

Análisis numérico de la interacción del sistema agujero negro-campo escalar en un  
espacio-tiempo dinámico

Jennyfer Camila Acevedo Muñoz

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

### **Agradecimientos**

En primer lugar, agradezco a mis padres que siempre me han brindado su apoyo incondicional para cumplir mis objetivos y metas. Gracias a su apoyo económico y sus consejos hoy puedo culminar esta etapa de mi vida con éxito. Agradezco profundamente a todos mis docentes, quienes han sido parte de todo mi proceso de aprendizaje, y son aquellas personas que han contribuido de alguna u otra manera en mi conocimiento adquirido. También es importante resaltar el apoyo de mis compañeros de carrera, gracias por las historias compartidas, las noches de traspaso y la amistad que se ha forjado en los últimos años.

Un reconocimiento y agradecimiento especial a mi director Fabio Duván Lora Clavijo, por su dedicación y paciencia. Sin sus consejos, correcciones y apoyo no hubiese podido lograr la terminación de mi carrera. Gracias por su guía y por transmitirme todos sus conocimientos. Por último, agradecer a la Universidad Industrial de Santander, por todas las oportunidades que me ha brindado, por permitirme formarme como profesional y como persona. Gracias a todas las personas que directamente o indirectamente han sido parte de este proceso.

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>13</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>21</b>
<b>2. Foliación del espacio-tiempo</b>	<b>22</b>
2.1. Separación del espacio-tiempo en el formalismo 3+1	22
2.1.1. Vector normal	23
2.1.2. Función lapso	24
2.1.3. Vector de corrimiento	26
2.1.4. Métrica inducida	27
2.2. Curvatura intrínseca y extrínseca	28
2.3. Descomposición del tensor de Riemann	31
2.3.1. Ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi	31
2.3.2. Proyección no trivial del tensor de Riemann	32
<b>3. Ecuaciones de Einstein en la formulación 3+1</b>	<b>33</b>
3.1. Evolución de la métrica	33
3.2. Descomposición 3+1 del tensor de energía-impulso	34
3.3. Ecuaciones de Restricción	36

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL SISTEMA AGUJERO NEGRO-CAMPO ESCALAR	4
3.4. Evolución de la curvatura extrínseca	38
3.5. Condiciones de coordenadas: Funciones gauge	38
<b>4. Evolución del campo escalar</b>	<b>39</b>
4.1. Ecuación de Klein-Gordon en Relatividad General	40
4.2. Ecuación de Klein-Gordon en el formalismo 3+1	41
<b>5. Dinámica del sistema agujero negro-campo escalar en simetría esférica</b>	<b>43</b>
5.1. Sistema de ecuaciones en simetría esférica	43
5.2. Implementación del dato inicial	45
5.3. Métodos numéricos	46
5.3.1. Método de líneas	46
5.3.1.1. Integrador Dormand Prince	47
5.3.1.2. Diferencias finitas	49
5.4. Condiciones de frontera	52
5.5. Diagnóstico	55
<b>6. Resultados</b>	<b>57</b>
6.1. Análisis del proceso de acreción del campo escalar	57
6.2. <i>Shadow</i> y trazado de rayos en un espacio-tiempo dinámico	66
6.2.1. Ecuaciones de movimiento	67
6.2.2. Transformación de coordenadas	70

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL SISTEMA AGUJERO NEGRO-CAMPO ESCALAR	5
6.2.3. Parámetros de impacto	74
6.2.4. Lente gravitacional	77
<b>7. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>87</b>
<b>Apéndices</b>	<b>96</b>

### Lista de Figuras

Figura 1.	Shadow del agujero negro en el interior de la galaxia M87.	14
Figura 2.	Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales espaciales.	23
Figura 3.	Extensión de la Figura (2). Ilustración de la función lapso y el vector de corrimiento.	25
Figura 4.	Ilustración de la definición del vector tiempo tangente a la línea de coordenadas espaciales constante.	27
Figura 5.	Definición de curvatura extrínseca.	29
Figura 6.	Implementación del esquema downwind y upwind según el vector de corrimiento.	55
Figura 7.	Gráfica correspondiente a instantáneas del campo escalar con $\sigma = 5$ , $k = 2$ y $A = 0.8$ .	58
Figura 8.	Gráfica correspondiente a instantáneas de la masa de Misner-Sharp con $\sigma = 5$ , $k = 2$ y $A = 0.8$ .	58
Figura 9.	Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para $k = 0$ .	60
Figura 10.	Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para $k = 1$ .	60

- Figura 11. Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para  $k = 2$ . 61
- Figura 12. Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM para  $\sigma = 10$  y  $k = 0$ . 62
- Figura 13. Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 1.5$  y  $k = 0, 1, 2$ . 63
- Figura 14. Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 2$  y  $k = 0, 1, 2$ . 64
- Figura 15. Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 5$  y  $k = 0, 1, 2$ . 65
- Figura 16. Test de convergencia para la norma de la restricción hamiltoniana, realizado para el caso de  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . 66
- Figura 17. Ilustración de los parámetros de impacto. 74
- Figura 18. Curvatura en la trayectoria de los fotones debido al agujero negro. 78
- Figura 19. Dato inicial del lente gravitacional producido por un agujero negro de Schwarzschild vs el lente gravitacional producido por el agujero negro con campo escalar cuando  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . 79
- Figura 20. Lente gravitacional producido por el sistema agujero negro-campo escalar. 81
- Figura 21. Snapshots de la evolución del lente gravitacional en el proceso de absorción del campo escalar. 84

**Lista de Tablas**

Tabla 1.	Cuadro Butcher para el método Dormand Prince.	48
Tabla 2.	Coeficientes de la aproximación de la derivada de primer orden.	51
Tabla 3.	Coeficientes de la aproximación de la derivada de segundo orden.	52

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Foliación del espacio-tiempo	96
Apéndice B. Ecuaciones de Einstein en la formulación 3+1	101
Apéndice C. Ecuación de Klein-Gordon y términos de fuente	108

## Glosario

**Agujero negro** Objeto compacto con campo gravitacional muy intenso, tanto que ni la luz puede escapar.

**Campo escalar** Un campo escalar es un campo que toma un valor específico en cada punto del espacio-tiempo. Estos campos son independientes de las coordenadas.

**Acreción** Acreción es el proceso de acumulación de partículas en un objeto masivo debido a una atracción gravitacional de materia, típicamente materia gaseosa, en un disco de acreción.

**Sombra** La luz que pasa cerca del agujero negro es desviada por el campo gravitatorio, produciendo una sombra de agujero negro, una región oscura que a menudo está rodeada por un anillo de luz brillante, cuyo tamaño y forma provienen directamente de la masa y el momento angular del agujero negro.

## Resumen

**Título:** Análisis numérico de la interacción del sistema agujero negro-campo escalar en un espacio-tiempo dinámico. \*

**Autor:** Jennyfer Camila Acevedo Muñoz \*\*

**Palabras Clave:** Agujero negro, campo escalar, acreción, sombra.

**Descripción:** Estudiar la interacción entre agujeros negros y materia oscura desempeña un papel primordial en eventos como la formación de agujeros negros supermasivos. Desde el punto de vista de la relatividad general, los agujeros negros no poseen restricción sobre su masa, no obstante, existe fuerte evidencia de tres tipos de agujeros negros: Agujeros negros estelares, intermedios y supermasivos. En particular, estos últimos son un asunto interesante, ya que explicar sus masas aún es un problema abierto en astrofísica. Así, una pregunta clave es determinar qué papel cumple la materia oscura en los escenarios de formación y crecimiento de estos objetos. Por esta razón, en este trabajo de investigación se desarrolla un modelo auto consistente, en el cual la materia oscura se describe a partir de un campo escalar clásico, donde el perfil del campo escalar corresponde a una onda esférica modulada por un perfil gaussiano. Este campo se estudia a partir de parámetros como el número de onda  $k$  y el ancho del paquete de onda  $\sigma$ . Particularmente, se diseña un código en simetría esférica que permite analizar la dinámica del sistema agujero negro-campo escalar haciendo uso del formalismo 3+1 de la relatividad general. Para estudiar la acreción del campo escalar se ubicó el horizonte de eventos y horizonte aparente del agujero negro. Además, se midió el shadow del agujero negro y el fenómeno de lente gravitacional producido por las diferentes configuraciones del campo escalar.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física.

## Abstract

**Title:** Numerical analysis of the interaction of the black hole-scalar field system in a dynamic space-time. \*

**Author:** Jennyfer Camila Acevedo Muñoz \*\*

**Keywords:** Black hole, scalar field, accretion, shadow.

**Description:** Studying the interaction between black holes and dark matter plays a major role in events such as the formation of supermassive black holes. From the point of view of general relativity, black holes have no restriction on their mass, however, there is strong evidence of three types of black holes: stellar, intermediate and supermassive black holes. In particular, the latter are an interesting matter, as explaining their masses is still an open problem in astrophysics. Thus, a key question is to determine what role dark matter plays in the formation and growth scenarios of these objects. For this reason, this research work develops a self-consistent model, in which dark matter is described from a classical scalar field, where the scalar field profile corresponds to a spherical wave modulated by a gaussian profile. This field is studied from parameters such as the wave number  $k$  and the wave packet width  $\sigma$ . In particular, a code was designed in spherical symmetry to analyze the dynamics of the black hole-scalar field system using the 3+1 formalism of general relativity. To study the accretion of the scalar field it was necessary to locate the event horizon and apparent horizon of the black hole. In addition, the shadow of the black hole and the gravitational lensing phenomenon produced by different configurations of the scalar field were measured.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física.

## Introducción

La historia del universo ha conducido a la humanidad a plantearse interrogantes fundamentales acerca de su propia naturaleza. La necesidad de dar respuesta a estos interrogantes es la razón por la cual diferentes científicos se han encargado de formular teorías que permitan explicar los fenómenos físicos. Es así como Albert Einstein formula su teoría de la relatividad general en 1915 (Einstein, 1915). Dicha teoría ha permitido realizar una descripción adecuada de muchos objetos compactos presentes en la naturaleza, como lo son las estrellas de neutrones, las enanas blancas y agujeros negros. Estos últimos se consideran el tema de investigación más audaz del tiempo moderno (Luminet, 1991). Desde un punto de vista astrofísico, los agujeros negros son objetos compactos con un campo gravitacional tan intenso que ni la luz puede escapar (Thorne et al., 2000) (Romero and Vila, 2013). Así mismo, en la relatividad general dicho objeto se concibe como una región espacio-temporal que se encuentra causalmente desconectada del resto del espacio-tiempo, es decir, ningún evento en esta región puede influir en los eventos fuera de ella. De allí que el límite entre estas dos regiones se conozca como horizonte de eventos (Faraoni, 2015) (Curiel, 2019). A pesar de los distintos escenarios en los cuales se puede analizar el comportamiento de un agujero negro hoy en día, sus propiedades son tan extrañas que durante muchos años se dificultó de gran manera su credibilidad (Thorne, 1991).

Hoy en día existen un sin número de contribuciones teóricas que han permitido entender el comportamiento de estos objetos, entre estos se encuentran los famosos teoremas de singularidad

de Penrose (Penrose, 1965), Hawking (Hawking and Penrose, 1970), los teoremas de no-pelo de Israel (Israel, 1967), Carter (Carter, 1968) y otros resultados que han aportado significativamente a las investigaciones actuales. Recientemente, a partir de la recolección y procesamiento de datos en tiempo real, en el año 2019 la colaboración Event Horizon Telescope (EHT) detectó la presencia de un agujero negro supermasivo en la galaxia M87 (Ver figura (1)). Dicha galaxia posee forma elíptica, y es una de las más masivas en el universo local, en su núcleo se encuentra un agujero negro supermasivo con una masa estimada de  $(6.6 \pm 0.4) \times 10^9 M_{\odot}$  (Collaboration et al., 2019) (Akiyama et al., 2019).

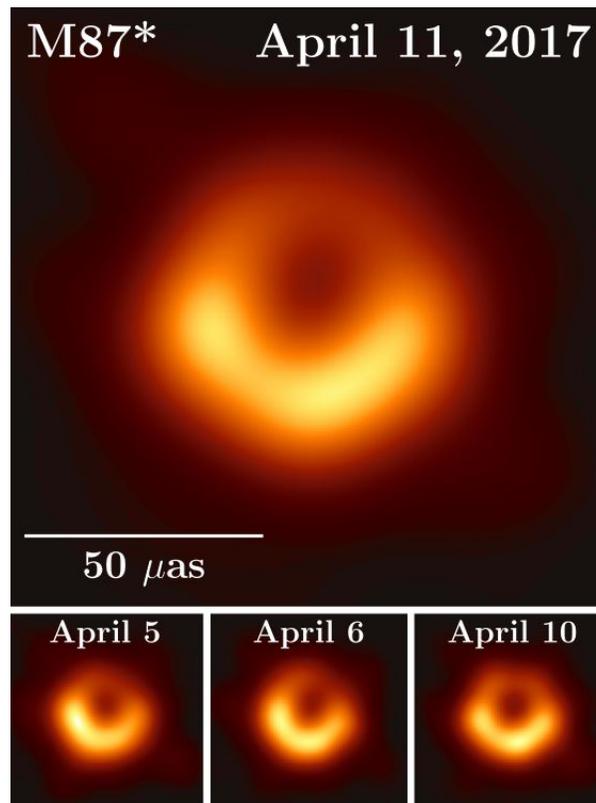


Figura 1. Shadow del agujero negro en el interior de la galaxia M87. Tomada de *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole* (Akiyama et al., 2019).

Estudiar de donde provienen las masas de los agujeros negros supermasivos permite plantear escenarios astrofísicos para su nacimiento y evolución. Se ha predicho que la mayoría de masa acreta por los agujeros negros es materia bariónica, sin embargo, se previeron escenarios en los cuales la materia oscura podría tener una contribución importante en el proceso de acreción (Balberg and Shapiro, 2002) (Romeel et al., 2001) (Peirani and de Freitas Pacheco, 2008). Descubrir la naturaleza de la materia oscura es posiblemente uno de los mayores desafíos de la física moderna. Este problema fue ampliamente aceptado y reconocido en 1970 debido a la necesidad de explicar diversas observaciones físicas (De Swart et al., 2017) (Bertone and Hooper, 2018). Actualmente, uno de los modelos de materia oscura más aceptados en la comunidad científica es el modelo de materia oscura fría (*CDM*), el cual explica con éxito y en gran detalle algunos fenómenos, como la radiación de fondo cósmico de microondas (Magana and Matos, 2012). Pese a esto, en los últimos años se han observado ciertos conflictos a escalas galácticas, como por ejemplo el conflicto en el perfil de densidades en los halos galácticos. Este problema se conoce como el problema “*core-cusp*”, y se refiere a una discrepancia entre los perfiles de densidad de materia oscura inferidos de galaxias de baja masa y los perfiles de densidad predichos por simulaciones cosmológicas (Moore, 1994). Casi todas las simulaciones forman halos de materia oscura que tienen distribuciones de materia tipo cúspide, con una densidad que aumenta abruptamente en radios pequeños, mientras que las curvas de rotación de la mayoría de las galaxias enanas observadas sugieren perfiles de densidad planos (Oh et al., 2015). Para dar solución a este problema, se ha propuesto un escenario alternativo conocido como “*Modelo de Materia Oscura Escalar*” (*SFDM*). Su idea principal es que las propiedades de la materia oscura pueden ser representadas por un campo escalar relati-

vista con una masa aproximada de  $10^{-22}eV$ , dotado de un potencial escalar (Urena-López, 2019). Dichos campos escalares a temperaturas bajas forman condensados de Bose-Einstein, los cuales pueden explicar la creación de halos galácticos (Vázquez-González and Matos, 2008). La interacción de campos escalares y agujeros negros desempeñan un papel importante en la comprensión de los fenómenos físicos asociados con la formación de agujeros negros supermasivos e intermedios (Read and Gilmore, 2003).

Como se propone, los campos escalares pueden desempeñar el papel de materia oscura, tanto a escala galáctica (Guzmán and Matos, 2000) (Matos et al., 2000) como a escala cósmica (Sahni and Wang, 2000). La acreción de campos escalares en agujeros negros ya se ha analizado en diversos trabajos de investigación. Como un primer acercamiento, en el artículo (Urena-Lopez and Fernández, 2011) se presenta la absorción de un campo escalar sin masa por un agujero negro estático, encontrándose una tasa de absorción para el campo escalar. En dicho estudio se determina que la fracción de absorción mínima de la masa del campo escalar por el agujero negro es alrededor del 50%. Adicionalmente, en el contexto de la evolución no lineal de los campos escalares sin masa, se descubrió que los campos escalares pueden sobrevivir fuera de los agujeros negros y, eventualmente, pueden tener tiempos de vida consistentes con escalas de tiempo cosmológicas (Guzmán and Lora-Clavijo, 2012) (Cruz-Osorio et al., 2011). En el artículo (Wan and Wu, 2022) se analiza la sección transversal de dispersión y absorción del campo escalar sin masa de algunos agujeros negros regulares, los resultados computacionales indican que cuanto mayor es el parámetro del espacio-tiempo, menor es el máximo de sección transversal de absorción total. Finalmente,

en otra investigación se presentan dos escenarios: En el primer caso se considera un campo escalar mínimamente acoplado con un potencial, mientras que en el segundo caso el campo está acoplado conforme a la curvatura. Para estos dos casos se calculan las sombras proyectadas por los agujeros negros en función de su carga eléctrica y su parámetro de campo escalar. Comparando estas sombras con la sombra de M87\*, se establecen restricciones en la cantidad de campo escalar acretado (Khodadi et al., 2020).

Para realizar el análisis de la interacción entre agujeros negros y campos escalares es necesario un modelo consistente, en el cual se resuelvan de manera conjunta las ecuaciones de Einstein y la ecuación que rige el campo escalar. Este sistema posee un gran nivel de complejidad, principalmente porque las ecuaciones de campo de Einstein son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Encontrar una solución exacta de estas ecuaciones requiere poner ciertas restricciones como simetrías (Alcubierre, 2007). Debido a la complejidad de este sistema de ecuaciones, para encontrar soluciones sin requerir condiciones adicionales existe la necesidad de usar herramientas como la computación numérica. Con el fin de investigar cómo es la dinámica del sistema acoplado agujero negro-campo escalar, se hace necesario desarrollar un código en simetría esférica (como primer paso) que permite solucionar la ecuaciones de Einstein acopladas a la ecuación de Klein-Gordon. A partir de este código se analiza bajo que condiciones el campo escalar es acretado por el agujero negro, produciéndose un crecimiento del horizonte de eventos, o en contraposición, las condiciones para las cuales el campo escalar sobrevive a dicho agujero negro. Para esto se calculan la masa ADM y la masa de Misner-Sharp, esta última contiene información

acerca de los pulsos entrantes y salientes del campo escalar.

También es importante preguntarse si el campo escalar afecta la geometría del sistema. En consecuencia, es natural cuestionarse de qué manera la sombra del agujero negro se ve afectada por la fuerza gravitacional producida por el campo escalar. A pesar de que existen diferentes métodos para determinar la naturaleza del agujero negro (masa y espín), la observación de su sombra es probablemente el más interesante. Este fenómeno óptico aparece cuando hay una fuente distante brillante detrás de él, lo cual se percibe como una zona oscura bidimensional para un observador distante (Lima Junior et al., 2020). Este fenómeno es un resultado de la teoría de la relatividad general, de forma que no solo proporciona información acerca de las propiedades del agujero negro, sino que es una herramienta esencial para poner a prueba dicha teoría. Además, también se ha sugerido que la sombra del agujero negro puede usarse para determinar que tipo de materia circundante existe, sea materia oscura, polvo o radiación (Xu et al., 2018). Estudiar la sombra del agujero negro en presencia de materia oscura y energía oscura posee un interés específico, dado que el universo está dominado por materia oscura (27%) y energía oscura (68%), mientras que la contribución de la materia bariónica es menor (5%), según el Modelo Estándar de Cosmología. A continuación, se presentan algunas investigaciones orientadas en esta dirección

- *Dark matter accretion into supermassive black holes* (Peirani and de Freitas Pacheco, 2008).
- *Shadow of a black hole surrounded by dark matter* (Konoplya, 2019).
- *Black hole shadow of SGR A\* in dark matter halo* (Hou et al., 2018).

- *Shadow and Deflection Angle of Rotating Black Holes in Perfect Fluid Dark Matter with a Cosmological Constant* (Haroon et al., 2019).
- *Shadows of Kerr black holes with scalar hair* (Cunha et al., 2015).
- *Shadows and strong gravitational lensing: a brief review* (Cunha and Herdeiro, 2018).

Es evidente que el estudio del shadow de un agujero negro se ha convertido en un tema de gran interés, especialmente, se han desarrollado investigaciones en dirección a explicar la dinámica del sistema agujero negro-materia oscura. Es por esta razón que, en este trabajo se hace uso de *OSIRIS*, este código permite calcular geodésicas nulas alrededor de objetos compactos, incluyendo efectos relativistas como lente gravitacional y corrimiento al rojo. Además, a partir de la formulación de Hamilton-Jacobi y el método de trazado inverso de rayos es posible obtener el shadow del agujero negro y observar el fenómeno de lente gravitacional. Específicamente, *OSIRIS* se ha utilizado para estudiar la sombra producida por singularidades desnudas descritas por la q-métrica y la sombra producida por discos de acreción en un espacio-tiempo de Kerr (Arrieta-Villamizar et al., 2020) (Velásquez-Cadavid et al., 2022) (Velásquez-Cadavid et al., 2023). Cabe mencionar que inicialmente dicho código estaba diseñado para espacio-tiempos estáticos y axialmente simétricos, en consecuencia, en este proyecto también se presenta la formulación Hamilton-Jacobi teniendo en cuenta el cambio de la métrica en el tiempo. Como ilustración, en el capítulo de resultados se muestra la evolución del lente gravitacional para una de las configuraciones del campo escalar, además, también se mide el dato inicial de la sombra del agujero negro para los diferentes parámetros de  $k$  y  $\sigma$ .

Este trabajo se divide de la siguiente manera. En el *capítulo 1* se estudia la foliación del espacio-tiempo utilizando el formalismo 3+1, para esto es necesario conocer la noción de curvatura intrínseca y extrínseca. En el *capítulo 2* se utiliza dicho formalismo para escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales, así, el formalismo 3+1 permite separar los roles de espacio y tiempo de manera clara. En el *capítulo 3* se emplea el principio variacional para encontrar la ecuación de evolución correspondiente al campo escalar (ecuación de Klein-Gordon), además, dicha ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer orden. En el *capítulo 4* se muestra la construcción del código junto con el sistema de ecuaciones programado y la implementación del dato inicial. Finalmente, en el *capítulo 5* se presentan los resultados de las simulaciones numéricas realizadas para estudiar la absorción del campo escalar. Adicionalmente, se hace uso del código OSIRIS, el cual permite visualizar los efectos producidos sobre la sombra del agujero negro y el fenómeno del lente gravitacional, debido a la presencia del campo escalar. Es importante aclarar que para este trabajo se hace uso de unidades geometrizadas, es decir,  $G = c = 1$ , siendo estas la constante de gravitación y la velocidad de la luz, respectivamente. Además, los índices de espacio-tiempo  $(\alpha, \beta, \mu, \nu \dots)$  van de 0 a 3, donde 0 representa la coordenada temporal. Los índices latinos  $(i, j, k, l, \dots)$  se refieren a un espacio 3-dimensional y pueden tomar valores de 1 a 3. Además, se considera la signatura del espacio-tiempo mayormente positiva, esto es  $(-, +, +, +)$ .

## 1. Objetivos

### Objetivo general

Modelar la dinámica del sistema campo escalar-agujero negro a través de las ecuaciones de Einstein acopladas a la ecuación de Klein-Gordon, utilizando la formulación ADM de la relatividad numérica.

### Objetivos específicos

Reproducir las ecuaciones que determinan la evolución y la dinámica tanto del espacio-tiempo como el campo escalar en el formalismo 3+1 de la relatividad general.

Desarrollar un código numérico que resuelva las ecuaciones ADM acopladas con la ecuación de Klein-Gordon en simetría esférica.

Generar condiciones iniciales para el sistema de agujero negro acoplado al campo escalar, las cuales deben ser consistentes con las ligaduras hamiltoniana y de momentum.

Analizar los resultados del proceso de acreción de un campo escalar alrededor del agujero negro.

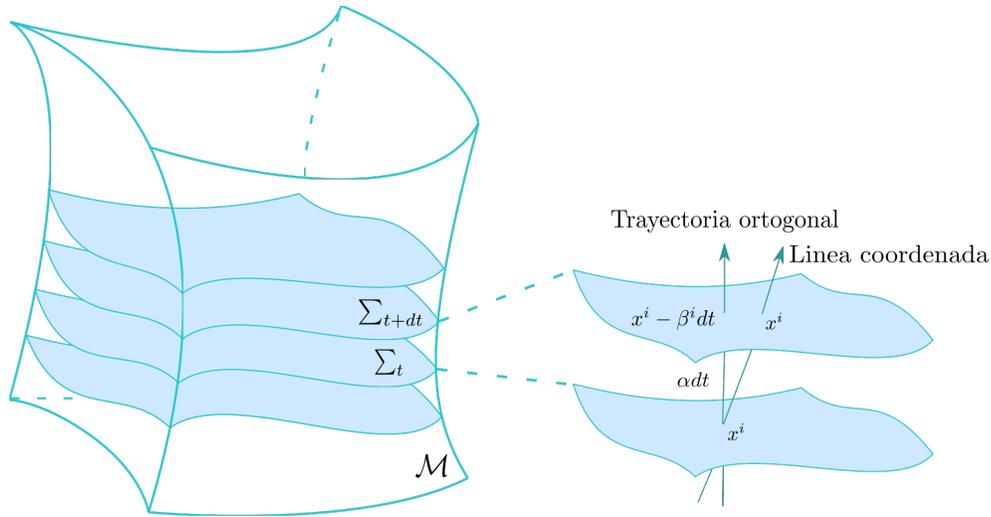
## 2. Foliación del espacio-tiempo

Las ecuaciones de Einstein modelan al espacio-tiempo como una variedad cuatridimensional, donde la curvatura de dicho espacio-tiempo está dada por el campo gravitacional. Estas ecuaciones conforman un sistema de 10 ecuaciones de segundo orden con derivadas parciales no lineales. Es por esto que, en la práctica la resolución de estas ecuaciones no se puede realizar analíticamente, siendo indispensable utilizar métodos numéricos. Otro problema es la covarianza de las ecuaciones, ya que resulta más útil describir un sistema como la evolución de un campo en el tiempo. En este capítulo se presentan los aspectos importantes del formalismo 3+1, el cual se utiliza posteriormente para escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales.

### 2.1. Separación del espacio-tiempo en el formalismo 3+1

En este procedimiento el espacio y el tiempo se descomponen de manera explícita, de forma que se eligen hipersuperficies espaciales para llenar el espacio-tiempo, donde las cantidades geométricas en cada hipersuperficie evolucionan hacia adelante en el tiempo. En este formalismo se asume que la variedad de espacio-tiempo que se quiere modelar es cuatri-dimensional y globalmente hiperbólica. Esta propiedad es primordial, ya que un espacio-tiempo globalmente hiperbólico admite una foliación, es decir, puede ser dividido en un conjunto de hipersuperficies tridimensionales tipo espacio. Dichas hipersuperficies son conocidas como superficies de Cauchy, de forma que cada curva causal sin punto final intersecta la hipersuperficie solo y sólo una vez (Geroch, 1970).

A partir de la Figura (2) se observa que, el conjunto de hipersuperficies también pueden considerarse superficies de nivel de un parámetro temporal, el cual es considerado una función de



*Figura 2.* Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales espaciales. Tomando dos hipersuperficies espaciales adyacentes, la geometría se analiza a partir de la función lapso, el vector de corrimiento y la métrica inducida.

tiempo universal. Siguiendo una foliación determinada, donde se toman dos hipersuperficies adyacentes  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$ , la geometría del espacio tiempo es analizada a partir de tres parámetros distintos: la función lapso  $\alpha$ , el vector de corrimiento  $\beta^i$  y la métrica inducida  $\gamma^{ij}$ . Es importante mencionar que, la forma en la que se folia el espacio-tiempo no es única. En consecuencia, la función lapso y el vector de corrimiento son libremente especificables, estas funciones dan información sobre el sistema de coordenadas usado (Gourgoulhon, 2012).

**2.1.1. Vector normal.** Como se mencionó,  $t$  se puede considerar como un campo escalar en  $\mathcal{M}$ , tal que cada hipersuperficie  $\Sigma$  se define como una superficie de nivel de dicho campo escalar. En este caso,  $\vec{\nabla}t$  es un vector normal tipo tiempo, el cual define la única dirección normal a la hipersuperficie. En otras palabras, cualquier vector  $v$  normal a  $\Sigma$  es colineal a  $\vec{\nabla}t$ :  $v = \lambda \vec{\nabla}t$ . En

este caso, dicho vector se re normaliza y se transforma en un vector unitario tipo tiempo

$$n = \left( -\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t \right)^{-1/2} \vec{\nabla}t, \quad (1)$$

siendo  $n^\mu n_\mu = -1$ .

Dado que  $n$  es un vector tipo tiempo, este se puede considerar como la cuadri-velocidad de algún observador. Dicho observador se conoce como observador Euleriano. De forma que, para este observador la cuadri-aceleración correspondiente es

$$a = \nabla_n n, \quad (2)$$

donde  $a$  es ortogonal a  $n$ , por lo tanto, tangente a la hipersuperficie. Como se indica en la sección de curvatura intrínseca y extrínseca, esta aceleración también puede definirse en términos de la función lapso.

**2.1.2. Función lapso.** Como se observa en el apartado anterior, el vector  $n$  es colineal con  $\vec{\nabla}t$ . En consecuencia, la ecuación (1) se reescribe como

$$n = -\alpha \vec{\nabla}t, \quad (3)$$

donde

$$\alpha = \left( -\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t \right)^{-1/2}. \quad (4)$$

A partir de la Figura (3) se puede observar de manera intuitiva el significado de la función lapso  $\alpha$ . Dicha función mide la tasa de flujo del tiempo propio  $\tau$  con respecto al tiempo coordenado  $t$ . Es decir, permite medir el tiempo propio entre dos hipersuperficies adyacentes.

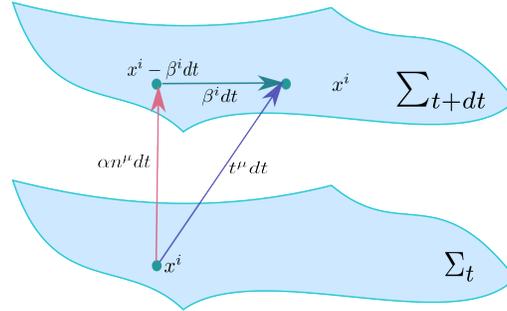


Figura 3. Extensión de la Figura (2). Ilustración de la función lapso y el vector de corrimiento. El tiempo propio medido por un observador Euleriano incrementa en  $\alpha dt$  cuando el tiempo coordenado avanza en  $dt$ . Además, un observador coordenado cuya coordenada espacial  $x^i$  se mantiene constante, se mueve sobre una línea de mundo tangente a  $t^\mu$  y que está desplazada  $\beta^i$  con respecto al observador normal.

Además de la función lapso, es necesario definir el vector de evolución normal, el cual corresponde a un vector tipo tiempo normal a la hipersuperficie, el cual satisface que

$$m = \alpha n, \quad (5)$$

y como  $n$  es un vector normal

$$m \cdot m = -\alpha^2. \quad (6)$$

Una propiedad interesante del vector de evolución normal es que al realizar un desplazamiento  $dt$   $m$  de cada punto de la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , se obtiene la superficie adyacente  $\Sigma_{t+dt}$ .

**2.1.3. Vector de corrimiento.** Teniendo en cuenta que  $n^\mu$  es la cuadri-velocidad de un observador, es fácil interpretar el rol de  $\beta^i$ . A partir de la Figura (3) se observa que, si  $\beta^i = 0$  la componente espacial de la cuadri-velocidad del observador Euleriano es cero. En otras palabras, las coordenadas espaciales de dicho observador se mantienen constantes. Por otro lado, cuando  $\beta^i \neq 0$  el observador Euleriano se mueve con respecto a las coordenadas espaciales. De forma que, el cambio en las coordenadas espaciales viene dado por

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i dt, \quad (7)$$

de allí es posible ver que

$$\beta^i = -\alpha (n \cdot \nabla x^i). \quad (8)$$

De la ecuación (7) se puede considerar a  $\beta^i$  como la velocidad relativa entre el observador Euleriano y la línea de coordenadas constante.

Por otro lado, también es posible encontrar una relación entre el vector de corrimiento y  $\partial_t$ , donde  $\partial_t$  es un vector tangente a la línea de coordenadas espaciales constante  $x^i$ , como se observa en la Figura (4). De manera general, se puede asociar el vector de evolución normal  $m$  con  $\partial_t$ , siendo

$$\partial_t =: m + \beta = \alpha n + \beta, \quad (9)$$

es decir,  $m$  y  $\partial_t$  solo coinciden cuando la línea de coordenadas constante es ortogonal a la hipersuperficie.

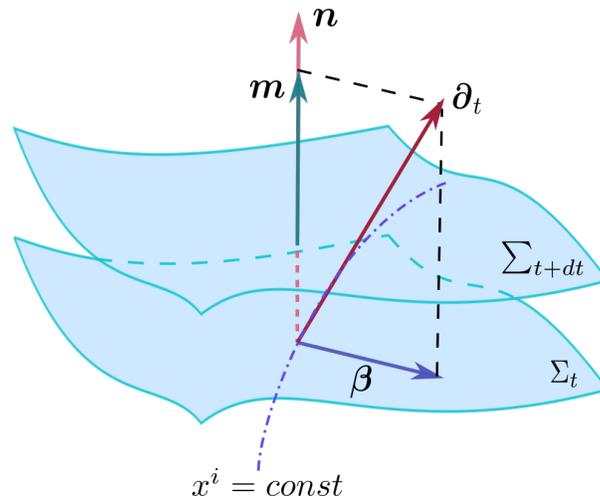


Figura 4. Cada línea  $x^i = const$  atraviesa la foliación  $\Sigma_t$  y define al vector tiempo  $\partial_t$  y al vector de corrimiento  $\beta$  del sistema coordenado  $(x^\alpha) = (t, x^i)$ .

**2.1.4. Métrica inducida.** Considere ahora el vector normal a las hipersuperficies espaciales. Fácilmente se puede demostrar que este vector posee componentes en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal forma que

$$n^\mu = \left( \frac{1}{\alpha}, \frac{-\beta^2}{\alpha} \right) \quad \text{y} \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (10)$$

Dicho vector normal se utiliza para introducir cantidades de manera mas formal, sin la necesidad de ligarlas a la elección de un sistema de coordenadas adaptado a la foliación. La métrica espacial  $\gamma_{ij}$  se define como la métrica inducida en cada hipersuperficie por la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$ , así

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (11)$$

La métrica  $\gamma_{ij}$  permite medir distancias propias en cada hipersuperficie. A partir de las

definiciones de  $\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}$  se define también el tensor métrico

$$\mathbf{g} = -\alpha^2 dt \otimes dt + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) \otimes (dx^j + \beta^j dt), \quad (12)$$

donde sus componentes están dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

De estas últimas ecuaciones se encuentra fácilmente que el determinante de  $g_{\mu\nu}$  es  $g = -\alpha^2 \gamma$ , siendo  $\gamma$  el determinante de  $\gamma_{ij}$ .

## 2.2. Curvatura intrínseca y extrínseca

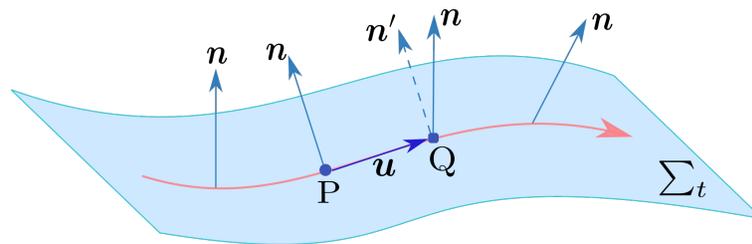
Teniendo en cuenta las hipersuperficies espaciales que constituyen el espacio-tiempo, es necesario distinguir entre la curvatura intrínseca y extrínseca. La curvatura intrínseca proviene de la geometría interna, mientras que la curvatura extrínseca se encuentra asociada a la forma en que dichas superficies están inmersas en el espacio-tiempo. La curvatura intrínseca se relaciona de manera directa con el tensor de Riemann asociado a cada hipersuperficie. Específicamente, teniendo en

cuenta que la superficie es tipo espacio, existe una derivada covariante que satisface

$$D\gamma = 0, \quad (15)$$

donde  $\mathbf{D}$  corresponde a la conexión de Levi-civita asociada a la métrica  $\gamma$ . El tensor de Riemann asociado a esta conexión representa la curvatura intrínseca, y su definición se expresa a partir de la identidad de Ricci

$$(D_i D_j - D_j D_i) v^k = R_{ij}^k v^l. \quad (16)$$



*Figura 5.* Definición de curvatura extrínseca. En la figura  $n$  denota el vector normal a la hipersuperficie, y  $n'$  es el vector obtenido del transporte paralelo de  $n$  desde el punto P a Q, a lo largo de una geodésica cuyo vector tangente es  $u$ . La curvatura extrínseca define el grado de diferencia que existe entre  $n$  y si mismo cuando es transportado en paralelo.

Por otro lado, la curvatura extrínseca se define a partir del comportamiento del vector normal a la hipersuperficie cuando este se transporta en paralelo. A partir de la Figura (5) se observa que, a medida que el vector se transporta en paralelo a un punto cercano, el nuevo vector no es normal a la hipersuperficie, y el cambio en  $n$  se mide a través del tensor de curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ . Para definir dicho tensor primero es necesario introducir el operador proyección en la hiper-

superficie

$$\mathbf{P} := \delta + n \otimes n, \quad (17)$$

donde  $\mathbf{P}$  no es mas que la métrica inducida  $\gamma$  y  $\delta$  corresponde al delta de Kronecker.

Es sencillo demostrar que para cualquier vector  $v^\alpha$  se cumple que

$$\left( P_\beta^\alpha v^\beta \right), n_\alpha = 0, \quad (18)$$

en otras palabras, cualquier vector proyectado en la hipersuperficie es ortogonal al vector normal.

Usando el operador proyección, las componentes del tensor de curvatura extrínseca se definen como

$$K_{\mu\nu} := -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu = -\left( \nabla_\mu n_\nu + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu \right). \quad (19)$$

Por otro lado, también es importante mencionar que el tensor de curvatura extrínseca es simétrico y cumple la siguiente propiedad

$$n^\mu K_{\mu\nu} = 0, \quad (20)$$

es decir,  $K_{\mu\nu}$  es netamente espacial. Por esta razón, solo se consideraran las componentes espaciales  $K_{ij}$ . Además, la curvatura extrínseca se puede relacionar de manera directa con la cuadri-

aceleración del observador Euleriano a partir de la ecuación

$$K_{\mu\nu} = -n_\mu a_\nu - \nabla_\mu n_\nu, \quad (21)$$

dicha aceleración corresponde a un vector espacial (tangente a la hipersuperficie), definido en términos de la función lapso

$$a_\nu = D_\nu \ln \alpha. \quad (22)$$

Esta última ecuación indica que la cuadri-aceleración de un observador Euleriano corresponde al gradiente del logaritmo de la función lapso.

### 2.3. Descomposición del tensor de Riemann

**2.3.1. Ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi.** Para obtener las ecuaciones de evolución para la métrica y la curvatura extrínseca es necesario entender las propiedades geométricas de las hipersuperficies que se encuentran embebidas en la variedad, de allí que sea necesario recurrir a las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi. Para encontrar dichas ecuaciones es necesario expresar el tensor de curvatura de Riemann cuatro-dimensional  ${}^{(4)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  en términos del tensor de Riemann de la hipersuperficie  ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ . En otras palabras, al proyectar el tensor de Riemann en las hipersuperficies se obtiene la ecuación de *Gauss-Codazzi*

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma}^{(4)} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}. \quad (23)$$

De manera similar, realizando la proyección sobre las hipersuperficies del tensor de Riemann contraído con el vector normal se obtiene la ecuación de *Codazzi-Mainardi*

$$D_\alpha K_{\beta\mu} - D_\beta K_{\alpha\mu} = -\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu}. \quad (24)$$

Estas ecuaciones constituyen la base del formalismo 3+1, y representan la descomposición del tensor de Riemann en términos de cantidades asociadas con las hipersuperficies, como la métrica inducida y el tensor de curvatura extrínseca. La deducción de estas ecuaciones se encuentra en el Apéndice (1). Como se observa, estas ecuaciones solo dependen de la métrica espacial, la curvatura extrínseca y sus derivadas espaciales. De forma que, son consideradas condiciones de integrabilidad, las cuales permiten embeber una hipersuperficie tridimensional en la variedad de cuatro dimensiones (Shibata, 2015).

**2.3.2. Proyección no trivial del tensor de Riemann.** En la subsección anterior se realizó una proyección del tensor de Riemann sobre las hipersuperficies y el vector normal, lo cual permitió deducir las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi. Ahora, se presenta una proyección doble del tensor de Riemann sobre las hipersuperficies y el vector normal, lo cual conlleva a la siguiente ecuación

$$\gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma^\nu_{\beta n} \sigma^{(4)} R^\mu_{\rho\nu\sigma} = \mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + K_{\alpha\mu} K^\mu_{\beta}. \quad (25)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Ricci. Esta última expresión, junto con las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi completan la descomposición 3+1 del tensor de Riemann. Para obtener esta expresión se debe realizar el proceso algebraico del Apéndice (2).

### 3. Ecuaciones de Einstein en la formulación 3+1

A partir del formalismo 3+1, en este capítulo se reescriben las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales. En consecuencia, se obtiene una ecuación de evolución para la métrica inducida, para la curvatura extrínseca y las restricciones hamiltoniana y de momentum. Así, estas ecuaciones aportan la información cinemática y dinámica del sistema. Este sistema de ecuaciones, junto con las variables de norma, se conocen como las ecuaciones ADM.

#### 3.1. Evolución de la métrica

Para encontrar la ecuación de evolución para la métrica es necesario tener en cuenta conceptos como: Derivada de Lie y curvatura extrínseca. Específicamente, se puede demostrar de manera directa que la curvatura extrínseca se puede definir a partir de la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo del vector normal

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma, \quad (26)$$

de esta ecuación se observa que la curvatura extrínseca solo depende del comportamiento de  $n$  dentro de la hipersuperficie. En consecuencia, es una propiedad geométrica de dicha hipersuperficie.

Teniendo en cuenta la relación existente entre la función lapso y la curvatura extrínseca, se cumple que

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}_{\alpha\vec{n}}\gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\right)\gamma_{\mu\nu}, \quad (27)$$

siendo  $\vec{t}$  el vector tangente a la línea de coordenadas espaciales constante. Esta última ecuación se

relaciona de manera directa con la derivada covariante de la métrica espacial, obteniendo

$$\mathcal{L}_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (28)$$

siendo  $D_i$  la derivada covariante asociada con la métrica  $\gamma_{ij}$ . A partir de esta ecuación se puede considerar a la curvatura extrínseca como una medida de la derivada temporal de la métrica espacial. Un procedimiento mas detallado acerca de esta ecuación de evolución se encuentra descrito en el Apéndice (2).

En general, ya se obtuvo una ecuación de evolución para la métrica, para cerrar el sistema de ecuaciones también es necesaria una ecuación de evolución para la curvatura extrínseca. Es importante notar que, hasta ahora solo se ha trabajado con conceptos geométricos, y no se han utilizado las ecuaciones de Einstein. En otras palabras, la ecuación (28) es considerada totalmente cinemática, mientras que la dinámica del sistema se obtendrá de la ecuación para la curvatura extrínseca (Alcubierre, 2007).

### 3.2. Descomposición 3+1 del tensor de energía-impulso

A partir de la definición del tensor de energía impulso, la densidad de energía medida por un observador Euleriano viene dada por

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}. \quad (29)$$

Esto se debe al hecho que la 4-velocidad del observador Euleriano es el vector normal  $n$ . De manera similar, la densidad de momentum medida por un observador Euleriano es

$$j_\alpha = -T_{\mu\nu}\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu, \quad (30)$$

siendo  $j$  tangente a la hipersuperficie. Finalmente, el tensor de esfuerzos se define como

$$S_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu}\gamma^\mu{}_\alpha\gamma^\nu{}_\beta, \quad (31)$$

y su respectiva traza  $S = \gamma^{ij}S_{ij}$ .

Conociendo estas expresiones, el tensor de energía-impulso se define a partir de la densidad de energía, momentum y el tensor de esfuerzos como

$$T = S + n \otimes j + j \otimes n + \rho n \otimes n, \quad (32)$$

o en componentes

$$T^{\mu\nu} = \rho n^\mu n^\nu + j^\mu n^\nu + j^\nu n^\mu + S^{\mu\nu}. \quad (33)$$

Además, tomando la traza  $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$  de la ecuación anterior se encuentra fácilmente que

$$T = S - \rho. \quad (34)$$

Es importante mencionar que  $S_{\alpha\beta}$  corresponde a un tensor ortogonal a la hipersuperficie. Fí-

sicamente,  $S(v, v')$  corresponde a la fuerza en dirección  $v'$  aplicada sobre la superficie cuya normal es  $v$ , siendo  $v'$  y  $v$  vectores tipo espacio.

### 3.3. Ecuaciones de Restricción

El primer capítulo se realizó en totalidad acerca de la geometría de las hipersuperficies que componen la foliación, en este caso ahora es necesario hablar de la física del sistema. En consecuencia, para la parte dinámica es necesario utilizar las ecuaciones de Einstein para relacionar los objetos geométricos con propiedades físicas del espacio-tiempo. Considere un espacio-tiempo que obedece la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (35)$$

siendo  $G_{\mu\nu}$  el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía impulso de un campo de materia. El tensor de Einstein se puede definir a partir del tensor de Ricci como

$$G_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R, \quad (36)$$

donde  ${}^{(4)}R_{\mu\nu}$  y  ${}^{(4)}R$  denotan el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, respectivamente (Baumgarte and Shapiro, 2010).

Para completar la descomposición de las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1, se definen las proyecciones del tensor de Einstein  $\mathbf{G}$  y las proyecciones del tensor de energía impulso

T. Utilizando el operador proyección  $\mathbf{P}$ , las ecuaciones de Einstein pueden dividirse en

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0, \quad \text{Proyección normal.} \quad (37)$$

$$P (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0, \quad \text{Proyección en la hipersuperficie.} \quad (38)$$

$$P [n^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})] = 0, \quad \text{Proyección mixta.} \quad (39)$$

A partir de realizar una proyección normal, se obtiene la siguiente ecuación

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (40)$$

donde  $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$  corresponde a la densidad de energía medida por un observador Euleriano y  $K = \gamma^{ij}K_{ij}$  es la traza de la curvatura extrínseca. Por otro lado, realizando la proyección mixta de las ecuaciones de Einstein se obtiene

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i, \quad (41)$$

siendo  $j^i = -\gamma^{i\mu}n^\nu T_{\mu\nu}$  la densidad de momentum medida por un observador euleriano.

Las ecuaciones (40) y (41) son conocidas como restricción hamiltoniana y de momentum, respectivamente. Como se observa, estas expresiones sólo incluyen la métrica espacial, la curvatura extrínseca y sus derivadas espaciales, por tanto, no se consideran ecuaciones de evolución para la geometría espacial; son condiciones que deben satisfacerse para embeber  $\Sigma_t$  dentro de la variedad. También cabe destacar que son independientes de  $\alpha$  y  $\beta$ , esto indica que dichas res-

tricciones se refieren únicamente a una hipersuperficie dada (Alcubierre, 2008). La deducción de dichas ecuaciones es tediosa y algebraica, por tanto, se encuentra descrita en el Apéndice (2).

### 3.4. Evolución de la curvatura extrínseca

Usando las ecuaciones de restricción (40), (41) y las relaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi (23), (24) es posible obtener la ecuación de evolución para la métrica inducida, escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ & + \alpha \left[ {}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j \right] + 4\pi\alpha \left[ \gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

donde se han introducido las cantidades  $S_{ij}$  y  $S = \gamma^{ij} S_{ij}$ , que corresponden al tensor de esfuerzos espacial y su respectiva traza.

### 3.5. Condiciones de coordenadas: Funciones gauge

En este proyecto se usan las siguientes expresiones para la función lapso y el vector de corrimiento

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{rr}}} + \beta^r = 1, \quad (43)$$

$$-2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta} = 0. \quad (44)$$

Estas condiciones brindan información acerca del sistema de coordenadas. La primera condición (43), conocida como *condición generalizada de Eddington-Finkelstein* cumple con el requisito de que  $t + r$  es una coordenada nula entrante en las coordenadas de Eddington-Finkelstein (Marsa, 1995). Esta es una característica importante, ya que como se explicará mas adelante, dicha condición garantiza que las geodésicas nulas entren al agujero negro. Por otro lado, el vector de

corrimiento en la ecuación (44) se escoge de forma que las áreas de superficie con  $r$  constante se mantengan constantes durante la evolución, es decir, que  $\partial_t g_{\theta\theta} = 0$ . En general, estas condiciones son sencillas de implementar, las cuales requieren pocas operaciones algebraicas en cada punto de la malla para calcular  $\alpha$  y  $\beta$ . También cabe mencionar que estas condiciones requieren la existencia de una coordenada radial. Es importante aclarar que en este proyecto no se utiliza ninguna condición de coordenadas al derivar las ecuaciones del formalismo 3+1, es decir, estas funciones se toman de manera genérica en cada procedimiento (Thornburg, 1999). Dichas condiciones ya han sido estudiadas con anterioridad por Marsa y Choptuik (Choptuik, 1993) (Marsa, 1995) (Marsa and Choptuik, 1996).

En conclusión, el sistema de ecuaciones (28), (40), (41), (42), (43) y (44) se conocen como **ecuaciones ADM**. Estas constituyen un sistema de evolución temporal que puede ser tratado como un problema de Cauchy o problema de valores iniciales.

#### 4. Evolución del campo escalar

En las secciones anteriores ya se han encontrado las ecuaciones de evolución para las variables dinámicas, ahora se hace necesario encontrar las componentes de energía y sus respectivas ecuaciones de evolución, las cuales corresponden a las del campo escalar. En la presente sección se empleará el principio variacional para encontrar la ecuación de evolución del campo escalar, y a partir del formalismo 3+1 dicha ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer orden. Además, tomando en consideración el tensor de energía-impulso se hallan los términos de fuente.

#### 4.1. Ecuación de Klein-Gordon en Relatividad General

Considere que la materia oscura puede describirse a partir de un campo escalar real y clásico, el cual corresponde a una función continua del espacio y el tiempo, definida en cada punto como  $\phi(x^\alpha) = \phi(t, x, y, z)$ . La acción de este campo escalar es

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi, \quad (45)$$

donde  $\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu \phi)$  es la densidad lagrangiana y  $g = \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante del tensor métrico. Particularmente, en esta investigación se asume que la densidad lagrangiana tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \phi) (\nabla_\beta \phi) - V(\phi), \quad (46)$$

siendo  $V$  el potencial del campo escalar

$$V(|\phi|^2) = \frac{m^2}{2} |\phi|^2 + \frac{m^2}{2} \lambda |\phi|^4. \quad (47)$$

En la ecuación (47) para el potencial se observan dos términos. El término cuadrático corresponde al término de masa en reposo y el término cuártico representa el término de auto-interacción del campo escalar (Suárez and Chavanis, 2015). No obstante, para este proyecto el código se programa solamente con el término de masa en reposo. Además, teniendo en cuenta que la masa de  $10^{-22} eV$  es muy pequeña, los resultados se obtienen para  $m = 0$ .

Ahora, para obtener la ecuación de movimiento de campo escalar se parte del principio de

mínima acción imponiendo  $\delta S_\phi = 0$ , lo cual conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_a \phi)} \right] = 0. \quad (48)$$

Introduciendo la densidad lagrangiana en la expresión (48) se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi - 2V(|\phi|^2), \phi = 0, \quad (49)$$

donde  $\square$  es el operador d'Alembertiano para un espacio-tiempo curvo

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (50)$$

En consecuencia, el conjunto de ecuaciones compuesto por las ecuaciones de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon permite estudiar la interacción del campo escalar y el agujero negro.

#### 4.2. Ecuación de Klein-Gordon en el formalismo 3+1

La ecuación de Klein-Gordon obtenida en la sección anterior se puede reescribir en el formalismo 3+1 de la relatividad general. Considerando un potencial que depende solo de la masa en reposo, la ecuación para el campo escalar es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] = m^2 \phi, \quad (51)$$

siendo el término de la izquierda el d'Alembertiano.

A partir de las componentes de la métrica y definiendo nuevas variables

$$P_i = \nabla_i \phi, \quad (52)$$

$$Q = \frac{1}{\alpha} (\partial_t \phi - \beta^i \nabla_i \phi) = n^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (53)$$

la ecuación de Klein-Gordon se escribe como un sistema de ecuaciones de primer orden (Apéndice 3)

$$\partial_t \phi = \alpha Q + \beta^i P_i, \quad (54)$$

$$\partial_t P_i = \nabla_i (\alpha Q + \beta^j P_j), \quad (55)$$

$$\partial_t Q = \nabla_i (\alpha P^i) + \alpha K Q + \beta^i \partial_i Q + \alpha m^2 \phi. \quad (56)$$

Por otro lado, utilizando las definiciones de la métrica y el tensor de energía-impulso para el campo escalar, se encuentran los valores correspondientes a la densidad de energía, de momentum y las componentes del tensor de esfuerzos que aparecen en las ecuaciones del formalismo 3+1 (Apéndice 3)

$$4\pi\rho = \frac{1}{2} (P_i P^i + Q^2 + m^2 \phi), \quad (57)$$

$$4\pi j_i = -P_i Q, \quad (58)$$

$$4\pi S_{ij} = P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} (-P_k P^k + Q^2 + m^2 \phi), \quad (59)$$

$$4\pi S = -\frac{1}{2} \gamma^{jj} P_i P_j + \frac{3}{2} Q^2 + \frac{3}{2} m^2 \phi. \quad (60)$$

Las ecuaciones (57), (58), (59) y (60) corresponden a los términos de fuente en las ecuaciones ADM.

## 5. Dinámica del sistema agujero negro-campo escalar en simetría esférica

Para este proyecto el sistema se restringe a la simetría esférica. De forma que, en este capítulo se reescriben las ecuaciones de evolución teniendo en cuenta dicha simetría. Además, también se presenta el método numérico utilizado para resolver dichas ecuaciones (método de líneas) y las condiciones de frontera utilizadas en el dominio computacional.

### 5.1. Sistema de ecuaciones en simetría esférica

Las ecuaciones descritas en los capítulos anteriores se cumplen para un espacio-tiempo en general. Ahora, para el caso particular del proyecto, se asume que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico, con coordenadas espaciales correspondientes a  $x^i = (r, \theta, \phi)$ . En tal caso, se considera el siguiente ansatz para variables como la métrica, la curvatura extrínseca y el vector de corrimiento

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$\beta^i = (\beta, 0, 0). \quad (63)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la geometría esférica, las ecuaciones de evolución descritas en (28) y (42) se reducen al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\partial_t \gamma_{rr} = -2\alpha K_{rr} + \beta^r \partial_r \gamma_{rr} + 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r, \quad (64)$$

$$\partial_t \gamma_{\theta\theta} = -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{rr} = & -\partial_{rr} \alpha + \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} \\ & + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r - 2\alpha P^2, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\partial_t K_{\theta\theta} = -\frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})(\partial_r \alpha)}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} + \alpha \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left[ 1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right] + \beta^r \partial_r K_{\theta\theta}. \quad (67)$$

Por otro lado, las ecuaciones correspondientes a la evolución del campo escalar descritas en (54), (55) y (56) se reescriben en simetría esférica como

$$\partial_t \phi = \alpha Q + \beta P, \quad (68)$$

$$\partial_t P = (\partial_r \alpha) Q + \alpha (\partial_r Q) + (\partial_r \beta) P + \beta (\partial_r P), \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Q = & \frac{\partial_r \alpha P}{\gamma_{rr}} + \frac{\alpha (\partial_r P)}{\gamma_{rr}} - \frac{\alpha P}{2\gamma_{rr}^2} \partial_r \gamma_{rr} + \frac{\alpha P}{\gamma_{rr}} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{\alpha K_{rr}}{\gamma_{rr}} Q \\ & + \frac{2\alpha K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} Q + \beta \partial_r Q + \alpha m^2 \phi. \end{aligned} \quad (70)$$

Este sistema de ecuaciones corresponden a las ecuaciones ADM mencionadas anteriormente. Dicho sistema debe solucionarse a partir de métodos numéricos (Guzmán and Lora-Clavijo, 2012).

## 5.2. Implementación del dato inicial

Para iniciar con la evolución es necesario construir un dato inicial que sea consistente con las ecuaciones de Einstein. Para simplificar las restricciones hamiltoniana y de momentum se asume el siguiente ansatz

$$\gamma_{\theta\theta} = r^2, \quad (71)$$

$$K_{rr} = -\frac{2}{r^2} \frac{1+1/r}{\sqrt{1+2/r}}. \quad (72)$$

De tal manera que, usando dicho ansatz las ecuaciones de restricción hamiltoniana y de momentum se pueden reescribir en términos de  $P$ ,  $Q$ , obteniéndose

$$\partial_r \gamma_{rr} = \frac{\gamma_{rr}}{r} \left( 1 - \gamma_{rr} - \frac{\gamma_{rr} K_{\theta\theta}^2}{r^2} \right) - 2 \frac{\gamma_{rr}}{r} K_{rr} K_{\theta\theta} + \left( \frac{P^2}{\gamma_{rr}} + Q^2 + m^2 \phi \right) r \gamma_{rr}^2, \quad (73)$$

$$\partial_r K_{\theta\theta} = r \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_{\theta\theta}}{r} + P Q r^2. \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
\phi(t=0, r) &= A \frac{\cos(kr)}{r} e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \\
P(t=0, r) &= \frac{\partial \phi(t=0, r)}{\partial r}, \\
Q(t=0, r) &= -\frac{\beta^r}{\alpha} P(t=0, r).
\end{aligned} \tag{75}$$

Teniendo esta información, se calcula la densidad de energía  $\rho$  y la densidad de momento  $j$  para el tiempo inicial a partir de las ecuaciones (57) y (58). Teniendo estas cantidades, se sustituyen en (73) y (74), y se resuelven a partir de un integrador tipo Runge-Kutta Dormand Prince. También es importante mencionar que, el dato inicial escogido para el campo escalar permite estudiar dos pulsos, uno moviéndose hacia el agujero negro y otro hacia afuera.

### 5.3. Métodos numéricos

En esta sección se describen los métodos usados para discretizar y resolver numéricamente las ecuaciones de evolución y las condiciones de coordenadas. Para esto, es necesario aclarar que las variables son funciones suaves en todo el dominio computacional. A partir de estos métodos numéricos se presenta la solución de las ecuaciones de Einstein como solución de un problema de valores iniciales, usando una aproximación en diferencias finitas.

**5.3.1. Método de líneas.** El método de líneas consiste en una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales, a partir de discretizar sólo la dimensión espacial. A partir de allí, este problema se puede integrar en el tiempo como un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En otras palabras, esto produce un conjunto de ecuaciones acopladas de las variables en los puntos de la malla numérica, y es posible usar un integrador para integrar en el tiempo dichas ecuaciones. Para este proyecto se han implementado los integradores Runge Kutta de cuarto orden,

y un Runge Kutta tipo Dormand-Prince. Específicamente, los resultados que se muestran acá se realizaron a partir de este último integrador.

**5.3.1.1. Integrador Dormand Prince.** Como es bien sabido, las ecuaciones diferenciales relacionan una función con sus derivadas. Generalmente, las ecuaciones diferenciales mas simples pueden resolverse a partir de formulas. No obstante, cuando se tienen ecuaciones diferenciales mas complejas, es necesario utilizar métodos numéricos para obtener una aproximación numérica (Ang and Amir Hamzah, 2018). El método Runge Kutta es uno de los mas utilizados para este propósito, el cual utiliza la idea de multiplicidad de evaluaciones de la función dentro de cada paso de tiempo (Butcher, 1987). El método Dormand Prince se encuentra dentro de la familia de los Runge-Kutta, el cual utiliza el cuarto y quinto orden del método Runge Kutta para obtener la solución numérica. Además, la diferencia absoluta entre ellos se conoce como el error en la solución. También es importante mencionar que este método permite seis evaluaciones de funciones para obtener la solución, a pesar de que consta de siete etapas. En otras palabras, la última etapa se evalúa en el mismo punto que la primera etapa del siguiente paso (Dormand and Prince, 1980). La evaluación de la función en cada paso de tiempo se calcula a partir del cuadro de Butcher del método Dormand Prince, que se encuentra en la tabla (1)

$c_i$	$a_{ij}$						$\hat{b}_i$	$b_i$
0							$-\frac{35}{384}$	$-\frac{5179}{57600}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					$\frac{500}{1113}$	$\frac{7571}{16695}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{55}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				$\frac{125}{192}$	$\frac{393}{640}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			$-\frac{2187}{6784}$	$-\frac{92097}{339200}$
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		$\frac{11}{84}$	$\frac{187}{2100}$
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0	$\frac{1}{40}$

Tabla 1  
Cuadro Butcher para el método Dormand Prince.

Con estos coeficientes, el cálculo de la función se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= f\left(u_k + \frac{1}{5}k_1\right), \\
 u_2 &= f\left(u_k + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right), \\
 u_3 &= f\left(u_k + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right), \\
 u_4 &= f\left(u_k + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right), \\
 u_5 &= f\left(u_k + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 + \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right), \\
 u_6 &= f\left(u_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right).
 \end{aligned} \tag{76}$$

Luego, la aproximación final de la función se obtiene haciendo

$$u_{k+1} = u_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6, \quad (77)$$

donde dicha aproximación se realiza a partir de un Runge-Kutta de cuarto orden. Sin embargo, también es posible utilizar el método de quinto orden, y en este caso se tiene

$$u_{k+1} = u_k + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7, \quad (78)$$

con el cual se obtuvo la solución numérica implementada en el código.

**5.3.1.2. Diferencias finitas.** Por otro lado, la discretización espacial se realiza a partir del método de diferencias finitas. La aproximación en diferencias finitas se basa en discretizar el dominio en el cual se define el sistema de ecuaciones. En otras palabras, consiste en definir las funciones y las variables en un conjunto discreto de puntos del dominio. Para explicar a detalle, supóngase una ecuación diferencial escrita en términos de una función  $g$ , la cual se define en un dominio con una coordenada temporal y una espacial,  $t$  y  $x$ . Para resolver la ecuación diferencial se hace necesario considerar las variables y funciones de la ecuación diferencial en un conjunto de puntos, los cuales conforman una malla numérica. Esta malla numérica se define a partir de puntos  $x_j = j\Delta x$  en el espacio, y  $t^n = n\Delta t$  en el tiempo, siendo  $j$  y  $n$  enteros que etiquetan cada punto de la malla. En consecuencia, la función se encuentra definida en los puntos  $(t^n, x_j)$ , y dichos valores corresponden a  $g_j^n$ . Debido a que se ha escogido un dominio finito,  $j$  y  $n$  toman los valores

de  $j = 0, 1, \dots, N_x$  y  $n = 0, 1, \dots, N$ , así  $x_{min} = x_0$  y  $x_{max} = x_{N_x}$  delimitan el dominio de  $x$ . En este caso, la discretización se realiza sobre una malla numérica uniforme, es decir, todos los nodos se encuentran igualmente espaciados. Para esta discretización se define la resolución espacial como  $\Delta x = x_{min} - x_{max} / N_x$ .

Cuando ya se tiene un dominio definido, como segundo paso se aproxima la ecuación diferencial. Dada la función  $g_j^n$ , es posible calcular valores aproximados de dicha función en los nodos adyacentes. Para esto se utilizan expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, para la construcción de la aproximación de segundo orden se utilizan las siguientes expansiones

$$\begin{aligned} g(x_{j-1}) &= g(x_j) - \Delta x g'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} g''(x_j) + O(\Delta x^3), \\ g(x_j) &= g(x_j), \\ g(x_{j+1}) &= g(x_j) + \Delta x g'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} g''(x_j) + O(\Delta x^3), \end{aligned} \quad (79)$$

sumando la primera y tercera expresión, se obtiene la primera derivada en  $x_j$ , así

$$g'(x_j) = \frac{g(x_{j+1}) - g(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (80)$$

Esta aproximación se conoce como centrada, ya que es necesario conocer los valores de  $g_{j+1}^n$  y  $g_{j-1}^n$ . No obstante, también se puede calcular la derivada a partir de aproximaciones no centradas, teniendo en cuenta dos puntos a la derecha o dos puntos a la izquierda de  $x_j$ , respectivamente

$$g'(x_j) = \frac{-g(x_{j+2}) + 4g(x_{j+1}) - 3g(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (81)$$

$$g'(x_j) = \frac{g(x_{j-2}) - 4g(x_{j-1}) + 3g(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (82)$$

También es importante mencionar que para calcular operadores con un orden de aproximación mayor basta con generalizar el procedimiento anterior. Teniendo en cuenta esto, en las tablas (2) y (3) se presentan los coeficientes de la aproximación de la derivada de primer y segundo orden, utilizando distintas combinaciones de puntos vecinos.

	$x_{j-4}$	$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$
<i>Segundo orden</i>				1	0	-1			
			1	-4	3				
					-3	4	-1		
<i>Cuarto orden</i>	3	-16	36	-48	25				
		-1	6	-18	10	3			
			1	-8	0	8	-1		
				-3	-10	18	-6	1	
					-25	48	-36	16	-3

Tabla 2

Coeficientes de la aproximación de la derivada de primer orden. Las aproximaciones con segundo orden de precisión corresponden a  $g' = 1/(2\Delta x)[\dots] + O(\Delta x^2)$  y las aproximaciones con cuarto orden de precisión son  $g' = 1/(12\Delta x)[\dots] + O(\Delta x^4)$ .

	$x_{j-5}$	$x_{j-4}$	$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$	$x_{j+5}$
<i>Segundo orden</i>					1	-2	-1				
			-1	4	-5	2					
						2	-5	4	-1		
<i>Cuarto orden</i>	-10	61	-156	214	-154	45					
		1	-6	14	-4	-15	10				
				-1	16	-30	16	-1			
					10	-15	-4	14	-6	1	
						45	-154	214	-156	61	-10

Tabla 3

*Coeficientes de la aproximación de la derivada de segundo orden. Las aproximaciones con segundo orden de precisión corresponden a  $g'' = 1/(\Delta x^2)[\dots] + O(\Delta x^2)$  y las aproximaciones con cuarto orden de precisión son  $g'' = 1/(12\Delta x)[\dots] + O(\Delta x^4)$ .*

#### 5.4. Condiciones de frontera

En relatividad numérica al lidiar con agujeros negros siempre se hace necesario darle un manejo a la singularidad. Esto se debe a que en el esquema computacional se debe evitar la singularidad para mantener bien definidas las variables dinámicas. En la literatura se conocen algunos procedimientos y técnicas que se utilizan para detener la evolución antes de que alcance la singularidad. No obstante, esto causa gradientes en las variables dinámicas, lo cual conlleva a ciertos problemas numéricos (Hawley et al., 1984)(Hawley, 1984). Para evitar estos problemas se ha propuesto la

técnica de escisión, la cual permite evolucionar sólo la región del espacio-tiempo fuera del agujero negro. Dicha técnica consiste en excluir de cada corte tridimensional (superficie) un vecindario de la singularidad (Scheel et al., 1997) (Scheel et al., 1995). En este trabajo se presentan de manera general las condiciones de frontera utilizadas, las cuales permiten excluir la singularidad del dominio numérico.

La región que se excluye del dominio numérico debe cumplir con ciertas condiciones:

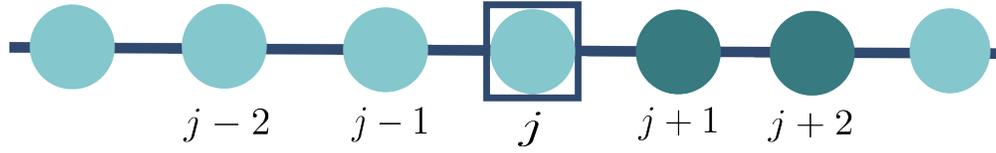
- No deben existir singularidades en la región exterior del espacio-tiempo. Es decir, la singularidad debe estar contenida dentro de la región excluida.
- Cualquier singularidad debe encontrarse a una distancia positiva lejos del dominio computacional.
- Las ecuaciones deben estar bien definidas en la región exterior. No debe existir intercambio de información desde la región excluida a la región exterior. En otras palabras, en el límite interior los conos de luz deben señalar hacia fuera del dominio computacional.

Debido a dichas condiciones, se ubica la frontera interior en una posición de coordenadas espaciales fija  $r = r_{in}$ , la cual está dentro de la posición de coordenadas del horizonte aparente del agujero negro. Así, el dominio radial se define de forma que  $r \in [r_{in}, r_{ext}]$  con  $0 < r_{in} < r_{horizon}$ . Por otro lado, también es muy importante recordar que se está trabajando con coordenadas de Eddington Finkelstein, de forma que los conos de luz en  $r = r_{in}$  se encuentran abiertos y no es necesario poner condiciones de frontera en esta posición. No obstante, en  $r = r_{ext}$  sí es necesario definir condiciones de frontera, donde se aplican condiciones de onda saliente (Thornburg, 1999). Esta

condición de frontera se utiliza comúnmente para modelar fronteras abiertas, las cuales permiten el flujo hacia afuera de las soluciones, pero no hacia dentro. Estas condiciones son apropiadas en los problemas de valores iniciales, en los cuales se imponen fronteras artificiales y no se desea que la radiación rebote hacia el dominio numérico (Guzmán, 2010).

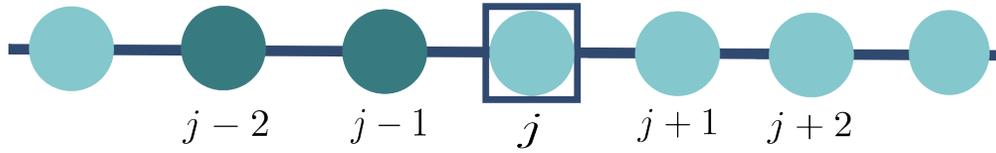
También es importante mencionar que, debido a la naturaleza de las ecuaciones es necesario tener en cuenta de qué manera se está tomando el vector de corrimiento, ya que este corresponde a una velocidad relativa entre el observador Euleriano y la línea de coordenadas constante. De manera que, dependiendo del valor de dicha velocidad, se utiliza el esquema upwind con puntos de la malla numérica sola a la izquierda, o downwind con puntos de la malla numérica solo a la derecha, así, el método de diferencias finitas se implementa como se observa en la Figura (6), en donde se utilizan células desbalanceadas para calcular el valor de la función en el nodo  $j$ .

Si  $\beta \geq 0$



$$g'(x_j) = \frac{-g(x_{j+2}) + 4g(x_{j+1}) - 3g(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Si  $\beta < 0$



$$g'(x_j) = \frac{g(x_{j-2}) - 4g(x_{j-1}) + 3g(x_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

*Figura 6.* Implementación del esquema downwind y upwind según el vector de corrimiento. Para el caso de  $\beta \geq 0$  se utilizan los puntos  $j+1$  y  $j+2$  para obtener la solución en  $j$ . Para el caso de  $\beta < 0$  se utilizan los puntos  $j-1$  y  $j-2$  para obtener la solución en  $j$ .

### 5.5. Diagnóstico

El parámetro mas importante para monitorear corresponde a la masa del agujero negro. Para esto es útil rastrear el horizonte aparente, el cual proporciona una tasa de crecimiento aproximada de dicha masa, que indica además la cantidad de campo escalar absorbido. Para esto primero se localiza el horizonte aparente a partir de la definición de superficie marginalmente atrapada, la cual obedece la condición

$$\Theta = \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta} \sqrt{\gamma_{rr}}} - \frac{2K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} = 0, \quad (83)$$

siendo  $n_i$  un vector unitario normal que apunta hacia afuera del horizonte aparente,  $K_{ij}$  son los componentes de la curvatura extrínseca de la hipersuperficie espacial en la cual se calcula la superficie marginalmente atrapada y  $K$  corresponde a la traza. Así, el horizonte aparente se define como la superficie marginalmente atrapada mas externa. Para seguir la evolución del horizonte aparente, se calcula  $\Theta$  a cada paso de tiempo y se localiza el cero mas externo en el radio de coordenadas  $r_{AH} = \sqrt{\gamma_{\theta\theta}}$ . Además, también se calcula la masa del horizonte aparente como  $M_{AH} = r_{AH}/2$ .

También es importante localizar el horizonte de eventos, ya que esta es una superficie invariante e independiente de la foliación del espacio tiempo, a diferencia del horizonte aparente, el cual depende de la foliación y los gauges de coordenadas. Otra de las razones para ubicar esta superficie es debido a que es necesario asegurar que el horizonte de eventos se encuentre siempre por fuera del horizonte aparente (Hawking and Ellis, 1973). Para localizar el horizonte de eventos se realiza un proceso de fine-tuning, el cual consiste en trazar geodésicas nulas a medida que se reduce el espacio entre ellas. Así, para este proceso también se resuelve la ecuación de las geodésicas salientes. Adicionalmente, el horizonte de eventos se localiza entonces como la superficie a la cual convergen los rayos nulos enviados desde el futuro y desde el exterior del agujero negro. Otra cantidad importante corresponde a la masa de Misner-Sharp, la cual permite asegurar que el crecimiento del horizonte es consistente con la masa del espacio-tiempo, incluyendo la contribución del campo escalar. Esta masa se define a partir de

$$M_{MS} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_{\theta\theta}} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + \frac{K_{\theta\theta}^2}{\gamma_{\theta\theta}} \right), \quad (84)$$

la cual permite estimar la masa ADM como  $M_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} M_{MS}$ .

Cabe destacar que en todos los resultados se asume que las coordenadas radial y temporal están escritas en unidades de  $M$ , donde  $M$  es la masa inicial del horizonte del agujero negro.

## 6. Resultados

Finalmente, en este capítulo se presenta el análisis de la dinámica del sistema agujero negro-campo escalar teniendo en cuenta las diferentes configuraciones del campo. Para cada uno de los parámetros  $\sigma$  y  $k$ , se realiza el proceso de fine-tuning, el cual permite observar la evolución del horizonte de eventos. Además, también se mide la masa del horizonte aparente para analizar la cantidad de campo absorbido por el agujero negro. Por otro lado, a partir del código OSIRIS se mide la evolución del *shadow* del agujero negro y el fenómeno del lente gravitacional para una de las configuraciones del campo escalar.

### 6.1. Análisis del proceso de acreción del campo escalar

A continuación se analizan diferentes casos variando los parámetros del perfil del campo escalar. Uno de estos corresponde al número de onda  $k$ , para el cual se escogen valores de  $k = 0, 1$  y  $2$ , además, se fija el valor de la amplitud en  $A = 0.8$ . Para cada uno de estos casos se consideran los valores de  $\sigma = 1, 1.5$  y  $5$ , correspondientes al ancho de la gaussiana. Estos parámetros se organizan de manera que se pueda estudiar la absorción del campo escalar en términos del número de onda, la amplitud y el ancho del paquete de onda. Es importante mencionar también que todas las corridas del código se realizan con la posición inicial del campo en  $r_0 = 30M$ . Como primer resultado, se presenta el comportamiento del campo escalar en el dominio numérico.

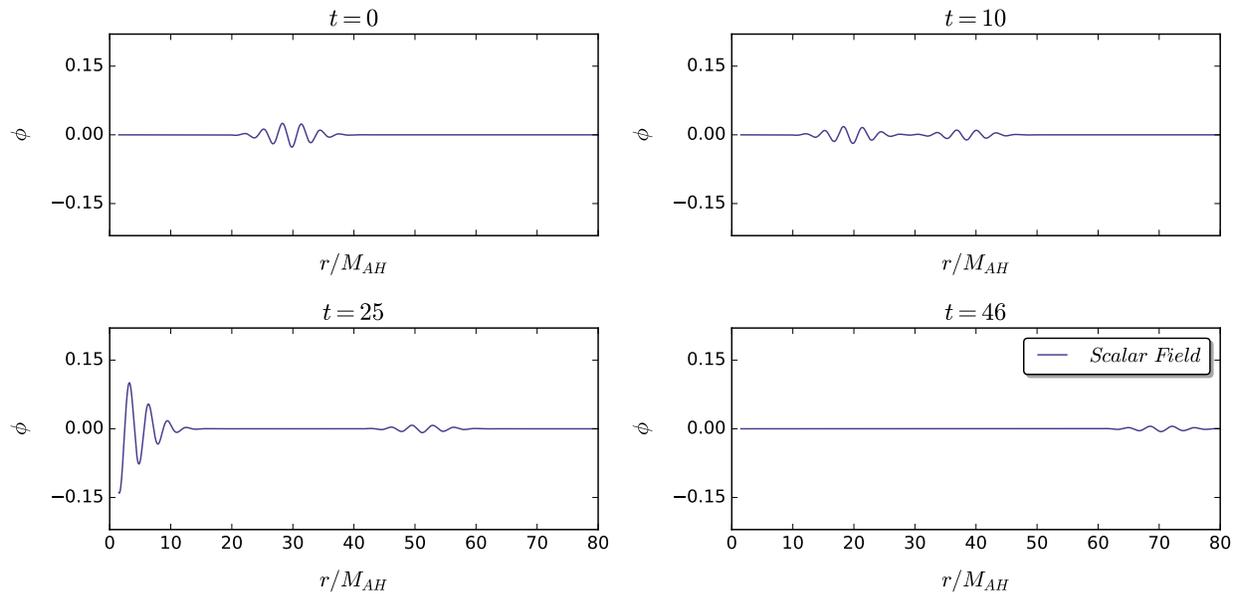


Figura 7. Gráfica correspondiente a instantáneas del campo escalar con  $\sigma = 5$ ,  $k = 2$  y  $A = 0.8$ . Se observa que el campo escalar se divide en dos pulsos, uno moviéndose hacia el agujero negro y otro alejándose.

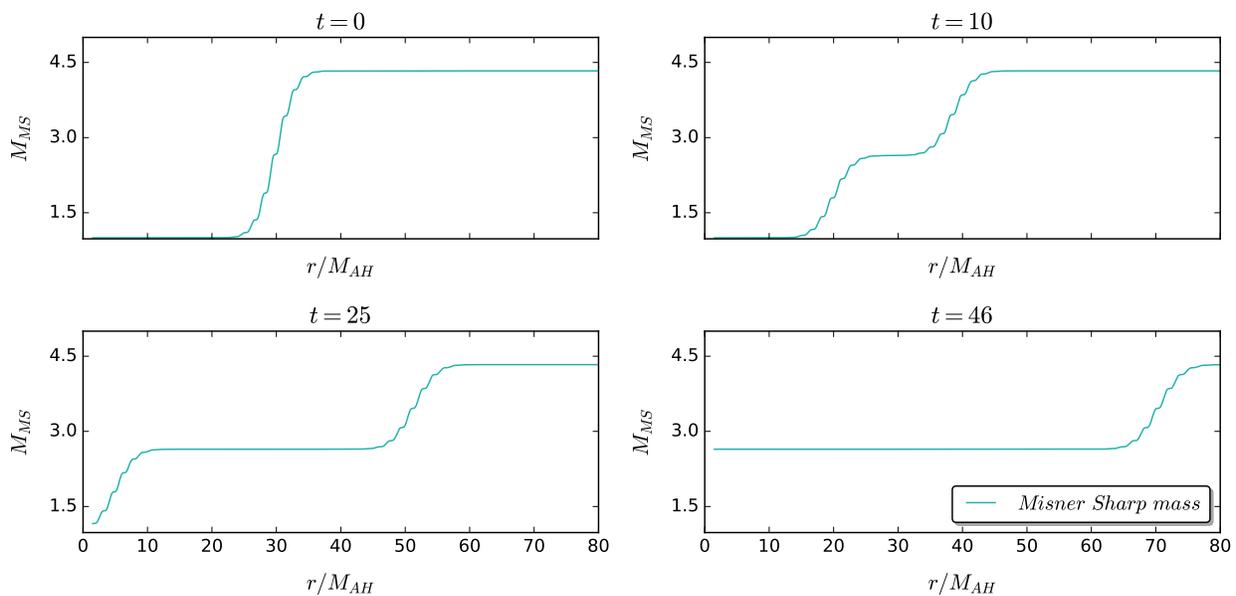


Figura 8. Gráfica correspondiente a instantáneas de la masa de Misner-Sharp con  $\sigma = 5$ ,  $k = 2$  y  $A = 0.8$ . Se observa que cuando inicia la evolución, la masa de Misner-Sharp crece hasta un valor asintótico debido a la influencia del campo escalar entrante.

En la Figura (7) se presentan snapshots del campo escalar para el caso  $\sigma = 5, k = 2$ . En esta gráfica se observa como la configuración inicial del campo escalar se separa en dos pulsos, uno que se mueve hacia el agujero negro (izquierda) y otro que se mueve hacia afuera (derecha). Además, en vista que el espacio-tiempo se encuentra distorsionado inicialmente con respecto a la geometría del agujero negro, es difícil eliminar el campo que se mueve hacia afuera, en consecuencia, se mantiene la presencia de los dos pulsos. No obstante, es importante tener en cuenta que al medir la masa del sistema sólo existe contribución debido al pulso entrante. Para esta misma configuración, se mide la masa de Misner-Sharp del espacio-tiempo como función de la distancia en diferentes instantes, como se observa en la Figura (8). Para el tiempo inicial se tiene que el campo escalar está ubicado en  $r = 30$ , de forma que cuando se tienen valores mucho menores de  $r$  la masa de Misner-Sharp corresponde solamente a la masa del agujero negro, es decir,  $M_{MS} = M = 1$ . Cerca a  $r = 30$  se puede observar la contribución del campo escalar, por tanto, la masa de Misner-Sharp crece hasta un valor asintótico.

Cabe destacar que, la masa ADM para el sistema de coordenadas se define como la masa de Misner-Sharp en el límite cuando  $r \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en este caso se quiere estimar la cantidad de materia acretaada solo del pulso entrante, necesitando así una medida de la masa espacio-temporal teniendo en cuenta que uno de los pulsos se va al infinito. Así, la masa ADM se define como la masa Misner-Sharp medida en un punto en el espacio donde no se tiene en cuenta el pulso saliente. En la Figura (8) se observa que en  $t = 25$  el valor de la masa  $M_{MS}$  se estabiliza después de que el pulso saliente ha pasado ya por  $r = 40$ . Como solo se quiere contar la masa del pulso entrante, esta es una medida apropiada de la masa del espacio-tiempo. El valor de esta masa para los parámetros

de la Figura (7) corresponde a  $M_{ADM} = 2.64M$ . En conclusión, sólo es necesario medir la masa del horizonte aparente durante la acreción del pulso entrante y observar si esta se acerca o no al valor de la masa ADM.

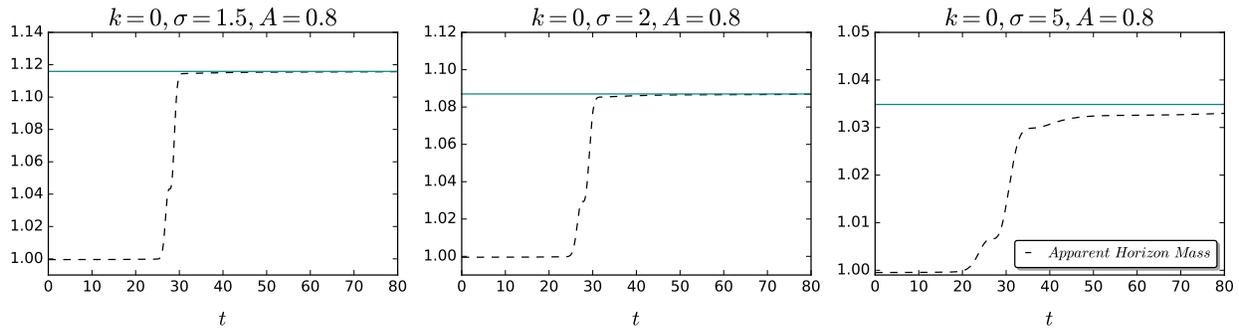


Figura 9. Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para  $k = 0$ . En esta figura se observa que cuando sigma aumenta, la masa ADM no coincide con la masa del horizonte aparente.

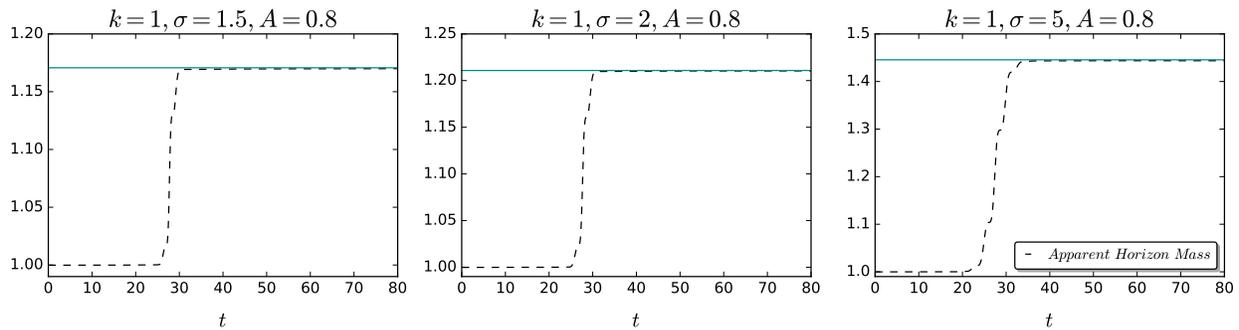


Figura 10. Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para  $k = 1$ .

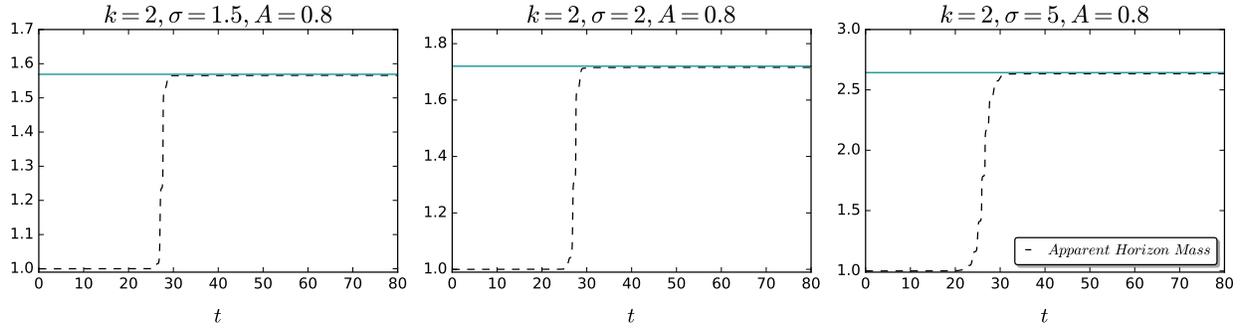
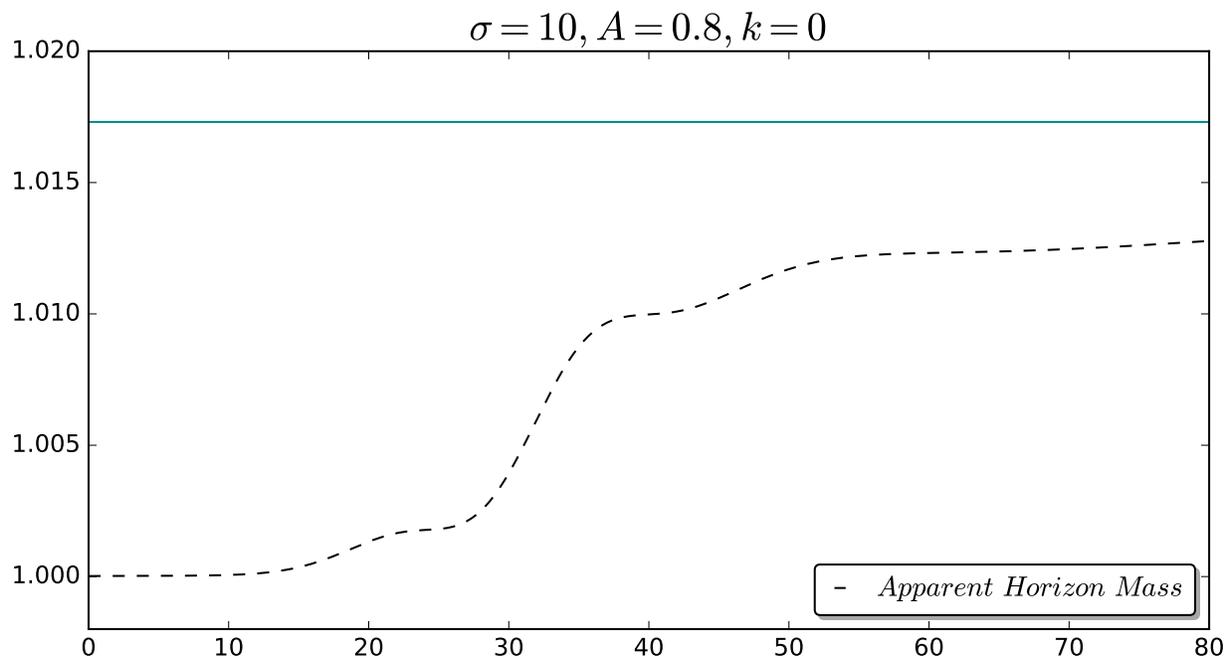


Figura 11. Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM (línea continua) para  $k = 2$ .

Como se ha mencionado con anterioridad, es posible utilizar el horizonte aparente como la superficie para monitorear la masa del agujero negro, así, en las Figuras (9), (10) y (11) se presenta la evolución en el tiempo de la masa del horizonte aparente y la masa ADM para cada una de las configuraciones del campo escalar. Para los casos de  $k = 1$  y  $k = 2$  se observa el mismo comportamiento, donde la masa del horizonte aparente crece hasta el valor constante de la masa ADM. Esto indica que todo el pulso del campo escalar entrante está siendo absorbido por el agujero negro. Por el contrario, para  $k = 0$  se observa que existe una tendencia a tener menos absorción del campo escalar cuando el ancho del paquete de onda inicial es mayor. Específicamente, para la configuración de  $\sigma = 5$  y  $k = 0$  un 93 % del campo escalar es absorbido por el agujero negro. Para confirmar este comportamiento se realiza una configuración adicional de  $\sigma = 10$  y  $k = 0$ , presente en la Figura (12). Para esta configuración del campo escalar se encuentra que aproximadamente el 75 % del pulso entrante del campo escalar es acretado. Así, a medida que el ancho del paquete inicial aumenta, la absorción de dicho campo es menos eficiente. Estos resultados son bastante similares a investigaciones realizadas en la misma dirección. En el artículo (Guzmán and Lora-Clavijo, 2012)

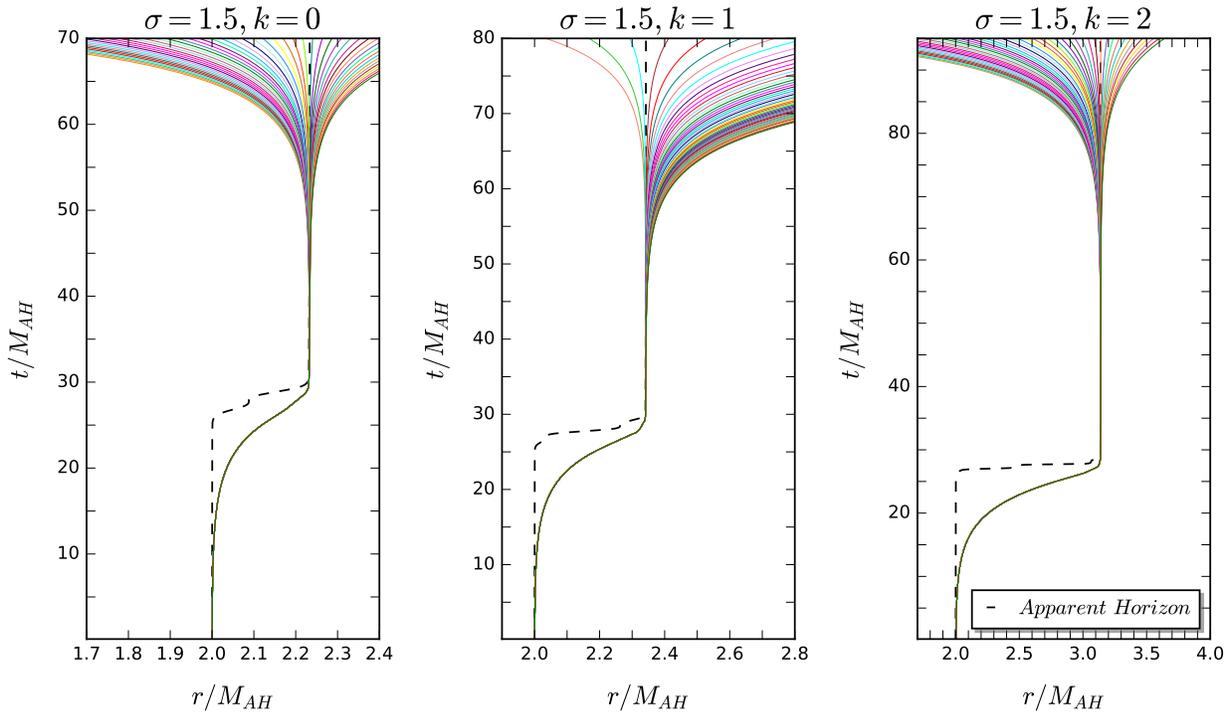
también se presenta el comportamiento del campo escalar en términos de los parámetros  $\sigma$  y  $k$ , y se encuentra la evolución del horizonte de eventos para la configuración de  $\sigma = 5$  y  $k = 1$ . En dicho trabajo se confirma que para  $k = 0$  se tiene menos absorción a medida que el ancho del paquete de la onda inicial aumenta. Además, para el caso específico de  $\sigma = 10$  aproximadamente el 65% del campo es acretado. Por otro lado, en el artículo (Urena-Lopez and Fernández, 2011) se encuentra que para valores de  $k \leq 1$  y valores grandes de  $\sigma$  no hay absorción total del campo escalar, esto sucede debido a que el espacio-tiempo se mantiene estático.



*Figura 12.* Evolución de la masa del horizonte aparente y la masa ADM para  $\sigma = 10$  y  $k = 0$ . Se observa que la masa del horizonte aparente no crece hasta el valor constante de la masa ADM. Para este caso se tiene que sólo un 75% del campo escalar es absorbido.

Finalmente, para observar el crecimiento del agujero negro se calcula la evolución del horizonte de eventos y horizonte aparente. Así, para cada una de las configuraciones se presenta el

cambio en dichas superficies a medida que el campo escalar es acretado.



*Figura 13.* Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 1.5$  y  $k = 0, 1, 2$ . En esta gráfica se observa que en cada una de ellas el horizonte aparente y el horizonte de eventos coinciden a tiempo inicial y después de que el sistema se ha estabilizado tras la acreción del pulso de campo escalar entrante. Además, se observa un conjunto de rayos nulos salientes y entrantes que convergen en el horizonte de eventos.

Las Figuras (13), (14) y (15) se obtienen a partir de rastrear un haz de rayos nulos salientes radiales, lo cual permite localizar de manera aproximada el horizonte de eventos. Así, su evolución se obtiene a partir de realizar un proceso de fine-tuning, el cual consiste en realizar un trazado de geodésicas nulas a medida que se reduce el espacio entre ellas. Como se observa en estas figuras, para cada una de ellas se cumple que el horizonte aparente y el horizonte de eventos coinciden a tiempo inicial y después de que el sistema se ha estabilizado tras la acreción del pulso de campo escalar entrante. Por otro lado, también se ilustra que el horizonte aparente se encuentra siem-

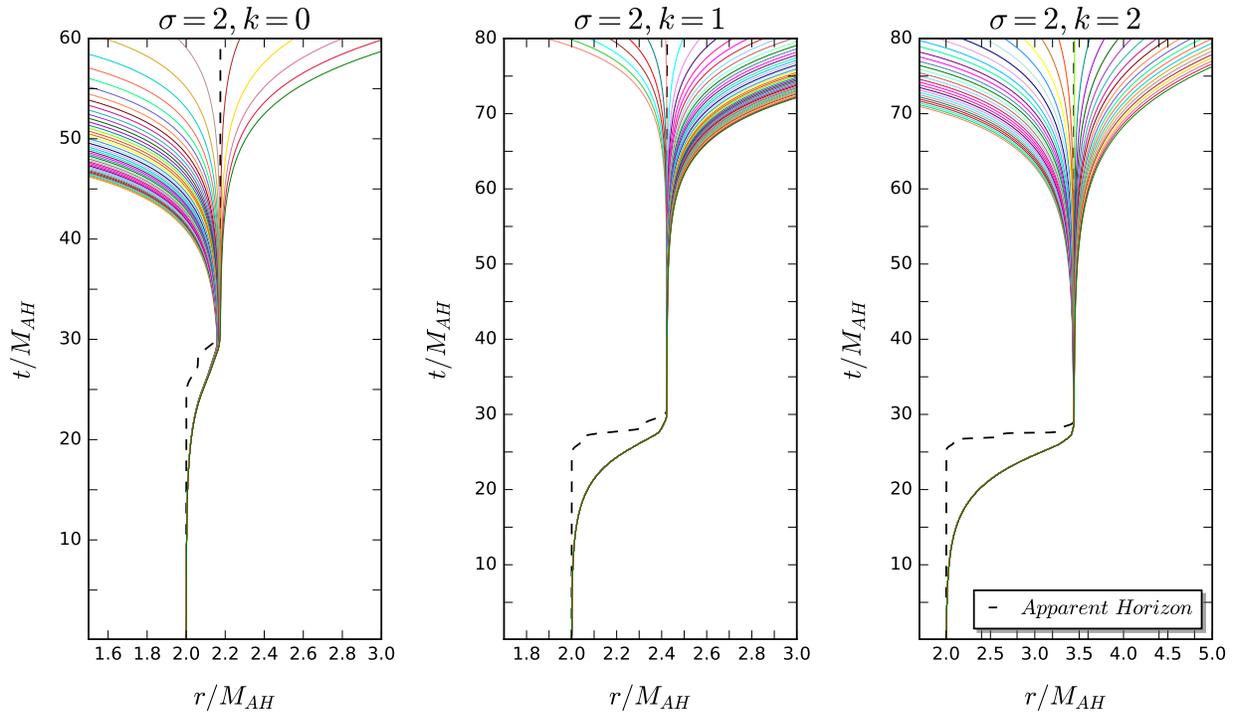


Figura 14. Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 2$  y  $k = 0, 1, 2$ .

pre por dentro del horizonte de eventos, lo cual es consistente con las condiciones de energía del espacio-tiempo. Estas últimas características ya han sido estudiadas con anterioridad en los teoremas propuestos por Hawking y Ellis (Hawking and Ellis, 1973), en consecuencia, los resultados obtenidos computacionalmente se ajustan de manera correcta a la teoría y la física del problema. Adicionalmente, como el horizonte aparente y el horizonte de eventos coinciden después de la acreción del campo escalar, esto permite utilizar el horizonte aparente como la superficie para monitorear la masa del agujero negro. Otro aspecto importante a observar es que, a medida que el valor de  $\sigma$  aumenta el horizonte de eventos disminuye cuando  $k = 0$ . En contraposición, para los valores de  $k = 1$  y  $k = 2$ , cuando  $\sigma$  aumenta el horizonte de eventos también lo hace. Este compor-

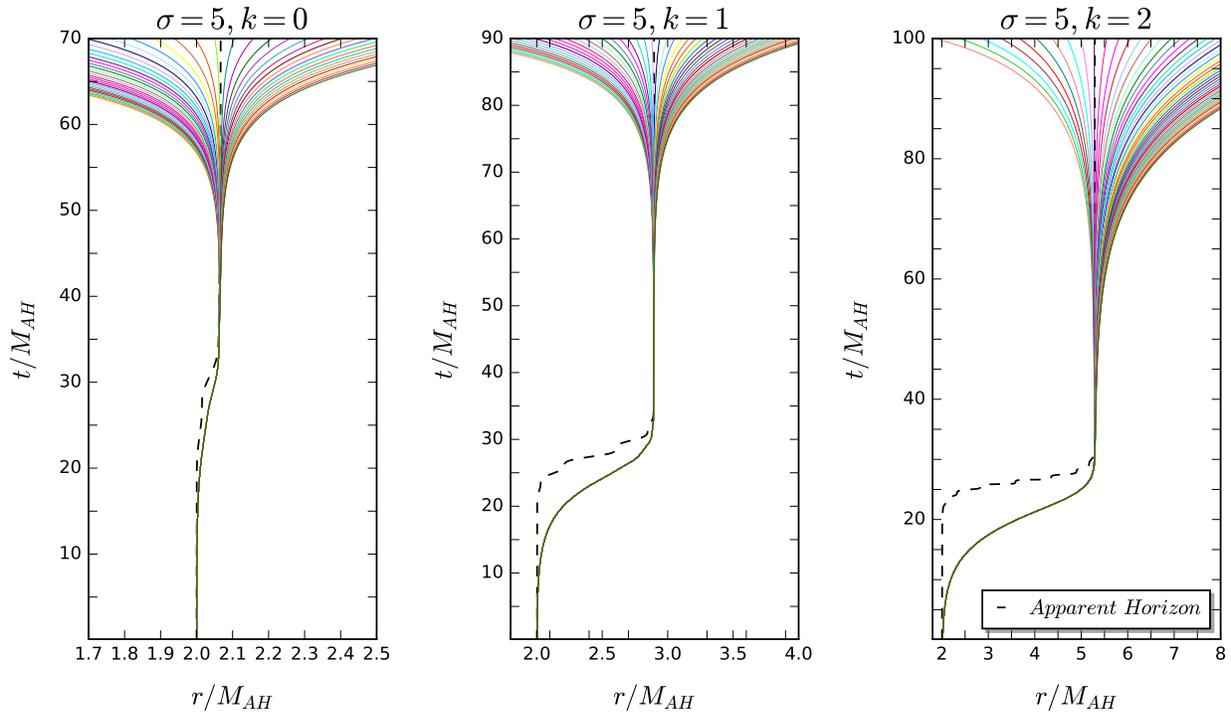


Figura 15. Gráfica correspondiente al horizonte de eventos y horizonte aparente con  $A = 0.8$ ,  $\sigma = 5$  y  $k = 0, 1, 2$ .

tamiento permite confirmar que no toda la densidad de energía del campo escalar es absorbida por el agujero negro cuando  $k = 0$ , como se había encontrado con anterioridad.

Finalmente, para dar veracidad a los resultados presentados con anterioridad, en la Figura (16) se observa el test de convergencia de la norma hamiltoniana. Las resoluciones utilizadas fueron:  $\Delta r_1 = 0.0375M$  (línea continua),  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$  (línea discontinua) y  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$  (línea punteada). En la gráfica se observa una convergencia a segundo orden, lo cual es consistente con el método de diferencias finitas utilizado. También es interesante observar que existen ciertas oscilaciones en la norma hamiltoniana debido al número de onda del campo escalar, aún así, se observa el buen comportamiento del código en todo el dominio.

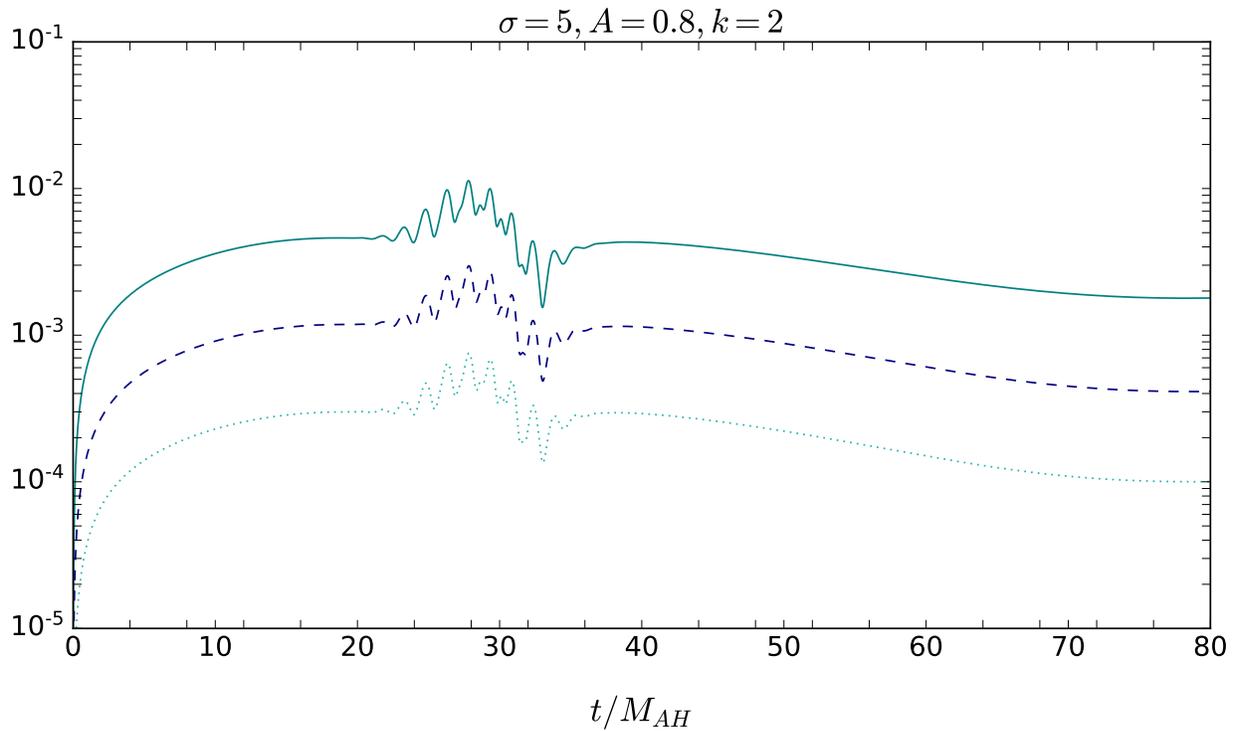


Figura 16. Test de convergencia para la norma de la restricción hamiltoniana, realizado para el caso de  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ .

## 6.2. Shadow y trazado de rayos en un espacio-tiempo dinámico

**Osiris: Órbitas y sombras en espacio-tiempos relativistas.** En este trabajo se hace uso de Osiris, el cual consiste en un código que permite calcular geodésicas nulas alrededor de objetos compactos. En dicho código se incluyen algunos efectos relativistas como lente gravitacional y corrimiento al rojo. Además, a partir de la formulación de Hamilton-Jacobi y el método de trazado inverso de rayos es posible calcular la sombra y el anillo de Einstein de un agujero negro. También es importante visualizar los efectos del campo gravitacional producido por el agujero negro, en consecuencia, Osiris permite analizar las trayectorias de los fotones que orbitan a este objeto compacto y recopilar información acerca de los fotones que escapan y son detectados. Este proceso es

posible a partir del trazado inverso de rayos, en el cual el observador es el origen de las geodésicas nulas y la fuente gravitacional es el agujero negro. Para este caso, las trayectorias seguidas por fotones que caen en el horizonte de eventos se clasifican con color negro (Velásquez-Cadavid et al., 2022).

Osiris no es el único código que utiliza el método de trazado inverso de rayos, este procedimiento ha sido utilizado con anterioridad para simular numéricamente la sombra de agujeros negros. Entre estos se encuentra GYOTO, el cual consiste en un código relativista general de trazado de rayos. Su objetivo es computar imágenes de cuerpos astronómicos en las proximidades de objetos compactos, así como trayectorias de cuerpos masivos en entornos relativistas (Vincent et al., 2011). También es importante mencionar que Osiris también ha sido utilizado para estudiar la sombra producida por un objeto compacto descrito por la q-métrica, la cual consiste en la solución estática más simple y axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein con un momento cuadrupolar diferente de cero (Arrieta-Villamizar et al., 2020). Por otro lado, cabe aclarar que Osiris sólo evoluciona geodésicas nulas en espacio-tiempos axialmente simétricos y estacionarios, de forma que existen dos constantes de movimiento, la energía y el momento angular azimutal. No obstante, el sistema conformado por agujero negro y campo escalar corresponde a un sistema dinámico, por tanto, lo mencionado anteriormente no se cumple en este caso. Debido a esto, es necesario modificar las ecuaciones de movimiento de la formulación hamiltoniana.

### 6.2.1. Ecuaciones de movimiento.

Dado el tensor métrico

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta, \quad (85)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  corresponden a las componentes contra variantes del tensor y  $dx^\alpha$  a las uno formas base. De manera explícita, las componentes del tensor métrico son

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tr} & 0 & 0 \\ g_{rt} & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Teniendo en cuenta este tensor, es posible obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la formulación hamiltoniana

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}, \dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad (87)$$

donde el hamiltoniano se considera para el caso de fotones, y se define en términos de las componentes contra variantes de la métrica, de forma que se satisface

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0, \quad (88)$$

siendo  $p_\alpha$  las componentes de cuadri-momentum. Reemplazando el Hamiltoniano en las ecuaciones (87) y abriendo índices se obtiene

$$\dot{t} = g^{tt} p_t + g^{tr} p_r, \quad (89)$$

$$\dot{r} = g^{tr} p_t + g^{rr} p_r, \quad (90)$$

$$\dot{\theta} = g^{\theta\theta} p_\theta, \quad (91)$$

$$\dot{\phi} = g^{\phi\phi} p_\phi, \quad (92)$$

$$\dot{p}_t = \frac{-p_t^2 \partial_t g^{tt} - 2p_t p_r \partial_t g^{tr} - p_r^2 \partial_t g^{rr} - p_\theta^2 \partial_t g^{\theta\theta} - p_\phi^2 \partial_t g^{\phi\phi}}{2}, \quad (93)$$

$$\dot{p}_r = \frac{-p_t^2 \partial_r g^{tt} - 2p_t p_r \partial_r g^{tr} - p_r^2 \partial_r g^{rr} - p_\theta^2 \partial_r g^{\theta\theta} - p_\phi^2 \partial_r g^{\phi\phi}}{2}, \quad (94)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{-p_t^2 \partial_\theta g^{tt} - 2p_t p_r \partial_\theta g^{tr} - p_r^2 \partial_\theta g^{rr} - p_\theta^2 \partial_\theta g^{\theta\theta} - p_\phi^2 \partial_\theta g^{\phi\phi}}{2}, \quad (95)$$

$$\dot{p}_\phi = 0. \quad (96)$$

Es importante notar que la ecuación (93) contiene derivadas temporales de la métrica. Teniendo en cuenta esto, dicha ecuación se reescribe en términos de la función lapso, el vector de corrimiento y la métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$ . Este procedimiento se realizó a partir de las ecuaciones (11) y (13). Así, las ecuaciones de movimiento que se reescriben en el código de Osiris son

$$\dot{t} = g^{tt} p_t + g^{tr} p_r, \quad (97)$$

$$\dot{r} = g^{tr} p_t + g^{rr} p_r, \quad (98)$$

$$\dot{\theta} = g^{\theta\theta} p_\theta, \quad (99)$$

$$\dot{\phi} = g^{\phi\phi} p_\phi, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_t = & -\frac{p_t^2}{\alpha^3} \partial_t \alpha - \frac{p_t p_r}{\alpha^2} \partial_t \beta^r + \frac{2p_t p_r}{\alpha^3} \beta^r \partial_t \alpha + \frac{p_r^2}{2\gamma_{rr}^2} \partial_t \gamma_{rr} + \frac{p_\theta^2}{2\gamma_{\theta\theta}^2} \partial_t \gamma_{\theta\theta} \\ & + \frac{p_r^2}{\alpha^2} \beta^r \partial_t \beta^r + \frac{p_\phi^2}{2\gamma_{\phi\phi}^2} \partial_t \gamma_{\phi\phi} - \frac{p_r^2}{\alpha^3} \beta^r \beta^r \partial_t \alpha, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\dot{p}_r = \frac{-p_t^2 \partial_r g^{tt} - 2p_t p_r \partial_r g^{tr} - p_r^2 \partial_r g^{rr} - p_\theta^2 \partial_r g^{\theta\theta} - p_\phi^2 \partial_r g^{\phi\phi}}{2}, \quad (102)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{-p_t^2 \partial_\theta g^{tt} - 2p_t p_r \partial_\theta g^{tr} - p_r^2 \partial_\theta g^{rr} - p_\theta^2 \partial_\theta g^{\theta\theta} - p_\phi^2 \partial_\theta g^{\phi\phi}}{2}, \quad (103)$$

$$\dot{p}_\phi = 0. \quad (104)$$

Como se mencionó con anterioridad, estas ecuaciones corresponden a un espacio-tiempo dinámico, donde la métrica sí evoluciona en el tiempo. Dicho sistema de ecuaciones permite observar y analizar la dinámica del campo escalar con el agujero negro, para así obtener la evolución del shadow y el lente gravitacional durante el proceso de acreción del campo escalar.

**6.2.2. Transformación de coordenadas.** Para graficar el shadow del agujero negro es necesario conocer la transformación que relaciona las mediciones en el espacio-tiempo dinámico y esféricamente simétrico con las del observador que es localmente inercial. Considere la base de cuadvectores del espacio-tiempo dinámico y esféricamente simétrico, de forma que los vectores base cumplen la condición

$$e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad (105)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  corresponden a las componentes del tensor métrico con un elemento de línea

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{tr}dtdr. \quad (106)$$

Además, es posible encontrar una base ortonormal en un marco de referencia localmente inercial, donde se cumpla que

$$\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (107)$$

siendo  $\eta_{\alpha\beta}$  la métrica de Minkowski. Cada cuadvivector  $\bar{e}_\alpha$  puede relacionarse con la base  $\{e_\alpha\}$  a partir de una matriz cambio de base

$$\bar{e}_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (108)$$

donde

$$[\Lambda_\alpha^\beta] = \begin{pmatrix} A_t & B_t & C_t & D_t \\ A_r & B_r & C_r & D_r \\ A_\theta & B_\theta & C_\theta & D_\theta \\ A_\phi & B_\phi & C_\phi & D_\phi \end{pmatrix}. \quad (109)$$

En otras palabras, los cuadvivectores  $\bar{e}_\alpha$  se pueden escribir como una combinación lineal, tal que

$$\bar{e}_t = A_t e_t + B_t e_r + C_t e_\theta + D_t e_\phi, \quad (110)$$

$$\bar{e}_i = A_i e_t + B_i e_r + C_i e_\theta + D_i e_\phi,$$

siendo  $i = (r, \theta, \phi)$ . Para esto es necesario encontrar las componentes de la matriz de transformación. Se escoge a una triada de vectores  $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$ , ya que si se elige un conjunto de vectores ortogonales entre sí, cualquier vector colineal a cada uno de ellos también corresponde a vectores ortogonales, es decir

$$\bar{e}_r = B_r e_r, \quad (111)$$

$$\bar{e}_\theta = C_\theta e_\theta, \quad (112)$$

$$\bar{e}_\phi = D_\phi e_\phi. \quad (113)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la matriz de transformación se reduce a

$$[\Lambda_\alpha^\beta] = \begin{pmatrix} A_t & B_t & C_t & D_t \\ 0 & B_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_\phi \end{pmatrix}. \quad (114)$$

También es posible encontrar un vector ortogonal asociado a  $\{e_\alpha\}$  utilizando el procedimiento de Gram-Schmidt

$$e_\perp = e_t - \frac{e_t \cdot e_r}{|e_r|^2} e_r - \frac{e_t \cdot e_\theta}{|e_\theta|^2} e_\theta - \frac{e_t \cdot e_\phi}{|e_\phi|^2} e_\phi = e_t - \frac{g_{tr}}{g_{rr}} e_r, \quad (115)$$

de forma que

$$\bar{e}_t \propto e_\perp \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_t = \alpha \left( e_t - \frac{g_{tr}}{g_{rr}} e_r \right). \quad (116)$$

Ahora, reemplazando (116) en la expresión (110) se obtiene que las constantes corresponden a

$$C_t = D_t = 0, \quad A_t = \alpha, \quad B_t = -A_t \frac{g_{tr}}{g_{rr}}, \quad (117)$$

en consecuencia, los vectores de la base localmente inercial se reescriben como

$$\bar{e}_t = \alpha \left( e_t - \frac{g_{tr}}{g_{rr}} e_r \right), \quad \bar{e}_r = B_r e_r, \quad \bar{e}_\theta = C_\theta e_\theta, \quad \bar{e}_\phi = D_\phi e_\phi. \quad (118)$$

Para hallar las constantes faltantes, se tienen en cuenta las condiciones de ortonormalización

$$\bar{e}_t \cdot \bar{e}_t = -1, \quad \bar{e}_r \cdot \bar{e}_r = 1, \quad \bar{e}_\theta \cdot \bar{e}_\theta = 1, \quad \bar{e}_\phi \cdot \bar{e}_\phi = 1, \quad (119)$$

por lo cual, las constantes son

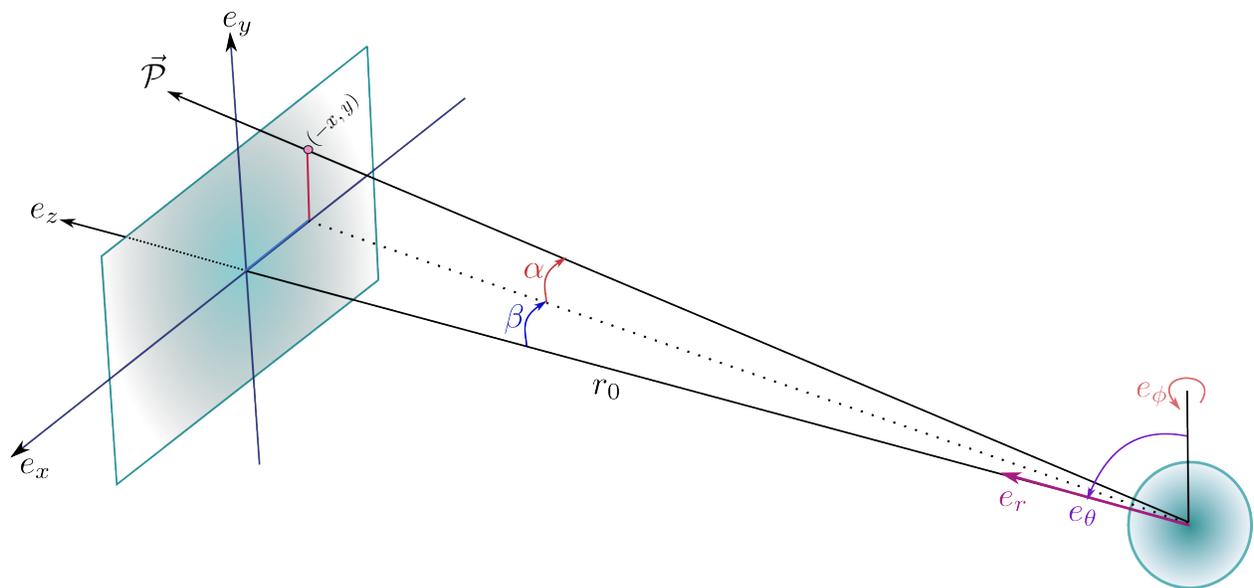
$$A_t = \pm \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tr}^2 - g_{tt}g_{rr}}}, \quad B_r = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad C_\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad D_\phi = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}. \quad (120)$$

Finalmente, la matriz cambio de base es

$$[\Lambda_{\alpha}^{\beta}] = \begin{pmatrix} A_t & -A_t \frac{g_{tr}}{g_{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Esta última expresión relaciona las mediciones hechas por el observador inercial con el observador asociado al espacio-tiempo dinámico y esféricamente simétrico.

**6.2.3. Parámetros de impacto.** Para encontrar el shadow del agujero negro es necesario estudiar la información de los fotones que lo orbitan. Para esto se hace uso de los parámetros de impacto. Los parámetros de impacto corresponden a las coordenadas  $(x,y)$  del plano en el cual el observador realiza las mediciones (Cunha, 2015). Dicho observador se encuentra ubicado en el infinito.



*Figura 17.* Ilustración de los parámetros de impacto. Se observa el plano imagen asociado a un observador inercial que se encuentra ubicado a  $r_0$  del agujero negro. La posición del fotón se describe a partir de la componente espacial de  $\vec{P}$ . Los parámetros  $x$  y  $y$  se relacionan directamente con los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , donde  $\alpha$  corresponde al ángulo formado entre  $\vec{P}$  y su proyección en  $xz$  y  $\beta$  es el ángulo entre la proyección y  $r_0$ . Tomado y adaptado de (Arrieta-Villamizar and Velásquez-Cadavid, 2019).

Debido a que se está ubicando al observador en el infinito, es posible realizar una aproximación

para ángulos pequeños, así

$$x = -\beta r_0, \quad y = \alpha r_0. \quad (122)$$

También es importante mencionar que los momentos del marco inercial  $\mathcal{P}^\alpha$  se relacionan con los momentos canónicos a partir de la transformación

$$\mathcal{P}^\alpha = \eta^{\alpha\mu} \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu, \quad (123)$$

en consecuencia, se tiene que

$$\mathcal{P}^t = A_t \left[ -p_t + \frac{g_{tr}}{g_{rr}} p_r \right] = \mathcal{E} \quad (124)$$

$$\mathcal{P}^r = \frac{p_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \mathcal{P}^\theta = \frac{p_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \mathcal{P}^\phi = \frac{p_\phi}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}. \quad (125)$$

Note que, a partir de la Figura (17) se observa que las componentes del momentum en el marco inercial se definen como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^r &= |\vec{\mathcal{P}}| \cos \alpha \cos \beta, \\ \mathcal{P}^\theta &= |\vec{\mathcal{P}}| \sin \alpha, \\ \mathcal{P}^\phi &= |\vec{\mathcal{P}}| \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned} \quad (126)$$

donde la magnitud del cuádrimomento satisface la ligadura hamiltoniana

$$|\mathcal{P}|^2 = -(\mathcal{P}^t)^2 + (\mathcal{P}^r)^2 + (\mathcal{P}^\theta)^2 + (\mathcal{P}^\phi)^2 = 0. \quad (127)$$

Realizando la aproximación de ángulos pequeños, las componentes se reducen a

$$\mathcal{P}^r = |\vec{\mathcal{P}}|, \quad \mathcal{P}^\theta = \alpha |\vec{\mathcal{P}}|, \quad \mathcal{P}^\phi = \beta |\vec{\mathcal{P}}|, \quad (128)$$

es decir, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se definen como

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}^\theta}{\mathcal{P}^r}, \quad \beta = \frac{\mathcal{P}^\phi}{\mathcal{P}^r}, \quad (129)$$

y sustituyendo (129) en las expresiones (122)

$$x = -r_0 \frac{\mathcal{P}^\phi}{\mathcal{P}^r}, \quad y = r_0 \frac{\mathcal{P}^\theta}{\mathcal{P}^r}. \quad (130)$$

Como se ha mencionado anteriormente, los fotones que impactan el plano imagen se pueden describir a partir de los parámetros de impacto  $(x, y)$ . Después de realizar un enmallado numérico, a partir de las ecuaciones (124) y (125) se generan las condiciones iniciales. Teniendo en cuenta que la energía no afecta al movimiento de los fotones, se toma  $\mathcal{E} = 1$ . En consecuencia, despejando los momentos canónicos se obtienen las siguientes condiciones iniciales

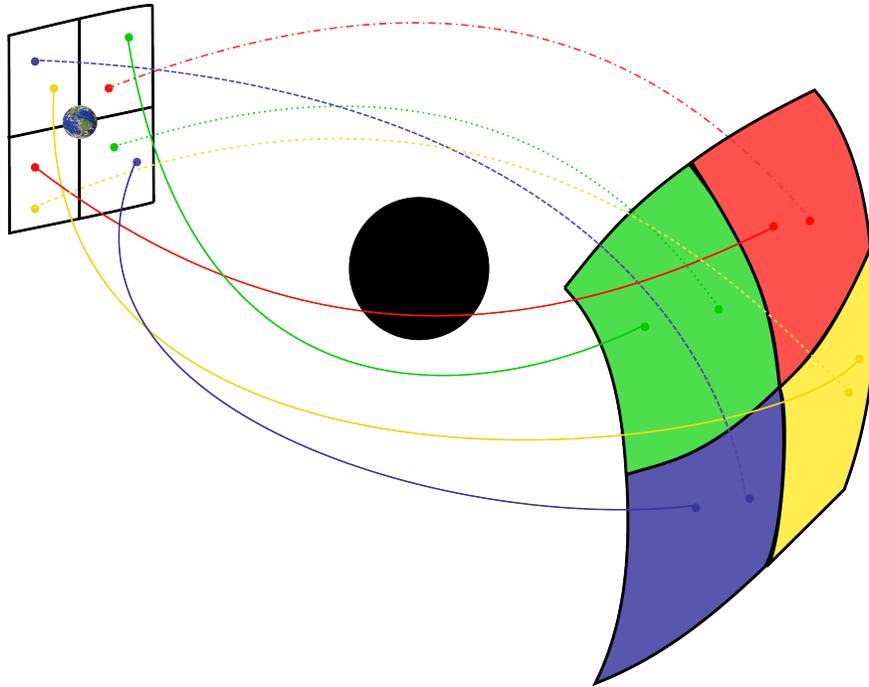
$$p_\theta = \frac{y\sqrt{g_{\theta\theta}}}{r_0}, \quad (131)$$

$$P_t = -\frac{1}{A_t} + \frac{g_{tr}}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad (132)$$

$$P_\phi = -\frac{x\sqrt{g_{\phi\phi}}}{r_0}, \quad (133)$$

$$p_r = \sqrt{g_{rr} \left[ 1 - (\mathcal{P}^\theta)^2 - (\mathcal{P}^\phi)^2 \right]}. \quad (134)$$

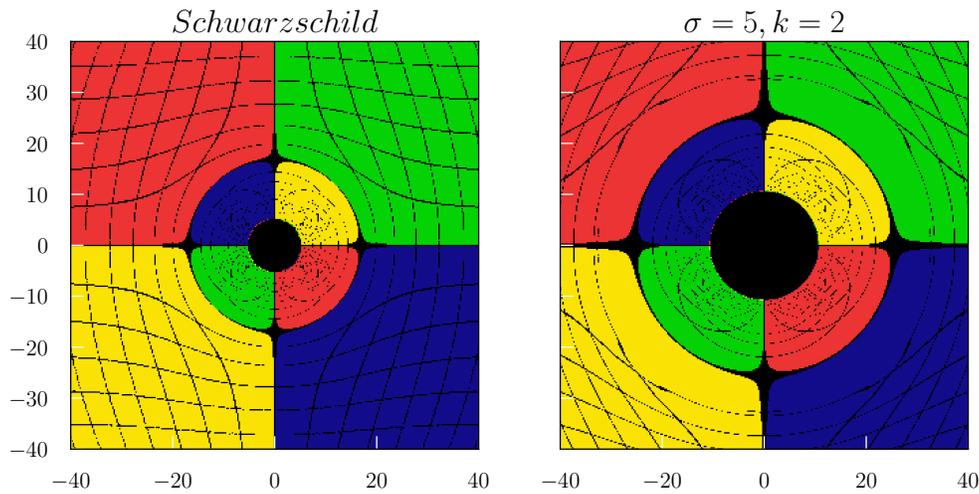
**6.2.4. Lente gravitacional.** Para comprender el fenómeno de lente gravitacional se hace necesario entender el proceso de clasificación de órbitas. Para esto se hace uso del concepto de esfera celeste, desde la cual se emanan los fotones. El código se encuentra diseñado de manera que la esfera celeste es concéntrica con el agujero negro y envuelve al observador en tierra. Así, cuando el fotón cae al agujero negro entonces corresponde a un punto negro en el plano imagen, por otro lado, si el fotón escapa de la atracción gravitacional el proceso de integración se detiene y se asigna un color dependiendo de la región de la esfera en la cual golpea el fotón. Dicha clasificación de órbitas permite estudiar la curvatura de la luz en presencia del agujero negro y del campo escalar. En este caso, cuando este sistema se interpone entre el observador y la fuente existe una deflexión en la trayectoria de los fotones, en consecuencia, es posible que un fotón emitido en una región de la esfera aparente haber sido emitido desde una zona distinta, como se observa en la Figura (18). Este fenómeno se conoce como lente gravitacional.



*Figura 18.* Curvatura en la trayectoria de los fotones debido al agujero negro. Algunos fotones son detectados en el plano imagen como si hubieran sido emitidos desde un punto diferente de la esfera celeste. Tomado y adaptado de (Arrieta-Villamizar and Velásquez-Cadauid, 2019)

Un efecto interesante que aparece en el lente gravitacional es el anillo de Einstein, donde la fuente lumínica aparente ser un anillo concéntrico al agujero negro (Einstein, 1936). Dicho fenómeno se hace presente cuando la fuente, el observador y el agujero negro se encuentran alineados (Bozza, 2005). A continuación, se observan las simulaciones realizadas del lente gravitacional producido por el sistema agujero negro-campo escalar. Dicho lente gravitacional se midió para cada uno de los casos de  $\sigma$  y  $k$  mencionados con anterioridad. Además, es importante mencionar que estas simulaciones se observan desde el plano ecuatorial a una distancia  $r = 110$  y localizado en  $\phi = 1.57$ . Como un primer acercamiento, se mide el shadow y el lente gravitacional teniendo en cuenta la presencia del campo escalar, y se compara con la producida por un agujero negro de

Schwarzschild.

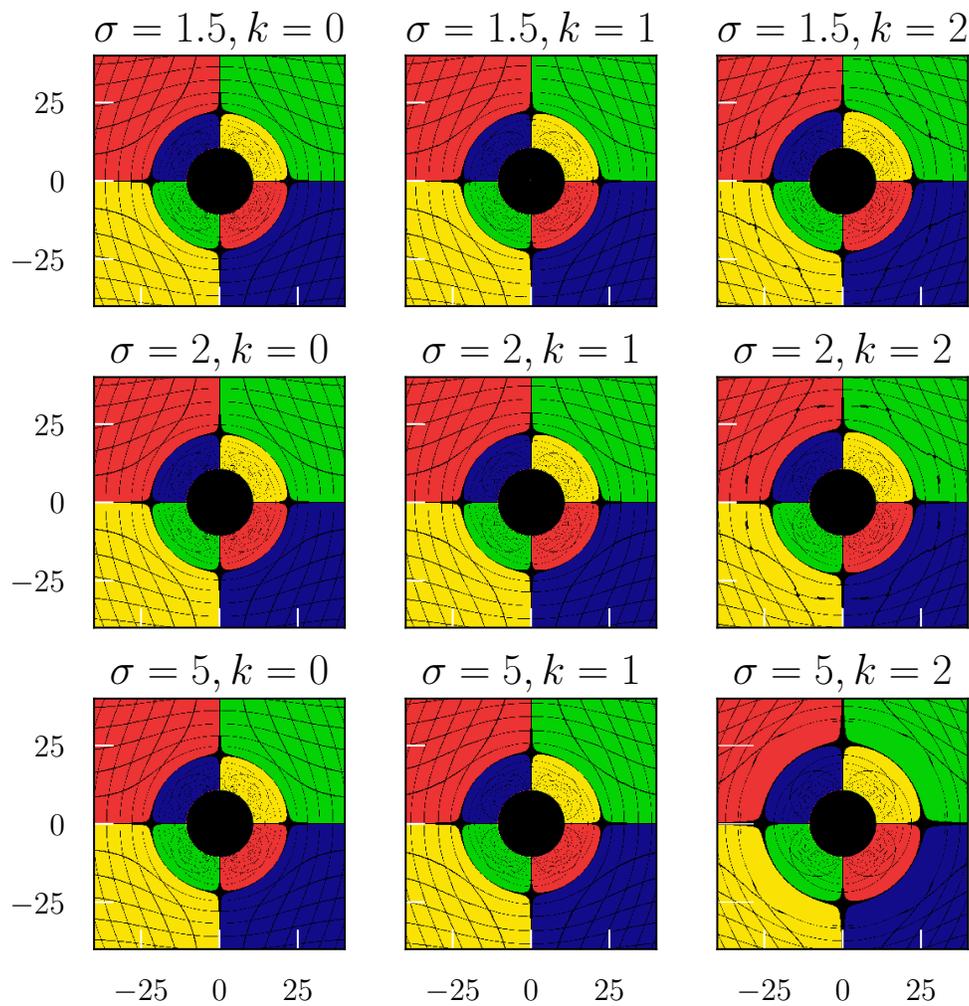


*Figura 19.* Dato inicial del lente gravitacional producido por un agujero negro de Schwarzschild vs el lente gravitacional producido por el agujero negro con campo escalar cuando  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . En esta figura se observa un crecimiento en el tamaño del lente y el shadow cuando se tiene el sistema acoplado agujero negro-campo escalar.

En la Figura (19) se plasma la diferencia en el fenómeno del lente gravitacional para un agujero negro de Schwarzschild (izquierda) y el producido por el agujero negro con el campo escalar para  $\sigma = 5$  y  $k = 2$  (derecha). En esta Figura se observa un aumento significativo en el tamaño del lente gravitacional, además, también se aprecia que el anillo de Einstein y la sombra producida por el agujero negro es mayor para la configuración del campo escalar. Específicamente, para el agujero negro de Schwarzschild se encontró que el tamaño de la esfera de fotones corresponde a  $r_{psS} = 5.3670$ , mientras que el tamaño con el campo escalar es  $r_{psSF} = 10.5159$ . Así, el radio de la esfera de fotones crece aproximadamente el doble con dicha configuración, siendo  $r_{psSF} = 1.96r_{psS}$  la relación entre estas. Adicionalmente, el tamaño del anillo de Einstein para el agujero negro de Schwarzschild es  $r_{erS} = 16.7783$ , y el tamaño del anillo con el campo escalar es  $r_{erSF} =$

26.0088. Por otro lado, también se observa una gran diferencia en el enmallado numérico debido a la curvatura del espacio-tiempo, la cual se hace más visible debido al campo escalar.

Adicionalmente, este mismo proceso se realizó para cada una de las configuraciones del campo escalar. En la Figura (20) se muestra el lente gravitacional a tiempo inicial. Para cada dato inicial se tiene que el valor del radio de la esfera de fotones se mantiene aproximadamente constante ( $r_{ps} = 10.5159$ ), independientemente de la configuración. También se observa que el tamaño del lente gravitacional sí cambia, y el mayor crecimiento en el anillo de Einstein se obtiene para  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . Dentro de este anillo, el ángulo de desviación de las trayectorias de los fotones es lo suficientemente grande como para generar una inversión de los colores (Bohn et al., 2015).



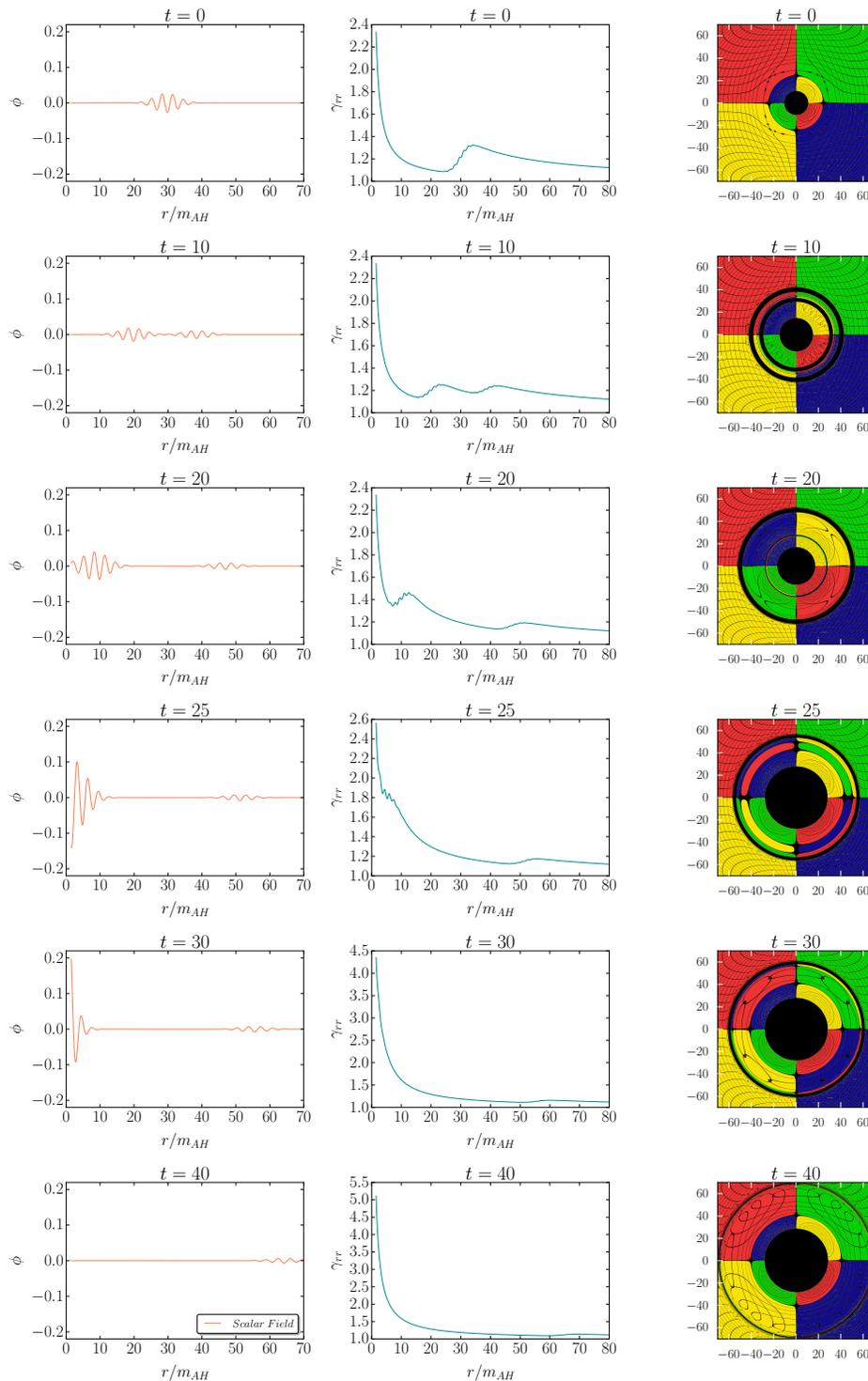
*Figura 20.* Lente gravitacional producido por el sistema agujero negro-campo escalar para las diferentes configuraciones. En esta figura se observa un tamaño constante del shadow del agujero negro, en contra posición, se percibe un aumento en el anillo de Einstein.

Por otro lado, también es posible analizar la evolución del fenómeno del lente gravitacional a medida que el campo escalar es absorbido por el agujero negro. La Figura (21) muestra snapshots del campo escalar con  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ , y su respectivo fenómeno del lente gravitacional. Para los diferentes instantes se observa un comportamiento diferente en la sombra del agujero negro, el cual

se encuentra plasmado en la tercera columna de esta figura. En el instante  $t = 0$  se observa la misma configuración inicial obtenida con anterioridad, en la cual se perciben dos anillos de Einstein: uno exterior y otro en el límite de la sombra del agujero negro. Posteriormente, cuando inicia el proceso de acreción en  $t = 10$  se observa un comportamiento interesante, correspondiente a la creación de múltiples anillos de Einstein. Para este caso se observa la separación del campo escalar en el pulso entrante y saliente, lo cual conduce a la creación de dos anillos negros, el anillo exterior está asociado con el pulso del campo escalar saliente, y el interior está asociado con el pulso escalar entrante. Este comportamiento permite concluir que la presencia de los dos pulsos generan dos sombras adicionales tipo anillo. En el tiempo  $t = 20$  se observa que cuando el pulso se empieza a mover hacia el agujero negro, la sombra tipo anillo interior empieza a desaparecer. Posteriormente, cuando el agujero negro ha absorbido aproximadamente la mitad del campo escalar en  $t = 25$ , se observan cuatro anillos de Einstein, y la sombra interior desaparece. Finalmente, después de terminada la acreción en su totalidad, en  $t = 40$  se observa un crecimiento considerable en la sombra del agujero negro. Específicamente, la sombra toma un valor de  $r_{psSF} = 28.8294$ , es decir, aproximadamente 2,75 veces mas grande que en la configuración inicial. Adicionalmente, en esta figura también se puede observar la evolución de la métrica espacial, la cual es una medida del cambio en la geometría del espacio-tiempo. En estas gráficas correspondientes se observan las perturbaciones debido a los pulsos del campo escalar.

La creación de múltiples anillos de Einstein se ha estudiado con anterioridad en sistemas como estrellas de bosones. En el artículo (Cunha et al., 2015) se presenta la clasificación de estas estrellas a partir del lente gravitacional producido. Así, cuando existe una creación de múltiples

anillos de Einstein corresponden a una transición de objetos compactos a objetos ultra-compactos (Cardoso et al., 2014). Adicionalmente, en el artículo (Bohn et al., 2015) se presenta el análisis del lente gravitacional para agujeros negros de Kerr y sistemas binarios de agujeros negros. En sus resultados se presentan imágenes con una estructura similar a las encontradas en este proyecto de investigación. Específicamente, se observa una sombra primaria para cada agujero negro, en dicha configuración un agujero negro se encuentra aproximadamente detrás del otro y como resultado su sombra se vuelve un anillo oscuro. El ancho de este anillo se ve afectado principalmente por la separación del sistema, a medida que la separación es mayor el anillo es mas delgado. De manera análoga, en este proyecto se presentan sombras adicionales tipo anillo debido a la presencia de los dos pulsos del campo escalar.



*Figura 21.* Snapshots de la evolución del lente gravitacional en el proceso de absorción del campo escalar para  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . En la primera columna se observa el comportamiento del campo escalar en diferentes instantes de tiempo, en la segunda se observa el cambio en la métrica del espacio-tiempo. Por último, se muestra el cambio en la sombra del agujero negro y el lente gravitacional en el proceso de acreción.

## 7. Conclusiones

En este proyecto de investigación se propuso que la materia oscura se puede describir a partir de un campo escalar real dotado de cierto potencial, específicamente, el perfil del campo escalar usado corresponde a una onda esférica modulada por un perfil gaussiano. Dicho modelo utilizado se conoce como modelo de materia oscura escalar. El objetivo general de este trabajo fue modelar la dinámica del sistema acoplado agujero negro-campo escalar en un espacio-tiempo dinámico. A partir de allí, el primer paso realizado fue reproducir las ecuaciones que determinan la evolución y la dinámica tanto del espacio-tiempo como el campo escalar. Para esto se utilizó como herramienta el formalismo 3+1 de la relatividad general, el cual permitió descomponer las ecuaciones de Einstein y escribirlas como un problema de valores iniciales. Además, también se descomponen la ecuación de Klein-Gordon y se hallan los términos de fuente. Así mismo, para analizar la dinámica del sistema, se desarrolló un código en simetría esférica que permite solucionar dicho sistema de ecuaciones a partir del método de líneas, el cual consiste en una discretización espacial usando diferencias finitas, y un integrador en el tiempo tipo Runge-Kutta Dormand Prince para la evolución. Este código Fortran permitió calcular la evolución del horizonte de eventos del agujero negro en el proceso de acreción, además, también fue posible calcular la masa ADM y la masa de Misner-Sharp, las cuales permitieron estudiar la cantidad de campo escalar acretado por el agujero negro en término de los parámetros número de onda,  $k$  y ancho del paquete,  $\sigma$ .

Los resultados confirman que para perfiles de onda esférica del campo escalar y un número de onda de  $k = 0$ , no toda la densidad de energía es absorbida por el agujero negro. A medida que el

ancho del paquete de onda se hace mayor que el radio del agujero negro, el proceso de acreción se vuelve ineficiente. Por el contrario, para los valores de  $k = 1$  y  $k = 2$  se encontró que todo el campo escalar es absorbido. Además, también se observó la evolución del horizonte de eventos, donde el mayor crecimiento se encontró para el caso de  $\sigma = 5$  y  $k = 2$ . Dicha evolución permitió corroborar que el horizonte aparente se encuentra siempre por dentro del horizonte de eventos, además, estos coinciden a tiempo inicial y después del proceso de acreción. Esto es coherente teniendo en cuenta las condiciones de energía del espacio-tiempo.

Posteriormente, también se planteó una pregunta interesante sobre el efecto que tiene la presencia del campo escalar en el agujero negro. A partir del desarrollo de la teoría de Shadows y el código OSIRIS, fue posible conocer la evolución del shadow y el fenómeno del lente gravitacional para diferentes configuraciones del campo escalar. Este código permitió analizar las trayectorias de los fotones que orbitan al sistema acoplado a partir del método de trazado inverso de rayos. Cabe aclarar que inicialmente OSIRIS sólo evolucionaba geodésicas nulas en espacio-tiempos axialmente simétricos y estacionarios, en consecuencia, como primer paso, se hizo necesario modificar las ecuaciones de movimiento a partir de la formulación de Hamilton-Jacobi, teniendo en cuenta que la métrica sí está cambiando en el tiempo y el campo escalar deforma la geometría del espacio-tiempo. Adicionalmente, para calcular el shadow del agujero negro fue necesario realizar una transformación de coordenadas que relaciona las mediciones en el espacio-tiempo dinámico con las de un observador localmente inercial y estudiar los parámetros de impacto. A partir de los resultados encontrados se observó que en el dato inicial el radio de la esfera de fotones se mantiene aproximadamente constante en un valor de  $r_{ps} = 10.5159$ , independientemente de los valores de  $k$

y  $\sigma$ . No obstante, sí se observó un incremento en el tamaño del lente gravitacional a medida que el valor de  $\sigma$  y  $k$  aumentan. Por otro lado, al estudiar la evolución del shadow para  $\sigma = 5$  y  $k = 2$  se observó un comportamiento interesante debido a la creación de múltiples anillos de Einstein. Además, al terminar el proceso de acreción se encontró que el tamaño de la sombra aumenta 2.75 veces cuando el campo escalar es absorbido.

Finalmente, como se ha mencionado, en este trabajo de tesis se ha desarrollado el estudio del sistema acoplado agujero negro-campo escalar, se ha analizado la evolución del shadow y el proceso de acreción del campo escalar. Dichos estudios pueden extenderse al considerar otro tipo de dato inicial para el campo escalar, y un potencial con término de auto-interacción. Adicionalmente, también sería posible estudiar dicho proceso de acreción considerando un campo escalar phantom, produciéndose una reducción en el tamaño del horizonte de eventos. También es importante mencionar que debido a la relevancia de los resultados, en este momento se encuentra en proceso de creación un artículo en donde se presentan los efectos del campo escalar en la sombra y el lente gravitacional producido. Además, otra proyección para un trabajo posterior es analizar escenarios astro físicos más complejos, como pueden ser los agujeros negros binarios y analizar cómo se ven afectados por la presencia del campo escalar.

### Referencias Bibliográficas

- Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., Azulay, R., Bacsko, A.-K., Ball, D., Baloković, M., Barrett, J., Bintley, D., et al. (2019). First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L4.
- Alcubierre, M. (2007). Introducción a la relatividad numérica. *Revista mexicana de física*, 53.
- Alcubierre, M. (2008). *Introduction to 3+1 numerical relativity*. Oxford University Press.
- Ang, T. K. and Amir Hamzah, N. S. (2018). *Solving ordinary differential equations by the Dormand Prince method*. Penerbit UTHM.
- Arrieta-Villamizar, J. and Velásquez-Cadavid, J. (2019). Shadows en agujeros negros estacionarios y axialmente simétricos. Thesis.
- Arrieta-Villamizar, J., Velásquez-Cadavid, J., Pimentel, O., Lora-Clavijo, F., and Gutiérrez-Piñeres, A. (2020). Shadows around the q-metric. *Classical and Quantum Gravity*, 38(1):015008.
- Balberg, S. and Shapiro, S. L. (2002). Gravo-thermal collapse of self-interacting dark matter halos and the origin of massive black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 88:101301.
- Baumgarte, T. W. and Shapiro, S. L. (2010). *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press.

- Bertone, G. and Hooper, D. (2018). History of dark matter. *Reviews of Modern Physics*, 90(4):045002.
- Bohn, A., Throwe, W., Hébert, F., Henriksson, K., Bunandar, D., Scheel, M. A., and Taylor, N. W. (2015). What does a binary black hole merger look like? *Classical and Quantum Gravity*, 32(6):065002.
- Bozza, V. (2005). Silvia mollerach, esteban roulet: Gravitational lensing and microlensing. *General Relativity and Gravitation*, 37(7):1335–1336.
- Butcher, J. C. (1987). *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley-Interscience.
- Cardoso, V., Crispino, L. C., Macedo, C. F., Okawa, H., and Pani, P. (2014). Light rings as observational evidence for event horizons: long-lived modes, ergoregions and nonlinear instabilities of ultracompact objects. *Physical Review D*, 90(4):044069.
- Carter, B. (1968). Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 174(5):1559.
- Choptuik, M. W. (1993). Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Physical Review Letters*, 70(1):9.
- Collaboration, E. H. T., Akiyama, and et al (2019). First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *apjl*, 875(1):L1.

- Cruz-Osorio, A., Guzmán, F. S., and Lora-Clavijo, F. D. (2011). Scalar field dark matter: behavior around black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(06):029.
- Cunha, P. V. and Herdeiro, C. A. (2018). Shadows and strong gravitational lensing: a brief review. *General Relativity and Gravitation*, 50(4):1–27.
- Cunha, P. V., Herdeiro, C. A., Radu, E., and Rúnarsson, H. F. (2015). Shadows of kerr black holes with scalar hair. *Physical review letters*, 115(21):211102.
- Cunha, P. V. P. d. (2015). *Black hole shadows-Sombras de buracos negros*. PhD thesis.
- Curiel, E. (2019). The many definitions of a black hole. *Nature Astronomy*, 3(1):27–34.
- De Swart, J., Bertone, G., and van Dongen, J. (2017). How dark matter came to matter. *Nature Astronomy*, 1(3):1–9.
- Dormand, J. R. and Prince, P. J. (1980). A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, 6(1):19–26.
- Einstein, A. (1915). Die feldgleichungen der gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, pages 844–847.
- Einstein, A. (1936). Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. *Science*, 84(2188):506–507.
- Faraoni, V. (2015). *Cosmological and black hole apparent horizons*, volume 907. Springer.
- Geroch, R. (1970). Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, 11(2):437–449.

- Gourgoulhon, E. (2012). *3+1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, volume 846. Springer Science & Business Media.
- Guzmán, F. (2010). Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. *Revista mexicana de física E*, 56(1):51–68.
- Guzmán, F. and Lora-Clavijo, F. D. (2012). Spherical nonlinear absorption of cosmological scalar fields onto a black hole. *Physical Review D*, 85(2):024036.
- Guzmán, F. S. and Matos, T. (2000). Scalar fields as dark matter in spiral galaxies. *Classical and Quantum Gravity*, 17(1):L9.
- Haroon, S., Jamil, M., Jusufi, K., Lin, K., and Mann, R. B. (2019). Shadow and deflection angle of rotating black holes in perfect fluid dark matter with a cosmological constant. *Physical Review D*, 99(4):044015.
- Hawking, S. and Penrose, R. (1970). The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):529–548.
- Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press.
- Hawley, J. F. (1984). *A numerical study of nonspherical black hole accretion*. University of Illinois at Urbana-Champaign.

- Hawley, J. F., Smarr, L. L., and Wilson, J. R. (1984). A numerical study of nonspherical black hole accretion. i equations and test problems. *The Astrophysical Journal*, 277:296–311.
- Hou, X., Xu, Z., Zhou, M., and Wang, J. (2018). Black hole shadow of sgr a\* in dark matter halo. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(07):015.
- Israel, W. (1967). Event horizons in static vacuum space-times. *Physical review*, 164(5):1776.
- Khodadi, M., Allahyari, A., Vagnozzi, S., and Mota, D. F. (2020). Black holes with scalar hair in light of the event horizon telescope. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(09):026.
- Konoplya, R. (2019). Shadow of a black hole surrounded by dark matter. *Physics Letters B*, 795:1–6.
- Lima Junior, H. C., da Cunha, P. V., Herdeiro, C. A., and Crispino, L. C. (2020). Sombras de buracos negros: desvendando a física por detrás da imagem de m87. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 44.
- Luminet, J. (1991). *Agujeros negros*. Alianza editorial.
- Magana, J. and Matos, T. (2012). A brief review of the scalar field dark matter model. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 378, page 012012. IOP Publishing.
- Marsa, R. L. (1995). *Radiative problems in black hole spacetimes*. The University of Texas at Austin.

- Marsa, R. L. and Choptuik, M. W. (1996). Black-hole–scalar-field interactions in spherical symmetry. *Physical Review D*, 54(8):4929.
- Matos, T., Guzmán, F. S., and Nunez, D. (2000). Spherical scalar field halo in galaxies. *Physical Review D*, 62(6):061301.
- Moore, B. (1994). Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes. *Nature*, 370(6491):629–631.
- Oh, S.-H., Hunter, D. A., Brinks, E., Elmegreen, B. G., Schrubba, A., Walter, F., Rupen, M. P., Young, L. M., Simpson, C. E., Johnson, M. C., et al. (2015). High-resolution mass models of dwarf galaxies from little things. *The Astronomical Journal*, 149(6):180.
- Peirani, S. and de Freitas Pacheco, J. A. (2008). Dark matter accretion into supermassive black holes. *Physical Review D*, 77(6):064023.
- Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57.
- Read, J. I. and Gilmore, G. (2003). Can supermassive black holes alter cold dark matter cusps through accretion? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 339(4):949–956.
- Romeel, D., D., S., Steinhardt, P. J., and Wandelt, B. D. (2001). Halo properties in cosmological simulations of self-interacting cold dark matter. 547(2):574–589.
- Romero, G. E. and Vila (2013). *Introduction to black hole astrophysics*, volume 876. Springer.

- Sahni, V. and Wang, L. (2000). New cosmological model of quintessence and dark matter. *Physical Review D*, 62(10):103517.
- Scheel, M. A., Baumgarte, T. W., Cook, G. B., Shapiro, S. L., and Teukolsky, S. A. (1997). Numerical evolution of black holes with a hyperbolic formulation of general relativity. *Physical Review D*, 56(10):6320.
- Scheel, M. A., Shapiro, S. L., and Teukolsky, S. A. (1995). Collapse to black holes in brans-dicke theory. ii. comparison with general relativity. *Physical Review D*, 51(8):4236.
- Shibata, M. (2015). *Numerical relativity*, volume 1. World Scientific.
- Suárez, A. and Chavanis, P.-H. (2015). Hydrodynamic representation of the klein-gordon-einstein equations in the weak field limit: General formalism and perturbations analysis. *Physical Review D*, 92(2):023510.
- Thornburg, J. (1999). A 3+ 1 computational scheme for dynamic spherically symmetric black hole spacetimes—ii: Time evolution. *arXiv preprint gr-qc/9906022*.
- Thorne, K. (1991). *Agujeros negros y tiempo curvo*. Crítica.
- Thorne, K. S., Misner, C. W., and Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman.
- Urena-López, L. A. (2019). Brief review on scalar field dark matter models. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6:47.

- Urena-Lopez, L. A. and Fernández, L. M. (2011). Black holes and the absorption rate of cosmological scalar fields. *Physical Review D*, 84(4):044052.
- Vázquez-González, A. and Matos, T. (2008). La materia oscura del universo: retos y perspectivas. *Revista mexicana de física E*, 54(2):193–202.
- Velásquez-Cadavid, J., Arrieta-Villamizar, J., Lora-Clavijo, F., Pimentel, O., and Osorio-Vargas, J. (2022). Osiris: a new code for ray tracing around compact objects. *The European Physical Journal C*, 82(2):1–12.
- Velásquez-Cadavid, J., Lora-Clavijo, F. D., Pimentel, O. M., and Arrieta-Villamizar, J. (2023). Synchrotron emitting komissarov torus with magnetic polarization around kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 519(3):3584–3594.
- Vincent, F. H., Paumard, T., Gourgoulhon, E., and Perrin, G. (2011). Gyoto: a new general relativistic ray-tracing code. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225011.
- Wan, M.-Y. and Wu, C. (2022). Absorption and scattering of massless scalar wave from regular black holes. *General Relativity and Gravitation*, 54(11):1–14.
- Xu, Z., Hou, X., and Wang, J. (2018). Possibility of identifying matter around rotating black hole with black hole shadow. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(10):046.

## Apéndices

### Apéndice A. Foliación del espacio-tiempo

---

#### Ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi

**Ecuación de Gauss-Codazzi.** En este apéndice se presenta de manera detallada el procedimiento para obtener las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi. Partiendo de la identidad de Ricci (16)

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma - D_\beta D_\alpha v^\gamma = R^\gamma_{\mu\alpha\beta} v^\mu, \quad (135)$$

siendo  $v$  un campo vectorial tangente a la hipersuperficie. Utilizando la relación existente entre  $\nabla$  y  $\mathbf{D}$ , es decir, la derivada covariante con respecto a la conexión Levi-Civita

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta v^\gamma &= D_\alpha (D_\beta v^\gamma) = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (D_\nu v^\rho), \\ &= \gamma^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (\gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda). \end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación (11) en la expresión anterior

$$\begin{aligned}
D_\alpha D_\beta v^\gamma &= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda \left( n^\sigma \nabla_\mu n_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma^\sigma{}_\nu \nabla_\mu n^\rho n_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma^\sigma{}_\nu \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \right), \\
&= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda v^\lambda \nabla_\mu n^\rho \nabla_\sigma n_\lambda + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda, \\
&= -K_{\alpha\beta} \gamma^\rho{}_\lambda n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - K^\gamma{}_\alpha K_{\beta\lambda} v^\lambda + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda,
\end{aligned}$$

donde se han utilizado las relaciones  $\gamma^\rho{}_\lambda \gamma^\lambda{}_\rho = \gamma^\rho{}_\rho$  y  $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = -K_{\beta\alpha}$ . Para obtener la expresión para  $D_\beta D_\alpha v^\gamma$  en la ecuación (135) solo basta con permutar los índices  $\alpha$  y  $\beta$ , obteniéndose así

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma - D_\beta D_\alpha v^\gamma = (K_{\alpha\mu} K^\gamma{}_\beta - K_{\beta\mu} K^\gamma{}_\alpha) v^\mu + \gamma^\rho{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda \left( \nabla_\rho \nabla_\sigma v^\lambda - \nabla_\sigma \nabla_\rho v^\lambda \right). \quad (136)$$

En la expresión anterior se puede observar la identidad de Ricci para

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma v^\lambda - \nabla_\sigma \nabla_\rho v^\lambda = R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} v^\mu, \quad (137)$$

así, reemplazando (137) en (136) se obtiene

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma - D_\beta D_\alpha v^\gamma = (K_{\alpha\mu} K^\gamma{}_\beta - K_{\beta\mu} K^\gamma{}_\alpha) v^\mu + \gamma^\rho{}_\alpha \gamma^\sigma{}_\beta \gamma^\rho{}_\lambda R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} v^\mu. \quad (138)$$

Finalmente, sustituyendo (138) en (135) se obtiene la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\boxed{\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = R^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} + K^\gamma{}_\alpha K_{\delta\beta} - K^\gamma{}_\beta K_{\alpha\delta}.} \quad (139)$$

También es posible contraer la ecuación de Gauss-Codazzi, contrayendo los índices  $\gamma$  y  $\alpha$ , así

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\alpha{}_\rho \gamma^\sigma{}_\delta {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = {}^{(3)}R_{\delta\beta} + KK_{\delta\beta} - K^\alpha{}_\beta K_{\alpha\delta}, \quad (140)$$

note que en esta expresión  $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\alpha{}_\rho = \gamma^\mu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho + n^\mu n_\rho$ , en consecuencia

$$\begin{aligned} \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta (g^\mu{}_\rho + n^\mu n_\rho) {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + KK_{\delta\beta} - K^\alpha{}_\beta K_{\alpha\delta}, \\ \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\rho\nu} + \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta n^\mu n_\rho {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + KK_{\delta\beta} - K^\alpha{}_\beta K_{\alpha\delta}, \\ \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta {}^{(4)}R_{\sigma\nu} + \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta n^\mu n_\rho {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + KK_{\delta\beta} - K^\alpha{}_\beta K_{\alpha\delta}. \end{aligned} \quad (141)$$

Como último paso, cambiando los índices  $\delta = \alpha$  y  $\sigma = \mu$  se obtiene la ecuación contraída de

Gauss

$$\boxed{\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta {}^4R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma^\rho{}_\beta n^\sigma {}^{(4)}R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K^\mu{}_\beta.} \quad (142)$$

Tomando la traza de la ecuación contraída con respecto a  $\gamma$  se obtiene la ecuación escalar de Gauss

$$\boxed{{}^{(4)}R + 2{}^4R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{ij} K^{ij}.} \quad (143)$$

**Ecuación de Codazzi-Mainardi.** Por otro lado, para obtener la ecuación de Codazzi-Mainardi se aplica la identidad de Ricci al vector normal  $n$

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) n^\gamma = {}^4 R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} n^\mu, \quad (144)$$

proyectando esta relación en las hipersuperficies

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho ({}^4 R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} n^\sigma) = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\nu n^\rho - \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\nu \nabla_\mu n^\rho. \quad (145)$$

Tomando el primer término de la parte derecha, y usando la expresión (21) se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\nu n^\rho &= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \nabla_\mu (-K_\nu^\rho - a^\rho n_\nu), \\ &= -\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho (\nabla_\mu K_\nu^\rho + \nabla_\mu a^\rho n_\nu + a^\rho \nabla_\mu n_\nu), \\ &= -D_\alpha K_\beta^\gamma + a^\gamma K_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (146)$$

para obtener esta expresión se utilizó la definición del operador derivada, y las expresiones  $\gamma^\nu{}_\beta n_\nu = 0$ ,  $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = -K_{\alpha\beta}$ , las cuales ya se han definido con anterioridad. Note que en la expresión (145), el segundo sumando se puede obtener permutando los índices  $\alpha$  y  $\beta$  de la expresión (146).

Restando estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de Codazzi-Mainardi

$$\boxed{\gamma^\gamma{}_\rho n^\sigma \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta ({}^4 R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) = D_\beta K_\alpha^\gamma - D_\alpha K_\beta^\gamma.} \quad (147)$$

Ahora, para hallar la ecuación de codazzi contraída se toma la ecuación de Codazzi-Mainardi y se contraen los índices  $\alpha$  y  $\gamma$ , así

$$D_{\beta}K - D_{\gamma}K^{\gamma}_{\beta} = \gamma^{\mu}_{\gamma}\gamma^{\gamma}_{\beta}\gamma^{\gamma}_{\rho}{}^{(4)}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}n^{\sigma}, \quad (148)$$

utilizando las expresiones  $\gamma^{\mu}_{\gamma}\gamma^{\gamma}_{\rho} = \gamma^{\mu}_{\rho} = g^{\mu}_{\rho} + n^{\mu}n_{\rho}$  se tiene que

$$D_{\beta}K - D_{\gamma}K^{\gamma}_{\beta} = \gamma^{\nu}_{\beta} \left( g^{\mu}_{\rho}{}^{(4)}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}n^{\sigma} + n^{\mu}n_{\rho}{}^{(4)}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}n^{\sigma} \right), \quad (149)$$

$$\boxed{D_{\alpha}K - D_{\mu}K^{\mu}_{\alpha} = \gamma^{\mu}_{\alpha}n^{\sigma}R_{\sigma\mu}.} \quad (150)$$

## Apéndice B. Ecuaciones de Einstein en la formulación 3+1

### Ecuación de evolución para la métrica

Para encontrar la ecuación de evolución para la métrica inducida, se debe demostrar que la curvatura extrínseca se puede escribir en términos de la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo de la dirección normal, esto es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{\mu\nu} &= n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha, \\
&= n^\alpha \nabla_\alpha (n_\mu n_\nu) + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + g_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha, \\
&= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha n_\nu + n^\alpha n_\nu \nabla_\alpha n_\mu + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu, \\
&= \left( \gamma_\mu^\alpha - g_\mu^\alpha \right) \nabla_\alpha n_\nu + \left( \gamma_\nu^\alpha - g_\nu^\alpha \right) \nabla_\alpha n_\mu + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu, \\
&= \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + \gamma_\nu^\alpha \nabla_\alpha n_\mu = -2K_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{151}$$

donde se ha utilizado la definición de derivada de Lie, y el hecho que la derivada covariante de  $g_{\mu\nu}$  es cero. De esta expresión se puede ver que la curvatura extrínseca solo depende del comportamiento del vector normal dentro de la hipersuperficie. En consecuencia, se cumple que

$$K = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma. \tag{152}$$

Ahora, utilizando la derivada de Lie para cualquier campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$  y la ecuación (9) se cumple que

$$\mathcal{L}_m T = \mathcal{L}_{\partial_t} T - \mathcal{L}_\beta T, \tag{153}$$

específicamente, si se utilizan componentes tensoriales respecto a un sistema coordinado, la derivada de Lie a lo largo de  $\partial_t$  se reduce a una derivada parcial, así

$$\mathcal{L}_m T^{i\dots j\dots} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta \right) T^{i\dots j\dots}. \quad (154)$$

Definiendo la derivada de Lie a lo largo de  $m$  de la métrica inducida, y usando la ecuación (154) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha n} \gamma &= \mathcal{L}_{\partial_t} \gamma - \mathcal{L}_\beta \gamma, \\ \alpha \mathcal{L}_n \gamma &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma - \mathcal{L}_\beta \gamma, \end{aligned} \quad (155)$$

a partir de la ecuación (152)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta \right) \gamma = -2\alpha K. \quad (156)$$

Esta última ecuación corresponde a la ecuación de evolución para la métrica inducida. En esta relación, se puede relacionar la derivada de Lie con la conexión  $D$

$$\mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} = \beta^k \underbrace{D_k \gamma_{ij}}_t + \gamma_{kj} D_i \beta^k + \gamma_{ik} D_j \beta^k, \quad (157)$$

es decir

$$\mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} = D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (158)$$

y reemplazando esta última expresión en la ecuación de evolución, esta se reescribe como

$$\boxed{\mathcal{L}_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i.} \quad (159)$$

### Restricción hamiltoniana y de momentum

Para encontrar la restricción hamiltoniana es necesario partir de la ecuación escalar de Gauss (143)

$${}^{(3)}R = {}^{(4)}R + 2{}^{(4)}R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + K_{ij}K^{ij} - K^2, \quad (160)$$

y utilizando la ecuación de Einstein (36) se reescribe como

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= {}^{(4)}R + 2 \left( G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R \right) n^\mu n^\nu + K_{ij}K^{ij} - K^2, \\ {}^{(3)}R &= {}^{(4)}R + 2G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + g_{\mu\nu}{}^{(4)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2, \\ {}^{(3)}R &= 2G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + K_{ij}K^{ij} - K^2, \end{aligned} \quad (161)$$

finalmente, haciendo uso de  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$  y  $\rho = T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$  se obtiene la restricción hamiltoniana

$$\boxed{R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho.} \quad (162)$$

Note que este procedimiento consistió en realizar una proyección normal a  $\Sigma_t$  de la ecuación de Einstein.

Por otro lado, para encontrar la restricción de momentum es necesario hacer una proyección mixta de la ecuación de Einstein, es decir

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \left[ {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R \right] &= 8\pi T_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu g_{\mu\nu} {}^{(4)}R &= -8\pi j_\gamma, \end{aligned} \quad (163)$$

donde se ha usado la expresión  $j_\gamma = -T_{\mu\nu}\gamma^\mu_\gamma n^\nu$ . Para finalizar, nota que el primer término de la ecuación corresponde a la ecuación de Codazzi contraída (150), así

$$\boxed{D_\beta K^\beta_\gamma - D_\gamma K = 8\pi j_\gamma.} \quad (164)$$

### Proyección no trivial del tensor de Riemann

Partiendo de la identidad de Ricci aplicada al vector normal, no obstante, en esta expresión se tendrán en cuenta dos proyecciones sobre  $\Sigma_t$  y una proyección a lo largo de  $n$ , es decir

$$\gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R^\mu_{\rho\nu\sigma} n^\rho = \gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu_\beta (\nabla_\nu \nabla_\sigma n^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\nu n^\mu), \quad (165)$$

sustituyendo (21) en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma^\nu_\beta n^{\sigma 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= \gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu_\beta [-\nabla_\nu (K^\mu_\sigma + D^\mu \ln \alpha n_\sigma) + \nabla_\sigma (K^\mu_\nu + D^\mu \ln \alpha n_\nu)], \\ &= \gamma_{\alpha\mu} n^\sigma \gamma^\nu_\beta [-\nabla_\nu K^\mu_\sigma - \nabla_\nu n_\sigma D^\mu \ln \alpha - n_\sigma \nabla_\nu D^\mu \ln \alpha \\ &\quad + \nabla_\sigma K^\mu_\nu + \nabla_\sigma n_\nu D^\mu \ln \alpha + n_\nu \nabla_\sigma D^\mu \ln \alpha], \end{aligned}$$

utilizando las relaciones  $K^\mu_\sigma n^\sigma = 0$ ,  $n^\sigma \nabla_\nu n_\sigma = 0$ ,  $n_\sigma n^\sigma = -1$ ,  $n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu = D_\nu \ln \alpha$  se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma^\nu_\beta n^{\sigma 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= -K_{\alpha\sigma} K^\sigma_\beta + D_\beta D_\alpha \ln \alpha + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} + D_\alpha \ln \alpha D_\beta \ln \alpha, \\ \gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma^\nu_\beta n^{\sigma 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= -K_{\alpha\sigma} K^\sigma_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D_\alpha \alpha + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (166)$$

Ahora es necesario demostrar que el tercer término  $\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}$  está relacionado con la derivada de Lie de la curvatura extrínseca a lo largo del vector normal. Partiendo de la definición de derivada de Lie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha n} K_{\alpha\beta} &= \alpha \mathcal{L}_n K_{\alpha\beta}, \\ &= \alpha (n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + K_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu), \end{aligned} \quad (167)$$

y sustituyendo la ecuación (21) para  $\nabla_\alpha n^\mu$  y  $\nabla_\beta n^\mu$

$$\alpha \mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} = \alpha n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} - 2\alpha K_{\alpha\mu} K^\mu{}_\beta - K_{\alpha\mu} (D^\mu \alpha) n_\beta - K_{\beta\mu} (D^\mu \alpha) n_\alpha. \quad (168)$$

Por último, se proyecta la expresión anterior en las hipersuperficies, es decir, se aplica el operador proyección a ambos lados de la igualdad. A partir de allí y haciendo uso de la propiedad  $\gamma_\sigma^\alpha \gamma_\rho^\beta \mathcal{L}_{\alpha n} K_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{\alpha n} K_{\sigma\rho}$  se obtiene

$$\boxed{\gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma^\nu{}_\beta n^\sigma ({}^4)R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} = \mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + K_{\alpha\mu} K^\mu{}_\beta.} \quad (169)$$

Esta última ecuación se conoce como ecuación de Ricci. Note que, en esta expresión el lado izquierdo corresponde a un término que aparece en la ecuación contraída de Gauss (142), combinando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta R_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + ({}^3)R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu} K^\mu{}_\beta. \quad (170)$$

### Ecuación de evolución para la curvatura extrínseca

Para encontrar la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca es necesario realizar una proyección total de la ecuación de Einstein sobre las hipersuperficies, es decir

$$\gamma_\gamma^\mu \gamma_\alpha^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( \gamma_\gamma^\mu \gamma_\alpha^\nu T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_\gamma^\mu \gamma_\alpha^\nu T g_{\mu\nu} \right), \quad (171)$$

y la parte izquierda de esta expresión corresponde a la ecuación (170). Además, también se ha definido el tensor de energía impulso como  $T = S - \rho$ , de forma que, utilizando estas dos expresiones, la ecuación (171) se reescribe como

$$\alpha \mathcal{L}_n K_{\gamma\alpha} = -D_\gamma D_\alpha \alpha + \alpha \left\{ {}^{(3)}R_{\gamma\alpha} + K K_{\gamma\alpha} - 2K_{\gamma\epsilon} K_\alpha^\epsilon + 4\pi G [(S - \rho)\gamma_{\gamma\alpha} - 2S_{\gamma\alpha}] \right\}. \quad (172)$$

Partiendo de esta última expresión, es posible reescribir la derivada de Lie de  $K$  en términos de derivadas covariantes. Haciendo uso de la expresión (154) para  $K_{\gamma\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{\gamma\alpha} = \alpha \mathcal{L}_n K_{\gamma\alpha} + \mathcal{L}_\beta K_{\gamma\alpha}, \quad (173)$$

y utilizando la definición para la derivada de Lie, el término  $\mathcal{L}_\beta K_{\gamma\alpha}$  corresponde a

$$\mathcal{L}_\beta K_{\gamma\alpha} = \beta^\kappa D_\kappa K_{\gamma\alpha} + K_{\gamma\kappa} D_\alpha \beta^\kappa + K_{\alpha\kappa} D_\gamma \beta^\kappa. \quad (174)$$

Por tanto, reemplazando (172) y (174) en la ecuación (173) se obtiene la ecuación de evo-

lución para la curvatura extrínseca

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha + \alpha \left[ {}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j \right] \\ & + 4\pi\alpha \left[ \gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (175)$$

### Apéndice C. Ecuación de Klein-Gordon y términos de fuente

#### Ecuación de Klein-Gordon

A continuación se presenta el proceso realizado para obtener el sistema de ecuaciones de primer orden, equivalente a la ecuación de Klein-Gordon. Partiendo de la ecuación de Klein-Gordon (51) y operando índices

$$\partial_t [\alpha \sqrt{\gamma} g^{t\nu} \partial_\nu \phi] + \partial_i [\sqrt{-g} g^{i\nu} \partial_\nu \phi] = \alpha \sqrt{\gamma} m^2 \phi,$$

$$\partial_t [\alpha \sqrt{\gamma} g^{tt} \partial_t \phi + \alpha \sqrt{\gamma} g^{ti} \partial_i \phi] + \partial_i [\alpha \sqrt{\gamma} g^{it} \partial_t \phi + \alpha \sqrt{\gamma} g^{ij} \partial_j \phi] = \alpha \sqrt{\gamma} m^2 \phi,$$

reemplazando las componentes de la métrica (14) se obtiene que

$$-\partial_t \left[ \sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{\alpha} \partial_t \phi - \frac{\beta^i}{\alpha} \partial_i \phi \right) \right] + \partial_i \left[ \sqrt{\gamma} \frac{\beta^i}{\alpha} \partial_t \phi + \alpha \sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j \phi - \sqrt{\gamma} \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha} \partial_j \phi \right] = \alpha \sqrt{\gamma} m^2 \phi$$

$$-\partial_t \left[ \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha} (\partial_t \phi - \beta^i \partial_i \phi) \right] + \partial_i \left[ \sqrt{\gamma} \frac{\beta^i}{\alpha} (\partial_t \phi - \beta^j \partial_j \phi) + \alpha \sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j \phi \right] = \alpha \sqrt{\gamma} m^2 \phi.$$

De esta última expresión se observan fácilmente las variables  $P_j$  y  $Q$ , definidas en (52) y (53).

Haciendo uso de éstas, se obtiene

$$\partial_t[\sqrt{\gamma}Q] = \partial_i [\sqrt{\gamma}\beta^i Q + \alpha\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}P_j] + \alpha\sqrt{\gamma}m^2\phi,$$

$$\sqrt{\gamma}\partial_t Q + Q\partial_t\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}\partial_i [\beta^i Q + \alpha P^i] + [\beta^i Q + \alpha\gamma^{ij}P_j] \partial_i\sqrt{\gamma} + \alpha\sqrt{\gamma}m^2\phi,$$

$$\sqrt{\gamma}\partial_t Q - \sqrt{\gamma}\alpha K Q = \sqrt{\gamma}\beta^i \partial_i Q + \sqrt{\gamma}\partial_i (\alpha P^i) + \alpha P^i \partial_i \sqrt{\gamma} + \alpha\sqrt{\gamma}m^2\phi,$$

$$\sqrt{\gamma}\partial_t Q = \sqrt{\gamma}(\alpha K Q + \beta^i \partial_i Q + \alpha m^2\phi) + \sqrt{\gamma}\partial_i (\alpha P^i) + \alpha P^i \partial_i \sqrt{\gamma},$$

$$\partial_t Q = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i (\alpha\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}P_j) + \alpha K Q + \beta^i \partial_i \phi + \alpha m^2\phi,$$

finalmente

$$\boxed{\partial_t Q = \nabla_i (\alpha P^i) + \alpha K Q + \beta^i \partial_i Q + \alpha m^2\phi.} \quad (176)$$

Por otro lado, la segunda ecuación se obtiene directamente de la variable  $P_j$

$$P_j = \nabla_j \phi,$$

$$\partial_t (P_j) = \partial_t (\partial_j \phi) = \partial_j (\partial_t \phi),$$

$$\partial_t P_j = \nabla_j (\alpha Q + \beta^i P_i). \quad (177)$$

### Términos de fuente

La densidad de energía, densidad de momentum, el tensor de esfuerzos y su respectiva traza se definen de la siguiente forma

$$4\pi\rho = n^\gamma n^\alpha T_{\gamma\alpha}, \quad (178)$$

$$4\pi j^i = -\gamma^i \gamma^\alpha n^\alpha T_{\gamma\alpha}, \quad (179)$$

$$4\pi S_{ij} = \gamma_i^\gamma \gamma_j^\alpha T_{\gamma\alpha}, \quad (180)$$

$$4\pi S = \gamma^{ij} S_{ij}. \quad (181)$$

las cuales son medidas por un observador Euleriano. En estas expresiones

$$T_{\gamma\alpha} = \nabla_\gamma \phi \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \quad (182)$$

corresponde al tensor de energía impulso.

Para encontrar la densidad de energía se introducen los términos del tensor de energía im-

pulso (182) y el valor de  $Q$  (53) en la definición de  $\rho$  (178)

$$\begin{aligned}
4\pi\rho &= n^\gamma n^\alpha T_{\gamma\alpha}, \\
&= n^\gamma n^\alpha \nabla_\gamma \phi \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{2} n^\gamma n^\alpha g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= n^\gamma \nabla_\gamma \phi n^\alpha \nabla_\alpha \phi + \frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} (g^{\mu t} \nabla_t \phi \nabla_\mu \phi + g^{\mu i} \nabla_i \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} (g^{tt} \nabla_t \phi \nabla_t \phi + g^{it} \nabla_t \phi \nabla_i \phi + g^{ti} \nabla_i \phi \nabla_t \phi + g^{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + m^2 \phi),
\end{aligned}$$

y reemplazando las componentes de la métrica (14)

$$\begin{aligned}
4\pi\rho &= Q^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_t \phi (-\nabla_t \phi + \beta^i \nabla_i \phi) + \frac{\beta^i}{\alpha^2} \nabla_i \phi (\nabla_t \phi - \beta^j \nabla_j \phi) + \gamma^{jj} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + m^2 \phi \right], \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q}{\alpha} \nabla_t \phi + \frac{\beta^i}{\alpha} \nabla_i \phi Q + P_i P^i + m^2 \phi \right], \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q}{\alpha} (\nabla_t \phi - \beta^i \nabla_i \phi) + P_i P^i + m^2 \phi \right], \\
&= Q^2 + \frac{1}{2} [-Q^2 + P_i P^i + m^2 \phi],
\end{aligned}$$

siendo

$$\boxed{4\pi\rho = \frac{1}{2} (P_i P^i + Q^2 + m^2 \phi)}. \quad (183)$$

De manera similar, para encontrar la ecuación correspondiente a la densidad de momentum se usan las ecuaciones (179), (182), (53) y (52)

$$\begin{aligned}
4\pi j^i &= -\gamma^{i\gamma} n^\alpha T_{\gamma\alpha}, \\
&= -\gamma^{i\gamma} n^\alpha \left[ \nabla_\gamma \phi \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi) \right], \\
&= -\gamma^{i\gamma} n^\alpha \nabla_\gamma \phi \nabla_\alpha \phi + \frac{1}{2} \gamma^{i\gamma} n^\alpha g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= -\nabla^i \phi n^\alpha \nabla_\alpha \phi + \frac{1}{2} \cancel{\gamma^{i\gamma} n_\gamma} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi),
\end{aligned}$$

de forma que la densidad de momentum se expresa como

$$\boxed{4\pi j^i = -P^i Q.} \tag{184}$$

Finalmente, se halla el tensor de esfuerzos a partir de su definición (180), y los valores de

$P$  (52),  $Q$  (53) y (182),

$$\begin{aligned}
4\pi S_{ij} &= \gamma_i^\gamma \gamma_j^\alpha T_{\gamma\alpha}, \\
&= \gamma_i^\gamma \gamma_j^\alpha \left[ \nabla_\gamma \phi \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi) \right], \\
&= \gamma_i^\gamma \nabla_\gamma \phi \gamma_j^\alpha \nabla_\alpha \phi - \frac{1}{2} \gamma_i^\gamma \gamma_j^\alpha g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \quad \text{donde } \gamma_i^\gamma = g_i^\gamma + n^\gamma n_i \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} (g_i^\gamma + n^\gamma n_i) (g_j^\alpha + n^\alpha n_j) g_{\gamma\alpha} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_i^\gamma g_j^\alpha g_{\gamma\alpha} + g_i^\gamma n^\alpha g_{\gamma\alpha} n_j + n^\gamma g_{\gamma\alpha} n_i g_j^\alpha + n^\gamma n_i n^\alpha g_{\gamma\alpha} n_j] (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_{ij} + g_i^\gamma n_\gamma n_j + n_\alpha n_i g_i^\alpha + n^\gamma n_i n_\gamma n_j] (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_{ij} + n_j n_i] (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + m^2 \phi), \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_{ij} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + g_{ij} m^2 \phi + n_j n_i \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + n_j n_i m^2 \phi], \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_{ij} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi) + n_j n_i (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi) + \gamma_{ij} m^2 \phi], \\
&= \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} [g_{ij} (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi) + n_j n_i (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi) + \gamma_{ij} m^2 \phi],
\end{aligned}$$

abriendo los índices y reemplazando las componentes de la métrica se obtiene que

$$4\pi S_{ij} = P_i P_j + \frac{1}{2} g_{ij} \left( -P_k P^k + Q^2 + m^2 \phi \right). \quad (185)$$

Hallando la traza para el tensor de esfuerzos  $S = \gamma^{ij} S_{ij}$  se obtiene de manera directa que

$$4\pi S = -\frac{1}{2} \gamma^{ij} P_i P_j + \frac{3}{2} Q^2 + \frac{3}{2} m^2 \phi. \quad (186)$$