoría de los estudiantes presento debilidades en el desarrollo del concepto de la función lineal.

Para abordar esta dificultad, en el diseño didáctico Felipe solicita al estudiante explorar el applet de GeoGebra y plantea una pregunta relacionada con las coordenadas del

punto movable sobre la recta, algo a resaltar es que sugiere al estudiante que esta exploración la realice con ayuda de la hoja cálculo, ya que esta va registrando los valores que toma la abscisa y ordenada mientras desliza el punto. En [F-18°] se observa la actividad planteada por Felipe.

[F-18°] Felipe: En GeoGebra 2.1 que modela la situación del cobro del consumo de agua por estrato1-Climas.



Abra la hoja de cálculo y mueve el punto A ¿Qué representan las coordenadas del punto A ($x(A)$, $y(A)$)?

Los conocimientos de Felipe en relación a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes fueron identificados por él desde la literatura que usó como referencia, muy seguramente esto se debía a la poca experiencia docente con la que contaba en el momento de la realización de su trabajo de grado (era estudiante para profesor de matemáticas).

4.2.3 Formas de interacción con el contenido matemático (F.L.)

Esta categoría se analiza a partir del descriptor de conocimiento: i) Interacción del estudiante con softwares de Geometría Dinámica

4.2.3.1 Interacción del estudiante con la F.L mediado por GeoGebra

(KFLM-I-1)

Felipe reconoce la importancia de proveer alternativas de aprendizaje a los estudiantes para atender la diversidad en el aula de matemáticas, en ese sentido, Felipe distingue al software dinámico como una de esas alternativas, tal como se observa en [F-7*].

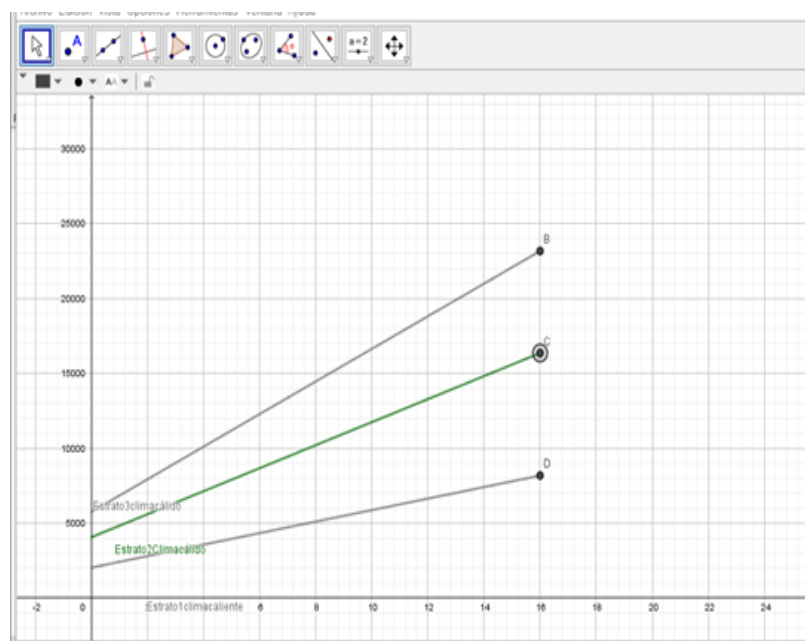
[F-7*] Felipe: Por otro lado, consideramos algunos estudios que abordan la enseñanza de la función empleando Software dinámicos y la proporcionalidad directa simple para proporcionar alternativas que les permitan a los estudiantes caracterizar e identificar algunas propiedades de la función lineal.

Más adelante, en [F-27] Felipe contempla a este tipo de tecnologías (GeoGebra) como “familiares” al estudiante, facilitando que el estudiante visualice el objeto matemático con claridad.

[F-27] Felipe: ...investigaciones como la de Giraldo (2012) resalta que para la enseñanza de la función lineal es necesario considerar los conocimientos previos de los estudiantes, esto con el fin de que se aborden conceptos matemáticos a través de las TIC con el objetivo que se visualicen las características de la función lineal y familiarizar a los estudiantes con la matemática a través de la tecnología digital.

En concordancia con las ideas de Felipe, Rueda y Parada (2016), afirman que los fenómenos de variación difícilmente son visibles en representaciones estáticas (como las realizadas a lápiz y papel) por ello, se deben buscar contextos en los que se enfatice el carácter dinámico de los mismos, por ejemplo, ejemplo de ello es el software de GeoGebra.

En [F-31] Felipe describió que mediante la interacción que los estudiantes realizan en GeoGebra (el cual reconoce como un ámbito más tecnológico, refiriéndose tal vez a un ambiente de geometría dinámica) ellos pueden observar la variación como una característica principal en la función.

[F-31] Felipe:

Esta actividad tiene como fin, que el estudiante manipule y nuevamente pueda observar la variación ya desde un ámbito más tecnológico, donde ellos puedan observar mediante la hoja de cálculo los valores que se pueden observar, y allí poder comparar y analizar los diferentes valores esto se trabajan en el inciso f) al j)

Por lo anterior, suponemos que Felipe reconoce a GeoGebra como un recurso digital que facilita al estudiante la exploración las características del objeto matemático, identificando aspectos como la variación y la proporcionalidad, probablemente debido a que los estudiantes encuentran fácil familiarizarse con el tema cuando pueden manipular y controlar las representaciones del objeto matemático, gracias al dinamismo que ofrecen estas herramientas.

4.2.4 Intereses y expectativas de los estudiantes

Esta categoría se analiza a partir del descriptor de conocimiento: i) Contextos de interés para los estudiantes.

4.2.4.1 Contextos de interés para los estudiantes (KFLM-E-1)

Con el fin de darle sentido a las matemáticas que aprenden los estudiantes, Felipe contempla el uso de dos elementos didácticos que orienten la secuencia didáctica del diseño, tal como se observa en [F-13].

[F-29] Felipe: Estos diseños parten desde el uso de tecnologías y el uso de un contexto que genere interés en los estudiantes, reflejando en ellos los principios del DUA y las pautas

Según Rodríguez (2011), para que un proceso formativo se convierta en un aprendizaje significativo, se deben cumplir dos condiciones: i) el estudiante debe mostrar una actitud de predisposición e interés por aprender, ii) el material didáctico ha de resultar atractivo.

Estas dos condiciones parecen ser reconocidas por Felipe en el planteamiento del diseño didáctico a partir del uso de GeoGebra (como se describió en KFLM-T-3) y de una pregunta problematizadora relacionada a un contexto cercano y de interés para el estudiante como él lo menciona en [F-28].

[F-28] Felipe: se presenta la siguiente pregunta problematizadora “¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en el hogar?”, cuyo propósito es incentivar a los estudiantes a indagar y entender un poco acerca de la función lineal en un contexto de la vida cotidiana, y otra de las ideas principales con esta pregunta es dar una conciencia ambiental a los estudiantes a través de la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, creemos que Felipe reconoce la situación de cobro por consumo de agua en el hogar (mediado por GeoGebra) es un contexto que motiva y capta el interés del estudiante, lo cual favorece un aprendizaje significativo.

Esta idea va acorde con las ideas de Rodríguez (2011), quien define el aprendizaje significativo como un proceso que solo se da si aquello que el individuo incorpora a sus esquemas mentales tiene sentido para él, de acuerdo a sus motivaciones e intereses personales.

4.3 Algunas relaciones dentro del conocimiento especializado de Felipe

En algunos de los fragmentos seleccionados de los documentos de Felipe, logramos identificar relaciones dentro de su conocimiento especializado la cuales mencionamos a continuación: i) *Las situaciones de variación y cambio en el aprendizaje de la F.L.*, estas relaciones fueron identificadas en el fragmento [F-1*]; ii) *4.3.2 GeoGebra un mediador para el aprendizaje de la F.L.*, relaciones en [F-7*], [F-27] y [F-39]; iii) *Representaciones de la F.L. en GeoGebra*, relaciones en [F-18°] y [F-31]. A continuación, se explica cada una de estas relaciones.

4.3.1 Las situaciones de variación y cambio en el aprendizaje de la F.L.

En [F-1*] se puede ver que, Felipe identifica algunas dificultades que pueden presentar los estudiantes al aprender la F.L, él señala que una de estas dificultades se debe a que algunos docentes recurren a enseñar los temas como una teoría axiomatizada y termina y por ello, los estudiantes no tienen la oportunidad de construir su propio conocimiento (KFLM-F-1).

Para dar solución a esta dificultad se apoya en la propuesta de Fiallo y Parada (2014), para desarrollar el pensamiento variacional desde el uso de situaciones problema que involucren el cambio y la variación (KFLM-T-1), esto llevó a Felipe a una búsqueda de

fenómenos que le facilitaran al estudiante reconocer la variación como una característica fundamental para conceptualizar la F.L. (KoT-F-3).

En resumen, en [F-1*] se observa que Felipe busca solucionar algunas *dificultades* que presentan algunos estudiantes cuando aprenden la F.L. por medio de las *teorías de aprendizaje* que conoce, y desde estas teorías identifica el tipo de *fenomenología* que favorece el desarrollo del pensamiento variacional.

4.3.2 GeoGebra un mediador para el aprendizaje de la F.L.

En los fragmentos [F-7*], [F-27] y [F-39] se evidencia que Felipe identifica a la relación de proporcionalidad que hay entre las dos variables de estudio como una característica fundamental de la definición de F.L (KoT-D-1). Además, él enfatiza que por medio de esta característica se puede realizar una aproximación al concepto de F.L, es por esto que se ve en la necesidad de buscar situaciones o fenómenos que destaquen la constante de proporcionalidad para identificar la pendiente de la recta (KoT-F-2).

Además de la fenomenología, Felipe hizo uso de GeoGebra para realizar esta aproximación, pues considera esta herramienta como mediadora en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (KFLM-T-3) ya que las tecnologías digitales suelen ser un instrumento que ellos usan para una mejor interacción con el contenido matemático (KFLM-I-1) por el carácter dinámico que ofrece el software.

Con base a estas evidencias, deducimos que Felipe considera que algunas características fundamentales de la *definición* de F.L se pueden destacar desde el estudio de algunas *fenomenologías* y el apoyo de recursos tecnológicos que facilitan al estudiante la

interacción con el contenido, lo cual produce un aprendizaje significativo (*teorías de aprendizaje*) gracias al carácter dinámico que ofrecen algunos recursos digitales.

4.3.3 Representaciones de la F.L. en GeoGebra.

En los fragmentos [F-18° y F-31] Identificamos que, Felipe reconoce que para la construcción de las representaciones (tabular, gráfica y algebraica) de la F.L. se deben destacar la variación (KoT-R-1, 2 y 3) como elemento fundamental, y para lograrlo recurrió a GeoGebra (KFLM-T-3) puesto que facilita visualizar la covariación entre las cantidades involucradas, además de establecer conexiones entre las representaciones, por medio de las herramienta del software: hoja de cálculo, vista algebraica y la vista gráfica. Esta estrategia para representar la F.L.

Inferimos que Felipe conoce los diferentes *registros representaciones* de la F.L. por medio del carácter variacional que él reconoció en la *definición* del concepto el cual se pudo apreciar usando como recurso de apoyo un Software de geometría dinámica lo que, a su vez, favorece el aprendizaje significativo de los estudiantes, esto último reconocido como una *teoría de aprendizaje* que él conoce.

4.4 Algunas reflexiones sobre el proceso de formación Felipe

Para las reflexiones que realizamos en este apartado nos basamos en los análisis hechos por Felipe los cuales fueron descritos por él en el documento tesis. Con estas reflexiones pretendemos explicar la influencia que tuvo su proceso de formación en el conocimiento especializado que él evidenció.

Seleccionamos tres aspectos de la formación de Felipe y que influenciaron la consolidar nuevos aprendizajes: i) Un estudio a la didáctica del cálculo; ii) El trabajo

colaborativo: El aporte de una CoP de educadores matemáticos; y iii) La atención a la diversidad en el aula de matemáticas: Una oportunidad para repensar la enseñanza de la F.L.

4.4.1 Un estudio a la didáctica del cálculo

Como se mencionó en la metodología, durante su trabajo de grado, Felipe cursó la asignatura llamada *didáctica del cálculo*. De esta asignatura destacamos que el docente encargado enfocó el curso a resaltar los beneficios de GeoGebra como herramienta mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral (Fiallo y Parada, 2018). Este espacio de formación influyó a que Felipe eligiera este software para el diseño de actividades como se observó en los descriptores (KoT-R-1, 2 y 3), (KFLM-T-3), y (KFLM-I-1).

La habilidad para el diseño y uso de applets de GeoGebra fue otro aprendizaje que adquirió durante este curso, ya que muchas de las actividades y trabajos propuestos en la asignatura constaban en la exploración y construcción de representaciones que modelen fenómenos de cambio y variación por medio del software. Felipe aprovechó este conocimiento para proporcionar herramientas que mediaran en el aprendizaje de los estudiantes, además le permitió conceptualizar la F.L. desde una perspectiva variacional (KoT-D-1).

Las bases teóricas de la asignatura son tomadas de los *Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas* en (MEN, 2006) En este documento se propone el desarrollo del pensamiento variacional a partir de la *formulación, planteamiento, transformación y resolución de problemas de la vida cotidiana, las otras ciencias y de las matemáticas mismas*. Este enfoque de la asignatura influyó en el conocimiento de Felipe sobre la

elección de fenómenos que se modelen por medio de la F.L (KoT-F-1). Esto le permitió a él elegir contextos (cobro por consumo de agua en el hogar y llenado de tanque a razón constante) apropiados para que el estudiante explore las propiedades y características de la F.L. desde la variación (KFLM-T-1)

4.4.2 El trabajo colaborativo en la CoP

Uno de los primeros cambios que evidenciamos en el conocimiento de Felipe, fue el de establecer las razones por las que considera que la ecuación no es necesariamente una función. Inicialmente (en T.G.1.), Felipe menciona que uno de los errores más frecuentemente en los estudiantes cuando aprenden la F.L es el de interpretar la función como una ecuación (KFLM-F-1), pero, no fue sino hasta T.G.2. que logró establecer que esta dificultad tiene un origen de tipo epistemológico (KFLM-D-1).

Este cambio en el conocimiento de Felipe fue motivado por las observaciones que recibió en la rúbrica de evaluación. En la figura 14, Felipe recibe una calificación de 3 en el indicador sobre los aspectos epistemológicos, históricos y didácticos, además de un comentario que le invita a reflexionar sobre este aspecto.

Creemos que el segundo comentario en la rúbrica hizo que Felipe revisara nuevamente la epistemología del concepto y notara que esta dificultad estuvo presente desde la antigua Grecia en donde se consideró al cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas lo que los condujo a estudiar la incógnita y no las variables, es decir, a que se estudiaran las ecuaciones mas no las funciones (KFLM-F-1)

Figura 14. Rúbrica de evaluación: Aspectos históricos, epistemológicos y didácticos.

3. Valoración diseño con orientaciones al profesor																								
Indicadores	P1					P2					P3					P4								
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5				
Se explicitan los planteamientos epistemológicos o históricos y didácticos			X																					
Se indica los procesos que se están trabajando en las diferentes actividades			X																					
Se fundamentan las actividades con lo propuesto en los documentos de referencia del MEN			X																					
Comentarios																								
- Revisar el documento de nivel I, ahí se hicieron algunas correcciones. Conviene reeditar estas orientaciones, pues la redacción es regular y hay párrafos que no se entienden. - Acá, no solo se trata de comentarle al profesor lo que se espera en cada pregunta. Al iniciar las orientaciones conviene comentar los aspectos epistemológicos y didácticos que se tuvieron en cuenta para discutir el objeto función lineal como lo planteas. Solo se menciona al autor Font, para justificar el uso de contextos reales. Tampoco se da a conocer, cómo lo planteado se fundamenta desde los documentos del MEN,																								

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Otra recomendación que Felipe recibe en la rúbrica va orientada hacia el *principio II*: *Proporcionar Múltiples formas de acción y expresión*, para estos indicadores recibió una calificación de tres (ver figura 15), lo cual invitó a Felipe a que realizara algunos ajustes en el diseño didáctico.

Figura 15. Rúbrica de evaluación: Principio II del DUA

Práctica II. Proporcionar múltiples formas de <i>expresión</i>																								
Indicadores	P1					P2					P3					P4								
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5				
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.			X																					
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.			X																					
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.			X																					

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Creemos que el cambio generado por esta observación se relaciona a lo procedimental, ya que en T.G.2, Felipe presentó una orientación al estudiante para determinar la expresión algebraica de una F.L. a través de la ecuación punto-pendiente (KoT-P-1)

La inclusión de este procedimiento por parte de Felipe se debe también a la recomendación que recibió en los comentarios finales de la rúbrica, como se observa en figura 16, en el quinto comentario le solicitaron establecer alternativas para que los estudiantes puedan interpretar la información.

Figura 16. *Comentarios y recomendaciones de la CoP*

COMENTARIOS FINALES

1. En los documentos se hacen comentarios y se sugieren algunos cambios en la redacción.
2. También resalto algunos valores numéricos en que aparece que el dato está mal (o es 11m^3 o es 13m^3). Conviene que las tablas tengan los mismos datos, a pesar de que de un nivel a otro se exijan otro tipo de respuestas.
3. En las actividades se definen o recuerdan fórmulas, pero no se observa su uso dentro de las preguntas
4. El concepto de dominio aparece de la nada. Rompe la secuencia en relación con la situación. En mi opinión, la definición del concepto pierde importancia, lo relevante es analizar la variable y los posibles valores que puede tomar dada la situación.
5. Conviene hacer una revisión exhaustiva en cuanto a los principios y pautas propuestos en el Diseño Universal de Aprendizaje. Por ejemplo, tener en cuenta que la secuencia de preguntas debe ayudar a los estudiantes a procesar información vía la conceptualización, establecer diferentes alternativas para la interpretación, ejemplificar o mostrar en algunos casos el paso a paso para los estudiantes de primer nivel, etc.

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Además de las recomendaciones que Felipe recibió por medio de la valoración por rúbrica de su diseño, él contempló un aporte realizado por la profesora en ejercicio que piloteó su diseño didáctico (aspecto descrito en la metodología).

El aporte de esta profesora motivó otro cambio en el conocimiento especializado de Felipe. En T.G.2 él identificó que algo importante para la modelación del fenómeno de estudio a través de la expresión algebraica de la F.L (KoT-P-1), esto es la identificación de las variables (independiente y dependiente).

En el informe que realizó la profesora en ejercicio (y que Felipe incluyó en la tesis) se aprecia una recomendación de tipo pedagógico (ver figura 17) en la que llamó la atención a Felipe, basada en el modo de generalizar que usaban sus estudiantes.

Figura 17. Recomendación de la profesora en ejercicio.

CONSUMO PROMEDIO	Procedimiento	Valor
$9m^3$		
$11m^3$		
$0 \leq x \leq 13$		

APORTE: Incluir en la tabla más valores de consumo para llegar a generalizar porque por experiencia vivida en el grado once, uno o dos ejemplos no son suficientes para que la mayoría de los estudiantes generalice

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Desde este aporte pudimos comprender que Felipe buscaba que el estudiante generalizara a partir de la identificación de las cantidades variables y de las constantes (KoT-P-1) este hecho lo confirmamos a partir de lo mencionado por Felipe en un informe extra mostrados a continuación.

Felipe en un informe extra: Con este momento se pretende que el estudiante en los tres diferentes niveles de dificultad *identifique las variables* que pueden ayudar a encontrar el valor de una función lineal, en el consumo de agua en el hogar, cada nivel cuenta con su grado de dificultad.

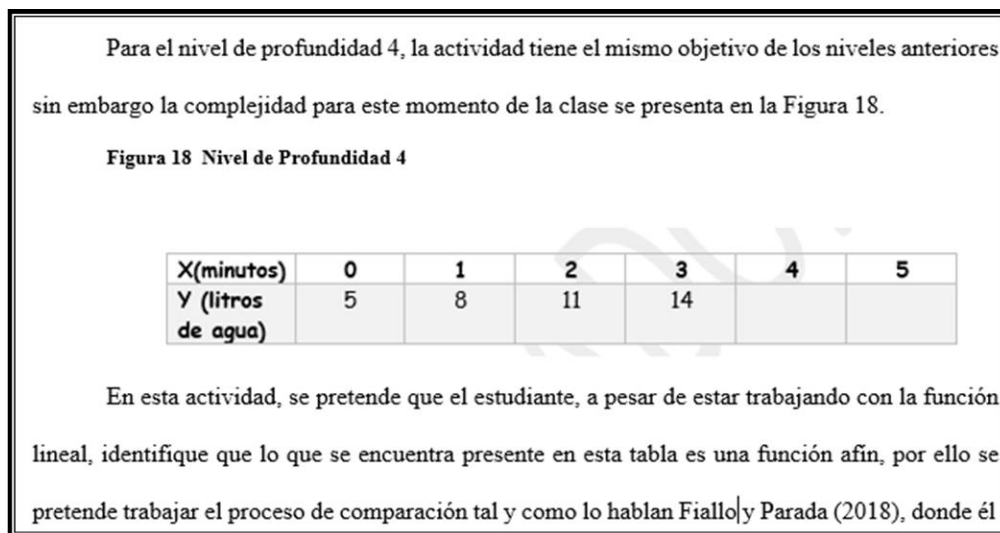
En esta descripción, Felipe reconoce la importancia de identificar las cantidades variables para encontrar *el valor de una función lineal*, refiriéndose posiblemente a la generalización del modelo lineal para hallar el valor de cobro.

4.4.3 Un estudio para atender la diversidad en clase de matemáticas

La atención a la diversidad influyó a que Felipe a descubrir aspectos de la F.L. y su fenomenología que él antes no consideraba. Por ejemplo, en T.G.1. Felipe omitió la diferencia entre función lineal y función afín (KFLM-D-1) pero, en T.G.2 reconoció este aspecto y lo usa para que los estudiantes que desarrollan el nivel de profundidad 4, en la

figura 18, se observa que ilustra una función por medio de su representación tabular, reconociéndolo como una función afín.

Figura 18. Felipe reconoce la función afín



Nota. Información tomada de Plata (2023)

El reto de atender la diversidad en el aula llevó a Felipe a considerar la diferencia entre función afín y lineal, pues, como se observa en la figura 18, esta actividad es exclusiva para estudiantes que trabajan un nivel de profundidad 4, es decir, dirigido a estudiantes con capacidades excepcionales o talentos y que requieren un nivel dificultad mayor. Lo que nos llevó a deducir que en la búsqueda de actividades retadoras Felipe logró reconocer la diferencia entre función lineal y afín (KoT-D-1).

Otro conocimiento que Felipe consolidó en el T.G.2 es el de reconocer en la fenomenología que seleccionó (consumo de agua en el hogar) la posibilidad de trabajar funciones por partes (KoT-F-1). Nuevamente la búsqueda de actividades retadoras a

estudiantes del nivel 4 permitieron que Felipe reconociera esta oportunidad en el fenómeno de estudio. En la Figura 19 evidenciamos este hecho.

Figura 19. *Función por partes en el nivel 4*

significativos, por otra parte, el mayor cambio se evidencia en el nivel de profundidad 4 como se puede observar en la Figura 9, donde se procede a trabajar una función por partes para los diferentes estratos, esto con el fin de que los estudiantes logren analizar el comportamiento después de cierto consumo de metros cúbicos, lo importante es que al terminar esta actividad logren cada uno socializar los en los diferentes estratos, con el fin de dar conocimiento a los razonamientos que hicieron a la hora de manipular los Applets.

Nota. Información tomada de Plata (2023)

Creemos que la búsqueda de estrategias para tender la diversidad en el aula de matemáticas, ayudaron a que Felipe reconociera a una situación de la vida real como un potencial recurso en la exploración de las características de la F.L. Estas estrategias también le permitieron profundizar en su conocimiento matemático como sucedió con la función afín.

5 Conclusiones

En este capítulo se exhiben respuestas a la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado se evidencia en un profesor de matemáticas que desarrolla su trabajo de grado sobre la función lineal y la atención a la diversidad en el aula? Además, damos cuenta del logro de nuestro objetivo de investigación. Por lo anterior, planteamos nuestras conclusiones desde tres apartados: i) Conocimiento especializado de Felipe en el KoT; ii) Conocimiento especializado de Felipe en el KFLM; y iii) Generalidades y perspectivas.

5.1 Conocimiento especializado de Felipe en el KoT

Felipe reconoció la definición de F.L como una regla de correspondencia en la que priorizó dos aspectos: i) el carácter covariacional de las cantidades involucradas en la regla de correspondencia; y ii) la relación de proporcionalidad directa que guardan dichas variables como un aspecto propio de la F.L. A partir de lo anterior, Felipe estableció que la pendiente de la recta es la razón de cambio constante.

Desconectada a estas ideas, Felipe conoce la definición de dominio como el conjunto de valores que se pueden “sustituir” en la regla de correspondencia lo cual evidencia que tiene una concepción limitada del concepto debido al lenguaje que usó.

Felipe, conoce tres representaciones de la F.L (gráfica, algebraica y tabular) las cuales ilustró y conectó por medio de entornos de geometría dinámica que permitieran resaltar su carácter variacional, sin dejar de lado que la constante de proporcionalidad fuera identificable a través de tablas de valores.

Un manejo adecuado de este tipo de softwares como el que mostró Felipe, requiere de un conocimiento matemático como: i) el reconocimiento de la expresión algebraica y sus parámetros como elementos que determinan el comportamiento de la función; ii) la referencia de los ejes cartesianos y relación a las variables; iii) el registro tabular y su conexión a la gráfica de forma dinámica. Por ende, estos también son conocimientos de Felipe.

Por otro lado, los procedimientos de la F.L que conoce Felipe se centran en la modelación de situaciones por medio de expresiones algebraicas, para lo cual contempló dos posibles caminos: i) la identificación de las cantidades variables (independientes y

dependientes) para una generalización de la regla de correspondencia, y ii) el uso de fórmulas implícitas como la ecuación general de la recta.

Por último, se hizo evidente que los fenómenos usados por Felipe permitieron un acercamiento a la F.L gracias a que él identificó en ellos la presencia cantidades que covarían de manera proporcional, lo que favoreció la identificación de la razón de cambio constante como característica inherente al concepto.

5.2 Conocimiento especializado de Felipe en el KFLM

A lo largo de todo el trabajo de grado, Felipe dio gran importancia a la resolución de problemas que involucran el cambio y la variación como un ambiente propicio para el aprendizaje de la F.L.

Reconoció el potencial de GeoGebra como mediador en el aprendizaje de la FL porque permite un acercamiento flexible para estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje en la clase de matemáticas. Además, permite atender las dificultades reportadas por Ibarra y Moreno (2010) logrando concebir la función más allá de la ecuación y modelar fenómenos por medio de la expresión analítica.

Por último, pero no menos importante, Felipe reconoció dos elementos que promueven el interés y la motivación del estudiante: i) posibilitar contextos cercanos (como lo fue el análisis del consumo de agua en el hogar y llenado de tanque a razón constante) para familiarizar los objetos matemáticos de estudio con fenómenos de la vida real, y ii) el uso de tecnologías digitales para favorecer más acercamientos a la FL.

Reconocemos que algunas evidencias de conocimiento analizadas en este subdominio pueden presentar algunas similitudes con categorías de conocimiento de otros subdominios

pertenecientes al dominio PCK, lo cual puede deberse a que, en muchas de las descripciones tomadas de los documentos de Felipe, la relación entre los subdominios KMT, KFLM y KMLS.

5.3 Generalidades y perspectivas

Encontramos pertinente el uso del modelo MTSK en nuestra investigación gracias a que: i) facilitó la clasificación y sistematización de los datos por medio de categorías de conocimiento; ii) la precisión de las categorías comprendidas por el modelo nos permitió detallar cada uno de los conocimientos de Felipe (asociados a los subdominios KoT y KFLM); iii) permitió caracterizar el conocimiento especializado de Felipe desde un escenario de práctica poco estudiado (el diseño de actividades durante un proceso de formación) como el de nuestro caso de estudio.

Con base en lo anterior, invitamos a aquellos interesados en la formación de profesores a seguir indagando sobre el conocimiento especializado que posibilitan los espacios de formación y desarrollo profesional, puesto que es posible contribuir a la caracterización de ambientes propicios para la reflexión.

En nuestro estudio de caso encontramos que cuando el profesor reflexiona sobre la atención a la diversidad en un entorno colaborativo como el que se da en una CoP de educadores matemáticos, el profesor no solo reconoce las *características de aprendizaje de sus estudiantes*, sino que valore su *conocimiento matemático de los temas* que discute con colegas, investigadores y expertos.

Debido a que nuestras fuentes de información eran poco comunes en otros trabajos que usaran el modelo MTSK, nos vimos en la necesidad de plantear nuevas estrategias

metodológicas que pueden ser replicadas en otras investigaciones, entre ellas: i) la utilización de colores para resaltar transcripciones de Felipe en donde encontraríamos posibles evidencias de conocimiento, ii) la utilización de numeración especial para algunos fragmentos de tal forma que no se repitieran evidencias y que facilitara identificar los cambios entre en el conocimiento de Felipe durante su proceso de formación.

Consideramos que otro aporte importante de nuestro trabajo es el de reconocer que existen escenarios y contextos que ayudan desarrollar el MTSK en un profesor durante procesos de desarrollo profesional, tal como ocurrió en el caso de Felipe, pues su conocimiento se modificó (progresó) en virtud de la retroalimentación y de la puesta en marcha de su propuesta

Debido a las limitaciones de nuestras fuentes de información y el tiempo, nuestra investigación se limitó al estudio de dos subdominios del modelo, pero, resultaría muy interesante realizar una caracterización desde los seis subdominios, lo que dejaría ver un mayor número de relaciones dentro del conocimiento especializado y un mayor número de aportes.

Con el fin de incentivar estudios de corte longitudinal que permitan dar cuenta de los cambios en el conocimiento especializado de profesores de matemáticas durante el transcurso de programas de desarrollo profesional se deja abierta la siguiente pregunta ¿Qué conocimiento especializado sobre la función se evidencia en un profesor de matemáticas que participa en un programa de desarrollo profesional?

Referencias bibliográficas.

- Acevedo, M., Montañez, J., Huertas, C., y Pérez, G. (2007). *Fundamentación conceptual área de Matemáticas*. Grupo de Evaluación de la Educación Superior-ICFES.
- Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: un estudio de casos*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.
- Aparicio, E., y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 7-30.
- Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., y del Sol Martínez, J. L. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, 15(70), 102-108. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=pt.
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Barajas, C., Fulano, B., Ríos, W., Salazar, L. y Pinzón, A. (2018). Función constante, lineal y afín. En Gómez, P. *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3* (pp. 131-185). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Boavida, A. M., y Ponte, J. P. D. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. <http://hdl.handle.net/10451/4069>

- Campeón Becerra, M. C., Aldana Bermúdez, E., y Villa Ochoa, J. A. (2018) Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, 14(2), 115-126. <https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. D. C. (2013, February). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In *Proceedings of the CERME 8*, 2985-2994. https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero, D., Flores, E., y Montes, M. A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M, y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.
- Díaz, V., Belmar, H., y Poblete, A. (2018) Manifestación emocional y modelación de una función matemática. *Bolema, Río Claro*, 32(62), 1198-1218. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a22>

Dolores, C., & Salgado, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números.*

Revista de Didáctica de las Matemáticas, 72, 63-74.

https://www.researchgate.net/publication/41019115_Elementos_para_la_graficacion_covariacional

Domain of definition. (2012). *Encyclopedia of mathematics* URL:

http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Domain_of_definition&oldid=29271

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como*

parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.

(Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del Conocimiento Especializado del profesor de*

Matemáticas de educación media sobre el concepto de Función (Tesis doctoral).

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge:

Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for research in*

mathematics education. 24(2), 94-116.

<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.2.0094>

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: Curso de*

precálculo mediado por geogebra. Ediciones UIS.

Fiol, M. L., y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número.*

Editorial Síntesis.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A., y Climent, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp.275-282). Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva, España.

Fuentes, C. (2020). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de casos*. Universidad de Huelva, España.

García, G., Serrano, C., y Espitia, L. (1997). *Hacia la función como dependencia y patrones de la función lineal*. Bogotá: Colciencias y UPN.

García-Blanco, M. M., (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, 17(2), 153-166.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 32(1), 199-219.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Revista científica*, 2, 115-120. <https://doi.org/10.14483/23448350.5966>

- Gómez, I. M., Botana, F., Escribano, J. y Abánades, M. Á. (2016). Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 67-94. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04>
- Gutiérrez, S. y Parada, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Heredia, M., y Moscoso, C., (2019). *El trabajo cooperativo, una estrategia para la atención a diferentes ritmos de aprendizaje*. (Trabajo de investigación para optar el título de licenciado). Universidad de Cuenca. Ecuador.
- Ibarra, T. y Moreno, V. (2010). *Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana*. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Colombia.
- Jácome, I. y Parada, S.E. (2023). Enseñanza de las secuencias en grados 4° y 5° atendiendo la diversidad de estudiantes. En *Educación Matemática en las Américas 2023*. Investigación. Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz (Eds). República Dominicana. Vol. 10 CIAEM, p.142-149 <https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen10-Tema-9.pdf>
- Liñán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5° de Primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva, España.

López, J., Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 308-318). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Martínez de la Rosa, F. (2013). La pendiente de una recta. *Suma*. (74), 31-38.
<https://hdl.handle.net/11162/252004>

Mena, C. (2014). *La transformación de funciones desde un enfoque covariacional*. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Bogotá. <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html>

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Colombia: M.E.N.
<https://redaprende.colombiaaprende.edu.co/metadatos/recurso/pensamiento-variacional-y-tecnologias-computacional/>

Ministerio de Educación Nacional MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España

- Pastor, C. (2019). Diseño Universal para el Aprendizaje: un modelo teórico-práctico para una educación inclusiva de calidad. *Participación educativa*, 6(9), 55-68. <http://hdl.handle.net/11162/190783>
- Parada, S., Figueras, O., y Pluinage, F. (2011). Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases. *Revista Educación Y Pedagogía*, 23(59), 85–102. Recuperado a partir de <https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/8695>
- Parada, S., y Fiallo J. (Eds.). (2022). *Comunidades de práctica de profesores de matemáticas que incorporan tecnologías digitales en el aula*. Ediciones UIS.
- Ponciano, E., y Sosa, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El cálculo y su enseñanza*, 11, 83-97. <http://funes.uniandes.edu.co/14928/1/Ponciano2018Reflexion.pdf>
- Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. 1, 195-210. <http://hdl.handle.net/10451/4387>
- Ponte, J. P. D. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In *IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, 59-72. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2984/1/99-Ponte_SPCE-Aveiro.pdf
- Ponte, J. P. D. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. <http://hdl.handle.net/10451/29194>

- Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta Didáctica de aproximación al concepto de Función Lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Colombia.
- Ribeiro, N. (2010). *O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. (Tesis doctoral). Universidad de granada. España.
- Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8º y 9º*. (Tesis de maestría). grados de educación básica Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Scheiner, T., Montes, M., Godino, J., Carrillo, J., Pino-Fan, L. (2017). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *Int J of Sci and Math Educ* (2019) **17**, 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. Toward a new design for teaching and learning in the professions. Jossey-Bass.
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. Routledge.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>

Sierra, M., Gonzalez, M., y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, 89-104.

Stake, R. (Eds.). (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones MORATA.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). Macmillan Publishing Co, Inc.

Vargas, M. (2011). *El concepto de Función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Villa, J., (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa XXI* (pp. 573-582), DF, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, R., Olfos, E., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123.