

# LA HERRADURA DE SMALE

Sergio Andrés Montoya Torres

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2005

# LA HERRADURA DE SMALE

**Sergio Andrés Montoya Torres**

Monografía presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander como requisito parcial para optar al título de  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director:

**Javier Enrique Camargo García**

Magister en Ciencias de la Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2005

*A Thania, por estar ahí*

# Agradecimientos

A mi madre, por su paciencia y apoyo económico.

Al Profesor Javier Enrique Camargo García, por todo su conocimiento y gusto por la matemática, que realmente influyeron en mí e hicieron posible este trabajo.

A Thania Karina Ortíz, por creer en mí y por todo.

# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>1. Preliminares (Espacios Métricos)</b>	<b>1</b>
1.1. Algunas definiciones básicas . . . . .	1
1.2. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados . . . . .	4
1.3. Otras definiciones importantes . . . . .	7
1.4. Compacidad y conexidad . . . . .	9
<b>2. Caos en un sistema dinámico discreto</b>	<b>12</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	13
2.2. Puntos periódicos . . . . .	19
2.3. La función <i>tienda</i> . . . . .	22
2.4. Transitividad topológica . . . . .	27
2.5. Función Caótica . . . . .	31
<b>3. La Herradura de Smale</b>	<b>36</b>
3.1. La Herradura . . . . .	37
3.2. La dinámica de la herradura . . . . .	41
3.3. La Herradura de Smale es una función caótica en $\Delta$ . . . . .	53
3.4. El conjunto atractor de la herradura de Smale . . . . .	57
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Función $f(x) = x^2$ . . . . .	15
2.2. Función $f(x) = x^3$ . . . . .	16
2.3. Si $ m  > 1$ la órbita de todo punto distinto de cero diverge . . .	18
2.4. Si $ m  < 1$ todas las órbitas convergen al punto fijo 0 . . . . .	19
2.5. Función $f(x) = -x^3$ . . . . .	21
2.6. Órbitas repulsora(Izq) y atractora(Der) . . . . .	22
2.7. <i>La tienda</i> . . . . .	25
2.8. Órbitas de $\Omega(z) = z^2$ . . . . .	33
2.9. Órbita de $U$ en $S^1$ . . . . .	35
3.1. $M = A \cup B \cup C$ . . . . .	37
3.2. $\mathcal{H}_1(x, y)$ . . . . .	38
3.3. $\mathcal{H}_2(x, y)$ . . . . .	38
3.4. $\mathcal{H}_3(x, y)$ . . . . .	38
3.5. $\mathcal{H}_4(x, y)$ . . . . .	39
3.6. $\mathcal{H}_5(x, y)$ . . . . .	40
3.7. $\mathcal{H}_6(x, y)$ . . . . .	41
3.8. La Herradura de <i>Smale</i> . . . . .	41
3.9. $\mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(A) \cup \mathcal{H}(B) \cup \mathcal{H}(V_i)$ . . . . .	44
3.10. $\mathcal{H}$ en $V_0 \cup V_1$ . . . . .	45
3.11. Dinámica en $C$ . . . . .	46
3.12. Dinámica simbólica para $\mathcal{H}^n(C)$ . . . . .	48

3.13. Dinámica simbólica para $\mathcal{H}^{-n}(C)$ . . . . .	50
3.14. Conjuntos de puntos cuya órbita permanece en $C$ eventualmente	51
3.15. $\mathcal{H}^2(M) \subset \mathcal{H}(M) \subset M$ . . . . .	58

Título: LA HERRADURA DE SMALE\*

Autor: MONTOYA TORRES Sergio Andrés\*\*

Palabras claves:

Herradura Smale

Sistemas Dinámicos Discretos

Caos Devaney

Transitividad Topológica

Atractor

Conjunto Invariante

Continuos

Tienda

Conjunto cantor

Descripción y contenido:

Esta monografía es en general un estudio en sistemas dinámicos discretos, el objetivo principal fue estudiar algunas de las propiedades dinámicas y topológicas de una función definida de un espacio métrico compacto y conexo en sí mismo; denominada la Herradura de Smale, en honor a su descubridor: Stephen Smale. Esta función, que se describe de una manera sencilla, induce un sistema dinámico discreto realmente sorprendente debido a la componente de impredecibilidad que se presenta, a pesar de ser un sistema determinista.

En este trabajo se muestra detalladamente el comportamiento de esta función. Se comprueba la existencia de un conjunto que es invariante bajo la misma, el cual es homeomorfo al conjunto de Cantor. Además, al restringir la función a este conjunto invariante, se demuestra que es una función caótica (basados en la definición de caos propuesta por R. Devaney). Así mismo, se da conocer el conjunto atractor de la Herradura de Smale y se verifica que éste es un continuo, es decir, un espacio métrico compacto y conexo.

Para facilitar el estudio de la dinámica de la Herradura de Smale se partió de un capítulo preliminar sobre espacios métricos, recopilando aquellos conceptos que se consideran imprescindibles y que se utilizan constantemente en el trabajo. Posteriormente se realizó una breve introducción a los sistemas dinámicos discretos; analizando la dinámica de dos funciones: una conocida popularmente como *La Tienda* y otra definida en la circunferencia unitaria, en donde se pudo demostrar que ambas son caóticas.

---

\*Monografía

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García

Title: THE SMALE HORSESHOE\*

Author: MONTOYA TORRES Sergio Andrés\*\*

Keywords:

Smale Horseshoe

Discrete Dynamical Systems

Devaney's chaos

Topological Transitivity

Attracting Set

invariant Set

Continuum

Tent Map

Cantor Set

Content:

This monograph is in general a study in discrete dynamical systems, the principal aim was to study some of the dynamical properties and topological of a definite function of a metric compact and connected space in itself; named Smale's Horseshoe, in honor to his discoverer: Stephen Smale. This function, which is described in a simple way, induces a discrete dynamical system really surprising due to the component of unpredictability that appears, in spite of being a deterministic system.

In this work there appears detailed the behavior of this function. There is verified the existence of a set that is an invariant under the same one, which is homeomorphic to the Cantor set. Besides, when the function restricts to this invariant set, there is demonstrated that it is a chaotic function (based on the definition of chaos proposed for R. Devaney). Likewise, it is given to know the attractor set of Smale's Horseshoe and one verifies that this one is a continuum, that is to say, a metric compact and connected space.

To facilitate the study of the dynamics of Smale's Horseshoe it split of a preliminary chapter on metric spaces, compiling those concepts that are considered to be indispensable and that are in use constant in the work. Later a brief introduction was realized to the discrete dynamical systems; analyzing the dynamics of two functions: the known one popularly like tent map and other one defined in the unitary circumference, where it was possible to demonstrate that both are chaotic.

---

\*Monograph

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García

# Introducción

El término caos fue utilizado por primera vez por *Birkhoff* y *von Neumann* cuando desarrollaban la teoría ergódica, basados en observaciones de Henri Poincaré considerado el matemático que dio origen a la topología, fue el primero en estudiar propiedades dinámicas formalmente, como órbitas periódicas y que contribuyó al estudio de la dinámica con sus estudios en mecánica celeste, logró imaginar sin ayuda del computador la gráfica de un modelo físico y demostrar que dentro de sus innumerables intersecciones hay infinitas nuevas órbitas inestables y que a su vez crean nuevas intersecciones y así sucesivamente.

La teoría del caos nació de un análisis profundo de las ecuaciones de la física newtoniana demostrando la amplia imprevisibilidad presente en fenómenos naturales descritos por estas ecuaciones. De esta manera la teoría del caos le dio un golpe mortal a la imagen newtoniana del determinismo permitiendo una comprensión más profunda de la dinámica. En particular, fue *E. Lorenz* quien descubrió la existencia de la *sensibilidad a las condiciones iniciales* que se daba en un modelo simple de tres ecuaciones diferenciales, supuestamente pensado como modelo atmosférico. Este fenómeno se popularizó más adelante como “Efecto mariposa”, de modo que la sensibilidad a las condiciones iniciales se convirtió en el concepto clave de ésta teoría. Poco después, *Stephen Smale* dio origen a la dinámica no lineal y propuso un modelo matemático denominado la *Herradura de Smale* donde se ponía de manifiesto la sensibilidad a las condiciones iniciales y que rescataba la

geometría y topología de las ideas de Poincaré.

Esta función en el estudio de los sistemas dinámicos discretos se presenta como un ejemplo “simple” que tiene ocultas propiedades caóticas que han interesado a muchos investigadores, que desde esa época hasta estos días se encuentran frente a problemas abiertos relacionados con las propiedades de la herradura.

El estudio de las propiedades dinámicas de la Herradura en la década de los sesenta (1960-1970), permitió a muchísimos matemáticos y estudiosos de otras áreas, acercarse a la observación de comportamientos realmente sorprendentes en la teoría de los sistemas dinámicos discretos y en la teoría de los continuos. Es así como la Herradura se convirtió en una excelente oportunidad para explorar uno de los múltiples puentes que existen entre estas dos teorías.

El trabajo que se presenta, es en parte, un estudio parcial del artículo escrito por Héctor Méndez: “*El atractor de la Herradura de Smale es un continuo indescomponible*” y por otra parte es una revisión bibliográfica en sistemas dinámicos discretos junto con un análisis de las propiedades dinámicas de ésta función definida de una región compacta y conexa en si misma. Por esta razón el trabajo central se basa fundamentalmente en el estudio de algunas propiedades dinámicas y topológicas de esta función denominada Herradura de Smale, que consiste en representar los estados posibles de un problema por puntos encerrados en un cuadrado, que es luego comprimido verticalmente a la mitad, estirado horizontalmente al doble y, finalmente doblado en forma de herradura, de manera parecida a lo que hace un panadero cuando estira la masa, la dobla, la vuelve a estirar...El modelo de Smale tiene la virtud de hacer manifiesta la rápida pérdida de nuestra habilidad predictiva con el paso del tiempo.

# CAPÍTULO

## 1

### Preliminares (Espacios Métricos)

En este capítulo, como su nombre lo indica, se hace una recopilación de algunos conceptos fundamentales sobre espacios métricos que se consideran necesarios para el estudio de esta monografía, como tal, tiene una estructura elemental indeseable del tipo definición-ejemplo-teorema-demostración pero que quizá pueden ayudar al lector a conocer y a llegar a familiarizarse con los sistemas dinámicos discretos y en particular con la dinámica de la función de *Smale, la Herradura*. La mayoría de estos conceptos pueden encontrarse en [1] y en [2].

#### 1.1. Algunas definiciones básicas

**Definición 1.1.** *Un espacio métrico es una pareja  $(M, d)$  donde  $M$  es un conjunto no vacío y  $d$  es una función definida:*

$$d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$$

« $d$ » se denomina métrica sobre  $M$ , al número  $d(x, y)$  comúnmente se le conoce como “distancia entre  $x$  e  $y$ ” y satisface para cualesquiera  $x, y, z \in M$  las siguientes condiciones:

i)  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$

ii)  $d(x, y) = d(y, x)$

iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$       «Desigualdad triangular»

Además, sobre un espacio métrico, con una métrica determinada, se pueden definir subespacios métricos con la misma métrica, es decir, si se tiene un espacio métrico  $(M, d)$  entonces la pareja  $(A, d)$  donde  $A \subset M$  es también un espacio métrico.

**Ejemplo 1.1.** Sea  $M$  un conjunto. La función  $\check{d}$  definida en  $M$  como:

$$\check{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x=y, \\ 1, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

$\forall x, y \in M$ , es conocida como la métrica discreta.

**Ejemplo 1.2.** El espacio métrico  $(\mathbb{R}, d_1)$  donde  $d_1$  está definida como:

$$d_1(x, y) = |y - x|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ , se denomina la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}$  o simplemente métrica «ordinaria».

**Ejemplo 1.3.** El espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  donde  $d_2$  está definida como:

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  y se denomina la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ .

Nota: A partir de los ejemplos anteriores se puede generalizar la métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  en:

$$d_p(x, y) \equiv \left\langle \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right\rangle^{\frac{1}{p}}, \text{ donde } p \geq 1$$

El siguiente ejemplo muestra como se puede definir más de una métrica sobre un mismo conjunto.

**Ejemplo 1.4.** Tomando  $M = \mathbb{R}^2$  se define  $d$  como:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

y es fácil de probar que  $d$  es una métrica sobre  $\mathbb{R}^2$ .

**Prueba:** Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ , donde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  y  $z = (z_1, z_2)$ . Supongamos ahora que  $x \neq y$  entonces  $x_1 \neq y_1$  ó  $x_2 \neq y_2$  luego  $|y_1 - x_1| > 0$  ó  $|y_2 - x_2| > 0$  y de aquí  $d(x, y) > 0$ , luego se verifica *i*). Ahora verifiquemos *ii*) esto es,  $d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d(y, x)$ , y por ultimo tenemos que  $d(x, z) = |z_1 - x_1| + |z_2 - x_2| \leq |z_1 - y_1 + y_1 - x_1| + |z_2 - y_2 + y_2 - x_2| \leq |z_1 - y_1| + |y_1 - x_1| + |z_2 - y_2| + |y_2 - x_2| = d(y, z) + d(x, y)$  luego  $d(x, z) \leq d(y, z) + d(x, y)$  y con esto se verifica *iii*), en consecuencia  $d$  es una métrica en  $\mathbb{R}^2$ . ■

**Definición 1.2.** Sean,  $(M, d)$  un espacio métrico,  $x \in M$  y  $r \in (0, +\infty)$ . El conjunto:

$$\mathfrak{B}_d(x; r) = \{m \in M \mid d(x, m) < r\}$$

se denomina bola con centro en  $x$  y radio  $r$ . Una bola perforada será el conjunto  $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}_d(x; r) = \mathfrak{B}_d(x; r) - \{x\}$ .

En adelante, omitiremos el subíndice « $d$ » de  $\mathfrak{B}_d(x; r)$ , siempre que no haya lugar a confusión, asumiendo que se está trabajando con la métrica euclidiana ya sea en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 1.5.** Una bola de radio  $r$  para un  $x_0 \in \mathbb{R}$  será un intervalo de la forma  $(x_0 - r, x_0 + r)$  donde  $d(x_0, x) < r$  para todo  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ .

Al igual, una bola de radio  $r$  para un  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  será un disco sin borde con centro en  $(x_0, y_0)$  y con radio  $r$  donde  $d((x_0, y_0), (x, y)) < r$  para todo  $(x, y)$  en el disco.

**Definición 1.3.** Un subconjunto  $S$  en un espacio métrico  $(M, d)$  será acotado, cuando exista una bola que lo contenga totalmente. Esto es:

$$S \text{ es acotado} \Leftrightarrow \exists a \in M \quad \exists r > 0 \mid S \subset \mathfrak{B}_d(a; r)$$

## 1.2. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

**Definición 1.4.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in S$ .

$$x \text{ es un punto interior de } S \Leftrightarrow \exists r > 0 \mid \mathfrak{B}_d(x; r) \subset S$$

El conjunto de todos los puntos interiores del conjunto  $S$  se denomina Interior de  $S$  y se simboliza  $Int(S)$ .

**Definición 1.5.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $S \subset M$ .  $S$  será un conjunto abierto cuando sea igual a su interior. Es decir:

$$S \text{ es abierto} \Leftrightarrow S = Int(S)$$

Nota: Como la contención  $Int(S) \subset S$  es inmediata, basta demostrar que  $S \subset Int(S)$  para que  $S$  sea un conjunto abierto.

**Proposición 1.1.** Toda bola es un conjunto abierto en un espacio métrico.

**Demostración.** Sea  $p \in \mathfrak{B}_d(x; r) \subset M$ . Por definición tenemos que:

$$d(x, p) < r \Rightarrow 0 < r - d(x, p) < r$$

Ahora tomemos  $r_1 = r - d(x, p)$  para construir una bola  $\mathfrak{B}_d(p; r_1)$  y probemos:

$$\mathfrak{B}_d(p; r_1) \subset \mathfrak{B}_d(x; r)$$

Sea  $y \in \mathfrak{B}_d(p; r_1)$  entonces  $d(p, y) < r_1 = r - d(x, p)$  luego  $d(p, y) + d(x, p) < r$  de aquí  $d(x, y) < r$  y se tiene que  $y \in \mathfrak{B}_d(x; r)$ . ■

**Definición 1.6.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $A \subset M$ . Se dice que  $V$  es un abierto en  $A$  o abierto relativo si y sólo si  $V = A \cap U$  donde  $U$  es un abierto de  $M$ .

**Ejemplo 1.6.** Sean  $(\mathbb{R}, d_1)$  y  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A = [0, 2) \cup \{4\}$  entonces  $[0, 1)$  y  $\{4\}$  son conjuntos abiertos en  $A$  ya que  $[0, 1) = (-1, 1) \cap A$  y  $\{4\} = (3, 5) \cap A$ .

**Lema 1.1.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.

- i) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- ii) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Demostración.** i) Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos abiertos. Ahora, para cualquier  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$  existe un  $i_0 \in I$  tal que  $x \in U_{i_0}$  donde  $U_{i_0}$  es un conjunto abierto. Luego, existe un  $r > 0$  tal que  $\mathfrak{B}_d(x; r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Por lo tanto  $\bigcup_{i \in I} U_i$  es un conjunto abierto.

- ii) Sea  $x \in U_1 \cap U_2$  donde  $U_1$  y  $U_2$  son conjuntos abiertos. Luego, existen  $r_1 > 0$  y  $r_2 > 0$  tales que  $\mathfrak{B}_d(x; r_1) \subset U_1$  y  $\mathfrak{B}_d(x; r_2) \subset U_2$ . Ahora, tomando  $r_3 = \min\{r_1, r_2\}$  se tiene que  $\mathfrak{B}_d(x; r_3) \subset U_1 \cap U_2$  esto implica que  $U_1 \cap U_2$  es un conjunto abierto. ■

**Definición 1.7.** Sean dados  $(M, d)$ ,  $x \in M$  y  $V \subset M$ . Se dice que  $V$  es una vecindad de  $x$  si dentro de  $V$  existe una bola a la cual pertenece  $x$ . Esto es:

$$V \text{ es vecindad de } x \Leftrightarrow (\exists a \in V) (\exists r > 0) \mid x \in \mathfrak{B}_d(a; r) \subset V$$

Nota: Se puede demostrar que toda bola es vecindad de cada uno de sus puntos.

**Definición 1.8.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in M$ .

$$x \text{ es un punto de adherencia de } S \Leftrightarrow \forall r > 0 : \mathfrak{B}_d(x; r) \cap S \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos de adherencia de el conjunto  $S$  se denomina adherencia o clausura y se simboliza  $\overline{S}$ .

**Definición 1.9.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $S \subset M$ .  $S$  será un conjunto cerrado cuando sea igual a su adherencia. Es decir:

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S = \overline{S}$$

Nota: Para demostrar que un conjunto es cerrado basta probar que  $\overline{S} \subset S$ , ya que la otra contención es inmediata. Otra forma es mostrar que su complemento es un abierto.

**Lema 1.2.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.

- i) La unión finita de conjuntos cerrados de  $M$  es un conjunto cerrado.
- ii) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados de  $M$  es un conjunto cerrado.

La demostración del anterior lema consiste simplemente en utilizar las leyes de De Morgan junto con el Lema 1.1 considerando el hecho de que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto.

### 1.3. Otras definiciones importantes

**Definición 1.10.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico,  $S \subset M$  y  $x \in M$ .

$x$  es un punto de acumulación de  $S \Leftrightarrow \forall r > 0 : \mathfrak{B}_d(x; r) \cap S \neq \emptyset$

**Definición 1.11.** Un subconjunto  $S$  en un espacio métrico  $(M, d)$  es perfecto en  $M$  si y sólo si cada punto de  $S$  es un punto de acumulación de  $S$ .

**Definición 1.12.** Sea  $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$  una función,  $f$  es una función continua si y sólo si para todo  $x \in M$  y  $V_{f(x)}$  (vecindad de  $f(x)$ ) existe  $U_x$  (vecindad de  $x$ ) tal que  $f(U_x) \subset V_{f(x)}$ .

Una definición equivalente es:

$f$  es continua  $\Leftrightarrow$  para todo abierto  $U$  de  $N$ ,  $f^{-1}(U)$  es un abierto de  $M$ .

**Definición 1.13.** Sea  $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$  una función continua,  $f$  es un homeomorfismo si  $f$  es biyectiva y existe  $f^{-1}$  continua.

**Definición 1.14.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}$  una sucesión en  $M$ .  $\{x_n\}$  será una sucesión de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{N} \mid \langle \min\{m, n\} \geq a \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \rangle$$

**Definición 1.15.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.  $M$  será un espacio métrico completo cuando en él, toda sucesión de Cauchy sea convergente.

**Ejemplo 1.7.**  $(\mathbb{R}, d_1)$  y  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  son espacios métricos completos.

**Definición 1.16.** Sea una función  $f : M \rightarrow M$  en un espacio métrico  $(M, d)$ .

$f$  es una contracción  $\Leftrightarrow \exists \alpha \in (0, 1) \mid \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

**Teorema 1.1 (Teorema del punto fijo de Banach).** Toda contracción definida en un espacio métrico completo posee un punto fijo y solo uno.

**Demostración.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico completo y  $f : M \rightarrow M$  una contracción en  $(M, d)$ . Esto es:

$$\exists \alpha \in (0, 1) \mid \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

Ahora construyamos la sucesión generada por un  $x_0 \in M$

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$$

Se forma  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \equiv \{x_n\} \subset M$ . Demostremos que  $\{x_n\}$  es de Cauchy. Sea  $m < n$ , donde  $n - m = k$  entonces:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_{m-1}, x_{n-1}) = \alpha d(f(x_{m-2}), f(x_{n-2})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) = \alpha^2 d(f(x_{m-3}), f(x_{n-3})) \\ &\leq \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_{m-m}, x_{n-m}) = \alpha^m d(x_0, x_p) < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{x_n\}$  es de Cauchy y como  $M$  es completo,  $\{x_n\}$  converge. Es decir, existe  $x^* \in M$  tal que  $x_n \rightarrow x^*$ . Probemos ahora que  $x^*$  es un punto fijo, esto es, que  $f(x^*) = x^*$ . Tenemos que:

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

Por el resultado anterior se tiene que  $x^*$  es un punto fijo y es único, puesto que si existiera otro, digamos un  $y^* \in M$ ,  $y^* \neq x^*$  se tendría:

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$$

Es decir,  $d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$ , lo cual es una contradicción. ■

## 1.4. Compacidad y conexidad

**Definición 1.17.** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico. La familia  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de subconjuntos abiertos de  $M$  es un cubrimiento abierto de  $M$  si  $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

**Definición 1.18.** Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $S \subset M$ .  $S$  será un conjunto compacto cuando de todo cubrimiento abierto de  $S$  se pueda extraer un subcubrimiento abierto finito de  $S$ . Esto es:

$$S \text{ es compacto} \Leftrightarrow \left( S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset A \mid S \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \right)$$

Un conjunto  $S$  también será compacto cuando en él todo subconjunto infinito posea un punto de acumulación. Ésta definición equivalente de compacidad nos será útil más adelante.

**Ejemplo 1.8.** La recta real  $\mathbb{R}$  no es compacta ya que el cubrimiento por intervalos  $U_n = (-n, n)$  con  $n \in \mathbb{N}$  no posee ningún subcubrimiento abierto que cubra a todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.9.** Cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es compacto siempre y cuando éste sea cerrado y acotado.

El anterior ejemplo de espacios compactos se obtiene con la ayuda del siguiente teorema:

**Teorema 1.2 (Tychonoff).** El producto no vacío de espacios es compacto si y sólo si cada espacio es compacto.

Una demostración del anterior teorema puede encontrarse en [1].

**Teorema 1.3.** Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto

**Demostración.** Sean  $X$  un conjunto compacto y  $Y \subset X$  cerrado. Tomemos  $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento abierto de  $Y$ . Ahora,  $X - Y = U$  es abierto, luego  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cup \{U\}$  es un cubrimiento abierto de  $X$ . Como  $X$  es compacto existe  $\{V_1, V_2, \dots, V_k, U\} \subset \mathcal{U}$  tal que  $X \subset (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \cup U)$ . Además, como  $U = X - Y$ , entonces  $U \cap Y = \emptyset$  y de aquí  $Y \subset (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k)$ . En consecuencia,  $Y$  es compacto. ■

El siguiente teorema nos muestra que la compacidad es preservada por las funciones continuas.

**Teorema 1.4.** *Sea  $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$  una función continua. Si  $M$  es compacto entonces  $f(M)$  es compacto.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento abierto de  $f(M)$ . Definamos  $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Ahora, si  $x \in M$  entonces  $f(x) \in f(M)$  y existe  $V_\alpha \in \mathcal{V}$  tal que  $f(x) \in V_\alpha$ . Así  $x \in f^{-1}(V_\alpha)$  y esto implica que  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento abierto de  $M$ . Por hipótesis  $M$  es compacto, por lo tanto, existe  $\{f^{-1}(V_{\alpha_1}), f^{-1}(V_{\alpha_2}), \dots, f^{-1}(V_{\alpha_k})\} \subset \mathcal{U}$  tal que  $M \subset \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(V_{\alpha_i})$ . Tomemos  $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_k}\} \subset \mathcal{V}$  y sea  $y_0 \in f(M)$  para el cual existe  $x_0 \in M$  tal que  $f(x_0) = y_0$  pero  $x_0 \in f^{-1}(V_{\alpha_m})$  con  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Entonces  $f(x_0) \in V_{\alpha_m}$ , de aquí  $y_0 \in V_{\alpha_m}$  y en consecuencia  $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_k}\}$  es un subcubrimiento abierto finito de  $f(M)$  y se concluye que  $f(M)$  es compacto. ■

**Definición 1.19.** *Sea  $(M, d)$  un espacio métrico.  $M$  es desconexo, si y solo si existen  $A, B$  subconjuntos de  $M$ , no vacíos, abiertos, disjuntos, tales que  $M = A \cup B$ . A la pareja  $A, B$  se le denomina separación de  $M$ .*

Nota: En caso tal que  $M$  no sea desconexo se dice entonces que  $M$  es conexo, es decir,  $M$  es conexo cuando no existe una separación de  $M$ .

**Ejemplo 1.10.** *Sean  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  y  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}, x \neq 0\}$  donde  $X \subset \mathbb{R}^2$  es desconexo. No es difícil mostrar que  $X$  es desconexo ya que  $X = A \cup B$  con  $A = (X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\})$  y  $B = (X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\})$  conjuntos abiertos y disjuntos.*

**Ejemplo 1.11.** El conjunto de Cantor es disconexo y está dado por:

$$\mathcal{C} = \bigcap \mathcal{C}_m, m \in \mathbb{N}$$

Donde  $\mathcal{C}_1$  se obtiene al remover el intervalo  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  de  $[0, 1]$ .  $\mathcal{C}_2$  se obtiene removiendo los intervalos  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  y  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  de  $\mathcal{C}_1$ . Así,  $\mathcal{C}_m$  se obtiene al dividir en tres partes iguales a cada uno de los  $2^{m-1}$  intervalos cerrados de longitud  $\frac{1}{3^{m-1}}$  que componen a  $\mathcal{C}_{m-1}$  y removiendo los intervalos abiertos intermedios.

Además, el conjunto de Cantor es totalmente disconexo, es decir, sus únicos subconjuntos conexos son los conjuntos unipuntuales. En particular, el conjunto de Cantor es el único conjunto perfecto, compacto y totalmente disconexo esto significa que si otro conjunto posee éstas propiedades entonces éste será homeomorfo al conjunto de Cantor.

**Lema 1.3.** Sean  $M$  un espacio métrico y  $U, V$  una separación de  $M$  si existe un subconjunto conexo  $X$  de  $M$  entonces  $X \subset U$  ó  $X \subset V$ .

**Demostración.** Sean  $U, V$  conjuntos abiertos de  $M$  tal que los conjuntos  $U \cap X$  y  $V \cap X$  son conjuntos abiertos en  $X$  donde  $(U \cap X) \cap (V \cap X) = \emptyset$  y  $(U \cap X) \cup (V \cap X) = X$ . Ahora, si ambos son no vacíos, entonces son una separación de  $X$ , pero  $X$  es conexo, alguno de ellos debe ser vacío y con esto  $X \subset U$  ó  $X \subset V$ . ■

Al igual que la compacidad la conexidad tiene la propiedad de ser preservada bajo la acción de funciones continuas.

**Teorema 1.5.** Sea  $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$  una función continua. Si  $M$  es conexo entonces  $f(M)$  es conexo.

**Demostración.** Sea  $Y = f(M)$  se puede considerar una función  $g : M \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva. Ahora, supongamos que  $Y$  es disconexo, esto es,  $Y = A \cup B$  con  $A$  y  $B$  disjuntos, abiertos y distintos de vacío. Por lo tanto  $g^{-1}(A)$  y  $g^{-1}(B)$  son abiertos ya que  $g$  es continua y distintos de vacío debido a que  $g$  es sobreyectiva, además,  $M = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$ , en consecuencia,  $M$  es disconexo y con esto se llega a una contradicción. En definitiva, la imagen de un conjunto conexo bajo una función continua es conexa. ■

## CAPÍTULO

### 2

# Caos en un sistema dinámico discreto

El estudio formal de la teoría de los sistemas dinámicos discretos comenzó en los años sesenta. Uno de los trabajos más representativos fue el de Stephen Smale, el cual se basó en una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  conocida como *la Herradura de Smale*, de la cual se hablará en el siguiente capítulo. Un sistema dinámico consiste de un conjunto de estados posibles junto con un modelo que determina un estado presente en términos de los pasados. Un ejemplo de un sistema dinámico clásico sencillo es el de la ecuación de *Maltus* (s.XIX) dada por  $x_{n+1} = kx_n$  donde se supone que una población es proporcional a la población inicial existente. Se puede pensar por ejemplo en el crecimiento de una población de bacterias en un laboratorio, donde se supone que la población inicial es de 10000 bacterias en un tiempo  $t=0$  y que cada hora se duplican, un modelo a seguir, estaría dado por  $f(x) = 2x$ , de modo que al cabo de una hora se tendrá  $f(10000) = 20000$ , para  $t=2$  horas:  $f(20000) = f(f(10000)) = 40000$  y así, sucesivamente para  $n$  horas se tendrá la regla  $x_n = f(x_{n-1}) = 2x_{n-1}$ .

Existen dos tipos de sistemas dinámicos, los discretos y los continuos, la diferencia radica en que en el primero el tiempo es medido en unidades discretas como segundos o minutos, es decir para un  $t = n$ , donde  $n$  es un natural, mientras que el otro considera al tiempo como una entidad continua. En este

segundo caso la función llega a ser un conjunto de ecuaciones diferenciales.

En definitiva, parte de nuestro estudio corresponde a funciones que se aplican una y otra vez sobre un mismo elemento de un determinado conjunto. A este proceso se le conoce como *iteración* y también se puede interpretar como una secuencia de movimientos del elemento dentro del conjunto, en unidades fijas de tiempo. De esta manera una función definida de un conjunto en si mismo junto con sus iteraciones en cada punto del conjunto implica un sistema dinámico discreto.

## 2.1. Definiciones básicas

**Definición 2.1.** Sean  $M = (M, d)$  un espacio métrico y  $f : M \rightarrow M$  una función continua. Un sistema dinámico discreto es una  $F : \mathbb{N} \times M \rightarrow M$ , continua, tal que:

1.  $F_0(x) = x$  para todo  $x \in M$
2.  $F_n(x) \circ F_m(x) = F_{n+m}(x)$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  y todo  $x \in M$

Donde  $F_k(x) = F(k, x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $F_k$  es equivalente a  $f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-veces}}$ .

Luego un sistema dinámico discreto es generado por una función continua  $f : M \rightarrow M$ . De esta manera nuestro trabajo se basa en estudiar la dinámica que inducen funciones de éste tipo, es decir a partir de una función continua  $f : M \rightarrow M$  describiremos el sistema  $F : \mathbb{N} \times M \rightarrow M$ .

En particular, para un espacio métrico  $M = (M, d)$  y  $f : M \rightarrow M$  una función continua, llamaremos “Las iteraciones de  $f$ ” a las funciones obtenidas al componer a  $f$  consigo misma, esto es,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$  de manera general  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

Así,  $f^0$  será la función identidad,  $f^0 = i$ ,  $i : M \rightarrow M$  donde  $i(x) = x$ ,  $\forall x \in M$ .

Es de notar que las iteraciones de una función a partir de un elemento en un espacio métrico generan un conjunto de estados que pueden ser interpretados como las diferentes posiciones en las que se encuentra dicho elemento en un tiempo determinado. Nuestro interés es determinar cómo es

ese conjunto de movimientos, qué propiedades tiene, es decir cuál es el comportamiento del elemento al transcurrir el tiempo y poder deducir su posición en cualquier momento. A ese conjunto de movimientos se le denomina *órbita* y la definiremos a continuación.

**Definición 2.2.** Sean  $x \in M$  y  $f$  una función continua,  $f : M \rightarrow M$ . La órbita de  $x$  bajo  $f$ , será la sucesión de iteraciones de  $f$  en  $x$ , esto es:

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$$

**Ejemplo 2.1.** Consideremos la función  $f(x) = x^2$  del intervalo  $[0, 1]$  en  $[0, 1]$  y determinemos la órbita de  $x = 0,9$  (ver cuadro 2.1).

Resulta fácil hallar la órbita de un punto cuando esta es finita, es decir cuando es *periódica*, o cuando se hace periódica. Decir que es periódica significa que el punto retorna a su posición inicial, en otros términos, existe un  $n$  tal que  $f^n(x) = x$ ; de esta manera los movimientos de  $x$  son repetitivos formándose así un ciclo. Más adelante definiremos formalmente lo que es una órbita periódica. Por otro lado si la órbita de un punto no es finita, será importante saber si esta converge en algún momento. En el cuadro 2.1 se observan los primeros ocho estados de la órbita de 0,9 y se puede llegar a inducir que ésta no es finita y que converge a cero. Sin embargo, qué clase de punto es cero?. Notese que la órbita de cero en  $f(x) = x^2$  está compuesta solo por su valor inicial, es decir por el mismo cero. A esta clase de puntos se les denomina *puntos fijos* y se podría decir que sus orbitas son constantes, esto es :

$$o(x, f) = \{x, x, x, x, \dots\} = \{x\}$$

**Definición 2.3.** Sean  $x \in M$  y  $f$  una función continua,  $f : M \rightarrow M$ . Se dice que  $x$  es un punto fijo de  $f$ , si  $f^n(x) = x$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que  $x$  es eventualmente fijo o prefijo si  $f^{n+1}(x) = f^n(x)$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .

En el ejemplo anterior,  $f$  posee dos puntos fijos. Una forma de encontrar los puntos fijos de una función es determinando donde se interseca ésta con la función identidad, esto es, resolver la ecuación  $f(x) = x$ . En la gráfica de  $f(x) = x^2$  (ver Figura 2.1),  $f$  corta a la identidad en dos puntos y se

n	$f^n(x)$
0	0,9
1	0,81
2	0,6561
3	0,43046721
4	0,1853020189
5	0,0343368382
6	0,0011790184
7	0,00000139008
8	0,0000000000001

Cuadro 2.1: órbita de  $x = 0,9$  en  $f(x) = x^2$ .

observa la órbita del punto 0.9. Resulta curioso ver que la órbita de todo punto diferente de 0 y 1 converge a 0, que en otros términos se diría, que todo punto es “atraído” por cero. En este caso estaremos hablando de un punto fijo *atractor*, de lo contrario, si un punto fijo aleja a todo punto de sus cercanías diremos que es un punto fijo *repulsor*. Puede existir el caso en que un punto fijo no tenga ninguna de las características descritas, en ese caso será un punto fijo *indiferente*.

A continuación definiremos formalmente el concepto de puntos fijos atractores y de puntos fijos repulsores lo cual será de gran utilidad en el estudio de la dinámica que induce una determinada función, es decir, nos ayudará a comprender el comportamiento de las órbitas de cada elemento en un conjunto.

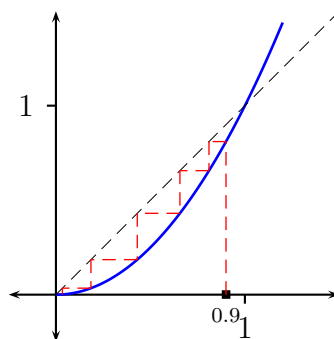


Figura 2.1: Función  $f(x) = x^2$

**Definición 2.4.** Sea  $f : M \rightarrow M$  y  $p \in M$  un punto fijo, esto es  $f(p) = p$ . Si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in \mathfrak{B}_d(p; \varepsilon)$  se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$  entonces  $p$  es un atractor o sumidero. Decimos que  $p$  es un repulsor o fuente si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in \mathfrak{B}_d(p; \varepsilon)$ ,  $x \neq p$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \notin \mathfrak{B}_d(p; \varepsilon)$ .

Al conjunto  $\{x \in M \mid \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p\}$  se le denomina cuenca de atracción de  $p$ .

**Ejemplo 2.2.** A manera de observación, la función  $f(x) = x^3$  en  $M = \mathbb{R}$ , tiene tres puntos fijos,  $p = 1$ ,  $p = -1$ , y  $p = 0$  donde  $1$  y  $-1$  son repulsores y  $0$  es un punto fijo atractor (ver Figura 2.2).

En el ejemplo anterior verificar que efectivamente los puntos fijos cumplen las características de atracción y repulsión sería tomar una vecindad en cada uno de los puntos y estudiar las órbitas para cada punto en esa vecindad. En algunas ocasiones resulta muy tedioso realizar dicho análisis, afortunadamente existe una herramienta que nos permite determinar cuando un punto fijo es atractor o repulsor en una función derivable.

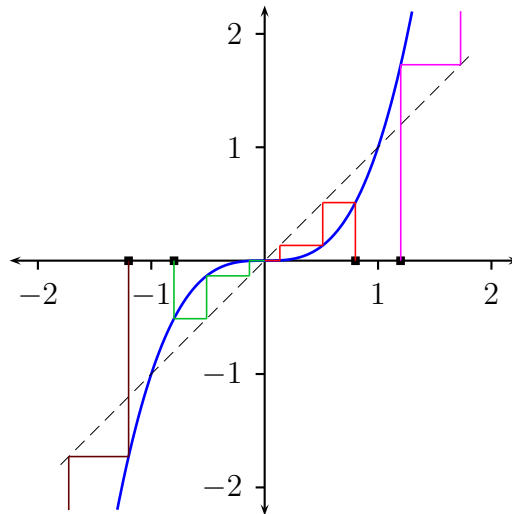


Figura 2.2: Función  $f(x) = x^3$

**Teorema 2.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivada  $f'$  continua en  $p$ . Asumamos que  $p$  es un punto fijo de  $f$ .

i) Si  $|f'(p)| < 1$ , entonces  $p$  es un atractor.

ii) Si  $|f'(p)| > 1$ , entonces  $p$  es un repulsor.

**Demostración.** Parte (i). Sea  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $|f'(p)| < a < 1$  tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|$$

Si tomamos  $\mathfrak{B}(p; \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$  se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a, \quad \text{donde } x \in \mathfrak{B}(p; \varepsilon) &\Rightarrow |f(x) - f(p)| < a|x - p| \\ &\Rightarrow |f(x) - p| < a|x - p| < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego  $f(x)$  está cercano a  $p$ , es decir está en  $\mathfrak{B}(p; \varepsilon)$ . Esto implica que:

$$\begin{aligned} \frac{|f(f(x)) - f(p)|}{|f(x) - p|} < a &\Rightarrow |f^2(x) - f(p)| < a|f(x) - p| \\ &\Rightarrow |f^2(x) - p| < a|f(x) - p| < a^2|x - p| \\ &\Rightarrow |f^2(x) - p| < a^2|x - p| < \varepsilon \end{aligned}$$

Esto significa que  $f^2(x) \in \mathfrak{B}(p; \varepsilon)$ . Repitiendo el proceso una y otra vez se llegará a:

$$|f^n(x) - p| < a^n|x - p|$$

Que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $a^n = 0$  y concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ , se tiene entonces que  $p$  es un atractor.

Un razonamiento análogo se hace para la parte (ii). ■

**Ejemplo 2.3.** Si tomamos funciones lineales que pasen por el origen, esto es  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f_m(x) = mx$ , con  $m \in \mathbb{R}$ , es evidente que en esa familia de funciones toda función posee un punto fijo. Para  $m < 1$  o para  $m > 1$  se tiene que el único punto fijo es  $x = 0$ , en el caso de  $m = 1$  todos sus puntos son fijos indiferentes ya que es la función identidad. De acuerdo al Teorema 2.1 si  $|m| > 1$  el punto  $x = 0$  será un repulsor, cuando  $|m| < 1$  será un atractor, como se esperaba.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se puede observar cada caso para el Ejemplo 2.3.

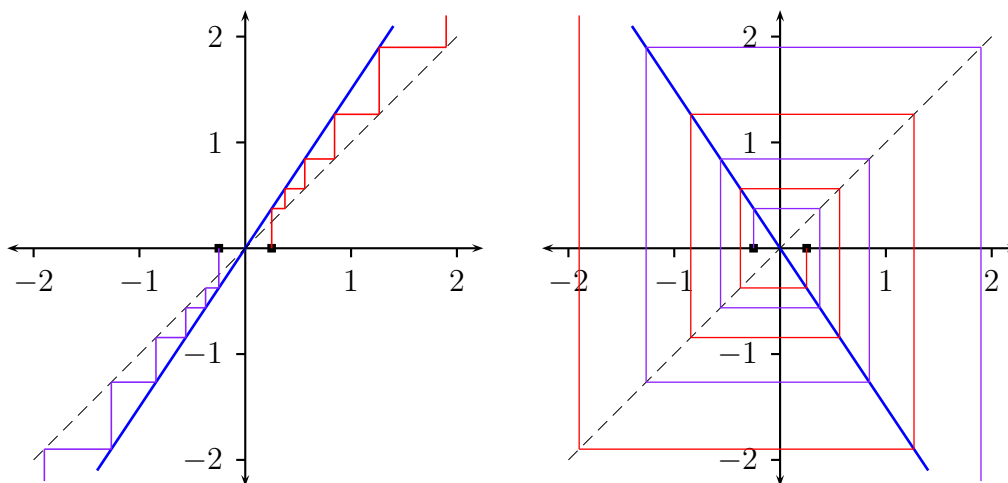


Figura 2.3: Si  $|m| > 1$  la órbita de todo punto distinto de cero diverge

**Definición 2.5.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ .  $x$  es un punto atrapado si su órbita bajo  $f$  es un conjunto acotado. Luego,  $A(f) = \{x \mid o(x, f) \text{ está acotada}\}$  representará a todos los puntos atrapados de  $f$ .

El conjunto que se acaba de definir es muy interesante ya que garantiza la existencia de puntos fijos en una función continua definida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 2.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\mathbb{R}$ . Si  $A(f) \neq \emptyset$  entonces  $f$  posee un punto fijo.

**Demostración.** Supongamos que  $f$  no tiene puntos fijos luego  $f(x) \neq x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , esto nos dice que  $f$  está totalmente por encima de la identidad o por debajo, tomemos cada caso por separado:

- i)  $f(x) > x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  luego  $f^{n+1}(x) > f^n(x)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es decir, la órbita de todo punto es creciente, pero  $A(f) \neq \emptyset$  entonces existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que su órbita es acotada y creciente para un  $m \in \mathbb{R}$ . De aquí obtenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a) = L \leq m$  con  $L \in \mathbb{R}$ . Ahora, por hipótesis  $f$  es continua entonces  $f(L) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a) = L$ , por transitividad  $f(L) = L$  y se concluye que  $f$  posee un punto fijo. Contradicción.

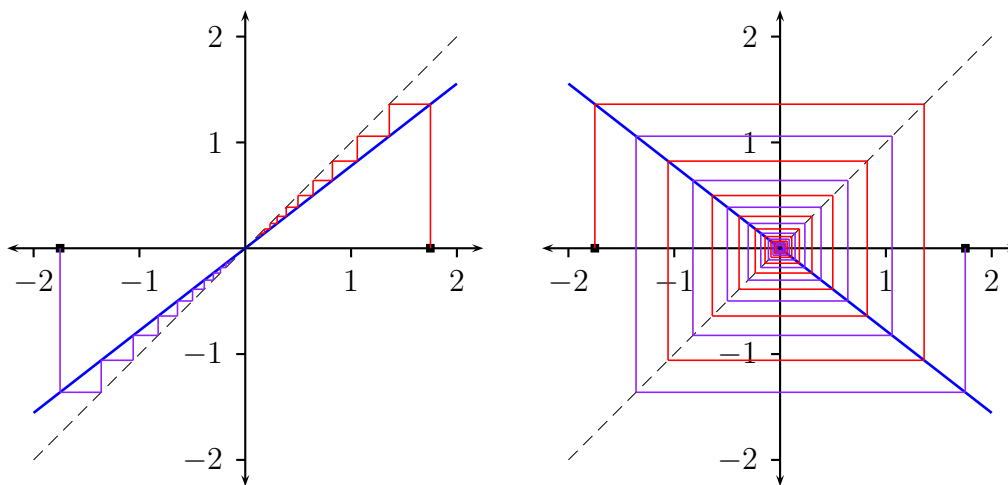


Figura 2.4: Si  $|m| < 1$  todas las órbitas convergen al punto fijo 0

ii)  $f(x) < x$ . Análogo a la parte i)

Por i) y ii) se llega a una contradicción y se tiene que  $f$  posee necesariamente un punto fijo. ■

## 2.2. Puntos periódicos

Nuestro objetivo principal hasta este momento ha sido el de estudiar las propiedades dinámicas de una determinada función, para ello nos interesamos fundamentalmente en la órbita que cada punto del dominio de la función generaba. Descubrimos que la órbita de un punto puede ser finita o infinita y que ésta puede llegar a ser convergente o divergente en algún momento. Dado el caso en que la órbita de un punto sea finita diremos que se trata de un punto fijo, de un punto periódico o de un punto preperiódico. La importancia que se le da a los puntos periódicos radica en que por medio de ellos podremos llegar a concluir qué tan compleja es la dinámica que una función induce, es decir, la existencia de órbitas periódicas en una función nos facilitará saber como se está moviendo cada punto en cada iteración que realicemos, también resultan de gran utilidad para deducir si una función es caótica, y esto se mostrará en la parte final del capítulo.

**Definición 2.6.** Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $x \in M$ . Llamaremos a  $x$  un punto periódico de  $f$ , si y solo si, existe un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  tal que  $f^n(x) = x$  y para todo  $1 \leq k < n$  se tiene que  $f^k(x) \neq x$ . De esta manera  $x$  es un punto de período  $n$  y con órbita periódica de orden  $n$ .

Al conjunto de todos los puntos periódicos de una función  $f$  lo denotaremos en adelante como  $Per(f)$ .

La definición anterior implica que todos los puntos de una órbita periódica  $o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$  son periódicos y de período  $k$ , por ejemplo, para el punto  $f(x)$  su órbita estaría dada por el conjunto de puntos  $o(f(x), f) = \{f(x), f(f(x)), f^2(f(x)), \dots, x\}$  ya que  $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(x)$ . Es de notar que las órbitas de  $x$  y de  $f(x)$  son iguales, solo que tienen un orden diferente.

Observemos que hemos definido el período de una órbita como el mínimo número de iteraciones que se requiere para que la órbita del punto sea repetitiva. Es de notar que si  $x$  es un punto de período  $n$  para una función  $f$ , entonces  $x$  será al igual que todos los puntos de su órbita, un punto fijo de la función  $g = f^n$  pero no un punto fijo para  $f^k$  con  $k < n$ , esto es un resultado directo de la misma definición ya que  $f^n(x) = x$ ,  $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(x), \dots, f^n(f^{n-1}(x)) = f^{2n-1}(x) = f^{n-1}(f^n(x)) = f^{n-1}(x)$ .

**Ejemplo 2.4.** Dada la función  $f(x) = -x^3$ , tomemos el punto  $x = 1$  para el cual su órbita es periódica y de orden 2 ya que  $f(1) = -1$  y  $f^2(1) = f(f(1)) = f(-1) = 1$ . Esto es:  $o(1, f) = \{1, -1\}$ . Su representación gráfica se puede ver en la figura 2.5

En el ejemplo anterior la función  $f(x) = -x^3$  aunque es una función muy sencilla presenta algo muy interesante; si  $x \in (-1, 1)$  la órbita de  $x$  converge a 0. Por el contrario, si  $x < -1$  o  $x > 1$  entonces la órbita de  $x$  diverge. Se puede llegar a pensar que la órbita está alejando a la órbita de todo punto de sus alrededores, es decir, la órbita es repulsora con respecto a otras órbitas. Una situación análoga es la de la función  $g(x) = -\sqrt[3]{x}$  pero en este caso la órbita del punto 1 y -1 presenta propiedades atractoras, es decir, acerca la órbita de cualquier punto hacia ella. En la Figura 2.6 se pueden observar las dos situaciones.

A continuación definiremos formalmente las observaciones previamente mencionadas.

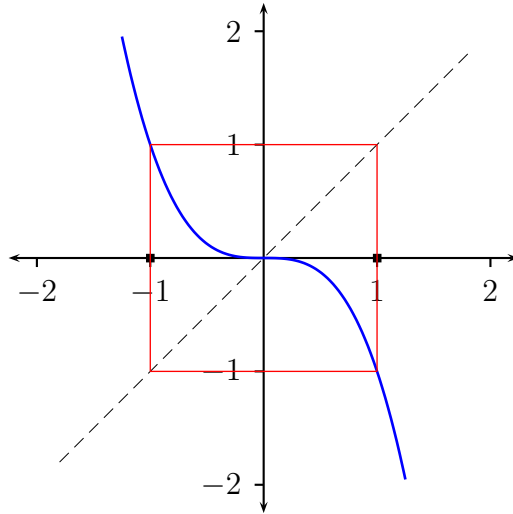


Figura 2.5: Función  $f(x) = -x^3$

**Definición 2.7.** Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $x \in M$  un punto periódico de  $f$  de período  $k$ . Diremos que la órbita de  $x$  es atractora si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $y \in \mathfrak{B}_d(x; \varepsilon)$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^k)^n(y) = x$ , es decir, si  $x$  es un punto fijo atractor de la función  $f^k$ . Por el contrario diremos que la órbita de  $x$  es repulsora si  $x$  es un punto fijo repulsor de la función  $f^k$ .

Al conjunto  $\{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} (f^k)^n(y) \in o(x, f)\}$  se le denomina cuenca de atracción de la órbita de  $x$ .

Existe otra clase de puntos que no se consideran periódicos y cuya órbita es finita pero que en algún momento se hace repetitiva, es decir entra en la órbita de un punto periódico, a esta clase de puntos se les denomina puntos preperiódicos y se definen así:

**Definición 2.8.** Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $x \in M$ . Llamaremos a  $x$  un punto preperiódico de  $f$ , si y solo si, existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x) \in Per(f)$  pero  $x \notin Per(f)$ .

**Ejemplo 2.5.** Sea  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como:

$$g(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -x + \frac{5}{4}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ x - \frac{1}{4}, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

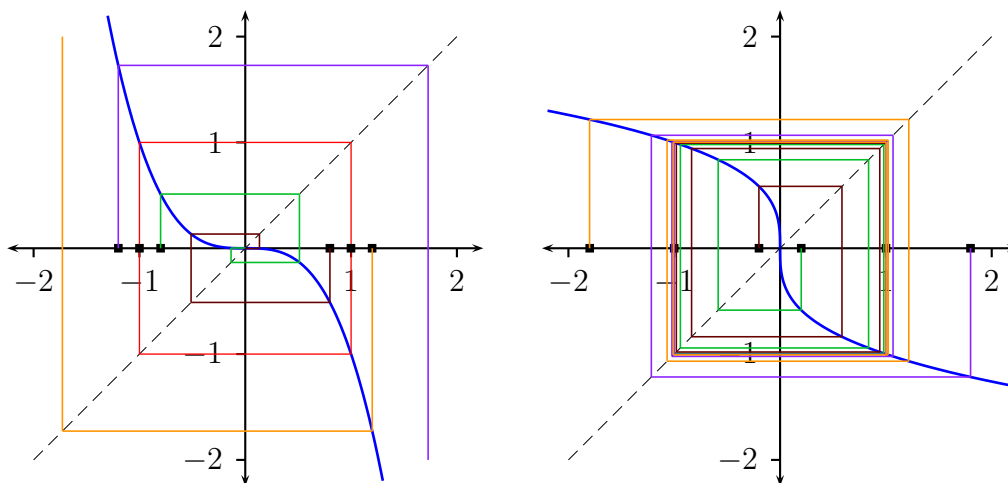


Figura 2.6: Órbitas repulsora(Izq) y atractora(Der)

Aquí  $x = \frac{1}{8}$  es un punto preperiódico, ya que  $o(\frac{1}{8}, g) = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$  en donde  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \in Per(g)$  pero  $\frac{1}{8} \notin Per(g)$ .

## 2.3. La función tienda

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la dinámica de una función definida del intervalo cerrado  $I = [0, 1]$  en sí mismo y que es conocida como *la tienda de campaña* o simplemente *la tienda*; mostraremos que su dinámica es muy interesante debido a su complejidad, que está íntimamente relacionada con el concepto de *caos en una función*, como se observará más adelante. Nuestro objetivo será ir deduciendo paso a paso este concepto, aunque no muy extenso, pretende ser en realidad una idea preliminar a uno de nuestros objetivos principales: probar que el caos está presente en *la herradura de Smale*.

**Definición 2.9.** Sea  $T : I \rightarrow I$ ,  $I = [0, 1]$  una función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Y que es conocida como **la tienda**.

Ahora estudiemos la dinámica que induce  $T$ , primero observemos si nuestra función posee puntos fijos, esto es, hagamos  $T(x) = x$ , de aquí concluimos que  $T$  posee dos puntos fijos:  $x = 0$  y  $x = \frac{2}{3}$ . Nuestro paso a seguir es saber qué clase de puntos fijos son, ¿atractores o repulsores?. Una idea intuitiva sería tomar a  $T$  por separado y observar que la pendiente en valor absoluto en cada punto es mayor que 1, pero esto no es del todo seguro, debido a la no diferenciabilidad de  $T$ . A continuación en la siguiente proposición mostraremos una prueba formal de esta sospecha que se tiene.

**Proposición 2.2.**  *$T$  posee dos puntos fijos repulsores*

**Demostración.** Sea  $0 \in I$ , entonces  $T(0) = 0$ . Tomemos un  $\delta > 0$  con  $x \in (0, \delta)$  donde  $x \neq 0$  y  $(0, \delta) \subset [0, \frac{1}{2}]$  entonces  $T(x) = 2x$  luego se tiene que la distancia de  $T(x)$  a 0 es mayor que la distancia de  $x$  a 0, esto es,  $|T(x) - 0| = |2x - 0| = 2|x - 0|$ . De aquí se obtienen dos posibilidades:

- i)  $T(x) \notin (0, \delta)$ , Podemos concluir de forma inmediata que  $\exists n \in \mathbb{N}$ ,  $n = 1$  tal que  $T^n(x) \notin (0, \delta)$ , de modo que 0 es un repulsor.
- ii)  $T(x) \in (0, \delta)$ , entonces  $2x \in [0, \frac{1}{2}]$  y se tiene que  $|T^2(x) - 0| = |T(T(x)) - 0| = |T(2x) - 0| = |4x - 0| = 2^2|x - 0|$  llegamos a que la distancia de  $T^2(x)$  a 0 es mayor que la distancia de  $x$  a 0 y nuevamente se tienen las mismas dos posibilidades.

Repitiendo el proceso una y otra vez tenemos para  $T^n(x)$  que  $|T^n(x) - 0| = 2^n|x - 0|$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $2^n \rightarrow \infty$  es decir la distancia de  $T^n(x)$  a 0 se hace muy grande, de lo contrario, existirá un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(x) \notin (0, \delta)$ . Se concluye que 0 es un repulsor. Un análisis análogo se hace para probar que  $\frac{2}{3}$  es un repulsor. ■

Veamos a continuación si  $T$  posee puntos periódicos, es decir encontremos los  $x \in I$  tales que existe un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , donde  $T^n(x) = x$ . Para empezar tomemos  $n = 2$  en  $T^n(x) = x$ , de esta forma encontramos cuatro puntos, de los cuales dos son los puntos fijos que hallamos inicialmente y los otros dos son periódicos de período dos. Si continuamos con  $n = 3$  encontraremos ocho puntos de los cuales seis son periódicos. Esto es:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] , 2x = x \Rightarrow x = 0 \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] , 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$



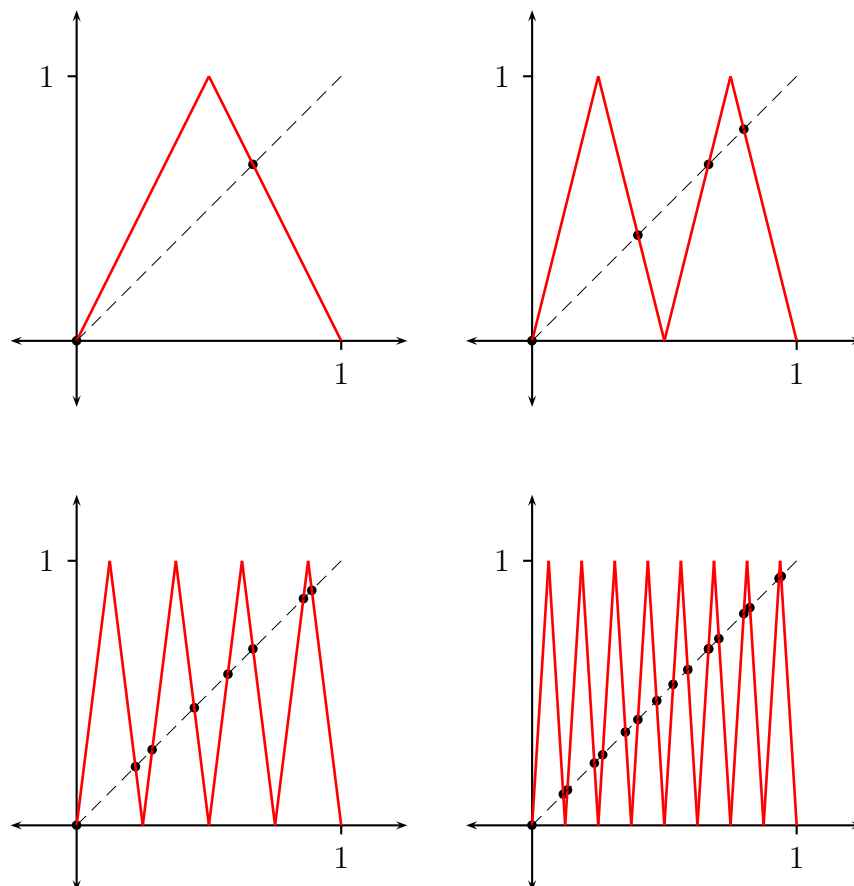


Figura 2.7: La tienda

que crecen progresivamente con cada iteración de  $T$  que hagamos, luego es claro concluir que  $T$  posee infinitos puntos periódicos en  $I$ . La idea ahora es saber en que lugar de  $I$  se encuentran, es decir, cómo están distribuidos en  $I$ , si se “amontonan” en algún momento y hacia “donde” lo hacen. Existen muchas posibilidades para su respectiva posición, pero la verdad es que el  $Per(T)$  tiene la propiedad de ser un conjunto *denso*, esto significa que podemos tomar cualquier subintervalo de  $I$  por pequeño que sea y encontrar en él un elemento del  $Per(T)$ . En lo que sigue se probará ésta afirmación, pero primero definamos formalmente que es un conjunto denso.

**Definición 2.10.** Sea  $A \subset M$ .  $M$  espacio métrico. El conjunto  $A$  es denso en  $M$  si para cada punto  $x \in M$ , cada  $\varepsilon > 0$ , la bola  $\mathfrak{B}(x; \varepsilon)$  contiene un punto de  $A$ . Esto es  $\overline{A} = M$ . En palabras, si todo abierto de  $M$  interseca a  $A$ .

Podemos particularizar la definición anterior equivalentemente al caso en que  $M = I = [0, 1]$  de la siguiente manera:  $A \subset I$  es denso en  $I$  si para todo subintervalo abierto de  $I$ ,  $(a, b) \subset I$ ,  $a < b$  existe un elemento de  $A$ ,  $x \in A$  tal que  $x \in (a, b)$ . Esto es:

$$A \text{ es denso en } I \Leftrightarrow (a, b) \subset I, a < b, A \cap (a, b) \neq \emptyset.$$

A partir de ésta definición y de un par de herramientas que se enunciarán en lo que sigue, podremos llegar a comprobar la hipótesis que se está afirmando.

**Proposición 2.3.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ . Entonces  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  es un homeomorfismo.

**Demostración.** Esta prueba es inmediata, ya que  $T^n(x) = 2^n x - k$  ó  $T^n(x) = (k + 1) - 2^n x$  son funciones lineales, en donde  $T^n(\frac{k}{2^n}) = 0$  y  $T^n(\frac{k+1}{2^n}) = 1$  ó  $T^n(\frac{k}{2^n}) = 1$  y  $T^n(\frac{k+1}{2^n}) = 0$  por lo tanto  $T^n$  es un homeomorfismo. ■

**Proposición 2.4.** Sea  $(a, b) \subset I$ ,  $a < b$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(a, b) = I$ .

**Demostración.** Sean  $(a, b) \subset I$ , con  $a < b$  y  $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1\}$  una partición de  $I$ , donde  $\Delta_n = \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}$  y es evidente que  $\Delta_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ , es decir, podemos hacer una partición de  $I$  tan fina como queramos de modo que existirán  $m, k \in \mathbb{N}$  tal que  $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}] \subset (a, b)$ , ahora, por la proposición 2.3  $T^m : [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}] \rightarrow [0, 1]$  es un homeomorfismo y nos garantiza que  $T^m((a, b)) = I$ . ■

En este momento ya se poseen las herramientas necesarias para probar que efectivamente, como se había conjeturado,  $Per(T)$  es un conjunto denso en  $I$ ; esto se hizo con el fin de facilitar la prueba y de justificar las ideas anteriores, que aunque resultan un poco evidentes, necesitan una demostración formal.

**Proposición 2.5.** El  $Per(T)$  es un conjunto denso en  $I$ .

**Demostración.** Sea  $(a, b) \subset I$ , con  $a < b$ , la prueba radica en mostrar que  $Per(T) \cap (a, b) \neq \emptyset$ . Por la proposición 2.4  $T^n((a, b)) = I$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  esto implica que  $T^n$  interseca necesariamente a la identidad, luego existe un  $x \in (a, b)$  tal que  $T^n(x) = x$  y se tiene que  $Per(T) \cap (a, b) \neq \emptyset$ . ■

En conclusión, ahora sabemos que  $T$  tiene puntos de todos los períodos posibles y que estos a su vez se encuentran repartidos por todo  $I$ , esto no significa que todo punto en el intervalo  $[0, 1]$  sea periódico, de hecho, nos está diciendo que el comportamiento de los puntos en  $I$  bajo  $T$  es infinitamente variado, aunque la distancia entre ellos sea muy pequeña. Ahora la pregunta es, por donde se están moviendo estos puntos? es decir, existe alguna restricción en determinadas zonas de  $I$  tal que estas sean totalmente disjuntas en relación con órbitas pertenecientes a ellas?. En la siguiente sección se tratará de dar una respuesta a estas interrogantes.

## 2.4. Transitividad topológica

La transitividad es una propiedad muy significativa para los sistemas dinámicos, una razón de su importancia son las fuertes conexiones que tiene con la teoría del caos. Es una propiedad de irreducibilidad ya que no permite que el espacio sea reducido a partes totalmente disjuntas, de modo que se pueda estudiar la dinámica de cada parte por separado. La idea intuitiva de la transitividad es que un punto de una porción del espacio en algún momento visita a otra porción arbitraria del espacio, evitando así tal descomposición.

El fin de esta sección es mostrar una prueba de que *la tienda* posee dicha propiedad en  $[0, 1]$  y enunciar algunas proposiciones interesantes para familiarizarnos aun más con el estudio de los sistemas dinámicos discretos y con el concepto de función caótica.

**Definición 2.11.** Sea  $f : M \rightarrow M$ . Diremos que  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$  si para todo par de subconjuntos abiertos  $U, V \in M$ , arbitrarios, distintos de vacío, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

**Ejemplo 2.6.** Sean  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $f : X \rightarrow X$  definida como  $f(x_i) = x_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$  y  $f(x_n) = x_1$  entonces  $f$  es transitiva en  $X$ . Este sistema es conocido como el  $n$ -ciclo.

En este ejemplo la función está definida de un conjunto finito en si mismo, la transitividad se debe a que siempre existirá un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(x_i) = x_j$  para todo  $x_i, x_j \in X$  con  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $j \neq i$ , esto se tiene debido a que  $f$  induce un ciclo, de esta manera no importa como se tomen los conjuntos abiertos en este conjunto, siempre la intersección de la órbita de un conjunto abierto arbitrario con cualquier conjunto abierto arbitrario será distinta de vacío.

Ahora que se tiene una idea más general de qué es la transitividad topológica, se puede mostrar que evidentemente  $T$  presenta esta propiedad en  $I$ .

**Proposición 2.6.** *La tienda es transitiva en  $I$ .*

**Demostración.** [4] Sean  $(a, b), (c, d)$  subconjuntos abiertos en  $I$ . Por la proposición 2.4 existe  $m \in \mathbb{N}$  donde  $T^m((a, b)) = I$ , por lo tanto existe  $x \in (a, b)$  tal que  $T^m(x) \in (c, d)$ , luego  $T^m((a, b)) \cap (c, d) \neq \emptyset$ . Esto implica que  $T$  es topológicamente transitiva en  $I$ . ■

**Ejemplo 2.7.** *Sea  $L : I \rightarrow I$  dada por  $L(x) = 4x(1 - x)$  conocida como la función logística.  $L$  es topológicamente transitiva en  $I$ .*

La transitividad en la función logística se verifica utilizando la siguiente definición:

**Definición 2.12.** *Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$ . Se dice que  $f$  es topológicamente conjugada a  $g$  si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .*

A partir de la definición anterior se toma  $h = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ ,  $h : I \rightarrow I$ , para mostrar que la función logística es topológicamente conjugada a la tienda, es decir  $h \circ T = L \circ h$ . En efecto,

$$h \circ T = \begin{cases} h(T(x)) = h(2x) = \sin^2(\pi x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(T(x)) = h(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\text{y } L \circ h = L(h(x)) = L(\sin^2(\frac{\pi x}{2})) = 4 \sin^2(\frac{\pi x}{2})(1 - \sin^2(\frac{\pi x}{2})) = \sin^2(\pi x).$$

Se puede mostrar ahora que una función que es topológicamente conjugada a otra, es transitiva si la otra lo es también. Además, la conjugación topológica da lugar a dinámicas equivalentes entre funciones, esto significa que la dinámica de una función es invariante bajo esta propiedad, de esta manera la complejidad en la dinámica de una determinada función se tendrá también en otra función conjugada a ésta.

**Proposición 2.7.** *Sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  funciones topológicamente conjugadas. Si  $f$  es transitiva en  $X$  entonces  $g$  es transitiva en  $Y$ .*

**Demostración.** Por hipótesis se tiene que existe un  $h : X \rightarrow Y$  homeomorfismo tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Sean  $U, V$  subconjuntos abiertos de  $Y$ . Entonces  $h^{-1}(U), h^{-1}(V)$  son subconjuntos abiertos de  $X$ , luego existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$ ; por lo tanto existe  $x \in X$  tal que  $f^m(x) \in f^m(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V)$  de aquí  $x \in h^{-1}(U)$  y se tiene que  $h(x) \in U$ . Por otro lado es fácil mostrar que si  $h \circ f = g \circ h$  entonces  $h \circ f^m = g^m \circ h$ ; en consecuencia  $h(f^m(x)) = g^m(h(x))$  pero  $f^m(x) \in h^{-1}(V)$  entonces  $h(f^m(x)) \in V$  luego  $g^m(h(x)) \in V$  y como  $h(x) \in U$  implica que  $g^m(h(x)) \in g^m(U)$  y con esto  $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$  ■

Mostraremos a continuación que la densidad es un concepto que se puede relacionar de alguna manera con la transitividad topológica, se probará que la existencia de una órbita densa en  $M$ , implica que la función es transitiva en  $M$ , esto con el objeto de tener más herramientas a la mano a la hora de deducir cuando una función presenta dicha propiedad en un espacio métrico  $M$ .

**Teorema 2.2.** *Sea  $f : M \rightarrow M$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$ .*
- ii) Para todo abierto  $U$  de  $M$ ,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$  es denso en  $M$ .*
- iii) Para todo abierto  $U$  de  $M$ ,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$  es denso en  $M$ .*

*Donde  $f^{-n}(U)$  representa la imagen inversa de  $U$  bajo la función  $f^n$ .*

**Demostración.** La prueba de las equivalencias se reduce a demostrar las siguientes implicaciones:

$i) \Rightarrow ii)$  Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ , Supongamos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$  no es denso en  $M$ , luego existe un  $V \subset M$ , abierto, tal que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \cap V = \emptyset$  pero  $f^m(U) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $f^m(U) \cap V = \emptyset$ , con esto se llega a una contradicción debido a que  $f$  es transitiva en  $M$ . Se concluye entonces que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$  es denso en  $M$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ , Supongamos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$  no es denso en  $M$ , luego existe un  $V \subset M$ , abierto, tal que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) \cap V = \emptyset$  esto significa que  $\forall m \in \mathbb{N}$  tenemos que  $f^{-m}(U) \cap V = \emptyset$  pero  $f^m(f^{-m}(U) \cap V) = U \cap f^m(V) = \emptyset$  y por hipótesis  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(V)$  es denso en  $M$ , por lo tanto se llega a una contradicción y se concluye que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$  es denso en  $M$ .

$iii) \Rightarrow i)$  Sean  $U, V \subset M$ , abiertos, Por hipótesis tenemos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$  es denso en  $M$ , luego  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$  esto significa que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{-m}(U) \cap V \neq \emptyset$  de aquí se tiene que existe  $z \in f^{-m}(U) \cap V$  entonces  $z \in f^{-m}(U)$  y  $z \in V$  donde  $f^m(z) \in U$  y  $f^m(z) \in f^m(V)$  finalmente  $f^m(V) \cap U \neq \emptyset$  por lo tanto  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$ . ■

**Proposición 2.8.** Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $x \in M$ . Si la órbita de  $x$  es un conjunto denso en  $M$ , entonces  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$ .

**Demostración.** Sean  $U, V \subset M$  abiertos. Se tiene que  $o(x, f)$  es un conjunto denso en  $M$ , luego  $o(x, f) \cap U \neq \emptyset$  por lo tanto existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(x) \in o(x, f) \cap U$  pero  $o(f^m(x), f)$  es un conjunto denso en  $M$ , luego existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(f^m(x)) \in o(f^m(x), f) \cap V$  de modo que  $f^n(f^m(x)) \in V$  y  $f^n(f^m(x)) \in f^n(U)$  con esto  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  y se concluye que  $f$  es topológicamente transitiva en  $M$ . ■

Es de aclarar que la proposición anterior no se cumple para el caso en que  $M$  posea puntos aislados.

**Ejemplo 2.8.** Sean  $M = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  y  $f : M \rightarrow M$  dada por  $f(0) = 0$  y  $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ . Claramente la órbita de  $1$  es densa en  $M$ . Por otro lado, tomando abiertos  $U = \{\frac{1}{2}\}$  y  $V = \{1\}$  se tiene que no existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , en consecuencia,  $f$  no es topológicamente transitiva en  $M$ .

## 2.5. Función Caótica

La posibilidad de tener un mundo absolutamente predecible está sujeta a algunas limitaciones. En el orden práctico, nuestra capacidad de predecir está limitada por la de observar: a una observación inexacta corresponde una predicción inexacta. El margen de error en algunas observaciones no debe menospreciarse ya que vivimos en un universo inestable en donde estos pequeños cambios generan alteraciones mayores, de modo que cualquier tipo de predicción determinista es prácticamente imposible. En los sistemas dinámicos caóticos las órbitas correspondientes a puntos tan cercanos como se quiera, se comportan de manera muy diferente al transcurrir el tiempo. Se habla, entonces, de *sensibilidad a las condiciones iniciales*. El ejemplo clásico del lápiz que no puede mantenerse en equilibrio sobre su punta (lo cual es teóricamente posible) nos ilustra acerca de cómo la inestabilidad es afectada por la más mínima vibración. Es decir, cualquier pequeño cambio en las condiciones iniciales puede producir grandes efectos sobre algo que en teoría se ha determinado, cosa que no ocurre en los sistemas estables.

En 1985 *Robert Devaney* propuso una definición para decidir si un sistema es caótico; las condiciones que estableció fueron la de la densidad de los puntos periódicos, la transitividad topológica y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero en 1992 un grupo de matemáticos australianos demostraron que en un espacio métrico perfecto la sensibilidad a las condiciones iniciales se puede deducir de las otras dos propiedades. En esta sección abordaremos la definición de *función caótica* a partir de este último hecho, ya que todo el trabajo que se ha realizado hasta ahora ha sido con funciones en espacios métricos perfectos.

**Definición 2.13.** Sea  $f : M \rightarrow M$  continua, decimos que  $f$  es caótica en  $M$  si:

- i)  $Per(f)$  es denso en  $M$ , esto significa que, para todo  $U \subset M$ , abierto,  $U \cap Per(f) \neq \emptyset$
- ii)  $f$  es topológicamente transitiva, esto es, para cualquier pareja de abiertos  $U, V \subset M$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

**Proposición 2.9.** La tienda es caótica en  $I$ .

**Demostración.** Gracias a las *Proposiciones 2.5 y 2.6* se tiene que  $T$  es caótica en  $I$ . ■

Hasta este momento se ha cumplido con dos objetivos específicos de este trabajo, se ha mostrado algunas propiedades topológicas de los sistemas dinámicos y un ejemplo de caos en el intervalo  $[0, 1]$  (*La tienda*). Para finalizar esta sección y el presente capítulo se dará a conocer un ejemplo muy interesante de una función caótica en el círculo unitario  $S^1$ .

**Ejemplo 2.9.** Sean  $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  y  $\Omega : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $\Omega(z) = z^2$ .  $\Omega$  es caótica en  $S^1$ .

Presentamos a continuación como es la dinámica de  $\Omega$  en  $S^1$ , para facilitar esta tarea tomemos  $z = e^{\theta i}$  donde  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

De acuerdo con lo anterior la órbita de todo elemento  $z$  en  $S^1$  está dada por:

$$o(z, \Omega) = \{e^{\theta i}, e^{2\theta i}, e^{4\theta i}, \dots\}$$

Esto significa que la función realiza una duplicación del argumento por cada iteración que se haga.

Claramente se deduce que  $\Omega^n(z) = e^{2^n \theta i}$ . A partir de esta observación se pueden hallar los puntos fijos y los puntos periódicos, esto es:

$$\Omega^n(z) = z \Rightarrow e^{2^n \theta i} = e^{\theta i}$$

Pero esta última igualdad se tiene cuando  $2^n \theta = \theta + 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Luego para obtener puntos de período 1, es decir, puntos fijos, tomamos  $n = 1$  en  $\theta = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$  y obtenemos  $\theta = 2\pi k$  que es el respectivo valor de  $\theta$  para  $z = e^{\theta i}$ . De esta manera  $\Omega$  posee un único punto fijo  $z = e^{2\pi k i} = e^{0i} = 1$ .

En forma análoga se pueden hallar los puntos 2-periódicos. Esto es,  $n=2$  en  $\theta = \frac{2\pi k}{2^n - 1}$  entonces  $\theta = \frac{2\pi k}{3}$ . Denotemos ahora por  $\Theta_2$  al conjunto de valores de  $\theta$  con  $n = 2$  y  $k$  variando y así  $\Theta_2 = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$  donde cada  $\theta_\alpha \in \Theta_2$  genera un punto periódico de la forma  $e^{\theta_\alpha i}$  en este caso  $\Theta_2$  genera 2 puntos 2-periódicos:  $\{e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{4\pi}{3}i}\}$ .

Para puntos 3-periódicos tomamos  $\theta = \frac{2\pi k}{7}$  y obtenemos:

$$\Theta_3 = \left\{ \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7} \right\}$$

Que significa que  $\Theta_3$  genera 6 puntos 3-periódicos.

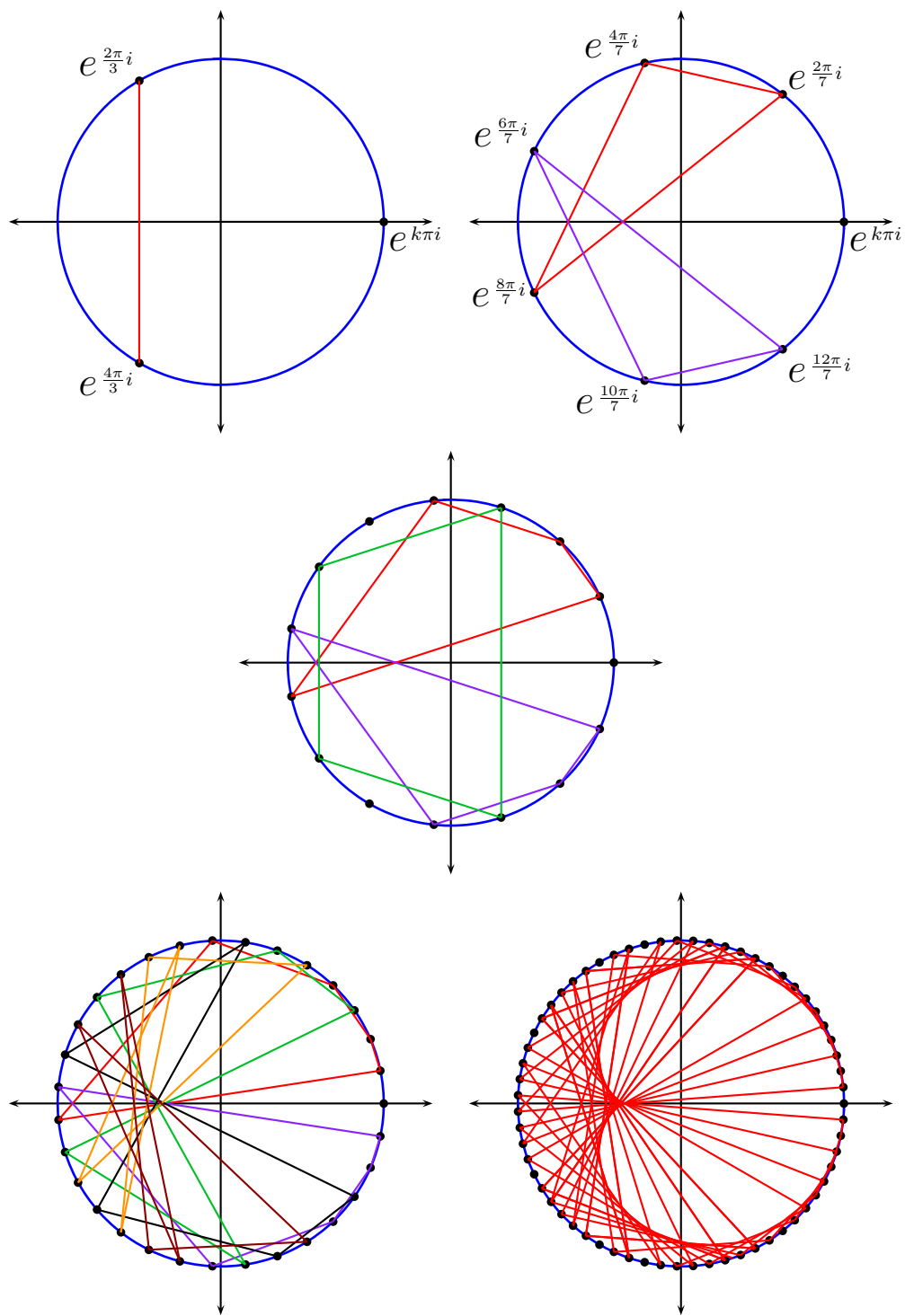


Figura 2.8: Órbitas de  $\Omega(z) = z^2$

En forma general el conjunto  $\Theta_n = \left\{ \frac{2\pi k}{2^n - 1}, n \in \mathbb{Z}^+, k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\} \right\}$  genera todos los puntos periódicos de la forma  $e^{\frac{2\pi k}{2^n - 1}i}$  y cada  $\Theta_n$  genera  $2^n - 2$  puntos periódicos, donde todo punto es  $n$ -periódico, si  $n$  es primo. De lo contrario si  $n$  no es primo también se van a generar puntos  $m$ -periódicos en donde  $m$  divide a  $n$ , de modo que no todo punto será  $n$ -periódico.

El análisis anterior nos está diciendo que  $\Omega$  posee infinitos puntos periódicos en  $S^1$  y además de todos los períodos posibles. Nuestro paso a seguir ahora es mostrar que ese conjunto de puntos periódicos es un conjunto denso en  $S^1$ . La *Figura 2.8* nos ilustra las órbitas de puntos de distinto período y muestra de manera intuitiva como es posible la densidad del  $Per(\Omega)$ .

**Proposición 2.10.** *El  $Per(\Omega)$  es un conjunto denso en  $S^1$ .*

**Demostración.** Sea  $U$  un subconjunto abierto y conexo de  $S^1$  tal que  $U = S^1 \cap \mathfrak{B}(x; r)$  para un  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $r > 0$  de modo que  $U = \{z = e^{\theta i} \mid \alpha < \theta < \beta\}$  con  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$  siendo así  $e^{\alpha i}$  y  $e^{\beta i}$  los extremos de  $U$ .  $(\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi)$ , abierto y  $Per(\Omega) = \left\{ z \in S^1 \mid z = e^{\frac{2\pi k}{2^n - 1}i}, n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\} \right\}$ . Tomando para cada  $n \in \mathbb{N}$  una partición de  $[0, 2\pi)$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ 0, \frac{2\pi}{2^n - 1}, \frac{4\pi}{2^n - 1}, \frac{6\pi}{2^n - 1}, \dots, \frac{(2^n - 2)2\pi}{2^n - 1} \right\}$$

Es evidente que  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{2^n - 1}$  donde  $\Delta x_i \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto significa que se puede hacer una partición tan fina como se quiera, de modo que existirán  $m \in \mathbb{N}$  y  $l \in \{0, 1, \dots, 2^m - 2\}$  tales que  $\frac{2\pi l}{2^m - 1} \in (\alpha, \beta)$  esto implica que  $e^{\frac{2\pi l}{2^m - 1}i} \in U$  luego  $Per(\Omega)$  es denso en  $S^1$ . ■

Por último probemos que  $\Omega$  es topológicamente transitiva en  $S^1$  y con esto daremos por terminada la demostración de que  $\Omega$  es una función caótica en el círculo unitario. La prueba, como se verá a continuación es casi inmediata y similar a la de la *tienda* debido a que la imagen de todo subconjunto abierto de  $S^1$  bajo la función  $\Omega$  a la larga termina convirtiéndose en toda la circunferencia.

**Proposición 2.11.**  $\Omega$  es topológicamente transitiva en  $S^1$ .

**Demostración.** Sea  $U$  un subconjunto abierto y conexo de  $S^1$  tal que  $U = S^1 \cap \mathfrak{B}(x; r)$  para un  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $r > 0$  de modo que  $U = \{z = e^{\theta i} \mid \alpha < \theta < \beta\}$  con  $\alpha, \beta, \theta \in [0, 2\pi)$  siendo así  $e^{\alpha i}$  y  $e^{\beta i}$  los extremos de  $U$ . Considerando a  $U$  como un arco abierto, se tiene entonces que la longitud de  $U$  denotada por  $\ell(U)$  es igual a  $\gamma = \beta - \alpha$ . Por otro lado, es claro que  $\Omega$  duplica el argumento de todo  $z$  en  $U$ , esto es,  $\Omega(e^{\theta i}) = e^{2\theta i}$  de esta manera  $\Omega$  duplica también la longitud de  $U$  luego  $\ell(\Omega(U)) = 2\beta - 2\alpha = 2\gamma$  donde  $e^{2\alpha i}$  y  $e^{2\beta i}$  son los extremos de  $\Omega(U)$ . (ver Figura 2.9)

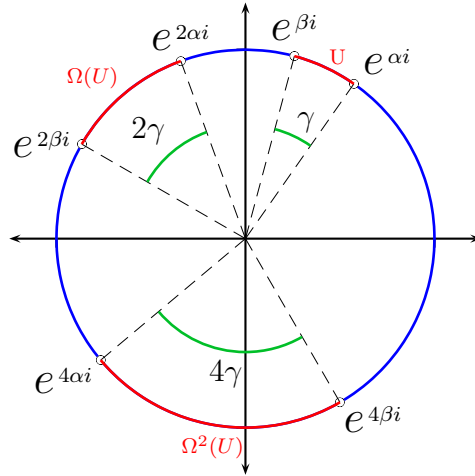


Figura 2.9: Órbita de  $U$  en  $S^1$

De acuerdo con lo anterior se tendrá que  $\ell(\Omega^2(U)) = 4\gamma$ ,  $\ell(\Omega^3(U)) = 8\gamma, \dots, \ell(\Omega^n(U)) = 2^n\gamma$  y por lo tanto existirá  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\ell(\Omega^m(U)) \geq 2\pi$  con lo cual  $\Omega^m(U) = S^1$ . Esto nos dice que en algún momento cualquier subconjunto abierto conexo de  $S^1$  por pequeño que sea se convertirá en todo  $S^1$  y con esto  $\Omega^m(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $V$  subconjunto abierto de  $S^1$ . En consecuencia  $\Omega$  es topológicamente transitiva en  $S^1$ . ■

## CAPÍTULO

### 3

# La Herradura de Smale

Stephen Smale (15-7-1930) es un matemático norteamericano ganador de la Medalla Fields en 1966 por sus trabajos realizados en topología y en sistemas dinámicos, es reconocido por demostrar la conjetura de Poincaré para toda dimensión mayor que cuatro. A partir de entonces, su trabajo, luego de hacer grandes estudios en topología se centró en el estudio de los sistemas dinámicos donde realizó avances realmente significativos. La función *Herradura*, que lleva su nombre y que descubrió mientras estudiaba la conducta de las órbitas del oscilador de *van der Pol*, es uno de los resultados que obtuvo y un importante ejemplo en el estudio de los sistemas dinámicos que ayuda a entender el mecanismo del caos y explica la componente de impredecibilidad en un sistema dinámico. Actualmente Stephen Smale también es conocido por sus trabajos en matemática económica así como en las recientes investigaciones que ha hecho en varias teorías de computación.

En este capítulo, parte central de éste trabajo, se estudiarán algunas propiedades dinámicas y topológicas de la herradura de Smale. Se empezará por una descripción detallada de ésta función, después se analizará su dinámica y finalmente se demostrará que posee un conjunto donde es caótica y un conjunto que es un atractor.

### 3.1. La Herradura

Una forma fácil y sencilla de describir la función *herradura* es considerarla como la composición de las siguientes acciones: inicialmente se toma un cuadrado al cual se le aplica una acción simultanea de contracción y estiramiento de sus dimensiones vertical y horizontal respectivamente, de modo que se obtiene un rectángulo que posteriormente es doblado hasta formar una figura semejante a una herradura y que estará dentro de la región limitada por el cuadrado inicial.

En lo que resta de este trabajo la función herradura, que denotaremos por  $\mathcal{H}$ , se extenderá a una región compacta y conexa del plano,  $\mathcal{H} : M \rightarrow M$ ,  $M \subset \mathbb{R}^2$  donde  $M$  esta dada por:

$$M = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{\frac{1}{4} - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \right\}$$

En la *Figura 3.1* puede observarse a  $M$ . Además, tomaremos a  $M$  como la unión de las regiones  $A$ ,  $B$  y  $C$ , donde  $C = I \times I$  con  $I = [0, 1]$  y  $A, B$  son semidiscos de radio  $\frac{1}{2}$  pegados a  $C$ .

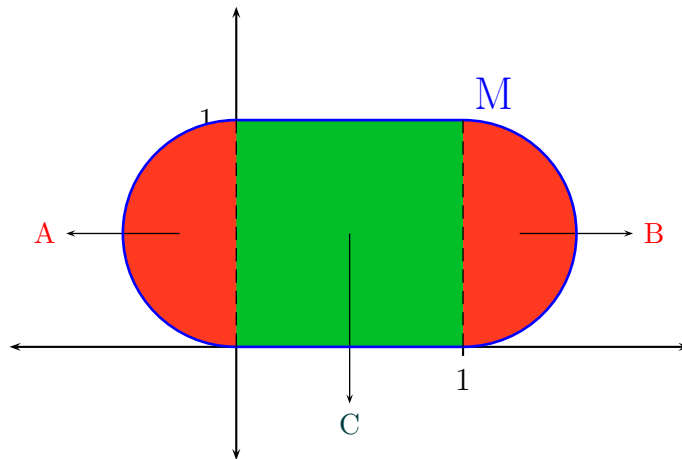


Figura 3.1:  $M = A \cup B \cup C$

Ahora definamos a  $\mathcal{H}$  como la composición de las siguientes funciones:

$\mathcal{H}_1$ : Considerada como una  $\lambda$ -contracción de  $M$  en su dimensión vertical, donde  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . En adelante, se asumirá  $\lambda = \frac{1}{5}$  como factor de contracción, de esta manera  $\mathcal{H}_1$  estará dada por:

$$\mathcal{H}_1(x, y) = \left(x, \frac{y}{5}\right), \forall (x, y) \in M$$

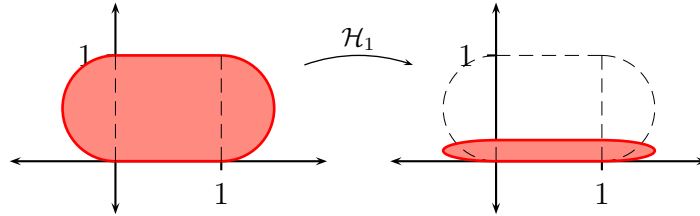


Figura 3.2:  $\mathcal{H}_1(x, y)$

$\mathcal{H}_2$ : Esta función realiza una  $\lambda$ -contracción, en la dimensión horizontal de  $\mathcal{H}_1(A)$  y de  $\mathcal{H}_1(B)$ . Esto es:

$$\mathcal{H}_2(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{5}, y\right), & \text{si } x \leq 0 \\ (x, y), & \text{si } x \in I \\ \left(1 + \frac{x-1}{5}, y\right), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

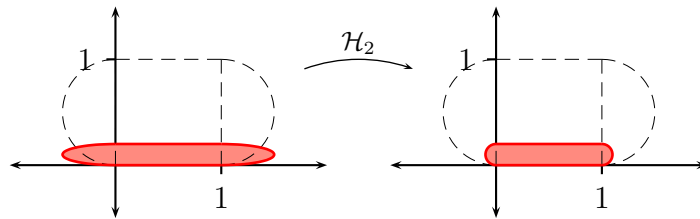


Figura 3.3:  $\mathcal{H}_2(x, y)$

$\mathcal{H}_3$ : Aquí se realiza un estiramiento horizontal del rectángulo comprendido entre 0 y 1 en una proporción de 1 a 5 hacia la derecha. Esto es:

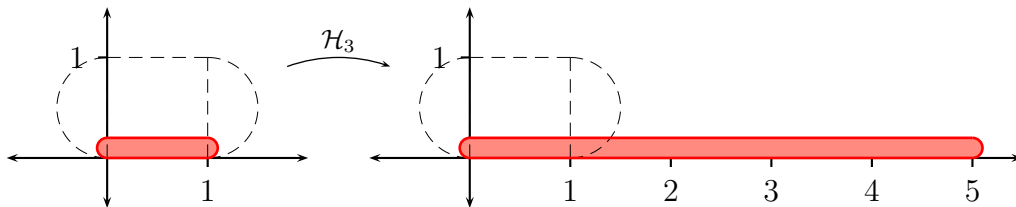


Figura 3.4:  $\mathcal{H}_3(x, y)$

$$\mathcal{H}_3(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } x \leq 0 \\ (5x, y), & \text{si } x \in I \\ (x + 4, y), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\mathcal{H}_4$ : Esta función realiza una acción de doblado del rectángulo ubicado en  $2 \leq x \leq 3$  junto con un movimiento de rotación y traslación de la región que está en  $x \geq 3$  de modo que la región que está en  $x \leq 2$  quedará intacta (ver Figura 3.5).

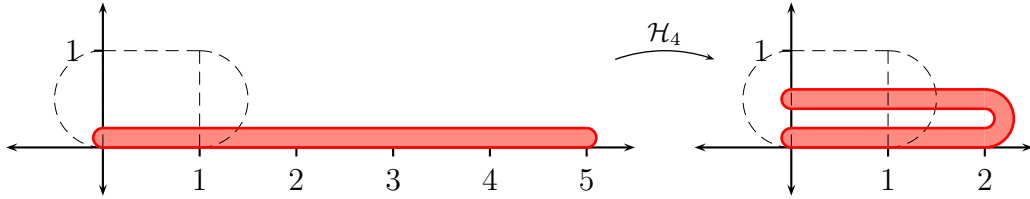
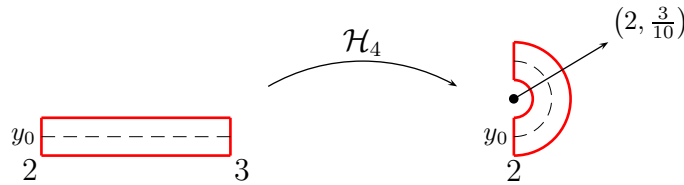


Figura 3.5:  $\mathcal{H}_4(x, y)$

Ahora deduzcamos la regla de correspondencia para  $\mathcal{H}_4(x, y)$  en el intervalo cerrado  $[2, 3]$ , para ello analicemos la acción de doblado que consiste en lo siguiente:



En términos simples, se toma todo segmento de recta horizontal  $\overline{PQ}$  en  $[2, 3]$  con  $P = (2, y_0)$  y  $Q = (3, y_0)$  donde  $0 \leq y_0 \leq \frac{1}{5}$  ( $y_0$  fijo) y se transforma en una semicircunferencia con centro en  $(2, \frac{3}{10})$  y radio  $r = \frac{3}{10} - y_0$ . Luego, la transformación se basará en la composición de funciones  $f$  y  $\alpha$  como se muestra a continuación:

$$2 \begin{array}{c} | \\ \hline x \\ \hline | \end{array} 3 \xrightarrow{f(x)} \begin{array}{c} | \\ \hline -\frac{1}{2} \\ \hline | \end{array} \begin{array}{c} | \\ \hline t \\ \hline | \end{array} \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha(t)} \mathcal{D}$$

Donde  $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid x = 2 + \left(\frac{3}{10} - y_0\right) \cos \pi t \quad y \quad y = \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} - y_0\right) \text{sen } \pi t \right\}$   
 Por lo tanto se necesita una biyección de  $[2, 3]$  en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  tal que  $f(2) = -\frac{1}{2}$

y  $f(3) = \frac{1}{2}$ . Se llega entonces a que  $f(x) = x - \frac{5}{2}$  de esta manera:

$$\begin{aligned} (\alpha \circ f)(x) &= \alpha(f(x)) = \alpha\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(2 + \left(\frac{3}{10} - y_0\right)\cos \pi\left(x - \frac{5}{2}\right), 1 + \left(\frac{3}{10} - y_0\right)\text{sen } \pi\left(x - \frac{5}{2}\right)\right) \\ &= \left(2 + \left(\frac{3}{10} - y_0\right)\text{sen } \pi x, \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} - y_0\right)\cos \pi x\right) \end{aligned}$$

Así, extendiendo el caso para  $0 \leq y \leq \frac{1}{5}$  se obtiene  $\mathcal{H}_4(x, y)$  en  $[2, 3]$ . Por consiguiente:

$$\mathcal{H}_4(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } x \leq 2 \\ \left(2 + \left(\frac{3}{10} - y\right)\text{sen } \pi x, \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} - y\right)\cos \pi x\right), & \text{si } x \in [2, 3] \\ (5 - x, \frac{3}{5} - y), & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$\mathcal{H}_5$ : Ahora se traslada la figura obtenida anteriormente como se muestra a continuación:

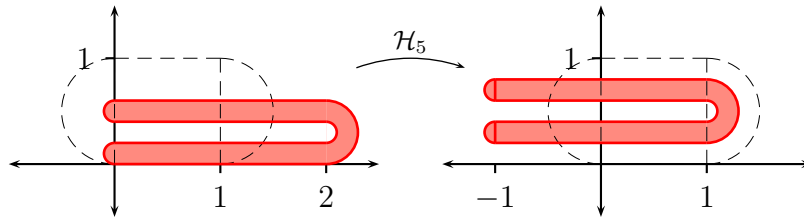


Figura 3.6:  $\mathcal{H}_5(x, y)$

Luego,

$$\mathcal{H}_5(x, y) = \left(x - 1, y + \frac{1}{5}\right)$$

$\mathcal{H}_6$ : Finalmente, esta función realiza una  $\lambda$ -contracción en la dimensión horizontal de la parte ubicada en  $x \leq 0$ . Esto es:

$$\mathcal{H}_6(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{5}, y\right), & \text{si } x \leq 0 \\ (x, y), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

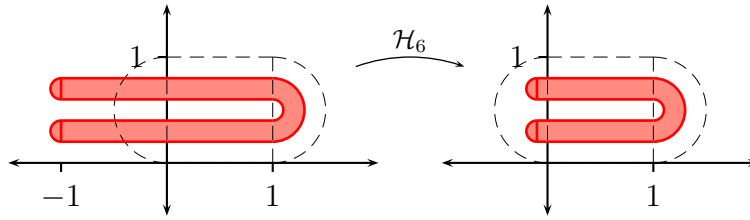


Figura 3.7:  $\mathcal{H}_6(x, y)$

Como se mencionó anteriormente  $\mathcal{H}$  se define como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_6 \circ \mathcal{H}_5 \circ \mathcal{H}_4 \circ \mathcal{H}_3 \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$$

y su acción se puede observar finalmente en la *Figura 3.8*

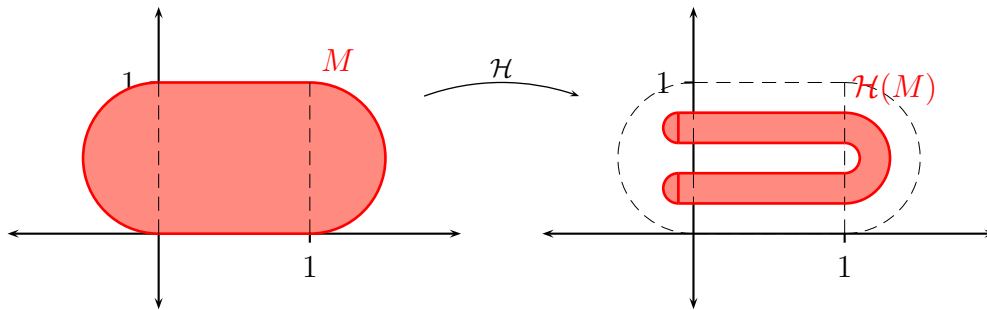


Figura 3.8: La Herradura de Smale

Como se puede observar cada  $\mathcal{H}_i$  es una función uno a uno y continua por lo tanto  $\mathcal{H}$  es uno a uno y continua ya que la composición de funciones preserva estas propiedades. También es claro que  $\mathcal{H}$  no es una función sobreyectiva debido a que  $\mathcal{H}(M) \subset \text{Int}(M)$ , en consecuencia, se puede afirmar que la herradura no es un homeomorfismo.

## 3.2. La dinámica de la herradura

En esta sección se estudiará el comportamiento de los puntos pertenecientes a cada una de las regiones  $A, B$  y  $C$  de  $M$ . El objetivo es determinar qué zonas

visitan o en cuáles permanecen, es decir, llegar a conocer de manera intuitiva la órbita de cualquier punto de  $M$  después de aplicar  $\mathcal{H}$  repetidamente a  $M$ .

En primer lugar, puede observarse que la imagen del semidisco  $A$  está contenida en sí mismo, esto es,  $\mathcal{H}(A) \subset A$  por consiguiente  $\mathcal{H}^n(x, y) \in A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $(x, y) \in A$ , además,  $\mathcal{H}$  en el conjunto  $A$  se puede expresar como la composición de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(x, y) &= \left(x, \frac{y}{5}\right) \\ \mathcal{H}_2(x, y) &= \left(\frac{x}{5}, y\right) \\ \mathcal{H}_3(x, y) &= (x, y) \\ \mathcal{H}_4(x, y) &= (x, y) \\ \mathcal{H}_5(x, y) &= \left(x - 1, y + \frac{1}{5}\right) \\ \mathcal{H}_6(x, y) &= \left(\frac{x}{5}, y\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{H}(x, y)$  restringida a  $A$  está dada por:

$$\mathcal{H}_{/A}(x, y) = \left(\frac{x}{25} - \frac{1}{5}, \frac{y}{5} + \frac{1}{5}\right)$$

y se puede probar la existencia de un punto fijo en  $A$  ya que  $\mathcal{H}_{/A}(x, y)$  es una contracción.

**Proposición 3.1.**  $\mathcal{H}$  tiene un punto fijo en  $A$ .

**Demostración.** Comprobemos que  $\mathcal{H} : A \rightarrow A$  es en efecto una contracción, es decir, mostremos que existe un  $\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$  tal que para cualquier pareja arbitraria de puntos  $(x, y), (u, v)$  en  $A$ , se tenga que:

$$d_2(\mathcal{H}_{/A}(x, y), \mathcal{H}_{/A}(u, v)) \leq \alpha d_2((x, y), (u, v))$$

Sean  $(x, y), (u, v) \in A$  donde  $\mathcal{H}_{/A}(x, y) = \left(\frac{x}{25} - \frac{1}{5}, \frac{y}{5} + \frac{1}{5}\right)$  y  $\mathcal{H}_{/A}(u, v) = \left(\frac{u}{25} - \frac{1}{5}, \frac{v}{5} + \frac{1}{5}\right)$  luego:

$$\begin{aligned}d_2(\mathcal{H}_{/A}(x, y), \mathcal{H}_{/A}(u, v)) &= \sqrt{\left[\left(\frac{x}{25} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{u}{25} - \frac{1}{5}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y}{5} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{v}{5} + \frac{1}{5}\right)\right]^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x-u}{25}\right)^2 + \left(\frac{y-v}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{\left(\frac{x-u}{5}\right)^2 + (y-v)^2} \\ &\leq \frac{1}{5} \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \\ &\leq \frac{1}{5} d_2((x, y), (u, v))\end{aligned}$$

Por lo tanto existe  $\alpha = \frac{1}{5}$ . Con esto se ha demostrado que  $\mathcal{H} : A \rightarrow A$  es una contracción. En consecuencia, por el teorema del punto fijo de Banach (*Principio de las aplicaciones contraídas*) se puede afirmar que  $\mathcal{H}$  posee un punto fijo en  $A$ . ■

Ahora que se sabe que existe un punto fijo en  $A$ , hacemos  $\mathcal{H}_{/A}(x, y) = (x, y)$  y obtenemos que  $(-\frac{5}{24}, \frac{1}{4})$  es el punto fijo de  $\mathcal{H}$  en  $A$ . Además, es casi inmediato llegar a afirmar que  $p_1 = (-\frac{5}{24}, \frac{1}{4})$  es un punto fijo atractor; la razón es que  $\mathcal{H}_{/A}$  se comporta como una contracción, de manera que la órbita de todo punto que pertenece a  $A$  converge a  $p_1$ . Sin embargo ésta suposición se demostrará a continuación.

**Proposición 3.2.**  $p_1 = (-\frac{5}{24}, \frac{1}{4})$  es un punto fijo atractor.

**Demostración.** Sean  $(x, y) \in A$  y  $p_1 = (-\frac{5}{24}, \frac{1}{4})$  un punto fijo en  $A$ . Como  $\mathcal{H}_{/A}$  es una contracción se tiene que:

$$\begin{aligned} d_2(\mathcal{H}(x, y), \mathcal{H}(p_1)) &= d_2(\mathcal{H}(x, y), p_1) \leq \frac{1}{5} d_2((x, y), p_1) \\ d_2(\mathcal{H}^2(x, y), \mathcal{H}^2(p_1)) &= d_2(\mathcal{H}(\mathcal{H}(x, y)), p_1) \leq \frac{1}{5} d_2(\mathcal{H}(x, y), p_1) \leq \frac{1}{25} d_2((x, y), p_1) \\ d_2(\mathcal{H}^3(x, y), \mathcal{H}^3(p_1)) &= d_2(\mathcal{H}(\mathcal{H}^2(x, y)), p_1) \leq \frac{1}{5} d_2(\mathcal{H}^2(x, y), p_1) \leq \frac{1}{125} d_2((x, y), p_1) \end{aligned}$$

Sucesivamente se llega a:

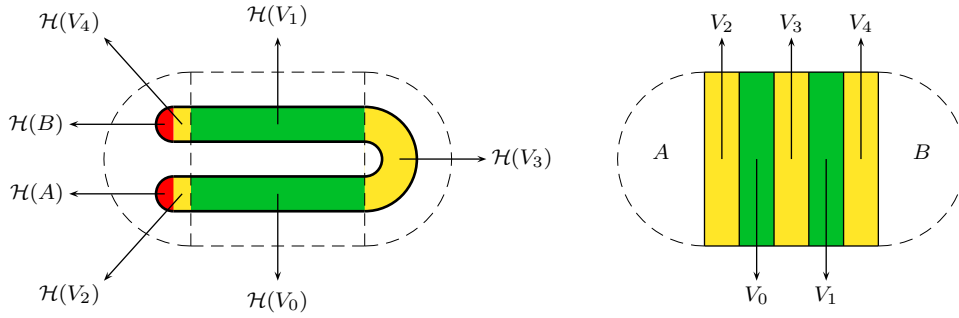
$$d_2(\mathcal{H}^n(x, y), \mathcal{H}^n(p_1)) = d_2(\mathcal{H}^n(x, y), p_1) \leq \frac{1}{5^n} d_2((x, y), p_1)$$

Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\mathcal{H}^n(x, y), p_1) \leq 0$  pero como  $d_2$  es no negativa se concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\mathcal{H}^n(x, y), p_1) = 0$  que es equivalente a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^n(x, y) = p_1$  por lo tanto  $p_1$  es un punto fijo atractor. ■

Por otro lado, es evidente que la imagen del semidisco  $B$  está contenida en  $A$ , con esto es inmediato concluir que  $\mathcal{H}$  no posee puntos fijos en  $B$ . El hecho de que exista un punto fijo atractor en  $A$  nos garantiza la no existencia de puntos periódicos tanto en  $A$  como en  $B$  ya que la órbita de todo punto perteneciente a  $A \cup B$  converge, por lo tanto en ningún momento se hace repetitiva. La prueba anterior no sólo nos mostró que  $p_1$  es un atractor también deja en claro que todo punto en  $A \cup B$  pertenece a la cuenca de atracción de  $p_1$ . Esto es:

$$(A \cup B) \subset \{(x, y) \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^n(x, y) = p_1\}$$

Parcialmente se ha analizado la dinámica de  $\mathcal{H}$  en  $M$ , ahora se sabe cómo se comportan las órbitas de los puntos en las regiones  $A$  y  $B$ , sólo nos queda analizar la dinámica en  $C$ . Para esto observemos que  $\mathcal{H}(M)$  puede tomarse como la unión de las regiones  $\mathcal{H}(A)$ ,  $\mathcal{H}(B)$  y  $\mathcal{H}(V_i)$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, 4$  como se indica en la *Figura 3.9*:



*Figura 3.9:*  $\mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(A) \cup \mathcal{H}(B) \cup \mathcal{H}(V_i)$

De modo que cada  $\mathcal{H}(V_i)$  es la imagen respectiva de las zonas  $V_i$  en las que se encuentra dividida la región  $C$ . Donde:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x, y) \in C \mid x \in [0, \frac{1}{5}]\} \\ V_0 &= \{(x, y) \in C \mid x \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]\} \\ V_3 &= \{(x, y) \in C \mid x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]\} \\ V_1 &= \{(x, y) \in C \mid x \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]\} \\ V_4 &= \{(x, y) \in C \mid x \in [\frac{4}{5}, 1]\} \end{aligned}$$

Claramente se puede deducir, observando en la figura anterior, que las regiones  $\mathcal{H}(V_2)$  y  $\mathcal{H}(V_4)$  están contenidas en  $A$  mientras que  $\mathcal{H}(V_3)$  está contenida en  $B$  pero esto implica que  $\mathcal{H}^2(V_3) \subset A$ . En consecuencia el conjunto  $(V_2 \cup V_3 \cup V_4)$  es parte también de la cuenca de atracción de  $p_1$ . En conclusión, todo punto cuya órbita salga de  $C$  caerá en  $A$  o en  $B$  y por lo tanto su órbita convergerá a  $p_1$ .

La dinámica en las regiones  $V_0$  y  $V_1$  es más interesante aun, pues existen puntos cuya órbita permanece en  $C$  al igual que puntos cuya órbita sale de  $C$ .

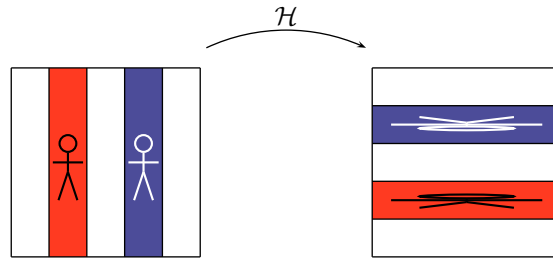
**Definición 3.1.** Un conjunto  $X$  se dice que es invariante bajo una función  $f$ , si  $f(X) = X$  o equivalentemente: si para cualquier  $x \in X$  se tiene que  $f^k(x) \in X$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Demostraremos que existe un subconjunto  $\Delta$  en  $C$  que es invariante bajo  $\mathcal{H}$ , éste estará dado de la siguiente forma:

$$\Delta = \dots \cap \mathcal{H}^{-2}(C) \cap \mathcal{H}^{-1}(C) \cap C \cap \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}^2(C) \cap \dots$$

para ello, analizaremos a continuación el comportamiento de las órbitas de los puntos pertenecientes a las zonas  $V_0$  y  $V_1$ .

La *Figura 3.9* nos muestra que la imagen de las franjas verticales  $V_0$  y  $V_1$  son las franjas horizontales  $\mathcal{H}(V_0) = H_0$  y  $\mathcal{H}(V_1) = H_1$ . Notemos que a primera vista es como si  $\mathcal{H}_{/V_0 \cup V_1}$  simplemente actuara como una rotación-traslación pero no es así, en  $V_0 \cup V_1$  segmentos verticales son contraídos uniformemente y segmentos horizontales son expandidos uniformemente, de esta manera un segmento de recta ya sea horizontal o vertical es transformado en otro segmento de recta del mismo tipo. En otras palabras, las direcciones son preservadas en  $V_0 \cup V_1$  bajo la acción de  $\mathcal{H}$  (*ver Figura 3.10*).



*Figura 3.10:*  $\mathcal{H}$  en  $V_0 \cup V_1$

Ahora, consideraremos a  $\mathcal{H}(V_0 \cup V_1)$  como  $C \cap \mathcal{H}(C)$  y a  $V_0 \cup V_1$  como  $\mathcal{H}^{-1}(C) \cap C$ . Por otro lado es claro que no todo  $C \cap \mathcal{H}(C)$  nos interesa debido

a que este conjunto interseca al conjunto  $(V_2 \cup V_3 \cup V_4)$  esto significa que en la imagen de éstas dos franjas existen puntos que entran a la cuenca de atracción de  $p_1$  por lo tanto el conjunto  $\mathcal{H}^{-1}(C) \cap C \cap \mathcal{H}(C)$  está conformado por aquellos puntos pertenecientes a órbitas que momentáneamente permanecen en  $C$ , siendo éste la intersección de dos franjas horizontales con dos verticales. De la misma manera los conjuntos  $C \cap \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}^2(C)$  y  $\mathcal{H}^{-2}(C) \cap \mathcal{H}^{-1}(C) \cap C$  estarán conformados por cuatro franjas horizontales y verticales respectivamente, esto implica que su intersección nos determina un subconjunto de  $C$  que permanece en  $C$  al cabo de dos iteraciones ya sea aplicando  $\mathcal{H}$  o  $\mathcal{H}^{-1}$ .

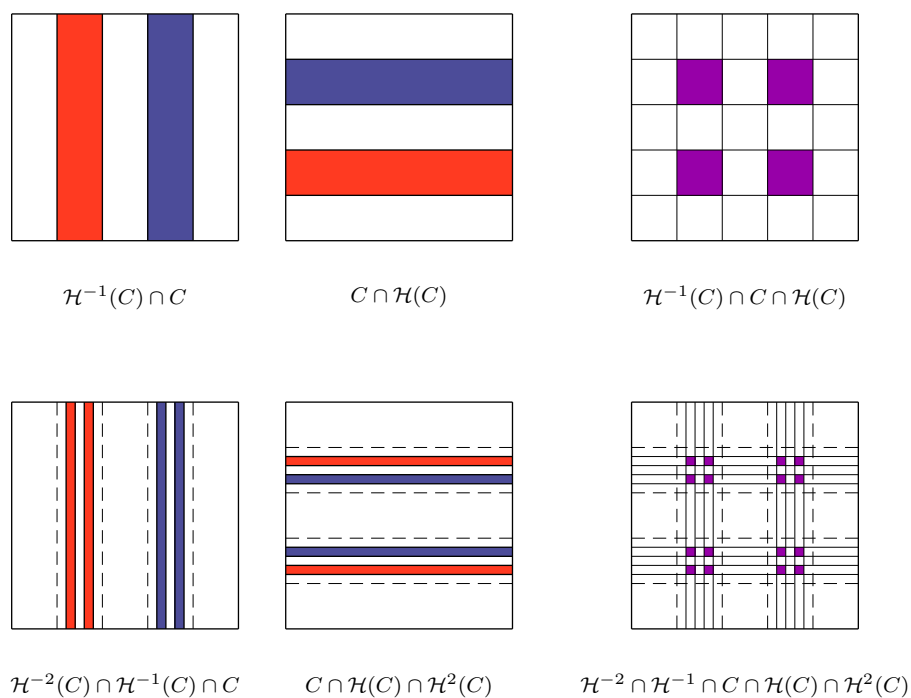


Figura 3.11: Dinámica en  $C$

En adelante generalizaremos las observaciones previamente mencionadas, de forma inductiva construiremos  $\Delta$ . Mostraremos que es la intersección de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= C \cap \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}^2(C) \cap \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^+ \\ \Delta^- &= C \cap \mathcal{H}^{-1}(C) \cap \mathcal{H}^{-2}(C) \cap \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^-\end{aligned}$$

Donde  $\Delta_n^+$  y  $\Delta_n^-$  se construyen como se mostrará a continuación.

Tomemos inicialmente a  $\Delta_n^+$ , ahora,  $\Delta_1^+ = C \cap \mathcal{H}(C) = \mathcal{H}(V_0) \cup \mathcal{H}(V_1) = H_0 \cup H_1$  donde  $H_0$  y  $H_1$  son dos franjas horizontales de  $\frac{1}{5}$  de alto cada una. Sea  $S = \{0, 1\}$  luego:

$$\Delta_1^+ = \bigcup_{s_{-1} \in S} H_{s_{-1}}$$

donde  $(x, y) \in H_{s_{-1}}$  si  $\mathcal{H}^{-1}(x, y) \in V_{s_{-1}}$ .  
Construyamos  $\Delta_2^+ = C \cap \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}^2(C)$  de aquí se obtienen cuatro franjas horizontales de  $\frac{1}{25}$  de alto cada una. Entonces:

$$\Delta_2^+ = C \cap \mathcal{H}(C \cap \mathcal{H}(C)) = C \cap \mathcal{H}(\Delta_1^+) = C \cap \mathcal{H}\left(\bigcup_{s_{-1} \in S} H_{s_{-1}}\right)$$

pero la imagen de cada franja horizontal  $H_{s_{-1}}$  está compuesta por dos franjas horizontales, una en la region  $H_0$  y la otra en la region  $H_1$ . Esto significa que:

$$\Delta_2^+ = C \cap \mathcal{H}\left(\bigcup_{s_{-1} \in S} H_{s_{-1}}\right) = H_{s_{-1}0} \cup H_{s_{-1}1} = \bigcup_{s_{-1}, s_{-2} \in S} H_{s_{-1}s_{-2}}$$

donde  $(x, y) \in H_{s_{-1}s_{-2}}$  si  $\mathcal{H}^{-1}(x, y) \in V_{s_{-1}}$  y  $\mathcal{H}^{-2}(x, y) \in V_{s_{-2}}$ .

Sucesivamente se obtiene que:

$$\Delta_n^+ = C \cap \mathcal{H}(\Delta_{n-1}^+) = \bigcup_{s_{-i} \in S} H_{s_{-1} \dots s_{-n}}$$

donde  $(x, y) \in H_{s_{-1}s_{-2} \dots s_{-n}}$  si  $\mathcal{H}^{-i}(x, y) \in V_{s_{-i}}$  con  $i = 1, \dots, n$  además  $\Delta_n^+$  está compuesto por  $2^n$  franjas horizontales de  $\frac{1}{5^n}$  de alto, así se tiene que  $\Delta^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^+$  será el producto del intervalo cerrado  $I = [0, 1]$  por un conjunto de Cantor  $\mathcal{C}_y$  esto es:

$$\Delta^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^+ = I \times \mathcal{C}_y$$

Por otro lado, podemos observar que de alguna manera se ha podido asignar una secuencia  $S_n = s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \bullet$  de ceros y unos a cada franja horizontal obtenida al iterar a  $\mathcal{H}$  en  $C$  (ver Figura 3.12). Por ejemplo para una franja horizontal  $H$  con la secuencia 011. significa que  $\mathcal{H}^{-1}(H) \subset V_1$ ,  $\mathcal{H}^{-2}(H) \subset V_1$  y  $\mathcal{H}^{-3}(H) \subset V_0$ .

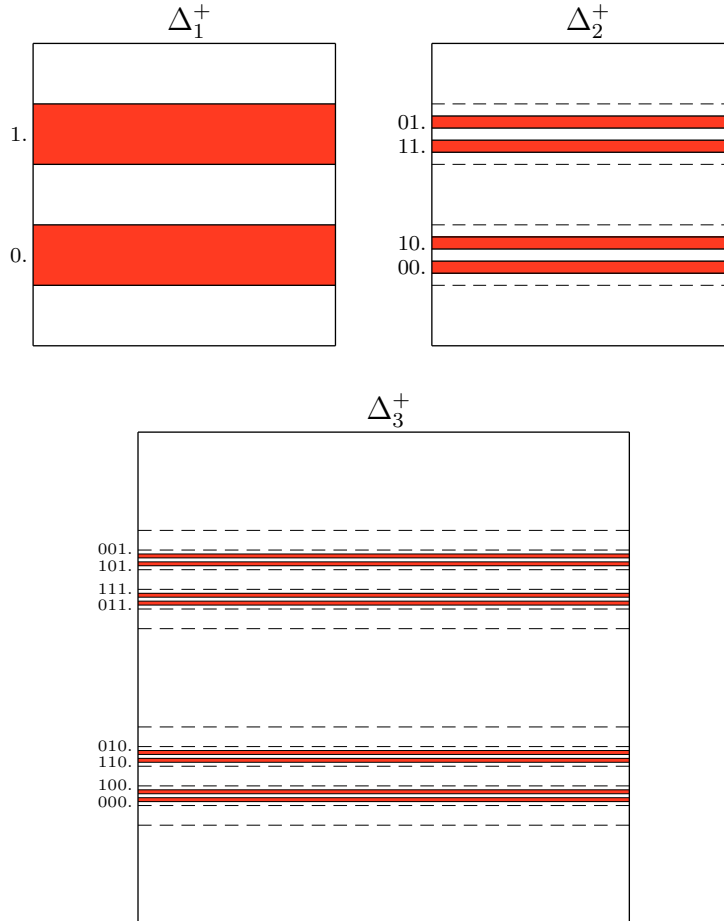


Figura 3.12: Dinámica simbólica para  $\mathcal{H}^n(C)$

De manera general se puede considerar que cada punto  $(x, y)$  en  $\Delta^+$  tendrá una representación simbólica binaria y única de la siguiente forma:

$$(x, y) = \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \bullet$$

donde  $\mathcal{H}^{-i}(x, y) \in V_{s_{-i}}$  con  $i = 1, \dots, n$ .

En otras palabras, se ha construido el conjunto de puntos de  $C$  cuya órbita

pasada siempre se mantiene en  $C$ , esto es, los puntos  $(x, y)$  en  $C$  para los cuales  $\mathcal{H}^{-n}(x, y) \in C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Estudiemos finalmente a  $\Delta_n^-$ . Empecemos con  $\Delta_0^- = C \cap \mathcal{H}^{-1}(C) = V_0 \cup V_1$  donde  $V_0$  y  $V_1$  son dos franjas verticales de  $\frac{1}{5}$  de largo. Luego,

$$\Delta_0^- = \bigcup_{s_0 \in S} V_{s_0}$$

donde  $(x, y) \in V_{s_0}$  si  $\mathcal{H}^0(x, y) \in V_{s_0}$ .

Análogamente,  $\Delta_1^- = C \cap \mathcal{H}^{-1}(C) \cap \mathcal{H}^{-2}(C)$  está compuesto por cuatro franjas verticales de  $\frac{1}{25}$  de largo. De este modo,

$$\Delta_1^- = C \cap \mathcal{H}^{-1}(C \cap \mathcal{H}^{-1}(C)) = C \cap \mathcal{H}^{-1}(\Delta_0^-) = C \cap \mathcal{H}^{-1}\left(\bigcup_{s_0 \in S} V_{s_0}\right)$$

pero la preimagen de cada franja vertical está compuesta por dos franjas verticales, una en la region  $V_0$  y la otra en  $V_1$ . Luego,

$$\Delta_1^- = C \cap \mathcal{H}^{-1}\left(\bigcup_{s_0 \in S} V_{s_0}\right) = V_{s_0 0} \cup V_{s_0 1} = \bigcup_{s_0, s_1 \in S} V_{s_0 s_1}$$

donde  $(x, y) \in V_{s_0 s_1}$  si  $\mathcal{H}^0(x, y) \in V_{s_0}$  y  $\mathcal{H}^1(x, y) \in V_{s_1}$ .

Sucesivamente se llega a:

$$\Delta_n^- = C \cap \mathcal{H}^{-1}(\Delta_{n-1}^-) = \bigcup_{s_i \in S} V_{s_0 \dots s_n}$$

donde  $(x, y) \in V_{s_0 s_1 \dots s_n}$  si  $\mathcal{H}^i(x, y) \in V_{s_i}$  con  $i = 0, \dots, n$  pero aquí  $\Delta_n^-$  está compuesto por  $2^{n+1}$  franjas horizontales de  $\frac{1}{5^{n+1}}$  de largo, así se tiene que  $\Delta^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^-$  será el producto de un conjunto de Cantor  $\mathcal{C}_x$  por el intervalo cerrado  $I = [0, 1]$  esto es:

$$\Delta^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^- = \mathcal{C}_x \times I$$

Al igual que se hizo anteriormente, se puede asignar una secuencia de la forma  $S_n = \bullet s_0 s_1 \dots s_n$  de ceros y unos a cada franja vertical que se obtiene al iterar a  $\mathcal{H}^{-1}$  en  $C$  (ver Figura 3.13). Un ejemplo análogo es tomar la franja vertical  $V$  con la secuencia  $\bullet 100$  de este modo se tendrá que  $\mathcal{H}^0(V) \subset V_1$ ,  $\mathcal{H}^1(V) \subset V_0$  y  $\mathcal{H}^2(V) \subset V_0$ .

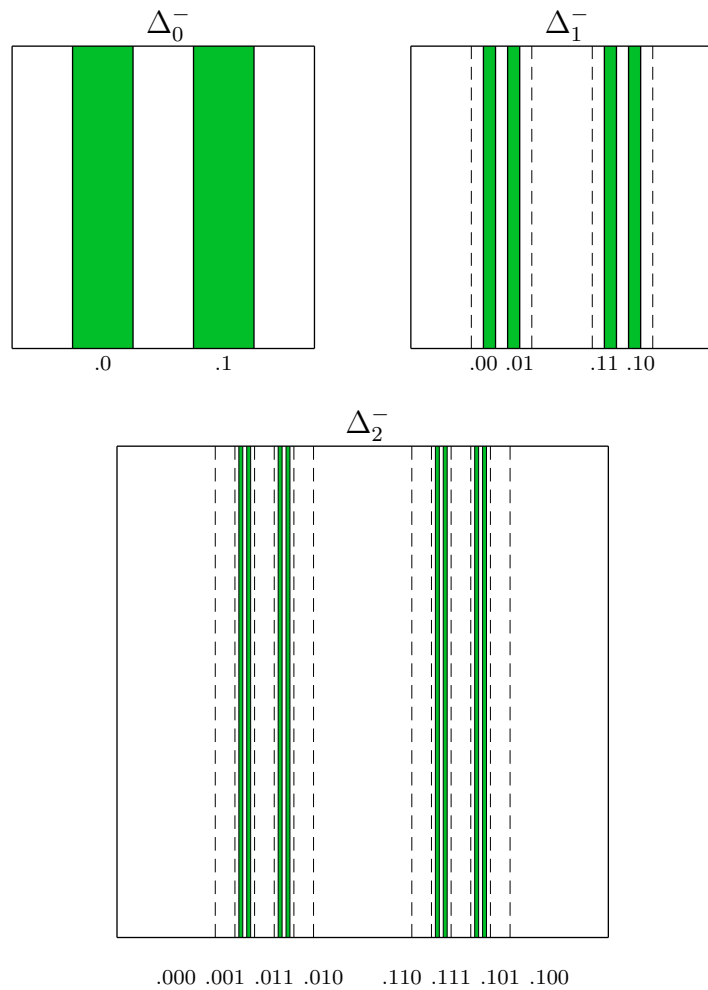


Figura 3.13: Dinámica simbólica para  $\mathcal{H}^{-n}(C)$

Análogamente se puede generalizar que todo punto  $(x, y)$  en  $\Delta^-$  puede ser expresado de la siguiente forma:

$$(x, y) = \bullet s_0 s_1 \dots s_n \dots$$

donde  $\mathcal{H}^i(x, y) \in V_{s_i}$  con  $i = 0, \dots, n$ .

Finalmente, se ha construido el conjunto de puntos de  $C$  cuya órbita futura siempre se mantiene en  $C$ , esto es, los puntos  $(x, y)$  en  $C$  para los cuales  $\mathcal{H}^n(x, y) \in C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora se puede determinar el conjunto de puntos  $\Delta_n$  cuya órbita permanece eventualmente en  $C$ , esto es:

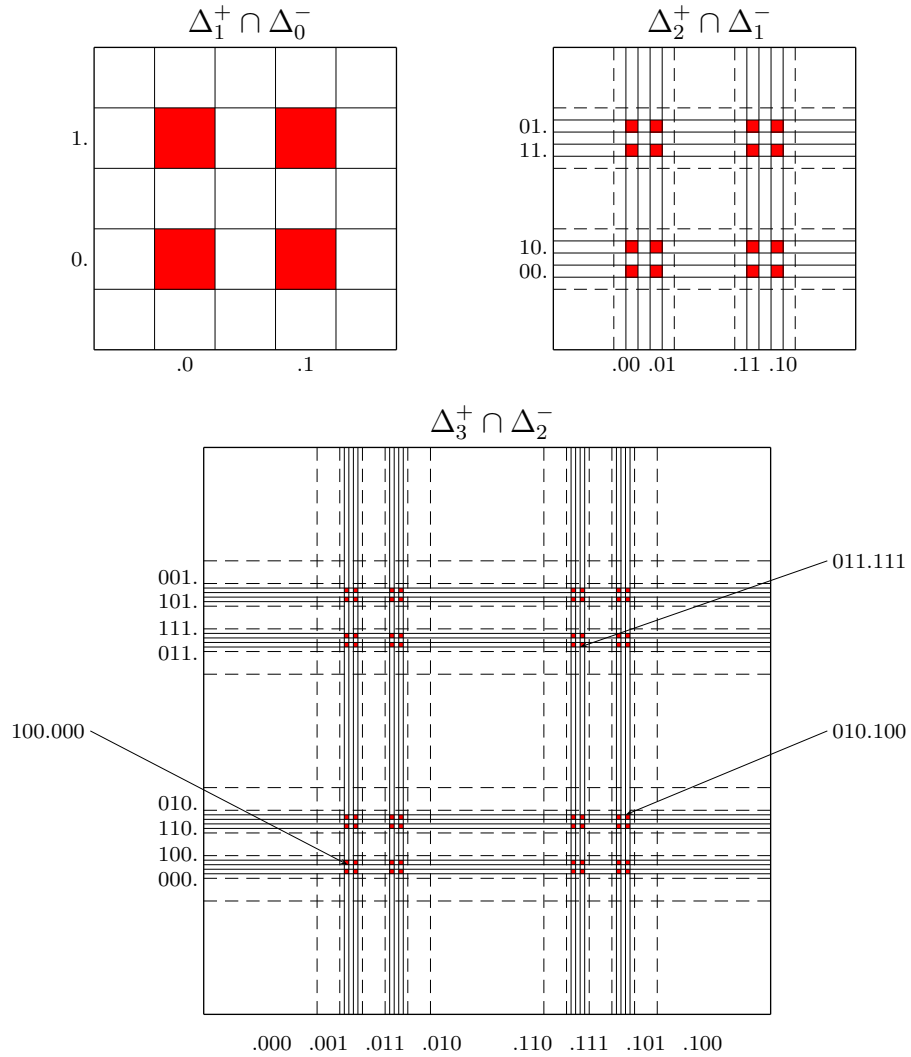


Figura 3.14: Conjuntos de puntos cuya órbita permanece en  $C$  eventualmente

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \Delta_1^+ \cap \Delta_0^- \\
 \Delta_2 &= \Delta_2^+ \cap \Delta_1^- \\
 \Delta_3 &= \Delta_3^+ \cap \Delta_2^- \\
 &\vdots \\
 \Delta_n &= \Delta_n^+ \cap \Delta_{n-1}^-
 \end{aligned}$$

Que consiste en  $4^n$  cuadrados cada uno de lado  $\frac{1}{5^n}$  cuyas áreas convergen a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Esto se puede observar en la *Figura 3.14*.

Luego un punto  $(x, y)$  en  $C$  pertenecerá a  $\Delta_n$  cuando exista una secuencia de ceros y unos

$$s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1}$$

de modo que  $(x, y) \in V_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap H_{s_{-1} \dots s_{-n}}$ . De aquí obtenemos que:

$$(x, y) \in \Delta_n \Leftrightarrow \mathcal{H}^i(x, y) \in V_{s_i}, \quad i = -n, \dots, n-1$$

De esta manera se concluye y queda construido el conjunto invariante de  $C$  bajo  $\mathcal{H}$  como:

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \Delta^+ \cap \Delta^- = (I \times \mathcal{C}_y) \cap (\mathcal{C}_x \times I) = \mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_y$$

De aquí se puede concluir que  $\Delta$  es compacto ya que es el producto de dos conjuntos compactos, es totalmente desconexo y además perfecto pues todo punto en  $\Delta$  es un punto de acumulación. Por lo tanto  $\Delta$  es un conjunto de Cantor.

Por otro lado, todo punto en  $\Delta$  poseerá una representación binaria y única de la siguiente forma:

$$\phi(x, y) = \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots$$

Con  $\phi : \Delta \rightarrow \Sigma$  donde  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ .

Por lo tanto, no es difícil ver que  $\mathcal{H}(x, y)$  se puede representar como:

$$\phi(\mathcal{H}(x, y)) = \dots s_{-n} \dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 s_2 \dots s_{n-1} \dots$$

Que consiste simplemente en un corrimiento hacia la izquierda en la representación de  $(x, y)$ . De la misma forma  $\mathcal{H}^{-1}(x, y)$  consistirá en un corrimiento hacia la derecha.

Es decir, se puede asignar también una secuencia infinita de ceros y unos para cada  $\mathcal{H}^k(x, y)$ . Esto implica que para todo punto  $(x, y)$  en  $\Delta$  se tendrá que  $\mathcal{H}^k(x, y) \in \Delta$  para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$  y con esto último se ha probado la siguiente proposición:

**Proposición 3.3.** *Existe en  $C = I \times I$  un conjunto  $\Delta$  que es invariante bajo la acción de  $\mathcal{H}$ , es decir, para cada  $(x, y) \in \Delta$  se tiene que  $\mathcal{H}^k(x, y) \in \Delta$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

La conclusión final de esta sección es que la órbita de todo punto en  $M$  es relativamente predecible ya que se ha mostrado que permanece en el conjunto invariante  $\Delta$  o por el contrario está destinada a permanecer en la cuenca de atracción del punto fijo  $p_1$ . De esta manera hemos estudiado un poco la dinámica de la Herradura de Smale en el conjunto  $M$ .

En la siguiente sección mostraremos que  $\mathcal{H}$  en  $M$  posee una componente de impredecibilidad implícita en el conjunto invariante  $\Delta$ , es decir, el caos está presente en la herradura de Smale.

### 3.3. La Herradura de Smale es una función caótica en $\Delta$

En esta sección se mostrará que la función  $\mathcal{H}$  restringida al conjunto invariante  $\Delta$  es una función caótica. Nuevamente nos basaremos en la definición de función caótica propuesta por *R. Devaney*, es decir, se probará la densidad del conjunto de puntos periódicos y la transitividad topológica en  $\Delta$  de la forma más directa posible. Es preciso aclarar que existen otras formas diferentes para demostrar que  $\mathcal{H}|_{\Delta}$  es caótica (ver por ejemplo [11]) donde la prueba consiste en mostrar que existe un homeomorfismo que hace posible una equivalencia entre la dinámica de la herradura y la de una función caótica denominada *shift de Bernoulli* y de esta forma se llega a que  $\mathcal{H}|_{\Delta}$  y la función *shift* son topológicamente conjugadas.

Para empezar probaremos inicialmente que el  $Per(\mathcal{H}|_{\Delta})$  es un conjunto denso en  $\Delta$ , para ello, tendremos en cuenta la correspondencia simbólica que se hizo a cada elemento de  $\Delta$  en la sección anterior. De esta manera, un punto periódico  $(x, y)$  en  $\Delta$  de período  $n$  estará representado con una secuencia  $s$  de  $\Sigma$  de la siguiente forma:

$$s = \phi(x, y) = \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots$$

donde  $s_{-n+i} = s_i$  con  $i \in \mathbb{Z}$ . Esto quiere decir que a  $(x, y)$  se le puede asignar una secuencia repetitiva  $s = \overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ .

De esta manera se puede observar que  $\mathcal{H}$  posee dos puntos fijos en  $C$ :

$$\phi(p_2) = \dots 000 \cdot 000 \dots = \overline{0} \quad \text{y} \quad \phi(p_3) = \dots 111 \cdot 111 \dots = \overline{1}$$

Ahora, los puntos de período dos se pueden representar como:

$$\begin{aligned} \overline{01} &= \dots 010101 \cdot 010101 \dots \\ \overline{10} &= \dots 101010 \cdot 101010 \dots \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_{/\Delta}(\overline{01}) = \overline{10}$  y  $\mathcal{H}_{/\Delta}(\overline{10}) = \overline{01}$

Análogamente, los puntos de período tres estarán dados por:

$$\begin{aligned} \overline{001} &= \dots 001001001 \cdot 001001001 \dots \\ \overline{100} &= \dots 100100100 \cdot 100100100 \dots \\ \overline{110} &= \dots 110110110 \cdot 110110110 \dots \\ \overline{101} &= \dots 101101101 \cdot 101101101 \dots \\ \overline{011} &= \dots 011011011 \cdot 011011011 \dots \\ \overline{010} &= \dots 010010010 \cdot 010010010 \dots \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_{/\Delta}^2(\overline{010}) = \mathcal{H}_{/\Delta}(\overline{100}) = \overline{001}$  y  $\mathcal{H}_{/\Delta}^2(\overline{110}) = \mathcal{H}_{/\Delta}(\overline{101}) = \overline{011}$

Sucesivamente se seguirán obteniendo  $2^n - 2$  puntos periódicos. Es claro que no todos serán de período  $n$  pero cuando  $n$  sea primo todos lo serán. Esto significa que el conjunto de puntos periódicos de  $\mathcal{H}_{/\Delta}$  es un conjunto infinito. A continuación probaremos que además  $Per(\mathcal{H}_{/\Delta})$  es un conjunto denso en  $\Delta$ .

**Proposición 3.4.**  *$Per(\mathcal{H}_{/\Delta})$  es un conjunto denso en  $\Delta$ .*

**Demostración.** Sean  $(x, y) \in \Delta$  y  $r > 0$  tal que

$$s = \phi(x, y) = \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots$$

Tomemos un abierto  $U = \mathfrak{B}_d(s; r) \cap \Delta$  donde  $d$  es una métrica entre elementos de  $\Sigma$  y se define como:

$$d(s, s^*) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} \quad s, s^* \in \Sigma$$

Ahora, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2}$$

y de aquí se obtiene:

$$\sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{-i}} < \frac{r}{2}$$

debido a que  $\sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{-i}} = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2}$ . Así, podemos construir un punto periódico de la siguiente manera:

$$s^* = \phi(x^*, y^*) = \dots s_{n-2}^* s_{n-1}^* s_{-n}^* \dots s_{-2}^* s_{-1}^* \cdot s_0^* s_1^* \dots s_{n-1}^* s_{-n}^* s_{-n+1}^* \dots$$

Esto es,

$$s^* = \overline{s_{-n}^* \dots s_{-2}^* s_{-1}^* s_0^* s_1^* \dots s_{n-1}^*}$$

donde  $s_i^* = s_i$  para  $i = \{-m, -m+1, \dots, m-2, m-1\}$  de modo que:

$$\begin{aligned} d(s, s^*) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} = \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} + \sum_{-m}^{m-1} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} + \sum_m^{\infty} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} + \sum_m^{\infty} \frac{|s_i - s_i^*|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{-i}} + \sum_m^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

Luego,  $s^*$  es un punto periódico de período  $2m$  contenido en  $\mathfrak{B}_d(s; r)$  en consecuencia  $U \cap \text{Per}(\mathcal{H}_{/\Delta}) \neq \emptyset$  ■

Para concluir, se probará que  $\mathcal{H}_{/\Delta}$  es topológicamente transitiva en  $\Delta$  y con esto se habrá demostrado que  $\mathcal{H}_{/\Delta}$  es una función caótica (según *R. Devaney*), en otras palabras, el conjunto invariante  $\Delta$  será, además, el conjunto caótico de la herradura de Smale.

**Proposición 3.5.**  $\mathcal{H}_{/\Delta}$  es topológicamente transitiva en  $\Delta$ .

**Demostración.** Sean  $(x, y), (x^*, y^*) \in \Delta$  tal que

$$\begin{aligned} s &= \phi(x, y) = \dots s_{-m} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{m-1} \dots \\ s^* &= \phi(x^*, y^*) = \dots s_{-k}^* \dots s_{-2}^* s_{-1}^* \cdot s_0^* s_1^* \dots s_{k-1}^* \dots \end{aligned}$$

donde  $s, s^* \in \Sigma$ .

Tomemos abiertos arbitrarios  $U, V$  de  $\Delta$  tales que  $U = \mathfrak{B}_d(s; r) \cap \Delta$  y  $V = \mathfrak{B}_d(s^*; r^*) \cap \Delta$  con  $r > 0$  y  $r^* > 0$ .

Ahora, existen  $m, k \in \mathbb{N}$  tales que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r^*}{2}$$

Por otro lado, sea  $(u, v)$  un elemento de  $\Delta$  con una representación  $z$  de  $\Sigma$  de la siguiente forma:

$$z = \phi(u, v) = \dots z_{-n} \dots z_{-2} z_{-1} \cdot z_0 z_1 \dots z_{n-1} \dots$$

donde  $z_i = s_i$  para  $i = \{-m, \dots, m-1\}$  y  $z_i = s_{i-m-k}^*$  para  $i = \{m, \dots, m+2k-1\}$  esto implica que:

$$\begin{aligned} d(s, z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} = \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_{-m}^{m-1} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_m^{\infty} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_m^{\infty} \frac{|s_i - z_i|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{-i}} + \sum_m^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

y de aquí  $z \in \mathfrak{B}_d(s; r)$  luego  $z \in U$ .

De la misma manera se tiene que:

$$\begin{aligned}
d(s^*, \mathcal{H}_{/\Delta}^{m+k}(z)) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} = \sum_{-\infty}^{-k-1} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_{-k}^{k-1} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_k^{\infty} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} \\
&= \sum_{-\infty}^{-k-1} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_k^{\infty} \frac{|s_i^* - z_i|}{2^{|i|}} \\
&\leq \sum_{-\infty}^{-k-1} \frac{1}{2^{-i}} + \sum_k^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \frac{r^*}{2} + \frac{r^*}{2} = r^*
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{H}_{/\Delta}^{m+k}(z) \in \mathfrak{B}_d(s^*; r^*)$  luego  $\mathcal{H}_{/\Delta}^{m+k}(z) \in V$ . Así, existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = m + k$  tal que

$$\mathcal{H}_{/\Delta}^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

En consecuencia,  $\mathcal{H} : \Delta \rightarrow \Delta$  es topológicamente transitiva en  $\Delta$ . ■

### 3.4. El conjunto atractor de la herradura de Smale

Como se había mencionado con anterioridad, en esta sección se dará a conocer un subconjunto  $\Lambda$  de  $M$  el cual posee la propiedad de ser un *conjunto atractor* bajo la acción de  $\mathcal{H}$ . Además, mostraremos que éste conjunto, a parte de ser también un conjunto invariante, es en particular, un *continuo*, es decir, es un conjunto compacto y conexo, a diferencia de  $\Delta$  que es compacto pero totalmente desconexo.

En primer lugar, observemos qué es  $\Lambda$ . Recordemos que  $\mathcal{H}(M) \subset M$  de aquí se puede obtener que  $\mathcal{H}^2(M) \subset \mathcal{H}(M) \subset M$  (ver Figura 3.15). Así, sucesivamente se obtendrá una sucesión encajada de conjuntos de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^{n+1}(M) \subset \mathcal{H}^n(M), \quad n \in \mathbb{N}$$

Observemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

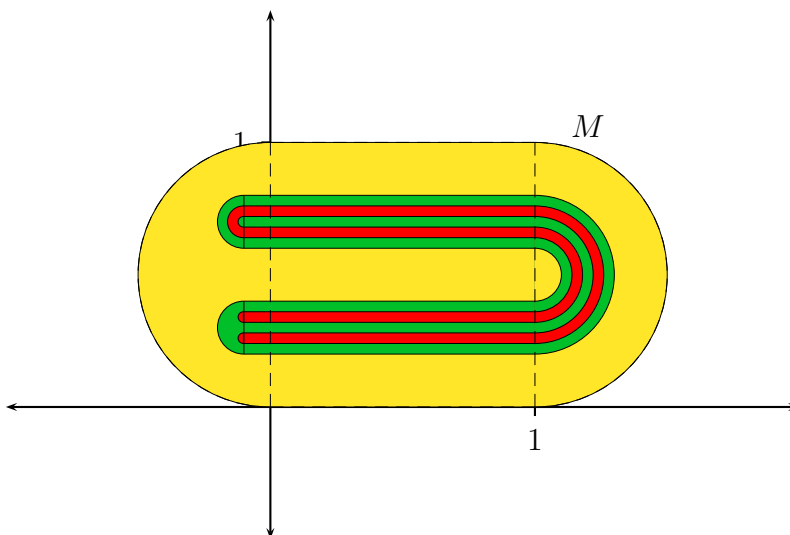


Figura 3.15:  $\mathcal{H}^2(M) \subset \mathcal{H}(M) \subset M$

$$\mathcal{H}^n(M) = \bigcap_{i=0}^n \mathcal{H}^i(M)$$

Además,  $\mathcal{H}^n(M)$  es un conjunto compacto y conexo. Este resultado se debe al hecho de que  $M$  sea compacto y conexo pues los *Teoremas 1.4 y 1.5* nos garantizan que la imagen de un compacto es un conjunto compacto y la imagen de un conexo es un conjunto conexo (bajo aplicaciones continuas).

Ahora, tomemos a  $\Lambda$  como el siguiente conjunto:

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(M)$$

**Definición 3.2.** *Un continuo es un espacio métrico conexo y compacto.*

A continuación se probará que  $\Lambda$  es un continuo. En primer lugar se mostrará que  $\Lambda$  es compacto.

**Proposición 3.6.**  *$\Lambda$  es un conjunto compacto.*

**Demostración.** Sea  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(M)$ , donde  $\Lambda \subset M$ . Ahora, como cada  $\mathcal{H}^i(M)$  es compacto y  $\mathcal{H}^i(M) \subset \mathbb{R}^2$  entonces cada  $\mathcal{H}^i(M)$  es un conjunto cerrado. Luego,  $\Lambda$  se expresa como la intersección de conjuntos cerrados, esto implica que  $\Lambda$  es cerrado y por el *Teorema 1.3* se llega a que  $\Lambda$  es compacto. ■

Para demostrar la conexidad de  $\Lambda$  se utilizará el siguiente lema:

**Lema 3.1.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto tal que  $\Lambda \subset U$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se tiene que  $\mathcal{H}^n(M) \subset U$ .*

**Demostración.** [5] Supongamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\mathcal{H}^n(M) \not\subset U$  esto significa que  $\mathcal{H}^n(M) \cap (M - U) \neq \emptyset$ , es decir, existe una sucesión creciente  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  para los cuales  $\mathcal{H}^{n_i}(M) \cap (M - U) \neq \emptyset$ , por lo tanto también existe una sucesión de elementos  $\{(x_{n_i}, y_{n_i})\}$  que pertenecen a cada una de estas intersecciones respectivamente. Por otro lado como  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  entonces  $M - U$  es cerrado, además, es acotado. Luego,  $M - U$  es compacto. Por la compacidad de  $M - U$ , toda sucesión es convergente y en consecuencia existe un  $(x_0, y_0)$  en  $M - U$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} (x_{n_i}, y_{n_i}) = (x_0, y_0)$ . Así, como  $\Lambda \subset U$  se tiene que  $(x_0, y_0) \notin \Lambda$ .

Ahora, sea  $k \in \mathbb{N}$  y tomemos un  $n_k \geq k$ , como  $\mathcal{H}^{n+1}(M) \subset \mathcal{H}^n(M)$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene que  $(x_{n_i}, y_{n_i}) \in \mathcal{H}^k(M)$  para todo  $i \geq k$ . Esto implica que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}^k(M)$  luego  $(x_0, y_0) \in \Lambda$ . Así, se ha llegado a una contradicción. ■

**Proposición 3.7.**  *$\Lambda$  es un conjunto conexo.*

**Demostración.** [5] Supongamos que  $\Lambda$  es desconexo luego existe una separación  $U, V$  de  $\Lambda$  tales que  $\Lambda = U \cup V$ . Ahora, como  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos entonces  $U \cup V$  es también un conjunto abierto por lo tanto luego por el *Lema 3.1* se tiene que existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $\mathcal{H}^n(M) \subset (U \cup V)$  pero  $\mathcal{H}^n(M)$  es conexo luego por el *Lema 1.3*  $\mathcal{H}^n(M) \subset U$  ó  $\mathcal{H}^n(M) \subset V$  esto implica que  $\Lambda \subset U$  ó  $\Lambda \subset V$ . Así, se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto  $\Lambda$  es conexo. ■

Una observación importante es que la prueba que se realizó es una prueba en particular del siguiente teorema:

**Teorema 3.1.** *Sea  $M$  un espacio métrico. Si  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de continuos de  $M$  donde  $X_{n+1} \subset X_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  es un continuo.*

En nuestro caso se tenía que cada  $\mathcal{H}^i(M)$  era un continuo, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , pero como se sabe, la intersección anidada de espacios conexos no siempre es un conjunto conexo. El teorema es muy útil en la teoría de continuos pues agrega la hipótesis de compacidad y así se garantiza tal conexidad. De esta manera permite definir una clase muy importante de continuos, tal es el caso del conjunto  $\Lambda$  de la herradura de Smale, *La curva universal de Sierpinski*, *La curva universal de Menger*, entre otros. Una demostración general de éste teorema puede encontrarse en [1] y en [9].

Hasta ahora, se ha mostrado que el conjunto  $\Lambda$  es un continuo. En adelante, mostraremos que además es el conjunto atractor de la herradura de Smale.

**Definición 3.3.** *Sean  $(M, d)$  un espacio métrico y  $f : M \rightarrow M$  una función continua. Un subconjunto cerrado  $A$  de  $M$ , se dice que es un conjunto atractor para  $f$  si satisface las siguientes condiciones:*

- i)  $f(A) = A$  (Es invariante)*
- ii) Si existe un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $A \subset U$  y para todo  $x \in U$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*(f^n(x), A) = 0$ .*

*Donde  $d^*$  es la distancia de un elemento  $x$  de  $M$  al conjunto  $A$  y está dada por:  $d^*(x, A) = \min\{d(x, y) \mid y \in A\}$*

La anterior definición se puede encontrar en [7] y es preciso aclarar que ésta, nos está diciendo que las órbitas de todos los puntos de un conjunto abierto que contiene al atractor tienden a éste mismo pero no necesariamente tienen que ser convergentes. La convergencia se da en la distancia entre cada elemento de la órbita de un punto y el conjunto atractor.

**Proposición 3.8.**  $\Lambda$  es el conjunto atractor de la herradura de Smale.

**Demostración.** i) Mostraremos que  $\mathcal{H}(\Lambda) \subset \Lambda$  y  $\Lambda \subset \mathcal{H}(\Lambda)$  para probar que  $\mathcal{H}(\Lambda) = \Lambda$ . En primer lugar, observemos que

$$\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n(M)\right) = \mathcal{H}\left(M \cap \mathcal{H}(M) \cap \mathcal{H}^2(M) \cap \dots\right)$$

como  $\mathcal{H}$  es una función uno a uno entonces

$$\mathcal{H}\left(M \cap \mathcal{H}(M) \cap \dots\right) \subset \left(\mathcal{H}(M) \cap \mathcal{H}^2(M) \cap \dots\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(M) = \Lambda$$

y se tiene que  $\mathcal{H}(\Lambda) \subset \Lambda$ .

Ahora, sea  $(x, y) \in \Lambda$ . Como  $(x, y) \in \Lambda$  entonces  $(x, y) \in \mathcal{H}(M)$ , por lo tanto existe  $(u, v) \in M$  tal que  $\mathcal{H}(u, v) = (x, y)$ . Por la misma hipótesis, se tiene que  $(x, y) \in \mathcal{H}^{n+1}(M) = \mathcal{H}(\mathcal{H}^n(M))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y esto significa que  $\mathcal{H}(u, v) \in \mathcal{H}(\mathcal{H}^n(M))$  pero  $\mathcal{H}$  es uno a uno, en consecuencia  $(u, v) \in \mathcal{H}^n(M)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $(u, v) \in \Lambda$  y de aquí se llega a que  $\mathcal{H}(u, v) \in \mathcal{H}(\Lambda)$ . Luego,  $(x, y) \in \mathcal{H}(\Lambda)$  y con esto  $\Lambda \subset \mathcal{H}(\Lambda)$ .

ii) Sea  $\epsilon > 0$ . Ahora, construyamos un  $U$ ,  $U \subset M$  de la siguiente forma:

$$U = \bigcup \mathfrak{B}_d((u, v); \epsilon), \quad (u, v) \in \Lambda$$

donde  $\mathfrak{B}_d((u, v); \epsilon)$  es la bola de radio  $\epsilon$  con centro en  $(u, v)$  y  $d$  es la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ . Claramente  $U$  es un conjunto abierto ya que es una unión de bolas. Sea  $(x, y) \in M$ . Por el *Lema 3.1* existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{H}^n(M) \subset U$  para todo  $n \geq N$ . Esto implica que para cada  $n \geq N$  se tiene que  $\mathcal{H}^n(x, y) \in U$  y de aquí se llega a que  $\mathcal{H}^n(x, y) \in \mathfrak{B}_d((u_0, v_0); \epsilon)$  para algún  $(u_0, v_0) \in \Lambda$ , en consecuencia, la distancia de  $\mathcal{H}^n(x, y)$  al elemento  $(u_0, v_0)$  es más pequeña que  $\epsilon$ , por esta razón se puede tomar como la mínima distancia entre  $\mathcal{H}^n(x, y)$  y cada de uno de los elementos de  $\Lambda$ . Luego,

$$d^*(\mathcal{H}^n(x, y), \Lambda) < \epsilon, \quad n \geq N$$

y con esto  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*(\mathcal{H}^n(x, y), \Lambda) = 0$ . ■

Finalmente, se ha cumplido con uno de los objetivos propuestos; se ha probado que el continuo  $\Lambda$  es el conjunto atractor de la herradura de Smale y de esta manera se concluye.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] WILLARD, Stephen. *General Topology*. Adisson-Wesley. 1970.
- [2] APOSTOL, Tom M. *Mathematical Analysis*. second ed. Adisson-Wesley. 1977.
- [3] MÉNDEZ, Héctor. *Iteración de Funciones (Notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos)*. Facultad de Ciencias UNAM. Serie Textos. Vínculos Matemáticos Número 4. 2000.
- [4] MÉNDEZ, Héctor. *Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos (versión preliminar)*. Facultad de Ciencias UNAM. (Sin Fecha de Publicación).
- [5] MÉNDEZ, Héctor. *El Atractor de la Herradura de Smale es un Continuo Indescomponible (versión preliminar)*. Facultad de Ciencias UNAM. 2002.
- [6] MÉNDEZ, Héctor. *Caos*. Ph.D. tesis. Facultad de Ciencias, UNAM. 1995.
- [7] TUFILLARO, Nicholas and ABBOTT, Tyler and REILLY, Jeremiah. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley Publishing. 1992.
- [8] KOON, Wang Sang. *Smale Horseshoe and Conley-Moser Conditions*. CDS140B Lecturer. 2005.

- [9] MACÍAS, Sergio. *Introducción a la Teoría de los Continuos*. Instituto de Matemáticas. UNAM. (Reprint).
- [10] MACHO, Marta. *Topología General*. Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea. 2002.
- [11] SAMBARINO, Martín. *Tópicos de Sistemas Dinámicos*. Curso EMALCA-Costa Rica. 2005
- [12] PERIS, Alfredo. *Transitivity, dense orbit and discontinuous functions*. Communicated by Fr. Bastin. 1999.
- [13] NAGAR, Anima and KANNAN V.. *Topological Transitivity for Discrete Dynamical Systems*. 1991. (Reprint).
- [14] SMALE, Stephen. *Finding a horseshoe on the beaches of Rio*. Mathematical Intelligencer. Volume 1. 1998.
- [15] DEVANEY, Robert. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition. Addison Wesley. 1989.
- [16] BRANSON, Mark. *The Smale Horseshoe as a Fractal Structure in Dynamical Systems*. (Reprint).
- [17] DELSHAMS, Amadeu. *Poincaré, Creador de los Métodos Todavía Modernos en las Ecuaciones Diferenciales y en la Mecánica Celeste*. Departament de Matemàtica Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya. (Reprint).
- [18] ALLIGOOD, Kathleen and SAUER, Tim and YORKE, James. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag. 1997.