

**OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES:
UN ENFOQUE ESTOCÁSTICO**

Ing. CARLOS ANDRÉS MILLÁN PÁRAMO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2013

OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES: UN ENFOQUE ESTOCÁSTICO

Ing. CARLOS ANDRÉS MILLÁN PÁRAMO

**Proyecto de grado para optar el título
MÁSTER EN INGENIERÍA CIVIL**

ORIENTADOR:

Oscar Javier Begambre Carrillo. IC, MSc, Ph.D

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

BUCARAMANGA

2013

DEDICATORIA

*A Dios, por permitirme llegar hasta este punto
y haberme dado salud para lograr mis objetivos.*

*A mis Padres, Euriel e Irma, ya que gracias a ellos
soy quien soy hoy en día, además por el apoyo
en todo momento, por sus consejos, sus valores,
principios y por la motivación constante que me ha
permitido ser una persona de bien.*

A mi hija Sofía, quien ha sido y es mi motivación, inspiración y felicidad.

A mis hermanas, Claudia y Vannesa, por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Oscar Begambre por el apoyo brindado en la orientación y desarrollo de esta tesis, además por sus aportes y sabios consejos.

A Lina por la amistad incondicional y ayuda prestada, en estos años de estudio.

Y a todas las personas que ayudaron directa e indirectamente en la realización de esta investigación.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	16
1. OBJETIVO Y ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO.....	18
2. MARCO TEÓRICO.....	20
2.1. OT LOCAL CLÁSICA.....	20
2.2. OT GLOBAL ESTOCÁSTICA.....	23
2.3. PROBLEMAS EN OT: EL TABLERO DE AJEDREZ Y LA COLOCACIÓN DEL MATERIAL.....	28
3. TÉCNICAS ESTOCÁSTICAS DE OPTIMIZACION.....	32
3.1. SIMULATED ANNEALING (SA).....	32
3.1.1. Exploración preliminar.....	35
3.1.2. Paso de búsqueda.....	36
3.1.3. Probabilidad de aceptación.....	36
3.2. OPTIMIZACIÓN CON ENJAMBRE DE PARTÍCULAS (PSO).....	40
3.3. ALGORITMOS GENÉTICOS (AG).....	42
3.3.1. Selección.....	45
3.3.2. Cruce.....	46
3.3.3. Mutación.....	47
4. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LAS TÉCNICAS ESTOCÁSTICAS.....	50
4.1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONTINUA SIN RESTRICCIONES.....	50

4.2. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONTINUA CON RESTRICCIONES.....	51
4.3. RESULTADOS	53
5. FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OT.....	58
5.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	58
5.2. OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA.....	63
5.3. FILTRO DE IMAGEN.....	64
5.3.1. Problemas propuestos de OT	67
5.4. RESULTADOS NUMÉRICOS A PROBLEMAS PROPUESTOS	68
5.4.1. Problema I	68
5.4.2. Problema II	78
5.4.3. Problema III.....	84
6. CONCLUSIONES	92
7. TRABAJOS FUTUROS	93
BIBLIOGRAFÍA	94
ANEXOS	109

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Tablero de ajedrez (a) [42] (b) [43].....	29
Figura 2 Pseudocódigo del algoritmo SA [48]	35
Figura 3 Exploración en el espacio de búsqueda	36
Figura 4 Desempeño de las técnicas estocásticas en optimización estructural [53, 54]	38
Figura 5 (a) Configuración inicial, (b) estructura óptima [58]	39
Figura 6 Pseudocódigo Algoritmo AG. [72]	45
Figura 7 Discretización del dominio de diseño con elementos finitos [109].	61
Figura 8 Elemento C4 [109]	61
Figura 9 Ejemplo del filtro para el Radio	65
Figura 10 Proceso del algoritmo de OT	67
Figura 11 Problemas propuestos de optimización [98]	68
Figura 12 MBB Beam.....	69
Figura 13 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 60 x 20 sin uso del filtro.....	70
Figura 14 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 150 x 50 sin uso del filtro.....	70
Figura 15 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 300 x 100 sin uso del filtro.....	70
Figura 16 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 60 x 20 con uso del filtro.....	71
Figura 17 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 150 x 50 con uso del filtro.....	71
Figura 18 Valores de energía de deformación y Diseños problema I Malla 300 x 100 con uso del filtro.....	71

Figura 19 Proceso de optimización problema I-malla 60 x 20 (a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO	72
Figura 20 Proceso de optimización problema I-malla 150 x 50 (a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO	73
Figura 21 Proceso de optimización problema I-malla 300 x 100 (a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO	74
Figura 22 Convergencia problema I-malla 60 x 20	75
Figura 23 Convergencia problema I-malla 150 x 50	76
Figura 24 Convergencia problema I-malla 300 x 100	77
Figura 25 Viga en voladizo.....	78
Figura 26 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 160 x 100 sin uso del filtro.....	79
Figura 27 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 160 x 100 con uso del filtro.....	79
Figura 28 Proceso optimización problema II-malla 160 x 100 (a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO	80
Figura 29 Convergencia problema II	81
Figura 30 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 80x50 sin uso del filtro.....	82
Figura 31 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 240x150 sin uso del filtro.....	82
Figura 32 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 80x50 con uso del filtro	83
Figura 33 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 240x150 con uso del filtro.....	83
Figura 34 Viga-en-voladizo con hueco	84
Figura 35 Valores de energía de deformación y Diseños problema III Malla 150 x 100 sin uso del filtro.....	85

Figura 36 Valores de energía de deformación y Diseños problema III Malla 150 x 100 con uso del filtro.....	85
Figura 37 Proceso optimización problema III-malla 150 x 100 (a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO.....	86
Figura 38 Convergencia problema III	87
Figura 39 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 70x50 sin uso del filtro.....	88
Figura 40 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 225x150 sin uso del filtro.....	88
Figura 41 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 75x50 con uso del filtro	89
Figura 42 Valores de energía de deformación y Diseños problema II Malla 225x150 con uso del filtro.....	89

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Funciones de prueba.....	51
Tabla 2 valores de ρ en las trece funciones	52
Tabla 3 Mejor valor encontrado por los algoritmos de optimización.....	53
Tabla 4 Media de los valores encontrados por los algoritmos de optimización	54
Tabla 5 Peor valor encontrado por los algoritmos de optimización	54
Tabla 6 Mejor valor encontrado por los algoritmos de optimización.....	55
Tabla 7 Media de los valores encontrados por los algoritmos de optimización	55
Tabla 8 Peor valor encontrado por los algoritmos de optimización	56
Tabla 9 Resumen de resultados obtenidos con ASAM.....	90
Tabla 10 Resumen de resultados obtenidos con PSO	91

LISTA DE ANEXOS

Anexo A Gráficas de Convergencia para el Problema I	110
Anexo B Gráficas de Convergencia para el Problema II.....	116
Anexo C Gráficas de Convergencia para el Problema III	118

TITULO: Optimización topológica de elementos estructurales: un enfoque estocástico.*

AUTOR: Carlos Andrés Millán Páramo**

PALABRAS CLAVES: Optimización topológica, técnicas estocásticas, filtro de imagen

La Optimización Topológica de elementos estructurales trata de determinar la ubicación y distribución óptima de material, en un dominio de diseño, para unas condiciones de restricción determinadas y atendiendo a una función objetivo determinada, en este caso, la minimización de la energía de deformación.

Esta investigación ha desarrollado un procedimiento de Optimización Topológica, empleando técnicas estocásticas (Algoritmo Recocido Simulado Modificado –ASAM– y Optimización con Enjambre de Partículas –PSO–) como optimizadora de las densidades del elemento, en el entorno de Matlab. El uso de estas técnicas mejora el rendimiento computacional, además, de proporcionar resultados satisfactorios al momento de abordar diferentes tipos de problemas. Con el objeto de evitar problemas de inestabilidades numéricas (tablero de ajedrez, contornos discontinuos, entre otros), se implementó un filtro de imagen, para obtener soluciones menos pixeladas, mas suavizadas y menos dentadas.

Para la validación de este procedimiento, se abordaron tres problemas reportados en la literatura especializada, (viga simplemente apoyada, viga en voladizo y viga en voladizo con hueco), cada problema fue analizado con tres tipos de mallas (números de elementos finitos), sin y con el uso del filtro de imagen propuesto, todo esto con el fin, de comparar los resultados obtenidos en cuanto a topologías, valor de energía de deformación y tiempos. A partir de lo anterior, se logro establecer que el procedimiento arroja menores tiempos computacionales a medida que se analizan los problemas con mallas más refinadas, además, las distribuciones de material en el dominio de diseño y valores de energía obtenidos, fueron similares a los reportados por la literatura.

* Proyecto de Grado para optar por el título de Máster en Ingeniería civil

** Facultad de Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director Oscar Javier Begambre.

TITLE: Topology optimization of structural elements: a stochastic approach.*

AUTHOR: Carlos Andrés Millán Páramo**

KEYWORDS: Topology optimization, stochastic techniques, image filter

Topology optimization of the structural elements is to determine the optimal location and distribution of material in a design domain, for determined restriction conditions and following a specific objective function, in this case, the minimization of the strain energy.

This research has developed a procedure for topology optimization using stochastic techniques (Simulated Annealing Modified Algorithm –ASAM– and Particle Swarm Optimization –PSO–) as optimizer the element densities in the Matlab environment. In order to avoid problems of numerical instabilities (checkerboard, discontinuous contours, etc.), was implemented image filter to obtain solutions less pixelated, more smooth and less jagged.

To validate this procedure addressed three problems, reported in the literature (simply supported beam, cantilever beam and cantilever beam with hollow), each problem was analyzed with three types of meshes (finite elements numbers), without and with the use of the proposed image filter, this with the purpose of comparing the results obtained in terms of topologies, value of strain energy and time. From the above it was established that the procedure yields less computational time as discussed problems with finer meshes, furthermore, the distribution of material in the design domain and energy values obtained were similar to those reported in the literature.

* Graduation Project to quality for the title of Master of Civil Engineering

** Faculty of Physical Mechanical. School of Civil Engineering. Director Oscar Javier Begambre.

INTRODUCCIÓN

Desde los comienzos de la Humanidad el hombre siempre ha pretendido obtener estructuras resistentes para mejorar su calidad de vida, lo que se interpretaba como símbolo de progreso y de evolución. Los avances, generalmente, se conseguían realizando pruebas experimentales, a través de procedimientos de prueba y error, basados en deducciones empíricas y a partir de la observación de la naturaleza.

El proceso de evolución ha sido, por este motivo, tremendamente lento aunque continuado en el tiempo. Solo en la época moderna y con el desarrollo de nuevas teorías matemáticas ha sido posible realizar estudios para determinar el comportamiento de los materiales. Se obtienen así formulaciones para el estudio de la respuesta estructural que permiten conocer los mecanismos de fallo y, en consecuencia, disponer de información para poder evitarlos o al menos reducir su efecto. Es en el siglo XX y con el espectacular desarrollo de las herramientas de cálculo cuando se proponen distintas formulaciones basadas en los estudios teóricos precedentes para resolver problemas concretos y así poder predecir la respuesta estructural. Los modelos empleados habitualmente con esta finalidad son, por ejemplo, el Método de Elementos Finitos o el Cálculo Matricial de Estructuras de Barras entre otros.

A pesar de estos significativos avances, las técnicas de cálculo presentadas anteriormente se limitan a comprobar la validez de la solución planteada. La esencia del comportamiento estructural que reside en el diseño de los elementos resistentes se sigue proponiendo, fundamentalmente, según criterios experimentales y personales del diseñador. En el mejor de los casos las soluciones que se proponen habitualmente se obtienen mediante un proceso

iterativo de prueba y error. Es decir, se establece un diseño y se comprueba su factibilidad con las técnicas que se han planteado para, a continuación, modificarlo en función de su respuesta estructural y definir un nuevo diseño mejorado. Este es uno de los motivos que provocan que se utilicen en la práctica distintas soluciones para un mismo problema en función de la persona que se encarga del diseño.

Una vez alcanzado un considerable desarrollo y una amplia difusión de las técnicas de cálculo y comprobación de estructuras, es necesario proponer o estudiar planteamientos que, además de garantizar la validez de la solución, propongan modificaciones sobre la misma basados en criterios objetivos previamente definidos. De este modo la fase de diseño no quedará ligada a criterios subjetivos exclusivamente y se podrán obtener soluciones más adecuadas de un modo riguroso que cumplan las exigencias establecidas en las correspondientes leyes y normas de aplicación.

Esta necesidad de plantear técnicas rigurosas que busquen mejores soluciones a los problemas estructurales dio origen a la optimización de estructuras. Esta disciplina pretende, por tanto, establecer un modelo matemático que permita buscar la mejor solución estructural que cumpla la función para la que ha sido diseñada de acuerdo con las necesidades predefinidas.

Pese a sus enormes ventajas, estos planteamientos de diseño óptimo no han alcanzado en la actualidad el nivel de desarrollo ni de aplicación en ingeniería que han logrado los métodos de cálculo de estructuras debido a su mayor complejidad y al hecho de que no existe un enfoque único que permita abordar la resolución de diferentes problemas. En general, es necesario utilizar formulaciones y técnicas de optimización diferentes para cada problema estructural en función de sus características; a diferencia de lo que ocurre con los métodos de cálculo de

estructuras presentados, que pueden ser utilizados directamente en numerosas aplicaciones diferentes.

1. OBJETIVO Y ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

Este trabajo tiene por objetivo desarrollar un algoritmo para la resolución de problemas de optimización topológica (OT) de elementos estructurales bidimensionales. La estructura es discretizada a través de un modelo de elementos finitos y el problema de OT se resuelve utilizando técnicas estocásticas. Los resultados se presentan para comprobar la validez de los procedimientos utilizados.

El presente trabajo se encuentra organizado en los siguientes capítulos:

En el segundo capítulo se presenta un estado del arte de la temática de las técnicas de OT, en donde se describen los métodos y formulaciones empleados en este estudio así como algunos problemas de inestabilidad numérica que se presentan al momento de la resolución de este tipo de problemas.

En el tercer capítulo se describen los principios de las técnicas estocásticas empleadas en el presente trabajo: Simulated Annealing, Optimización con enjambre de partículas y Algoritmos Genéticos, las cuales van a ser utilizadas para el proceso de OT.

En el cuarto capítulo se presentan diversas funciones de benchmark seleccionadas de la literatura especializada en problemas de optimización (sin y

con restricciones) y que son usadas con el fin de evaluar el desempeño de las técnicas estocásticas mencionadas anteriormente.

En el quinto capítulo se realiza la formulación y resolución del problema de OT teniendo en cuenta el comportamiento lineal de elementos estructurales bidimensionales. Además se simulan tres ejemplos de OT reportados en la literatura internacional con el fin de comprobar la validez del procedimiento de optimización aquí planteado.

Finalmente en el sexto capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación y algunas orientaciones y recomendaciones para la realización de futuros trabajos de investigación.

2. MARCO TEÓRICO

Debido a la existencia de diversas técnicas para Optimización Topológica OT se realiza, en el siguiente capítulo, un resumen de las mismas teniendo en cuenta si operan en un marco local o uno global. Adicionalmente, se plasma una revisión de la literatura relevante relacionada con los problemas (inestabilidades numéricas) en OT.

2.1. OT LOCAL CLÁSICA

Se puede decir que, los primeros pasos de la optimización estructural fueron introducidos al final del siglo XIX con el trabajo de Maxwell en 1872 [1], el cual buscaba el menor volumen de estructuras sometidas a cargas uniaxiales. Michell en 1904 [1] continuó el trabajo de Maxwell, sus famosas estructuras siguen siendo citadas en la teoría moderna de la optimización topológica. Él diseñó armaduras, en las que buscaba menor peso, teniendo en cuenta los esfuerzos en las barras para cada caso de carga. Entre los años 50 y 60 del siglo XX, el análisis de mínimo peso en armaduras entró en un periodo de decadencia [2].

Entre los años 1981 y 1986, con la ayuda de los métodos de elementos finitos (MEF), varias publicaciones fueron hechas, pudiendo ser citados Cheng y Olhoff [3], Khon y Strang [4] que investigaron la naturaleza del problema, de maximización de la rigidez de placas delgadas considerando el espesor como variable del diseño. Los autores concluyeron que para este problema de optimización existen varias soluciones óptimas locales. A esta misma conclusión llegó Rozvany, en 1982 [5].

A mediados de los años 80 del siglo XX, los resultados de las optimizaciones de formas y dimensiones, comienzan a ser cuestionados, pues estos presentaban grandes problemas cuando se deseaba alterar la topología (o distribución del material) de una estructura. Con la necesidad de mejorar la optimización de forma, surge entonces, al final de la década de los ochenta, la Optimización Topológica (OT), formulada por Bendsøe y Kikuchi en su trabajo clásico de 1988 [6] con una metodología de dominio fijo extendido llamada método de Homogenización.

La metodología creada por Bendsøe y Kikuchi para OT fue inspirada en los trabajos de Cheng y Olhoff [3, 7] que trataban de optimizar espesores de placas. Vale la pena mencionar también los estudios de Lurie [8, 9], Goodman [10], quienes estudiaron la optimización para diseños de barras de torsión construidas con dos materiales con diferentes proporciones volumétricas y de Rozvany [5], que investigó la formulación matemática para el problema de maximización de rigidez (con restricción de volumen) de placas delgadas, donde la variable de diseño era el espesor. Como ya se mencionó, en este trabajo se concluyó que existen varios óptimos locales para el problema tratado.

El método de Homogenización clásico [6] es capaz de proporcionar, simultáneamente, topología y formas óptimas de estructuras, resaltando que tal topología óptima resulta en una configuración no uniforme de forma en el contorno de la estructura, de manera que lo que se tiene es una forma óptima preliminar. En este caso, la idea es que la optimización topológica sea utilizada, inicialmente, siendo seguida de un método tradicional de optimización de forma. Esta segunda etapa pasa a ser realizada de forma más rápida y eficiente, una vez que ya se parte de una topología óptima y de una forma aproximada. Así, uno de los trabajos que integraron los métodos de optimización fue el de Olhoff [11] donde los métodos son integrados en un sistema, en el cual la topología sirve como un preprocesador de optimizaciones de forma, obteniendo resultados finales mejores.

También se pueden destacar, en esta misma vertiente, los trabajos de Sienz [12], Tang [13] y Kikuchi [14] que usaron la optimización topológica para maximizar la frecuencia de resonancia en estructuras.

A partir de los trabajos pioneros mencionados arriba, varios estudios comenzaron a surgir en el medio académico. Por ejemplo, en Canfield [15] se puede encontrar una formulación del problema de OT basada en el método de solución de Programación Lineal Secuencial y Criterio de Optimalidad en un dominio discretizado con elementos finitos. Otro trabajo relevante fue el de Cho y Choi [16] quienes utilizaron una optimización topológica combinada con la termoelasticidad. Este método de OT fue formulado aplicando el método DSA (Design Sensitivity Analysis).

Entre los métodos de optimización de diseño que consideran mallas variables durante el proceso, están los métodos de optimización estructural evolutiva, conocidos en la literatura como ESO, por su nombre en inglés Evolutionary Structural Optimization. La idea principal de este método consiste en proponer un criterio eficiente, capaz de evaluar la contribución de cada elemento en la respuesta del sistema y la posterior remoción de elementos que poseen menor sensibilidad [17, 18, 19, 20]. En el método ESO tiene gran influencia la tasa de remoción y eso trae algunas desventajas como: la aparición de bordes dentados y de interconexiones estructurales, dando origen a mecanismos y concentraciones de tensión; además no son efectivos cuando hay un número considerablemente grande de variables de diseño. En la actualidad se están proponiendo combinaciones entre el ESO y otros métodos como se puede ver en Haipeng [21] en donde propone una integración entre el método ESO y LSM (Level Set Method). Dicha propuesta fue puesta a prueba en ejemplos de referencia de OT y se concluyó que la tasa de convergencia del algoritmo allí propuesto era mayor en comparación con el método ESO básico.

Chen y Kukuchi [22] investigaron, también, el problema de optimización con cargas dependientes del diseño. El problema de optimización es transformado en un problema de distribución de material trifásico constituido de sólido, vacío y fluido hidrostático. La programación lineal secuencial (PLS) fue utilizada para resolver el problema de optimización.

Tovar [23] estudió una técnica que combina reglas de evolución de los autómatas celulares híbridos (Hybrid Cellular Automata-HCA), con análisis estructural por elementos finitos. Esta técnica mostró ser eficiente en la resolución de problemas de optimización topológica para obtener estructuras más livianas con máxima rigidez. Los métodos anteriormente mencionados son aptos únicamente para realizar búsquedas locales. Sin embargo, en problemas reales, solo la solución óptima es aceptable y por lo tanto la optimización estocástica debe ser empleada.

2.2. OT GLOBAL ESTOCÁSTICA

En las ciencias aplicadas al igual que en el conocimiento teórico, existen problemas de optimización lineal o no lineal que involucran al mismo tiempo variables continuas y enteras. Cuando las dimensiones y la complejidad matemática del problema son grandes, aparece el fenómeno denominado explosión combinatoria, debido a la gran cantidad de soluciones factibles e no factibles que pueden aparecer.

La solución del problema de optimización global será aquella que tenga la mejor función objetivo y que cumpla todas las restricciones. Una forma de determinar ésta solución, denominada solución óptima, consiste en evaluar explícitamente todas las alternativas existentes, lo cual requiere de tiempos de cómputo

excesivos aún contando con máquinas de alta velocidad y con muchas máquinas operando en paralelo. Existen técnicas exactas que permiten resolver este tipo de problemas como por ejemplo, los métodos de descomposición de Fletcher-Reeves [24], el Branch and Bound [25], y el método de Polak-Ribiere [26], entre otros. Estos métodos no evalúan explícitamente todo el espacio de soluciones, y en su lugar evalúan unos pocos puntos y subespacios del problema, y al mismo tiempo evalúan implícitamente los demás puntos y subespacios. Desafortunadamente, estas metodologías sólo son exitosas en problemas muy acotados en tamaño y de media o baja complejidad.

En el caso de problemas con alta complejidad matemática y gran dimensión, las técnicas arriba mencionadas requieren de tiempos de procesamiento muy altos y nunca alcanzan la solución óptima o soluciones subóptimas de buena calidad. Es aquí donde las técnicas estocásticas de optimización surgen como una alternativa interesante, ya que exploran el espacio de soluciones de una manera controlada y encuentran soluciones cuasi óptimas de buena calidad, en tiempos de cómputo razonables. En este contexto, ellas son una buena opción cuando se emplean modelos de material artificial en la solución del problema de OT.

Como suele ocurrir con las ideas nuevas, las primeras propuestas realizadas sobre técnicas estocásticas, para resolver problemas de optimización de gran complejidad, fueron vistas con mucha desconfianza por otros investigadores, y se requirió de un tiempo de maduración y pruebas, en distintas disciplinas del conocimiento, para que se comenzaran a reportar resultados exitosos, y fueron entonces reconocidas, acogidas e impulsadas.

En la actualidad existen revistas científicas (Journal of Global Optimization, Applied Mathematics and Computation, Applied Soft Computing, International Journal of Computer Mathematics, entre otras), dedicadas a éstas técnicas de

optimización global, y puede decirse que su aplicación ha generado inmensos ahorros en recursos a los países y a los sectores productivos. Aunque estos procedimientos aparentan no poseer la rigurosidad matemática que si poseen las técnicas exactas, están soportadas sobre una base matemática sencilla, que se encuentra distribuida y de forma implícita en cada uno de los pasos que realizan, además de contar con una componente de búsqueda aleatoria. Existe una gran variedad de técnicas estocásticas, y se encuentra que unas son más exitosas que otras en cada uno de los problemas, sin embargo, no existe en la actualidad un método que sea universal y que permita resolver, mejor que los otros métodos, la mayoría de los problemas existentes (más detalles en [27, 28]). Dentro de las técnicas más relevante se encuentran: Simulated Annealing (SA), Algoritmos Genéticos (AGs), Optimización con Enjambre de Partículas (PSO), Optimización con Colonia de Hormigas (ACO), entre otras (más detalles en [29]).

Estas técnicas por su simplicidad y buenos resultados en numerosos problemas, se han convertido en una herramienta muy popular, con cientos de aplicaciones en los más variados campos, sin embargo, estas contienen un conjunto de parámetros los cuales deben ser calibrados (sintonizados) para cada tipo de problema. En el caso del SA se deben calibrar la temperatura inicial y final del algoritmo, además, de la tasa de reducción de la temperatura y el número de iteraciones. Lo mismo ocurre para el PSO, en el cual se deben ajustar el número de partículas, el parámetro cognitivo y social, entre otros. Así ocurre con las demás técnicas. Es por este motivo, que un estudio cuidadoso sobre el comportamiento de los algoritmos mencionados debe ser realizado debido a que su desempeño es dependiente del problema analizado.

Como se sabe, determinar diseños topológicos óptimos globales en estructuras continuas es un problema difícil que requiere procedimientos de optimización sofisticados. En problemas típicos de optimización estructural pueden existir

muchas configuraciones locales mínimas. Por esta razón, un proceso basado en gradientes, que reduzca (o aumente) monotónicamente el valor de la función objetivo corre el riesgo de quedar atrapado en una configuración estructural local mínima. En este sentido, su éxito depende de la selección del diseño inicial y solo puede ser considerada como útil si se busca mejorar el último diseño obtenido.

Con la finalidad de encontrar el óptimo global de una función objetivo, sin que el procedimiento sea sensible al punto de partida, es necesario emplear métodos de optimización global. En este contexto, las técnicas estocásticas son apropiadas para esta tarea. Estas técnicas están diseñadas para resolver problemas difíciles de optimización (modelos o sistemas que son altamente no lineales, de alta dimensionalidad con variables continuas y discretas y problemas combinatorios), además tienen una amplia aplicación a problemas de ingeniería, la ciencia y los negocios [28]. Entre las aplicaciones específicas se pueden citar: la toma de decisiones de inversión a corto y largo plazo con el fin de aumentar los beneficios en empresas; la ingeniería aeroespacial (simulaciones para perfeccionar el diseño de un misil o avión); la medicina (diseño de experimentos de laboratorio para extraer la máxima información acerca de la eficacia de un fármaco nuevo); la ingeniería de tráfico (ajuste de la sincronización de las señales en una red de tráfico), entre muchas otras [28].

Las tres principales ventajas de la optimización estocástica son: a) no son sensibles al punto de partida; b) tienen la facultad de buscar en espacios de solución grandes y, c) pueden escapar de puntos óptimos locales. Como es sabido, su mayor desventaja, la constituye su alto costo computacional. Entre las técnicas de optimización estocástica más populares están los Algoritmos Genéticos (AG) [30, 31] y el Simulated Annealing (SA) [32, 33]. La característica más importante del SA, es su alta confiabilidad al localizar óptimos globales (la

probabilidad de encontrar el óptimo global es alta aún en problemas con gran número de variables de diseño [34]).

En cuanto a aplicaciones de técnicas estocásticas a problemas de OT, Hansel [35] presentó dos alternativas exitosas (Algoritmo de optimización heurístico y Algoritmos Genéticos AG) para determinar el mínimo peso en estructuras laminares. En este trabajo, el material puede ser recolocado en regiones con altos esfuerzos e índices de falla de TSAI-WU bajos, además, dado que la optimización se basa en una búsqueda al azar, los diseños finales necesitan algún postprocesamiento para crear una estructura suave y bien conectada. Wang [36] utilizó un algoritmo genético mejorado para abordar el problema de OT, y comparó los resultados con los arrojados por el popular método SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization), concluyendo que se obtienen mejores soluciones con los AG, a pesar de su mayor costo computacional. Adicionalmente, los autores proponen el uso de técnicas de procesamiento de imágenes para tratar el problema de tablero de ajedrez. Sin embargo, para evitar el apareamiento de rotulas de un nodo, el número total de rotulas fue considerado como una restricción explícita del problema. Seguidamente, Balamurugan [37] propuso una mejora del algoritmo genético denominada TSAGA, cuya eficiencia y efectividad fue puesta a prueba para solucionar el problema de OT, encontrando resultados satisfactorios. En este trabajo son empleadas también técnicas de procesamiento digital de imagen para controlar los problemas de inestabilidad. En ese mismo año, Kaveh [38] presentaron un análisis de optimización topológica mediante el empleo del Método de Optimización con Colonia de Hormigas (Ant Colony Optimization-ACO), concluyendo que dicho algoritmo es capaz de manejar problemas de OT con gran número de variables, a pesar de reportar un aumento del número de evaluaciones de la función objetivo. Debido a la naturaleza del ACO, los autores reportan la obtención de soluciones asimétricas de problemas iniciales simétricos. Para evitar este inconveniente, emplearon una técnica de

filtración de ruido (método de convolución). De esta forma lograron prevenir la aparición de elementos muy delgados (no deseables) en el resultado final.

Recientemente, ACO y el método de Optimización con Enjambre de Partículas (Particle Swarm Optimzation-PSO) fueron empleados por Luh y Lin [39, 40], para estudiar problemas de optimización topológica con el fin de minimizar el peso de una estructura, concluyendo que los algoritmos mencionados constituían herramientas potentes para la búsqueda de topologías óptimas de forma automática. En ese estudio, para evitar problemas de inestabilidad se eliminaron los elementos desconectados (conectados por un solo nodo) o se adicionaron elementos vecinos al elemento desconectado, de forma aleatoria, hasta que la estructura alcanzaba la estabilidad.

2.3. PROBLEMAS EN OT: EL TABLERO DE AJEDREZ Y LA COLOCACIÓN DEL MATERIAL

En la solución de un problema de OT es relativamente frecuente la aparición del fenómeno de inestabilidad numérica conocido como el Tablero de Ajedrez (checkerboard). Este problema numérico, se caracteriza por la formación de una topología óptima con regiones que contienen porciones vacías (sin material) y sólidas (con material), las cuales se alternan de forma semejante a un tablero de ajedrez (ver Figura 1). En otras palabras, el problema del Tablero de Ajedrez se manifiesta como la distribución no óptima de material sobre el dominio de diseño, lo cual dificulta la interpretación y posterior fabricación de estructuras obtenidas mediante la OT [41].



Figura 1 Tablero de ajedrez (a) [42] (b) [43]

La mayor parte de trabajos en el área de OT ha sido enfocada a proponer estrategias alternativas contra el problema del costo computacional, que consiste principalmente en la solución de un gran número de sistemas de ecuaciones lineales, originados por los análisis sucesivos de elementos finitos que se deben realizar. El anterior problema puede ser atacado mediante el empleo de computación de alto desempeño.

Debido a que la mayor parte del software comercial de elementos finitos se basa principalmente en la formulación de desplazamientos y en el uso de elementos cuadriláteros o triangulares isoparamétricos (elasticidad plana), y a que, a cada elemento se le asigna una densidad desconocida, es posible que aparezca el problema del Tablero de Ajedrez [44]. Son varios los trabajos publicados sobre este tema, más, no existe aún consenso entre la comunidad científica sobre cuál es la mejor explicación para tal fenómeno. Dicho fenómeno aparece comúnmente en la OT de estructuras y puede ser producido también por las técnicas de optimización numérica.

Adicionalmente, los fenómenos de inestabilidad en la distribución del material se podrían presentar debido a aproximaciones utilizadas por el método de elementos finitos [45]. Hay varios enfoques reportados en la literatura para afrontar este problema. Uno de ellos, propone la aplicación de elementos finitos de orden superior (8 o 9 nodos), debido a que estos podrían simular con mayor precisión el

campo de desplazamiento, y por tanto, tendrían la capacidad de reducir la incidencia de este problema [41]. Otro posible enfoque fue propuesto en [44], mediante el empleo de una teoría de elementos finitos mixtos (aproximación simultánea del campo de esfuerzos y de desplazamientos). En los trabajos reportados por Lian [41] y Bertsch [46], se aplica una técnica de filtrado basada en el tratamiento de imágenes y un método basado en el empleo de elementos de borde, respectivamente.

Básicamente, el Tablero de Ajedrez presenta mayor rigidez en comparación con otras configuraciones posibles, mostrando que de hecho la discretización por elementos finitos puede introducir mínimos locales que no tienen sentido físico y que dificulta en gran manera la tarea de alcanzar soluciones razonables.

Tradicionalmente los algoritmos de optimización topológica han sido formulados en términos de maximización de rigidez y/o minimización de flexibilidad. Todo esto parece muy claro desde el punto de vista de la ingeniería civil práctica, pero conduce a problemas de optimización complicados, debido a que un gran número de restricciones locales altamente no lineales deben definirse para tener en cuenta los esfuerzos o desplazamientos máximos en cada elemento.

En este orden de ideas, se propone en este trabajo, desarrollar un algoritmo de OT, en el cual para conseguir la minimización de la energía de deformación, se sigue un proceso iterativo donde se van actualizando los valores de densidades en los elementos. Primeramente se realiza un diseño inicial haciendo una distribución del material homogénea en la geometría de trabajo. Luego se procede a calcular la matriz de rigidez global teniendo en cuenta la actual distribución de densidades. Se entiende que si un elemento tiene densidad 0 (es decir, no representa material) no tiene rigidez asociada. En seguida se calcula mediante elementos finitos el campo de desplazamientos para cierto estado de cargas. Posteriormente se

calculan las derivadas de la energía de deformación respecto a la variable de diseño (densidad) y se emplea un filtro de imagen con el objeto de encontrar soluciones menos pixeladas y más continuas, todo esto con el fin de evitar problemas de inestabilidad (tablero de ajedrez, dependencia de malla, contornos discontinuos, entre otros). Finalmente, mediante una técnica estocástica, se calculan las nuevas densidades.

De esta manera se va siguiendo el proceso, que va iterando hasta un punto en el que el valor de las densidades en los elementos no cambia significativamente y el bucle termina.

En el capítulo siguiente se realizará un estudio de las técnicas estocásticas de optimización empleadas en este trabajo.

3. TÉCNICAS ESTOCÁSTICAS DE OPTIMIZACION

Las técnicas estocásticas están entre los desarrollos más recientes en métodos aproximados para resolver problemas de optimización complejos del mundo real que se encuentran en el área de comercio, ingeniería, industria y muchas otras áreas. Estas técnicas usan conceptos basados en inteligencia artificial, biología, matemáticas, ciencia físicas y naturales. Este capítulo presenta una reseña de las técnicas más exitosas desarrolladas en los últimos años. Estas son Simulated Annealing (SA), Optimización con enjambre de partículas (PSO) y Algoritmos Genéticos (AG). El primer ejemplo es un método de búsqueda a través de trayectorias (búsqueda local), mientras que los dos restantes representan ejemplos de métodos basados en el comportamiento, tanto social como biológico, de poblaciones.

3.1. SIMULATED ANNEALING (SA)

Simulated Annealing pertenece a la clase de algoritmos de búsqueda local que permite movimientos ascendentes para evitar quedar atrapado prematuramente en un óptimo local. Estos algoritmos juegan un rol especial dentro del campo de la optimización por dos razones: Primero, han mostrado ser muy exitosos cuando han sido aplicados a un amplio espectro de problemas prácticos. Segundo, poseen una componente estadística que facilita su convergencia. El origen de esta técnica estocástica y la elección del criterio de aceptación de la nueva solución generada, se basan en el proceso físico de enfriamiento del metal propuesto por Metropolis en los años 50. [47]. Treinta años más tarde fue creado el algoritmo actual [32]. El enfriamiento es un proceso termal a través del cual se alcanza

estados de energía mínima de un sólido en un baño de calor, el cual consiste en los siguientes pasos:

- La temperatura en el baño de calor es incrementada hasta un valor máximo al cual el sólido se funde.
- Luego la temperatura es disminuida cuidadosamente hasta que las partículas del sólido se reorganizan para conformar un reticulado altamente estructurado y la energía del sistema es mínima.

Una característica distintiva de SA es que a pesar de aceptar nuevas soluciones basada en mejoras en el valor de la función objetivo, también acepta, de una manera limitada, soluciones con un incremento en el valor de la función objetivo.

El funcionamiento de SA se puede describir de la siguiente manera. Comienza con un cierto estado S . A través de un proceso único crea un estado vecino S' al estado inicial. Si la energía, o la evaluación, del estado S' es menor que el estado S cambia el estado S por S' . Si la evaluación de S' es mayor que la de S puede estar empeorando, por lo tanto, elige S' en vez de S con una cierta probabilidad que depende de las diferencias en las evaluaciones y la temperatura del sistema T . La probabilidad de aceptar un peor estado se calcula por la siguiente ecuación:

$$P(\Delta f, T) = e^{(\Delta f / T)} \quad (1)$$

donde:

P ; probabilidad de aceptar el nuevo estado

Δf ; diferencia de las evaluaciones de la función para cada estado.

T ; temperatura del sistema.

e ; número de Euler.

Inicialmente, con valores grandes para T , soluciones con un mayor valor de función objetivo son frecuentemente aceptadas, a medida que el valor de T disminuye, raramente tal tipo de soluciones son aceptadas, y cuando T se acerca a cero, sólo aquellas soluciones que mejoran la anterior son aceptadas. Varios estudios teóricos demuestran que si T decrece lo suficientemente lento, el proceso converge a la solución óptima [48]. La función para reducción de temperatura más utilizada es: $T_{k+1} = T_k \cdot \alpha$, donde T_{k+1} es el nuevo valor ajustado de T , T_k corresponde al previo valor de T y α es una constante que está comprendida en el intervalo $[0.8, 0.99]$. En general, el algoritmo para SA es mostrado en la Figura 2.

En esta investigación se propone un nuevo algoritmo denominado ASAM (Algoritmo Simulated Annealing Modificado), el cual tiene tres características fundamentales que lo hacen diferente respecto del SA básico. Dichas características son las siguientes:

```

Sea  $f(s)$  el coste de la solución  $s$  y sea  $G(s)$  su entorno.
Selecciona una solución inicial  $S$ ;
Seleccionar una temperatura inicial  $T_i > 0$ ;
Seleccionar una función de reducción de la temperatura  $\alpha$ ;
Seleccionar un número de iteraciones  $N$ ;
Seleccionar un criterio de parada;
REPETIR
    REPETIR
        Seleccionar aleatoriamente una solución  $S' \in G(s)$ ;
        Sea  $\Delta f = f(S') - f(S)$ ;
        SI  $\Delta f < 0$  ENTONCES  $S_{OPTIMO} = S'$ ;
        SINO
            Generar aleatoriamente  $t \in L(0, 1)$ ;
            SI  $t < e^{(\Delta f/T)}$  ENTONCES  $S_{OPTIMO} = S'$ ;
        FIN SINO
    HASTAQUE iteraciones= $N$ 
     $T_{i+1} = T_i * \alpha$ ;
HASTAQUE criterio de parada=CUMPLA

La mejor solución encontrada será la solución dada por el algoritmo
    
```

Figura 2 Pseudocódigo del algoritmo SA [48]

3.1.1. Exploración preliminar

En esta etapa el algoritmo realiza una exploración en todo el espacio de búsqueda (ver Figura 3) que viene dado por:

$$X_{P \times N} = X_{min} + rand_{P \times N}(X_{max} - X_{min}) \quad (2)$$

donde:

P ; número de puntos que se desean en el espacio de búsqueda.

N ; número de dimensiones del problema.

X_{min} ; límite inferior del problema.

X_{max} ; límite superior del problema.

$rand_{P \times N}$; matriz $P \times N$ de números aleatorios entre 0 y 1.

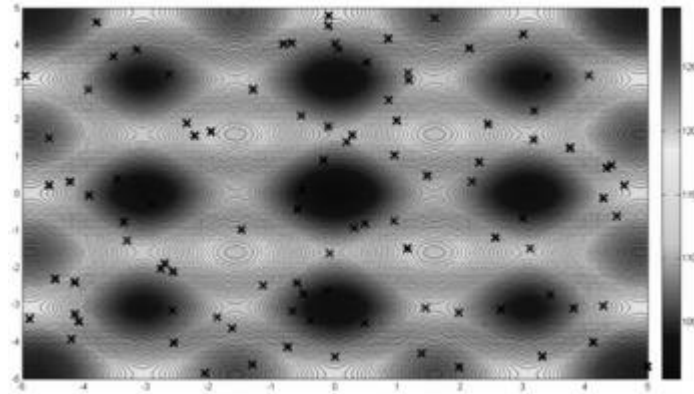


Figura 3 Exploración en el espacio de búsqueda (Autor).

Para comenzar el proceso de optimización son ASAM, se evalúan todos los puntos en la función objetivo y se escoge el que tenga menor valor de función objetivo si se desea minimizar, o mayor valor de función objetivo si se desea maximizar.

3.1.2. Paso de búsqueda

Para generar el estado vecino ASAM utiliza un paso de búsqueda. Este paso, se reduce gradualmente a medida que desciende la temperatura del sistema, esto permite que el algoritmo realice una exploración global a temperaturas altas y una exploración local a temperaturas bajas, dando un equilibrio entre la exploración y la explotación del algoritmo.

3.1.3. Probabilidad de aceptación

La probabilidad de aceptación de una peor solución (estado) viene dada por:

$$P = \frac{1}{1 + e^{(\Delta f/T)}} \quad (3)$$

donde:

P ; probabilidad de aceptar el nuevo estado

Δf ; diferencia de las evaluaciones de la función para cada estado.

T ; temperatura del sistema.

e ; número de Euler.

Esta probabilidad se encuentra en un intervalo entre 0 y $\frac{1}{2}$, lo que permite al algoritmo tener un rango menor de aceptación de peores soluciones.

SA, ha sido ampliamente utilizado en problemas de optimización estructural debido a su simplicidad y capacidad para encontrar el óptimo global, aunque existan muchas variables de diseño [49]. La viabilidad del uso del SA en el diseño estructural se demostró claramente en los documentos clásicos escritos por Balling [50] y Bennage y Dhingra [51]. Shea [52] desarrolló un método de diseño de barras basados en una combinación de SA y reglas de transformación geométrica y lo aplicaron al diseño de cerchas. Recientemente en [53, 54], se evaluó el desempeño de siete técnicas estocásticas en problemas de optimización estructural (diseño óptimo de estructuras articuladas y estructuras metálicas), tomando como función objetivo el peso de la estructura. En las dos publicaciones las mejores técnicas fueron: Simulated Annealing y las Estrategias Evolutivas (ver Figura 4). Sin embargo, en los últimos 10 años, la formulación básica del algoritmo SA ha sido modificada a menudo con el fin de mejorar el comportamiento de la convergencia y reducir el número exacto de análisis estructural [49].

Problema a optimizar	ESs	SA	TS	ACO	PSO	SGA	HS
Pórtico (plano) de acero arriostrado 224 elementos	2	1	3	4	5	6	7
Pórtico (3D) de acero arriostrado 325 elementos	1	2	3	4	5	7	6
Pórtico (3D) de acero no arriostrado 568 elementos	1	2	3	4	6	5	7
Armadura de puente (plana) 113 elementos	1	2	4	5	3	7	6
Cubierta arriostrada 354 elementos	2	1	5	4	3	7	6
Armadura torre 582 elementos	2	3	4	5	1	7	6
Grilla doble 960 elementos	2	1	4	5	3	6	7
ESs; estrategias evolutivas	ACO; optimización colonia de hormigas						
SA; simulated annealing	PSO; optimización enjambre de partículas						
TS; búsqueda tabú	SGA; algoritmo genético simple						
HS; búsqueda armónica							

Figura 4 Desempeño de las técnicas estocásticas en optimización estructural [53, 54]

En cuanto a aplicaciones de SA a problemas de OT, Dhingra [55], utilizó SA para la generación y evaluación de OT de cerchas, con una mezcla de variables continuas y discretas. Esta propuesta permite introducir nuevos miembros a la estructura con el fin de variar la topología existente. Otro trabajo relevante fue el de Topping [56], quien empleó SA para encontrar el peso mínimo de armaduras planas sometidas a múltiples cargas, aplicando dos criterios de optimización: permitir cambios en la topología de la estructura (eliminar elementos redundantes) y minimizar el área (sección transversal) de los miembros.

Hasancebi [57], desarrolló un SA para el diseño óptimo simultáneo de estructuras tipo cerchas con respecto al tamaño, forma y topología. El objetivo es reducir al mínimo peso la estructura, cumpliendo con restricciones de desplazamientos en los nodos, tensión y estabilidad. Dicho algoritmo se probó en dos grandes problemas de diseño tomados de la literatura con fines de comparar resultados, mostrando éxito en la resolución de dichos problemas.

En la actualidad varios trabajos se han realizado como se puede ver en Baumann y Kost [58], quienes utilizaron tres algoritmos estocásticos de búsqueda global, SA, AG, y el costo aleatorio, para encontrar la topología óptima de armaduras con el mínimo peso, a partir de diferentes configuraciones iniciales (ver Figura 5). SA resultó ser la más confiable de los tres, puesto que encontró la solución óptima en 19 de las 20 pruebas realizadas. Cabe resaltar que su éxito tampoco depende del diseño inicial. Además del trabajo de Baumann y Kost, se encuentran el de Bureerat y Kunakote [59] y Sonmez [60].

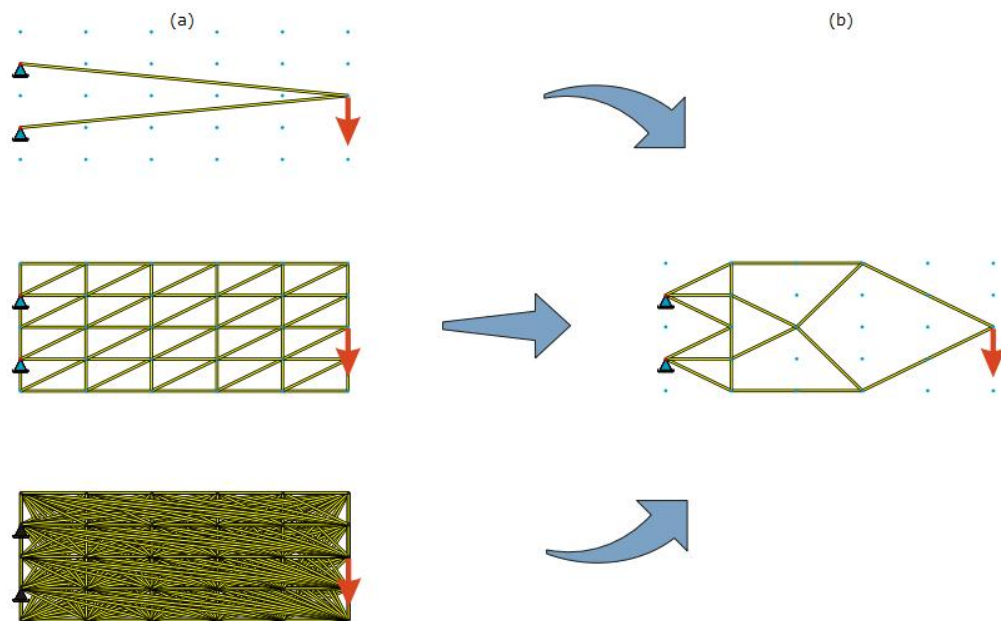


Figura 5 (a) Configuración inicial, (b) estructura óptima [58]

En 2011, Noilublao y Bureerat [61] aplicaron una variación del método denominada Archived Multiobjective Simulated Annealing (AMOSa), a una torre esbelta tridimensional así como a otros casos más sencillos. En este trabajo empleó otras técnicas como Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA2) y Population- Based Incremental Learning (PBIL).

3.2. OPTIMIZACIÓN CON ENJAMBRE DE PARTÍCULAS (PSO)

La optimización con enjambre de partículas (PSO-Particle Swarm Optimization) fue propuesto inicialmente por Kennedy y Eberhart [62] y nace, al igual que otras técnicas estocásticas de cálculo evolutivo, en un intento por imitar y mimetizar el comportamiento de procesos naturales [63]. En un sistema PSO, la búsqueda se realiza utilizando una población de partículas que corresponden a los individuos, cada uno de los cuales representa una solución candidata al problema. Las partículas cambian su estado al “volar” a través del espacio de búsqueda hasta que se ha encontrado un estado relativamente estable. Un sistema PSO combina un modelo “únicamente social”, el cual sugiere que los individuos ignoran su propia experiencia y ajustan su conocimiento de acuerdo a las creencias exitosas de los individuos en la vecindad; y un modelo “únicamente cognitivo”, el cual trata a los individuos como seres aislados [64]. Una partícula cambia de posición utilizando estos dos modelos [65].

Dentro de PSO, la i -ésima partícula es tratada como un punto dentro de un espacio N -dimensional, representada por $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})$. La mejor posición encontrada por la partícula anteriormente, o sea aquella donde se obtuvo el mejor valor en la función de costo, es representada como $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})$. La mejor posición encontrada por el total de la población es representada por el símbolo g . La rata de cambio de posición (velocidad) para una partícula i es representada como $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN})$. Las partículas son manipuladas de acuerdo a las ecuaciones 4 y 5, donde c_1 y c_2 son dos constantes positivas, $rand_1$ y $rand_2$ son dos números aleatorios en el rango de $[0-1]$, y w es el peso inercial. La ecuación 4 es utilizada para calcular la nueva velocidad de la partícula de acuerdo a su velocidad anterior y las distancias de su posición actual

a su mejor posición y la mejor posición dentro del grupo. Luego la partícula se desplaza hacia una nueva posición de acuerdo a la ecuación 5. El peso inercial w , formulado por Shi y Eberhart [66] (control de la exploración y explotación), es utilizado para controlar el impacto de las velocidades previas en la velocidad actual, influenciando el cambio entre las habilidades de exploración global (rango amplio) o local (rango corto) de las partículas. Un peso inercial mayor facilita la exploración global para buscar nuevas áreas, mientras que un peso inercial menor tiende a facilitar exploración local para sintonizar finamente el área de búsqueda actual. Una correcta selección del peso inercial puede proveer un balance entre las habilidades de búsqueda local y global, por lo tanto requiere menores iteraciones para encontrar el punto óptimo [64]. Adicionalmente en [66] sugieren usar un peso inercia en el rango de [0.8-1.4].

$$v_{in}(t + 1) = w \cdot v_{in}(t) + c_1 \cdot rand_1(p_{in} - x_{in}(t)) + c_2 \cdot rand_2(p_{gn} - x_{int}) \quad (4)$$

$$x_{in}(t + 1) = x_{in}(t) + v_{in}(t + 1) \quad (5)$$

Durante los últimos años ha sido una técnica estudiada en la optimización de estructuras, destacando los siguientes trabajos:

Schuttte y Groenwold [67] aplicaron por primera vez con éxito un algoritmo PSO en la optimización de estructuras. Para evaluar el algoritmo emplearon las clásicas estructuras de 10 y 25 barras, así como una estructura de 60 barras. Li y colaboradores [68] emplearon un algoritmo PSO para optimizar estructuras articuladas. En este trabajo intentaron evitar la rápida convergencia del PSO, con el fin de no quedar atrapados en óptimos locales. Para probar el algoritmo lo aplicaron sobre las estructuras clásicas de 10 y 25 barras. Perez y Behdinan [69] utilizaron un algoritmo PSO para la optimización de estructuras donde emplearon

la función de penalización de Lemonge, validando los resultados con las tradicionales estructuras.

Kaveh y Talahari [70] publicaron un algoritmo HPSO que empleaba una técnica de Búsqueda Armónica (HS), un algoritmo PSO (empleado para la búsqueda global) y un algoritmo ACO (empleado para la búsqueda local) para la optimización de estructuras. Al momento de validar el algoritmo encontraron soluciones bastante pobres. La ventaja de este algoritmo frente a los antes publicados es el bajo número de evaluaciones de la función objetivo. Ese mismo año Li y colaboradores [71] publicaron un algoritmo HPSO que empleaba una técnica de Búsqueda Armónica (HS) para acelerar la convergencia del algoritmo, proporcionando buenos resultados.

Por otro lado Luh y Lin [39] presentaron un algoritmo donde la optimización se realizaba en dos etapas. La primera etapa optimizaba la topología mediante un PSO binario para posteriormente modificar el tamaño mediante un PSO inspirado en la atracción y repulsión de partículas. Posteriormente presentaron el PSO binario, para resolver problemas de optimización topológica de estructuras continuas, en donde, el potencial del algoritmo propuesto como una herramienta para la investigación de topologías óptimas y para automáticamente crear soluciones innovadoras a los problemas estructurales de diseño continuo, se ilustró en los ejemplos presentados [40].

3.3. ALGORITMOS GENÉTICOS (AG)

Los Algoritmos Genéticos (AG) son métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Están basados en el proceso

genético de los organismos vivos. A lo largo de las generaciones, las poblaciones evolucionan en la naturaleza de acorde con los principios de la selección natural y la supervivencia de los más fuertes, postulados por Darwin (1859). Por imitación de este proceso, los AG son capaces de ir creando soluciones para problemas del mundo real. La evolución de dichas soluciones hacia valores óptimos del problema depende en buena medida de una adecuada codificación de las mismas. Los principios básicos de los AG fueron establecidos por Holland [30], y se encuentran bien descritos en varios textos [31, 72, 73, 74].

En la naturaleza los individuos de una población compiten entre sí en la búsqueda de recursos tales como comida, agua y refugio. Incluso los miembros de una misma especie compiten a menudo en la búsqueda de un compañero. Aquellos individuos que tienen más éxito en sobrevivir y en atraer compañeros tienen mayor probabilidad de generar un gran número de descendientes. Por el contrario individuos poco dotados producirán un menor número de descendientes. Esto significa que los genes de los individuos mejor adaptados se propagaran en sucesivas generaciones hacia un número de individuos creciente. La combinación de buenas características provenientes de diferentes ancestros, puede a veces producir descendientes “superindividuos”, cuya adaptación es mucho mayor que la de cualquiera de sus ancestros. De esta manera, las especies evolucionan logrando unas características cada vez mejor adaptadas al entorno en el que viven.

Los AG usan una analogía directa con el comportamiento natural. Trabajan con una población de individuos, cada uno de los cuales representa una solución factible a un problema dado. A cada individuo se le asigna un valor o puntuación, relacionado con la bondad de dicha solución. En la naturaleza esto equivaldría al grado de efectividad de un organismo para competir por unos determinados recursos. Cuanto mayor sea la adaptación de un individuo al problema, mayor ser

a la probabilidad de que el mismo sea seleccionado para reproducirse, cruzando su material genético con otro individuo seleccionado de igual forma. Este cruce producirá nuevos individuos (descendientes de los anteriores) los cuales comparten algunas de las características de sus padres. Cuanto menor sea la adaptación de un individuo, menor será la probabilidad de que dicho individuo sea seleccionado para la reproducción, y por tanto de que su material genético se propague en sucesivas generaciones.

De esta manera se produce una nueva población de posibles soluciones, la cual reemplaza a la anterior y verifica la interesante propiedad de que contiene una mayor proporción de buenas características en comparación con la población anterior. Así a lo largo de las generaciones las buenas características se propagan a través de la población. Favoreciendo el cruce de los individuos mejor adaptados, van siendo exploradas las áreas más prometedoras del espacio de búsqueda. Si el AG ha sido bien diseñado, la población convergerá hacia una solución óptima del problema.

Para abordar un problema de optimización, se necesita una codificación o representación del problema, que resulte adecuada al mismo. Además se requiere una función objetivo (ajuste o adaptación) al problema, la cual asigna un número real a cada posible solución codificada. Durante la ejecución del algoritmo, los padres deben ser seleccionados para la reproducción, a continuación dichos padres seleccionados se cruzaran generando dos hijos, sobre cada uno de los cuales actuara un operador de mutación. El resultado de la combinación de las anteriores funciones ser a un conjunto de individuos (posibles soluciones al problema), los cuales en la evolución del AG formaran parte de la siguiente población. En la Figura 6 se presenta el pseudocódigo de los AG.

```
BEGIN /* Algoritmo Genetico Simple */
  Generar una poblacion inicial.
  Computar la funcion de evaluacion de cada individuo.
  WHILE NOT Terminado DO
    BEGIN /* Producir nueva generacion */
      FOR Tamaño poblacion/2 DO
        BEGIN /*Ciclo Reproductivo */
          Seleccionar dos individuos de la anterior generacion,
          para el cruce (probabilidad de seleccion proporcional
          a la funcion de evaluacion del individuo).
          Cruzar con cierta probabilidad los dos
          individuos obteniendo dos descendientes.
          Mutar los dos descendientes con cierta probabilidad.
          Computar la funcion de evaluacion de los dos
          descendientes mutados.
          Insertar los dos descendientes mutados en la nueva generacion.
        END
      IF la poblacion ha convergido THEN
        Terminado := TRUE
      END
    END
  END
```

Figura 6 Pseudocódigo Algoritmo AG. [72]

3.3.1. Selección

El operador de selección es el encargado de transmitir y conservar aquellas características de las soluciones que se consideran valiosas a lo largo de las generaciones. El principal medio para que la información útil se transmita es que aquellos individuos mejor adaptados (mejor valor de función objetivo) tengan más probabilidades de reproducirse. Sin embargo, es necesario también incluir un factor aleatorio que permita reproducirse a individuos que aunque no estén muy bien adaptados, puedan contener alguna información útil para posteriores generaciones, con el objeto de mantener así también una cierta diversidad en cada población. Fundamentalmente, las principales formas de selección de los individuos para la reproducción de la población son: selección por ruleta, selección por ranking y selección por torneo [75].

- *Selección por Ruleta*: Con este método la probabilidad que tiene un individuo de reproducirse es proporcional a su valor de función objetivo, es decir, a su adaptación. Una vez calculadas estas probabilidades, la selección de los individuos para reproducirse es aleatoria según estos valores. Se puede encontrar una descripción detallada de esta estrategia en [31].
- *Selección por Ranking*: Consiste en calcular las probabilidades de reproducción atendiendo a la ordenación de la población por el valor de adaptación en vez de atendiendo simplemente a su valor de adecuación.
- *Selección por Torneo*: Reporta un coste computacional muy bajo debido a su sencillez. Se selecciona un grupo de t individuos y se genera un número aleatorio entre 0 y 1. Si este número es menor que un cierto umbral K (usualmente 0,75), se selecciona para reproducirse al individuo con mejor adaptación, y si este número es menor que K , se selecciona, por el contrario, al individuo con peor adaptación.

3.3.2. Cruce

El operador de cruce permite realizar una exploración de toda la información almacenada hasta el momento en la población y combinarla para crear mejores individuos. Dentro de los métodos habituales destacamos los siguientes:

- *Cruce de un punto*: Es el método de cruce más sencillo. Se selecciona una posición en las cadenas de los progenitores, y se intercambian los genes a la izquierda de esta posición.
- *Cruce de n puntos*: Es una generalización del método anterior. Se seleccionan varias posiciones (n) en las cadenas de los progenitores y se intercambian los genes a ambos lados de estas posiciones.

- *Cruce Uniforme*: Se realiza un test aleatorio para decidir de cuál de los progenitores se toma cada posición de la cadena.

3.3.3. Mutación

El objetivo del operador de mutación es producir nuevas soluciones a partir de la modificación de un cierto número de genes de una solución existente, con la intención de fomentar la variabilidad dentro de la población. Existen muy diversas formas de realizar la mutación, desde la más sencilla, donde cada gen muta aleatoriamente con independencia del resto de genes, hasta configuraciones más complejas donde se tienen en cuenta la estructura del problema y la relación entre los distintos genes.

En cuanto a la aplicación de AG a la OT, los primeros trabajos datan a partir de los años noventa, con el trabajo de Sandergen [76] y Jensen [77]. El dominio de diseño es discretizado en pequeños elementos, donde cada elemento contiene material o está vacío (no se permiten densidades intermedias). AG determinó la configuración óptima de material y de vacíos, de tal forma que el peso de la estructura se minimiza y al mismo tiempo se cumple restricciones de desplazamientos y esfuerzos.

En 1993, Grierson y Pak [78] emplearon un AG binario para optimizar el tamaño y la topología de diversos pórticos. Este es uno de los primeros trabajos en analizar estructuras con elementos de viga. Este mismo año Sakamoto y Oda [79] presentaron una técnica de optimización topológica empleando un método híbrido que combinaba los AG con un método basado en el Criterio de Optimalidad para optimizar la topología y el tamaño de una estructura de forma simultánea. En esta aproximación el AG optimizaba la topología mientras que el Criterio de Optimalidad optimizaba el tamaño.

Hajela y colaboradores [80, 81] emplearon los AG en la optimización topológica de estructuras reticuladas mediante un proceso de dos etapas. En la primera etapa emplearon criterios de estabilidad cinemática para identificar las configuraciones estables. En una segunda etapa añadían o quitaban elementos y redimensionaban el tamaño de los mismos.

Chapman y sus colaboradores [82, 83, 84, 85], proponen un AG, con una variedad de diferentes funciones objetivos como rigidez, área, perímetro, agujeros, para encontrar topologías óptimas de placas en voladizo.

Rajeev y Krishnamoorthy [86] publicaron una metodología para la optimización simultánea de topología y tamaño. Su metodología permitía emplear variables continuas y discretas empleando una codificación de longitud variable que permitía variar la topología y el tamaño.

Fanjoy y Crossley [87, 88] usó AG para el diseño de topologías en dos dimensiones sometidas a cargas de flexión, torsión y carga combinada.

Un estudio del estado del arte fue presentado por Kicinger [89]. Este estudio reúne las investigaciones recientes en el campo de la optimización estructural por métodos evolutivos, en particular, los AG. Ese mismo año Tang y colaboradores [90] publicaron un trabajo en el que emplearon un Algoritmo Genético mixto con variables continuas, con codificación real, y discretas, con codificación entera. Aplicaron el algoritmo para realizar optimización en cuanto a forma, tamaño y topología.

En 2007, Xu y colaboradores [91] analizaron la forma de diseñar estructuras sujetas a restricciones de resonancia mediante AG. Para probar dicho algoritmo lo

aplicaron a varias estructuras demostrando que era posible reducir el peso de las mismas sin tener problemas de resonancia.

Noilublao y Bureerat [92] emplearon un AG con una codificación mixta real-entera para optimizar forma, tamaño y topología de una torre tridimensional sujeta a restricciones de resonancia, además de las tradicionales de tensión y desplazamiento.

En el siguiente capítulo se presenta una evaluación completa del desempeño de las tres técnicas de optimización arriba descritas. Esta evaluación se realizó empleando diversas funciones de prueba reportadas en la literatura especializada.

4. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LAS TÉCNICAS ESTOCÁSTICAS

En este capítulo se describen los problemas seleccionados (sin y con restricciones) para la aplicación y análisis del comportamiento de las técnicas estocásticas. La descripción incluye un conjunto importante de problemas bien conocidos de optimización combinatoria y numérica. Todos estos problemas han sido estudiados a través de la aplicación de diferentes enfoques, desde métodos tradicionales hasta las modernas técnicas estocásticas.

4.1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONTINUA SIN RESTRICCIONES

Los problemas seleccionados para evaluar el desempeño de las técnicas anteriormente descritas, se encuentran en [93, 94], donde hay una gran variedad de funciones para validar algoritmos estocásticos de optimización global. En la Tabla 1 se resumen las funciones utilizadas y las dimensiones de cada función. A continuación se describen las funciones:

	Nombre de la función	Dimensión n
1	Función Ackley (AK)	50
2	Función Colville (CV)	4
3	Función Dixon (DX)	10
4	Función Levy (L)	10
5	Función Neumaier (NM)	10
6	Función Rosenbrock (R)	50
7	Función Schwefel (SWE)	20
8	Función Sphere (SP)	50
9	Función Zakharov (ZK)	10

Tabla 1 Funciones de prueba

4.2. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONTINUA CON RESTRICCIONES

Con el objeto de probar la eficiencia de los algoritmos propuestos se adoptó un conjunto estándar de funciones de prueba disponibles en la literatura (ver [95]). Todas estas funciones se refieren a problemas de optimización numérica global previamente resueltas con técnicas evolutivas y con técnicas clásicas. Este conjunto de funciones de prueba incluye problemas con restricciones de desigualdad y de igualdad, espacios de búsqueda de alta y baja dimensionalidad, espacios convexos y no convexos, además de zonas factibles disjuntas y/o muy pequeñas.

En la Tabla 2, se resumen las características de las trece funciones de prueba adoptadas para evaluar los algoritmos propuestos. **LI** indica el número de desigualdades lineales, **NI** indica el número de desigualdades no lineales, **LE** indica el número de igualdades lineales, **NE** indica el número de igualdades no lineales, **n** indica el número de variables de decisión, **p** representa una estimación del tamaño de la región factible con respecto a todo el espacio de búsqueda y se

obtiene generando un millón de soluciones aleatorias, y evaluando que porcentaje de ellas son factibles.

Problema	n	Función	ρ	LI	NI	LE	NE
g01	13	cuadrática	0,0003%	9	0	0	0
g02	20	no lineal	99,9973%	1	1	0	0
g03	10	no lineal	0,0026%	0	0	0	1
g04	5	cuadrática	27,0079%	0	6	0	0
g05	4	no lineal	0,0000%	2	0	0	3
g06	2	no lineal	0,0057%	0	2	0	0
g07	10	cuadrática	0,0000%	3	5	0	0
g08	2	no lineal	0,8581%	0	2	0	0
g09	7	no lineal	0,5199%	0	4	0	0
g10	8	lineal	0,0020%	3	3	0	0
g11	2	cuadrática	0,0973%	0	0	0	1
g12	3	cuadrática	4,7697%	0	9	0	0
g13	5	no lineal	0,0000%	0	0	1	2

Tabla 2 valores de ρ en las trece funciones

Puede observarse que hay funciones que tienen la zona factible muy pequeña como en el caso de g05, g07, g13 en las que $\rho=0,0000\%$, es decir, no se encuentra ningún individuo factible de manera aleatoria, lo que implica que en esos casos resultará desafiante el llegar siquiera a la zona factible.

Existen otros casos como en g02 donde la zona de factible es muy grande pero llegar al óptimo es muy complicado ya que esta función tiene muchos óptimos locales. g02, g03 y g12 son problemas de maximización y los casos restantes son problemas de minimización. Sin embargo, para facilitar la presentación de resultados se manejarán todos los problemas como de minimización. Estas ecuaciones están propuestas en [95] y contienen características que las hacen

difíciles de resolver para cualquier tipo de técnica, tales como zonas factibles, igualdades no lineales, multimodalidad.

4.3. RESULTADOS

La implementación de los algoritmos propuestos fue realizada en MATLAB®, bajo el sistema operativo Windows 7. Cabe mencionar que el equipo utilizado fue un Intel Core™ 2 Duo-1.33GHz, 2.00 GB (RAM).

Para ambos tipos de problemas (sin y con restricciones) se realizaron 30 corridas a cada función por cada algoritmo y para el análisis estadístico se tomó el propuesto en [96], y es el siguiente: el mejor, media y peor resultado.

F	Óptimo	Mejor		
		ASAM	PSO	AG
AK	0,000	0,000	0,000	3,401
CV	0,000	0,000	0,000	29,787
DX	0,000	0,000	0,000	70,479
L	0,000	0,000	-0,046	-1,386
NM	-210,000	-209,999	-209,999	-755,226
R	0,000	0,021	24,561	472,775
SWE	-8379,672	-8379,672	-6996,354	-9747,719
SP	0,000	0,362	0,000	12,456
ZK	0,000	0,000	0,000	5,712

Tabla 3 Mejor valor encontrado por los algoritmos de optimización

F	Óptimo	Media		
		ASAM	PSO	AG
AK	0,000	0,000	0,000	12,050
CV	0,000	0,000	0,000	39,487
DX	0,000	0,000	0,368	92,342
L	0,000	0,000	-1,484	-3,896
NM	-210,000	-209,996	-209,999	-816,881
R	0,000	0,035	743,825	635,037
SWE	-8379,672	-8379,673	-6013,187	-9141,137
SP	0,000	0,000	0,000	17,197
ZK	0,000	0,000	0,000	10,729

Tabla 4 Media de los valores encontrados por los algoritmos de optimización

F	Óptimo	Peor		
		ASAM	PSO	AG
AK	0,000	0,000	0,001	19,661
CV	0,000	0,000	0,000	43,063
DX	0,000	0,000	0,501	102,716
L	0,000	0,000	-5,449	-5,742
NM	-210,000	-209,994	-209,999	-871,322
R	0,000	0,038	10102,142	21939,484
SWE	-8379,672	-8379,678	-5357,911	-10461,62
SP	0,000	0,000	0,001	23,426
ZK	0,000	0,001	0,000	31,917

Tabla 5 Peor valor encontrado por los algoritmos de optimización

Claramente se puede observar que los algoritmos ASAM y PSO encontraron el óptimo en todas las funciones, caso que no ocurrió con el AG el cual no llegó a ningún valor óptimo. A continuación los resultados a los problemas de optimización con restricciones.

F	Óptimo	Mejor		
		ASAM	PSO	AG
g01	-15,000	-14,990	-15,000	-19,575
g02	-0,803	-0,803	-0,803	1,704
g03	-1,000	-1,000	-1,000	-3,145
g04	-30665,530	-30665,530	-30665,500	-43225,530
g05	5126,490	5073,910	5126,640	8261,498
g06	-6961,814	-6961,812	-6961,810	-8196,184
g07	24,306	24,307	24,351	27,915
g08	-0,096	-0,096	-0,096	1,082
g09	680,630	680,630	680,630	863,121
g10	7049,250	7251,650	7057,590	8153,490
g11	0,750	0,749	0,749	2,951
g12	-1,000	1,000	-1,000	2,489
g13	0,054	0,054	0,068	1,145

Tabla 6 Mejor valor encontrado por los algoritmos de optimización

F	Óptimo	Media		
		ASAM	PSO	AG
g01	-15,000	-14,990	-15,000	-20,575
g02	-0,803	-0,799	-0,790	2,305
g03	-1,000	-1,000	-1,000	-5,623
g04	-30665,530	-30665,530	-30665,500	-42164,371
g05	5126,490	5091,350	5461,080	9892,140
g06	-6961,814	-6961,806	-6961,810	-9569,810
g07	24,306	24,335	25,355	28,006
g08	-0,096	-0,096	-0,096	2,076
g09	680,630	680,630	680,850	875,312
g10	7049,250	7582,710	7560,040	9168,780
g11	0,750	0,749	0,750	3,750
g12	-1,000	-0,990	-1,000	3,121
g13	0,054	0,247	1,716	1,956

Tabla 7 Media de los valores encontrados por los algoritmos de optimización

F	Óptimo	Peor		
		ASAM	PSO	AG
g01	-15,000	-14,990	-15,000	-29,990
g02	-0,803	-0,785	-0,750	3,744
g03	-1,000	-1,000	-1,000	-7,861
g04	-30665,530	-30665,520	-30665,500	-48612,131
g05	5126,490	5114,430	6104,750	5165,650
g06	-6961,814	-6961,796	-6961,810	-10961,780
g07	24,306	24,380	27,316	29,825
g08	-0,096	-0,095	-0,096	3,156
g09	680,630	680,640	681,550	981,071
g10	7049,250	8253,390	8104,310	10074,940
g11	0,750	0,750	0,752	4,133
g12	-1,000	-0,980	-1,000	5,503
g13	0,054	0,527	13,670	2,873

Tabla 8 Peor valor encontrado por los algoritmos de optimización

De las tablas puede verse que nuestros algoritmos alcanzan el óptimo en varios problemas y converge al óptimo en otros problemas. Además se puede observar que los algoritmos propuestos pueden lidiar con problemas con restricciones moderadas (g06), problemas con alto número de restricciones (g01, g04). Con baja dimensionalidad (g06, g08), moderada (g09) y alta (g01, g02, g03, g07). Con diferentes tipos de restricciones y sus combinaciones (lineales, no lineales, igualdad y desigualdad), regiones factibles grande (g02), muy pequeñas (g05, g13) o disjuntas (g12), más aún, con problemas donde el óptimo global se encuentra en la frontera de la región factible (g01, g02, g04, g06, g07, g09). Los dos problemas en las que los algoritmos tuvieron mayor dificultad (los mejores resultados fueron obtenidos con ASAM) fueron g05 y g13, esto debido a que tienen zonas de factibilidad muy pequeñas y además restricciones de igualdad. En general los dos algoritmos ASAM y PSO se comportaron bien, siendo ASAM el que mejor resultados arrojó. En cuanto a los AG, no tuvieron un buen rendimiento a la hora de abordar este tipo de problemas.

Debido al desempeño mostrado por ASAM y PSO tanto en los problemas sin restricciones como en los problemas con restricciones, estos fueron escogidos para realizar el problema de optimización topológica, el cual se muestra en el siguiente capítulo.

5. FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OT

En este capítulo se detallan los elementos finitos utilizados en este trabajo, asimismo la formulación del problema de OT. Esta formulación se basa en la presentada por Sigmund [97]. En este trabajo se emplea el código mejorado de 88 líneas, propuesto por ANDREASSEN [98], como núcleo central para realizar los cálculos correspondientes a la función objetivo. El código de 88 líneas fue luego acoplado y sincronizado con los algoritmos evolutivos presentados en el capítulo 4 (ASAM y PSO) con la finalidad de realizar la optimización topológica estocástica.

5.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

"Cuando los ingenieros encuentran un problema matemático el cual no pueden resolver, es común no renunciar al problema, sino mas bien tratar de encontrar una formulación alternativa que sea solucionable y contribuya a la solución del problema original. El ejemplo más destacado de este tipo de enfoque se hizo, tal vez, con la introducción del Método de Elementos Finitos (MEF)" [99]. Esta afirmación define la esencia y la importancia del método de elementos finitos en la solución de problemas de ingeniería estructural, entre otros campos.

Los MEF iniciaron su evolución entre los años 1934 y 1935 en donde se crearon las dos primeras publicaciones sobre el tema [100, 101]. Intuitivamente ya se pensaba en representar el dominio complejo de una estructura en piezas geométricamente más simples. Esa fue la idea del investigador Hrenikoff [102], quien afirmó que la dificultad para representar las estructuras continuas podría ser superada si el dominio es dividido en elementos conectados por un número finito

de nodos, convirtiéndolo así en una armadura o pórtico, lo que podría ser resuelto con las técnicas existentes.

El concepto de “elemento continuo” propiamente dicho fue introducido por primera vez en 1943, con el trabajo de Courant [103]. El fue el creador del elemento triangular de deformación constante (CST), utilizado para resolver problemas de elasticidad plana.

Además, existen numerosas publicaciones y libros que tratan con el MEF. Algunos libros clásicos, que contiene la formulación completa del método son las referencias [104, 105, 106] entre otras. En un artículo no muy reciente [107], están recopilados los títulos de más de 100 libros y artículos publicados hasta enero de 1991 sobre MEF. Otro artículo que trata de hacer una revisión histórica de los orígenes de este método es el trabajo de Felippa [108].

La siguiente es una guía que explica los pasos necesarios para realizar el análisis estructural de un modelo utilizando MEF:

- a) A partir de la realidad física de la estructura, sus cargas y sus restricciones, es necesario inicialmente seleccionar un modelo matemático adecuado que describa correctamente el comportamiento de la estructura (teoría de placa, de vigas, de barras, elasticidad, etc.). Deben estar bien definidas las propiedades mecánicas de los materiales y el tipo de análisis que se desea realizar (pequeños o grandes desplazamientos, análisis estático o dinámico, etc.);
- b) Una vez seleccionado el modelo matemático, se debe discretizar la estructura en partes. Esas partes son llamadas elementos finitos, dentro de los cuales se interpolan las variables principales (desplazamientos en el caso de realizar un análisis estructural) en función de sus valores en una serie de puntos discretos de

elementos denominados nodos. Los elementos se conectan entre si por los nodos situados en el contorno del elemento;

c) Luego de tener el dominio dividido en n elementos, son obtenidas las matrices de rigidez K_e y los vectores de fuerzas f_e para cada elemento;

d) Cada elemento tiene su posición espacial definida en un sistema de coordenadas fijo (sistema cartesiano, por ejemplo). Sin embargo, para efectos del cálculo, las matrices de rigidez son definidas en un sistema de coordenadas locales definido para cada elemento de la malla. Aplicando el principio de superposición de efectos, la matriz de rigidez global y el vector fuerzas globales son contruidos, representando toda la malla de elementos finitos;

e) Utilizando algún método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, resolvemos el sistema de ecuaciones resultante de la forma $Ku = f$, donde se encuentra el vector de desplazamientos u de la estructura discretizada;

f) Con el resultado obtenido, se pueden calcular las deformaciones y tensiones en cada elemento, así como las reacciones en los nodos;

g) El último paso consiste en la interpretación y visualización de los resultados.

Para el planteamiento del comportamiento mecánico mediante elementos finitos se realizaron las siguientes suposiciones:

1. El dominio de diseño es de forma rectangular (ver Figura 7).
2. El material es isotrópico.

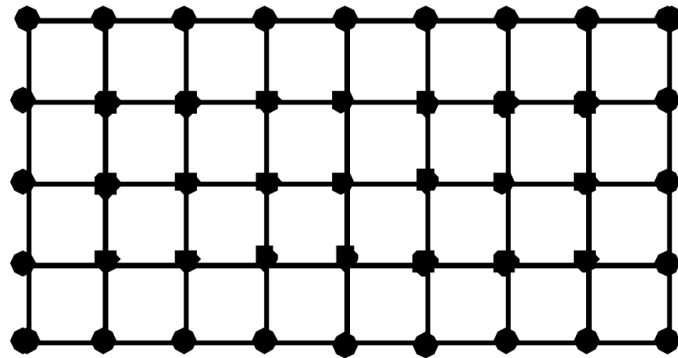


Figura 7 Discretización del dominio de diseño con elementos finitos [109].

En este trabajo fueron utilizadas mallas regulares, que son formadas por elementos rectangulares iguales, es decir, elementos tipo C4 (ver Figura 8), en donde cada uno de los vértices tiene dos grados de libertad. La elección de este tipo de elementos se hace para buscar la mayor eficiencia computacional posible (como lo sugiere [109]), debido a que la matrices resultantes son relativamente pequeñas (8×8) comparadas con las que resultan otros tipos de elementos.

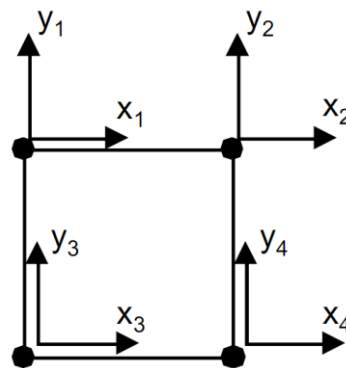


Figura 8 Elemento C4 [109]

Por tratarse de un material isotrópico, la matriz K_e representa la matriz de rigidez para un elemento finito en coordenadas globales:

$$K_e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} \\ \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} \\ -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} \\ -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} \\ -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} \\ -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} \\ \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} \\ \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde:

E: módulo de elasticidad del material.

ν : relación de Poisson del material.

El ensamble de la matriz global de la estructura se realiza siguiendo el procedimiento tradicional de elementos finitos; el cual no será descrito, pero el autor recomienda la lectura de [110] para los lectores no familiarizados con los elementos finitos. Vale la pena mencionar que la ecuación 6 representa la particularización del elemento bilineal de cuatro nodos a un elemento rectangular.

5.2. OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA

El dominio de diseño es discretizado con elementos C4 y a cada elemento e se le asigna una densidad x_e , lo que determina su Módulo de Young para lo cual se emplea el método SIMP modificado [97] y su función de interpolación dada por la ecuación 7 para determinar el modulo de elasticidad de cada elemento

$$E_e: E_e(x_e) = E_{\min} + x_e^p(E_0 - E_{\min}) \quad (7)$$

Donde $x_e \in [0,1]$ es la rigidez del material, $E_{\min}$ es un valor de rigidez muy pequeño asignado para anular elementos con el fin de que la matriz de rigidez no se convierta en singular, y p es un factor de penalización (generalmente $p = 3$) introducido para garantizar soluciones black-and-white (blanco y negro). La formulación matemática del problema de optimización discreto, se basa en una ley potencial, donde el objetivo es minimizar la energía de deformación y se describe así:

$$\min_x = c(x) = U^T K U = \sum_{e=1}^N E_e(x_e) u_e^T k_0 u_e \quad (8)$$

Sujeto a:

$$V_{(x)}/V_0 = f \quad (9)$$

$$KU = F \quad (10)$$

$$0 \leq X \leq 1 \quad (11)$$

Donde c es la energía de deformación a minimizar, U y F son los vectores de desplazamiento y fuerzas globales respectivamente, K es la matriz de rigidez global, u_e es el vector desplazamiento del elemento, Ee esta dado por la ecuación 7, k_0 es la matriz de rigidez del elemento, X es el vector de variables de diseño (es decir, las densidades de los elementos), y N es el número de elementos usados para discretizar el dominio de diseño, $V_{(x)}$ y V_0 son el volumen del material y el volumen del dominio de diseño, respectivamente, y f es la fracción de volumen. La fracción de volumen, es la cantidad de material que se desea que quede en el elemento. Como puede ver en la ecuación 7, el problema dado es convexo para $p=1$ y no convexo para $p>1$. Por tratarse entonces de un problema con múltiples mínimos locales, es válido en este trabajo emplear las técnicas estocásticas para evitarlos.

5.3. FILTRO DE IMAGEN

Con el objeto de evitar problemas de inestabilidad numérica el algoritmo de OT emplea una técnica de filtrado de densidad, descrito por Andreassen [98] el cual produce un alisado de las energías de deformación de los elementos, teniendo en cuenta el valor de la energía de los elementos vecinos y así encontrar soluciones razonables. Para especificar los elementos vecinos (vecindario), se define el área

de influencia, empleando un radio (equivale a un porcentaje del ancho del elemento 3-4%) para seleccionar el vecindario de cada elemento, que influirá en el valor de la derivada de la energía de deformación (con respecto a X_e), de este. Los elementos que se tienen en cuenta en el alisado de dicho elemento son los que quedan dentro del círculo formado (Ver Figura 9).

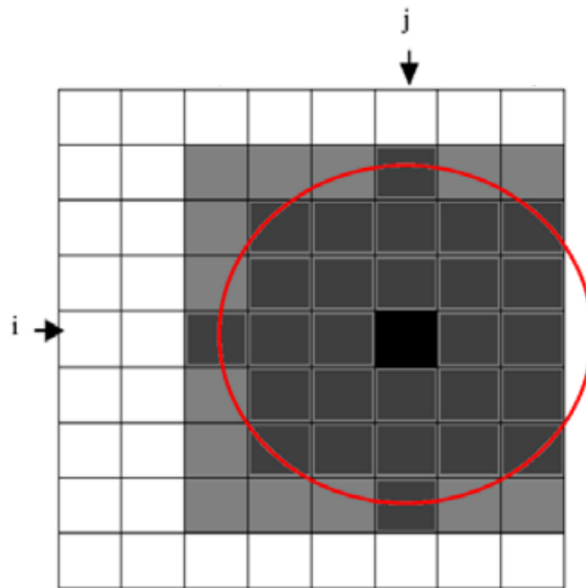


Figura 9 Ejemplo del filtro para el Radio (Autor)

En la Figura 9 se muestra un pequeño ejemplo para un radio r . Para este caso el origen del radio está ubicado en el elemento (i, j) de la malla. De los elementos vecinos seleccionados (todo el recuadro gris), al final solo se tienen en cuenta aquellos cuyo centro cae dentro del círculo rojo.

La estructura del algoritmo se presenta a continuación:

- 1) Diseño inicial. Se realiza una distribución homogénea del material en la geometría de trabajo.

- 2) Se calcula la matriz de rigidez global teniendo en cuenta la actual distribución del material.
- 3) Se calcula mediante elementos finitos el campo de desplazamientos para cierto estado de cargas.
- 4) Se calcula la energía de deformación con respecto la variable de diseño (densidades).
- 5) Se aplica un filtro con el objeto de encontrar soluciones menos pixeladas y más continuas, todo esto con el fin de evitar problemas de inestabilidad mencionados anteriormente.
- 6) Finalmente, mediante una técnica estocástica (ASAM y PSO), se calculan las nuevas densidades.
- 7) Se vuelve al paso 2.

De esta forma se va siguiendo el proceso, que va iterando hasta un punto en que el valor de las densidades no cambia significativamente y el bucle termina. La estructura del algoritmo enunciada anteriormente se representa mediante el siguiente diagrama de flujo (Ver Figura 10):

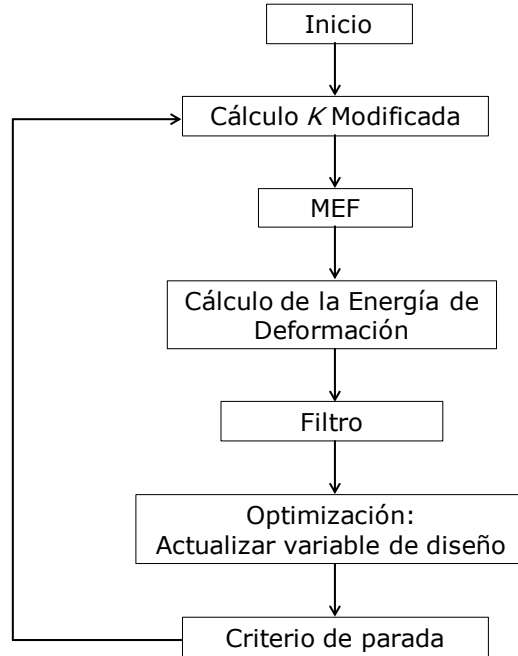


Figura 10 Proceso del algoritmo de OT (Autor)

5.3.1. Problemas propuestos de OT

Para evaluar el comportamiento de los algoritmos de optimización en problemas de OT, se realizaron tres problemas reportados en la literatura (ver Figura 11).

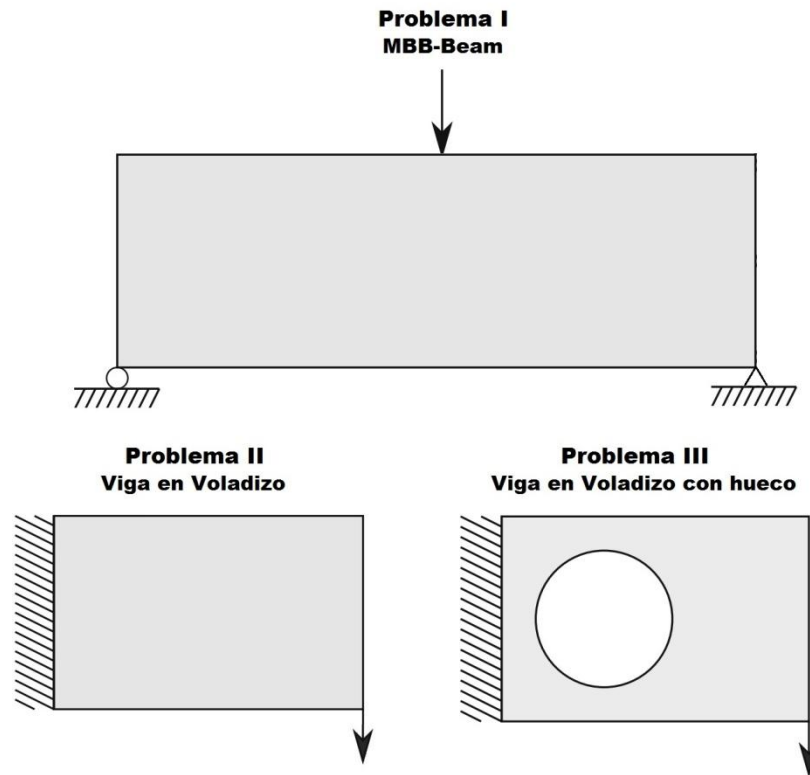


Figura 11 Problemas propuestos de optimización [98]

5.4. RESULTADOS NUMÉRICOS A PROBLEMAS PROPUESTOS

Los resultados obtenidos fueron comparados con los de Andreassen y colaboradores [98], quienes reportan resultados completos de los casos analizados.

5.4.1. Problema I

El primer problema simulado es la llamada viga MBB-Beam, denominación originada por la empresa alemana Messerschmitt-Bolkow-Blohm. Las condiciones de contorno predeterminadas corresponden a la mitad de la MBB-Beam (ver

Figura 12). La carga se aplica verticalmente en la esquina superior izquierda y hay condiciones de contorno simétricas a lo largo del borde izquierdo y la estructura se apoya horizontalmente en la esquina inferior derecha.

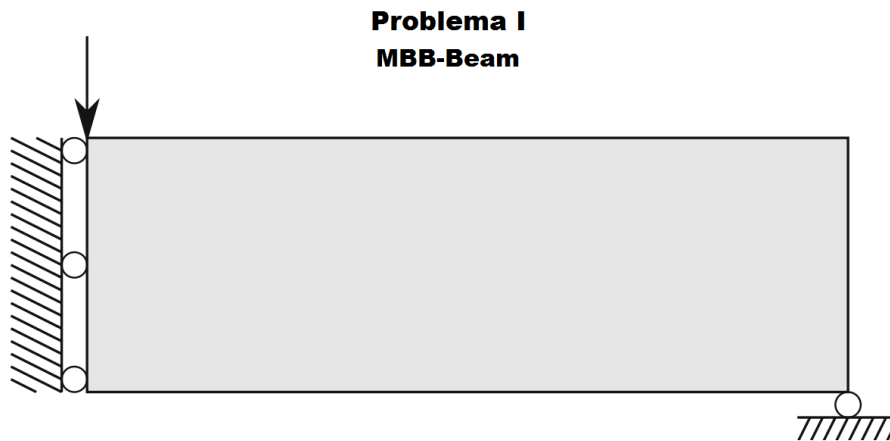


Figura 12 MBB Beam

La estructura es discretizada con tres tipos de mallas: i) 60x20 (60 elementos en dirección horizontal y 20 elementos en dirección vertical), ii) 150x50, iii) 300x100. Se utilizó un material “normalizado” con modulo de elasticidad $E=1\text{N/m}^2$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Con el fin de evaluar el desempeño de la metodología aquí empleada, inicialmente se realizaron los experimentos numéricos sin el filtro de imagen, y finalmente se resolvieron empleando el filtro. Los resultados obtenidos en cuanto a diseño y energía de deformación (c) para las diferentes mallas 60x20, 150x50 y 300x100, según Andreassen et al., ASAM y PSO se presentan en las siguientes figuras.

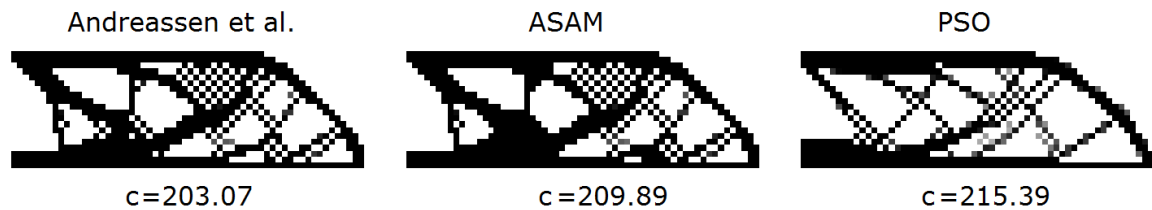


Figura 13 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 60 x 20 sin uso del filtro

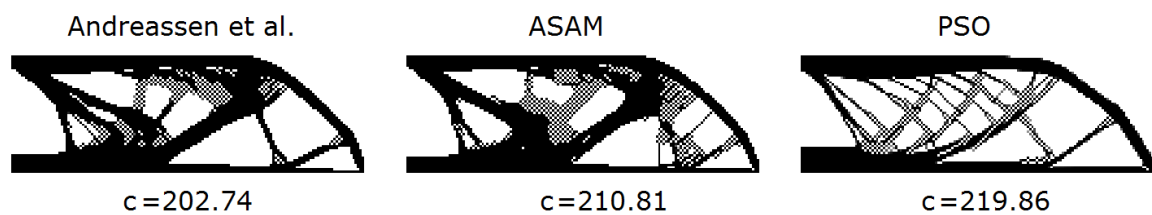


Figura 14 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 150 x 50 sin uso del filtro

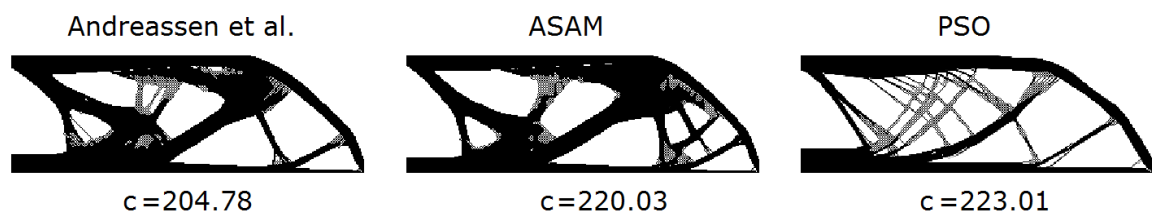


Figura 15 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 300 x 100 sin uso del filtro

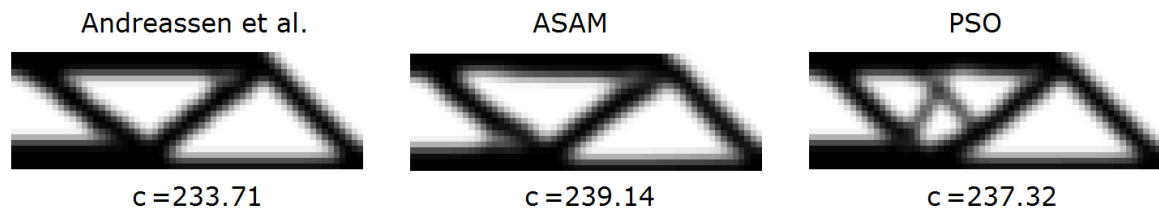


Figura 16 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 60 x 20 con uso del filtro

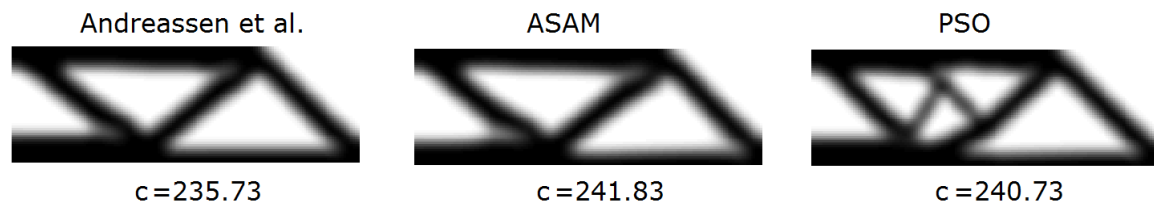


Figura 17 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 150 x 50 con uso del filtro

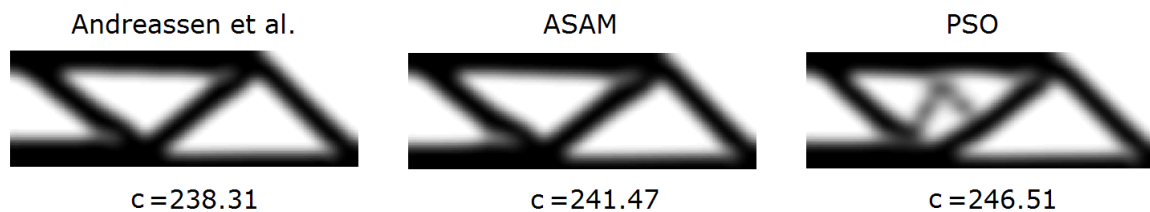


Figura 18 Valores de energía de deformación y Diseños problema I
Malla 300 x 100 con uso del filtro

A continuación, se muestran los procesos de optimización con las diferentes mallas para cada uno de los algoritmos, en diferentes tiempos de iteración (ver Figura 19- Figura 20 y Figura 21).

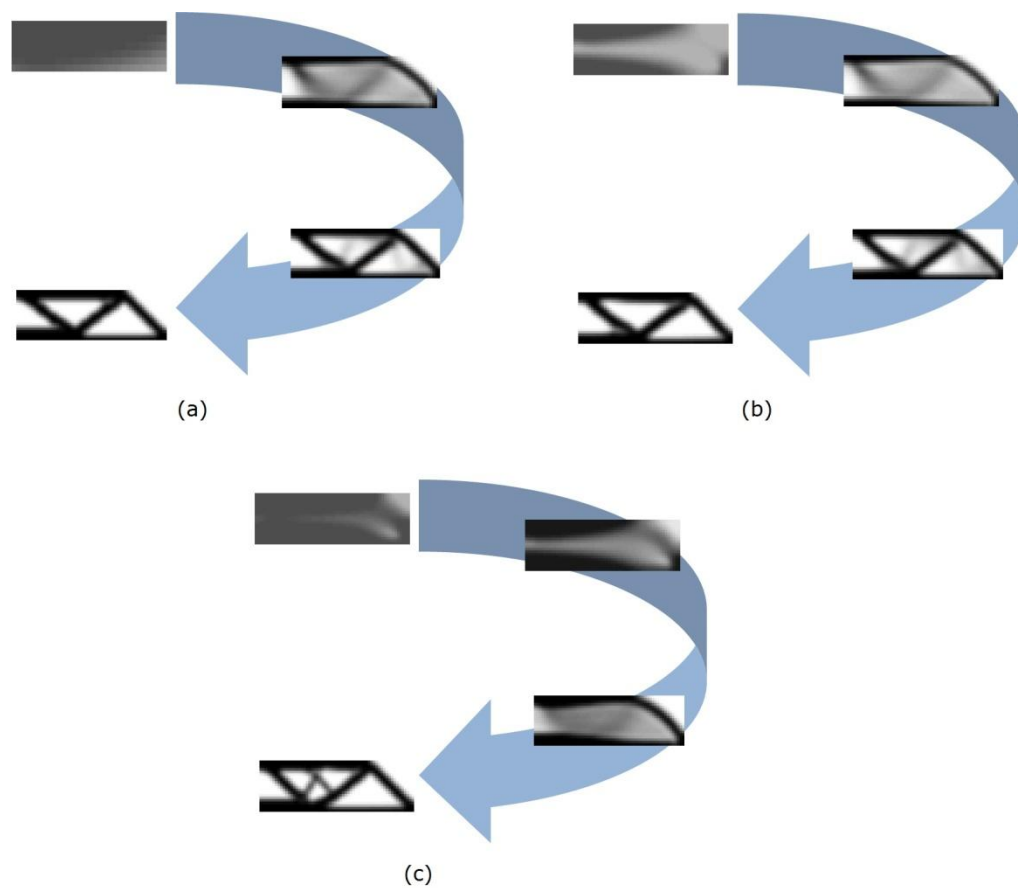


Figura 19 Proceso de optimización problema I-malla 60 x 20
(a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO

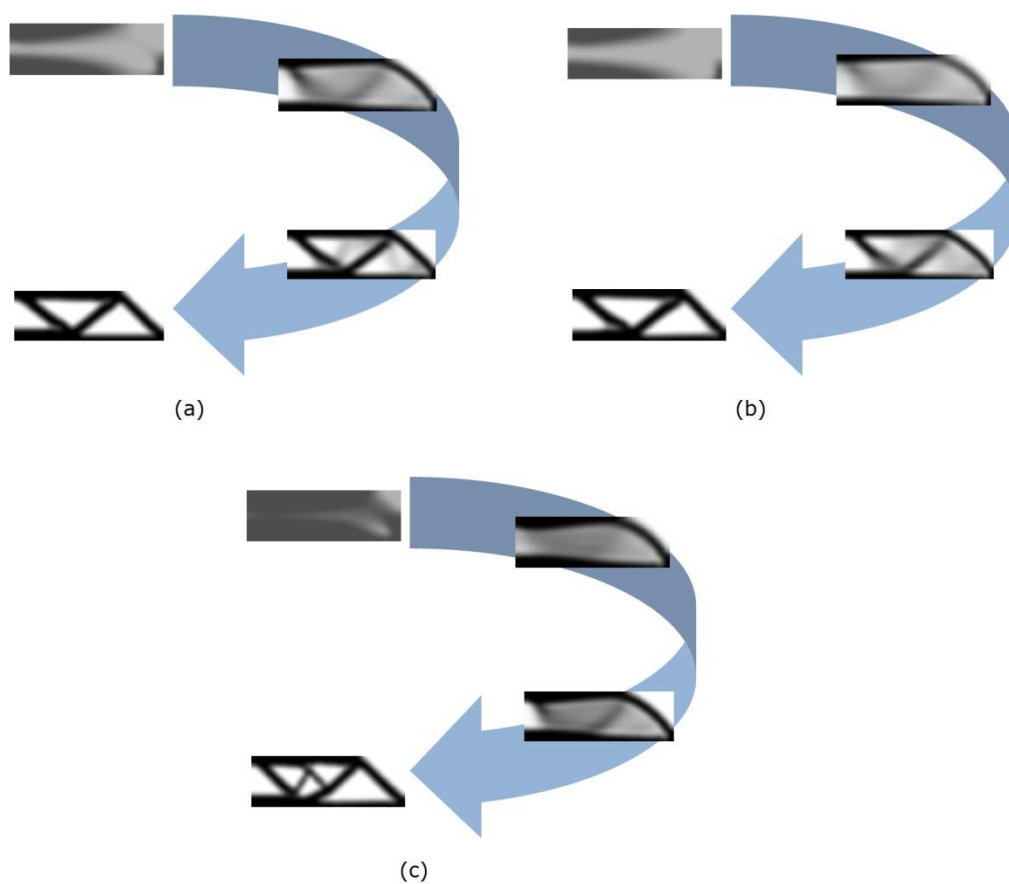


Figura 20 Proceso de optimización problema I-malla 150 x 50
(a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO

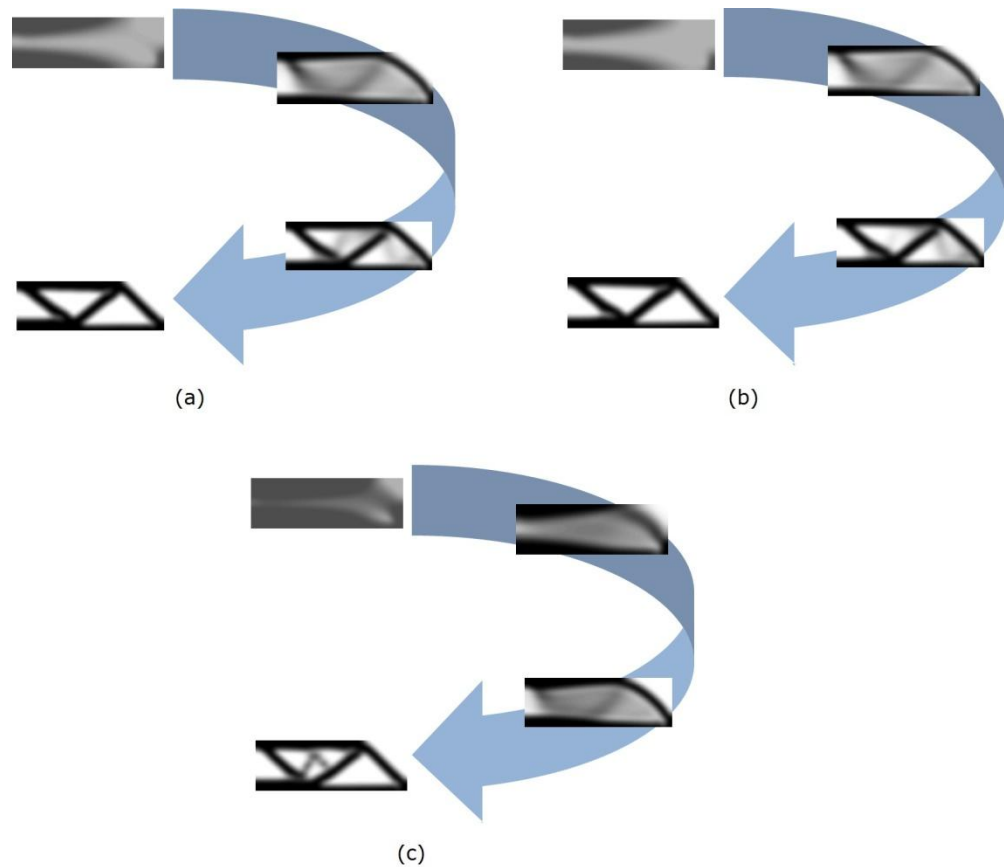


Figura 21 Proceso de optimización problema I-malla 300 x 100
(a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO

En la Figura 22 - Figura 23 y Figura 24 se presentan las gráficas de convergencia de la mejor prueba obtenida y tiempos de ejecución promedio que tardó cada algoritmo para el análisis del problema I con las diferentes mallas propuestas. En el Anexo A se observan las gráficas de convergencia de todas las pruebas realizadas para este problema con cada tipo de malla.

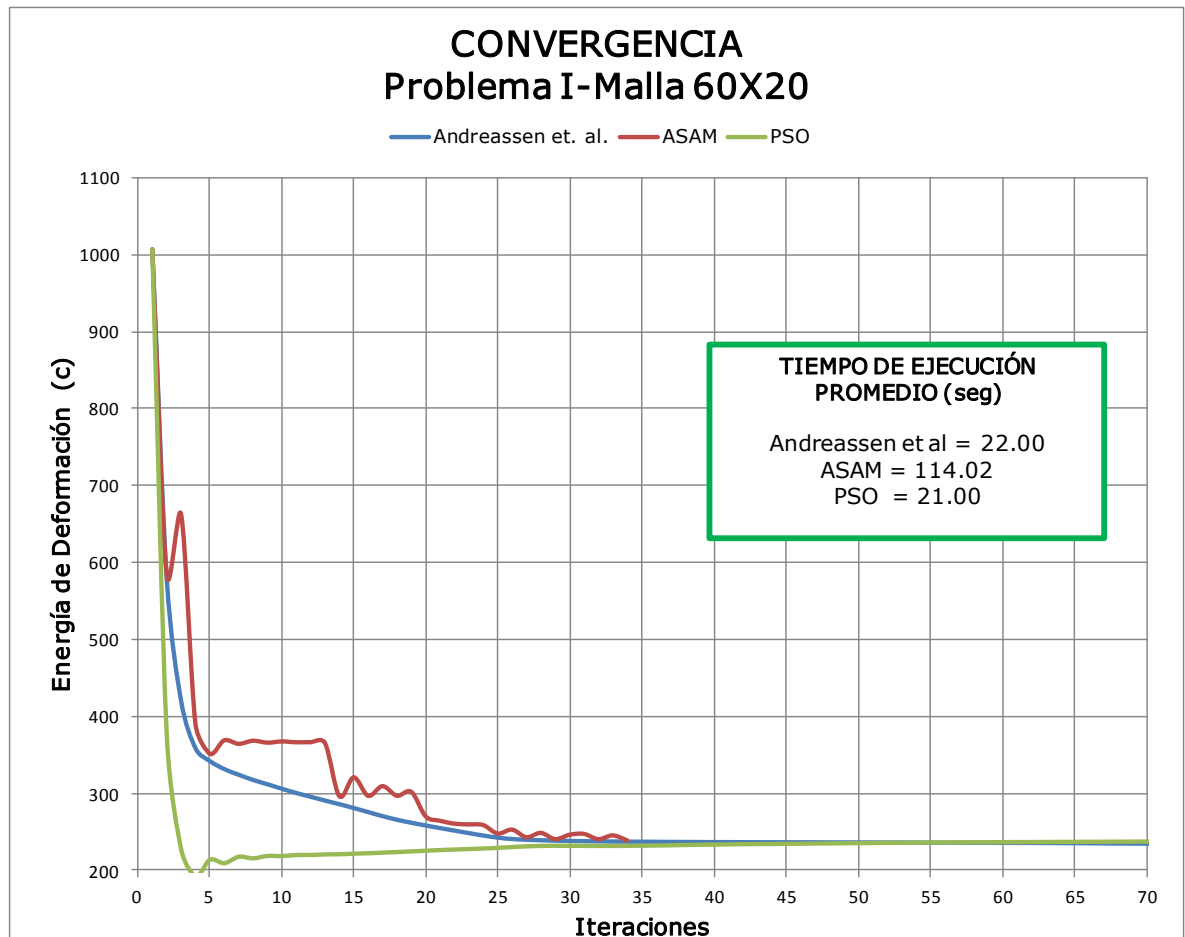


Figura 22 Convergencia problema I-malla 60 x 20

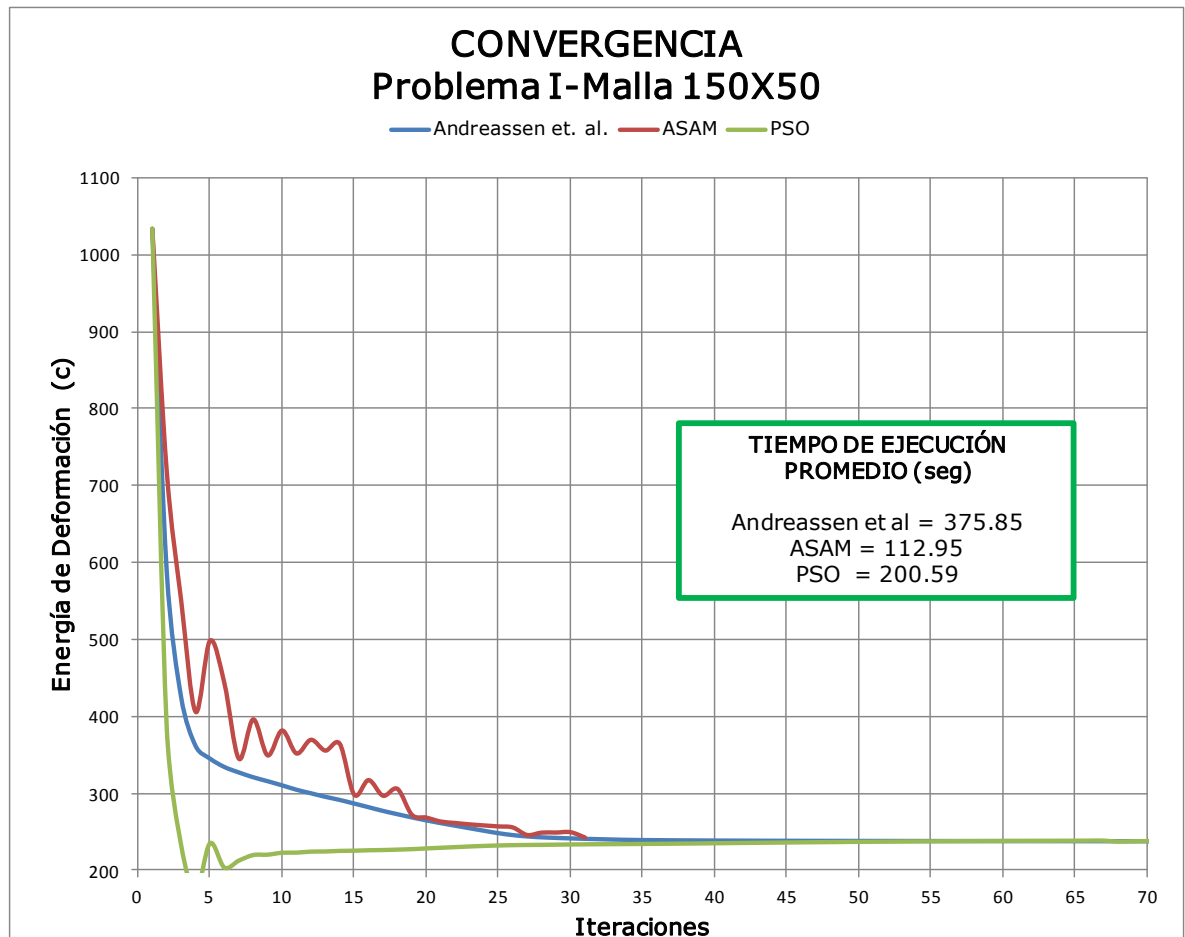


Figura 23 Convergencia problema I-malla 150 x 50

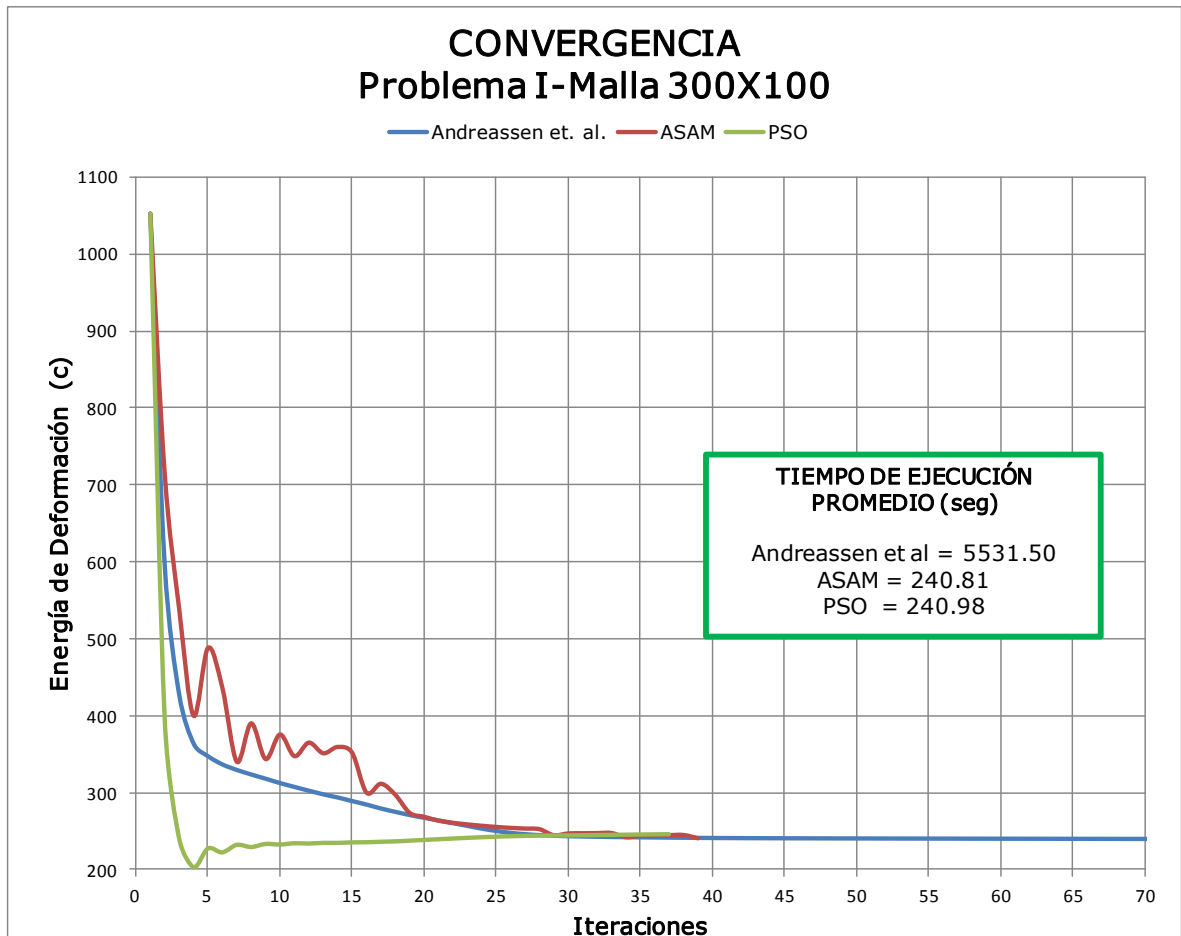


Figura 24 Convergencia problema I-malla 300 x 100

Se puede observar, que ASAM tiene un buen comportamiento en cuanto a distribución del material y energía, a diferencia del PSO que presenta buenos resultados en valores de energía, pero varía un poco en la distribución del material. En cuanto a tiempos de ejecución, se puede decir que a medida que crece la malla (discretización), las nuevas propuestas emplean menos tiempos en comparación con la referencia, y además se puede observar soluciones más suavizadas, es decir, menos dentadas.

En las gráficas de convergencia se observa una curva atípica del PSO, en donde en las primeras iteraciones el algoritmo está realizando un bosquejo de la función

objetivo (algoritmo de población), sin tener en cuenta la fracción de volumen preestablecida, y es por esto, que encuentra un valor de energía menor que el óptimo. Pero a medida que va avanzando el proceso de optimización, el algoritmo converge hacia el valor óptimo. Este comportamiento se presenta en todos los problemas analizados, como se muestra en las siguientes secciones.

5.4.2. Problema II

El problema II es la viga en voladizo (ver Figura 25), conocida en la literatura internacional como el voladizo de Michell.

Problema II **Viga en Voladizo**

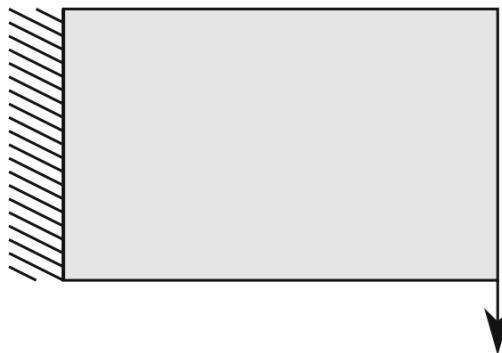


Figura 25 Viga en voladizo

Para el análisis de este problema se tomó una malla de 160x100 y se utilizó el mismo módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson empleados para la Viga MBB. Los resultados de diseño y volúmenes sin y con uso de técnica se muestran en la Figura 26 y Figura 27, el proceso de optimización se muestra en la Figura 28, y la convergencia y tiempos de ejecución promedio de la mejor prueba (para ver todas las pruebas ver Anexo B) se muestran en la Figura 29.

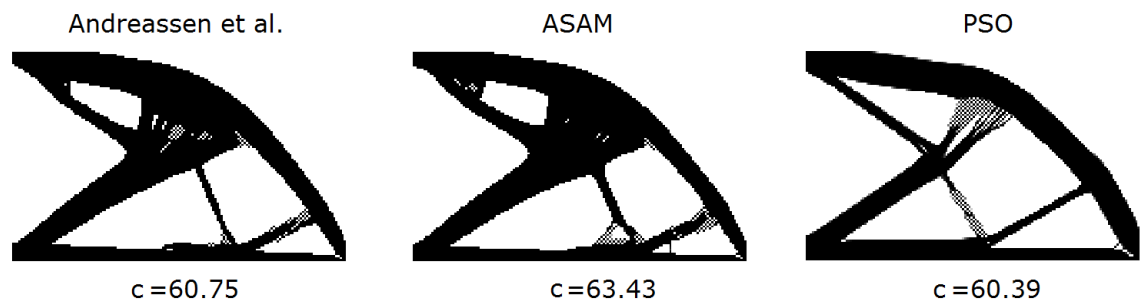


Figura 26 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 160 x 100 sin uso del filtro

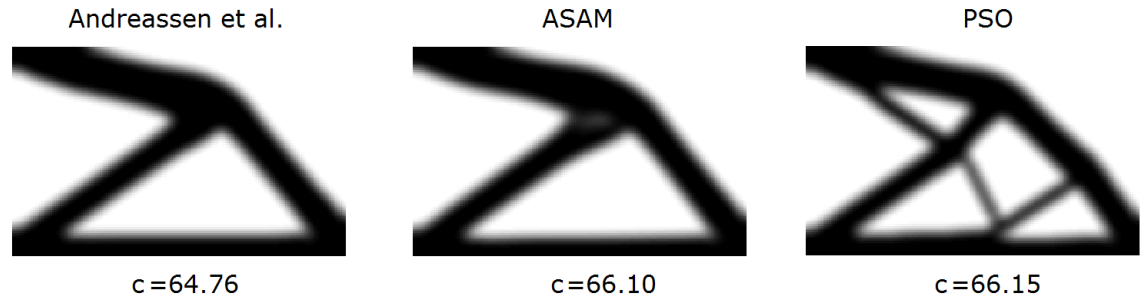


Figura 27 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 160 x 100 con uso del filtro

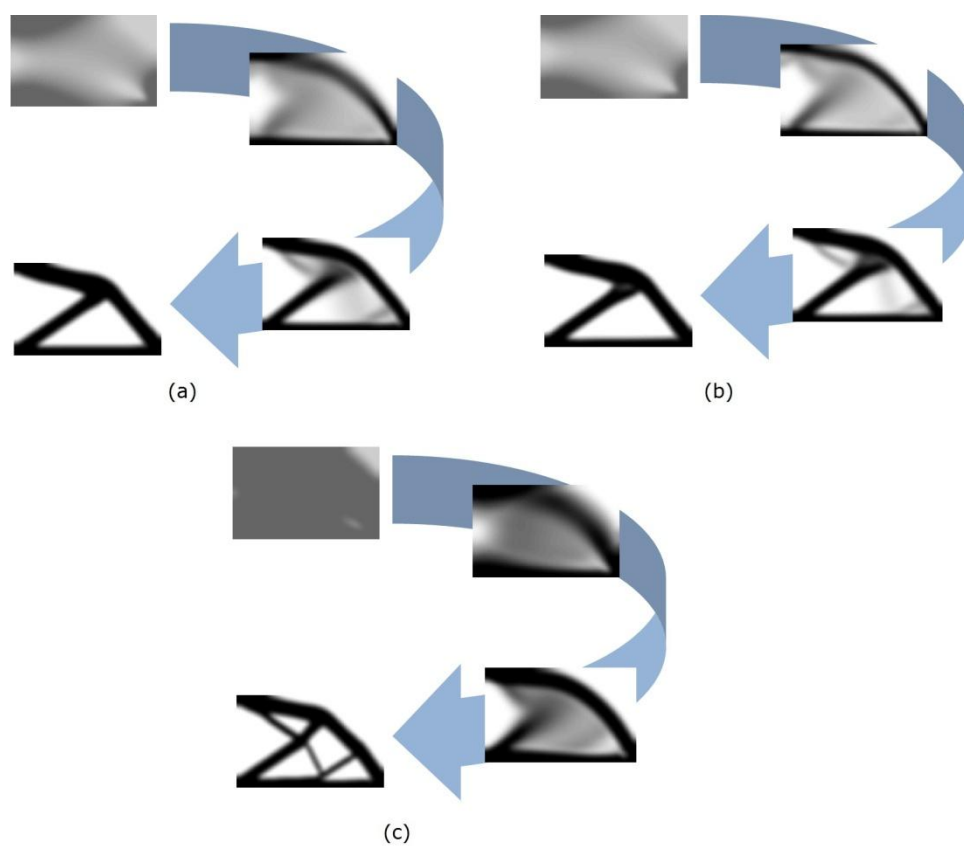


Figura 28 Proceso optimización problema II-malla 160 x 100
(a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO

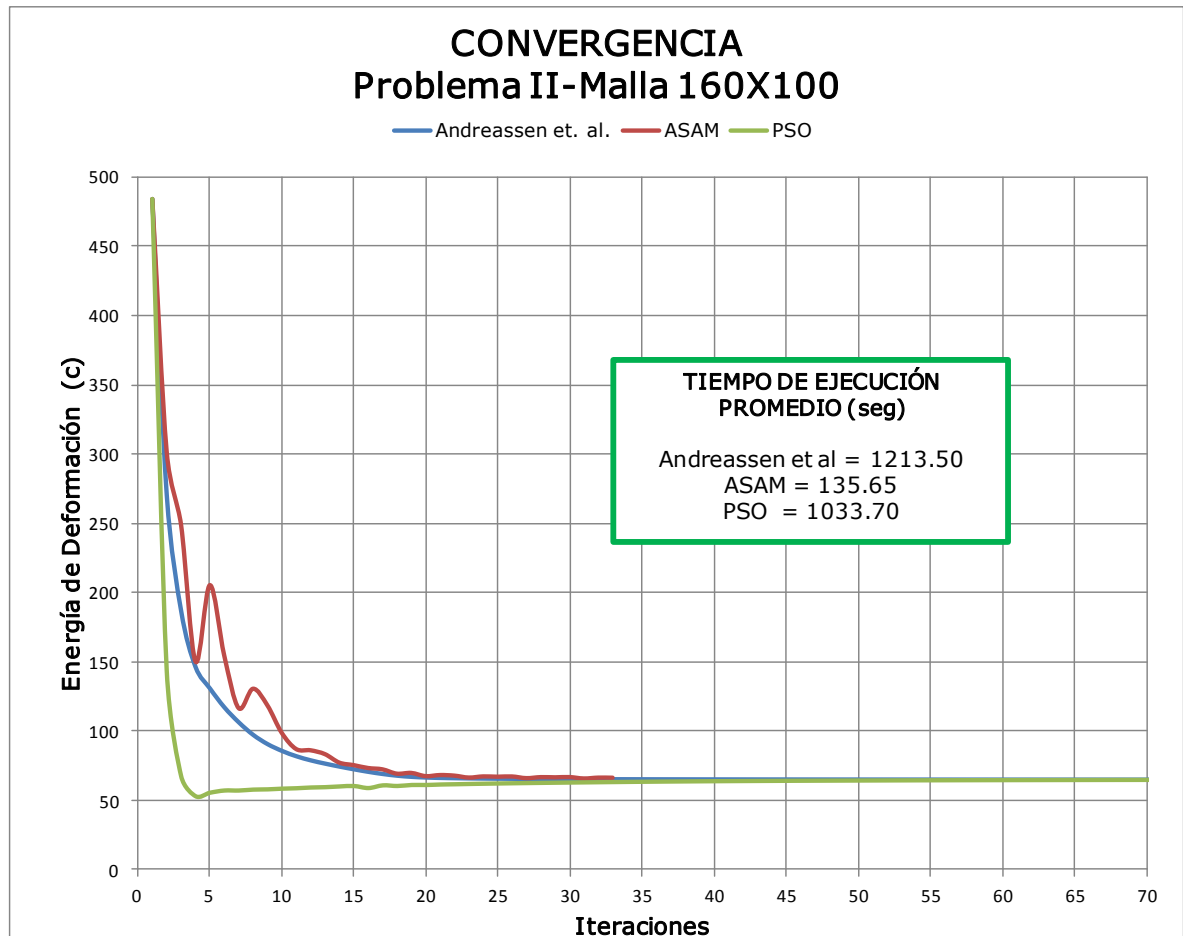


Figura 29 Convergencia problema II

Nuevamente ASAM arroja resultados estables en cuanto a diseño y energía, pero la gran diferencia la hace al momento de analizar el problema, debido a que es el algoritmo que emplea el menor tiempo. En cuanto al PSO, arroja un resultado de energía muy aceptable pero difiere en la distribución del material.

A continuación se presentan los resultados obtenidos con ASAM y PSO de diseños y volúmenes para mallas de 80x50 y 240x150 sin y con uso de la técnica.

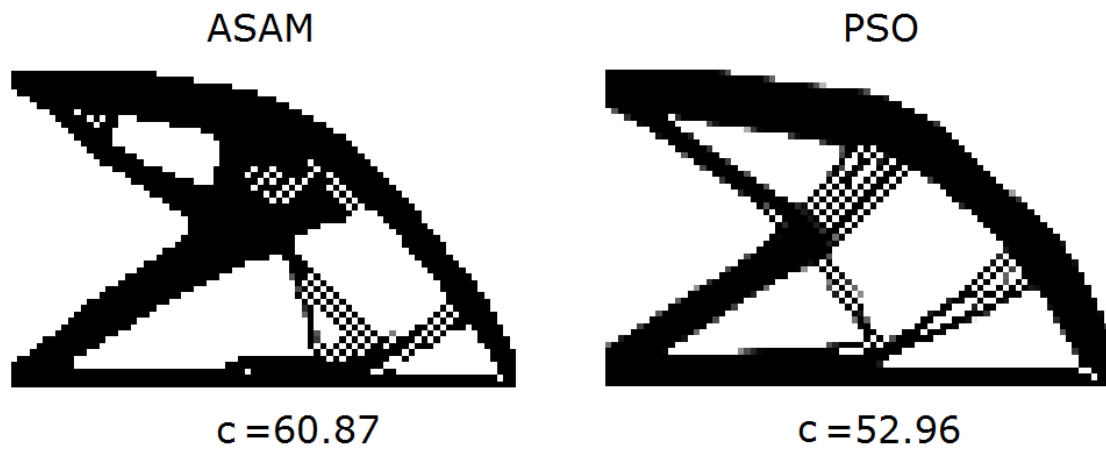


Figura 30 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 80x50 sin uso del filtro

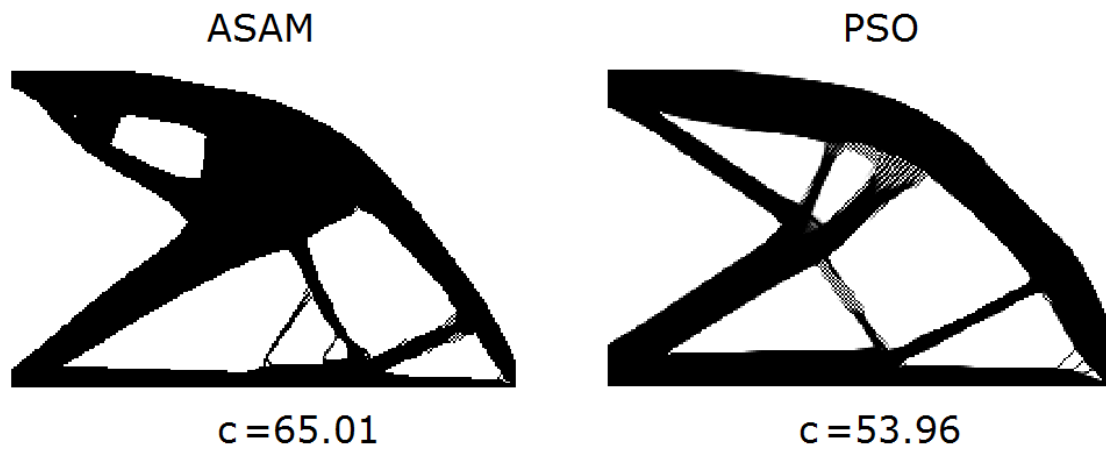


Figura 31 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 240x150 sin uso del filtro

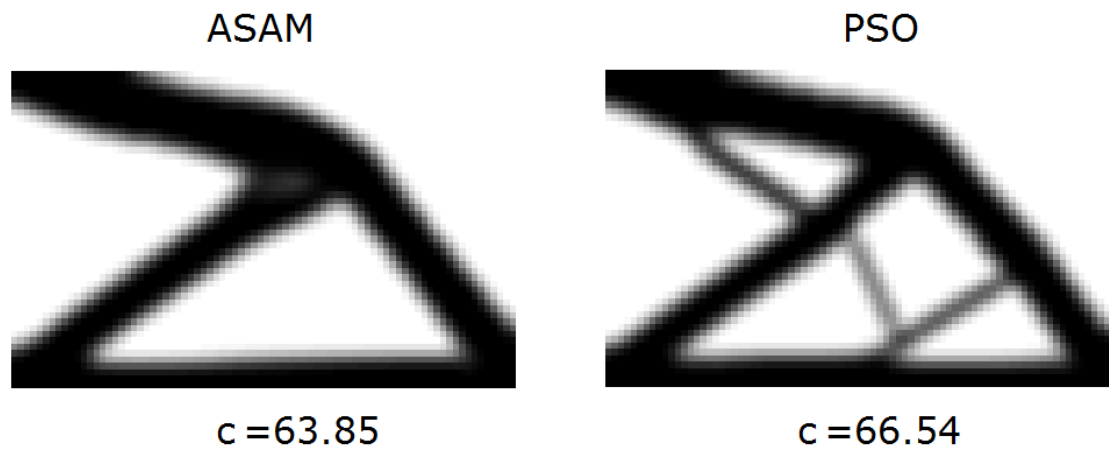


Figura 32 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 80x50 con uso del filtro

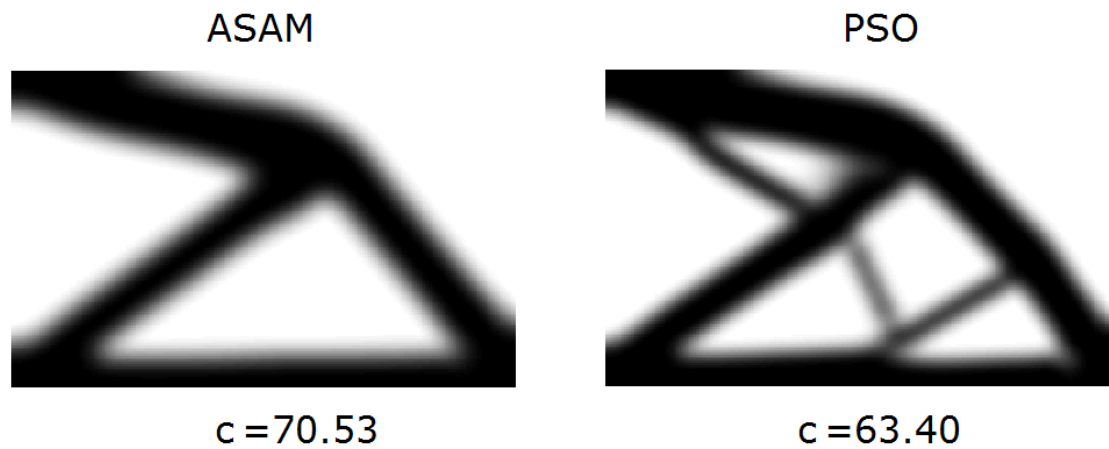


Figura 33 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 240x150 con uso del filtro

5.4.3. Problema III

Dicho problema es llamado Viga en Voladizo con hueco (ver Figura 34).

Problema III **Viga en Voladizo con hueco**

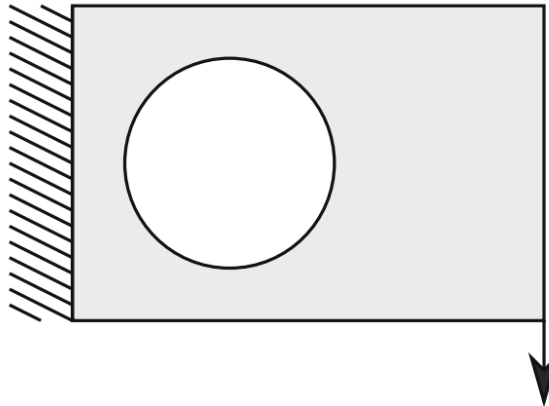


Figura 34 Viga-en-voladizo con hueco

El problema de la viga en voladizo con hueco se discretizó en una malla de 150x100, y se utilizó el mismo modulo de elasticidad y coeficiente de Poisson empleados para la Viga MBB. En la Figura 35 y Figura 36 se presenta el diseño y los valores de energías obtenidos por los algoritmos de optimización sin y con técnicas de agrupamiento y filtro. El proceso de optimización para este problema se muestra en la Figura 37. En la Figura 38 se observan las graficas de convergencia y tiempos de ejecución promedio de la mejor prueba para cada algoritmo en el análisis del problema (Ver Anexo C).

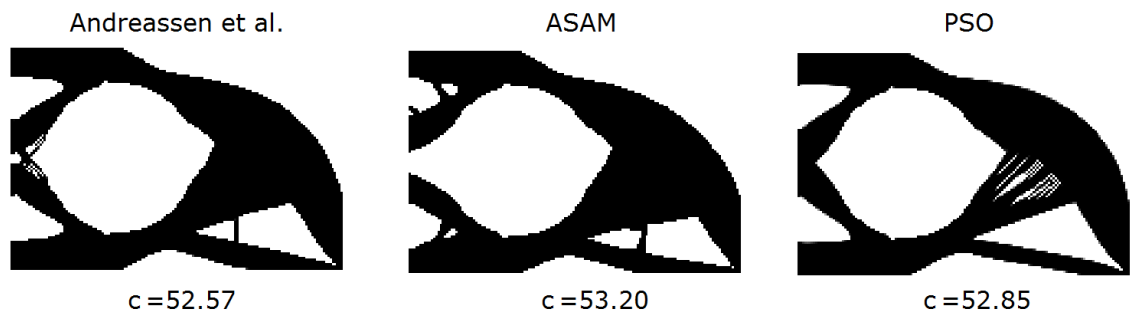


Figura 35 Valores de energía de deformación y Diseños problema III
Malla 150 x 100 sin uso del filtro

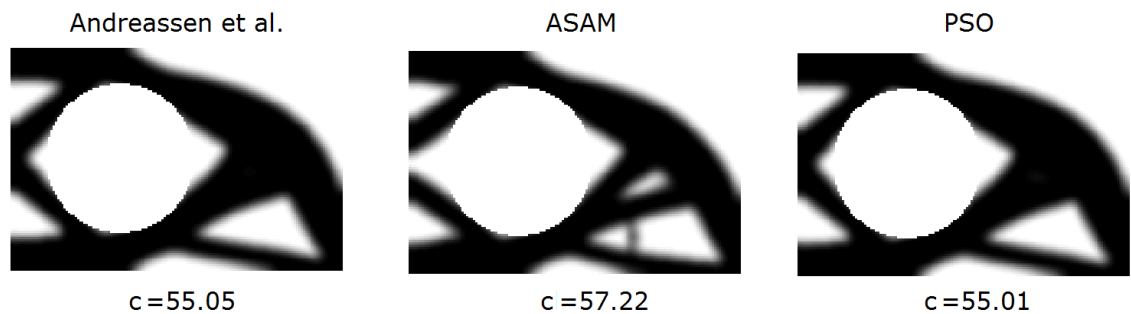


Figura 36 Valores de energía de deformación y Diseños problema III
Malla 150 x 100 con uso del filtro

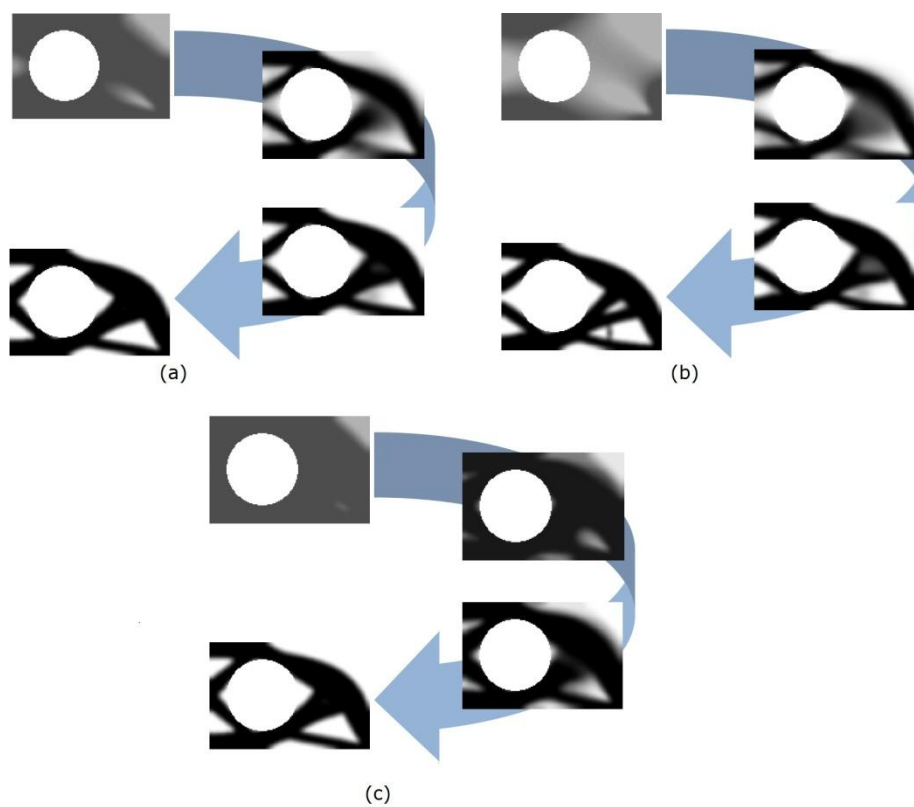


Figura 37 Proceso optimización problema III-malla 150 x 100
(a) Andreassen et al, (b) ASAM y (c) PSO

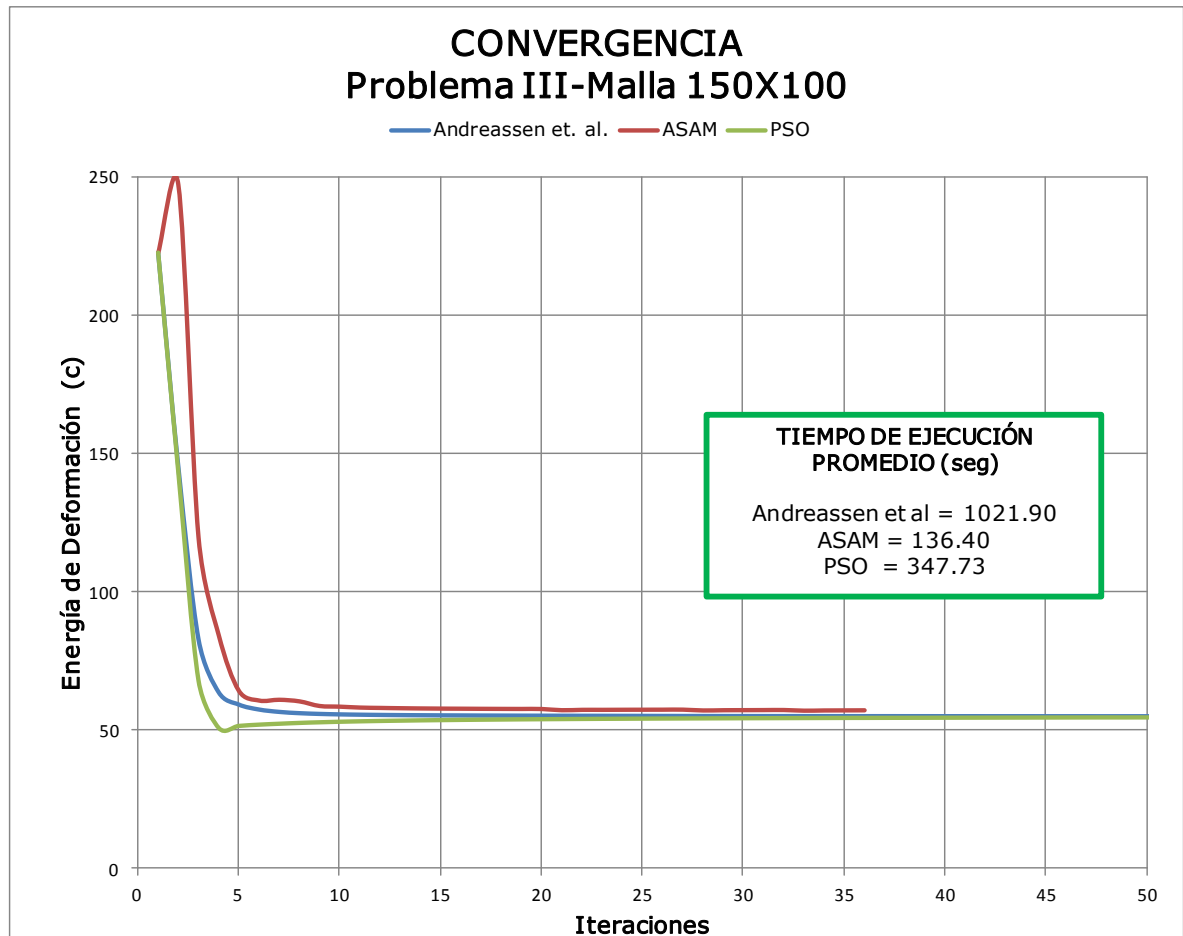


Figura 38 Convergencia problema III

En este problema el PSO presentó excelentes resultados en cuanto a diseño y energía. Cabe resaltar la capacidad de ASAM para adaptarse a cualquier problema de optimización.

A continuación se presentan los resultados obtenidos con ASAM y PSO de diseños y volúmenes para mallas de 75x50 y 225x150 sin y con uso de la técnica.



Figura 39 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 70x50 sin uso del filtro



Figura 40 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 225x150 sin uso del filtro

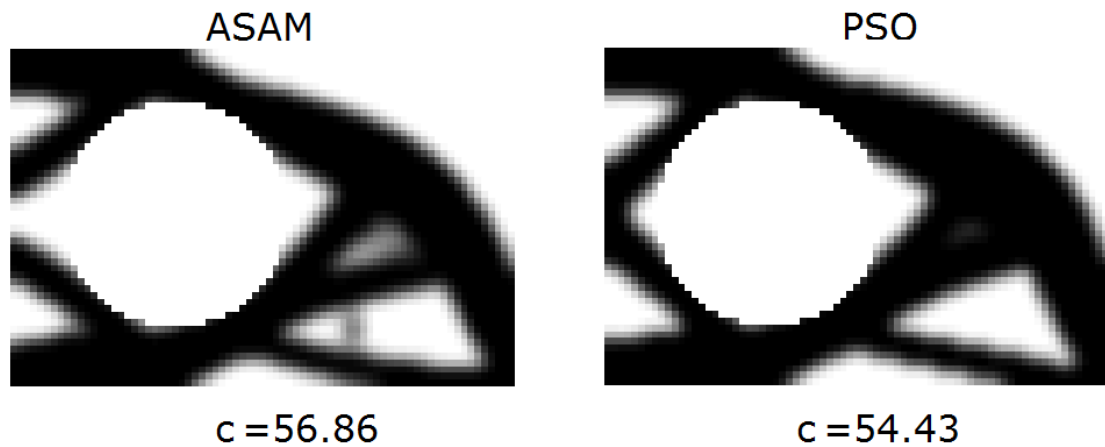


Figura 41 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 75x50 con uso del filtro

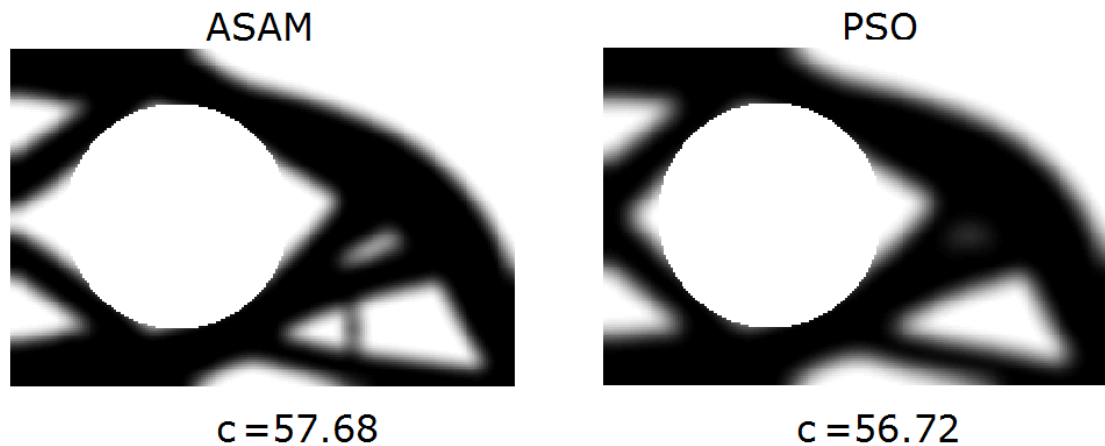


Figura 42 Valores de energía de deformación y Diseños problema II
Malla 225x150 con uso del filtro

En la Tabla 9 y Tabla 10 se resume los resultados obtenidos en cuanto a tipo de problema, malla empleada, energía de deformación obtenida y topología final, con cada uno de los algoritmos (ASAM y PSO).

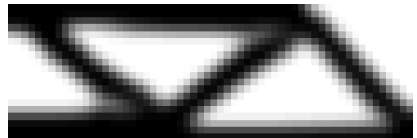
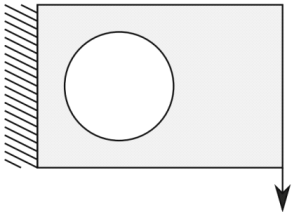
PROBLEMA	MALLA	C	TOPOLOGÍA
	60 X 20	239,14	
	150 X 50	241,83	
	300 X 100	241,47	
	80 X 50	63,85	
	160 X 100	66,10	
	240 X 150	70,53	
	75 X 50	56,86	
	150 X 100	57,22	
	225 X 150	57,68	

Tabla 9 Resumen de resultados obtenidos con ASAM

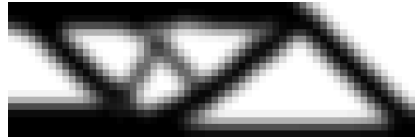
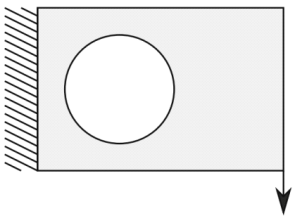
PROBLEMA	MALLA	C	TOPOLOGÍA
	60 x 20	237,32	
	150 X 50	240,73	
	300 X 100	246,51	
	80 X 50	66,54	
	160 X 100	66,15	
	240 X 150	63,40	
	75 X 50	54,43	
	150 X 100	55,01	
	225 X 150	56,72	

Tabla 10 Resumen de resultados obtenidos con PSO

6. CONCLUSIONES

Se ha conseguido desarrollar un procedimiento para la resolución de problemas de optimización topológica, donde, para minimizar la energía de deformación (función objetivo), se sigue un proceso que va actualizando los valores de densidad. Dicha actualización se realiza con la ayuda de dos técnicas estocásticas como lo son: Algoritmo Simulated Annealing Modificado (ASAM) y Optimización con Enjambre de Partículas (PSO). Las topologías, valores de energía y tiempos obtenidos por dichas técnicas, fueron comparados con los resultados presentados por [98], mostrando que son coherentes y satisfactorios, dando así validez al algoritmo.

En cuanto a las técnicas empleadas, se puede observar, que ASAM tiene una versatilidad para analizar diferentes tipos de problemas, con diferentes tipos de mallas, esto se ve reflejado en las distribuciones de material, valores de energía y tiempos logrados. En cambio PSO presenta buenos resultados en cuanto a energías de deformación pero varía un poco en la distribución del material. Ambas técnicas muestran gran ventaja en tiempos de ejecución, cuando los problemas son discretizados con mallas refinadas (aumento de número de elementos).

Los problemas de inestabilidad numérica fueron resueltos con la implementación del filtro de imagen, obteniendo soluciones menos pixeladas, especialmente en la interfase material-no material. Por otro lado, en cuanto al tipo de malla, se observa que un aumento de ésta, conlleva a un refinamiento de la solución (más suavizada y menos dentada), más no, a una topología diferente.

7. TRABAJOS FUTUROS

Los resultados del presente trabajo han sido plenamente satisfactorios. No obstante, se abren nuevas vías de trabajo y futuras líneas de investigación de entre las que merece la pena destacar las siguientes:

1. Incorporar el estudio de varios estados de carga
2. Incorporar otros tipos de cargas, además de las puntuales
3. Incorporar otras condiciones de apoyos.
4. Desarrollar un programa de optimización topológica en 3D
5. Implementar una técnica para poder extraer las geometrías obtenidas a modo de post-proceso. Esto permitiría el posible uso de las soluciones en tareas de fabricación directa.
6. Incorporar otro tipo de restricciones de diseño como las asociadas a vibraciones.
7. Implementar una interfaz grafica.
8. Aplicar el algoritmo a nuevos modelos de materiales con comportamiento no elástico.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. ESCHENAUER y N. OLHOFF, «Topology optimization of continuum structures: A review,» *American Society of Mechanical Engineers*, vol. 54, nº 4, pp. 331-390, 2001.
- [2] D. TAGGART y P. DEWHURST, «Development and validation of a numerical topology optimization scheme for two and three dimensional structures,» *Advances in Engineering Software*, vol. 41, pp. 910-915, 2010.
- [3] K. CHENG y N. OLHOFF, «An investigation concerning optimal design of solid elastic plates,» *International Journal of Solids Structures*, vol. 17, pp. 305-323, 1981.
- [4] R. KOHN y G. STRANG, «Optimal-design and relaxation of variational problems I,» *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 39, nº 1, pp. 112- 137, 1986.
- [5] G. ROZVANY, N. OLHOFF, K. CHENG and J. TAYLOR, "On the Solid Plate Paradox in Structural Optimization," *Journal of Structural Mechanics*, vol. 10, no. 1, pp. 1- 32, 1982.
- [6] M. BENDSØE y N. KIKUCHI, «Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, pp. 197-224, 1988.
- [7] K. CHENG y N. OLHOFF, «Regularized Formulation for Optimal

- Design of Axisymmetric Plates,» *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, nº 4, pp. 499-522, 1982.
- [8] K. LURIE, A. FEDEROV y A. CHERKAEV, «Regularization of Optimal Design Problems for Bar and Plates, Part I,» *Journal of optimizations and Theory and Applications*, vol. 37, nº 4, pp. 499-522, 1982.
- [9] K. LURIE, A. FEDEROV y A. CHERKAEV, «Regularization of Optimal Design Problems for Bar and Plates, Part II,» *Journal of optimizations and Theory and Applications*, vol. 37, nº 4, pp. 523-543, 1982.
- [10] J. GOODMAN, R. KOHN y L. REYNA, «Numerical Study of Relaxed Variational Problem from Optimal Design,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 57, pp. 107-127, 1986.
- [11] N. OLHOFF, M. BENDSOE y J. RASMUSSEN, «On cad-integrated structural topology and design optimization,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp. 259-279, 1991.
- [12] J. SIENZ y E. HINTON, «Reliable structural optimization with error estimation adaptivity and robust sensitivity analysis,» *Computers and Structures*, vol. 64, pp. 31-63, 1997.
- [13] P. TANG y K. CHANG, «Integration of topology and shape optimization for design of structural components,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 22, nº 1, pp. 65-82, 2001.
- [14] N. KIKUCHI, H. CHENG y Z. MA, «Optimal shape and topology

- design of vibrating structures,» de *Advances in Structural Optimization*, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 189-222.
- [15] S. CANFIELD y M. FRECKER, «Topology Optimization of Compliant Mechanical Amplifiers for Piezoelectric Actuators,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 20, nº 4, pp. 269-279, 2000.
- [16] S. CHO y J. CHOI, «Efficient Topology Optimization of Thermo-Elasticity Problems Using Coupled Field Adjoint Sensitivity Analysis Method,» *Journal Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pp. 1481-1495, 2005.
- [17] Y. XIE y G. STEVEN, «Evolutionary structural optimization for dynamic problems,» *Computers and Structure*, vol. 58, nº 6, p. 1067-1073, 1996.
- [18] D. CHU, Y. XIE, A. HIRA and G. STEVEN, "Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 21, pp. 239-251, 1996.
- [19] O. QUERIN, V. YOUNG, G. STEVEN and Y. XIE, "Computational Efficiency and Validation of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, pp. 559-573, 2000.
- [20] O. QUERIN, G. STEVEN y Y. XIE, «Evolutionary Structural Optimization using Additive Algorithm,» *Finite Element Analysis and Design*, vol. 34, pp. 291-308, 2000.

- [21] J. HAIPENG, H. BEOMAN, Y. WANG, S. LIN and B. LIU, "Evolutionary level set method for structural topology optimization," *Computers and Structures*, vol. 89, no. 6, pp. 445-454, 2011.
- [22] B. CHEN y N. KIKUCHI, «Topology optimization with design-dependent loads,» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 37, pp. 57-70, 2001.
- [23] A. TOVAR, «Optimización topológica con la técnica de los autómatas celulares híbridos,» *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 21, nº 4, pp. 365-383, 2005.
- [24] R. FETCHER y C. REEVES, «Function Minimization by Conjugate Gradients,» *Computer Journal*, vol. 7, p. 149–154, 1964.
- [25] H. LAND y A. DOIG, «An automatic method of solving discrete programming problems,» *Econometrica*, vol. 28, nº 3, pp. 497-520, 1960.
- [26] E. POLAK y G. RIBIERE, «Note sur la convergence de directions conjuguées,» *Rev. Francaise Informat Recherche Operatonelle*, vol. 3, nº 1, p. 35–43, 1969.
- [27] D. FOUSKAKIS y D. DRAPER, «Stochastic optimization: a review,» *International Statisitcal Review*, vol. 70, nº 3, pp. 315-349, 2002.
- [28] J. GENTLE, W. HARDLE y Y. MORI, *Handbook of Computational Statistics*, Springer, 2004.

- [29] J. RENNARD, Handbook of Research on Nature Inspired Computing for Economics and Management, 2006.
- [30] J. HOLLAND, Adaptation in Natural and Artificial Systems, Massachusetts: The MIT Press, 1975.
- [31] D. GOLDBERG, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.
- [32] S. KIRKPATRICK, C. GELATT y M. VECCHI, «Optimization by simulated annealing,» *Science*, vol. 220, nº 4598, pp. 671-680, 1983.
- [33] L. WANG y L. ZHANG, «Stochastic optimization using simulated annealing with hypothesis test,» *Applied Mathematics and Computation*, vol. 174, nº 2, p. 1329-1342, 2006.
- [34] M. CERROLAZA, W. ANNICCHIARICO y M. MARTINEZ, «Optimization of 2D boundary element models using β -splines and genetic algorithms,» *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 24, pp. 427-400, 2000.
- [35] W. HANSEL, A. TREPTOW, W. BECJER and B. FREISLEBE, "A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures," *Composite Structures*, vol. 58, pp. 287-294, 2002.
- [36] S. WANG, K. TAI y M. WANG, «An enhanced genetic algorithm for structural topology optimization,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 65, nº 1, pp. 18-44, 2006.

- [37] R. BALAMURUGAN, C. RAMAKRISHNAN y N. SINGH, «Performance evaluation of a two stage adaptive genetic algorithm (TSAGA) in structural topology optimization,» *Applied Soft Computing*, vol. 8, pp. 1697-1624, 2008.
- [38] A. KAVEH, B. HASSANI, S. SHOJAEI and S. TAVAKKOLI, "Structural topology optimization using ant colony methodology," *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 2559-2565, 2008.
- [39] G. LUH y C. LIN, «Optimal design of truss-structures using particle swarm optimization,» *Computers & Structures*, vol. 89, nº 23-24, p. 2221 – 2232, 2011.
- [40] G. LUH, C. LIN y Y. LIN, «A binary particle swarm optimization for continuum structural topology optimization,» *Applied Soft Computing*, vol. 11, pp. 2833- 2844, 2011.
- [41] Q. LIAN, «Performance-Based Optimization: A Review,» *Advances in Structural Engineering*, vol. 10, nº 6, pp. 739-753, 2007.
- [42] O. SIGMUND y J. PETERSSON, «Numerical instabilities in topology optimization: A Survey on procedures dealing with checkboards, mesh-dependencies and local minima,» *Structural Optimization*, vol. 16, pp. 68-75, 1998.
- [43] M. BRUGGI, «On the solution of the checkerboard problem in mixed-FEM topology optimization,» *Computers and Structure*, vol. 86, pp. 1819-1829, 2008.
- [44] C. JOG y R. HABER, «Stability of finite element models for

- distributed parameter optimization and topology design,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 130, nº 3, pp. 203-226, 1996.
- [45] A. DIAZ y O. SIGMUND, «Checkerboard Patterns in Layout Optimization,» *Structural Optimization*, vol. 10, pp. 40-45, 1995.
- [46] C. BERTSCH, A. CISILINO y N. CALVO, «Topology optimization of three-dimensional load-bearing structures using boundary elements,» *Advances in Engineering Software*, vol. 41, pp. 694-704, 2010.
- [47] N. METROPOLIS, A. ROSENBLUTH, M. ROSENBLUTH, A. TELLER and E. TELLER, "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines," *Journal of Chemical Physics*, vol. 21, no. 6, pp. 1087-1092, 1953.
- [48] K. DOWSLAND y B. DIAZ, «Diseño de heurística y fundamentos del Simulated Annealing,» *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, vol. 19, pp. 93-102, 2003.
- [49] L. LAMBERTI, «An efficient simulated annealing algorithm for design optimization of truss structures,» *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 1936-1953, 2008.
- [50] R. BALLING, «Optimal steel frame design by simulated annealing,» *Journal of structural engineering*, vol. 117, p. 1780-1795, 1991.
- [51] W. BENNAGE y A. DHINGRA, «Single and multiobjective structural

- optimization in discrete-continuous variables using simulated annealing,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, p. 2553–2573, 1995.
- [52] K. SHEA, J. CAGAN y S. FENVES, «A shape annealing approach to optimal truss design with dynamic grouping of members,» *Journal of Mechanical Design*, vol. 119, nº 3, p. 388–394, 1997.
- [53] O. HASANCEBI, S. CARBAS, E. DOGAN, F. ERDAL and M. SAKA, "Comparison of non-deterministic search techniques in the optimum design of real size steel frames," *Computers and Structures*, vol. 88, p. 1033–1048, 2010.
- [54] O. HASANCEBI, S. CARBAS, E. DOGAN, F. ERDAL and M. SAKA, "Performance evaluation of metaheuristic search techniques in the optimum design of real size pin jointed structures," *Computers and Structures*, vol. 87, p. 284–302, 2009.
- [55] A. DHINGRA y W. BENNAGE, «Topological optimization truss structures using simulated annealing,» *Engineering Optimization*, vol. 24, p. 239–259, 1995.
- [56] B. TOPPING, A. KHAN y J. DE BARROS LEITE, «Topological design of truss structures using simulated annealing,» *Structural Engineering Review*, vol. 8, pp. 301–314, 1996.
- [57] O. HASANÇEBİ y O. ERBATUR, «Layout optimisation of trusses using simulated annealing,» *Advances in Engineering Software*, vol. 3, pp. 681–696, 2002.

- [58] B. BAUMANN y B. KOST, «Structure assembling by stochastic topology optimization,» *Journal Computers and Structures*, vol. 83, pp. 2175-2184, 2005.
- [59] S. BUREERAT y T. KUNAKOTE, «Topological design of structures using population-based optimization methods,» *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 14, nº 6, p. 589-607, 2006.
- [60] F. SONMEZ, «Structural Optimization Using Simulated Annealing,» *Simulated Annealing-InTech*, pp. 281-306, 2008.
- [61] N. NOILUBLAO y S. BUREERAT, «Simultaneous topology, shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective evolutionary algorithms,» *Computers & Structures*, vol. 89, nº 23-24, p. 2531 – 2538, 2011.
- [62] J. KENNEDY y R. EBERHART, «Particle Swarm Optimization,» *Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942-1948, 1995.
- [63] J. KENNEDY y R. EBERHART, «A discrete binary version of the particle swarm algorithm,» *Memorias del World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, p. 4104-4109, 1997.
- [64] M. MUÑOZ, J. LOPEZ y E. CAICEDO, «Swarm intelligence: problem-solving societies (a review),» *Revista Ingeniería e Investigación*, vol. 28, nº 2, pp. 119-130, 2008.
- [65] E. OZCAN y C. MOHAN, «Particle swarm optimization: Surfing the waves,» *Proceeding of Congress on Evolutionary Computation*, pp. 1939-1944, 1999.

- [66] Y. SHI y R. EBERHART, «Parameter Selection in Particle Swarm Optimization,» *Proceedings of the 7th International Conference on Evolutionary Programming*, pp. 591-600, 1998.
- [67] J. SCHUTTE y A. GROENWOLD, «Sizing design of truss structures using particle swarms,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 25, p. 261–269, 2003.
- [68] L. LI, Z. HUANG, F. LIU and Q. WU, "A heuristic particle swarm optimizer for optimization of pin connected structures," *Computers & Structures*, vol. 85, no. 7-8, pp. 340-349, 2007.
- [69] R. PEREZ y K. BEHDINAN, «Particle swarm approach for structural design optimization,» *Computers and Structures*, vol. 85, p. 1579–1588, 2007.
- [70] A. KAVEH y S. TALATAHARI, «Particle swarm optimizer, ant colony strategy and harmony search scheme hybridized for optimization of truss structures,» *Computers and Structures*, vol. 87, nº 5-6, p. 267–283, 2009.
- [71] L. LI, Z. HUANG y F. LIU, «A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables,» *Computers and Structures*, vol. 87, p. 435–443, 2009.
- [72] L. DAVIS, *Handbook of Genetic Algorithm*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [73] Z. MICHALEWICS, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Berlin: Springer- Verlag, 1992.

- [74] C. REEVES, Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [75] V. DE CASTILHO, «Otimização de componentes de Concreto Pré-moldado Protendidos mediante Algoritmos Genéticos,» *Ph.D Tesis*, 2003.
- [76] E. SANDERGEN, E. JENSEN y J. WELTON, «Topological design of structural components using genetic optimization methods,» *Sensitivity Analysis and Optimization with Numerical Methods- Proceedings of the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 115, pp. 31-43, 1990.
- [77] E. JENSEN, «Topological structural design using genetic algorithms,» *Ph.D Tesis*, 1992.
- [78] D. GRIERSON y W. PAK, «Optimal sizing, geometrical and topological design using a genetic algorithm,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 6, nº 3, pp. 151-159, 1993.
- [79] J. SAKAMOTO y J. ODA, «Technique for optimal layout design for truss structures using genetic algorithm,» Washington, 1993.
- [80] P. HAJELA, E. LEE y C. LIN, «Genetic algorithms in structural topology optimization,» *Topology Design of Structures*, p. 117-133, 1993.
- [81] P. HAJELA y E. LEE, «Genetic algorithms in truss topological optimization,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, nº 22, p. 3341 – 3357, 1995.

- [82] C. CHAPMAN, K. SAITOU y M. JAKIELA, «Genetic Algorithms as an Approach to Configuration and Topology Design,» *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 116, nº 4, pp. 1005-1012, 1994.
- [83] C. CHAPMAN y M. JAKIELA, «Genetic Algorithm-Based Structural Topology Design With Compliance and Topology Simplification Considerations,» *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 118, nº 1, pp. 89-98, 1996.
- [84] J. DUDA y M. JAKIELA, «Generation and Classification of Structural Topologies With Genetic Algorithm Speciation,» *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 119, nº 1, pp. 127-131, 1997.
- [85] M. JAKIELA, C. CHAPMAN, J. DUDA, A. ADEWUYA and K. SAITOU, "Continuum structural topology design with genetic algorithms," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, pp. 339-356, 2000.
- [86] S. RAJEEV y C. KRISHNAMOORTHY, «Genetic algorithms-based methodologies for design optimization of trusses,» *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, nº 3, p. 350-358, 1997.
- [87] D. FANJOY y W. CROSSLEY, «Topology design of planar cross-sections with a genetic algorithm: Part 1-Overcoming the obstacles,» *Engineering Optimization*, vol. 34, nº 1, pp. 33-48, 2002.
- [88] D. FANJOY y W. CROSSLEY, «Topology design of planar cross-sections with a genetic algorithm: Part 2-Bending, torsion and combined loading applications,» *Engineering Optimization*, vol. 34,

nº 1, pp. 49-64, 2002.

- [89] R. KICINGER, T. ARCISZEWSKI y K. DE JONG, «Evolutionary computation and structural design: a survey of the state-of-the-art,» *Computers and Structures*, vol. 83, p. 1943–1978, 2005.
- [90] W. TANG, L. TONG y Y. GU, «Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, nº 13, p. 1737–1762, 2005.
- [91] B. XU, J. JIANG y J. OU, «Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart trusses using genetic algorithm,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 307, nº 3-5, pp. 393-427, 2007.
- [92] N. NOILUBLAO y S. BUREERAT, «Simultaneous topology, shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective,» *Computers & Structures*, vol. 89, nº 23-24, p. 2531 – 2538, 2011.
- [93] M. ALI, C. KHOMPATRAPORN y Z. ZABINSKY, «A Numerical Evaluation of Several Stochastic Algorithms on Selected Continuous Global Optimization Test Problems,» *Journal of Global Optimization*, vol. 31, p. 635–672, 2005.
- [94] A. HEDAR, «Studies on Metaheuristics for Continuous Global Optimization Problems,» *Ph.D Thesis*, 2004.
- [95] T. RUNARSSON y X. YAO, «Stochastic Ranking for Constrained

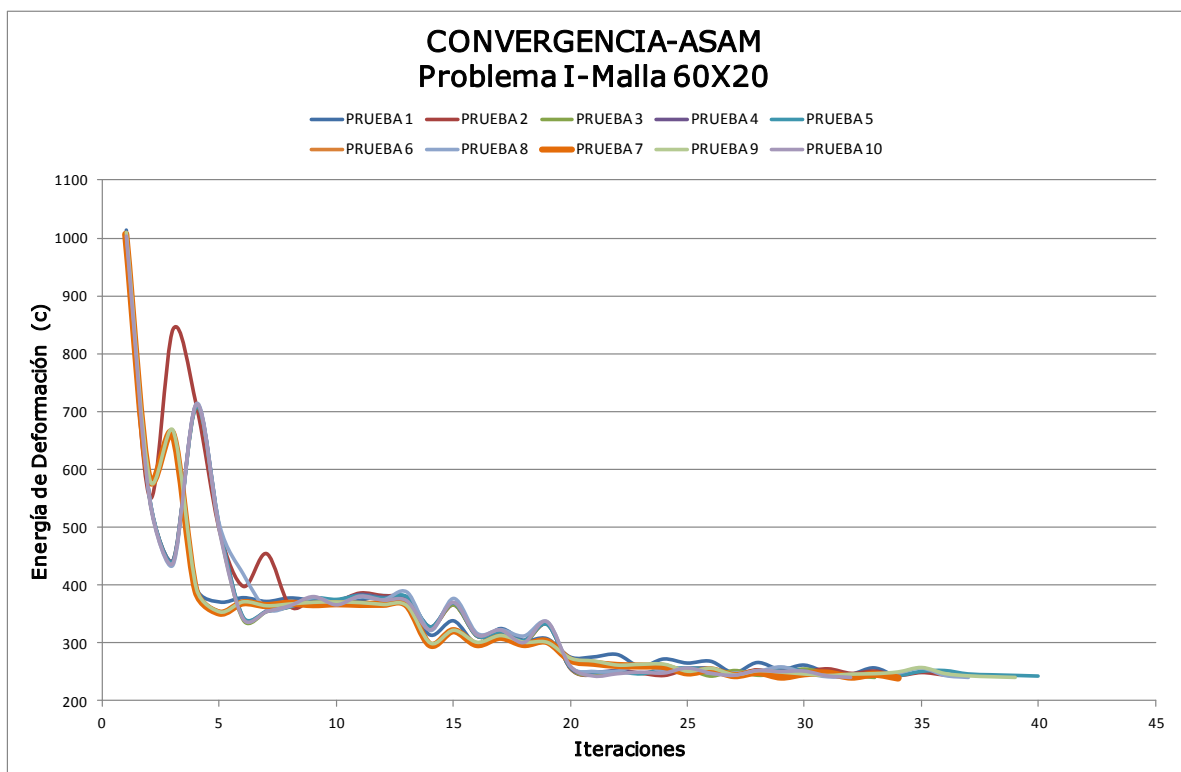
- Evolutionary Optimization,» *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 4, nº 3, pp. 284-294, 2000.
- [96] R. MALLIPEDDI y P. SUGANTHAN, «Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2010 Competition on Constrained Real- Parameter Optimization,» *Technical Report*, pp. 1-16, 2010.
- [97] SIGMUND, «Morphology-based black and white filters for topology optimization,» *Struct Multidisc Optim*, vol. 33, nº 4-5, pp. 401-424, 2007.
- [98] E. ANDREASSEN, A. CLAUSEN, M. SCHEVENELS, B. LAZAROV and O. SIGMUND, "Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 43, no. 1, pp. 1-16, 2011.
- [99] L. VICENTE, «Space Mapping: Models, Sensitivities, and Trust-Regions Methods,» *Optimization and Engineering*, vol. 4, pp. 159-175, 2003.
- [100] W. DUNCAN y A. COLLAR, «A Method for the Solution of Oscillations Problems by Matrices,» *Phil Magn*, vol. 17, nº 7, p. 865, 1934.
- [101] W. DUNCAN y A. COLLAR, «Matrices Applied to the Motions of Damped Systems,» *Phil Magn*, vol. 19, nº 7, p. 197, 1935.
- [102] A. HRENIKOFF, «Solution of Problems in Elasticity by Framework Method,» *J. Appl. Mech*, vol. 8, pp. 169-175, 1941.

- [103] R. COURANT, «Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibration,» *Bull. Am. Math. Soc*, vol. 1943, pp. 1-23, 1943.
- [104] K. BATHE, Finite element procedures, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [105] T. HUGHES, he Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [106] O. ZIENKIEWICS, El Método de los Elementos Finitos, Reverté, 1979.
- [107] A. NOOR, «Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology,» *Appl. Mech. Rev*, vol. 44, nº 6, pp. 307-317, 1991.
- [108] C. FELIPPA, «A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: a Play in Three Acts,» *Computers and Structures*, vol. 79, pp. 1313-1324, 2001.
- [109] O. ARROYO, Optimización topológica de sistemas estrucutrales, Bogota: UNIANDES, 2007.
- [110] T. CHANDRUPATLA, Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería, México: Prentice Hall, 1999.

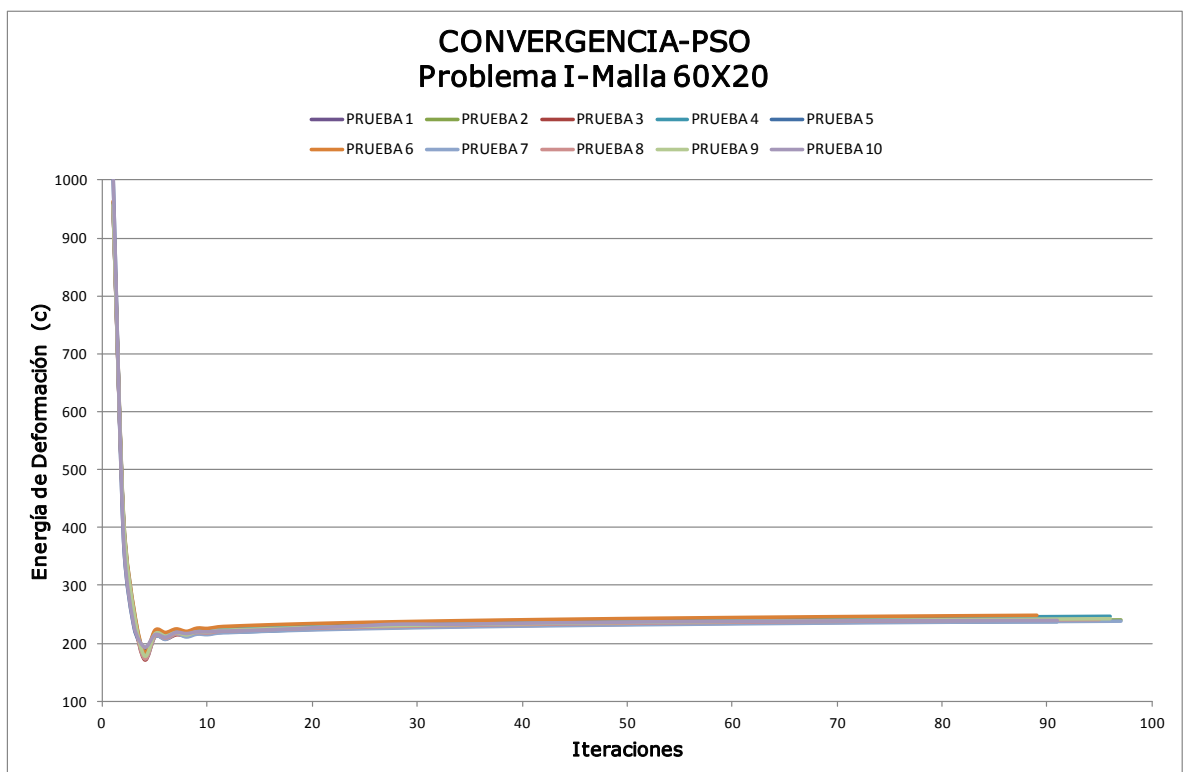
ANEXOS

Anexo A Gráficas de Convergencia para el Problema I

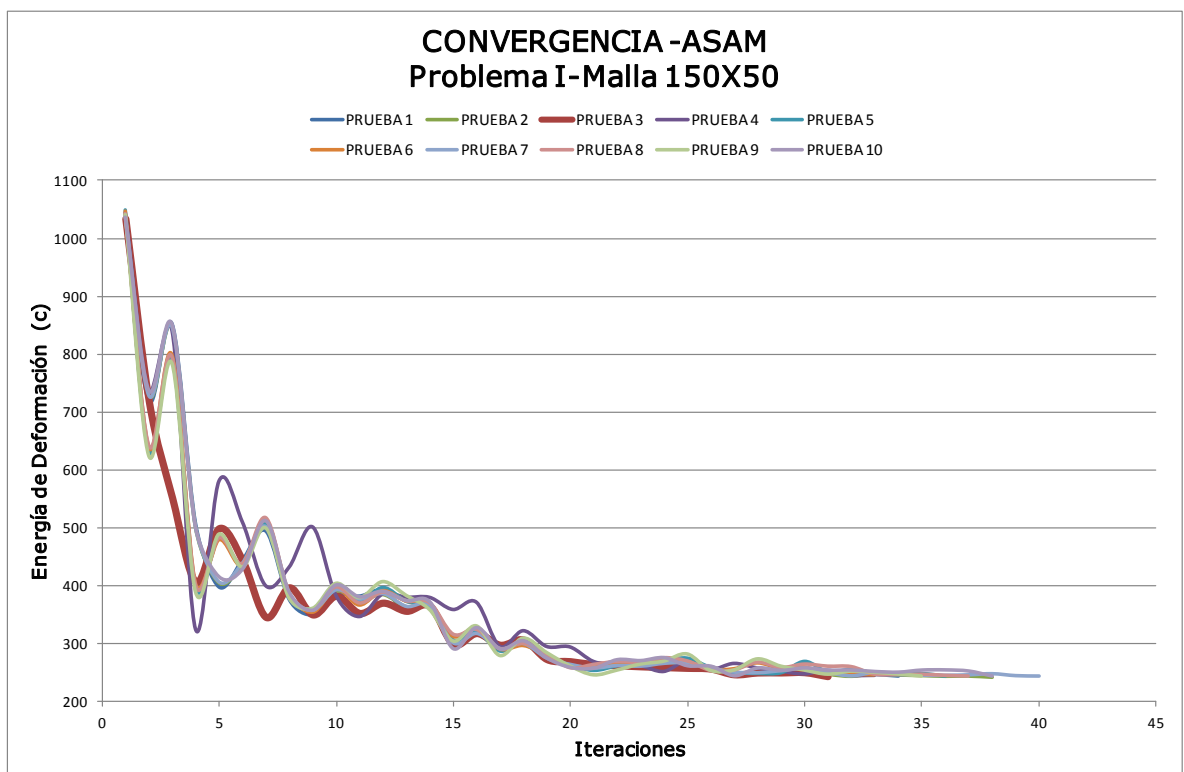
a. ASAM Malla 60X20



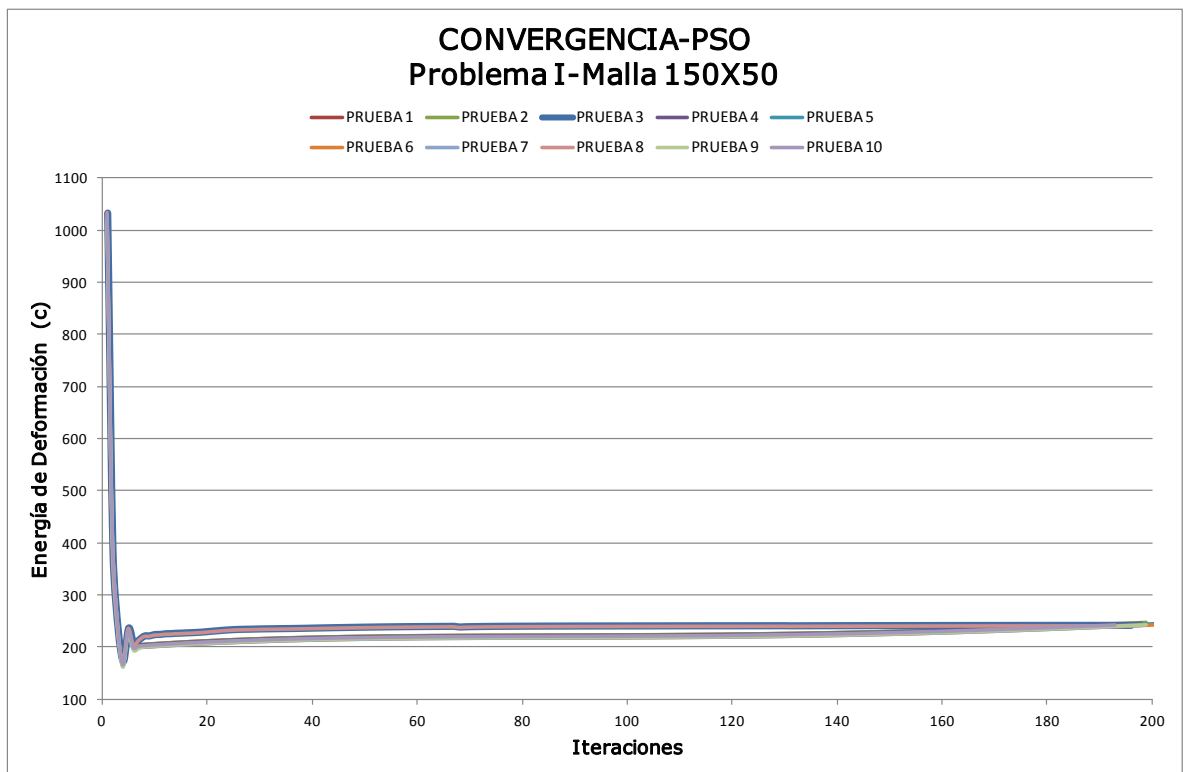
b. PSO Malla 60X20



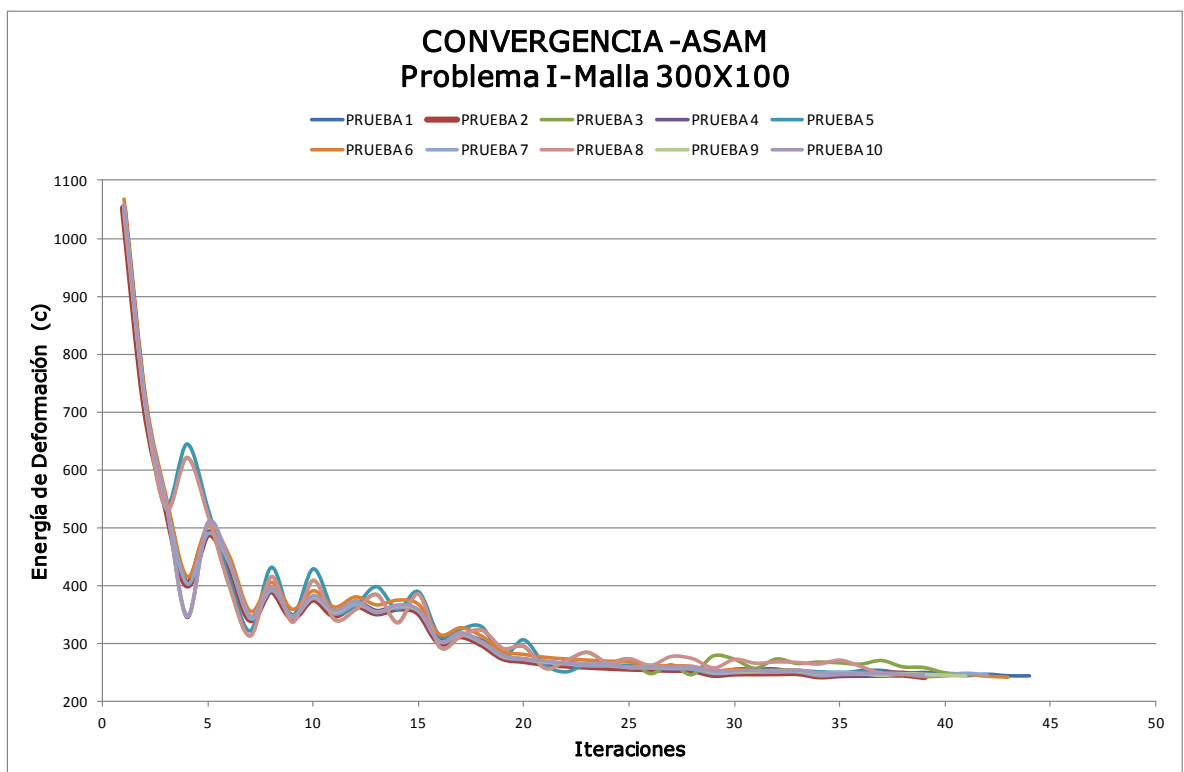
c. ASAM Malla 150X50



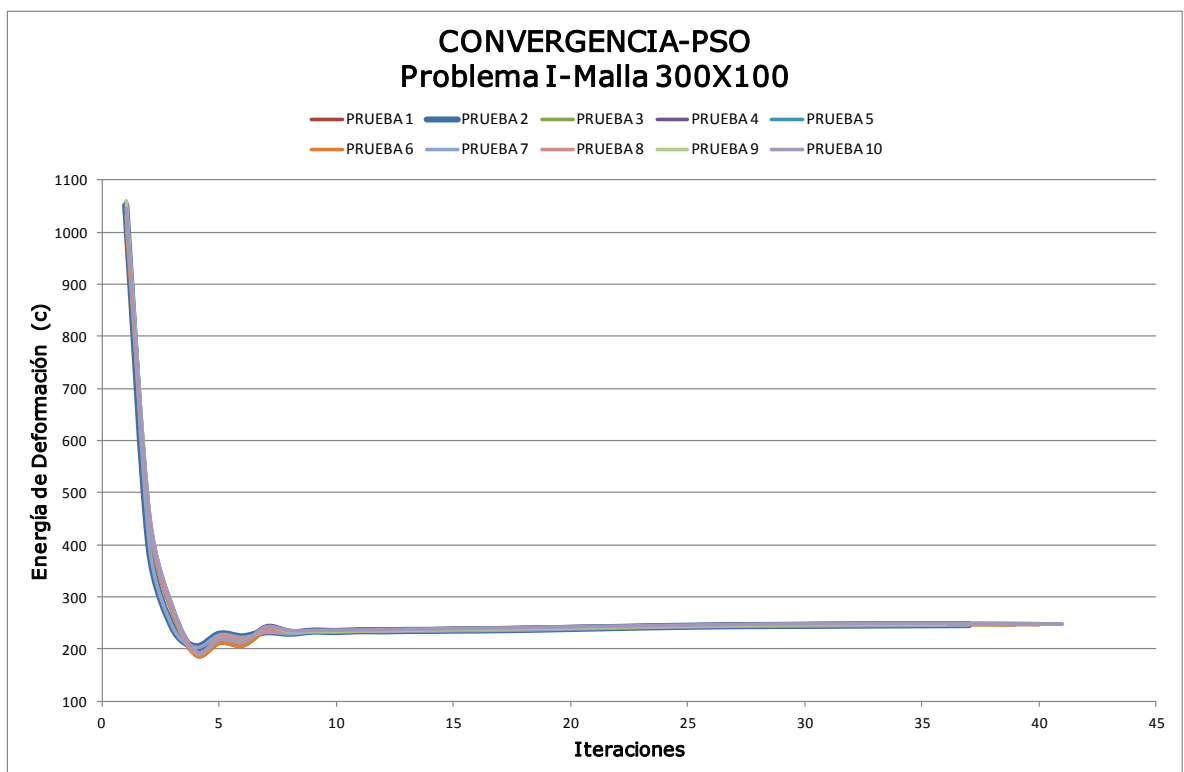
d. PSO Malla 150X50



e. ASAM Malla 300X100

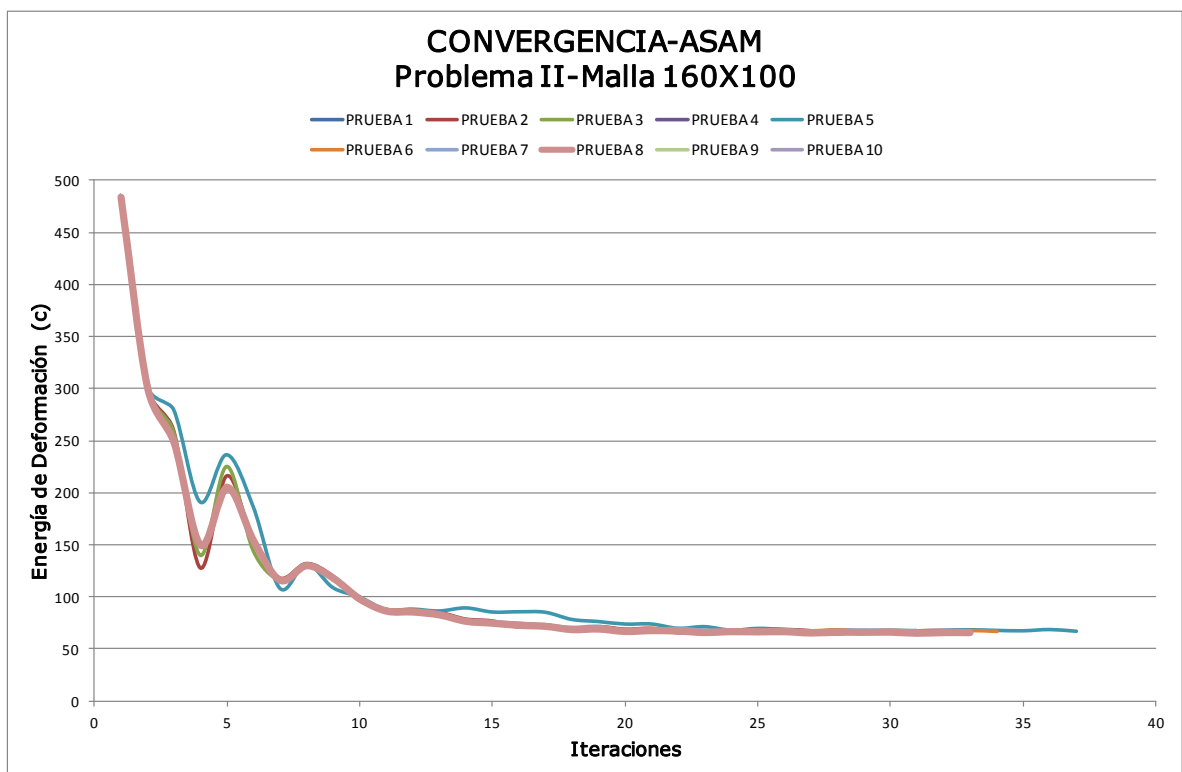


f. PSO Malla 300X100

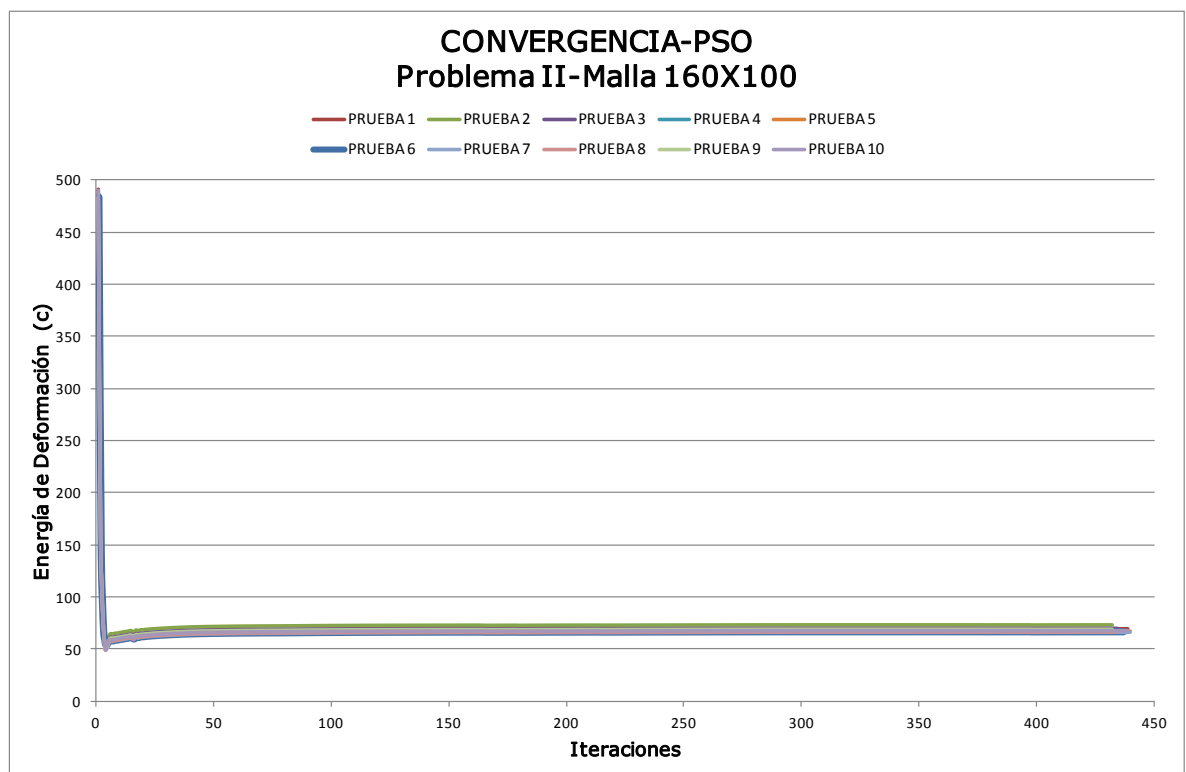


Anexo B Gráficas de Convergencia para el Problema II

a. ASAM Malla 160X100

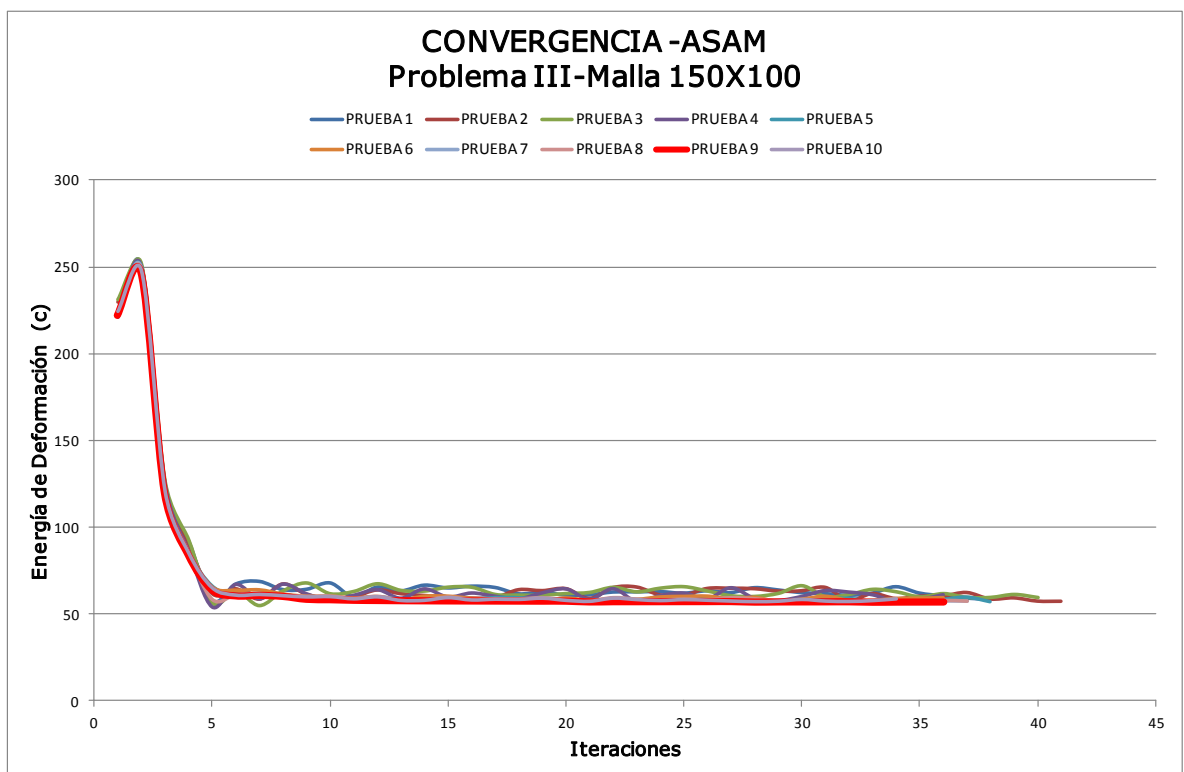


b. PSO Malla 160X100



Anexo C Gráficas de Convergencia para el Problema III

a. ASAM Malla 150X100



b. PSO Malla 150X100

