

**PROGRAMACIÓN DE TAREAS Y PLANEACIÓN DE
TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT MANIPULADOR
ANTROPOMORFO DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD.**

JAIRO ANDRÉS GRASS ARENAS

Dir. JAVIER RUGELES PÉREZ

Codir. JOSÉ ALEJANDRO AMAYA PALACIO



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2007**

**PROGRAMACIÓN DE TAREAS Y PLANEACIÓN DE
TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT MANIPULADOR
ANTROPOMORFO DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD.**

JAIRO ANDRÉS GRASS ARENAS

*Trabajo de grado desarrollado
como requisito parcial para optar al título
Ingeniero Electrónico*

*Director. JAVIER RUGELES PÉREZ
Codirector. JOSÉ ALEJANDRO AMAYA PALACIO*



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2007**

AGRADECIMIENTOS

A Maria Doris y Jairo, mis padres, por el gran esfuerzo que ha significado mi paso por la universidad.

A Doris, Johann, Patricia y Yaqueline, mis hermanos, por su apoyo incondicional.

A Nicolle y Paula, mis niñas, por ser un buen motivo para continuar.

A Javier Rugeles, docente y amigo, por orientar este trabajo y compartir el gusto por la robótica.

A José Amaya, por el apoyo y sugerencias dados.

A Homero Ortega, por la enseñanza brindada.

A compañeros y amigos.

Gracias por esos tesoros incalculables que residen en nuestras mentes...

Jairo Andrés Grass Arenas

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS CINEMÁTICOS	3
1.1. REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN	3
1.1.1. Ángulos RPY	5
1.1.2. Ángulos de Euler ZYX.....	6
1.1.3. Ángulos de Euler ZYZ.....	7
1.1.4. Pares de rotación.....	8
1.2. MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA.....	8
1.3. NOTACIÓN DENAVIT-HARTENBERG	9
1.3.1. Parámetros D-H redefinidos	10
1.4. CINEMÁTICA DIRECTA	12
1.5. CINEMÁTICA INVERSA	13
2. MODELOS DINÁMICOS	18
2.1. DINÁMICA DIRECTA.....	18
2.2. DINÁMICA INVERSA.....	19
3. GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS	28
3.1. OPERACIONES PUNTO A PUNTO	28
3.2. CAMINOS CONTINUOS	34
3.3. CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO	44
3.3.1. Criterio de Chebyshev	45
3.3.2. Criterio cosenoidal.....	46
3.3.3. Criterio rectangular.....	47
3.3.4. Criterio equidistante	48
4. MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN DE TAREAS	50
4.1. PROGRAMACIÓN POR GUIADO	50
4.2. PROGRAMACIÓN TEXTUAL.....	53
5. RESULTADOS	56
5.1. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN.....	56
5.2. CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO	64
5.3. CORRECCIÓN DE MOMENTOS.....	67
5.4. SIMULACIONES EMPLEANDO EL MODELO DINÁMICO DIRECTO.....	69

5.4.1. Método numérico	70
5.4.2. Modelo 3D	72
6. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES.	79
7. RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS.....	83
REFERENCIAS	84
ANEXOS.....	85

LISTADO DE FIGURAS

FIGURA 1.1. REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO EN COORDENADAS CARTESIANAS.....	3
FIGURA 1.2. REPRESENTACIÓN DE UN OBJETO EN EL ESPACIO.	4
FIGURA 1.3. ÁNGULOS RPY.....	5
FIGURA 1.4. ÁNGULOS DE EULER ZYX.....	6
FIGURA 1.5. ÁNGULOS DE EULER ZYZ.....	7
FIGURA 1.6. PAR DE ROTACIÓN	8
FIGURA 1.7. PARÁMETROS D-H.....	10
FIGURA 1.8. SISTEMAS DE REFERENCIA SOLIDARIOS A LAS JUNTAS.	12
FIGURA 1.9. VECTORES ASOCIADOS A LA ORIENTACIÓN DEL EFECTOR FINAL.....	13
FIGURA 1.10. CILINDRO.	15
FIGURA 1.11. ESFERA.	15
FIGURA 1.12. CUBO.	16
FIGURA 1.13. DISCO.....	16
FIGURA 1.14. CONO.	17
FIGURA 2.1. APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DIRECTA EN LA DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES ARTICULARES.	19
FIGURA 2.2. APLICACIÓN DE LA DINÁMICA INVERSA EN LA DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES ARTICULARES.	20
FIGURA 2.3. PARÁMETROS K Y $r_{EFECTOR}$	22
FIGURA 3.1. CURVAS CINEMÁTICAS NO SINCRONIZADAS.....	29
FIGURA 3.2. CURVAS CINEMÁTICAS SINCRONIZADAS.....	30
FIGURA 3.3. COMPONENTES DE LOS PARES CALCULADOS.	30
FIGURA 3.4. PARES CALCULADOS.	31
FIGURA 3.5. LOCALIZACIÓN DEL SOBREPASO MÁXIMO.	32
FIGURA 3.6. DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INCREMENTO.....	32
FIGURA 3.7. SEÑALES OBTENIDAS TRAS EL INCREMENTO EN EL TIEMPO DEBIDO AL SOBREPASO DE MOMENTOS (PARA LAS CURVAS MOSTRADAS DE 1.36 A 1.52 SEGUNDOS).	33
FIGURA 3.8. COMPONENTES DE LOS PARES CALCULADOS CORREGIDOS.....	33

FIGURA 3.9. PARES CALCULADOS CORREGIDOS.....	34
FIGURA 3.10. LÍNEA RECTA	35
FIGURA 3.11. SEGMENTO CIRCULAR	36
FIGURA 3.12. SPLINE CÚBICA	37
FIGURA 3.13. VECTORES REQUERIDOS EN LA DETERMINACIÓN DEL CONJUNTO DE PUNTOS DE PASO INICIALES PARA UN SEGMENTO CIRCULAR.	39
FIGURA 3.14. PENDIENTES EN PUNTOS DE PASO.....	41
FIGURA 3.15. ERROR EN UNA RECTA.....	42
FIGURA 3.16. ERROR EN UN SEGMENTO CIRCULAR.....	43
FIGURA 3.17. ERROR EN UN SPLINE CÚBICA.....	43
FIGURA 3.18. ESPACIAMIENTO DE CHEBYSHEV.....	46
FIGURA 3.19. ESPACIAMIENTO COSENOIDAL.....	47
FIGURA 3.20. ESPACIAMIENTO RECTANGULAR.....	48
FIGURA 3.21. ESPACIAMIENTO EQUIDISTANTE.....	49
FIGURA 3.22. CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO.....	49
FIGURA 4.1. GENERACIÓN DEL CONJUNTO DE POSES.....	51
FIGURA 4.2. VENTANA DE ASIGNACIÓN DE TRAYECTORIAS.....	52
FIGURA 4.3. VENTANA DE EDICIÓN DE TRAYECTORIAS, APARECE AL PULSAR EL BOTÓN EDITAR EN LA VENTANA DE ASIGNACIÓN DE TRAYECTORIAS.	52
FIGURA 4.4. VENTANA DE INFORME SOBRE EL ERROR HALLADO.....	55
FIGURA 4.5. ARCHIVO DE EJEMPLO DE TAREA PROGRAMADA TEXTUALMENTE.....	55
FIGURA 5.1. VELOCIDADES Y ACELERACIONES MÁXIMAS DESARROLLADAS.....	59
FIGURA 5.2. SOBREALERACIONES MÁXIMAS PRIMER CASO.....	60
FIGURA 5.3. SOBREALERACIONES MÁXIMAS SEGUNDO CASO.....	60
FIGURA 5.4. SOBREALERACIONES MÁXIMAS TERCER CASO.....	61
FIGURA 5.5. CURVAS DE TIEMPOS MÍNIMOS Y VALORES MÁXIMOS DE VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SOBREALERACIÓN DADOS POR LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN.....	64
FIGURA 5.6. RESULTADOS DE LA PRUEBA REALIZADA A LOS CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO.....	65
FIGURA 5.7. RESULTADOS DE PARA $n_{PP\text{PROMEDIO}} \leq 4.5$	66
FIGURA 5.8. RESULTADOS DE PARA $4.5 < n_{PP\text{PROMEDIO}} \leq 7.5$	66

FIGURA 5.9. RESULTADOS DE PARA $n_{PP\text{ PROMEDIO}} > 7.5$	67
FIGURA 5.10. MOMENTOS CALCULADOS INICIALMENTE	68
FIGURA 5.11. MOMENTOS CALCULADOS AL REALIZAR LA PRIMERA CORRECCIÓN.	69
FIGURA 5.12. MOMENTOS CALCULADOS AL REALIZAR LA SEGUNDA CORRECCIÓN.	69
FIGURA 5.13. CURVAS CINEMÁTICAS OBTENIDAS.....	71
FIGURA 5.14. ESTRATEGIA DE CONTROL DE PAR CALCULADO.	72
FIGURA 5.15. TRAYECTORIA SIMULADA.	73
FIGURA 5.16. POSICIONES ANGULARES DESEADAS (IZQ.) Y OBTENIDAS (DER.).....	73
FIGURA 5.17. PARES DESEADOS (IZQ.) Y APLICADOS (DER.).....	74
FIGURA 5.18. ERROR DE POSICIONES ANGULARES MÉTODO COSENOIDAL.....	74
FIGURA 5.19. ERROR DE VELOCIDADES ANGULARES MÉTODO COSENOIDAL.	75
FIGURA 5.20. ERROR DE ACELERACIONES ANGULARES MÉTODO COSENOIDAL.	75
FIGURA 5.21. ERROR DE PARES MÉTODO COSENOIDAL.....	76
FIGURA 5.22. ERROR DE POSICIONES ANGULARES MÉTODO RECTANGULAR.....	77
FIGURA 5.23. ERROR DE VELOCIDADES ANGULARES MÉTODO RECTANGULAR.	77
FIGURA 5.24. ERROR DE ACELERACIONES ANGULARES MÉTODO RECTANGULAR.	78
FIGURA 5.25. ERROR DE PARES MÉTODO RECTANGULAR.	78

LISTADO DE TABLAS

<i>TABLA 1.1.</i> MÉTODOS COMUNES PARA DETERMINAR LA MATRIZ DE ROTACIÓN.....	5
<i>TABLA 1.2.</i> PARÁMETROS D-H MODIFICADOS PROPIOS DEL MODELO DE MANIPULADOR IMPLEMENTADO.....	11
<i>TABLA 4.1.</i> INSTRUCCIONES DE PROGRAMACIÓN TEXTUAL.....	53
<i>TABLA 5.1.</i> PARÁMETROS DE COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN IMPLEMENTADOS.....	57
<i>TABLA 5.2.</i> CÁLCULOS PREVIOS.....	58
<i>TABLA 5.3.</i> FACTOR α PARA LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN ANALIZADOS.....	62

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. GUÍA DE USUARIO.....	85
ANEXO B. FUNCIONES PROGRAMADAS.	115
ANEXO C. SOLUCIONES CINEMÁTICA INVERSA.	130
ANEXO D. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN.	154

RESUMEN

TÍTULO: PROGRAMACIÓN DE TAREAS Y PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT MANIPULADOR ANTROPOMORFO DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD*

AUTOR: GRASS ARENAS, JAIRO ANDRÉS**

PALABRAS CLAVE: modelos dinámicos, formulación de Newton-Euler, criterios de espaciado, métodos de interpolación, programación de tareas.

DESCRIPCIÓN:

El presente documento ofrece: detalles sobre programación de tareas y su aplicación en la herramienta desarrollada; el análisis y contraste de métodos de interpolación y de criterios de espaciado; y la adaptación realizada a la formulación de Newton-Euler (N-E) para la obtención del modelo dinámico del manipulador.

La herramienta desarrollada en el entorno MATLAB permite la construcción gradual de tareas en su programación gestual, y a partir de esta construcción, la obtención del conjunto de sentencias correspondientes a la programación textual de la tarea. Así mismo, es posible generar un conjunto de posiciones y trayectorias a partir de instrucciones contenidas en un archivo con extensión .txt. La herramienta permite además: la selección del método de interpolación y del criterio de espaciado de puntos de paso; la manipulación de cinco tipos de piezas diferentes; la simulación total o parcial de la tarea programada; y la creación de archivos de video al simular la tarea. En esta herramienta de programación de tareas se ha implementado la versión iterativa de la formulación de N-E para la solución del modelo dinámico inverso determinando los pares motores necesarios para la realización del movimiento deseado.

Los resultados de las pruebas realizadas muestran una rápida convergencia de los algoritmos generados para la corrección de pares motores y para la determinación de los puntos de paso necesarios para el cumplimiento de la tolerancia designada en trayectorias definidas en coordenadas cartesianas. El algoritmo de corrección de pares no está ligado a la formulación de N-E empleada en este trabajo, y es aplicable a la corrección de fuerzas en articulaciones prismáticas. Con base en el análisis realizado a los diferentes métodos de interpolación y en las simulaciones del sistema en lazo cerrado, se recomienda el empleo del método de aceleración senoidal desarrollado por el autor del presente trabajo de grado.

* Trabajo de grado

** Facultad de ingenierías Físico-mecánicas. Ingeniería Electrónica. Javier Rugeles Pérez.

ABSTRACT

TITLE: PROGRAMMING OF TASKS AND PLANEACIÓN OF TRAJECTORIES FOR AN ANTHROPOMORPHOUS MANIPULATOR ROBOT OF SIX DEGREES OF FREEDOM*

AUTHOR: GRASS ARENAS, JAIRO ANDRÉS**

KEY WORDS: dynamic models, formulation of Newton -Euler, criterions of space, methods of interpolation, programming of tasks.

DESCRIPTION:

The present documents offers: details on programming of tasks and their application in the developed tool; the analysis and contrast of methods of interpolation and of criterions of space; and the carried out adaptation to the Newton-Euler formulation (N-E) for the obtaining of the dynamic model of the manipulator.

The developed tool in the MATLAB environment permits the gradual construction of tasks in their gesture programming, and as of this construction, the obtaining of the whole of corresponding verdicts to the textual programming of the task. Likewise, you are possible to generate a whole of positions and trajectories as of instructions contained in a file with extension txt. The tool permits moreover: the selection of the method of interpolation and of the criterion of space knitted in passing; the manipulation of five types of different pieces; the total or partial simulation of the programed task; and the creation of files of video when simulating the task. In this tool of programming of tasks has implemented the iterative version of the formulation of N-E for the solution of the dynamic inverse model deciding the motor placentas water closets for the realization of the desired movement.

The results of the carried out proofs show a quick convergence of the algorisms generated for the correction of motor placentas and for the determination of the dots in passing necessary for the fulfillment of the designated tolerance in trajectories defined in Cartesian coordinates. The algorism of correction of placentas is not tied to the formulation of N-E employed in this work, and is applicable to the correction of forces in prismatic questions. With bases in the analysis carry out to the different methods of interpolation and in the simulations of the system in lasso fenced-in garden, the employment of the method is recommended of developed senoidal acceleration for the author of the present works willingly.

* Work of Grade

** Faculty of physical-mechanical engineerings. Electronic engineering. Javier Rugeles Pérez

INTRODUCCIÓN

El empleo de sistemas adaptables por programación ha sido fundamental para el desarrollo de la automatización industrial. Los robots manipuladores hacen parte del conjunto de máquinas que gracias a su flexibilidad han llevado a la automatización a su estado actual. La flexibilidad de un manipulador radica en su adaptación a los cambios en el entorno y al cumplimiento de nuevas tareas a partir de modificaciones por programación, sin requerir grandes cambios en su estructura física.

En trabajos precedentes sobre robótica en la institución se ha empleado el modelo cinemático [1], [2], [3], [4], brindando una solución apropiada para la ejecución de tareas que implican cargas ligeras, en casos en los cuales no se pretenda el seguimiento de trayectorias, como sucede con la implementación de estrategias de control monoarticular [3], o cuando las tareas involucran movimientos lentos. En caso contrario, se hace necesario el empleo del modelo dinámico o el uso de estrategias adaptativas inteligentes. En el seguimiento de trayectorias es indispensable el movimiento simultáneo de articulaciones.

Esta investigación aporta a los campos de programación de tareas y de planeación de trayectorias, una herramienta de programación gestual y textual de tareas en la cual es posible aplicar y contrastar diferentes métodos de interpolación en el espacio de juntas y de espaciamiento en el espacio cartesiano, e incluye algoritmos para la modificación de pares motores y para la generación de puntos de paso en trayectorias designadas en el espacio cartesiano, y la adaptación de la formulación de Newton-Euler para la obtención del modelo dinámico del manipulador.

El presente documento se ha dividido en cinco capítulos. En el primero de éstos se presenta una breve selección de conceptos acerca de representación

de objetos y modelos cinemáticos. El segundo capítulo expone la implementación del modelo dinámico del manipulador y la inclusión de cargas en este modelo. El capítulo tercero es un compendio de los algoritmos generados para la corrección de pares motores y de generación de puntos de paso en líneas rectas, segmentos circulares y curvas spline. Detalles correspondientes a programación de tareas y su aplicación en la herramienta desarrollada se encuentran en el cuarto capítulo. En el quinto capítulo se exhiben los resultados de las diferentes pruebas y comparaciones.

Los anexos corresponden en su orden a: descripción de la herramienta, comentarios sobre las funciones programadas, soluciones al problema cinemático inverso y análisis de métodos de interpolación.

La implementación en MATLAB de la herramienta de programación y simulación de tareas obedece a las prestaciones que ofrece este programa en cuanto a la creación de interfaces gráficas, manejo matricial, visualización de datos, gráficos tridimensionales y simulación.

1. MODELOS CINEMÁTICOS.

La cinemática define las relaciones entre desplazamiento, velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento, sin tener en cuenta las fuerzas y/o momentos que producen el movimiento [5].

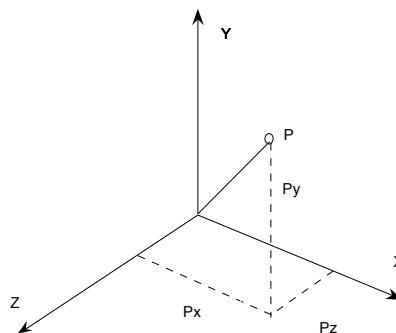
En robótica, el establecimiento de modelos cinemáticos tiene implícita la obtención de relaciones entre las variables articulares y las variables del efector final.

1.1. REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN.

Es labor indispensable la representación de la posición y orientación de un objeto en el espacio, siendo común el empleo de coordenadas cartesianas para la ejecución de la mencionada labor (figura 1.1). Así, la posición de un punto en el espacio tridimensional se representa de la forma:

$${}^0P = \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

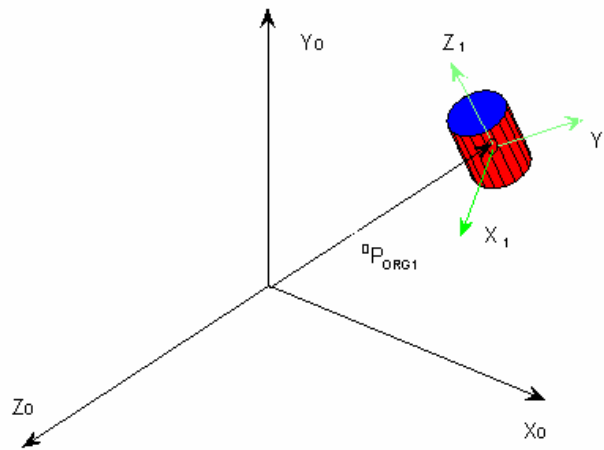
Figura 1.1. Representación de un punto en coordenadas cartesianas.



Fuente: Autor del proyecto.

Para localizar un objeto se ha de fijar un sistema de coordenadas en él (figura 1.2). La representación de la posición y orientación del objeto equivale a la descripción del sistema de coordenadas ligado a él, con respecto al sistema de referencia. Ésta descripción consta de dos transformaciones: traslación y rotación.

Figura 1.2. Representación de un objeto en el espacio.



Fuente: Autor del proyecto.

Un punto P expresado en el sistema $\{1\}$ (1P) se define en términos del sistema $\{0\}$ según se indica en (1.2).

$${}^0P = {}^0R \cdot {}^1P + {}^0P_{ORG1} \quad (1.2)$$

Donde: ${}^0P_{ORG1}$ → vector posición del origen de $\{1\}$ expresado en $\{0\}$.

0R → matriz de rotación.

La matriz de rotación se compone de los vectores unitarios coordenados pertenecientes a un sistema ($\{1\}$), expresados en otro de referencia ($\{0\}$).

$${}^0R = \begin{bmatrix} {}^0\hat{X}_1 & {}^0\hat{Y}_1 & {}^0\hat{Z}_1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (1.3)$$

Es de utilidad expresar la matriz de rotación en función de ciertos ángulos. Esto se hace creando una matriz de rotación compuesta por rotaciones sucesivas alrededor de ejes específicos.

Tabla 1.1. Métodos comunes para determinar la matriz de rotación.

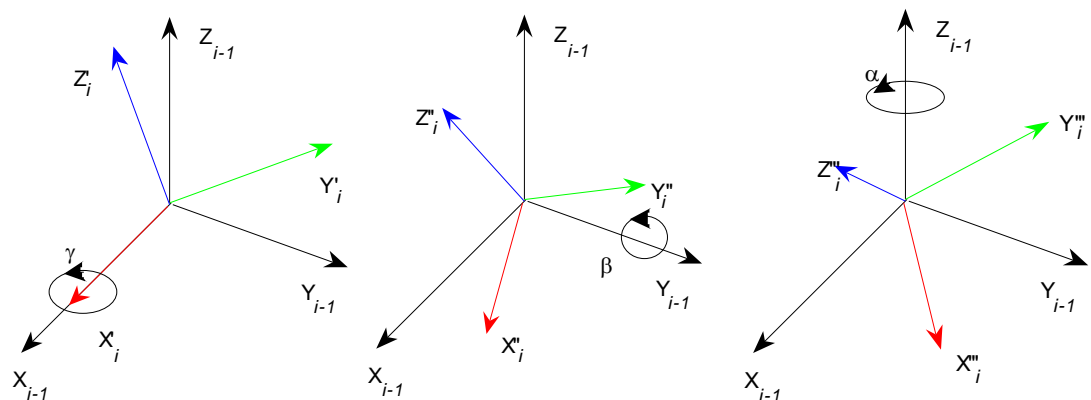
	Ángulos R-P-Y	Ángulos de Euler Z-Y'-X''	Ángulos de Euler Z-Y'-Z''
Secuencia de rotaciones	γ respecto al eje X β respecto al eje Y α respecto al eje Z	α respecto al eje Z β respecto al eje Y' γ respecto al eje X''	α respecto al eje Z β respecto al eje Y' γ respecto al eje Z''

Fuente: Autor del proyecto.

1.1.1. Ángulos RPY.

Consiste en efectuar rotaciones sucesivas alrededor de los ejes del sistema de referencia $i-1$ -ésimo para expresar el sistema i -ésimo, partiendo de la coincidencia entre los dos sistemas de referencia consecutivos, rotando $\{i\}$ alrededor de X_{i-1} un ángulo γ (balanceo-"Roll"), luego rotando $\{i\}$ alrededor de Y_{i-1} un ángulo β (inclinación-"Pitch"), y finalmente rotando $\{i\}$ alrededor de Z_{i-1} un ángulo α (orientación-"Yaw") (figura 1.3).

Figura 1.3. Ángulos RPY.



Fuente: Autor del proyecto.

En ésta representación la matriz de rotación se obtiene por medio de premultiplicaciones, debido a que las transformaciones se realizan sobre los ejes de $\{i-1\}$. Las ecuaciones (1.4) y (1.5) expresan esta matriz.

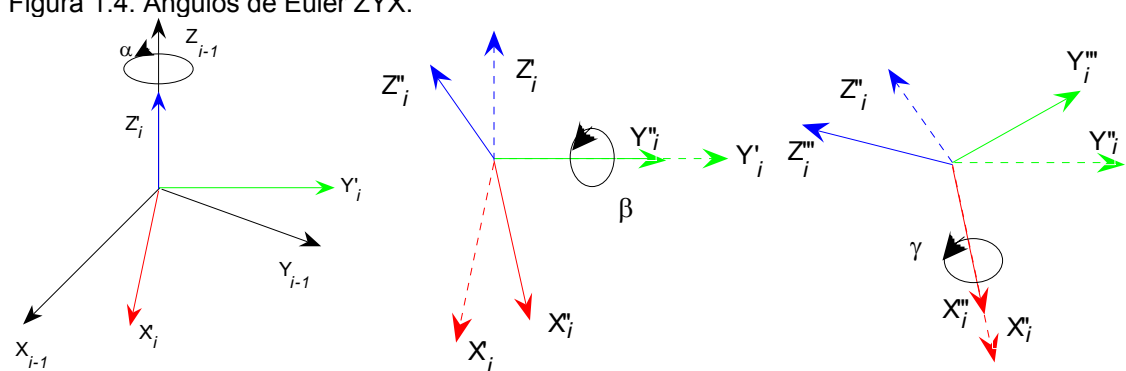
$${}^{i-1}R_{RPY}(\gamma, \beta, \alpha) = Rot({}^{i-1}Z_{i-1}, \alpha)Rot({}^{i-1}Y_{i-1}, \beta)Rot({}^{i-1}X_{i-1}, \gamma) \quad (1.4)$$

$${}^{i-1}R_{RPY}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.1.2. Ángulos de Euler ZYX.

Se han de ejecutar rotaciones sucesivas alrededor de los ejes del sistema i -ésimo, de la siguiente manera: se parte de la coincidencia de los sistemas de referencia, luego se rota $\{i\}$ alrededor de Z_i un ángulo α , a continuación se realiza una rotación de $\{i\}$ alrededor de Y_i un ángulo β y por último, rotando $\{i\}$ alrededor de X_i un ángulo γ (ver figura 1.4).

Figura 1.4. Ángulos de Euler ZYX.



Fuente: Autor del proyecto.

La rotación resultante se obtiene a través de posmultiplicaciones de las transformaciones realizadas sobre los ejes de $\{i\}$, la matriz correspondiente es indicada en (1.6) y (1.7).

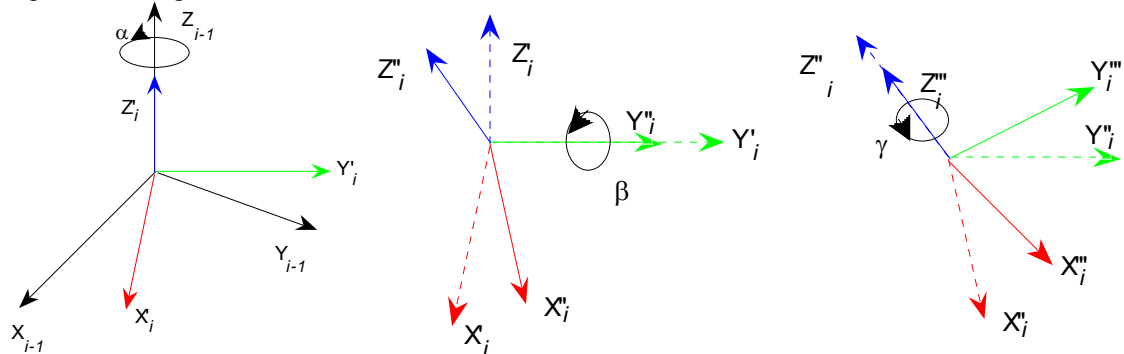
$${}^{i-1}R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = Rot({}^iZ_i, \alpha)Rot({}^iY_i, \beta)Rot({}^iX_i, \gamma) \quad (1.6)$$

$${}^{i-1}R_{ZYX}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ 0 & \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

1.1.3. Ángulos de Euler ZYZ.

Ésta representación se establece siguiendo las pautas de la representación a través de ángulos de Euler ZYX, diferenciándose tan sólo en la tercera rotación, pues se realiza alrededor del eje Z_i en lugar del eje X_i (ver figuras 1.4 y 1.5). Así, es posible obtener varias representaciones de la orientación variando el orden y los ejes de las rotaciones.

Figura 1.5. Ángulos de Euler ZYZ.



Fuente: Autor del proyecto.

La transformación de rotación resultante es:

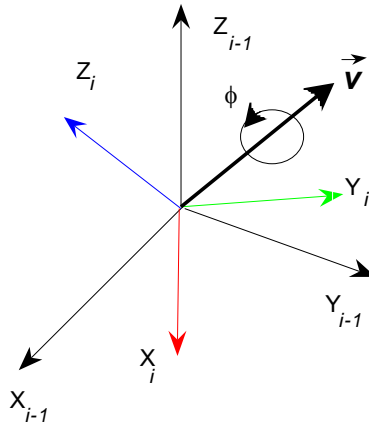
$${}^{i-1}R_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = Rot({}^iZ_i, \alpha)Rot({}^iY_i, \beta)Rot({}^iZ_i, \gamma) \quad (1.8)$$

$${}^{i-1}R_{ZYX}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

1.1.4. Pares de rotación.

Esta representación se define a partir del par de variables (\vec{v}, ϕ) , donde \vec{v} corresponde al vector eje de rotación y ϕ al ángulo de rotación (figura 1.6). De esta manera, la orientación del sistema $\{i\}$ relativa al sistema $\{i-1\}$ se obtiene rotando $\{i\}$ un ángulo ϕ sobre alrededor del eje \vec{v} .

Figura 1.6. Par de rotación



Fuente: Autor del proyecto.

1.2. MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA.

Resulta realmente útil la representación de las transformaciones de una manera compacta, una forma de conseguirlo reside en el uso de la representación en coordenadas homogéneas, ésta es la representación de un vector de n elementos por un vector de $(n+1)$ elementos [6]. La matriz de

transformación homogénea (MTH) es una matriz (4x4) que transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema a otro. Esta matriz se puede considerar compuesta por cuatro submatrices:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \text{Matriz de rotación} & \text{Vector posición} \\ \text{Trans. de perspectiva} & \text{escalado} \end{array} \right]_{4 \times 4} \quad (1.10)$$

Para aplicaciones en robótica:

$${}^{i-1}T_i = \left[\begin{array}{cc|c} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}P_{ORG\ i} & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ & & 1 \end{array} \right] \quad (1.11)$$

1.3. NOTACIÓN DENAVIT-HARTENBERG

La notación DH es un procedimiento que emplea cuatro parámetros, uno de ellos la variable articular y los restantes constantes, para establecer las relaciones de rotación y traslación entre eslabones consecutivos. Los marcos de referencia en los eslabones se asignan teniendo en cuenta tres reglas [6]:

1. El eje Z_i yace a lo largo del eje de la junta i -ésima.
2. El eje X_i es perpendicular a los ejes Z_{i+1} y Z_i .
3. El eje Y_i se determina siguiendo la regla de la mano derecha completando el marco coordenado i -ésimo.

Los parámetros se definen así:

- α_i Es el ángulo comprendido entre el eje Z_{i-1} y el eje Z_i respecto del eje X_i (siguiendo la regla de la mano derecha).
- a_i Es la distancia medida desde la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i hasta el origen i -ésimo a lo largo del eje X_{i-1} .

- θ_i Es el ángulo de separación del eje X_{i-1} al eje X_i respecto del eje Z_{i-1} (siguiendo la regla de la mano derecha).
- d_i Es la distancia desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i a lo largo del eje Z_{i-1} .

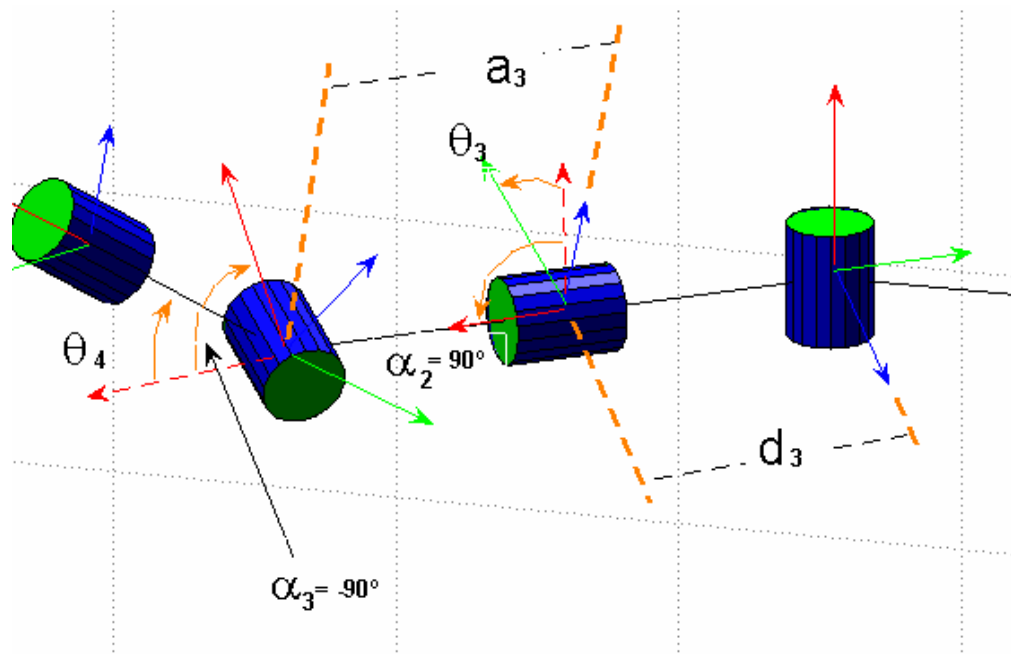
La ecuación (1.12) establece la MTH resultante de este procedimiento.

$${}^{i-1}T = \text{Tras}(Z_{i-1}, d_i) \text{Rot}(Z_{i-1}, \theta_i) \text{Tras}(X_i, a_i) \text{Rot}(X_i, \alpha_i) \quad (1.12)$$

1.3.1. Parámetros D-H redefinidos

Para el modelo de manipulador implementado se ha modificado la asignación de los parámetros D-H (figura 1.7) ya que con la definición dada de los parámetros no es posible representar la configuración seleccionada del manipulador.

Figura 1.7. Parámetros D-H.



Fuente: Autor del proyecto.

Los parámetros se han redefinido así:

- a_{i-1} Es la distancia desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i a lo largo del eje Z_{i-1} .
- α_{i-1} Es el ángulo comprendido entre el eje Z_{i-1} y el eje Z_i respecto del eje X_{i-1} (siguiendo la regla de la mano derecha).
- θ_i Es el ángulo de separación del eje X_{i-1} al eje X_i medido como una rotación alrededor del eje Z_i (siguiendo la regla de la mano derecha).
- d_i Es la distancia desde la intersección del eje X_{i-1} con el eje Z_i hasta el origen del sistema de coordenadas i-ésimo a lo largo del eje Z_i .

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) expresan la MTH resultante.

$${}^{i-1}T = \text{Tras}(Z_{i-1}, a_{i-1})\text{Rot}(X_{i-1}, \alpha_{i-1})\text{Rot}(Z_i, \theta_i)\text{Tras}(Z_i, d_i) \quad (1.13)$$

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i + a_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Los parámetros obtenidos son expuestos a continuación en la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Parámetros D-H modificados propios del modelo de manipulador implementado.

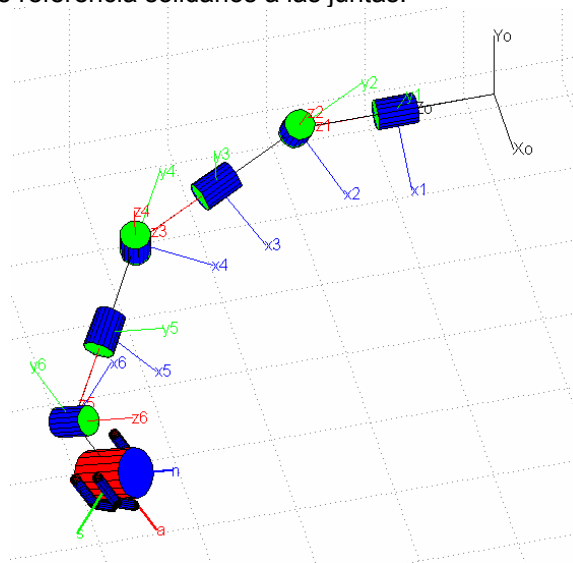
i	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	d_{01}
2	d_{12}	-90°	θ_2	0
3	0	90°	θ_3	d_{23}
4	d_{34}	-90°	θ_4	0
5	0	90°	θ_5	d_{45}
6	d_{56}	-90°	θ_6	0
7	0	90°	$\theta_7 = 90^\circ$	d_{67}

Fuente: Autor del proyecto.

1.4. CINEMÁTICA DIRECTA

Partiendo del conocimiento de los valores de las variables articulares, se determinan la orientación y la posición del efector final del manipulador (figura 1.8).

Figura 1.8. Sistemas de referencia solidarios a las juntas.



Fuente: Autor del proyecto.

Existen dos alternativas típicas para la obtención del modelo directo, el empleo de relaciones geométricas y la utilización de la matriz de transformación homogénea ${}^0_N T$, la cual se obtiene mediante posmultiplicaciones de las ${}^{i-1}_i T$ sucesivas [6]:

$${}^0_N T = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_1^N {}^{i-1}_i T(q_i) \quad (1.15)$$

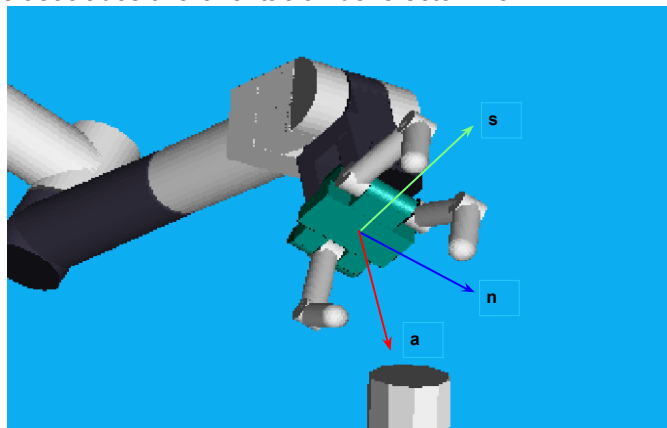
Donde:

- n** vector normal de la mano. Suponiendo una mano de tipo mordaza paralela que es ortogonal a los dedos.
- s** vector de deslizamiento de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.

- a** vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano.
- p** vector posición del efector. Apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas de la mano.

Los vectores **n**, **s**, **a** y **p** (figura 1.9) son funciones de las posiciones articulares (θ), las velocidades lineal y angular (**v** y ω) están dadas en función de las posiciones y sus primeras derivadas en el tiempo ($\theta, \dot{\theta}$) mientras que la aceleración está determinada por la interacción de las posiciones y sus derivadas de primer y segundo orden ($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$).

Figura 1.9. Vectores asociados a la orientación del efector final.



Fuente: Autor del proyecto.

1.5. CINEMÁTICA INVERSA

Estableciendo una posición y orientación a las que se desea llevar el efector final y empleando los parámetros geométricos de los eslabones, se ha de determinar si el manipulador logra cumplir con los requerimientos, es decir, si la posición deseada se encuentra dentro del volumen de trabajo del manipulador y si se logra llegar a ella orientando el efector final como se pretende, además, ocurriendo esto se ha de establecer el número de soluciones posibles o el rango de las variables articulares dentro del cual existen diversas soluciones.

Para solucionar este problema se cuentan con dos métodos claramente diferenciables [7]:

- Método analítico: plantea la solución a través de relaciones geométricas y algebraicas, sin embargo no siempre se logra alcanzar la solución debido a los parámetros geométricos que describen a los eslabones. Además, presenta la desventaja de ser particular la solución, siendo de esta manera no aplicable en plataformas de diseño y simulación de manipuladores.
- Métodos numéricos: tienen la ventaja de ser aplicables a cualquier configuración, pero son normalmente de convergencia más lenta que la admisible en el control en tiempo real.

Se ha implementado la solución geométrica al modelo cinemático inverso ya que se trata de un manipulador en particular.

La plataforma diseñada permite la manipulación de cinco tipos de piezas, las cuales poseen diferentes restricciones. Además, brinda la opción de sujetar la pieza con la orientación fija correspondiente a los vectores del sistema de referencia anclado a la pieza. Esta opción se habilita de forma independiente para cada una de las piezas creadas.

Cuando a una pieza se le ha deshabilitado la opción de orientación fija y se le ha ordenado al manipulador que la sujete, el algoritmo correspondiente al tipo de pieza determina los valores de las variables de junta que le permite cumplir con lo indicado realizando los menores desplazamientos posibles.

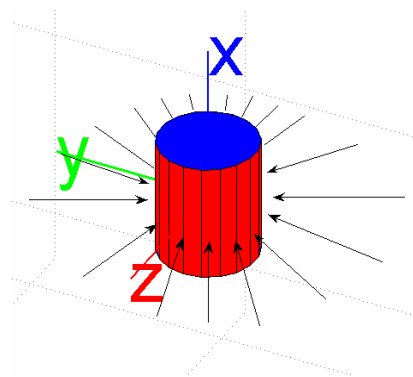
La plataforma también permite el movimiento del manipulador a través del manejo de las variables del efector final: coordenadas cartesianas y ángulos de Euler ZYX.

Los tipos de piezas incluidas en este trabajo son:

- Cilindro

Es posible sujetar esta pieza orientando al efector final con su vector \mathbf{n} paralelo a \mathbf{x} o a $-\mathbf{x}$. El vector \mathbf{a} puede tener cualquier dirección apuntando al eje del cilindro y se ha de ubicar sobre el plano $\mathbf{y-z}$ al igual que el vector \mathbf{s} (figura 1.10).

Figura 1.10. Cilindro.

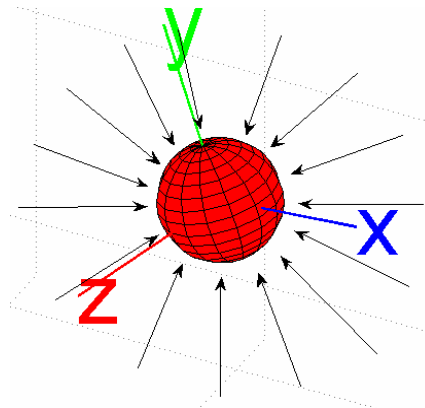


Fuente: Autor del proyecto.

- Esfera

Esta pieza puede sujetarse con cualquier dirección del vector \mathbf{a} , por tanto no impone restricciones, ofreciendo un numero infinito de soluciones (figura 1.11).

Figura 1.11. Esfera.

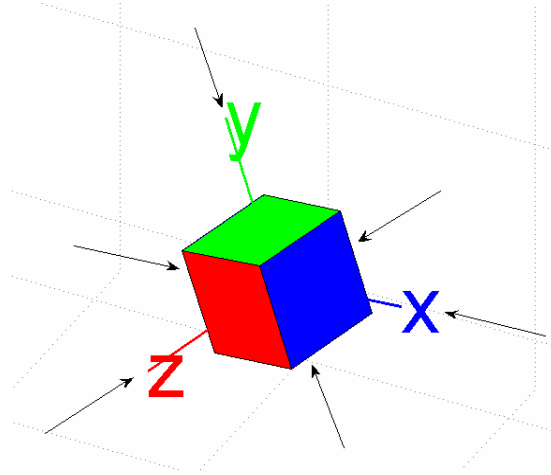


Fuente: Autor del proyecto.

- Cubo

Este tipo de pieza brinda 24 posibles conjuntos de vectores de orientación para ser sujeta. Es la única que siempre ofrece un conjunto finito de soluciones (figura 1.12).

Figura 1.12. Cubo.

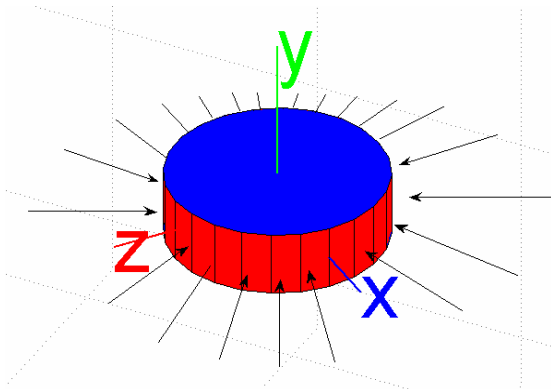


Fuente: Autor del proyecto.

- Disco

La particularidad de esta pieza radica en que se debe mantener el vector \mathbf{s} del efector paralelo a \mathbf{y} o a $-\mathbf{y}$, permitiendo variar la dirección de \mathbf{a} y por tanto de \mathbf{n} contenidos en el plano $\mathbf{z-x}$ (figura 1.13).

Figura 1.13. Disco.

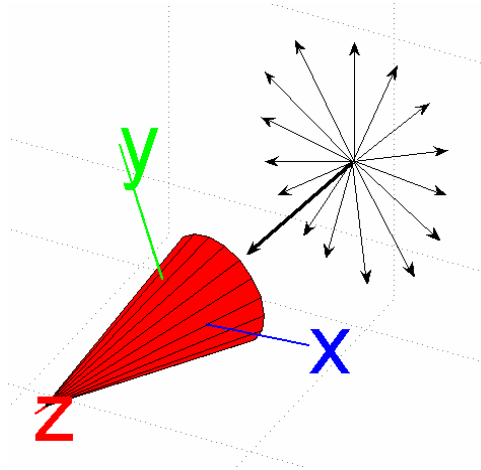


Fuente: Autor del proyecto.

- Cono

Para sujetar esta pieza se ha de mantener el vector \mathbf{a} paralelo a \mathbf{z} . Con sólo esta restricción, los vectores \mathbf{n} y \mathbf{s} pueden tener cualquier orientación en el plano \mathbf{x} - \mathbf{y} (figura 1.14).

Figura 1.14. Cono.



Fuente: Autor del proyecto.

- Orientación fija

Cuando se ha habilitado esta opción en una pieza, esta sólo puede sujetarse haciendo coincidir los vectores \mathbf{n} , \mathbf{s} , y \mathbf{a} del efector final con los correspondientes vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , y \mathbf{z} de la pieza.

En el Anexo C se muestra la obtención de las soluciones para las piezas mencionadas, para una carga con orientación fija y para el efector libre de carga.

2. MODELOS DINÁMICOS

El estudio de la dinámica se divide comúnmente en dos partes: la cinemática (estudio del movimiento del cuerpo) y la cinética (estudio del efecto de las fuerzas sobre el movimiento del cuerpo) [5].

En el modelo dinámico interviene el modelo cinemático, ya mencionado, y el modelo cinético. En este último se establecen las relaciones entre la cinemática de la cadena de eslabones y las fuerzas y/o momentos que sobre ellos actúan.

El modelo dinámico de un manipulador se puede obtener a partir de leyes físicas conocidas tales como las leyes de mecánica newtoniana y lagrangiana. Las ecuaciones resultantes se dan en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los eslabones. De las formulaciones de Lagrange-Euler y Newton-Euler se obtienen diferentes formas de describir la dinámica del manipulador con la intención de optimizar ciertos aspectos, como lo son tiempos de cálculo, análisis y síntesis de control [6].

2.1. DINÁMICA DIRECTA

En este modelo se han de determinar las variables cinemáticas a partir de los momentos aplicados en las juntas de rotación y de las fuerzas aplicadas en las juntas prismáticas. Esto es, se ha de describir el movimiento del manipulador en función del conjunto de pares y fuerzas aplicadas sobre él (figura 2.1).

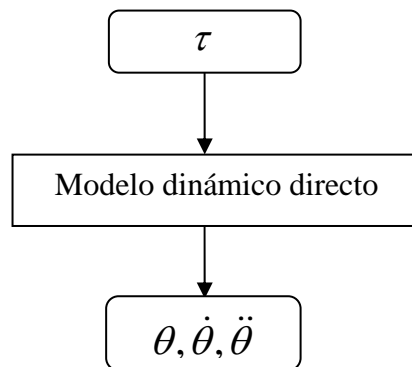
Debido a que las expresiones resultantes de la aplicación de cualquier formulación contienen términos relacionados a las posiciones angulares y sus derivadas de primer y segundo orden, y a la dificultad de obtener analíticamente el sistema de ecuaciones, la solución de este modelo se logra a

través del empleo de métodos numéricos tales como Euler o Runge-Kutta [7] o mediante el empleo de programas especializados en simulación de sistemas mecánicos.

Para manipuladores que poseen sólo juntas de rotación, las variables articulares son funciones del conjunto de pares aplicados.

$$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta} \rightarrow f(\tau) \quad (2.1)$$

Figura 2.1. Aplicación de la dinámica directa en la determinación de las variables articulares.



Fuente: Autor del proyecto.

El capítulo de análisis de resultados contiene información acerca de la implementación y uso del modelo dinámico directo.

2.2. DINÁMICA INVERSA

En este modelo se parte del conocimiento de las variables articulares en el tiempo, y a partir de ellas, mediante la selección previa de una formulación, se determinan las señales a aplicar en las juntas, fuerzas y pares [7].

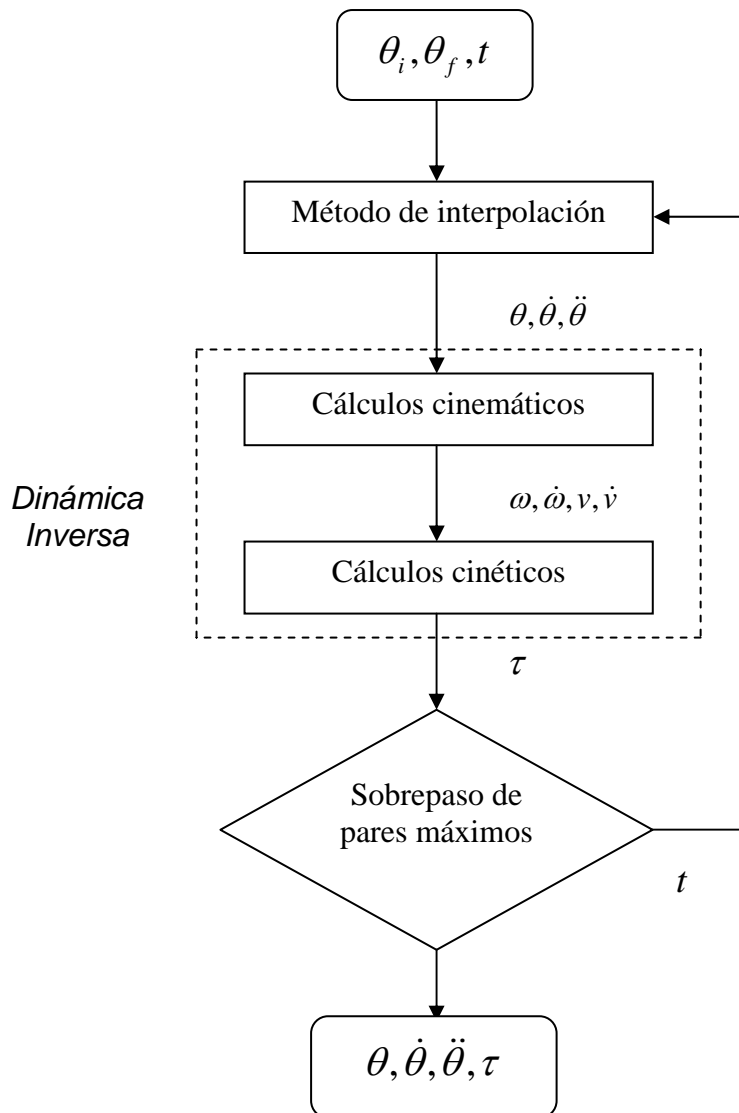
En la dinámica inversa recursiva se plantea un algoritmo compuesto por dos pasos: 1º) cálculos cinemáticos, requeridos para determinar los movimientos de

todos los eslabones, las posiciones y sus derivadas en el tiempo, y 2º) cálculos cinéticos, en los cuales se determinan las fuerzas y momentos requeridos [8].

Cuando un manipulador posee sólo juntas de rotación, las ecuaciones resultantes establecen las relaciones entre los momentos aplicados en cada una de las juntas y las variables cinemáticas (figura 2.2).

$$\tau \rightarrow f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \quad (2.2)$$

Figura 2.2. Aplicación de la dinámica inversa en la determinación de las variables articulares.



Fuente: Autor del proyecto.

El siguiente algoritmo corresponde al desarrollo iterativo de la formulación de Newton-Euler del modelo dinámico implementado en la plataforma, basado en el algoritmo indicado en [7].

Puesto que la base del manipulador es inmóvil, las variables relacionadas a esta son nulas:

$${}^0\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\dot{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\dot{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

Los valores de las variables asociadas a la séptima junta, puesto que esta permanece inmóvil con respecto a la sexta junta, son los siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_7 &= 90^\circ \\ \dot{\theta}_7 &= 0 \\ \ddot{\theta}_7 &= 0 \\ \dddot{\theta}_7 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si se está sujetando carga alguna:

- Si es un cilindro, una esfera o un disco

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si } r_{CARGA} \leq r_{EFECTOR} \\ r_{CARGA} - r_{EFECTOR}, & \text{si } r_{CARGA} > r_{EFECTOR} \end{cases} \quad (2.5)$$

$r_{CARGA} \rightarrow$ Radio de la pieza

- Si es un cubo

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si } L_{CUBO}/2 \leq r_{EFECTOR} \\ L_{CUBO}/2 - r_{EFECTOR}, & \text{si } L_{CUBO}/2 > r_{EFECTOR} \end{cases} \quad (2.6)$$

L_{CUBO} → Lado del cubo

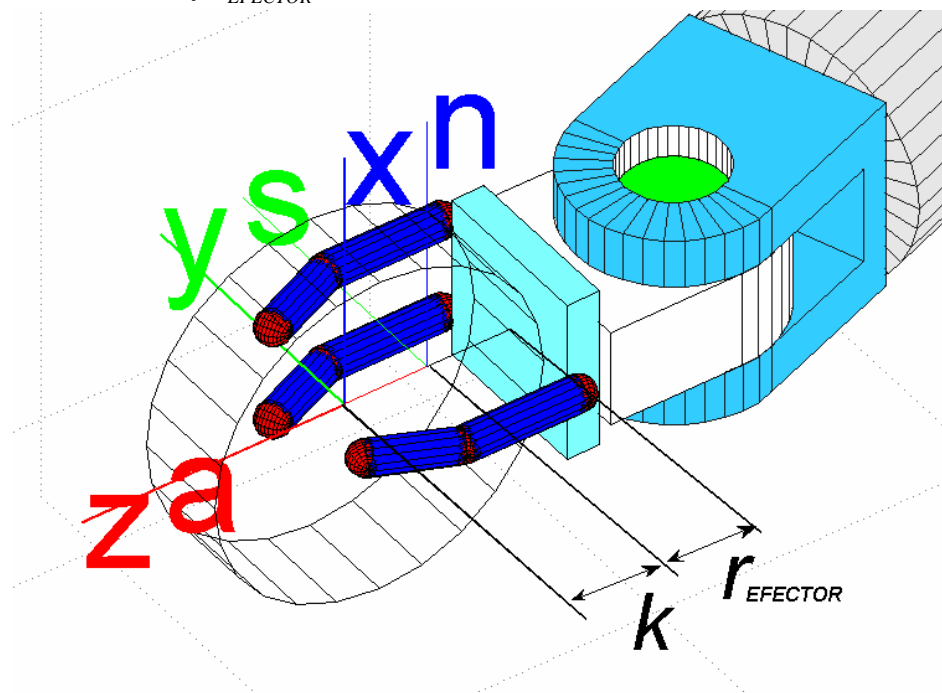
- Si es un cono

$$k = \begin{cases} 0, & \text{si } H_{CONO}/4 \leq r_{EFECTOR} \\ H_{CONO}/4 - r_{EFECTOR}, & \text{si } H_{CONO}/4 > r_{EFECTOR} \end{cases} \quad (2.7)$$

H_{CONO} → Altura del cono

Donde: $r_{EFECTOR}$ → distancia entre el punto de sujeción y la superficie del efector (palma), indicada en la figura 2.3.

Figura 2.3. Parámetros k y $r_{EFECTOR}$.



Fuente: Autor del proyecto.

Así, las propiedades del séptimo eslabón (carga sostenida) son:

$$\begin{aligned}
 m_7 &= m_{CARGA} \\
 {}^{c_7}I_7 &= {}^{c_{CARGA}}I_{CARGA} \\
 {}^7P_{C7} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si no se está sujetando carga alguna, los valores correspondientes al séptimo eslabón son:

$$\begin{aligned}
 m_7 &= 0 \\
 {}^{c_7}I_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 {}^7P_{C7} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La Gravedad en el sistema de referencia solidario a la base del manipulador es:

$${}^0G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.82 \\ 0 \end{bmatrix} [m/s^2] \tag{2.10}$$

Cálculos cinemáticos

Para $i = 0$ hasta 6,

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i R^{i+1} \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.11)$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^i R^{i+1} \dot{\omega}_i + {}^i R^{i+1} \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (2.12)$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^i R^{i+1} \left({}^i \dot{v}_i + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times \left({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} \right) \right) \quad (2.13)$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} + {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^i P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \right) \quad (2.14)$$

$${}^{i+1}G_{i+1} = {}^i R^{i+1} G_i \quad (2.15)$$

$${}^{i+1}F_{S_{i+1}} = -m_{i+1} {}^{i+1}G_{i+1} \quad (2.16)$$

$${}^{i+1}N_{S_{i+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$${}^{i+1}F_{K_{i+1}} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \quad (2.18)$$

$${}^{i+1}N_{K_{i+1}} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1} \quad (2.19)$$

Cálculos cinéticos

Debido a que la aplicación de fuerzas y/o momentos externos sobre la carga o el efector no se ha considerado en este trabajo, las variables correspondientes al séptimo eslabón se obtienen a partir de las expresiones:

$${}^7 f_{S7} = {}^7 F_{S7} \quad (2.20)$$

$${}^7 n_{S7} = {}^7 N_{S7} + {}^7 P_{C7} \times {}^7 F_{S7} \quad (2.21)$$

$${}^7 f_{K7} = {}^7 F_{K7} \quad (2.22)$$

$${}^7 n_{K7} = {}^7 N_{K7} + {}^7 P_{C7} \times {}^7 F_{K7} \quad (2.23)$$

Para $i = 6$ hasta 1,

$${}^i f_{S_i} = {}^{i+1} R^{i+1} f_{S_{i+1}} + {}^i F_{S_i} \quad (2.24)$$

$${}^i n_{S_i} = {}^i N_{S_i} + {}^{i+1} R^{i+1} n_{S_{i+1}} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_{S_i} + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1} R^{i+1} f_{S_{i+1}} \quad (2.25)$$

$${}^i f_{K_i} = {}^{i+1} R^{i+1} f_{K_{i+1}} + {}^i F_{K_i} \quad (2.26)$$

$${}^i n_{K_i} = {}^i N_{K_i} + {}^{i+1} R^{i+1} n_{K_{i+1}} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_{K_i} + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1} R^{i+1} f_{K_{i+1}} \quad (2.27)$$

$$\tau_{S_i} = {}^{i+1} n_{S_{i+1}}^T {}^i \hat{Z}_i \quad (2.28)$$

$$\tau_{K_i} = {}^{i+1} n_{K_{i+1}}^T {}^i \hat{Z}_i \quad (2.29)$$

Si el máximo valor de $|\tau_{S_i} + \tau_{K_i}|$ supera los límites establecidos (τ_{MAX}), se ha de repetir el proceso de cálculo, disminuyendo la amplitudes de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, teniendo como consecuencia el aumento del tiempo de realización del desplazamiento.

En las ecuaciones anteriores:

- ${}^i P_{i+1} \rightarrow$ vector posición del origen del eslabón $i+1$ -ésimo expresado en el sistema $\{i\}$.
- ${}^i P_{c_i} \rightarrow$ vector posición del centro de masa del eslabón i -ésimo expresado en el sistema solidario a él.
- $m_i \rightarrow$ masa del i -ésimo eslabón.
- ${}^{C_i} I_i \rightarrow$ tensor de inercia correspondiente al centro de masa del eslabón i -ésimo.
- ${}^i \omega_i \rightarrow$ velocidad angular del eslabón i -ésimo expresado en el sistema $\{i\}$.
- ${}^i \dot{\omega}_i \rightarrow$ aceleración angular del eslabón i -ésimo expresado en $\{i\}$.
- ${}^i v_i \rightarrow$ velocidad lineal del origen del sistema $\{i\}$.

- ${}^i \dot{V}_i \rightarrow$ aceleración lineal del origen del sistema $\{i\}$.
- ${}^i v_{ci} \rightarrow$ velocidad lineal del centro de masa del eslabón i -ésimo expresado en $\{i\}$.
- ${}^i \dot{v}_{ci} \rightarrow$ aceleración lineal del centro de masa del eslabón i -ésimo expresado en $\{i\}$.
- ${}^i G_i \rightarrow$ vector gravedad en el sistema $\{i\}$.
- ${}^i F_{Ki} \rightarrow$ fuerza neta que actúa sobre el i -ésimo eslabón.
- ${}^i F_{Si} \rightarrow$ fuerza relacionada al peso del i -ésimo eslabón.
- ${}^i N_{Ki} \rightarrow$ momento neto que actúa sobre el i -ésimo eslabón.
- ${}^i N_{Si} \rightarrow$ momento relacionado al peso del i -ésimo eslabón. Al realizar el equilibrio de momentos en el centro de masa, este término se hace nulo.
- ${}^i f_{Ki} \rightarrow$ fuerza de reacción en el origen del sistema $\{i\}$, dependiente de las fuerzas y momentos netos en los eslabones.
- ${}^i f_{Si} \rightarrow$ fuerza de reacción en el origen del sistema $\{i\}$, dependiente del peso de los eslabones.
- ${}^i n_{Ki} \rightarrow$ momento de reacción en el origen del sistema $\{i\}$, dependiente de las fuerzas y momentos netos en los eslabones y por tanto de las posiciones angulares y sus derivadas de primer y segundo orden ($g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$).
- ${}^i n_{Si} \rightarrow$ momento de reacción en el origen del sistema $\{i\}$, dependiente del peso de los eslabones y por tanto de las posiciones angulares ($f(\theta)$).

$\tau_{Ki} \rightarrow$ componente del momento aplicado sobre el eje \mathbf{z} del sistema $\{i\}$, dependiente de las posiciones angulares y sus derivadas de primer y segundo orden ($g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$).

$\tau_{Si} \rightarrow$ componente del momento aplicado sobre el eje \mathbf{z} del sistema $\{i\}$, dependiente de sólo las posiciones angulares ($f(\theta)$).

Como se apreciará en el capítulo de generación de trayectorias, es de gran utilidad la separación de los momentos, aplicados en las juntas, en dos términos:

$$\tau_T = \tau_S + \tau_K \quad (2.30)$$

$$\tau_S \rightarrow f(q) \quad (2.31)$$

$$\tau_K \rightarrow g(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \quad (2.32)$$

3. GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

Describiendo la posición y orientación del efector final se definen las trayectorias a seguir. También es posible designar el tiempo para la ejecución de cada trayectoria. El movimiento del manipulador se ha de realizar en el menor tiempo posible cuando no se ha designado el tiempo de ejecución o cuando no se logra cumplir con el tiempo definido.

En esencia, se cuenta con dos formas básicas para especificar el movimiento del manipulador. Estas son:

- Operaciones punto a punto.
- Operaciones de caminos continuos.

3.1. OPERACIONES PUNTO A PUNTO

En este tipo de especificación de movimiento se emplean métodos de interpolación en el espacio de juntas para generar las trayectorias entre los puntos suministrados. La trayectoria en el espacio cartesiano descrita por el efector final del manipulador resulta imprevisible si los puntos consecutivos se encuentran muy distanciados [7].

El algoritmo de aplicación de un método de interpolación al desarrollo de trayectorias punto a punto consta de los pasos:

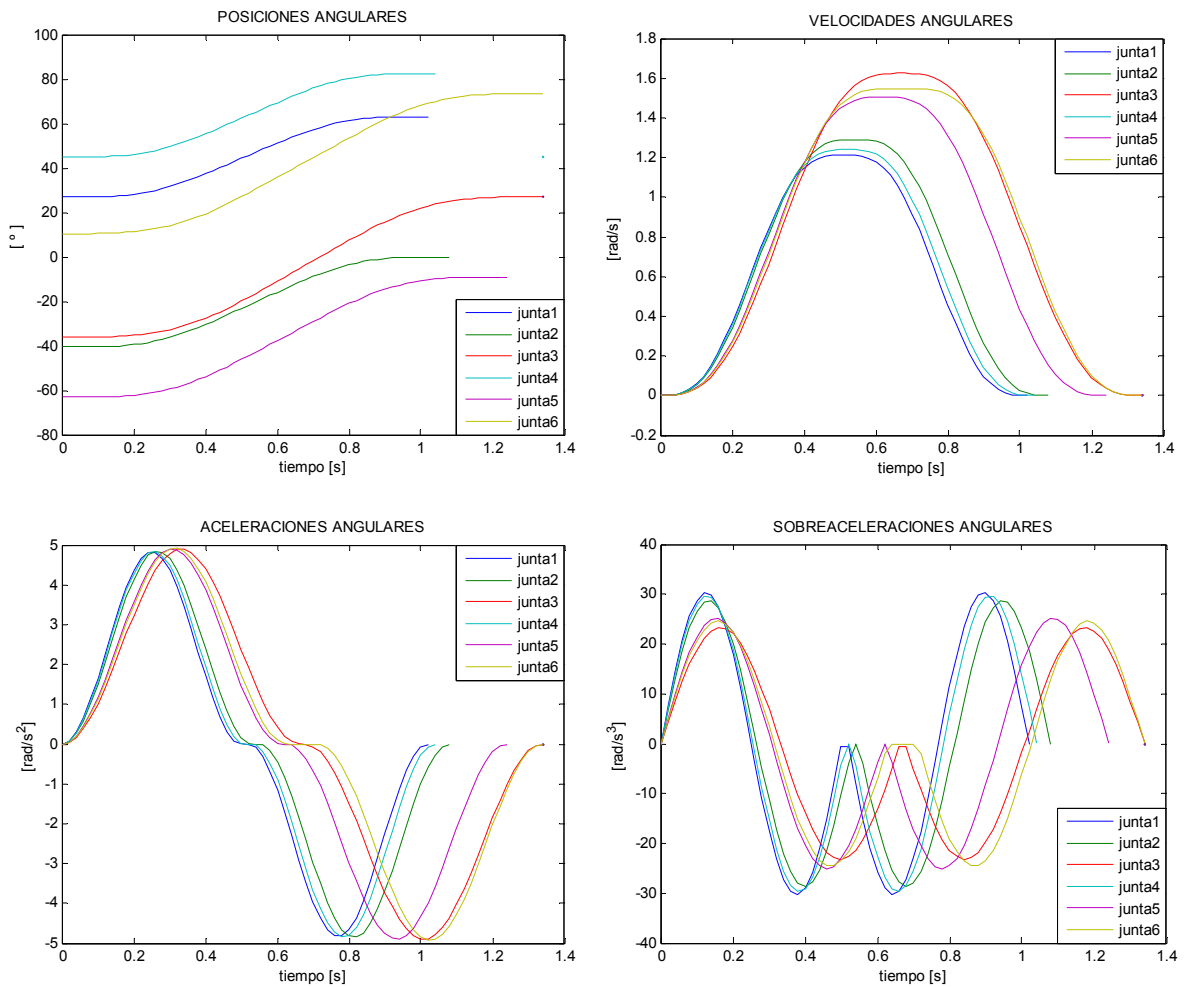
1. Obtención de los tiempos mínimos para cada junta, establecimiento del máximo de ellos y comparación de este con el tiempo definido, si se ha precisado para el movimiento.

$$T = \text{máximo}(T_{\text{definido}}, T_{\text{junta1}}, \dots, T_{\text{junta6}}) \quad (3.1)$$

2. Cálculo de las señales de posición, velocidad, aceleración y sobreaceleración relativas con valores de cero en velocidades iniciales y finales.

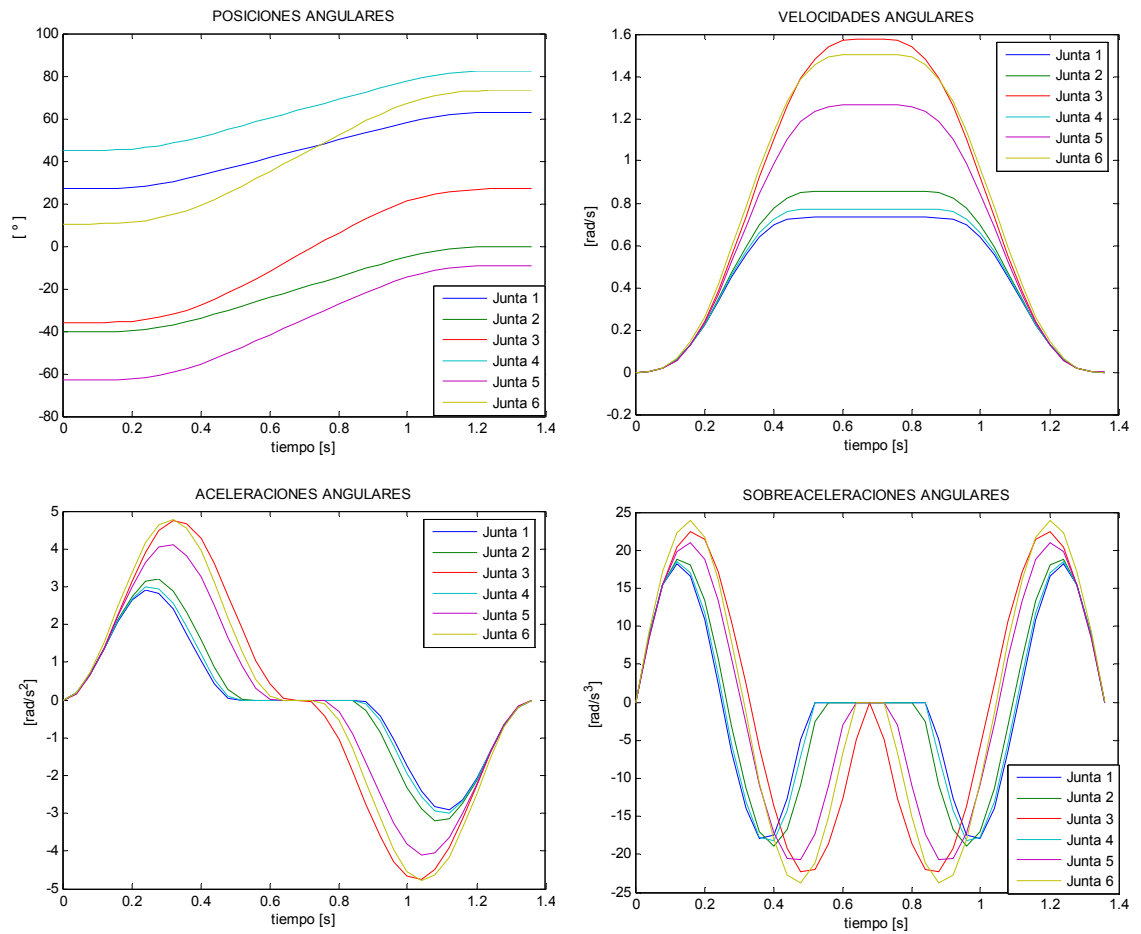
Al sincronizar los movimientos de las juntas decrecen las amplitudes de las señales de velocidad, aceleración y sobreaceleración, reduciendo a su vez los picos en las curvas de τ_k y por tanto reduciendo las posibilidades de presentarse sobrepasos de los pares máximos posibles (figuras 3.1 y 3.2).

Figura 3.1. Curvas cinemáticas no sincronizadas.



Fuente: Autor del proyecto.

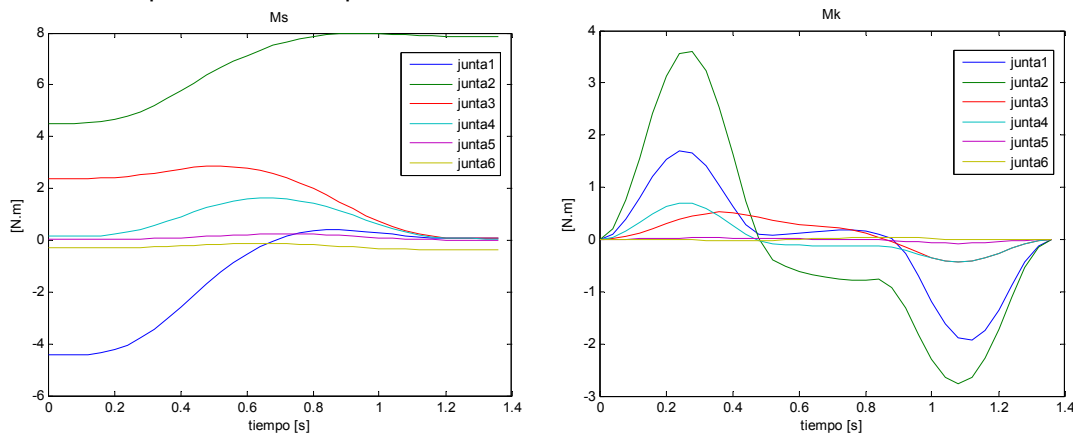
Figura 3.2. Curvas cinemáticas sincronizadas.



Fuente: Autor del proyecto.

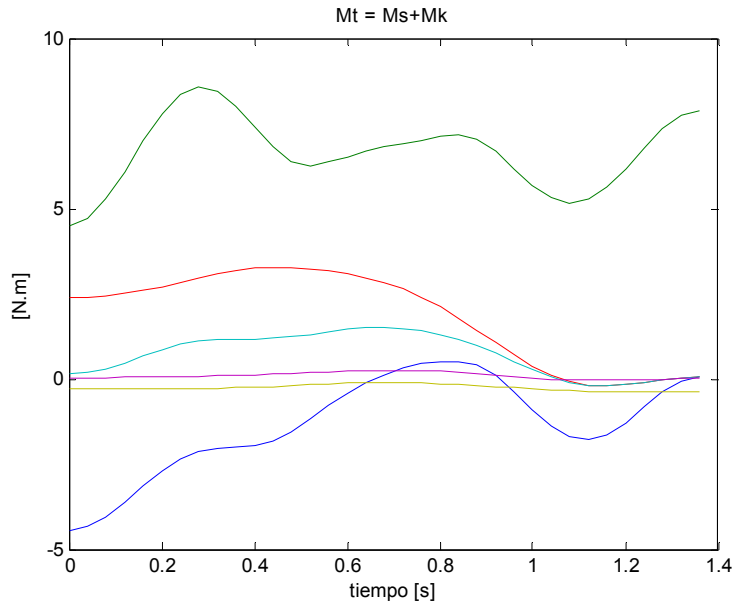
3. Cómputo de momentos (τ) en sus dos componentes (τ_S, τ_K) (figuras 3.3 y 3.4). Esto se logra empleando el modelo dinámico inverso.

Figura 3.3. Componentes de los pares calculados.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura 3.4. Pares calculados.

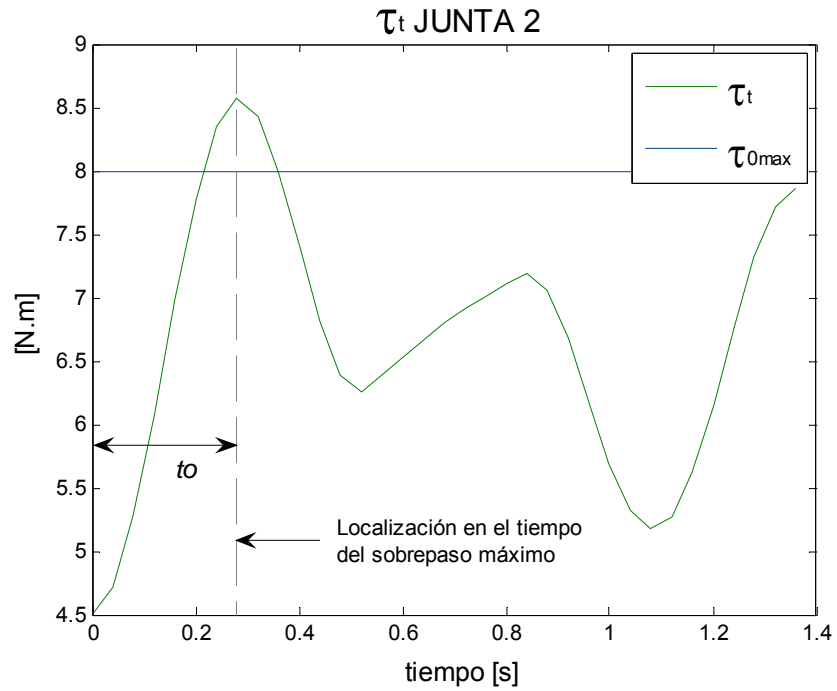


Fuente: Autor del proyecto.

4. Revisión de sobrepasos de los máximos momentos posibles (τ_{0max}) a aplicar en las juntas. Si la componente τ_S sobrepasa los máximos en una o mas juntas, se ha de informar sobre esto, pues no será realizable esta trayectoria, y avanzar al próximo paso. Si $\tau_T = \tau_S + \tau_K$ sobrepasa a τ_{0max} se ha de determinar para cada una de las juntas en que se presenten sobrepasos el máximo sobrepaso ($|\tau_T|_{max} = |\tau_T(t_o)|$) y el factor empleado en el establecimiento del incremento en el tiempo de ejecución del desplazamiento expresado en (3.2) (figuras 3.5 y 3.6).

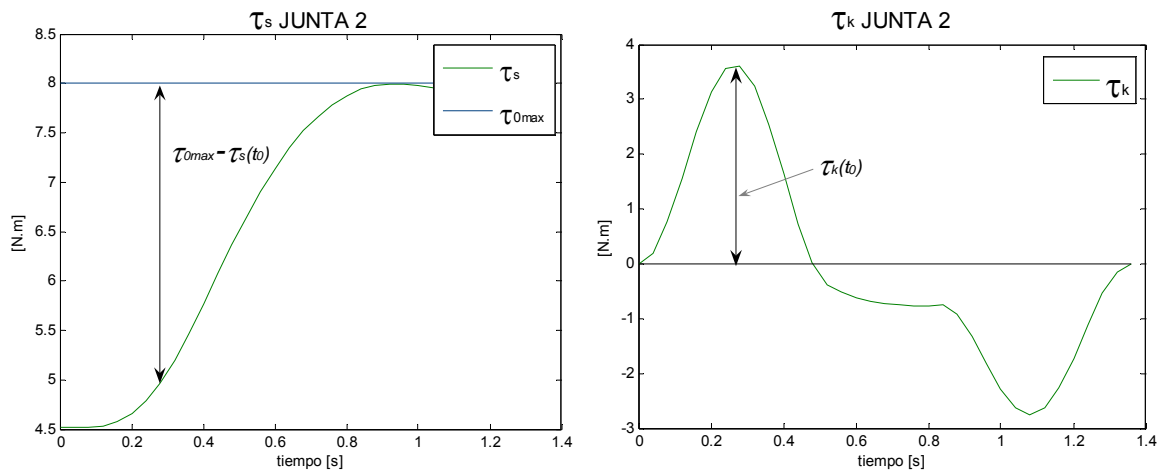
$$k_{\Delta T} = \left(\frac{|\tau_K(t_o)|}{\tau_{0max} - |\tau_S(t_o)|} - 1 \right) \quad (3.2)$$

Figura 3.5. Localización del sobrepaso máximo.



Fuente: Autor del proyecto.

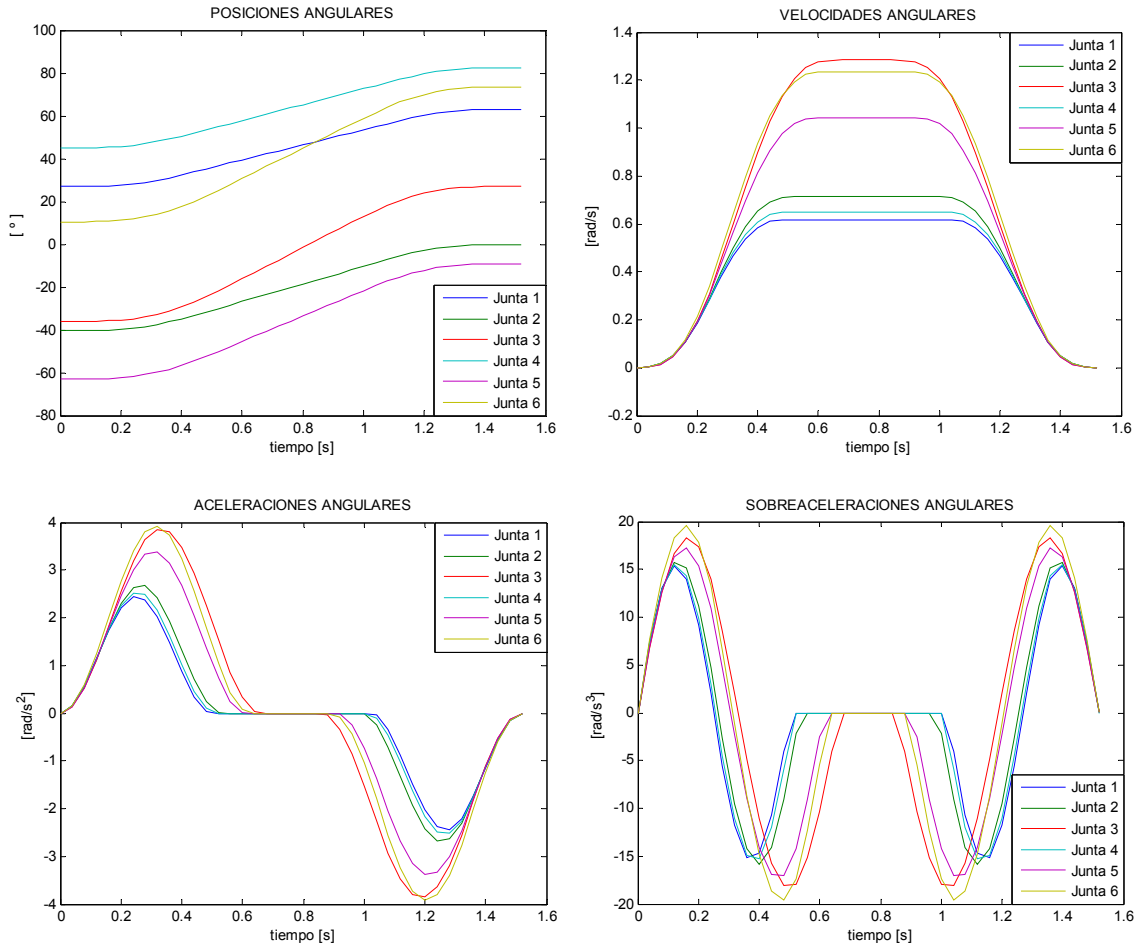
Figura 3.6. Determinación del factor de incremento.



Fuente: Autor del proyecto.

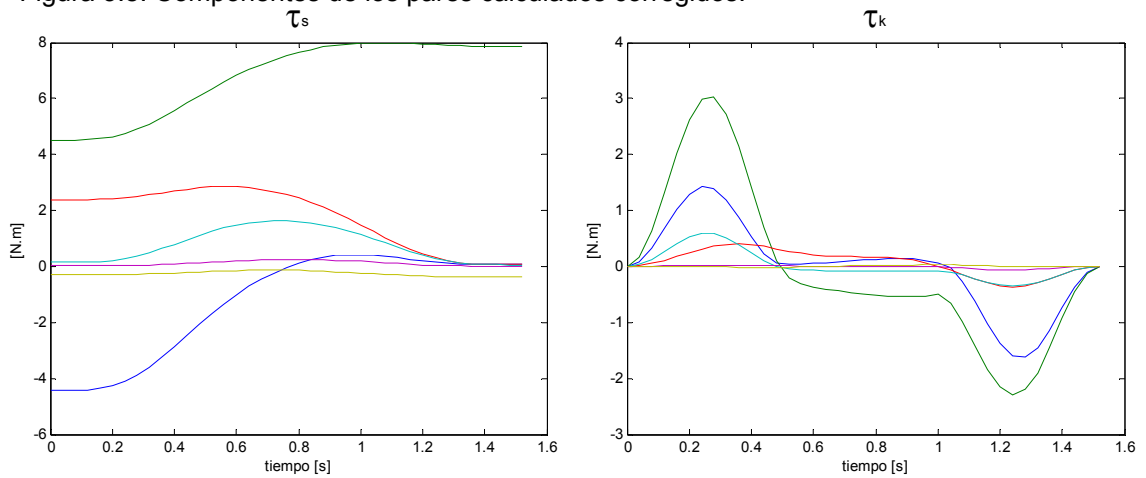
A partir del nuevo tiempo, determinado utilizando el valor de $k_{\Delta T}$, se repite el procedimiento desde del segundo paso (figura 3.7). Si no existen sobrepasos de $\tau_T = \tau_S + \tau_K$ se dan por terminadas las operaciones (figuras 3.8 y 3.9).

Figura 3.7. Señales obtenidas tras el incremento en el tiempo debido al sobrepaso de momentos (para las curvas mostradas de 1.36 a 1.52 segundos).



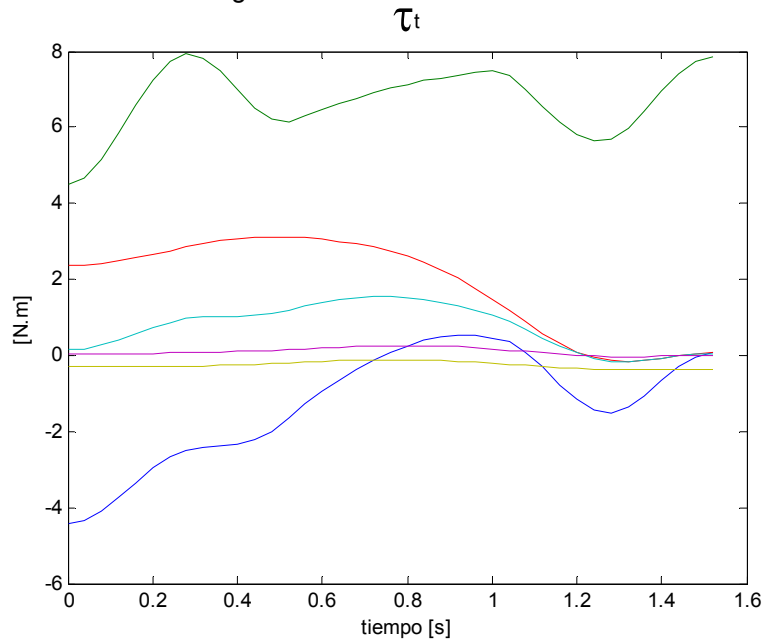
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 3.8. Componentes de los pares calculados corregidos.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura 3.9. Pares calculados corregidos.



Fuente: Autor del proyecto.

3.2. CAMINOS CONTINUOS

Este tipo de operación corresponde al planeamiento de trayectorias en el espacio cartesiano. Dado que en robots manipuladores el control se efectúa sobre las variables de junta, estas variables se han de obtener a partir de las variables relacionadas con el efector a lo largo de la trayectoria.

Es posible generar una trayectoria que cumpla con un margen de error o tolerancia con respecto a la trayectoria deseada, empleando para ello un conjunto de puntos de paso, obtenidos con base en un criterio de espaciamiento, interpolados en el espacio de juntas.

El procedimiento de generación de trayectorias especificadas en el espacio cartesiano que se ha implementado consta de las etapas: I) identificación de las trayectorias, II) determinación de puntos de paso en cada segmento de trayectoria.

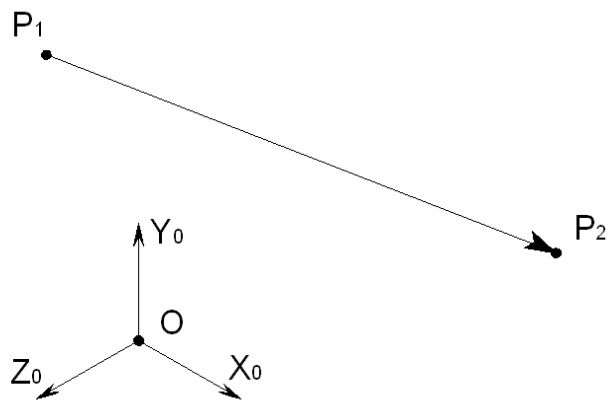
l) Identificación de las trayectorias

Una trayectoria definida a través de n poses se divide en $n-1$ segmentos. Las trayectorias contempladas en este trabajo son:

- Línea recta

Esta trayectoria se define a través de dos poses del manipulador (puntos), por tanto posee sólo un segmento (figura 3.10).

Figura 3.10. Línea recta



Fuente: Autor del proyecto.

- Segmento circular

Esta trayectoria es definida al suministrar tres poses del manipulador, obteniendo así dos segmentos (figura 3.11). Las tres posiciones del efector final se emplean para establecer el centro del círculo, punto requerido para determinar los puntos de paso.

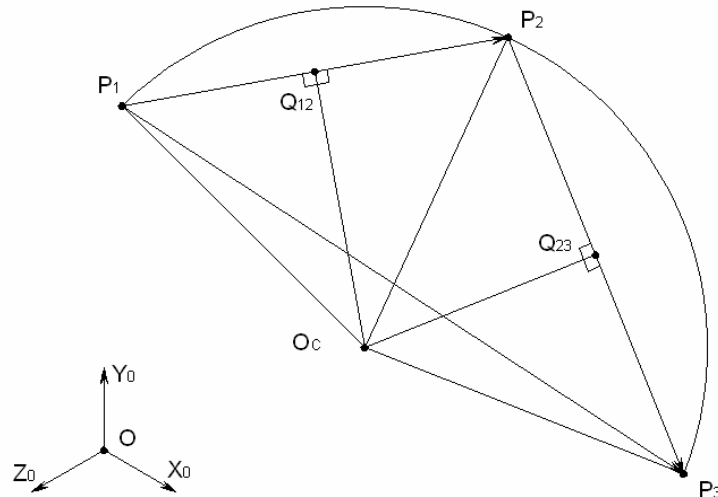
Definanse los vectores:

$$n = \frac{P_{12} \times P_{23}}{|P_{12} \times P_{23}|} \quad (3.3)$$

$$Q_{12} = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (3.4)$$

$$Q_{23} = \frac{P_2 + P_3}{2} \quad (3.5)$$

Figura 3.11. Segmento circular



Fuente: Autor del proyecto.

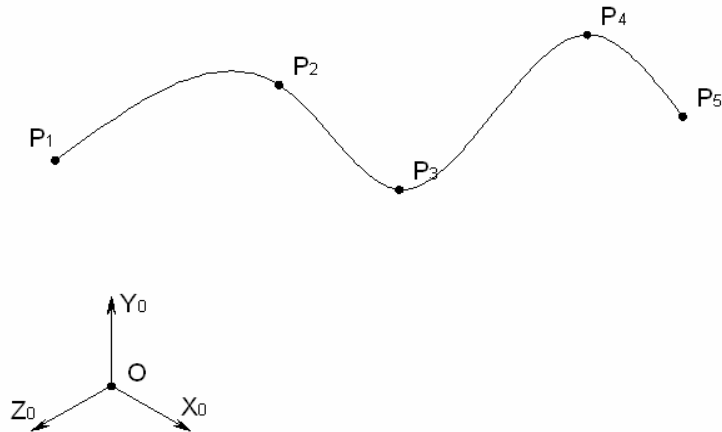
El centro de curvatura $O_C = [x_{Oc} \quad y_{Oc} \quad z_{Oc}]^T$ se encuentra al solucionar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} O_C Q_{12} \cdot P_{12} \\ O_C Q_{23} \cdot P_{23} \\ n \cdot O_C P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{12}^T \\ P_{23}^T \\ n^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{Oc} \\ y_{Oc} \\ z_{Oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OQ_{12} \cdot P_{12} \\ OQ_{23} \cdot P_{23} \\ n \cdot P_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

– Spline cúbica

Esta trayectoria requiere por lo menos tres poses del manipulador para su establecimiento (figura 3.12).

Figura 3.12. Spline cúbica



Fuente: Autor del proyecto.

Para cada segmento de trayectoria (curva entre dos poses consecutivas) se han de establecer los coeficientes correspondientes. A partir de éstos se puede precisar cualquier punto sobre la curva entre las poses $k-1$ -ésima y k -ésima:

$$P = \begin{bmatrix} a_{x,k-1,k} \lambda^3 + b_{x,k-1,k} \lambda^2 + c_{x,k-1,k} \lambda + d_{x,k-1,k} \\ a_{y,k-1,k} \lambda^3 + b_{y,k-1,k} \lambda^2 + c_{y,k-1,k} \lambda + d_{y,k-1,k} \\ a_{z,k-1,k} \lambda^3 + b_{z,k-1,k} \lambda^2 + c_{z,k-1,k} \lambda + d_{z,k-1,k} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.7)$$

II) Determinación de puntos de paso en cada segmento de trayectoria

Para la obtención del conjunto de poses o puntos de paso que genere una curva aproximada a cada segmento de trayectoria, delimitado por las poses consecutivas del manipulador y cumpliendo con la tolerancia especificada, se aplica el siguiente procedimiento.

1. Determinación del número inicial de puntos de paso y generación de estos. A través de la siguiente heurística se especifica la cantidad inicial de puntos de paso:

$$\text{N}^\circ \text{ puntos de paso } (n_{pp}) = \left\| \frac{\text{longitud curva [cm]}}{10 \text{ cm}} \right\| \quad (3.8)$$

Haciendo uso de un criterio de espaciado se determina el valor del factor de espaciado necesario en la consecución de los puntos de paso de la trayectoria. Posteriormente, los puntos encontrados se llevan al espacio de juntas, empleando para ello la cinemática inversa del manipulador.

El factor de espaciado (r) o de distanciamiento entre puntos de paso toma valores mayores que cero y menores que uno, esto es $0 < r < 1$.

En las siguientes ecuaciones se manejan los términos:

L → longitud de la trayectoria deseada.

Pp_k → k -ésimo punto de paso.

$r(k)$ → factor de espaciado para el k -ésimo punto de paso.

Línea recta

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) indican como se determinan la longitud de la recta y los puntos de paso sobre ésta.

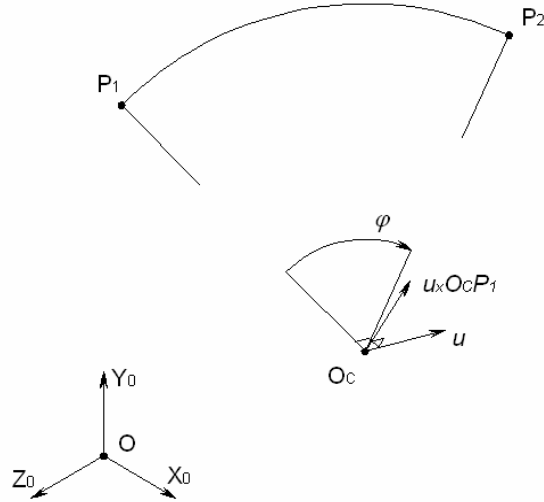
$$L = |P_2 - P_1| \quad (3.9)$$

$$Pp_k = P_1 + r(k) \cdot (P_2 - P_1) \quad (3.10)$$

Segmento circular

Para determinar el arco comprendido entre las dos poses (figura 3.13) y los puntos de paso sobre el segmento circular se define el vector unitario indicado en (3.11).

Figura 3.13. Vectores requeridos en la determinación del conjunto de puntos de paso iniciales para un segmento circular.



Fuente: Autor del proyecto.

$$u = \frac{O_c P_1 \times O_c P_2}{|O_c P_1 \times O_c P_2|} \quad (3.11)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{O_c P_2 \cdot (u \times O_c P_1)}{O_c P_2 \cdot O_c P_1} \right) \quad (3.12)$$

$$R = |O_c P_1| \quad (3.13)$$

$$L = R \cdot |\varphi| \quad (3.14)$$

$$Pp_k = O_c + \text{sen}(r(k) \cdot \varphi) \cdot (u \times O_c P_1) + \text{cos}(r(k) \cdot \varphi) \cdot O_c P_1 \quad (3.15)$$

Spline cúbica

La longitud del segmento de trayectoria se determina de forma aproximada, como la suma de distancias entre puntos consecutivos:

$$L = \sum_{i=1}^n |Pa_i - Pa_{i-1}| \quad (3.16)$$

$$\lambda_i = \frac{i}{n} \quad (3.17)$$

$$Pa_i = \begin{bmatrix} a_x \lambda_i^3 + b_x \lambda_i^2 + c_x \lambda_i + d_x \\ a_y \lambda_i^3 + b_y \lambda_i^2 + c_y \lambda_i + d_y \\ a_z \lambda_i^3 + b_z \lambda_i^2 + c_z \lambda_i + d_z \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

En la determinación de los puntos de paso se emplean los coeficientes propios del segmento de trayectoria hallados con anterioridad:

$$Pp_k = \begin{bmatrix} a_x r(k)^3 + b_x r(k)^2 + c_x r(k) + d_x \\ a_y r(k)^3 + b_y r(k)^2 + c_y r(k) + d_y \\ a_z r(k)^3 + b_z r(k)^2 + c_z r(k) + d_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

2. Obtención de los tiempos mínimos para los desplazamientos entre puntos consecutivos inicial, de paso y final, del segmento de trayectoria, con condiciones iniciales y finales de velocidad nulas, comparando la suma de estos tiempos con el tiempo precisado para el segmento.

Defínase la variable auxiliar:

$$T_{aux} = \sum_{i=1}^{n_{pp}+1} T_i \quad (3.20)$$

Si $T_{aux} < T_0$ se procede a escalar los tiempos, así para $i=1, \dots, n_{pp}+1$ se hace:

$$T_i = T_i \cdot \frac{T_0}{T_{aux}} \quad (3.21)$$

3. Asignación de las velocidades en los puntos de paso.

La pendiente $(\dot{\theta}_i)$ en el punto θ_i se determina de la forma:

Para $i=1$, e $i=n=n_{pp}+2$ (puntos inicial y final)

$$\Rightarrow \dot{\theta}_i = 0$$

Para $1 < i < n$

- si $\text{signo}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \text{signo}(\theta_{i+1} - \theta_i)$

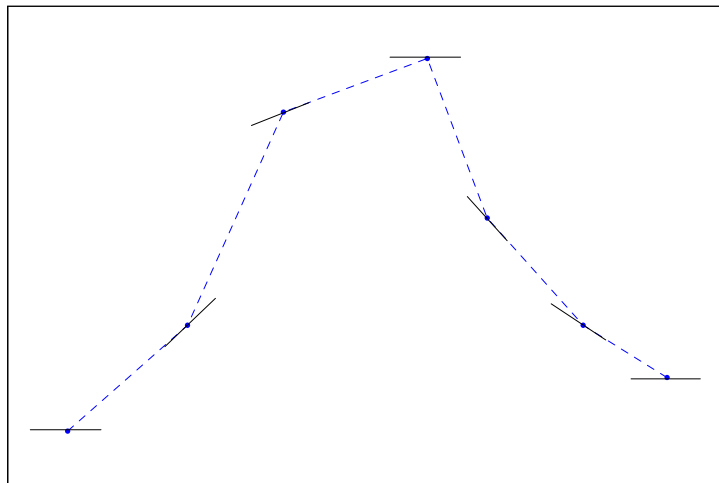
$$\Rightarrow \dot{\theta}_i = \min\left(\left|\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{T_i}\right|, \left|\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{T_{i+1}}\right|\right) \cdot \text{signo}(\theta_i - \theta_{i-1}) \quad (3.22)$$

- en caso contrario, es decir, si $\text{signo}(\theta_i - \theta_{i-1}) \neq \text{signo}(\theta_{i+1} - \theta_i)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_i = 0$$

El resultado de este procedimiento se ilustra en la figura 3.14.

Figura 3.14. Pendientes en puntos de paso.



Fuente: Autor del proyecto.

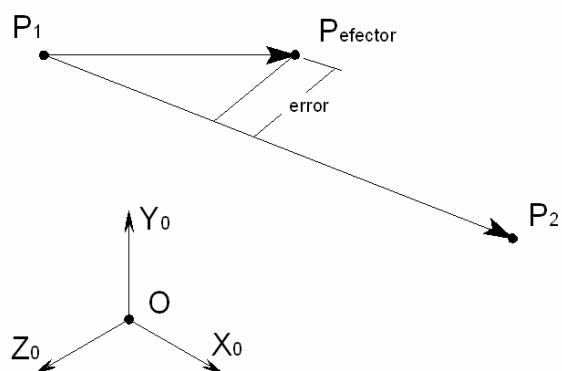
Si $T_{aux} > T_0$ en el paso anterior y si se presenta un cambio significativo en el tiempo calculado T_{aux} cuando éste se ha determinado en mas de una ocasión, se ejecuta nuevamente el segundo paso con las velocidades determinadas y no nulas como se indica en su enunciado.

4. Obtención de las señales de posición, velocidad, aceleración y sobreaceleración de las juntas aplicando el método de interpolación preseleccionado, utilizando las velocidades determinadas anteriormente en los puntos de paso.
5. Estimación del error de posición del efector final en todos los tramos que conforman el segmento de trayectoria. Los tramos de curva en los cuales se supere la tasa de error admitida serán divididos agregando en cada uno de ellos un punto de paso según el criterio de espaciamiento establecido; ocurriendo esto y si no se presentan puntos de paso inalcanzables se ha de retornar al segundo paso.

Línea recta

El error de posición del efector final corresponde a la magnitud de la componente perpendicular a la recta, del vector que va desde el punto inicial de la recta hasta el efector final (figura 3.15).

Figura 3.15. Error en una recta.



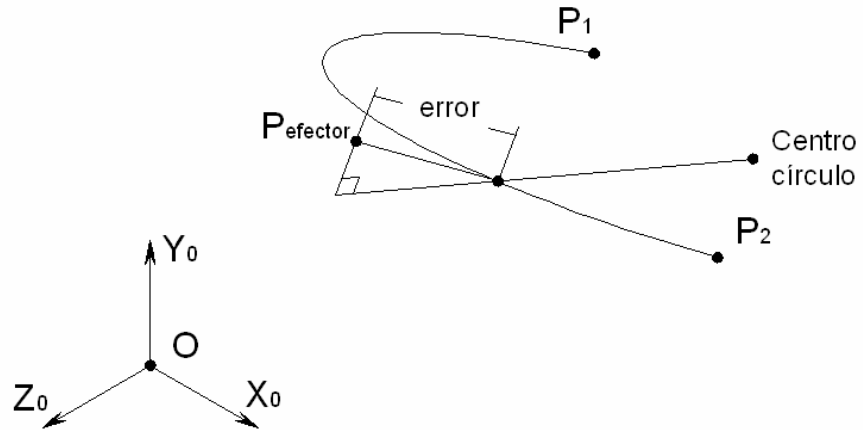
Fuente: Autor del proyecto.

Segmento circular

En esta trayectoria el error de posición del efector final se estima como la distancia entre el efector y el punto de intersección del círculo y la

proyección del vector que va desde el centro del círculo hasta el efector (figura 3.16).

Figura 3.16. Error en un segmento circular.

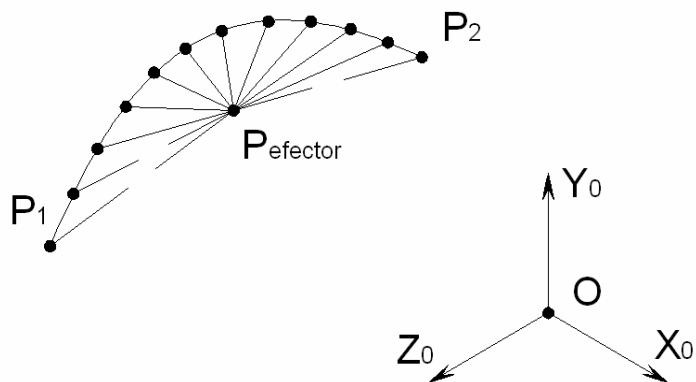


Fuente: Autor del proyecto.

Spline cúbica

El error en esta trayectoria se define como la menor distancia medida entre la posición del efector y un conjunto de puntos sobre la curva (figura 3.17).

Figura 3.17. Error en un spline cúbica.



Fuente: Autor del proyecto.

6. Cálculo de pares en sus dos componentes (τ_S , τ_K) y revisión de sobrepasos de los máximos momentos posibles (τ_{0max}) a aplicar en las juntas. Si τ_S sobrepasa los máximos en una o mas juntas, se ha de informar sobre esto, pues no será realizable esta trayectoria, y avanzar al próximo paso. Si $\tau_T = \tau_S + \tau_K$ sobrepasa a τ_{0max} se ha de determinar el máximo sobrepaso ($|\tau_T|_{max} = |\tau_T(t_o)|$) y, para cada una de las juntas en que se presenten sobrepasos, el factor $k_{\Delta T}$ expresado en (3.2) empleado por el método de interpolación preseleccionado en el establecimiento del incremento en el tiempo de ejecución del desplazamiento. A partir de este nuevo tiempo se determinan las velocidades en los puntos de paso nuevamente y se repite el procedimiento a partir del cuarto paso. Si no existen sobrepasos de $\tau_T = \tau_S + \tau_K$ se dan por terminadas las operaciones para el segmento de trayectoria analizado.

3.3. CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO

Al aproximar una trayectoria interpolada a una trayectoria continua en el espacio cartesiano se presentan los cuestionamientos acerca de la cantidad de puntos y la distribución de estos sobre la trayectoria deseada. En *camino continuo* se ha dado el procedimiento de obtención de los puntos de paso necesarios para satisfacer las restricciones impuestas, partiendo de un criterio de distribución para los puntos de paso.

Sea n_{pp} el número de puntos de paso, para determinar el k -ésimo punto de paso se ha de determinar el factor de espaciamiento correspondiente al valor de k , con $k = 1, 2, \dots, n_{pp}$, según el criterio elegido.

Al presentarse sobrepasos del error máximo estipulado se debe aumentar el número de pasos. Una forma para lograr esto consiste en generar nuevamente la totalidad de los puntos de paso. Otra forma más eficiente consiste en

adicionar puntos de paso a los ya existentes solamente en aquellos tramos en los que se han presentado los sobrepasos del error; para generar estos puntos de paso se requiere definir una variable que contenga la posición de cada punto dentro del número inicial de puntos, esta variable se define inicialmente así:

$$w = [0, 1, 2, \dots, n_{pp}, n_{pp} + 1]$$

La existencia de n_{pp} puntos de paso produce $n_{pp} + 1$ tramos de curva. Al presentarse sobrepasos en los tramos i, j , con $i < j$, se han de agregar puntos de paso en los tramos indicados según se indica a continuación:

Sea n el número de elementos de w

Para m desde n hasta j , (paso -1) se hace: $w(m+1) = w(m)$

Luego se calcula: $w(j) = \frac{w(j) + w(j-1)}{2}$ y $n = n + 1$

El nuevo punto de paso se determina a partir del factor de espaciamiento calculado para $w(j)$, esto es para $r(w(j))$

Para m desde n hasta i , (paso -1) se hace: $w(m+1) = w(m)$

Luego se calcula: $w(i) = \frac{w(i) + w(i-1)}{2}$ y $n = n + 1$

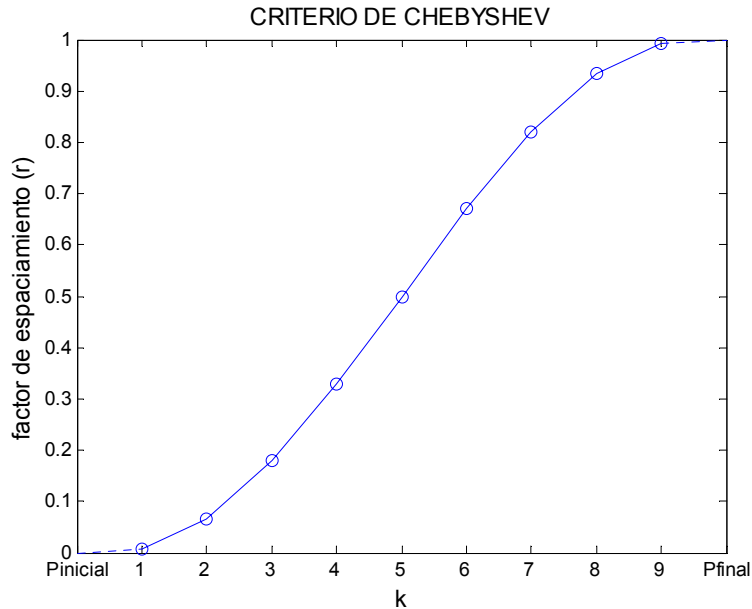
El nuevo punto de paso se determina para $r(w(i))$

3.3.1. Criterio de Chebyshev

El factor de espaciamiento para este criterio mencionado en [4] se determina en (3.23) (figura 3.18).

$$r(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \cdot (2k - 1)}{2n_{pp}} \right) \right) \quad (3.23)$$

Figura 3.18. Espaciamento de Chebyshev.



Fuente: Autor del proyecto.

3.3.2. Criterio cosenoidal

En este criterio para calcular el factor de espaciamento se ha de determinar con anterioridad un coeficiente y analizar una condición según se expresa en (3.24, 3.25 y 3.26). En la figura 3.19 se ilustra el factor de espaciamento para este criterio.

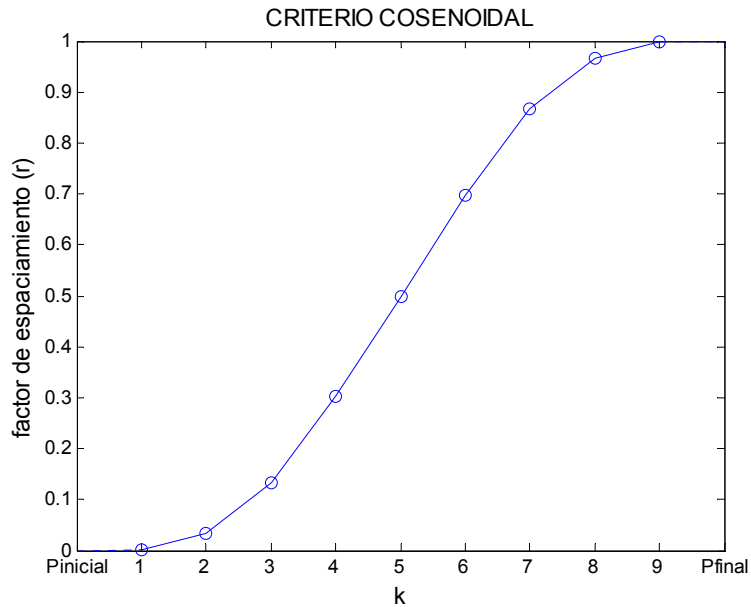
$$m = \frac{2k}{n_{pp} + 1} \quad (3.24)$$

Si $m \leq 1$,

$$r(k) = \frac{1}{2} m^2 + \frac{\cos(2\pi \cdot m) - 1}{(2\pi)^2} \quad (3.25)$$

$$\text{Si } m > 1, \quad r(k) = -\frac{1}{2}(m-1)^2 - \frac{\cos(2\pi \cdot (m-1)) - 1}{(2\pi)^2} + m - \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

Figura 3.19. Espaciamiento cosenoidal.



Fuente: Autor del proyecto.

3.3.3. Criterio rectangular

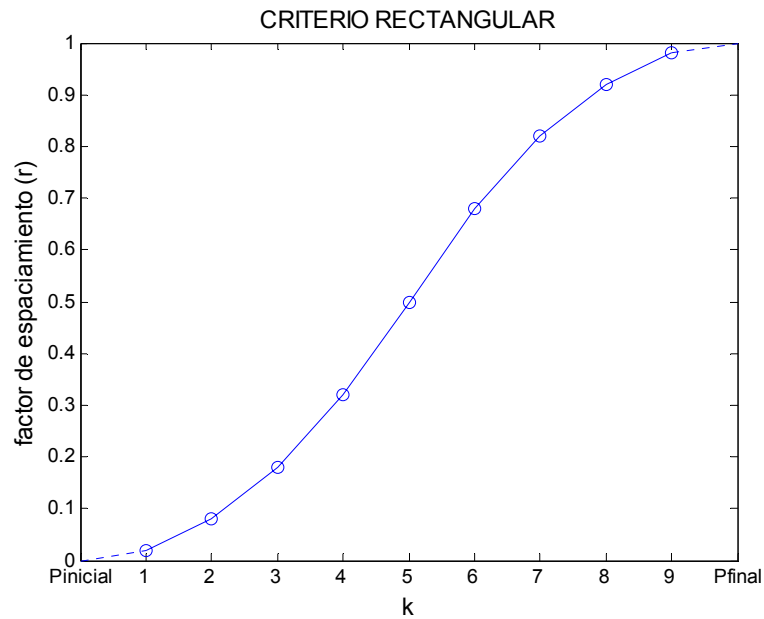
De igual forma que en el anterior criterio, en las ecuaciones (3.27, 3.28 y 3.29) se determina en primera instancia un coeficiente y se analiza su valor para obtener el factor de espaciamiento, factor ilustrado en la figura 3.20.

$$m = \frac{2k}{n_{pp} + 1} \quad (3.27)$$

$$\text{Si } m \leq 1, \quad r(k) = \frac{1}{2}m^2 \quad (3.28)$$

$$\text{Si } m > 1, \quad r(k) = -\frac{1}{2}(m-1)^2 + m - \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Figura 3.20. Espaciamiento rectangular.



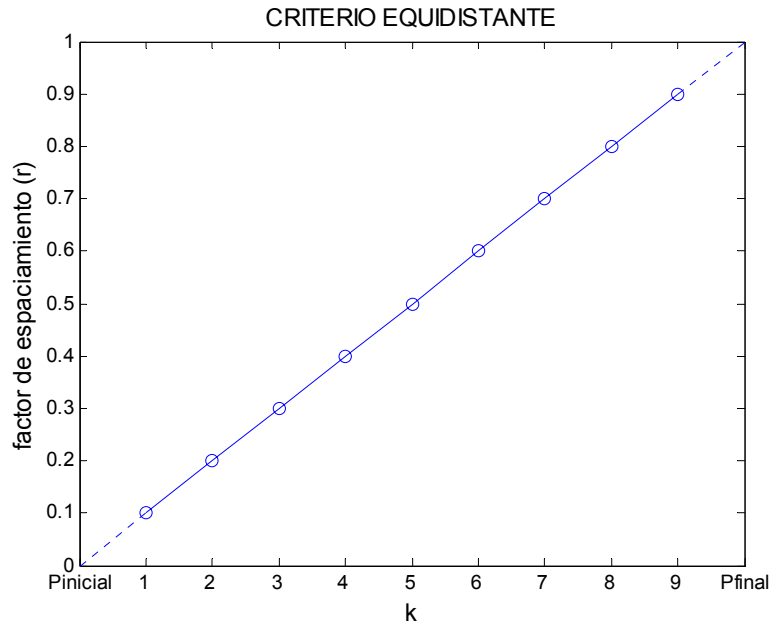
Fuente: Autor del proyecto.

3.3.4. Criterio equidistante

Como lo indica su denominación, este criterio ofrece un conjunto de puntos de paso equidistantes a lo largo de la trayectoria deseada (figura 3.21). El factor de espaciamiento se calcula según la expresión:

$$r(k) = \frac{k}{n_{pp} + 1} \quad (3.30)$$

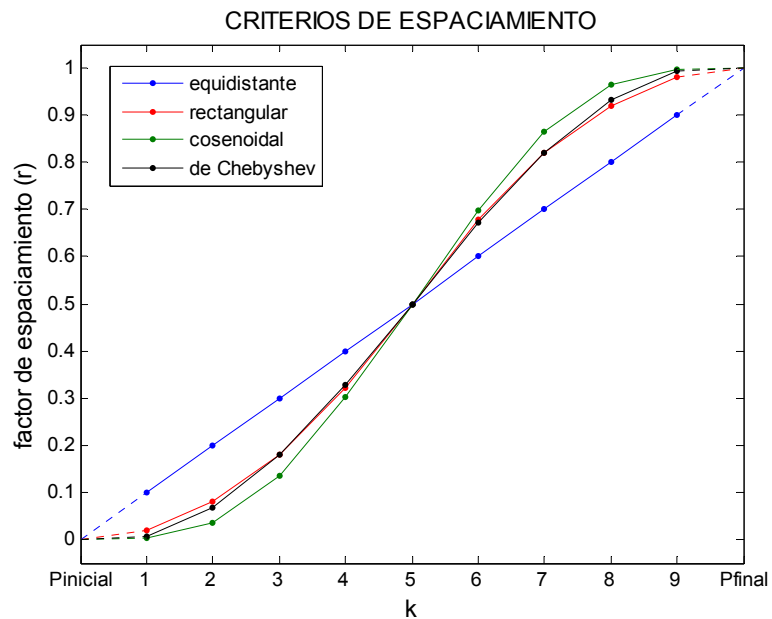
Figura 3.21. Espaciamento equidistante.



Fuente: Autor del proyecto.

Los criterios de espaciamento cosenoidal y rectangular se han propuesto como alternativas de un tema poco mencionado en la literatura. En el quinto capítulo se contrastan estos criterios junto al equidistante y al de Chebyshev (figura 3.22).

Figura 3.22. Criterios de espaciamento.



Fuente: Autor del proyecto.

4. MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN DE TAREAS

La programación empleada en Robótica puede tener un carácter explícito, siendo el operador el responsable de las acciones de control y de las instrucciones adecuadas que las implementan, o estar basada en el modelado del mundo exterior, cuando se describen la tarea y el entorno y el propio sistema toma las decisiones.

La programación explícita es la utilizada en las aplicaciones industriales y consta de dos técnicas fundamentales:

- Programación por guiado.
- Programación textual.

La plataforma contiene las técnicas mencionadas de programación explícita, descritas a continuación.

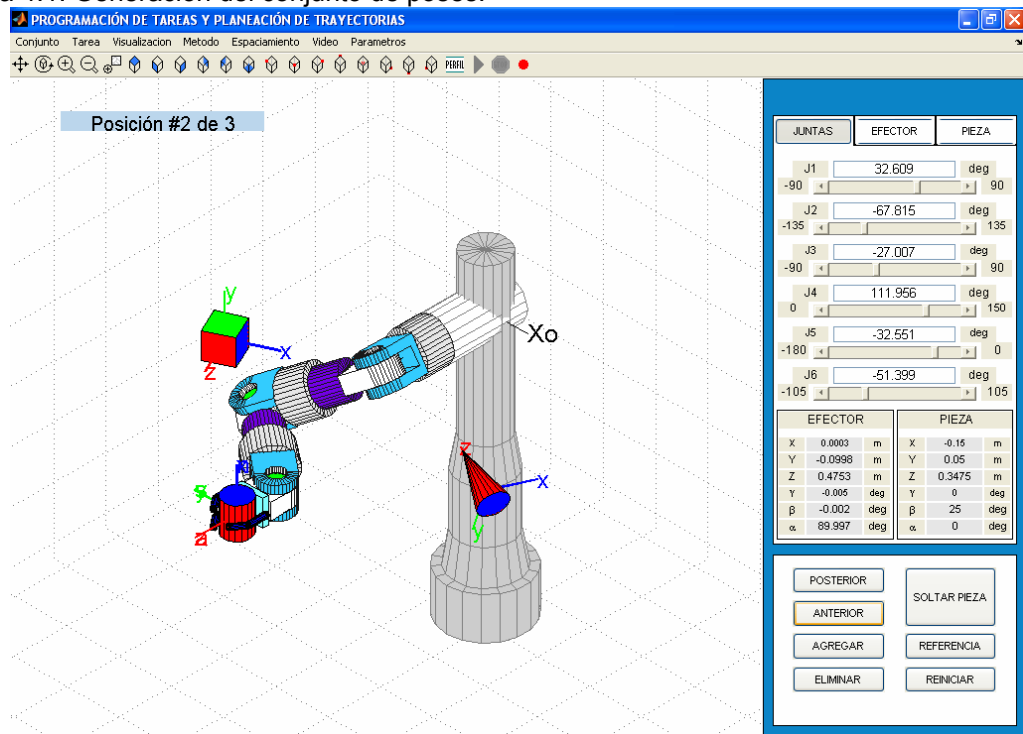
4.1. PROGRAMACIÓN POR GUIADO

La programación por guiado o gestual consiste en posicionar el brazo del robot directamente a lo largo de la trayectoria que debe seguir. Los puntos del camino se graban en memoria y luego se repiten. Este tipo de programación, exige el empleo del manipulador o una replica en la fase de enseñanza (on-line), o el empleo de modelos virtuales a través de programas computacionales de visualización 3D (off-line) [7].

La programación de tareas a través de esta técnica se lleva a cabo siguiendo los pasos a continuación descritos:

- Generación del conjunto de poses del manipulador. Esto se hace empleando los controles ubicados en la región derecha de la ventana principal de la interfaz gráfica (figura 4.1). Estos controles se agrupan en dos categorías según la función que desempeñan. Una de ellas está conformada por aquellos controles que permiten modificar las posiciones de las piezas y del manipulador en la escena o pose presente. En la otra agrupación, los controles se caracterizan por ser herramientas de manipulación del conjunto de poses, es decir, estos controles permiten al usuario navegar por el conjunto de poses y modificarlo. A través del menú Conjunto se logra guardar el conjunto de poses, abrir un conjunto previamente guardado y editarlo.

Figura 4.1. Generación del conjunto de poses.

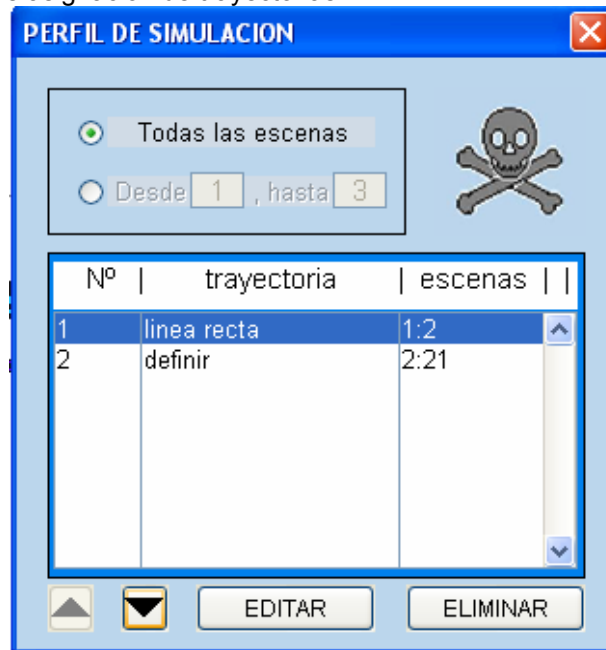


Fuente: Autor del proyecto.

- Asignación de las trayectorias a seguir. Empleando el botón denominado *perfil*, ubicado en la barra de herramientas, se logran asignar las trayectorias deseadas al conjunto de poses (figura 4.2). También permite

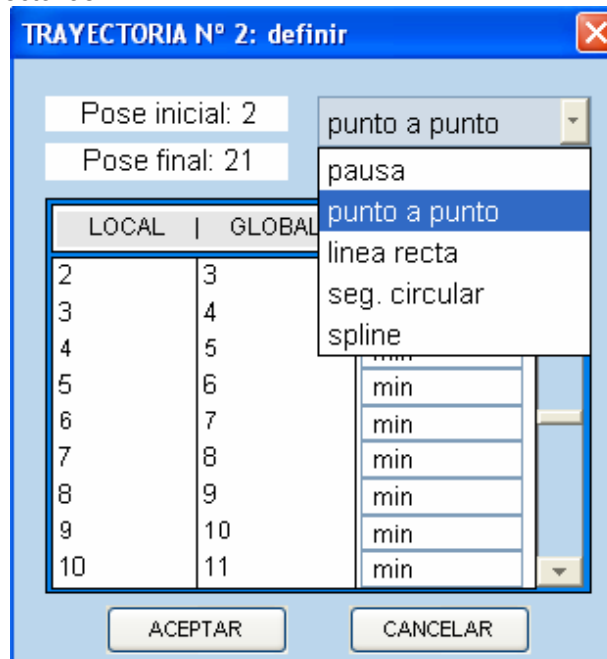
la edición del conjunto de trayectorias y de los tiempos asociados a cada una de ellas (figura 4.3).

Figura 4.2. Ventana de asignación de trayectorias.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura 4.3. Ventana de edición de trayectorias, aparece al pulsar el botón editar en la ventana de asignación de trayectorias.



Fuente: Autor del proyecto.

4.2. PROGRAMACIÓN TEXTUAL

En la programación textual las acciones que ha de realizar el manipulador se especifican mediante un conjunto de instrucciones o sentencias, este proceso no requiere la intervención del robot o de modelos a escala o virtuales (off-line) [7].

En este trabajo se han implementado las instrucciones contenidas en la tabla 4.1 dada a continuación.

Tabla 4.1. Instrucciones de programación textual.

SENTENCIA	FUNCIÓN
<p>POS</p> <p>POS J $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6$</p> <p>POS n x y z $\gamma \beta \alpha$</p> <p>POS n E</p>	<p>Definir posiciones iniciales:</p> <p>→ del manipulador en el espacio de juntas</p> <p>→ de la carga “n” en coordenadas cartesianas y ángulos de Euler ZYX</p> <p>→ de la carga “n” sujeta por el efector</p>
<p>CARGA n tipo m lxx lyy lzz lxy lyz lzx</p>	<p>Precisar la existencia de una la carga, asignándole:</p> <ul style="list-style-type: none"> - n → identificador - tipo → clase de pieza (1-cilindro, 2-esfera, 3-cubo, 4-cono, 5-disco) - m → masa - lxx, lyy, lzz → momentos de inercia calculados en el centro de masa - lxy, lyz, lzx → productos de inercia calculados en el centro de masa
<p>MOVER</p> <p>MOVER RJ $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6$</p> <p>MOVER PB x y z $\gamma \beta \alpha$</p> <p>MOVER CJ SUJETAR n D</p>	<p>Especificar el movimiento a realizar, indicando:</p> <ul style="list-style-type: none"> - la trayectoria (R-recta, C-segmento circular, S-spline, P-punto a punto) - el espacio (J-juntas, B-coordenadas cartesianas y ángulos de Euler ZYX) - sujetar la pieza “n” con la orientación fija

<p>MOVER PJ $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \Delta T$ MOVER SB SUJETAR n D ΔT</p>	<p>habilitada (H) o deshabilitada (D)</p> <p>- tiempo de duración del movimiento entre poses consecutivas, de no especificarse se opta por el tiempo mínimo calculado</p>
<p>$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6$ x y z $\gamma \beta \alpha \Delta T$ SUJETAR n H ΔT</p>	<p>Argumentos asociados a una trayectoria definida con anterioridad.</p> <p>Recta → no requiere argumentos diferentes a los indicados en la sentencia MOVER.</p> <p>Segmento circular → requiere una línea de argumentos adicionales.</p> <p>Punto a punto → es posible suministrarle cualquier número de líneas de argumentos adicionales e incluso no suministrarle línea alguna.</p> <p>Spline → requiere por lo menos una línea adicional de argumentos.</p>
<p>SOLTAR</p>	<p>Soltar la pieza sostenida por el efector</p>
<p>PAUSA ΔT</p>	<p>Realizar una pausa cuya duración sea ΔT.</p>
<p># comentario</p>	<p>Indicar que la línea corresponde a un comentario</p>

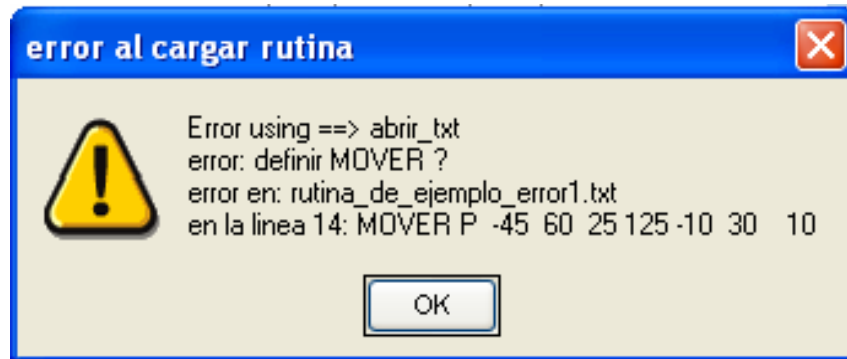
Fuente: Autor del proyecto.

Los ángulos deben estar dados en grados ($^{\circ}$), los valores de X, Y y Z han de indicarse en metros (m), la masa en kilogramos (kg), los momentos y productos de inercia en kilogramos por metros cuadrados ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$) y el tiempo en segundos (s).

La elaboración del programa o conjunto de instrucciones puede realizarse en el *bloc de notas*, siendo guardado como un documento de texto, se requiere que sea de tipo *.txt*. Para cargar una rutina de este tipo se ha de utilizar el submenú *Abrir txt* localizado en el menú *Tarea* o pulsando *Ctrl+X*. Al cargar la tarea programada, la función *abrir_txt* se encarga de revisar cada una de las líneas en busca de errores. Esta función indica si ha detectado un error en el

conjunto de sentencias cargado, mostrando un comentario acerca de la naturaleza del error y la línea en que se presentó (figura 4.4).

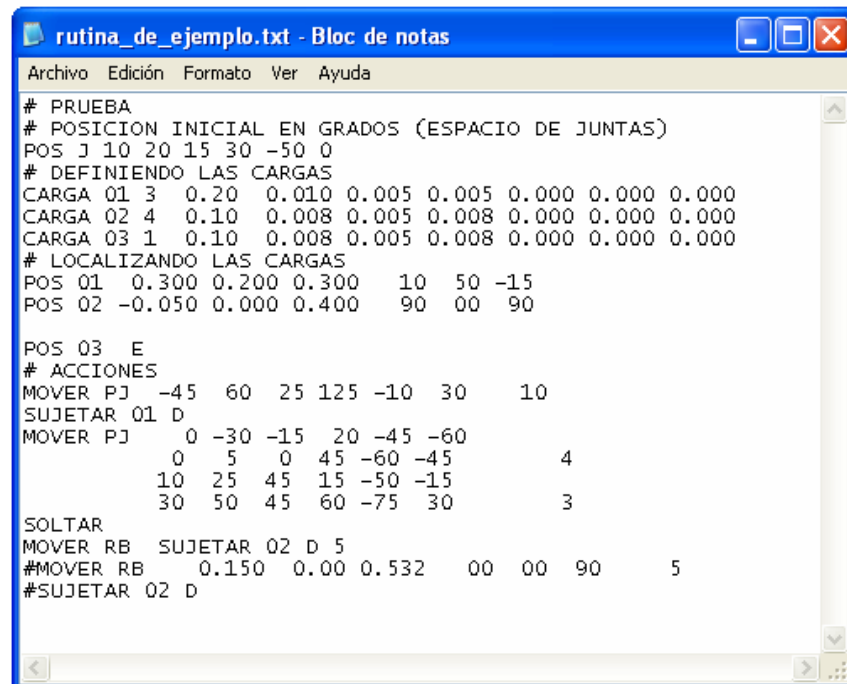
Figura 4.4. Ventana de informe sobre el error hallado.



Fuente: Autor del proyecto.

Las sentencias se han de especificar conservando el orden mostrado en la figura 4.5, primero estableciendo la posición inicial del manipulador, en segunda instancia definiendo las cargas existentes y localizándolas a continuación, luego describiendo el conjunto de acciones a ejecutar.

Figura 4.5. Archivo de ejemplo de tarea programada textualmente.



Fuente: Autor del proyecto.

5. RESULTADOS

En este capítulo se dan a conocer los resultados de la investigación, cumpliendo uno de los objetivos establecidos, el cual consiste en contrastar diferentes métodos de interpolación en el espacio de juntas y diversos criterios de espaciamiento de puntos de paso para trayectorias especificadas en el espacio cartesiano. Además, se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo de corrección de pares y de la simulación del sistema empleando el modelo dinámico directo.

5.1. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

A continuación se analizan los métodos de común aplicación en la interpolación en el espacio de juntas (polinomios, cicloidal, aceleración rectangular) además de un par de métodos de desarrollo propio (aceleración senoidal y cosenoidal).

El método de aceleración trapezoidal analizado en [9] es aplicable solo cuando se han definido valores máximos para las señales de sobreaceleración. Este método no se describe en este capítulo, sin embargo es descrito de forma detallada en el anexo D junto a los otros métodos mencionados.

$\Delta\theta = (\theta_f - \theta_i)$ \rightarrow Desplazamiento angular.

$\dot{\theta}_{0\max}, \ddot{\theta}_{0\max}$ \rightarrow Vectores de valores máximos posibles de velocidad y de aceleración, respectivamente, en cada una de las juntas.

$\dot{\theta}_{\max}, \ddot{\theta}_{\max}, \dddot{\theta}_{\max} \rightarrow$ Valores máximos de velocidad, aceleración y sobreaceleración, desarrollados en la junta analizada.

Los parámetros de comparación de los distintos métodos de interpolación son: los valores máximos de las curvas cinemáticas desarrolladas y el tiempo mínimo de ejecución del desplazamiento obtenidos para cada método.

Tabla 5.1. Parámetros de comparación de los métodos de interpolación implementados.

MÉTODO	$\dot{\theta}_{\max}$	$\ddot{\theta}_{\max}$	$\dddot{\theta}_{\max}$	T_{\min}
Polinomio grado 3	$\frac{3}{2} \frac{ \Delta\theta }{T}$	$6 \frac{ \Delta\theta }{T^2}$	$12 \frac{ \Delta\theta }{T^3}$	$\max\left(\frac{3}{2} \frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{0\max}}, \sqrt{6 \frac{ \Delta\theta }{\ddot{\theta}_{0\max}}}\right)$
Polinomio grado 5	$\frac{15}{8} \frac{ \Delta\theta }{T}$	$\frac{10}{\sqrt{3}} \frac{ \Delta\theta }{T^2}$	$60 \frac{ \Delta\theta }{T^3}$	$\max\left(\frac{15}{8} \frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{0\max}}, \sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}} \frac{ \Delta\theta }{\ddot{\theta}_{0\max}}}\right)$
Polinomio grado 7	$\frac{35}{16} \frac{ \Delta\theta }{T}$	$\frac{84\sqrt{5}}{25} \frac{ \Delta\theta }{T^2}$	$\frac{105}{2} \frac{ \Delta\theta }{T^3}$	$\max\left(\frac{35}{16} \frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{0\max}}, \sqrt{\frac{84\sqrt{5}}{25} \frac{ \Delta\theta }{\ddot{\theta}_{0\max}}}\right)$
cicloidal	$2 \frac{ \Delta\theta }{T}$	$2\pi \frac{ \Delta\theta }{T^2}$	$4\pi^2 \frac{ \Delta\theta }{T^3}$	$\max\left(2 \frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{0\max}}, \sqrt{2\pi \frac{ \Delta\theta }{\ddot{\theta}_{0\max}}}\right)$
rectangular	$k\dot{\theta}_{\max}$	$k\ddot{\theta}_{0\max}$	∞	$\frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{\max}} + \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}$
senoidal	$k\dot{\theta}_{\max}$	$k\ddot{\theta}_{0\max}$	$2 \frac{\ddot{\theta}_{\max}^2}{\dot{\theta}_{\max}}$	$\frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{\max}} + \frac{\pi}{2} \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}$
cosenoidal	$k\dot{\theta}_{\max}$	$k\ddot{\theta}_{0\max}$	$\frac{\pi}{2} \frac{\ddot{\theta}_{\max}^2}{\dot{\theta}_{\max}}$	$\frac{ \Delta\theta }{\dot{\theta}_{\max}} + 2 \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}$

Fuente: Autor del proyecto.

Tabla 5.2. Cálculos previos.

MÉTODO	Cálculos previos
rectangular	$\dot{\theta}_{\max} = \min\left(\dot{\theta}_{0\max}, \sqrt{ \Delta\theta \cdot \ddot{\theta}_{0\max}}\right), k = \frac{ \Delta\theta /\dot{\theta}_{\max}}{T - \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}}$
senoidal	$\dot{\theta}_{\max} = \min\left(\dot{\theta}_{0\max}, \sqrt{\frac{2}{\pi} \Delta\theta \cdot \ddot{\theta}_{0\max}}\right), k = \frac{ \Delta\theta /\dot{\theta}_{\max}}{T - \frac{\pi}{2} \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}}$
cosenoidal	$\dot{\theta}_{\max} = \min\left(\dot{\theta}_{0\max}, \sqrt{\frac{1}{2} \Delta\theta \cdot \ddot{\theta}_{0\max}}\right), k = \frac{ \Delta\theta /\dot{\theta}_{\max}}{T - 2 \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{0\max}}}$

Fuente: Autor del proyecto.

De las anteriores tablas se deduce que para todo tiempo de ejecución del movimiento mayor que los tiempos mínimos correspondientes a los métodos basados en polinomios y en el movimiento cicloidal, los valores máximos de las curvas cinemáticas cumplen las siguientes desigualdades:

$$\dot{\theta}_{\max POL^3} < \dot{\theta}_{\max POL^5} < \dot{\theta}_{\max CICLOIDAL} < \dot{\theta}_{\max POL^7} \quad (5.1)$$

$$\ddot{\theta}_{\max POL^5} < \ddot{\theta}_{\max POL^3} < \ddot{\theta}_{\max CICLOIDAL} < \ddot{\theta}_{\max POL^7} \quad (5.2)$$

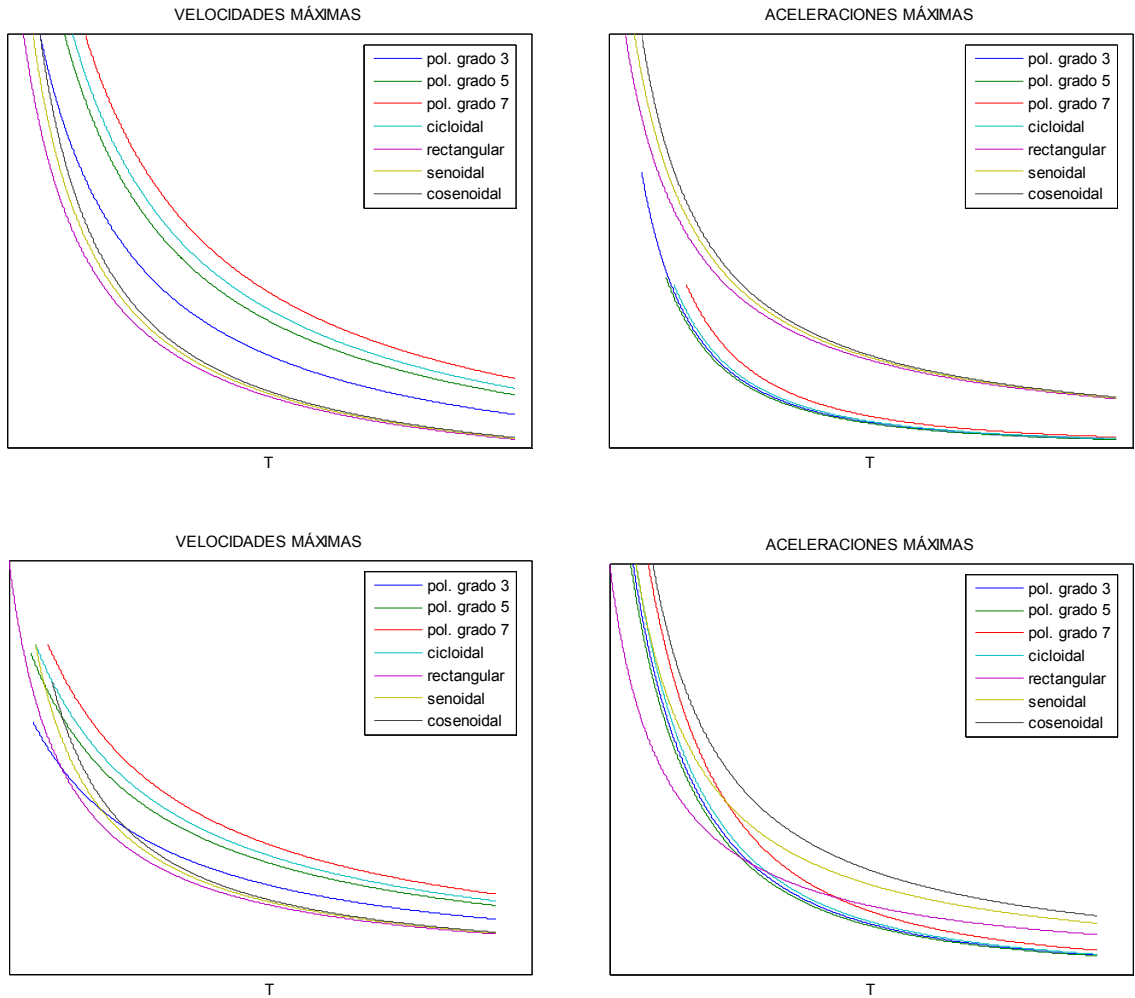
$$\ddot{\theta}_{\max POL^3} < \ddot{\theta}_{\max CICLOIDAL} < \ddot{\theta}_{\max POL^7} < \ddot{\theta}_{\max POL^5} \quad (5.3)$$

Para todo tiempo mayor que los mínimos establecidos para los métodos de aceleración rectangular, senoidal y cosenoidal, se cumple $k_{RECTANGULAR} < k_{SENOIDAL} < k_{COSENOIDAL}$ y por tanto:

$$\dot{\theta}_{RECTANGULAR} < \dot{\theta}_{SENOIDAL} < \dot{\theta}_{COSENOIDAL} \quad (5.4)$$

$$\ddot{\theta}_{RECTANGULAR} < \ddot{\theta}_{SENOIDAL} < \ddot{\theta}_{COSENOIDAL} \quad (5.5)$$

Figura 5.1. Velocidades y aceleraciones máximas desarrolladas.

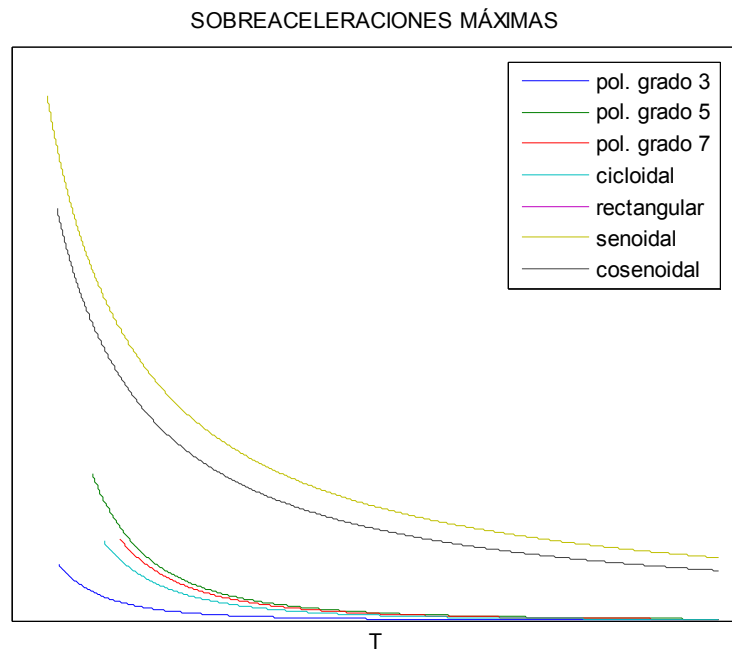


Fuente: Autor del proyecto.

El valor máximo de sobreaceleración para el método de aceleración rectangular tiende a infinito. Las curvas de sobreaceleración mostradas en la ventana de gráficos se determinan mediante diferenciación numérica de las correspondientes señales de aceleración, por este motivo los impulsos exhibidos en teoría por el citado método en la curva de sobreaceleración se ilustran como cambios abruptos de valor finito. Para los métodos de aceleración senoidal y cosenoidal se presentan tres posibles casos:

1) Si $\dot{\theta}_{0\max} \leq \sqrt{\frac{1}{2}|\Delta\theta| \cdot \ddot{\theta}_{0\max}}$ ocurre entonces que: $\ddot{\theta}_{COSENOIDAL} < \ddot{\theta}_{SENOIDAL}$ (ver figura 5.2).

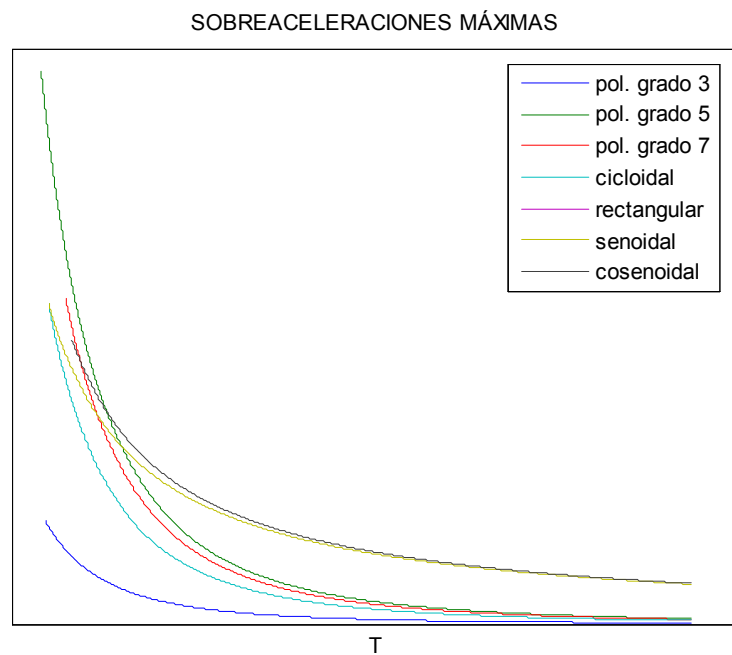
Figura 5.2. Sobreaceleraciones máximas primer caso.



Fuente: Autor del proyecto.

2) Si $\dot{\theta}_{0\max} \geq \sqrt{\frac{1}{2}|\Delta\theta|} \cdot \ddot{\theta}_{0\max}$ se garantiza que: $\ddot{\theta}_{\text{SENOIDAL}} < \ddot{\theta}_{\text{COSENOIDAL}}$ (figura 5.3).

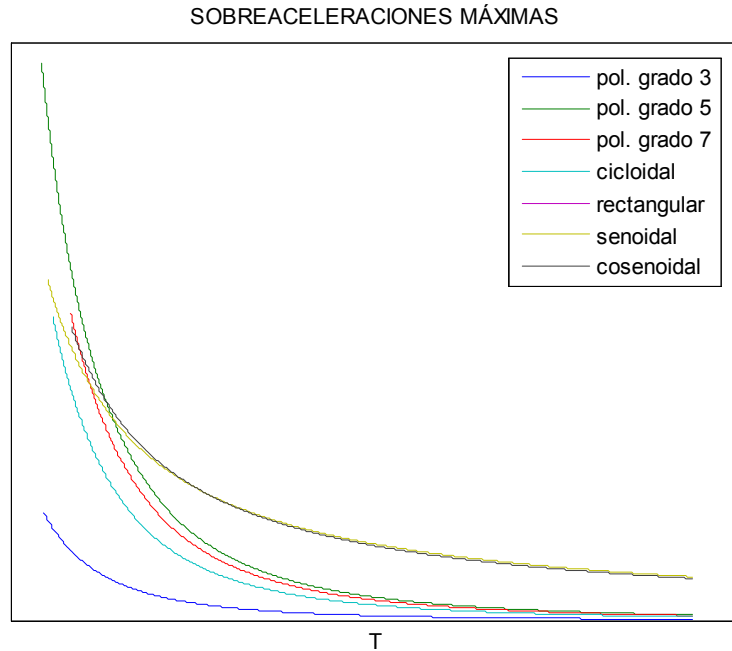
Figura 5.3. Sobreaceleraciones máximas segundo caso.



Fuente: Autor del proyecto.

3) Si $\sqrt{\frac{1}{2}|\Delta\theta| \cdot \ddot{\theta}_{0\max}} < \dot{\theta}_{0\max} < \sqrt{\frac{2}{\pi}|\Delta\theta| \cdot \ddot{\theta}_{0\max}}$ los máximos de sobreaceleración pasan de $\ddot{\theta}_{SENOIDAL} < \ddot{\theta}_{COSENOIDAL}$ a $\ddot{\theta}_{COSENOIDAL} < \ddot{\theta}_{SENOIDAL}$ conforme se aumenta el tiempo de ejecución del movimiento (ver figura 5.4).

Figura 5.4. Sobreaceleraciones máximas tercer caso.



Fuente: Autor del proyecto.

Los tiempos mínimos y los valores máximos de velocidad, aceleración y sobreaceleración obtenidos al variar la magnitud del desplazamiento siendo constantes las aceleraciones y velocidades máximas posibles, exhiben un comportamiento ligado al tipo de método al que pertenece. Las curvas de cada método de interpolación se dividen en dos regiones claramente diferenciables:

1) $|\Delta\theta| \leq a \cdot \frac{\dot{\theta}_{0\max}^2}{\ddot{\theta}_{0\max}}$, donde a es un factor de proporcionalidad y su valor varía de

un método a otro (tabla 5.3). En esta región la aceleración máxima desarrollada es igual a la aceleración máxima posible y el máximo de velocidad crece conforme aumenta el desplazamiento.

2) $|\Delta\theta| \geq a \cdot \frac{\dot{\theta}_{0\max}^2}{\ddot{\theta}_{0\max}}$. En esta región la velocidad máxima desarrollada corresponde a la máxima posible, y el valor máximo de aceleración obtenida decrece con el aumento del desplazamiento para los métodos en los cuales el tiempo mínimo corresponde al máximo de dos valores (polinomios y cicloidal) mientras para los métodos denominados por su curva de aceleración en el tiempo siguen exhibiendo aceleraciones máximas desarrolladas iguales a las máximas posibles.

Tabla 5.3. Factor a para los métodos de interpolación analizados.

MÉTODO	a
Polinomio grado 3	$\frac{8}{3} \approx 2.6667$
Polinomio grado 5	$\frac{128}{45\sqrt{3}} \approx 1.6422$
Polinomio grado 7	$\frac{3072}{875\sqrt{5}} \approx 1.5701$
cicloidal	$\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$
rectangular	1
senoidal	$\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$
cosenoidal	2

Fuente: Autor del proyecto.

Al graficar las curvas de todos los métodos se aprecian claramente tres regiones (figura 5.5):

1) $|\Delta\theta| \leq a \cdot \frac{\dot{\theta}_{0\max}^2}{\ddot{\theta}_{0\max}}$ para todos los métodos. En esta primera región las curvas de los métodos cicloidal y de aceleración senoidal presentan los mismos valores, las curvas de velocidad y de sobreaceleración del método polinomial de

séptimo grado es muy cercana a las correspondientes curvas del método de aceleración senoidal, y se cumple:

$$T_{\min RECTANGULAR} < T_{\min POL^{\circ}5} < T_{\min POL^{\circ}3} < T_{\min SENOIDAL} < T_{\min POL^{\circ}7} < T_{\min COSENOIDAL} \quad (5.6)$$

$$\theta'_{\max POL^{\circ}3} < \theta'_{\max COSENOIDAL} < \theta'_{\max POL^{\circ}5} < \theta'_{\max SENOIDAL} < \theta'_{\max POL^{\circ}7} < \theta'_{\max RECTANGULAR} \quad (5.7)$$

$$\theta'''_{\max POL^{\circ}3} < \theta'''_{\max COSENOIDAL} < \theta'''_{\max SENOIDAL} < \theta'''_{\max POL^{\circ}7} < \theta'''_{\max POL^{\circ}5} < \theta'''_{\max RECTANGULAR} \quad (5.8)$$

2) Región de transición. En esta zona se presentan las transiciones de todas las curvas.

3) $|\Delta\theta| \geq a \cdot \frac{\dot{\theta}_{0\max}^2}{\ddot{\theta}_{0\max}}$ para todos los métodos. En esta región las aceleraciones y

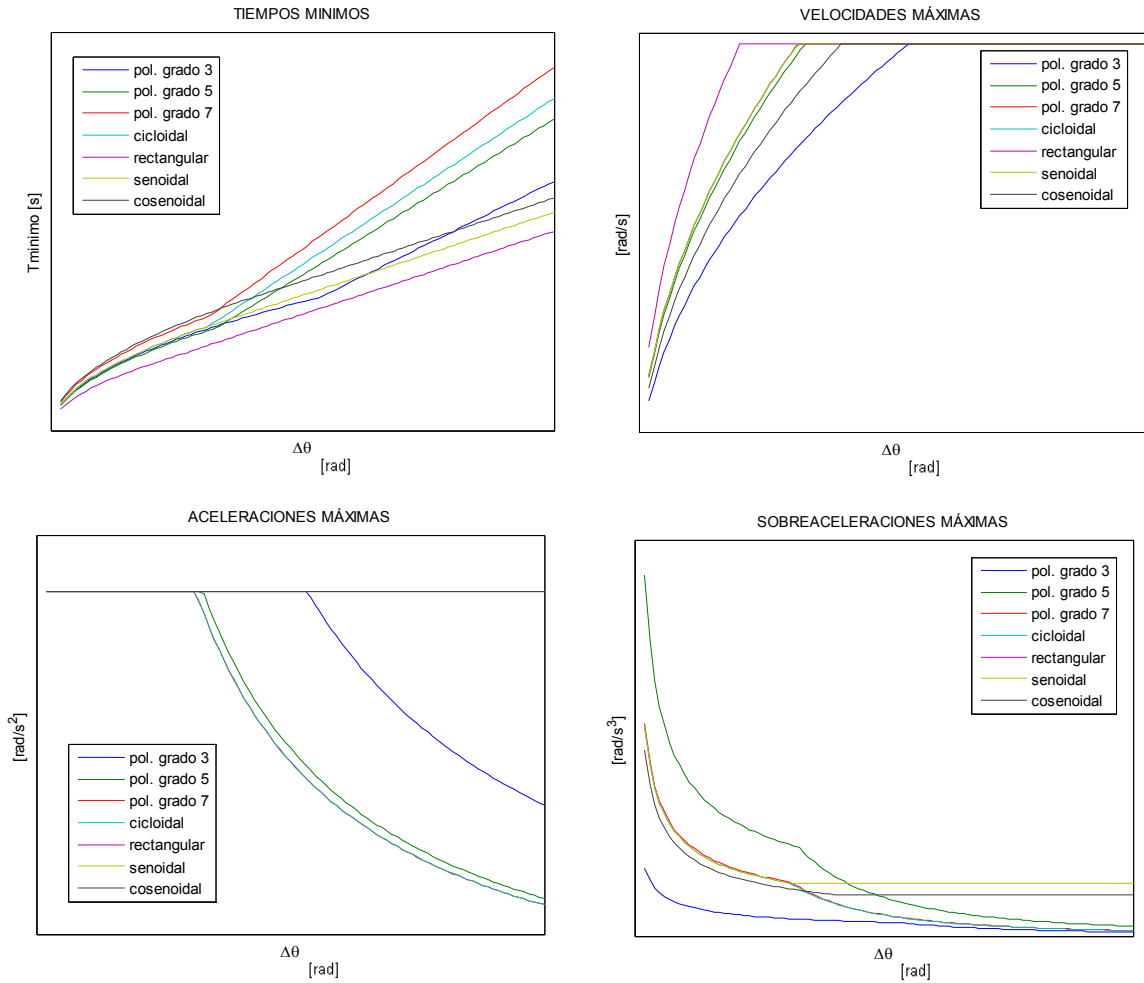
sobreaceleraciones máximas de los métodos cicloidal y polinomiales tienden a cero cuando el desplazamiento tiende a infinito mientras las correspondientes a los métodos de aceleración senoidal y cosenoidal se mantienen fijas en valores diferentes de cero. Las curvas de aceleración máxima de los métodos cicloidal y polinomial de séptimo grado son muy cercanas entre sí y cercanas a la curva de aceleración del método de quinto grado. Además se cumple:

$$T_{\min RECTANGULAR} < T_{\min SENOIDAL} < T_{\min COSENOIDAL} < T_{\min POL^{\circ}3} < T_{\min POL^{\circ}5} < T_{\min CICLOIDAL} < T_{\min POL^{\circ}7} \quad (5.9)$$

$$\theta''_{\max POL^{\circ}7} < \theta''_{\max CICLOIDAL} < \theta''_{\max POL^{\circ}5} < \theta''_{\max POL^{\circ}3} \quad (5.10)$$

$$\theta'''_{\max POL^{\circ}3} < \theta'''_{\max CICLOIDAL} < \theta'''_{\max POL^{\circ}7} < \theta'''_{\max POL^{\circ}5} < \theta'''_{\max COSENOIDAL} < \theta'''_{\max SENOIDAL} \quad (5.11)$$

Figura 5.5. Curvas de tiempos mínimos y valores máximos de velocidad, aceleración y sobreaceleración dados por los métodos de interpolación.



Fuente: Autor del proyecto.

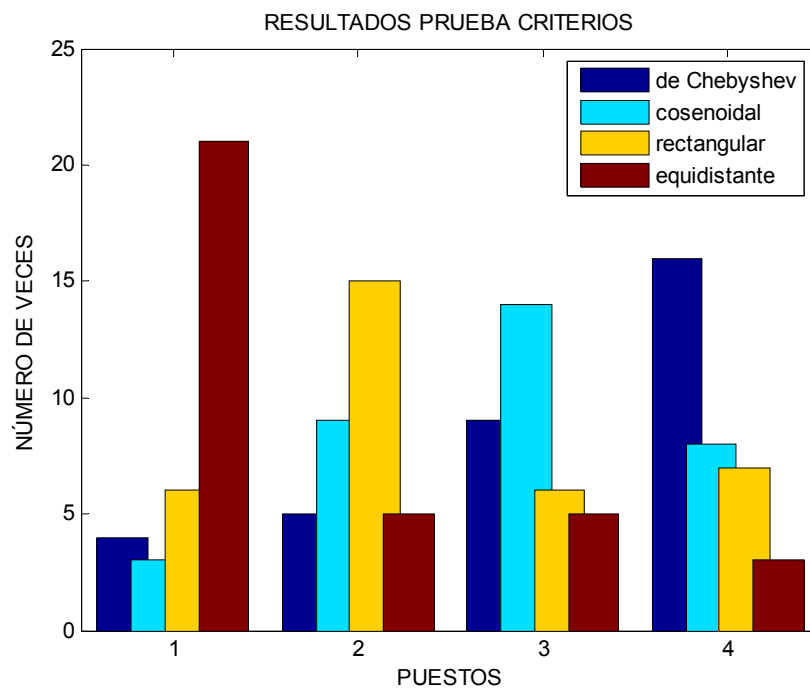
5.2. CRITERIOS DE ESPACIAMIENTO

La asignación de puntos de paso para realizar trayectorias especificadas en el espacio cartesiano a través de la interpolación en espacio de juntas es un tema poco tratado en la literatura. Debido a esto se han implementado, además del criterio de Chebyshev empleado en *Simbot* [4], el criterio de puntos de paso equidistantes y dos criterios basados en curvas obtenidas de los métodos de interpolación analizados.

Para contrastar los criterios se ha generado un conjunto de rectas determinando la cantidad de puntos de paso necesarios para cada criterio y los valores máximos del error de posición del efector final respecto a la trayectoria especificada. Los puntos de paso se han creado de acuerdo al procedimiento establecido en el capítulo tercero. Los valores máximos de la señal de error son empleados cuando dos o más criterios presentan igual número de puntos de paso generados.

La figura 5.6 exhibe los resultados obtenidos de una población de la cual se han descartado las trayectorias que no fueron cumplidas por la aparición de puntos inalcanzables y aquellas en las que se generó tan sólo un punto de paso puesto que el factor de espaciamiento en este caso tiene el mismo valor para todos los criterios. Se aprecia en la figura que: el criterio de espaciamiento equidistante ha resultado ser claramente la mejor opción, la segunda mejor opción le ha correspondido al criterio rectangular, la tercera al cosenoidal y la cuarta y última al criterio de Chebyshev.

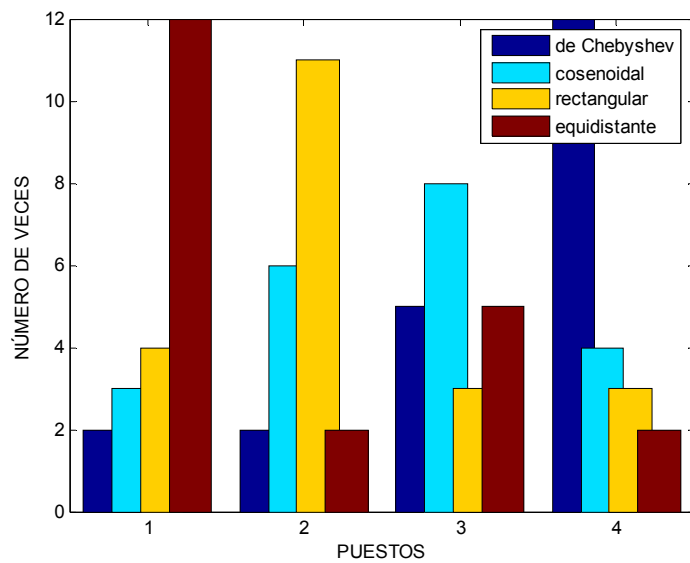
Figura 5.6. Resultados de la prueba realizada a los criterios de espaciamiento.



Fuente: Autor del proyecto.

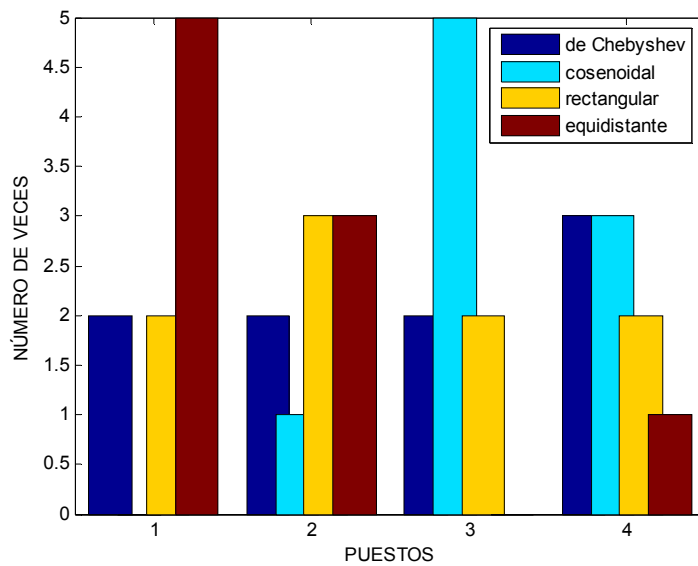
En las siguientes ilustraciones (figuras 5.7, 5.8 y 5.9) puede apreciarse el comportamiento de los distintos criterios para tres diferentes intervalos del promedio de número de puntos de paso obtenidos para cada trayectoria. En los tres intervalos el criterio equidistante resulta ser la mejor opción de generación de puntos de paso.

Figura 5.7. Resultados de para $n_{PP\text{PROMEDIO}} \leq 4.5$.



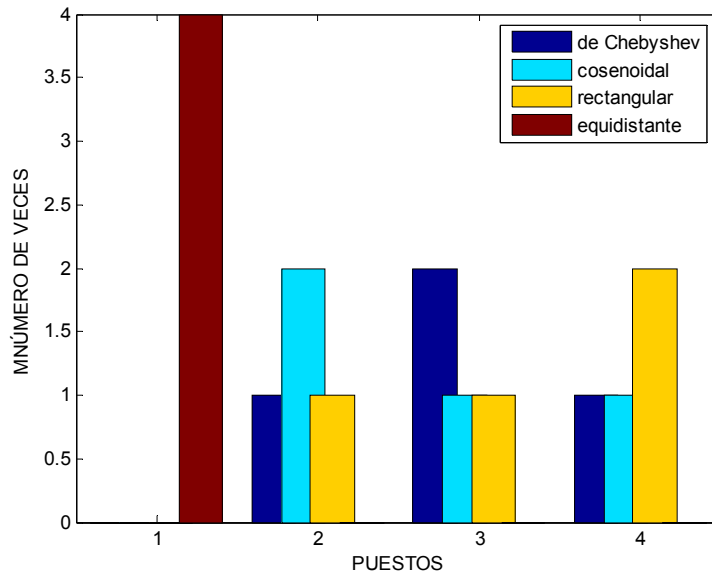
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.8. Resultados de para $4.5 < n_{PP\text{PROMEDIO}} \leq 7.5$.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.9. Resultados de para $n_{PP\text{PROMEDIO}} > 7.5$.



Fuente: Autor del proyecto.

5.3. CORRECIÓN DE MOMENTOS

De las simulaciones realizadas se deduce:

- Se requiere un máximo de dos correcciones de momentos realizadas a una trayectoria.
- En los casos en los que se requiere sólo una corrección el error presentado no supera el 3%. El error se determina empleando (5.12).

$$error = \left(1 - \frac{|\tau_T|_{\max}}{\tau_{0\max}} \right) \times 100\% \quad (5.12)$$

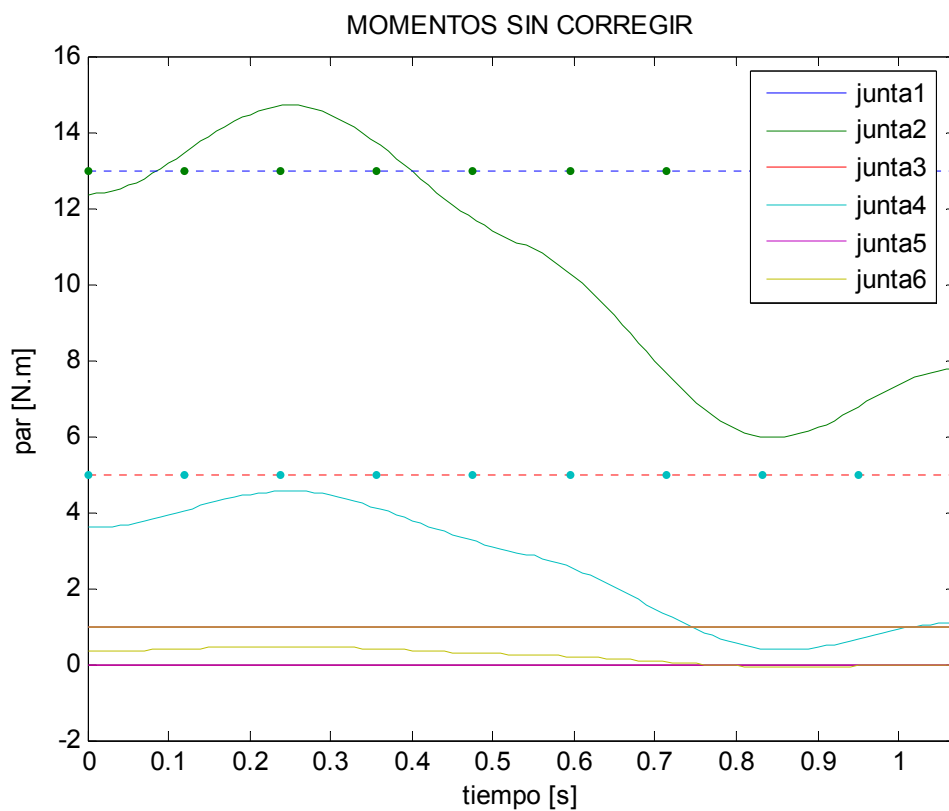
Los valores negativos de error indican sobrepasos de los momentos máximos especificados.

- Cuando se hace necesario corregir por segunda ocasión los momentos calculados, el valor máximo del par calculado no supera el 101% del

valor máximo establecido. Luego de aplicar la segunda corrección, el error obtenido no supera el 1%.

A continuación se muestran los momentos calculados para una trayectoria punto a punto. Inicialmente el momento correspondiente a la junta 2 sobrepasa el máximo posible en aproximadamente 1.7 N.m correspondiente a un 13.04% (figura 5.10).

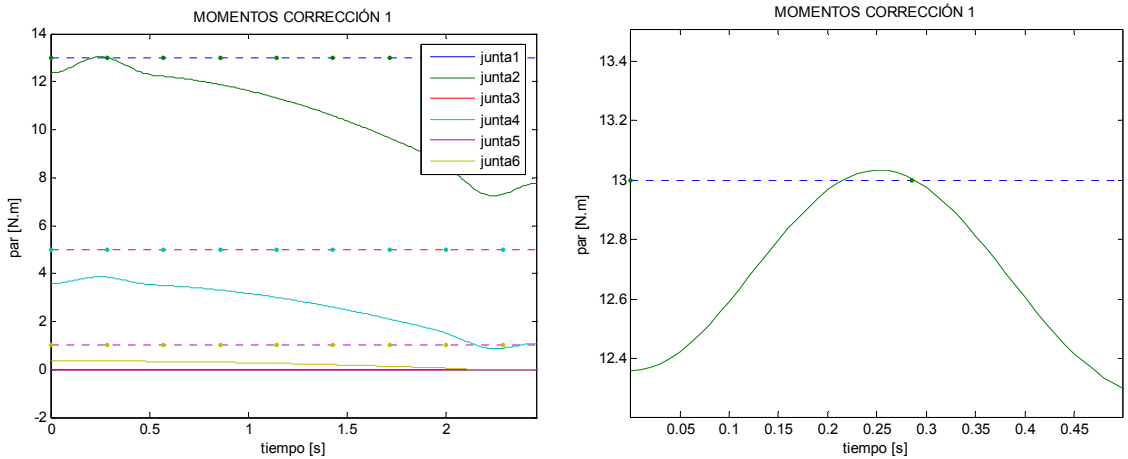
Figura 5.10. Momentos calculados inicialmente



Fuente: Autor del proyecto.

Al efectuar la primera corrección el sobrepaso se ha reducido a 0.0334 N.m, produciendo un error de -0.2572 %. Los pares calculados se muestran en la figura 5.11, en la derecha de ésta se aprecia en detalle el sobrepaso de la señal de la junta 2.

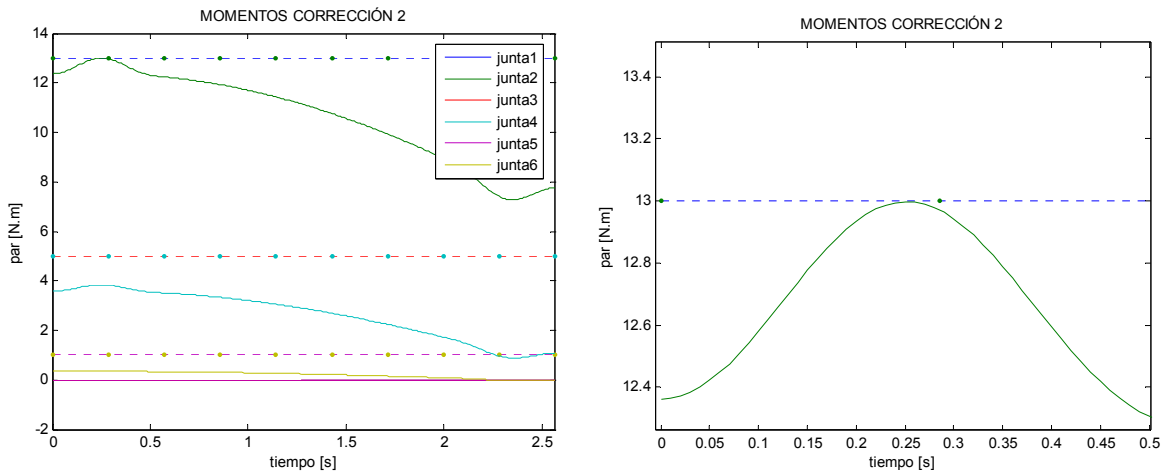
Figura 5.11. Momentos calculados al realizar la primera corrección.



Fuente: Autor del proyecto.

La segunda corrección de momentos ha suprimido el sobrepaso, generando un par máximo en la junta 2 de 0.0024 N.m por debajo del máximo posible, esto es un 0.0187% de error (figura 5.12).

Figura 5.12. Momentos calculados al realizar la segunda corrección.



Fuente: Autor del proyecto.

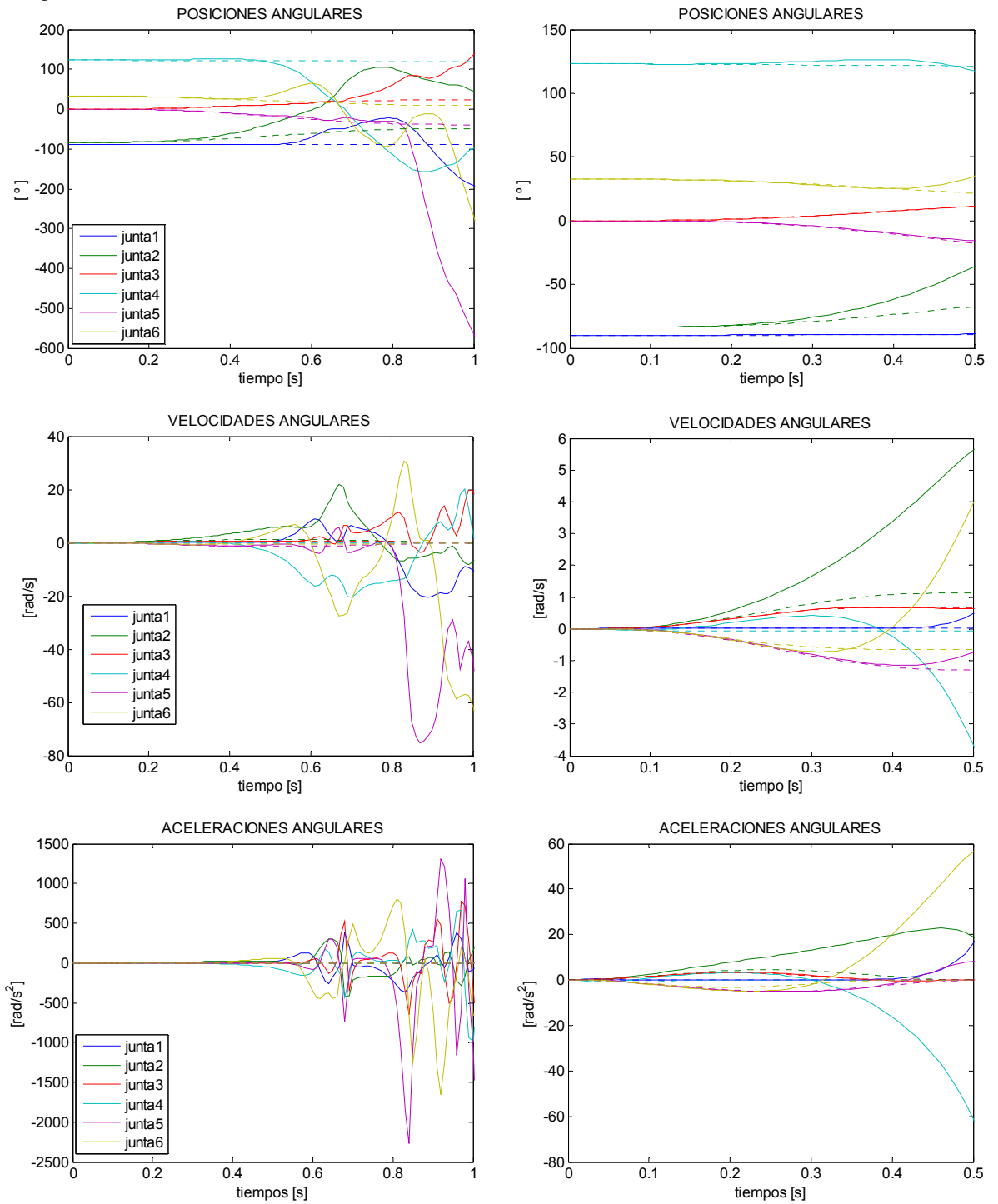
5.4. SIMULACIONES EMPLEANDO EL MODELO DINÁMICO DIRECTO

Con el fin de validar las señales cinemáticas y cinéticas obtenidas se emplea el modelo dinámico directo del manipulador.

5.4.1. Método numérico

Se ha implementado la solución del modelo dinámico directo a través del método numérico de solución de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta de cuarto orden. Esta solución se encuentra en el archivo *solucion.m*. Las gráficas siguientes de las curvas cinemáticas de las variables de junta corresponden a la aplicación en lazo abierto de los pares calculados, las líneas punteadas son las señales deseadas (figura 5.13). Los cuadros de la derecha muestran en detalle las curvas en la parte inicial del movimiento, siendo observable la similitud presente en una buena parte de las curvas correspondientes a cada junta. Las señales obtenidas se distancian considerablemente de las deseadas conforme el tiempo progresa, esto ocurre debido a la naturaleza inestable del sistema, haciendo necesario una estrategia de control en lazo cerrado.

Figura 5.13. Curvas cinemáticas obtenidas.



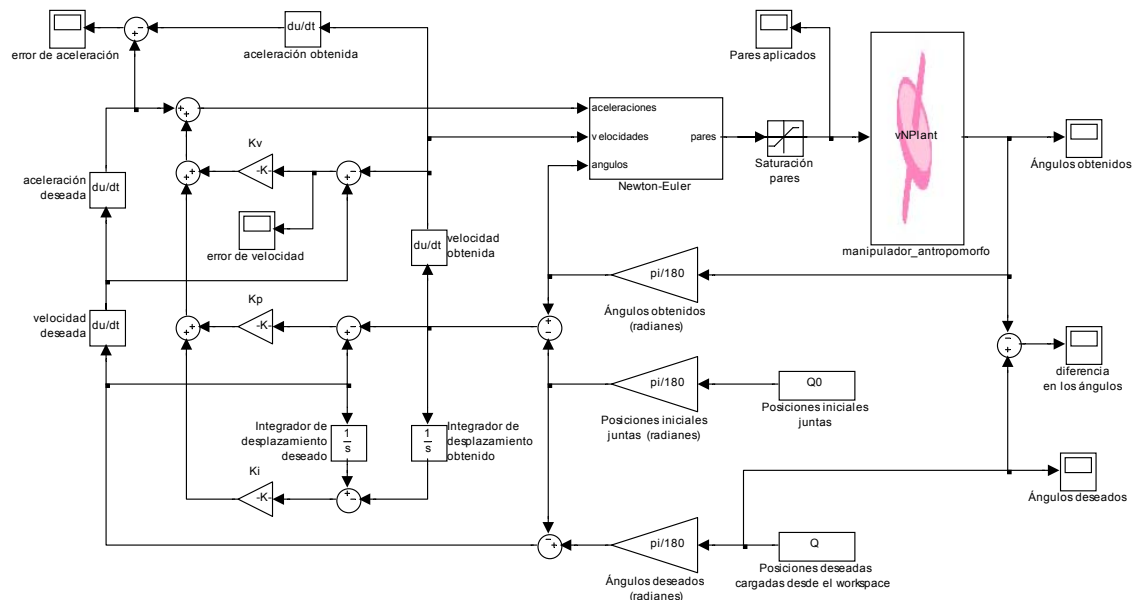
Fuente: Autor del proyecto.

5.4.2. Modelo 3D

Otra forma de establecer el modelo dinámico directo es generándolo en un programa especializado de simulación de diferentes características sobre cuerpos tridimensionales.

La utilización del modelo mencionado se aprecia en el esquema de simulación en el que se ha implementado la estrategia de control de par calculado (figura 5.14).

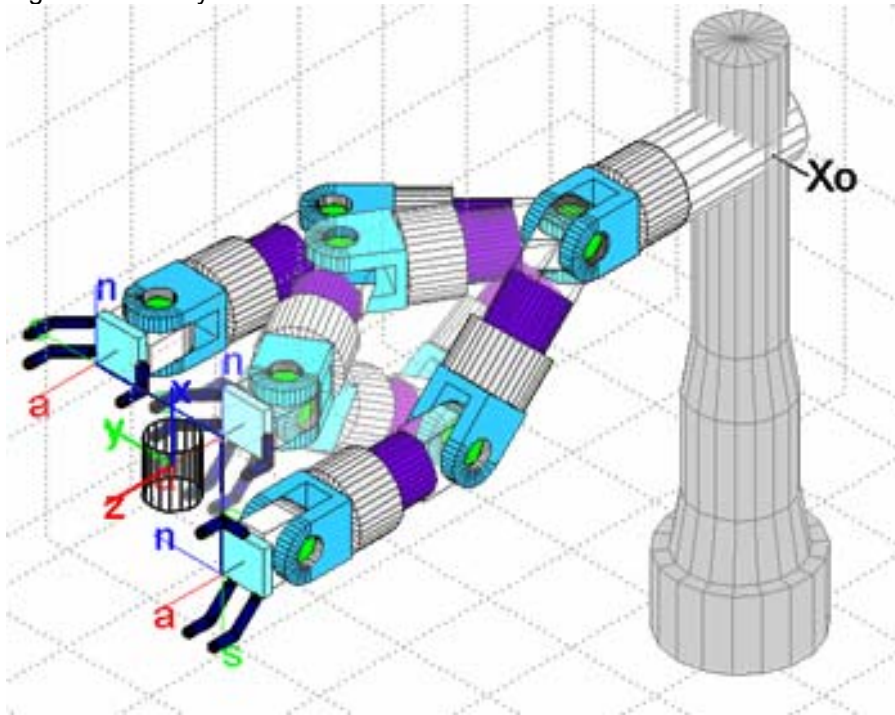
Figura 5.14. Estrategia de control de par calculado.



Fuente: Autor del proyecto.

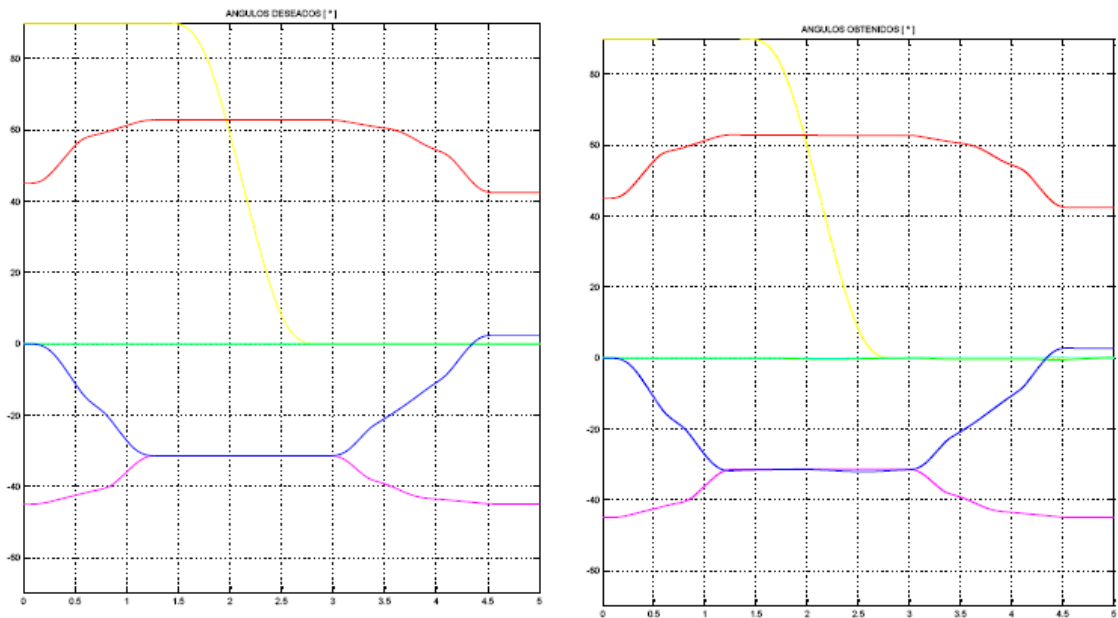
Para la trayectoria ilustrada en la figura 5.15 se ha efectuado la simulación obteniendo curvas de posición angular y par bastante aproximadas a las deseadas (figuras 5.16 y 5.17). Las señales de error de posición, velocidad, aceleración y de par se ilustran en las figuras 5.18-5.21. Estos errores se definen como la señal deseada menos la obtenida o aplicada según sea el caso. Todas estas curvas se han generado empleado el método cosenoidal de interpolación.

Figura 5.15. Trayectoria simulada.



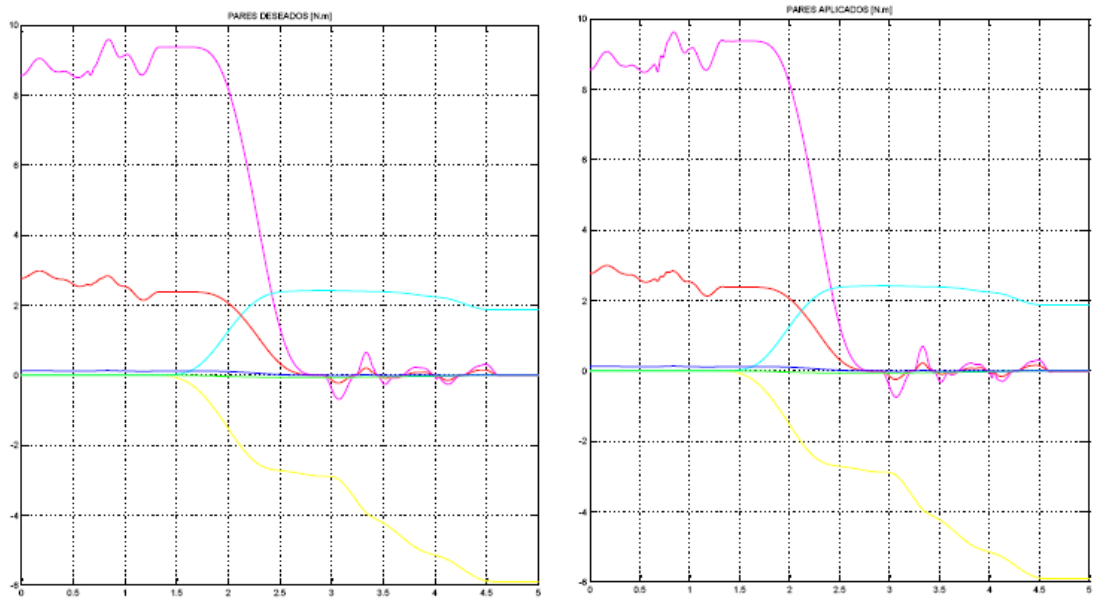
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.16. Posiciones angulares deseadas (izq.) y obtenidas (der.).



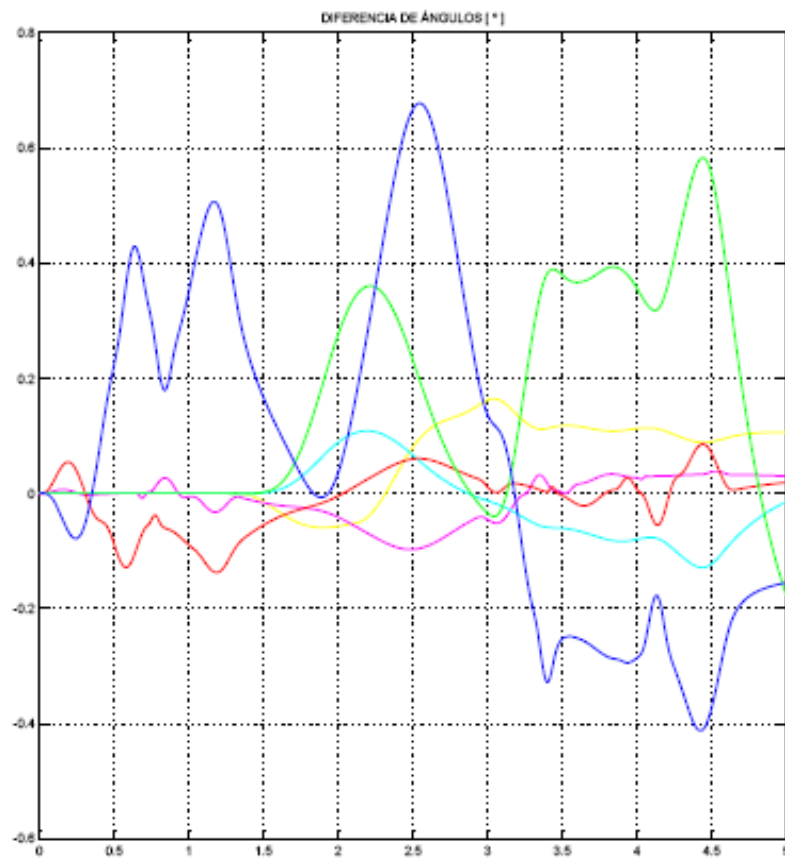
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.17. Pares deseados (izq.) y aplicados (der.).



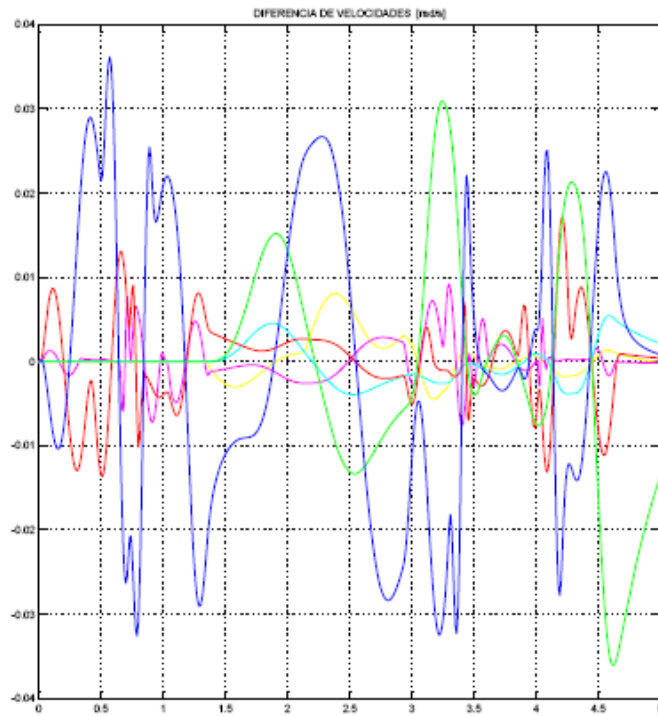
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.18. Error de posiciones angulares método cosenoidal.



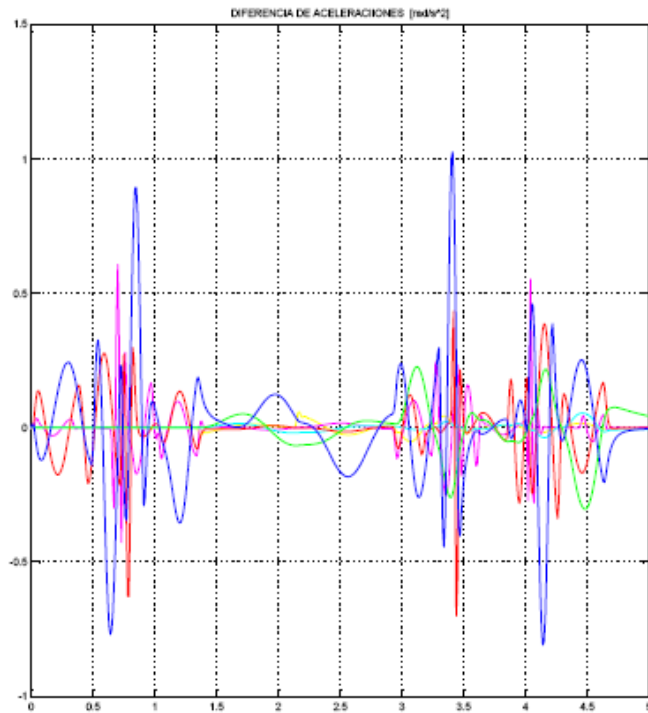
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.19. Error de velocidades angulares método cosenoidal.



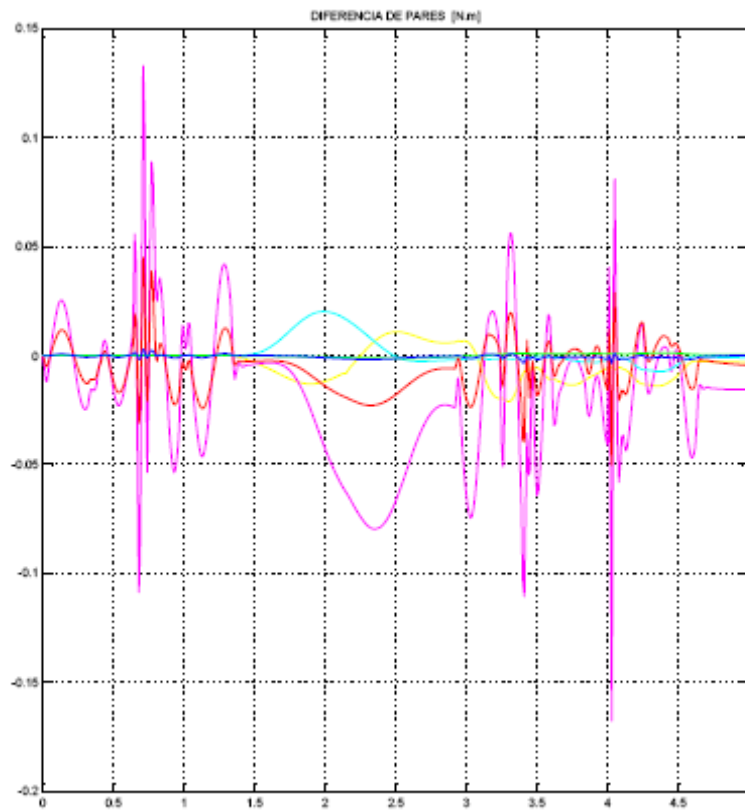
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.20. Error de aceleraciones angulares método cosenoidal.



Fuente: Autor del proyecto.

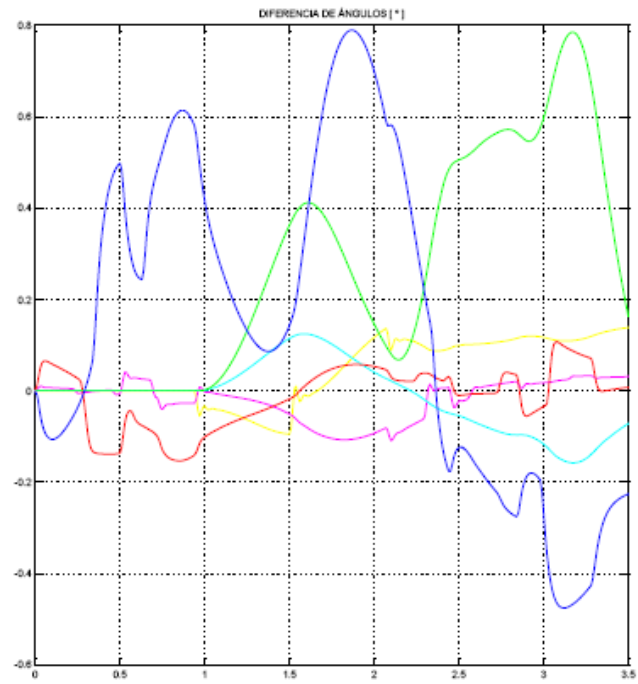
Figura 5.21. Error de pares método cosenoidal.



Fuente: Autor del proyecto.

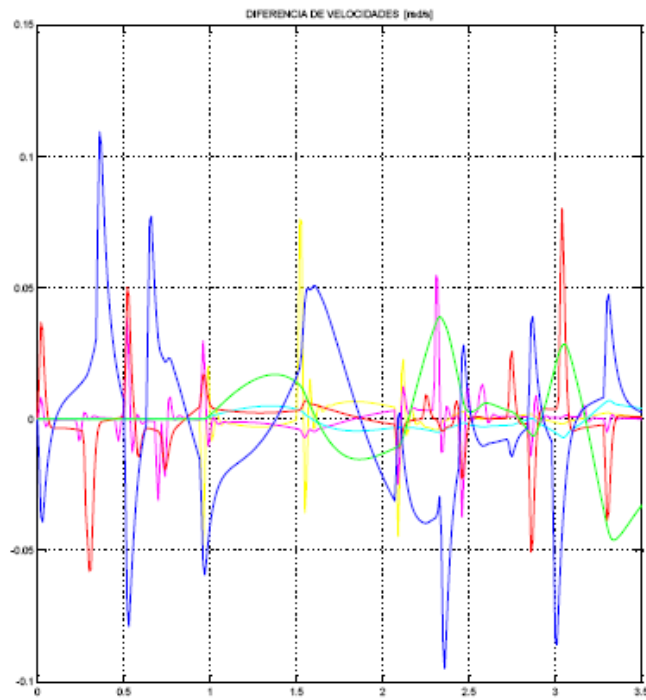
Las señales de error de: posición, velocidad, aceleración y de par correspondientes al método de aceleración rectangular se ilustran en las figuras 5.22-5.25. Se aprecia en estas figuras el incremento del valor máximo de las señales con respecto de las curvas del método cosenoidal.

Figura 5.22. Error de posiciones angulares método rectangular.



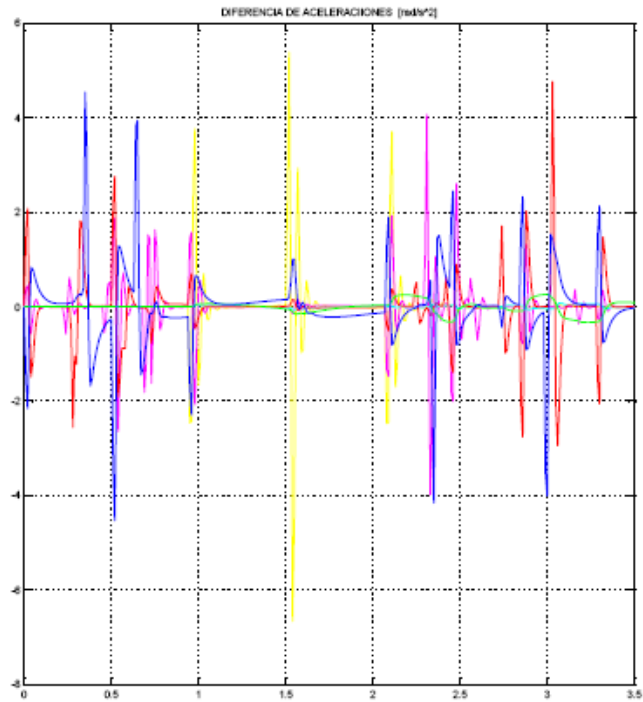
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.23. Error de velocidades angulares método rectangular.



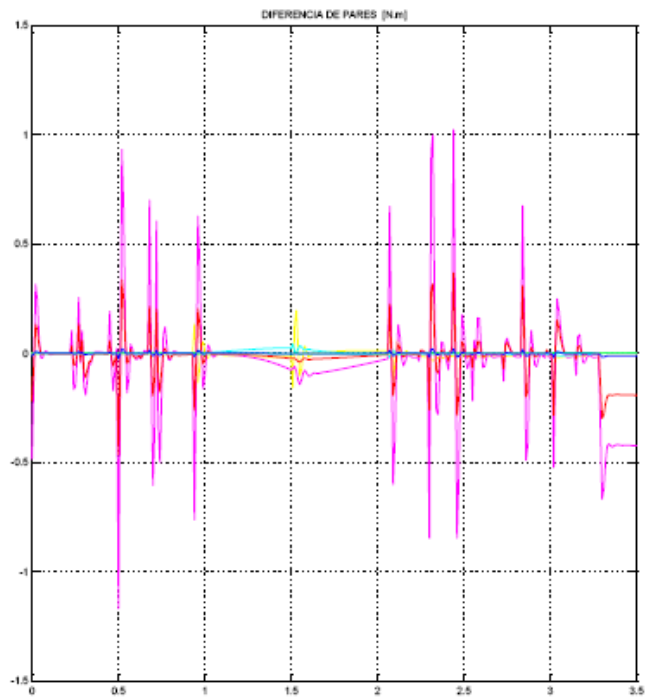
Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.24. Error de aceleraciones angulares método rectangular.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura 5.25. Error de pares método rectangular.



Fuente: Autor del proyecto.

6. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES.

- ☑ La herramienta resultante de esta investigación permite la construcción gradual de tareas en su programación gestual, y a partir de ésta obtener el conjunto de sentencias correspondientes a la programación textual de la tarea. Así mismo, es posible generar un conjunto de poses y trayectorias a partir de un listado de instrucciones. La herramienta permite además: la selección del método de interpolación y del criterio de espaciamiento de puntos de paso para trayectorias dadas en el espacio cartesiano; la manipulación de cinco tipos de piezas diferentes; la simulación total o parcial de la tarea programada; y la creación de archivos de video al simular la tarea. En esta herramienta de programación de tareas se ha implementado la versión iterativa de la formulación de Newton-Euler para la solución del modelo dinámico inverso determinando los pares motores necesarios para la realización del movimiento deseado, que idealmente de ser aplicados suprimirían las respuestas transitorias siguiendo fielmente las trayectorias deseadas, idealmente puesto que el sistema gracias a su propia inestabilidad a partir de muy pequeñas diferencias entre el valor ideal y el aplicado, por cifras significativas o por errores de cuantización, logra apartarse considerablemente de las señales estipuladas hasta el punto de presentar oscilaciones crecientes en las curvas cinemáticas.

- ☑ Se ha empleado la formulación de Newton-Euler en el desarrollo del modelo dinámico inverso con base en la eficacia y prestaciones de sus ecuaciones señaladas en [6] y en [7].

- ☑ Los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo implementado de corrección de momentos motores muestran la necesidad de un máximo de dos iteraciones para la eliminación de los sobrepasos. Esto indica un planteamiento correcto del método iterativo.

- ☑ El algoritmo de corrección de momentos no se encuentra ligado al empleo de la versión iterativa de la formulación de Newton–Euler en la solución del modelo dinámico inverso del manipulador, el único requerimiento que presenta es que el par sea calculado en dos componentes: una requerida para el equilibrio estático y la otra dependiente de velocidades y aceleraciones además de las posiciones.

- ☑ El criterio equidistante se ha establecido claramente como la mejor opción de generación de puntos de paso para trayectorias definidas en el espacio cartesiano, a partir de los resultados arrojados por la comparación de criterios de espaciamiento realizada. Estos resultados también indican que, para trayectorias en las cuales no se presenten puntos inalcanzables, en el algoritmo de asignación de puntos de paso no se han de efectuar más de dos iteraciones. Además, los criterios cosenoidal y rectangular, concebidos con el fin de lograr el contraste del criterio de Chebyshev, han ofrecido mejores resultados que este último.

- ☑ A pesar de la apreciable similitud presente en la parte inicial de las curvas deseadas y las curvas obtenidas empleando la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, estas se distancian considerablemente conforme el tiempo progresa debido a la naturaleza inestable del sistema. Por tanto se hace necesario una estrategia en lazo cerrado para el control del manipulador.

- ☑ Para valores de desplazamiento que superen el producto entre el factor de proporcionalidad y el cociente del cuadrado de la velocidad y la aceleración, los tiempos mínimos establecidos por los métodos basados en polinomios y en el movimiento cicloidal son directamente proporcionales al desplazamiento. Este hecho y los diferentes valores del factor de proporcionalidad ocasionan que las diferencias entre los tiempos calculados por los métodos mencionados aumenten conforme lo hace el desplazamiento. En los métodos de aceleración rectangular, senoidal y

cosenoidal el incremento en el tiempo equivale al incremento en el desplazamiento dividido por la velocidad máxima. Lo anterior indica que se mantiene constante la diferencia entre los tiempos calculados a través de estos métodos a medida que se aumenta el desplazamiento.

- ☑ Los métodos de interpolación de aceleración cosenoidal y el basado en polinomios de séptimo grado presentan curvas de sobreaceleración continuas en el tiempo, siendo una ventaja frente a los demás métodos analizados cuando las señales de control contienen términos dependientes de la curva cinemática mencionada.

- ☑ Empleando el método de aceleración rectangular se obtienen los menores tiempos posibles. Entre los métodos basados en polinomios, el que utiliza el de tercer grado ofrece los menores tiempos. Estos métodos son favorables en cuanto a tiempo respecta, sin embargo, exhiben discontinuidades en la señal de aceleración ocasionando picos de sobreaceleración lo que resulta poco conveniente pues se generan discontinuidades en los pares calculados incrementando los transitorios e incrementando a su vez las tasas de error medidas entre las curvas de desplazamientos deseados y obtenidos.

- ☑ A través del análisis cinemático realizado se ha determinado que el procedimiento que permite el aumento del tiempo de ejecución del movimiento de forma mas eficiente es el consistente de variaciones simultáneas de los valores máximos de velocidad y de aceleración manteniendo constante el cociente de estas variables, ya que no origina incumplimientos de las condiciones establecidas en cada método.

- ☑ Las expresiones logradas en esta investigación para el movimiento rotacional, concernientes a los métodos de aceleración rectangular, senoidal, cosenoidal y trapezoidal, también son aplicables al movimiento

traslacional, en cuyo caso se sustituyen las variables angulares por sus homólogas lineales.

- Si se establece un valor máximo para la sobreaceleración, el método de interpolación que ofrece menores tiempos de ejecución de desplazamientos es el de aceleración trapezoidal. Este método no se ha incluido como opción para efectuar la interpolación pues requiere de la asignación de un valor máximo posible de sobreaceleración.

- Se establecieron satisfactoriamente las soluciones analíticas a los problemas de sujeción de las diferentes piezas consideradas en este trabajo y de movimiento del efector libre de carga.

- Los datos generados por la herramienta producida correspondientes a las variables cinemáticas y pares, han demostrado una alta fiabilidad, según se aprecia en las figuras de resultados de la utilización del modelo 3D en la simulación de una tarea. La diferencia entre los ángulos deseados y los obtenidos de la simulación no superan a un grado. La simulación se ha realizado empleando un esquema de control en lazo cerrado de par calculado.

7. RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS.

- Implementar estrategias de control en lazo cerrado adaptativas para lograr menores errores en las curvas cinemáticas.
- Emplear métodos de solución general al problema cinemático inverso, brindando así la opción de incluir otros modelos de manipuladores e incluso crearlos y editarlos en la herramienta.
- Efectuar la detección de colisiones entre el manipulador y su entorno, brindando un mayor realismo al ambiente 3D de la ventana principal de la herramienta.
- Dotar a la herramienta de un conjunto más amplio de piezas a manipular, así como de la capacidad de edición de sus dimensiones.
- Analizar la generación de trayectorias para robots redundantes e implementar el uso de estos en la herramienta.

REFERENCIAS

- [1] Gómez O. “Representación visual de modelos robóticos para aplicaciones didácticas.”. Tesis de pregrado de la Universidad Industrial de Santander, 2005.
- [2] Sierra D. “Planeación de trayectorias para un robot en una celda de manufactura.”. Tesis de pregrado de la Universidad Industrial de Santander, 2001.
- [3] Peña A. y Pérez J. y Suárez M. “Prototipo de un robot tipo PUMA de seis grados de libertad.”. Tesis de pregrado de la Universidad Industrial de Santander, 2005.
- [4] Rugeles J. “Modelamiento y simulación cinemática de manipuladores en MatLab”. Tesis de Maestría en Informática de la Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [5] Boresi A. P. y Schmidt R. J. “Ingeniería mecánica: dinámica”. Thomson-Learning, 2001.
- [6] Fu K. S. y Gonzáles R. C. y Lee C. S. G. “Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia.”. McGraw-Hill, 1988.
- [7] Ollero A. “ROBÓTICA Manipuladores y robots móviles”. Alfaomega-Marcombo, 2001.
- [8] Angeles J. “Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and algorithms, 2nd ed.”. Springer, 2002.
- [9] Martínez R. “Principios de accionamientos eléctricos”. Universidad Industrial de Santander, 1988.

Referencias de internet:

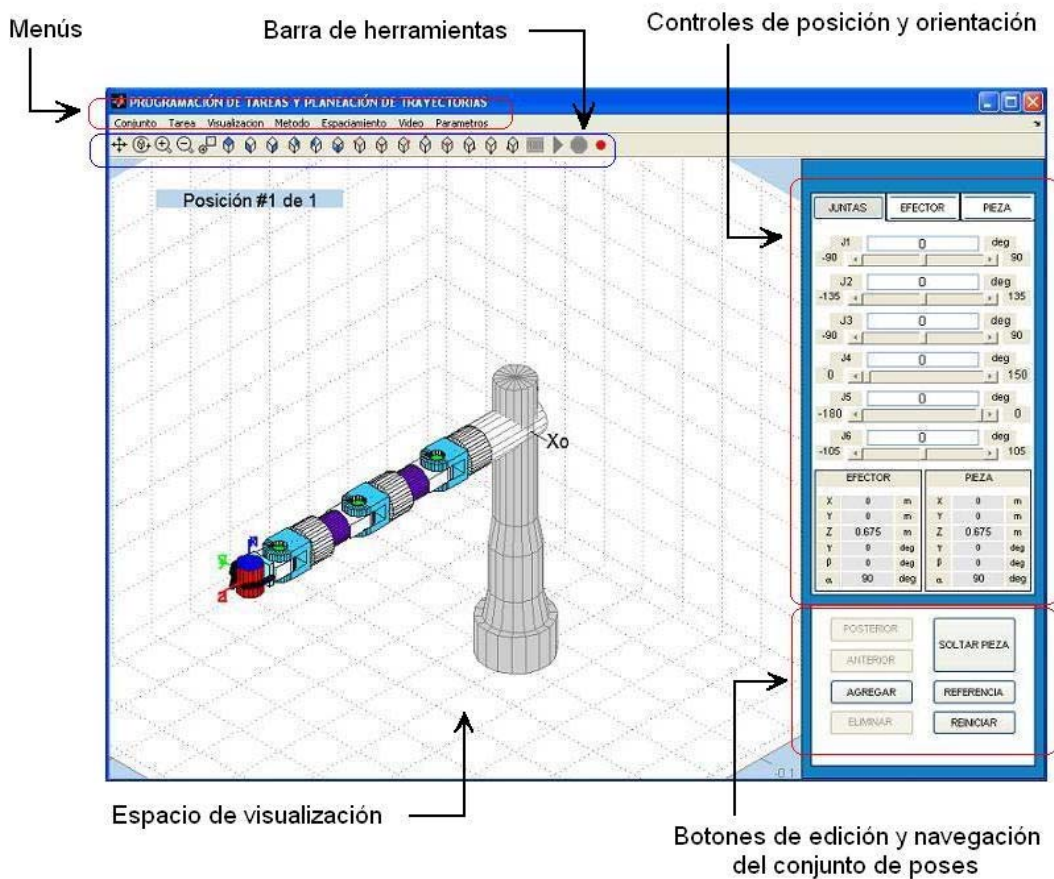
- www.mathworks.com ⇒ *The MathWorks, Inc.*
- www.nasa.gov ⇒ *National Aeronautics and Space Administration*
- www.ri.cmu.edu ⇒ *Robotics Institute. Carnegie-Mellon University*
- www.newtonium.com ⇒ *Newtonium*
- www.easy-rob.com ⇒ *New River Kinematics Inc.*

ANEXOS

ANEXO A. GUÍA DE USUARIO

Al digitar la palabra *grassbot* en la ventana de comandos de MATLAB se despliega la ventana principal de la interfaz gráfica de la plataforma (figura A.1). Esta ventana se compone, a gran escala, de cuatro grupos de herramientas y de un espacio de visualización.

Figura A.1. Ventana principal de la plataforma.



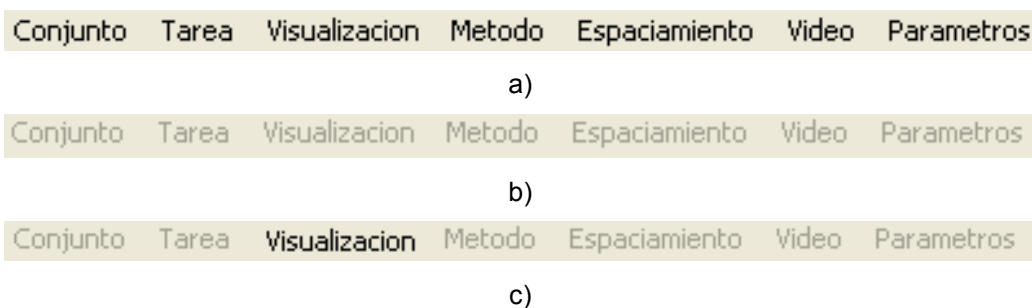
Fuente: Autor del proyecto.

A.1. DESCRIPCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS

Menús

Las herramientas de este grupo están orientadas al manejo de archivos y a la configuración de opciones y parámetros de simulación (figura A.2).

Figura A.2. Estado de los menús: a) durante la programación, b) durante la simulación, c) simulación pausada.

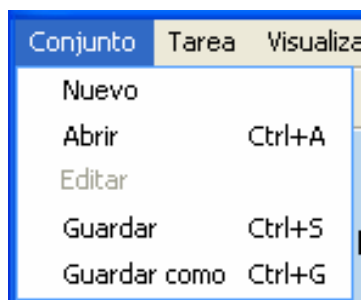


Fuente: Autor del proyecto.

Conjunto

El directorio empleado por defecto para abrir y guardar los conjuntos de poses es *conjuntos* ubicado en el directorio donde se han instalado los archivos que conforman la plataforma (figura A.3).

Figura A.3. Menú *Conjunto* desplegado

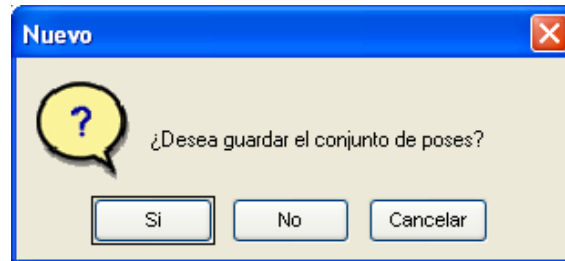


Fuente: Autor del proyecto.

→ *Nuevo*

Al seleccionar este menú aparece una ventana en la que se puede elegir guardar o no el conjunto de poses empleado hasta el momento o cancelar la acción de emplear un nuevo conjunto (figura A.4).

Figura A.4. Ventana desplegada por el menú *Nuevo*.

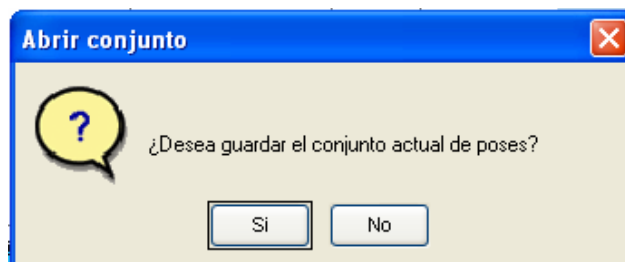


Fuente: Autor del proyecto.

→ *Abrir*

Si el conjunto de poses en el momento de ejecutar este menú no se encuentra guardado se despliega una ventana en donde es posible elegir guardar o no este conjunto de poses (figura A.5).

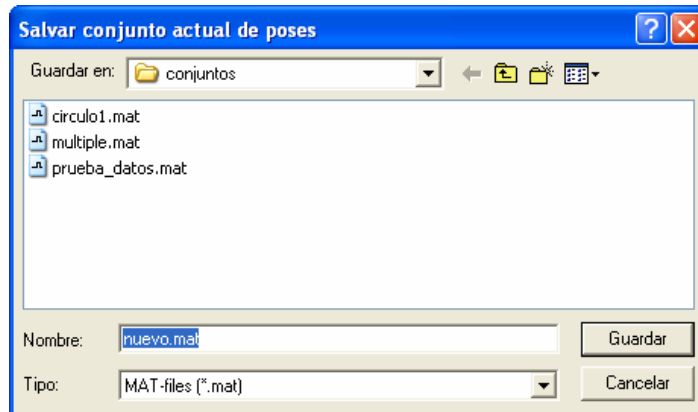
Figura A.5. Ventana desplegada por el menú *Abrir* si no se han guardado los cambios al conjunto actual de poses.



Fuente: Autor del proyecto.

Si se elige guardar el conjunto de poses emerge a continuación la ventana empleada para guardar archivos (figura A.6).

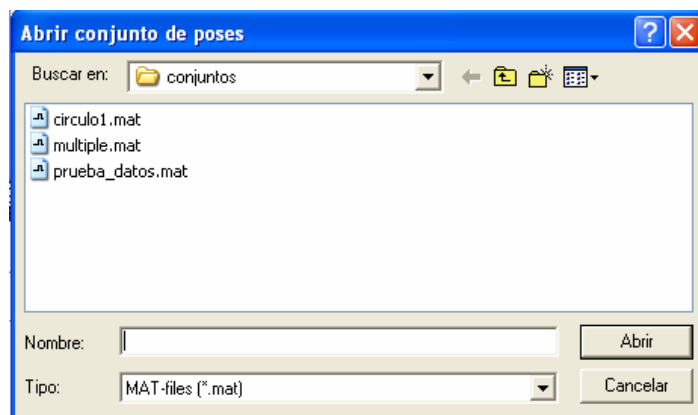
Figura A.6. Ventana desplegada por el menú *Abrir* cuando se pretende guardar el conjunto de poses actual.



Fuente: Autor del proyecto.

Si ya se guardó el conjunto de poses o si no se optó por esa posibilidad, emerge la ventana de abrir archivos (figura A.7).

Figura A.7. Ventana empleada para cargar un conjunto de poses contenido en un archivo **.mat*.



Fuente: Autor del proyecto.

Al abrir un conjunto de poses sólo es posible la navegación por este, por tanto no es posible agregar o eliminar poses y piezas, cambiar los valores en las poses existentes, soltar o sujetar pieza alguna o reiniciar el conjunto de poses.

→ *Editar*

Al seleccionar este menú se habilitan los controles que permiten la edición del conjunto de poses.

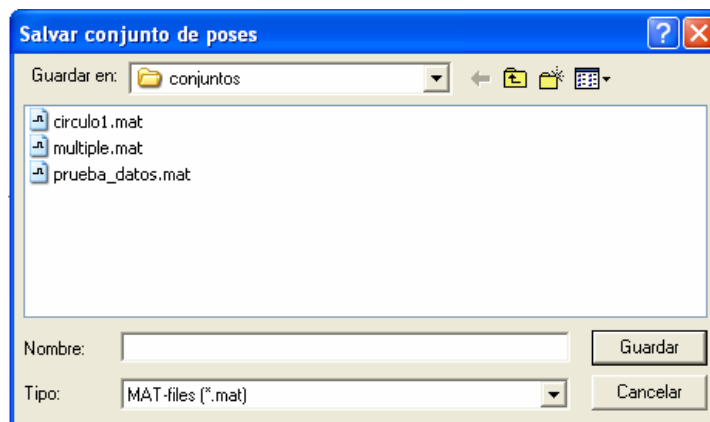
→ *Guardar*

Guarda los cambios del conjunto de poses previamente cargado.

→ *Guardar como*

Despliega la ventana empleada para guardar archivos. El archivo debe tener la extensión **.mat* (figura A.8).

Figura A.8. Ventana desplegada por el menú *Guardar como* relativo al conjunto de poses.



Fuente: Autor del proyecto.

Tarea

El directorio *tareas* es el empleado por defecto para abrir y guardar tareas, y está ubicado en el directorio donde se ha instalado la plataforma (figura A.9).

Figura A.9. Menú *Tarea* desplegado.

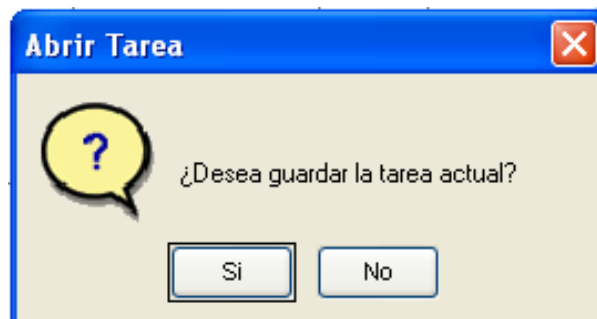
Tarea	Visualizacion	Metodo
Abrir		Ctrl+T
Editar		
Guardar		
Guardar como		Ctrl+R
Abrir txt		Ctrl+X
Generar txt		Ctrl+T

Fuente: Autor del proyecto.

→ *Abrir*

Si se ha generado una tarea, al ejecutar este menú se despliega una ventana para elegir guardar o no la tarea (figura A.10).

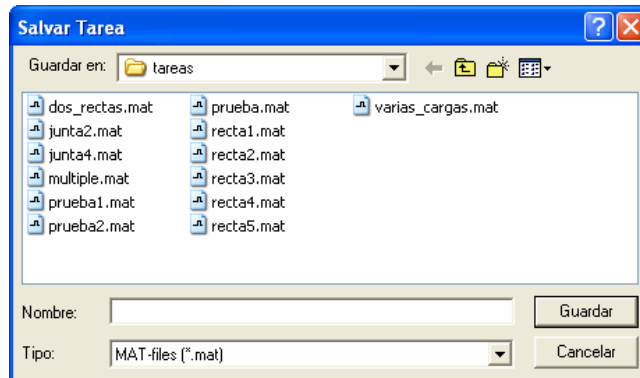
Figura A.10. Ventana desplegada por el menú *Abrir* si las modificaciones hechas a la tarea actual no han sido salvadas.



Fuente: Autor del proyecto.

Si se elige guardar la tarea, aparece la ventana usada para guardar archivos (figura A.11).

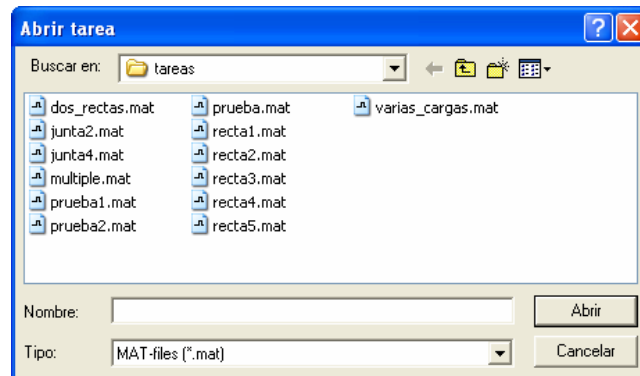
Figura A.11. Ventana desplegada por el menú *Abrir* cuando se pretende guardar la tarea actual.



Fuente: Autor del proyecto.

Tras el proceso anterior, emerge la ventana de abrir archivos, por defecto muestra las tareas guardadas como archivos **.mat* (figura A.12).

Figura A.12. Ventana empleada para abrir tareas contenidas en archivos **.mat*.



Fuente: Autor del proyecto.

Al cargar una tarea las opciones de edición quedan deshabilitadas, sin embargo es posible examinar el conjunto de trayectorias del que se compone la tarea, como también el tiempo asignado para cada trayectoria y las poses asociadas a ésta.

→ *Editar*

Habilita los controles de edición de tareas.

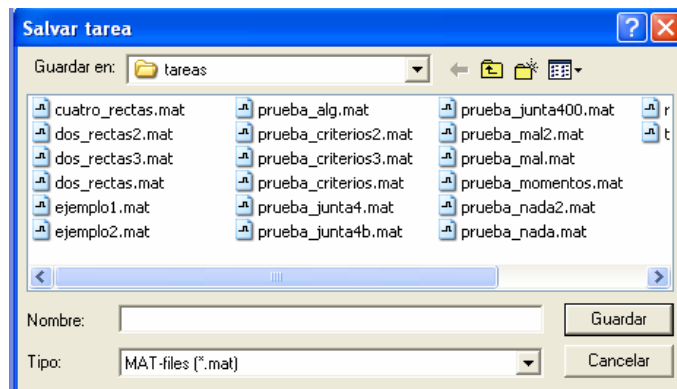
→ *Guardar*

Guarda los cambios hechos al conjunto de trayectorias y deshabilita los controles de edición de tareas.

→ *Guardar como*

Despliega la ventana usada para guardar archivos (figura A.13).

Figura A.13. Ventana desplegada por el menú *Guardar como* relativo a las tareas.



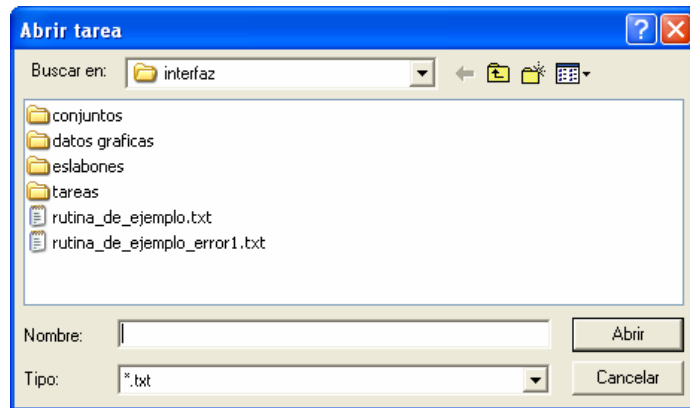
Fuente: Autor del proyecto.

De ser correcto el nombre dado para el archivo, se deshabilitan los controles de edición de tareas.

→ *Abrir txt*

De forma semejante al menú *abrir*, al ejecutar este menú se presenta la opción de guardar la tarea presente, si existe, y emerge la ventana utilizada para guardar archivos si se elige la opción de guardar tarea. A diferencia del menú citado, la ventana usada para abrir archivos muestra aquellos con extensión *.txt (figura A.14).

Figura A.14. Ventana empleada para abrir tareas contenidas en archivos *.txt.



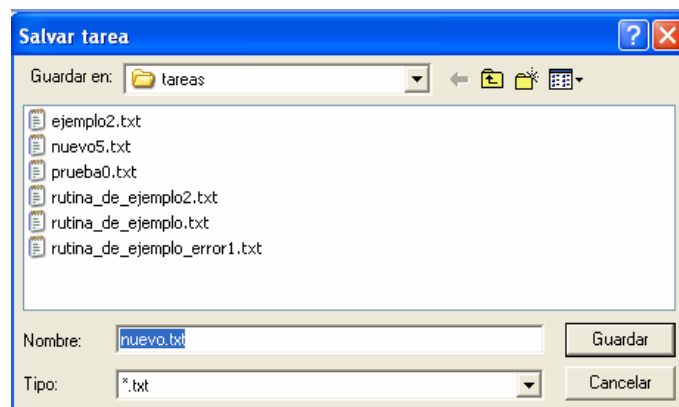
Fuente: Autor del proyecto.

De ser correcto el nombre dado para el archivo, se deshabilitan los controles de edición de tareas y los relacionados a la modificación del conjunto de poses.

→ *Generar txt*

Este menú despliega la ventana de guardar archivos, mostrando aquellos con extensión *.txt. Crea un archivo con el listado de instrucciones correspondientes a la tarea presente en la ventana principal de la plataforma (figura A.15).

Figura A.15. Ventana empleada para guardar tareas en archivos *.txt (programación textual).



Fuente: Autor del proyecto.

Visualización

En este menú se encuentran las opciones de visualización del manipulador y de su volumen de trabajo.

→ *Eslabones*

Permite elegir el modo de visualización de las superficies de los eslabones que conforman el manipulador, excepto la base. Estas opciones son: alambres, superficies, alambres y superficies y ninguno (figura A.16).

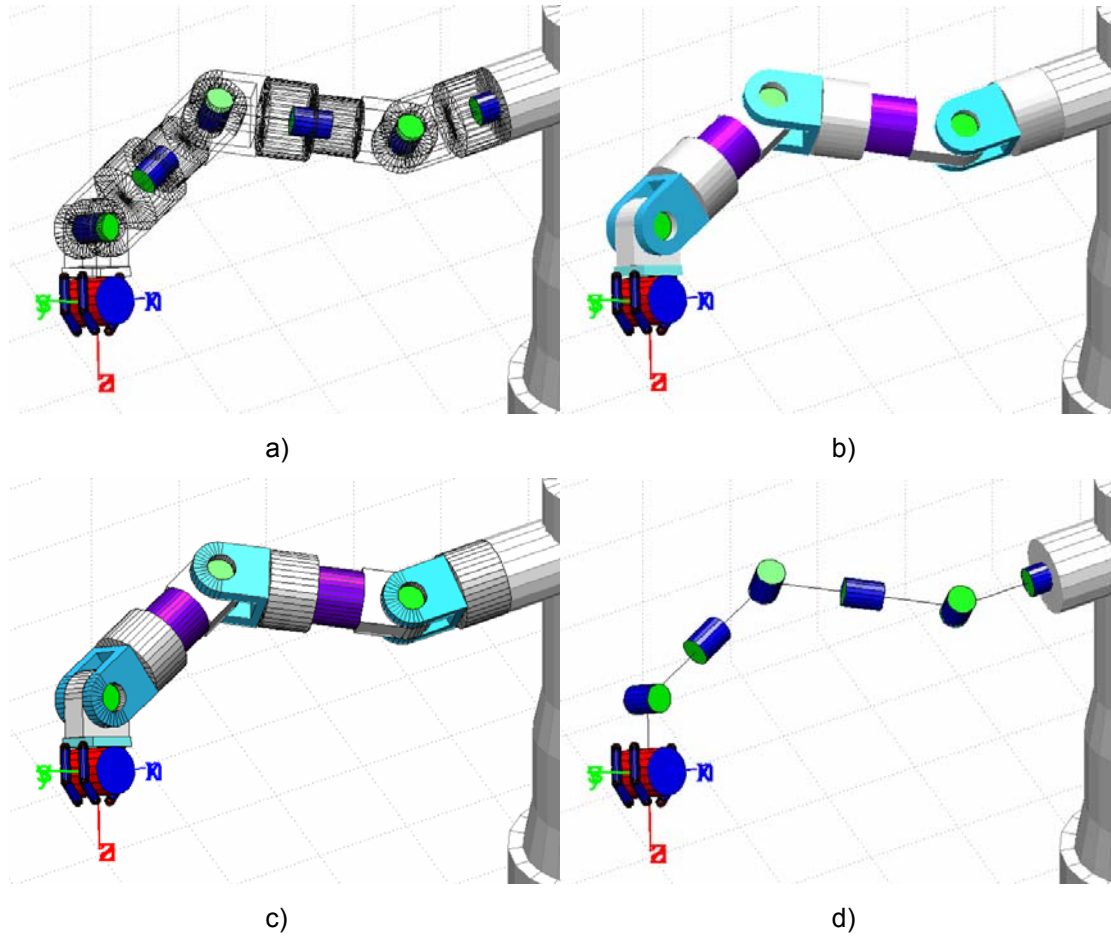
Figura A.16. Submenú *Eslabones* desplegado.

Visualizacion	Metodo	Espaciamiento	Video
Eslabones ▶	Alambres		
Base ▶	Superficies		
Luz ▶	Alambres y superficies		
Volumen ▶	Ninguno		

Fuente: Autor del proyecto.

De seleccionar la última opción de este menú se apreciará una línea que une los orígenes de los sistemas de referencia y además de seis cilindros que representan a las articulaciones (figura A.17).

Figura A.17. Opciones de visualización del manipulador: a) alambres, b) superficies, c) alambres y superficies, d) ninguno.



Fuente: Autor del proyecto.

→ *Base*

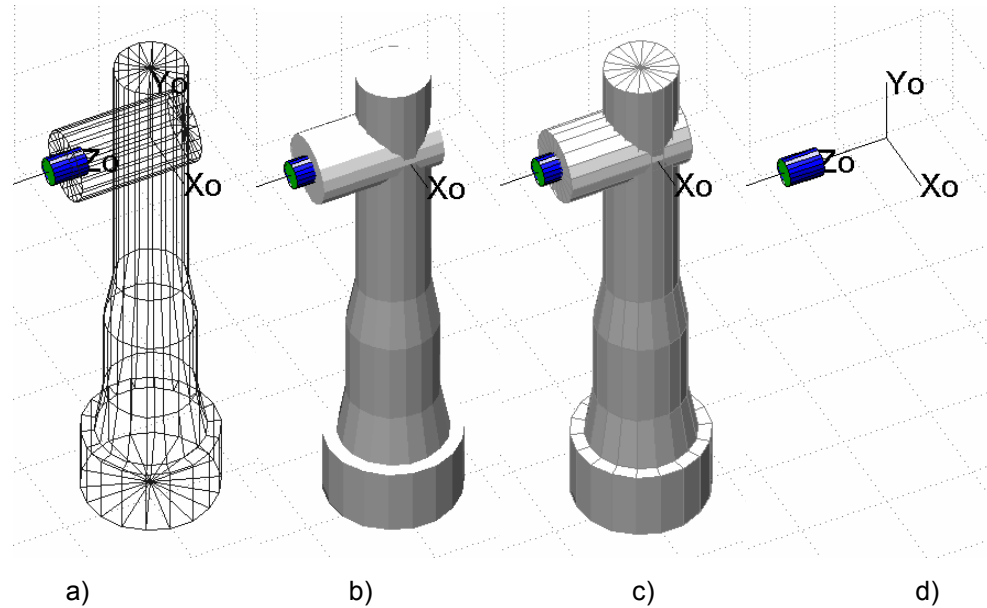
Permite elegir el modo de visualización de la base. Estas opciones son: alambres, superficies, alambres y superficies y ocultar (figuras A.18y A.19).

Figura A.18. Submenú *Base* desplegado.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.19. Opciones de visualización de la base del manipulador: a) alambres, b) superficies, c) alambres y superficies, d) ocultar.



Fuente: Autor del proyecto.

→ Luz

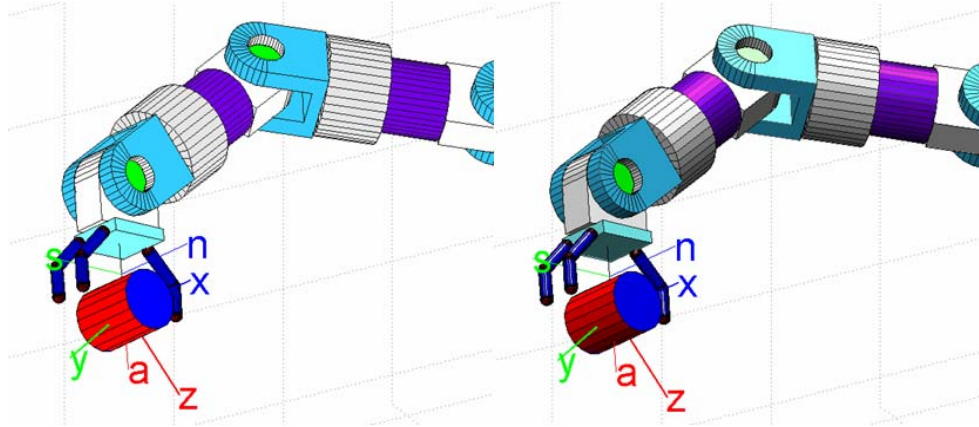
Cuenta con las opciones de encender y apagar las luces. Además, puede elegirse el estilo de iluminación: infinito o local (figuras A.20 y A.21).

Figura A.20. Submenú *Luz* desplegado.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.21. Opciones de iluminación: a) luz apagada, b) luz encendida.



Fuente: Autor del proyecto.

→ *Volumen*

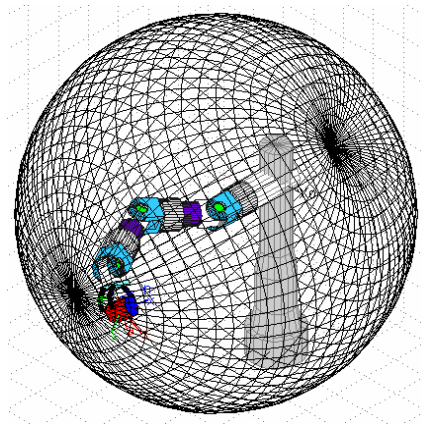
Permite visualizar u ocultar la superficie (malla) que envuelve externamente al volumen de trabajo (figuras A.22 y A.23).

Figura A.22. Submenú *Volumen* desplegado.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.23. Superficie externa del *volumen de trabajo*.



Fuente: Autor del proyecto.

Método

A través de este menú se selecciona el método de interpolación a emplear en la planeación de trayectorias. El método de interpolación por defecto es el *cosenoidal* (figura A.24).

Figura A.24. Menú *Método* desplegado.

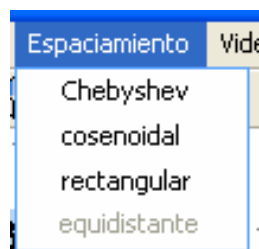


Fuente: Autor del proyecto.

Espaciamiento

Este menú permite la elección del criterio de espaciamiento de puntos de paso utilizado en la generación de trayectorias continuas. El criterio por defecto es el *equidistante* (figura A.25).

Figura A.25. Menú *Espaciamiento* desplegado.

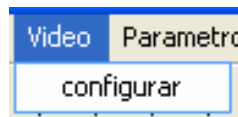


Fuente: Autor del proyecto.

Video

Al seleccionar *configurar* en este menú (figura A.26), se despliega una ventana que contiene datos relativos al video (figura A.27), estos datos son: el nombre con que se desea guardar el archivo *.avi, la cantidad de cuadros por segundo, el porcentaje de calidad, y el compresor a utilizar.

Figura A.26. Menú *Video* desplegado.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.27. Ventana de configuración de parámetros de video.



Fuente: Autor del proyecto.

Parámetros

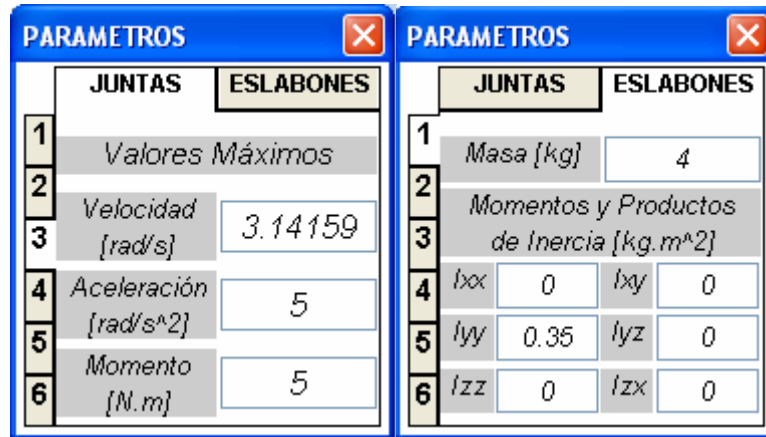
Despliega una ventana con: los datos de velocidad, aceleración y momentos máximos posibles en las juntas; y los valores de las propiedades de masa y momentos y productos de inercia de cada eslabón (figuras A.28 y A.29).

Figura A.28. Menú *Parámetros* desplegado.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.29. Ventana de modificación de propiedades: a) juntas, b) eslabones.



a)

b)

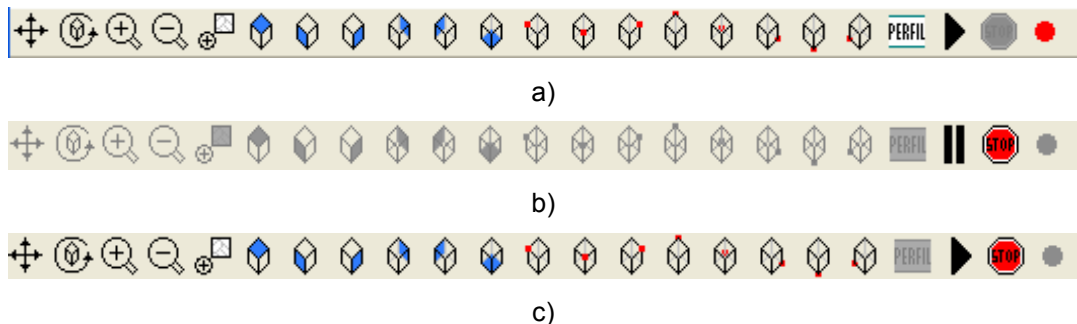
Fuente: Autor del proyecto.

La elección de la junta o del eslabón se efectúa pulsando el botón derecho del ratón sobre la respectiva etiqueta.

Barra de herramientas

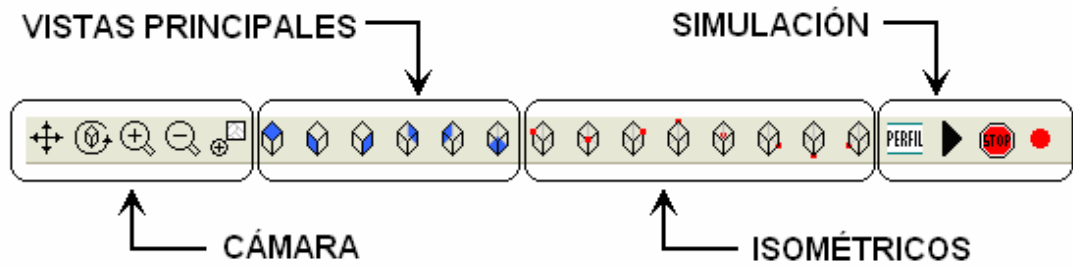
Los botones de la barra de herramientas se agrupan en cuatro divisiones de acuerdo a la función que desempeñan (figuras A.30 y A.31).

Figura A.30. Estado de la barra de herramientas: a) durante la programación, b) durante la simulación, c) simulación pausada.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.31. Divisiones de la barra de herramientas.



Fuente: Autor del proyecto.

Cámara

A través de las herramientas de esta división el usuario puede manipular la posición y orientación de la cámara. Las funciones de estas herramientas se ejecutan al oprimir el botón izquierdo del ratón y terminan al soltar ese botón.

→ *Mover* 

Manteniendo el botón oprimido, arrastra al manipulador y a su espacio de trabajo.

→ *Rotar* 

El movimiento horizontal del puntero genera una rotación alrededor de un eje vertical (paralelo al eje y_0 de la base), y el movimiento vertical ocasiona una rotación sobre un vector normal al plano que se encuentra de perfil.

→ *Aumentar* 

Si se mantiene oprimido el botón del ratón, el movimiento vertical del puntero genera cambios en la posición de la cámara, así, si el puntero se desplaza hacia arriba la cámara se acerca, de lo contrario la cámara se

aleja. Al soltar el botón, si no se movió el puntero mientras estaba oprimido el botón se realiza un acercamiento.

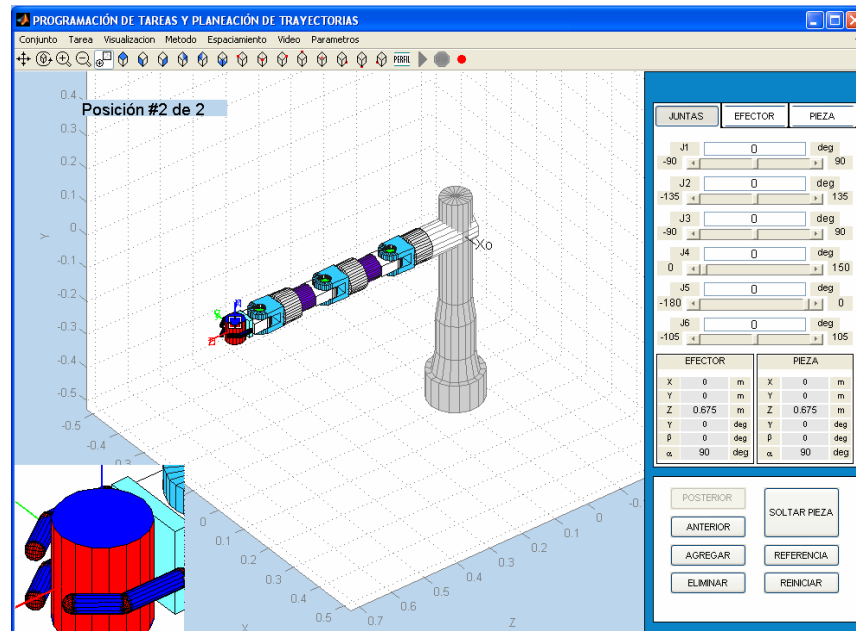
→ *Disminuir* 

Al soltar el botón, si no se desplazó el puntero mientras se mantenía oprimido el botón se aleja la cámara, esta es la diferencia entre esta herramienta y la anterior.

→ *Zoom dinámico* 

Esta herramienta muestra, en un recuadro ubicado en la esquina inferior izquierda de la ventana principal, una ampliación de la zona aledaña a la ubicación del puntero (figura A.32).

Figura A.32. Herramienta *zoom dinámico*.



Fuente: Autor del proyecto.

Vistas principales

Las herramientas de este grupo ubican la cámara de forma tal que muestran las vistas principales del espacio tridimensional de trabajo (figura A.33). A continuación se muestran de cada una de estas herramientas la denominación, el icono y la posición de la cámara.







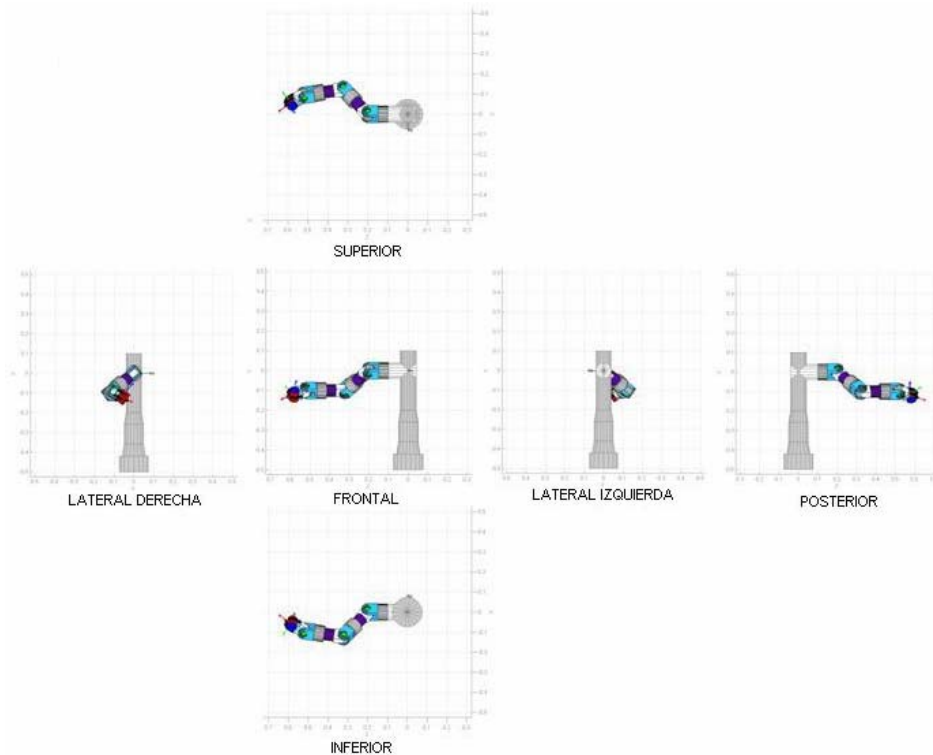
→ Superior		$(0, y, 0)$
→ Lateral derecha		$(z, 0, 0)$
→ Frontal		$(0, 0, x)$
→ Lateral izquierda		$(-z, 0, 0)$
→ Posterior		$(0, 0, -x)$
→ Inferior		$(0, -y, 0)$

Figura A.33. Vistas principales.



Fuente: Autor del proyecto.

Isométricos

Estas herramientas hacen que la cámara o punto de vista se ubique de tal manera que la imagen se aprecie como una vista isométrica (figura A.34). A continuación se muestran de cada una de estas herramientas la denominación, el icono y la posición de la cámara.









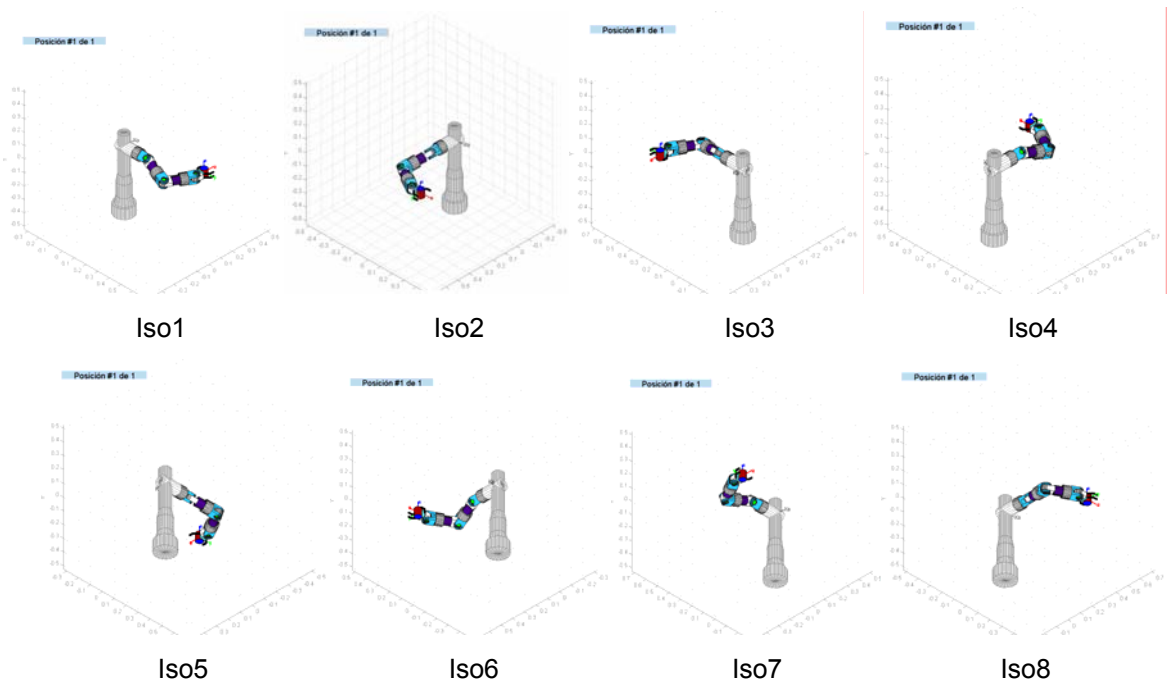
→ Iso1		$(-x, y, z)$
→ Iso2		(x, y, z)
→ Iso3		$(x, y, -z)$
→ Iso4		$(-x, y, -z)$
→ Iso5		$(-x, -y, -z)$
→ Iso6		$(x, -y, -z)$
→ Iso7		$(x, -y, z)$
→ Iso8		$(-x, -y, z)$

Figura A.34. Vistas isométricas.



Fuente: Autor del proyecto.

Simulación

→ Perfil



Esta herramienta se encuentra habilitada cuando existen dos o más poses. Al activarse despliega una ventana que muestra el conjunto de trayectorias y permite su edición (figura A.35). Además, posibilita la simulación del conjunto de poses en su totalidad o de sólo una parte de él. Si no se han asignado trayectorias involucrando las poses indicadas es visible la imagen de advertencia, en caso contrario, al cerrar esta ventana se habilita el botón *Simular* de la barra de herramientas.

Figura A.35. Perfil de simulación.



Fuente: Autor del proyecto.

Como se aprecia en la anterior figura, es posible alterar el orden de las trayectorias definidas, editarlas y eliminarlas. Pulsando el botón *editar* aparece la ventana de edición de trayectoria (figura A.36), la cual muestra: el número y el tipo de trayectoria; un listado con las poses y los tiempos a ellas asociados; y un menú desplegable que permite cambiar el tipo de trayectoria.

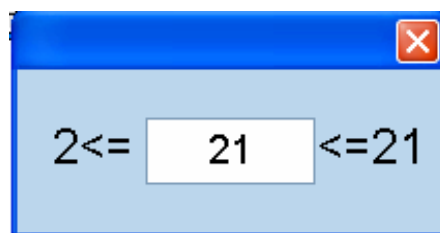
Figura A.36. Ventana de edición de trayectoria.



Fuente: Autor del proyecto.

Si se cambia la trayectoria a una de tipo *punto a punto* o *spline*, y la cantidad de poses asociadas a la trayectoria son mas de dos o de tres respectivamente, aparece una ventana con el fin de elegir el número de poses a emplear en la nueva trayectoria (figura A.37).

Figura A.37. Ventana de elección del número de poses para la nueva tarea.

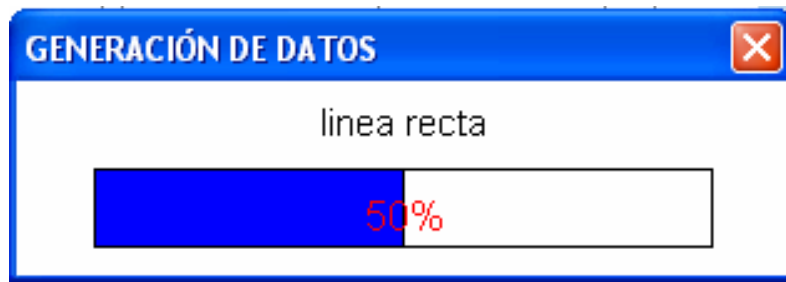


Fuente: Autor del proyecto.




→ *Simular/Pausar*

Oprimiendo el icono se generan las trayectorias. Mientras los cálculos requeridos son realizados emerge una ventana informativa (figura A.38).

Figura A.38. Ventana mostrada durante la obtención de datos de simulación.



Fuente: Autor del proyecto.

Al terminar los cálculos inicia la simulación del movimiento del manipulador, el icono de esta herramienta cambia a , se deshabilitan los menús y los botones *perfil* y *video* de la barra de herramientas, se habilita el botón *detener*, y se ocultan los controles. Al pulsar el botón  el icono cambia a , se pausa la simulación y se habilitan el menú *visualización* y los botones de manejo de *cámara* y de *vistas principales e isométricas*.

→ *Detener*



Oprimiendo este botón se detiene la simulación, habilitando nuevamente los controles, los menús y los botones de *perfil*, *video*, y de manejo de *cámara* y de *vistas principales e isométricas*.

→ *Video*



Si se encuentra activa esta herramienta cuando se oprime *simular* se graba un archivo de video en el directorio actual.

Controles de posición y orientación

A través de los botones, editores y deslizadores miembros de este grupo se logran variar la posición y la orientación del efector final y de la carga activa, en el sistema de referencia anclado a la base del manipulador; esto también se logra modificando los valores de los ángulos asociados a las articulaciones (figura A.39).

Figura A.39. Controles de posición y de orientación.

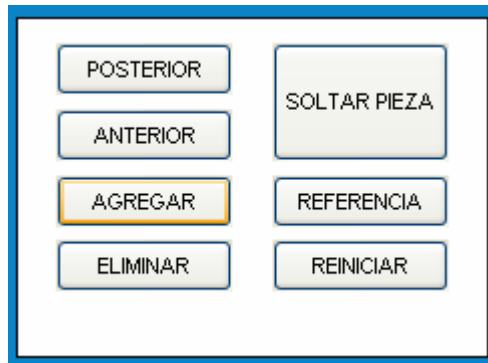
JUNTAS			EFECTOR			PIEZA		
J1	<input type="text" value="0"/>	deg						
	-90							90
J2	<input type="text" value="0"/>	deg						
	-135							135
J3	<input type="text" value="0"/>	deg						
	-90							90
J4	<input type="text" value="0"/>	deg						
	0							150
J5	<input type="text" value="0"/>	deg						
	-180							0
J6	<input type="text" value="0"/>	deg						
	-105							105
EFECTOR			PIEZA					
X	0	m	X	0	m			
Y	0	m	Y	0	m			
Z	0.675	m	Z	0.675	m			
γ	0	deg	γ	0	deg			
β	0	deg	β	0	deg			
α	90	deg	α	90	deg			

Fuente: Autor del proyecto.

Edición y navegación en el conjunto de poses

Los botones pertenecientes a esta división permiten que el usuario se desplace a través de las poses y modifique los valores en estas (figura A.40).

Figura A.40. Controles de navegación y edición del conjunto de poses.



Fuente: Autor del proyecto.

→ *anterior, posterior*

Permiten al usuario desplazarse a través del conjunto de poses definidas.

→ *agregar*

Copia la presente pose y la adiciona a continuación de ésta.

→ *eliminar*

Elimina la pose presente.

→ *soltar/sujetar pieza*

Mediante este botón se logra que el manipulador suelte la pieza o la sujete si es posible.

→ *referencia*

Lleva al manipulador y a la carga seleccionada, si está sujeta por el efector, a la posición de referencia.

→ *reiniciar*

Reinicia la plataforma.

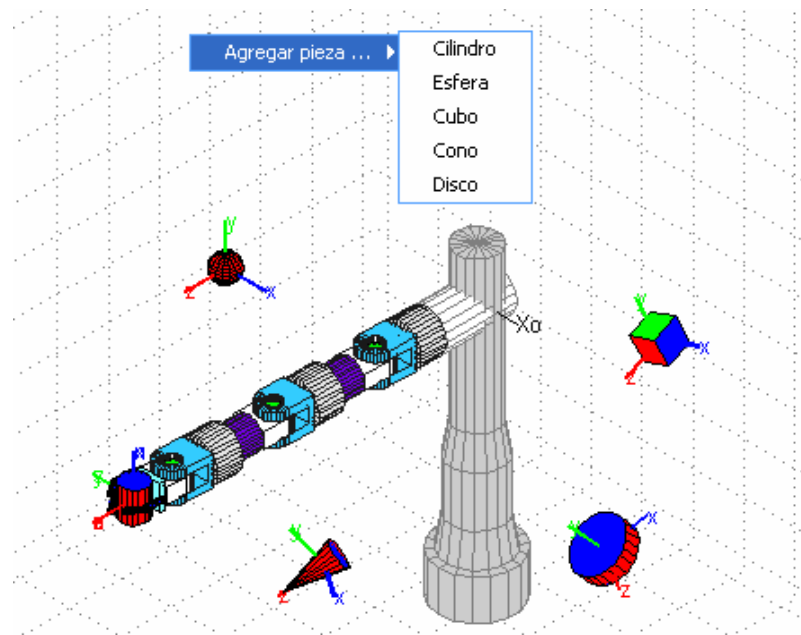
A.2. PROGRAMACIÓN GESTUAL DE UNA TAREA

Creación de las piezas requeridas

Es posible agregar cualquier cantidad de piezas, cambiarlas y ubicarlas de ser necesario, mientras no se haya guardado el conjunto de poses o mientras el conjunto cargado se encuentre en edición.

Para crear una pieza se ha de pulsar el botón izquierdo del ratón estando el puntero ubicado en el espacio de visualización. Aparecerá entonces un menú con los tipos de piezas posibles, se ha de elegir la deseada (figura A.41).

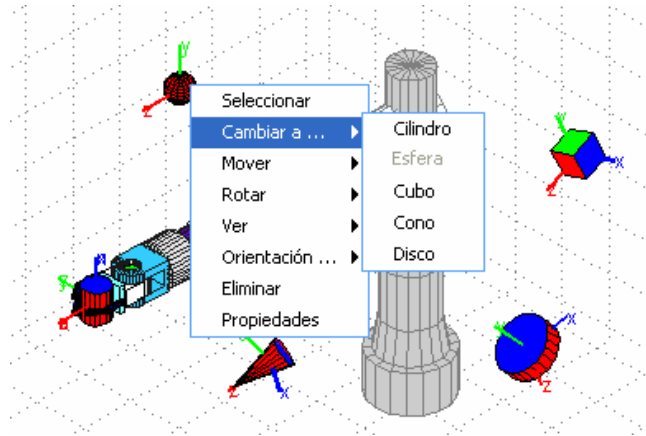
Figura A.41. Menú *agregar pieza*.



Fuente: Autor del proyecto.

Para reemplazar una pieza basta con ubicar el puntero sobre la pieza y pulsar el botón derecho del ratón, desplegándose el menú de la pieza (figura A.42).

Figura A.42. Menú de la pieza.



Fuente: Autor del proyecto.

El menú de la pieza permite además: la selección de esta, acción necesaria para ser sujeta por el efector; la traslación en los sistemas de referencia de la base y de la pieza (figura A.43); la rotación alrededor de los ejes de los sistemas de referencia de la pieza y del sistema de referencia de la base trasladado al centro de masa de la pieza (figura A.44); el cambio en el modo de visualización (figura A.45); la activación de la orientación fija; la modificación de las propiedades de masa y de inercia (figura A.46); y la eliminación. Estas opciones, excepto las de selección y visualización, se deshabilitan al guardar el conjunto de pose.

Figura A43. Ventana desplegada cuando se ha seleccionado *mover* en el menú de la pieza.



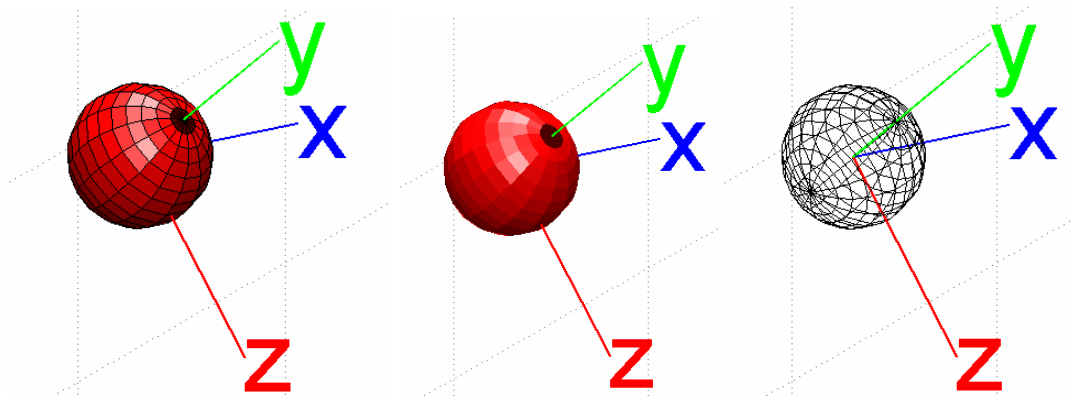
Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.44. Ventana desplegada cuando se ha seleccionado *rotar* en el menú de la pieza.



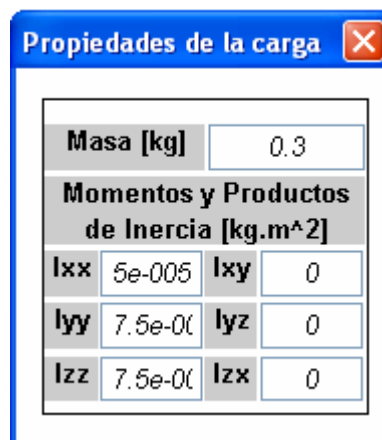
Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.45. Opciones de visualización de la pieza.



Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.46. Ventanas de modificación de parámetros de la pieza.

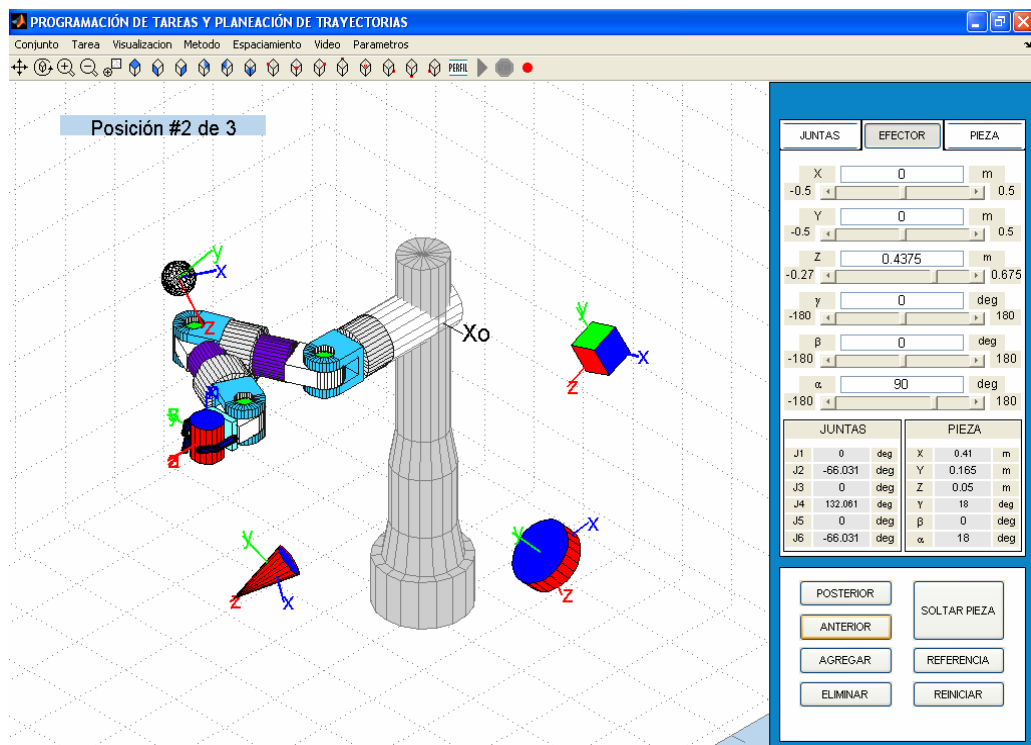


Fuente: Autor del proyecto.

Generación del conjunto de poses.

Se han de crear las poses requeridas empleando: los controles de posición y de orientación, en el espacio de juntas o en el espacio cartesiano asociado a la base del manipulador; y los botones de *edición* y *navegación* (figura A.47).

Figura A.47. Conjunto de poses. Segunda pose de un total de tres.

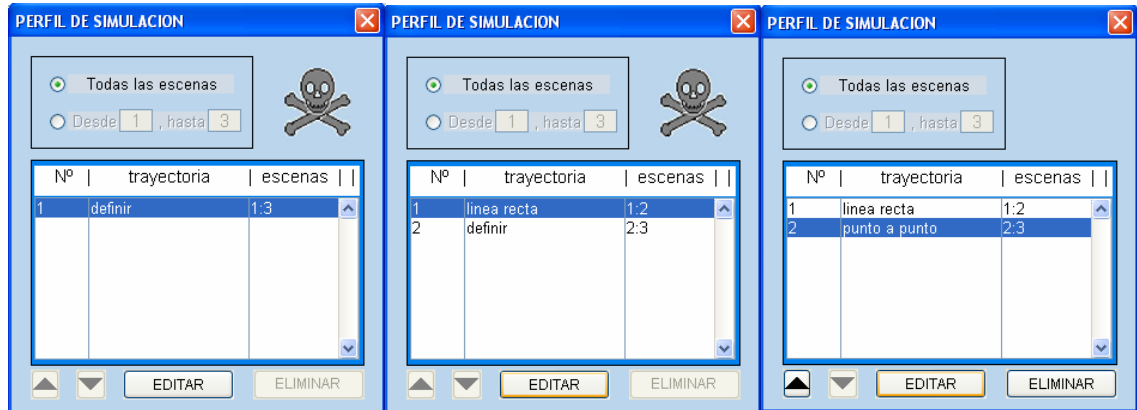


Fuente: Autor del proyecto.

Asignación de trayectorias.

Esta labor se puede realizar a la par de la generación del conjunto de poses o al completar el citado conjunto (figuras A.48 y A.49).

Figura A.48. Asignación de trayectorias, a) no se han definido trayectorias, b) se ha definido la primera trayectoria, c) se han definido las dos trayectorias deseadas.



a)

b)

c)

Fuente: Autor del proyecto.

Figura A.49. Asignación de las trayectorias, a) línea recta con $T = 2$ segundos, b) punto a punto con $T = T_{\text{mínimo}}$.



a)

b)

Fuente: Autor del proyecto.

ANEXO B. FUNCIONES PROGRAMADAS.

CINEMÁTICA INVERSA

CINV_PIEZA (*cinemática inversa* → *sujetar pieza*)

Encuentra si es posible sujetar la pieza indicada. Entrega los ángulos correspondientes a las articulaciones de rotación del manipulador, los respectivos senos y cosenos de estos ángulos, y la matriz de transformación homogénea de la pieza respecto al punto de sujeción del efector final.

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, M, \text{sujetar}] = \text{cinv_pieza}(d, \text{carga})$

Los argumentos de entrada corresponden en su orden a las distancias entre los orígenes de los sistemas de referencia consecutivos y a los datos propios de la carga: tipo, radio, altura, MTH respecto al sistema de referencia asociado a la base del manipulador. Los ángulos iniciales de las articulaciones los toma como cero.

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, M, \text{sujetar}] = \text{cinv_pieza}(d, \text{carga}, \theta_0)$

Se suministra además un vector con los valores iniciales de los ángulos de las articulaciones.

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, M, \text{sujetar}] = \text{cinv_pieza}(d, \text{carga}, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

Se suministra además los senos y cosenos de los ángulos iniciales de las articulaciones evitando calcularlos nuevamente.

Esta función ejecuta una de las siguientes rutinas, de acuerdo al tipo de pieza y a la habilitación de la orientación fija en esta, entregando las distancias entre sistemas de referencia consecutivos, posición de la carga, distancia entre el centro de masa de la pieza y el punto de sujeción del efector cuando está

sujetada, los vectores de orientación de la pieza, y los valores iniciales de los ángulos de las articulaciones. Obtiene de estas rutinas, si es posible sujetar la pieza, los valores de los ángulos y sus senos y cosenos, además de los vectores de orientación del efector final. Si la orientación fija de la pieza se encuentra habilitada se emplea es la rutina de cinemática inversa del efector.

CINV_CILINDRO (cinemática inversa → sujetar cilindro)

CINV_CONO (cinemática inversa → sujetar cono)

CINV_CUBO (cinemática inversa → sujetar cubo)

CINV_DISCO (cinemática inversa → sujetar disco)

CINV_ESFERA (cinemática inversa → sujetar esfera)

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, n, s, a, \text{sujetar}] = \text{cinv_cilindro}(d, P_c, r_c, n_0, s_0, a_0, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, n, s, a, \text{sujetar}] = \text{cinv_cono}(d, P_c, r_c, n_0, s_0, a_0, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, n, s, a, \text{sujetar}] = \text{cinv_cubo}(d, P_c, r_c, n_0, s_0, a_0, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, n, s, a, \text{sujetar}] = \text{cinv_disco}(d, P_c, r_c, n_0, s_0, a_0, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, n, s, a, \text{sujetar}] = \text{cinv_esfera}(d, P_c, r_c, n_0, s_0, a_0, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

Determinan si la pieza es alcanzable o no, de serlo encuentran los ángulos asociados a las juntas siguiendo el criterio de menor desplazamiento de los eslabones.

CINV_EFECTOR (cinemática inversa → posicionar y orientar el efector final)

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, \text{cambio}] = \text{cinv_efector}(d, P, M, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0)$

Determina si el efector puede posicionarse y orientarse como se requiere, y los ángulos de las articulaciones y sus senos y cosenos. Se le suministra las distancias entre sistemas de referencia, la posición deseada del efector, la matriz de orientación del efector respecto a la base y los valores iniciales de los ángulos y sus senos y cosenos.

CINV_AUX1 (cinemática inversa \rightarrow cálculo de θ)

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, Q] = \text{cinv_aux1}(n, s, a, vR, R, d_{23}+d_{34}, d_{45}+d_{56}, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0, Q_0, \text{límites})$

Esta rutina se utiliza cuando θ_4 es diferente de cero para determinar los demás ángulos y emplea a su vez la función *cinv_aux3*.

CINV_AUX2 (cinemática inversa \rightarrow cálculo de θ)

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, Q] = \text{cinv_aux2}(n, s, a, vR, R, d_{23}+d_{34}, \theta_0, \cos\theta_0, \text{sen}\theta_0, \text{límites})$

Se recurre a esta función para determinar los ángulos cuando θ_4 es cero.

CINV_AUX3 (cinemática inversa \rightarrow cálculo de θ)

$[\theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, \text{cambio}] = \text{cinv_aux3}(n, vR, d_{23}+d_{34}, d_{45}+d_{56}, \theta, \cos\theta, \text{sen}\theta, Q, \text{límites})$

Calcula $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_5 cuando se han determinado previamente θ_4 y θ_6 .

CINEMÁTICA DIRECTA

CDIR

$[T, \text{puntos}] = \text{cdir}(D, \theta)$

$[T, \text{puntos}] = \text{cdir}(D, \cos\theta, \text{sen}\theta)$

Entrega las MTH de cada sistema de referencia con respecto al sistema anclado a la base del manipulador $\{0\}$ y los vectores posición de los orígenes de los sistemas de referencia expresados en $\{0\}$. Los argumentos de entrada son los vectores posición de los orígenes de cada sistema de referencia expresado en el inmediatamente anterior y los ángulos o sus senos y cosenos.

MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

POLINOMIAL3	→	polinomio de tercer grado
POLINOMIAL5	→	polinomio de quinto grado
POLINOMIAL7	→	polinomio de séptimo grado
CICLOIDAL	→	ecuaciones de movimiento cicloidal
RECTANGULAR	→	aceleración rectangular
SENOIDAL	→	aceleración senoidal
COSENOIDAL	→	aceleración cosenoidal

$$T_{min} = \text{"método"}(\Delta\theta, \theta'_{0max}, \theta''_{0max}, dt)$$

Calcula el tiempo mínimo de realización del desplazamiento deseado. Se deben suministrar además del desplazamiento, la velocidad y aceleración máximas posibles y el periodo de muestreo.

$$[\Delta\theta, \theta', \theta'', \theta''', t] = \text{"método"}(\Delta\theta, \theta'_{0max}, \theta''_{0max}, dt, T)$$

Entrega vectores correspondientes al desplazamiento, velocidad, aceleración, sobreaceleración y tiempo, para velocidades inicial y final de valor cero y el vector de tiempo, suministrándole el tiempo de ejecución.

$$[\Delta\theta, \theta', \theta'', \theta''', t] = \text{"método"}(\Delta\theta, \theta'_{0max}, \theta''_{0max}, dt, T, \theta'(t_0), \theta'(t_0+T))$$

Entrega el vector de tiempo y vectores correspondientes al desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración, para el tiempo de ejecución y las condiciones de velocidad suministradas.

"método" corresponde al nombre de la función (*polinomial3*, *polinomial5*, *polinomial7*, *cicloidal*, *rectangular*, *senoidal*, *cosenoidal*).

PROGRAMACIÓN TEXTUAL

ABRIR_TXT

salida = abrir_txt

Esta rutina permite cargar una tarea programada desde un archivo *.txt. Genera un aviso al encontrar algún error en el programa contenido en el archivo, indicando la línea donde se encuentra el error y un comentario acerca del origen de este. Entrega en una estructura los datos relacionados al conjunto de trayectorias y de poses.

GEN_TXT

gen_txt(datos poses, datos trayectoria)

Esta función genera un archivo *.txt con la tarea como una rutina de programación textual.

OTRAS

DIRECCION

salida = direccion

En este archivo se ha de guardar la dirección donde se ha instalado la plataforma.

DIRECTORIO

salida = directorio(nombre)

Esta rutina crea el directorio especificado (*nombre*) en el directorio *direccion*.

DISTANCIA_EFECTOR

$x = distancia_efector$

Distancia a lo largo del vector n , entre el punto de sujeción y el centro de masa de la pieza.

PARAMETROS

$salida = parametros('aceleraciones')$

$salida = parametros('inercias')$

$salida = parametros('masas')$

$salida = parametros('momentos')$

$salida = parametros('posiciones')$

$salida = parametros('velocidades')$

Este archivo contiene:

- los valores máximos y mínimos, en grados, que pueden tomar las posiciones angulares de las articulaciones.
- valores máximos posibles de velocidad y aceleración en las articulaciones.
- valores máximos de momentos aplicables en las juntas.
- masas, momentos y productos de inercia de los eslabones.

DIMENSIONES

$[D,d,P_c] = dimensiones$

Entrega a su salida los vectores posición del origen de $\{i\}$ respecto del origen de $\{i-1\}$ expresado en $\{i\}$ (D), la distancia entre orígenes de sistemas de referencia consecutivos (d), y los centros de masa de cada eslabón (P_c).

MTH

$T = MTH(d,\theta)$

$$T = MTH(d, \cos\theta, \sin\theta)$$

Entrega las matrices de transformación homogénea que relacionan sistemas de referencia consecutivos. Así, $T(:, :, i)$ corresponde a ${}^{i-1}T$. Como argumentos de entrada pueden darse los ángulos en radianes o sus cosenos y senos.

MTHEP

$$M = MTHep(Me, carga)$$

$$M = MTHep(Me, carga, n)$$

Ofrece a su salida la matriz de transformación homogénea del sistema de referencia asociado a la pieza respecto al sistema de referencia ligado al efector final, teniendo como entradas la MTH del efector final respecto a la base y una estructura relacionada a la pieza o carga. Si se cuenta con más de una pose se ha de especificar en cual de ellas (*n-ésima* pose) se desea conocer la matriz.

TR2ZYX

$$[\alpha \beta \gamma] = tr2ZYX(M)$$

$$[\alpha \beta \gamma] = tr2ZYX(M, [\alpha_0 \beta_0 \gamma_0])$$

Determina los ángulos de la representación Euler ZYX a partir de la matriz de rotación. Pueden darse a la entrada los anteriores valores de los ángulos.

ZYX2TR

$$M = tr2ZYX([\alpha \beta \gamma])$$

Determina la matriz de rotación a partir de los ángulos de la representación Euler ZYX.

DIBUJAR_MANIPULADOR

$$[base, eslabon] = dibujar_manipulador(axes, d)$$

Genera los gráficos 3D del manipulador, a partir de las distancias entre sistemas de referencia.

RUTINAS PRINCIPALES

GRAFICOS

graficos(entrada1,entrada2,...,entrada"n")

Contiene todo lo relacionado a la ventana de *CURVAS*, como su creación y la programación de eventos correspondiente a los controles.

graficos

Carga un archivo *.mat con las señales a graficar, si estas son correctas y si no está desplegada la ventana *CURVAS*, crea la ventana y todo lo concerniente a esta.

graficos (t,q,qp,q2p,q3p,x,y,z,Ms,Mk,s_error)

Crea la figura, los botones y demás objetos gráficos si no se encuentra desplegada la ventana *CURVAS*, en caso contrario grafica los datos dados como argumentos de entrada eliminando las curvas anteriores.

graficos('popup')

Se ejecuta cuando se pasa en el menú desplegable de juntas a efector o viceversa.

graficos('checki') $i = 1,2,3,4,5,6,7.$

Efectúa el cambio entre gráficas en el espacio de juntas ($i = 1 \rightarrow \theta, 2 \rightarrow \theta', 3 \rightarrow \theta'', 4 \rightarrow \theta''', 5 \rightarrow M_s, 6 \rightarrow M_k, 7 \rightarrow M_T$)

graficos('juntan') $n = 1,2,3,4,5,6.$

Hace visible la curva correspondiente a la *n*-ésima junta cuando esta se ha seleccionado por medio del botón correspondiente.

graficos('efectork') *k = 1,2,3,4.*

Efectúa el cambio entre la gráfica de posición del efector en el espacio de cartesiano asociado a la base del manipulador y la gráfica de la señal de error de la posición alcanzada con relación a la posición deseada (*i = 1* → *X*, *2* → *Y*, *3* → *Z*, *4* → *error*)

graficos('mover_cursor',axes)

Hace posible el desplazamiento del cursor en el axes indicado.

graficos('toolbar','ClickedCallback',1)

Es ejecutada al pulsar sobre el icono *abrir* ubicado en la *toolbar* de la ventana y debe cargar las señales a graficar desde un archivo de tipo *.mat.

graficos('toolbar','ClickedCallback',2)

Guarda los datos de las curvas en un archivo *.mat cuando se pulsa sobre el icono *guardar* ubicado en la *toolbar* de la ventana.

graficos('toolbar','onCallback',3)

graficos('toolbar','offCallback',3)

Modifican la visibilidad del cursor (*onCallback* → *visible*, *offCallback* → *invisible*).

Subfunciones

CREACIÓN_FIGURA_CURVAS

creacion_figura_curvas(t,q,qp,q2p,q3p,x,y,z,Ms,Mk,s_error)

A través de esta rutina se crean la figura, los botones y demás objetos gráficos. Las entradas son las señales a graficar.

CARGAR_DATOS

salida = cargar_datos

Permite seleccionar un archivo *.mat y cargar su contenido para su utilización. De presentarse error alguno, por ejemplo el hecho de que los datos contenidos en el archivo no correspondan a los utilizados por esta rutina, se despliega una ventana con el aviso de error.

GRAFICAR_NUEVOS_DATOS

objetos = graficar_nuevos_datos(objetos, t, q, qp, q2p, q3p, x, y, z, Ms, Mk, s_error)

Esta función elimina los objetos gráficos correspondientes a los datos anteriores y genera en su lugar las curvas con los argumentos de entrada que se han de suministrado.

ADAPTAR_CURSOR

adaptar_cursor(cursor, axes, origen)

Modifica la posición y el axes del cursor, el cual si se encuentra activo muestra los valores de las coordenadas del punto *origen*, si este no es suministrado la rutina lo determina.

GENERACION_DATOS

*[t, S, V, A, C, MTH_{efector}, MTH_{cargas}, ind_{sujeción}, Ms, Mk, error] = generacion_datos
(datos_{poses}, datos_{trayectorias}, metodo_{interpolacion}, criterio_{espaciamiento}, parametros)*

Esta rutina se encarga de obtener los puntos de paso para trayectorias continuas y realizar los cálculos asociados al modelo dinámico inverso.

GEN_DATOS1

Determina las curvas cinemáticas y cinéticas asociadas a las juntas, la posición del efector en el tiempo y la señal de error entre la posición alcanzada y la pretendida.

PUNTO_A_PUNTO

Determina las curvas cinemáticas y cinéticas asociadas a las juntas para trayectorias punto a punto como su nombre lo sugiere, realizando los cálculos correspondientes al modelo dinámico inverso.

CONTINUA

Establece las curvas cinemáticas y cinéticas asociadas a las juntas para trayectorias continuas. Esto incluye: la determinación de los puntos de paso cumpliendo con la tolerancia requerida, siempre y cuando sea posible esta labor, y los cálculos correspondientes al modelo dinámico inverso.

PENDIENTE_INICIAL

Calcula la pendiente en el punto inicial, siempre y cuando no se a un punto de pausa.

REVISION_MOMENTOS

Realiza la comparación de momentos con los máximos posibles establecidos y determina, de ser necesario, el factor de incremento en el tiempo para la corrección de momentos.

MOD_DINAMICO

Determina las componentes de los momentos aplicables en las juntas para su posterior análisis.

TIEMPOS_MINIMOS

Como se indica en la denominación, esta rutina encuentra el tiempo de realización del desplazamiento para movimientos sincronizados de las juntas.

PENDIENTES

Establece las pendientes en los puntos suministrados, estos son: puntos definidos en la programación de la tarea y los puntos de paso asignados.

CRITERIO

Realiza la distribución de los puntos de paso de una trayectoria continua.

CRITERIO_INV

Determina la ubicación de un punto sobre una trayectoria a partir de su factor de espaciado.

NEWTON_EULER

$$[Ms, Mk] = \text{newton_euler}(R, \theta', \theta'', D, P_o, m, lc)$$

Formulación iterativa del método de Newton-Euler, entrega los valores de los momentos en cada instante de tiempo. Posee como argumentos de entrada: las matrices de rotación (R) y vectores de posición (D) entre orígenes (de i con

respecto a $i-1$), los centros de masa (P_o) de los eslabones, las velocidades y aceleraciones relativas de las juntas, y los momentos y productos de inercia (I_c) y las masas (m) de los eslabones.

GRASSBOT

Esta es la principal rutina, se encarga de la creación y manipulación de las todas las figuras y objetos empleados por la plataforma, excepto los relacionados a la ventana de *curvas*.

ACCIONES

Se encarga de la manipulación de objetos en la ventana principal. Contiene las instrucciones relacionadas con cada menú y cada botón de la barra de herramientas. Crea y modifica las ventanas emergentes durante el proceso de programación de tareas.

CREACION_FIGURA

Es la responsable de la creación de la ventana principal, y de los objetos relacionados a esta.

VOLUMEN

Determina el volumen de trabajo del manipulador y genera su gráfica en la ventana principal.

DIBUJAR_JUNTA

Crea los objetos gráficos (cilindros) asociados a las juntas.

DIBUJAR_PIEZA

Se encarga de crear la pieza que le sea indicada.

CREAR_EJES

Crea los ejes y textos asociados a estos, para un sistema de referencia.

TRANSFORMACION

Realiza la transformación de los objetos gráficos (líneas, superficies, luces, textos, etc.).

CARGAR_ARCHIVO

Permite cargar los datos de una tarea previamente guardada en un archivo *.mat. Esta rutina comprueba la existencia de los datos requeridos por la plataforma.

DEDOS

Crea los modelos virtuales de los dedos del efector final.

SUJETAR_CARGA

Efectúa la transformación de cada dedo del efector a partir de las MTH determinadas.

MATRIZ

Determina la MTH de las partes de cada dedo de acuerdo al tipo de carga que ha de sujetarse o liberarse.

ACTUALIZAR

Aplica las transformaciones especificadas a los eslabones del manipulador.

MVTO_CARGAS

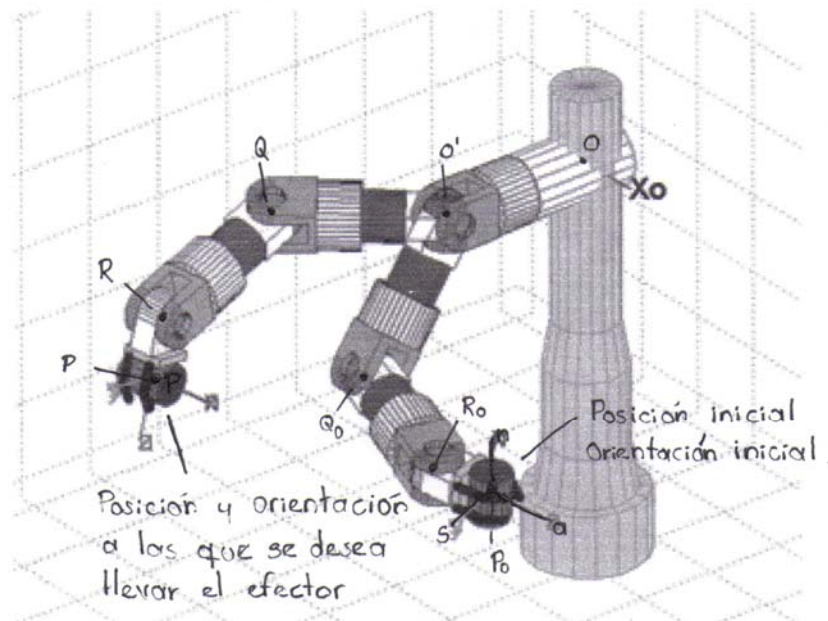
Revisa la continuidad en la ubicación de las piezas.

ACTUALIZAR_POSE

Pasa al registro los datos concernientes a la pose actual.

ANEXO C. SOLUCIONES CINEMÁTICA INVERSA.

C.1. SOLUCIÓN CINEMÁTICA INVERSA GENERAL



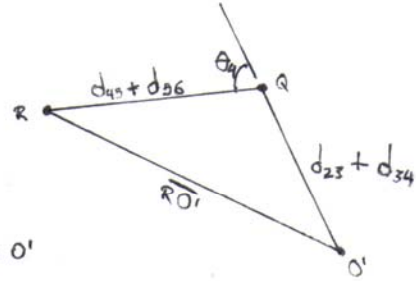
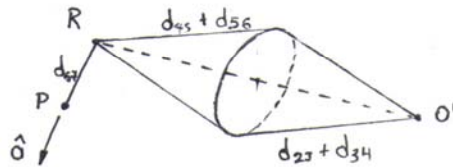
Esta solución se usa para mover el efector, con o sin carga, por medio de los controles, editores y deslizadores, empleando coordenadas cartesianas para describir la posición y ángulos de Euler ZYX para designar la orientación.

El primer paso a efectuar es la revisión de la posición determinando si se encuentra en el espacio de trabajo, es decir, definiendo si el punto es alcanzable o no.

Para esto se ha de cumplir:

$$\overline{PO'} \leq d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56} + d_{67}$$

Se determina θ_4

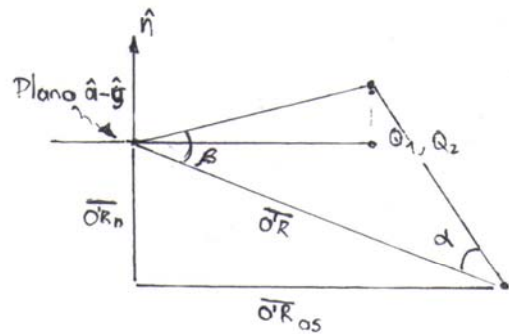
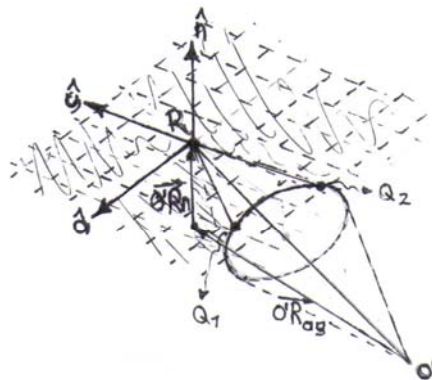


$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{RO'^2 - (d_{23} + d_{34})^2 - (d_{45} + d_{56})^2}{2 \cdot (d_{23} + d_{34}) \cdot (d_{45} + d_{56})} \right)$$

Se ha de verificar:

$$\theta_4 \leq \theta_{4\text{MÁXIMO}}$$

Si $\theta_4 \neq 0^\circ$



Se debe cumplir: $\frac{|\vec{O'R} \cdot \hat{n}|}{d_{23} + d_{34}} \leq 1$

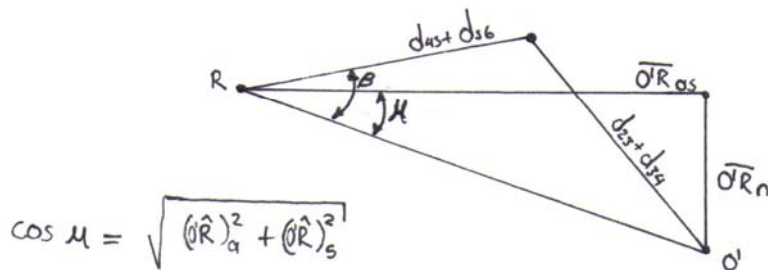
$$\cos \beta = \frac{OR^2 + (d_{45} + d_{56})^2 - (d_{23} + d_{34})^2}{2 \cdot OR \cdot (d_{45} + d_{56})}; \quad 0 \leq \beta \leq 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{OR^2 + (d_{23} + d_{34})^2 - (d_{45} + d_{56})^2}{2 \cdot OR \cdot (d_{23} + d_{34})};$$

Partiendo de: $|\vec{OQ}| = d_{23} + d_{34}$

se obtiene: $(\hat{O}R)_s \cdot \text{sen } \theta_6 + (\hat{O}R)_a \cos \theta_6 = \cos B$

Definase μ como se ilustra en la siguiente figura:



$$\cos \mu = \sqrt{(\hat{O}R)_a^2 + (\hat{O}R)_s^2}$$

Para que sea posible obtener soluciones alguna se ha de satisfacer la siguiente solución:

$$B \geq \mu \Rightarrow \cos B \leq \cos \mu$$

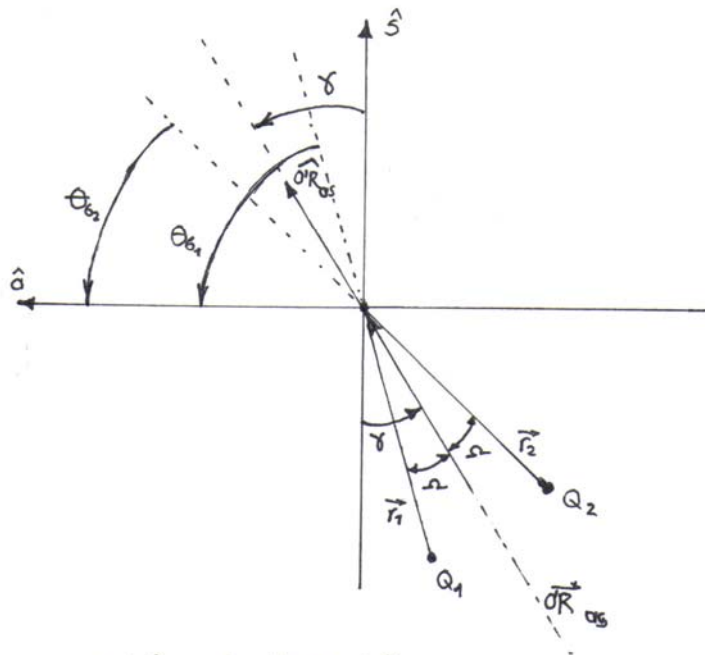
De la ecuación: $(\hat{R})_s \cdot \text{sen } \theta_6 + (\hat{R})_a \cos \theta_6 = \cos B$

se obtiene la expresión:

$$\text{sen } (\theta_6 + \gamma) = \frac{\cos B}{\cos \mu} \quad ; \quad \gamma = \tan^{-1} \left(\frac{(\hat{R})_a}{(\hat{R})_s} \right)$$

Es demostrable que: $\cos \alpha = \frac{\cos B}{\cos \mu}$

α corresponde al ángulo indicado en la siguiente gráfica.



$$\hat{r}_1 = \cos(\gamma - \alpha) \hat{S} + \sin(\gamma - \alpha) \hat{a}$$

$$\hat{r}_2 = \cos(\gamma + \alpha) \hat{S} + \sin(\gamma + \alpha) \hat{a}$$

$$\Rightarrow \hat{r} = \cos(\gamma \pm \alpha) \hat{S} + \sin(\gamma \pm \alpha) \hat{a}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\cos(\gamma \pm \alpha)}{\sin(\gamma \pm \alpha)} \right)$$

$$\text{Si } \theta = \mu \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right)$$

Si $\theta > \mu$ se determinan Q_1 y Q_2 y a partir de estos a los ángulos θ_1 y θ_2 se le asignan valores posibles. Si dichos valores calculados cumplen con:

$$\theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max} \quad \wedge \quad \theta_{2\min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max}$$

la elección de Q se efectúa empleando el criterio de menor desplazamiento:

$$\overline{Q_1 Q_0} \quad ? \quad \overline{Q_2 Q_0}$$

θ_1 y θ_2 se determinan así:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{O'Q_y}{O'Q_x} \right)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{O'Q_z}{d_{23} + d_{34}} \right) \cdot \text{signo}(O'Q_x)$$

Se requieren hallar los siguientes vectores unitarios:

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{y}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{z}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_4 = \frac{\vec{O'R} + (d_{23} + d_{34}) \cdot \hat{y}_2}{d_{45} + d_{56}}$$

$$\hat{y}_3 = \frac{\hat{y}_2 \times \hat{y}_4}{\sin \theta_4}$$

empleados en los cálculos de θ_3 y θ_5

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{-\hat{y}_3 \cdot \hat{x}_2}{\hat{y}_3 \cdot \hat{z}_2} \right)$$

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left(\frac{-\hat{n} \cdot (\hat{y}_3 \times (-\hat{y}_4))}{\hat{n} \cdot \hat{y}_3} \right)$$

Si $\theta_4 = 0^\circ$, el procedimiento a seguir es dado a continuación:

\hat{n} y $\vec{O'R}$ deben ser perpendiculares.

Si $\vec{O'R}$ y \hat{z}_0 son paralelos:

$$\theta_2 = (1 - (\hat{O'R})_{z_0}) \times 90^\circ$$

defínase
$$\phi = \left(\tan^{-1} \left(\frac{-(\hat{n})_{x_0}}{(\hat{n})_{y_0}} \right) - \theta_{1_0} - \theta_{3_0} - \theta_{5_0} \right) // \text{---}$$

$$\text{Si } \theta_{5 \min} \leq \theta_{5_0} + \phi \leq \theta_{5 \max}$$

$$\theta_5 = \theta_{5_0} + \phi, \quad \theta_3 = \theta_{3_0} \quad \wedge \quad \theta_1 = \theta_{1_0}$$

De lo contrario:

$$\text{Si } \theta_{5_0} + \phi < \theta_{5 \min}$$

$$\theta_5 = \theta_{5 \min} \quad \wedge \quad \phi = \phi - (\theta_5 - \theta_{5_0})$$

$$\text{Si } \theta_{5_0} + \phi > \theta_{5 \max}$$

$$\theta_5 = \theta_{5 \max} \quad \wedge \quad \phi = \phi - (\theta_5 - \theta_{5_0})$$

Luego,

$$\text{Si } \theta_{3 \min} \leq \theta_{3_0} + \phi \leq \theta_{3 \max}$$

$$\theta_3 = \theta_{3_0} + \phi, \quad \theta_1 = \theta_{1_0}$$

De lo contrario:

$$\text{Si } \theta_{3_0} + \phi < \theta_{3 \min}, \quad \theta_3 = \theta_{3 \min}$$

$$\text{Si } \theta_{3_0} + \phi > \theta_{3 \max}, \quad \theta_3 = \theta_{3 \max}$$

$$\theta_1 = \phi + \theta_{1_0} - (\theta_3 - \theta_{3_0})$$

Si $\vec{O'R} \wedge \hat{z}_0$ no son paralelos:

$$\hat{z}_2 = \frac{\hat{z}_0 \times \vec{O'R}}{|\hat{z}_0 \times \vec{O'R}|}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-(\hat{z}_2)_x}{(\hat{z}_2)_y} \right)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left((\vec{O'R})_z \right)$$

$$\hat{x}_2 = \hat{z}_2 \times \vec{O'R}$$

Definase:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\hat{n} \cdot \hat{x}_2}{\hat{n} \cdot \hat{z}_2} \right) - \theta_{30} - \theta_{50}$$

$$\text{Si } \theta_{s \min} \leq \theta_{s0} + \phi \leq \theta_{s \max}$$

$$\theta_s = \theta_{s0} + \phi, \quad \theta_z = \theta_{z0}$$

De lo contrario:

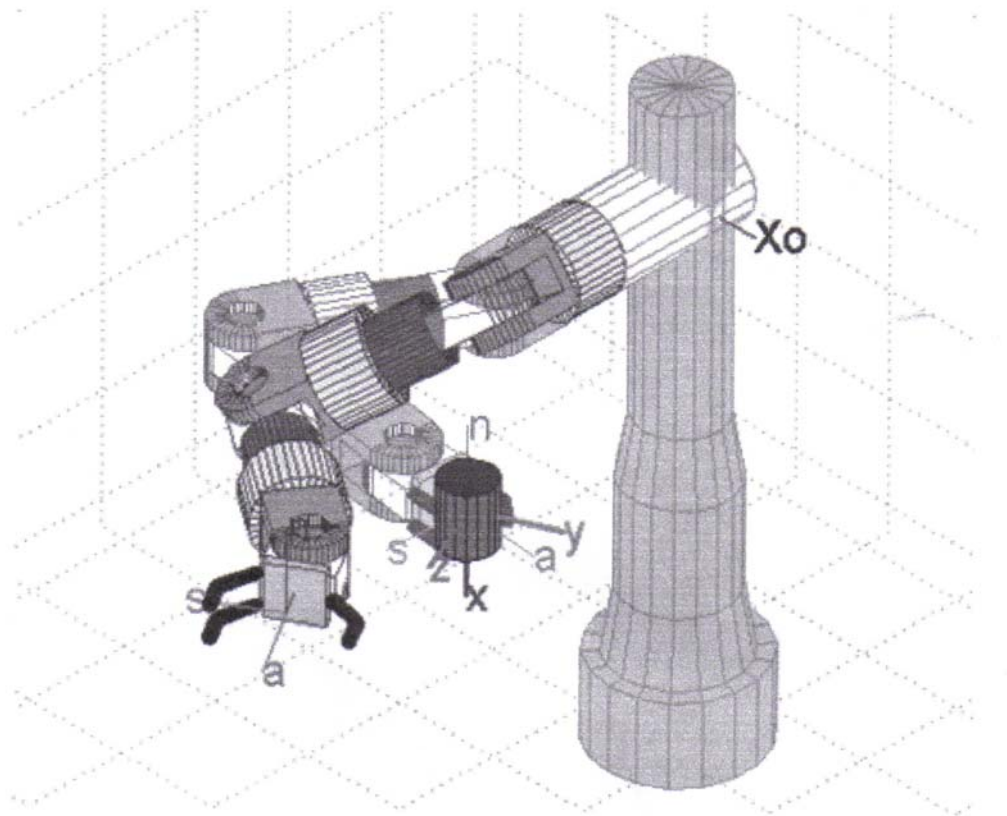
$$\text{Si } \theta_{s0} + \phi < \theta_{s \min}, \quad \theta_s = \theta_{s \min}$$

$$\text{Si } \theta_{s0} + \phi > \theta_{s \max}, \quad \theta_s = \theta_{s \max}$$

$$\phi = \phi - (\theta_s - \theta_{s0})$$

$$\theta_z = \phi + \theta_{z0}$$

C.2. SUJECIÓN DEL CILINDRO



Para sujetar el cilindro se requiere que los vectores \hat{n} y \hat{x} , del efector y de la pieza respectivamente, sean paralelos o antiparalelos. Los vectores \hat{a} y \hat{s} pueden tomar cualquier orientación sobre el plano $y-z$.

Si se encuentran varias soluciones se elige aquella que genere los menores desplazamientos.

Se determinan las soluciones para \hat{n} paralelo a \hat{x} y \hat{n} paralelo a $-\hat{x}$ empleando el procedimiento que se describe a continuación.

- Se determina si el punto es alcanzable, para esto se debe cumplir:

$$\text{Posición de la carga (P}_c\text{)} \quad \vec{O'P}_c \leq d_{34} + d_{45} + d_{56} + d_{23} + d_{67} + K ;$$

$K = \text{Radio cilindro} - \text{Distancia punto de sujeción} - \text{palma de la mano.}$

- Conociendo que la posición deseada es alcanzable, se ha de comprobar si es posible orientar el efector final con el vector \hat{n} requerido. Esto ocurre si:

$$|\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}| \leq d_{23} + d_{34}$$

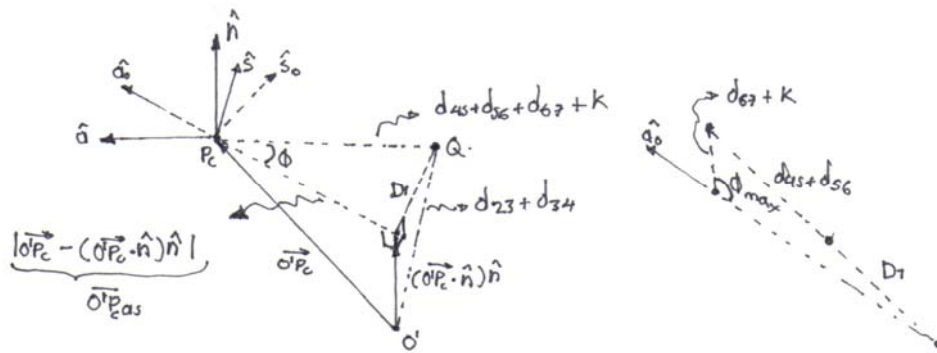
Esta desigualdad obedece al hecho: el punto Q debe localizarse en el plano α -S.

Además, se debe cumplir la siguiente inecuación:

$$D_2 \leq |\vec{O'P}_c - (\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}) \hat{n}| \leq d_{45} + d_{56} + d_{67} + K + D_1$$

$$\text{donde: } D_1 = \sqrt{(d_{23} + d_{34})^2 - (\vec{O'P}_c \cdot \hat{n})^2}$$

$$D_2 = \begin{cases} d_{45} + d_{56} - (d_{67} + K + |\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}|), & \text{si } d_{45} + d_{56} > d_{67} + K + |\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}| \\ |\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}| - (d_{45} + d_{56} + d_{67} + K), & \text{si } |\vec{O'P}_c \cdot \hat{n}| > d_{45} + d_{56} + d_{67} + K \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$



- Se asignan los vectores \hat{a}_0 y \hat{s}_0 de la forma:

$$\hat{a}_0 = \frac{\vec{P}_c - (\vec{P}_c \cdot \hat{n})\hat{n}}{|\vec{P}_c - (\vec{P}_c \cdot \hat{n})\hat{n}|}$$

$$\hat{s}_0 = \hat{a}_0 \times \hat{n}$$

- se determino el valor máximo del ángulo formado por los vectores \hat{a}_0 y \vec{Q}

$$|\phi|_{max} = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{(d_{67}+k)^2 + (\vec{P}_{c\perp})^2 - (d_{45}+d_{56}+D_1)^2}{2 \cdot \vec{P}_{c\perp} \cdot (d_{67}+k)} \right) & \text{para: } \vec{P}_{c\perp} > d_{45}+d_{56}+D_1-d_{67}-k \\ 180^\circ & \text{, en caso contrario} \end{cases}$$

y el valor mínimo:

$$|\phi|_{min} = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{(d_{67}+k)^2 + (\vec{P}_{c\perp})^2 - (d_{45}+d_{56}-D_1)^2}{2 \cdot \vec{P}_{c\perp} \cdot (d_{67}+k)} \right) & \text{para: } |\vec{P}_{c\perp} - d_{67}-k| > |d_{45}+d_{56}-D_1| \\ 0 & \text{, en caso contrario} \end{cases}$$

se genera la variable ϕ ; la cual corresponde a un vector con los valores posibles:

$$\phi = [-|\phi|_{max}, -|\phi|_{max} + \Delta\phi, \dots, |\phi|_{min}, |\phi|_{min} + \Delta\phi, \dots, |\phi|_{max}]$$

donde $\Delta\phi = \frac{|\phi|_{max} - |\phi|_{min}}{\lceil \frac{|\phi|_{max} - |\phi|_{min}}{m} \rceil}$; donde $m = \begin{cases} 5, & \text{si } |\phi|_{max} - |\phi|_{min} > 10^\circ \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
 $\lceil \cdot \rceil \rightarrow$ redondeo hacia el infinito (+)

Para cada valor de ϕ se encuentra la solución, si esta existe, y el vector \vec{OQ} correspondiente.

Los ángulos θ_i , $i=1,2,\dots,p$, se hallan según lo indicado en las ecuaciones correspondientes a la SOLUCIÓN GENERAL ya expuesta.

Al comparar las soluciones se elige la que produzca el menor desplazamiento del punto Q.

Los vectores de orientación del efector \hat{a} y \hat{s} se dan en función del ángulo ϕ relacionado a la solución elegida.

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \cos\phi \cdot \hat{a}_0 - \sin\phi \hat{s}_0 \\ \hat{s} &= \sin\phi \cdot \hat{a}_0 + \cos\phi \hat{s}_0\end{aligned}$$

Si $\Delta\phi > 1^\circ$, se determinan las soluciones para los nuevos valores de ϕ .

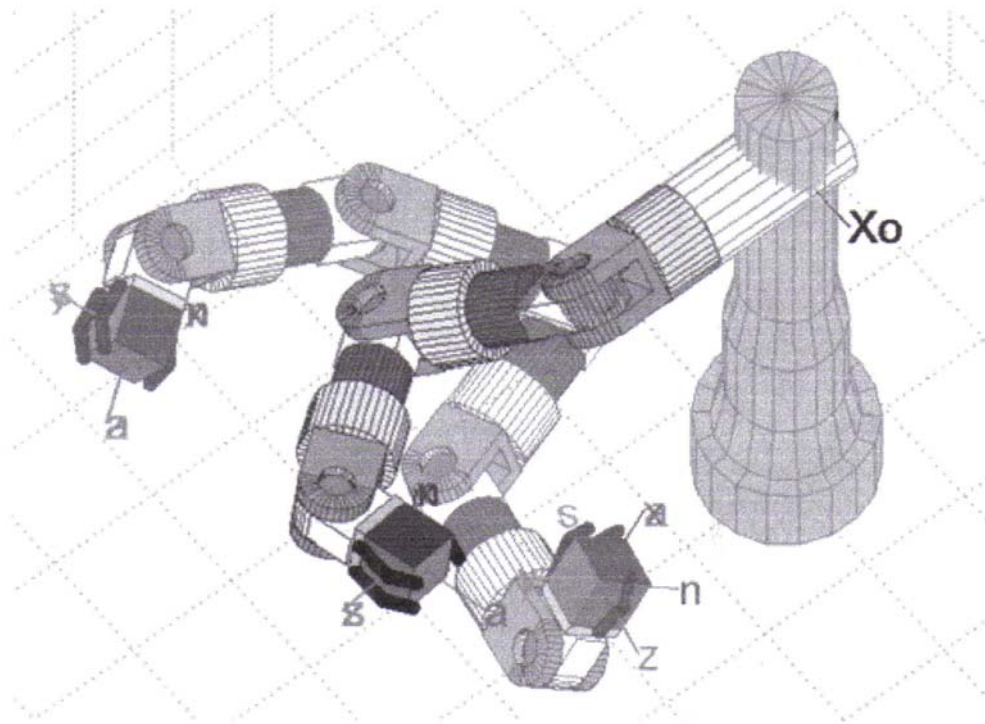
$$\phi_{\max} = \begin{cases} \phi_{\text{solución}} + 5^\circ, & \text{si } \phi_{\max} \geq \phi_{\text{solución}} + 5^\circ \\ \phi_{\max} & \text{; de lo contrario} \end{cases}$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \phi_{\text{solución}} - 5^\circ, & \text{si } \phi_{\min} \leq \phi_{\text{solución}} - 5^\circ \\ \phi_{\min} & \text{, en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Delta\phi = \frac{|\phi_{\max} - \phi_{\min}|}{[[|\phi_{\max} - \phi_{\min}|]]}$$

$$\phi = \phi_{\min}, \phi_{\min} + \Delta\phi, \phi_{\min} + 2\Delta\phi, \dots, \phi_{\max} - \Delta\phi, \phi_{\max}.$$

C.3. SUJECIÓN DEL CUBO



En este caso se cuenta con veinticuatro conjuntos de vectores de orientación del efector final. Por tanto, se ha de establecer la solución para cada conjunto, si esta existe, las posibles soluciones se han de comparar eligiendo aquella que genere los menores desplazamientos.

En la siguiente tabla se exhiben las veinticuatro posibles orientaciones del efector final.

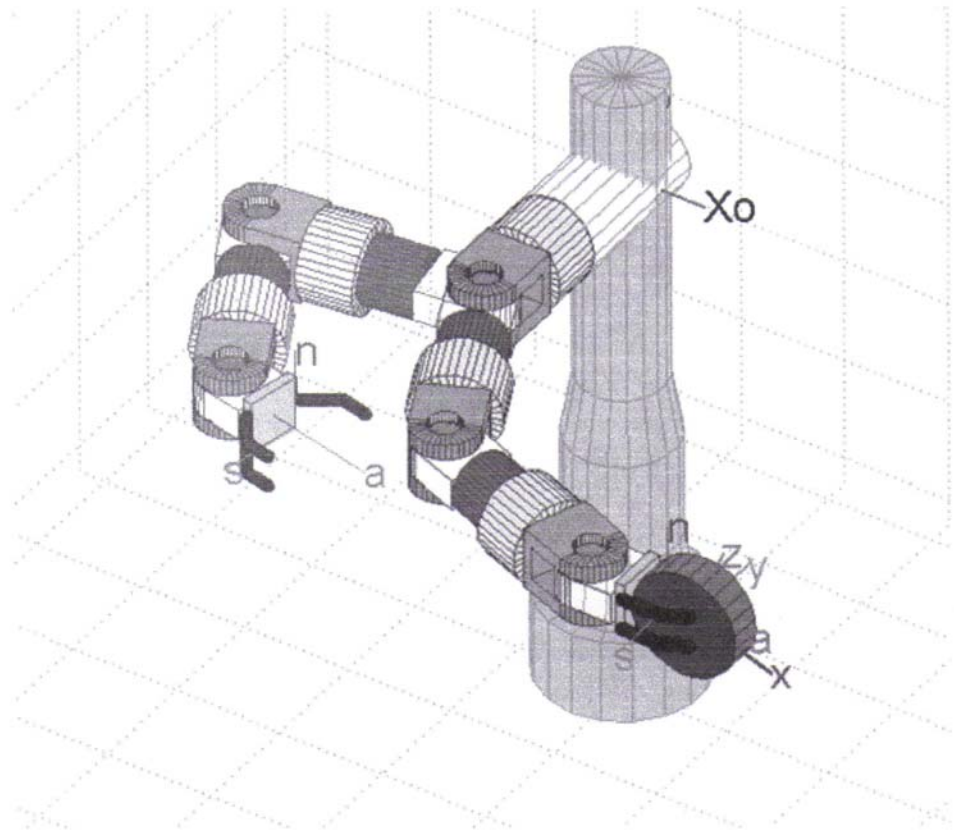
\hat{n}	\hat{x}	$-\hat{x}$	\hat{y}	$-\hat{y}$	\hat{x}	$-\hat{x}$	\hat{y}	$-\hat{y}$
\hat{s}	\hat{y}	$-\hat{y}$	$-\hat{x}$	\hat{x}	$-\hat{y}$	\hat{y}	\hat{x}	$-\hat{x}$
\hat{a}	\hat{z}	\hat{z}	\hat{z}	\hat{z}	$-\hat{z}$	$-\hat{z}$	$-\hat{z}$	$-\hat{z}$

\hat{n}	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{y}	$-\hat{y}$	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{y}	$-\hat{y}$
\hat{s}	$-\hat{y}$	\hat{y}	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{y}	$-\hat{y}$	$-\hat{z}$	\hat{z}
\hat{a}	\hat{x}	\hat{x}	\hat{x}	\hat{x}	$-\hat{x}$	$-\hat{x}$	$-\hat{x}$	$-\hat{x}$

\hat{n}	\hat{x}	$-\hat{x}$	\hat{z}	$-\hat{z}$	\hat{x}	$-\hat{x}$	\hat{z}	$-\hat{z}$
\hat{s}	$-\hat{z}$	\hat{z}	\hat{x}	$-\hat{x}$	\hat{z}	$-\hat{z}$	$-\hat{x}$	\hat{x}
\hat{a}	\hat{y}	\hat{y}	\hat{y}	\hat{y}	$-\hat{y}$	$-\hat{y}$	$-\hat{y}$	$-\hat{y}$

Los ángulos $\theta_1, \dots, \theta_6$ se determinan según se indica en la SOLUCIÓN GENERAL.

C.4. SUJECIÓN DEL DISCO



Para sujetar el disco, el vector \hat{s} del efector ha de ser paralelo a \hat{u} o a $-\hat{u}$ de la pieza, y los vectores \hat{n} y \hat{a} han de encontrarse sobre el plano $z-x$ asociado a la pieza.

El primer paso a seguir consiste en determinar si el punto es alcanzable. Así, si se cumple la siguiente desigualdad es posible que exista solución:

$$\overline{O'P_c} \leq d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56} + d_{67} + K.$$

Se definen los vectores \hat{a}_0 y \hat{n}_0 :

si $\overrightarrow{O'P_c}$ y \hat{s} son paralelos:

$$\hat{a}_0 = \hat{a}$$

$$\hat{n}_0 = \hat{n}$$

en caso contrario

$$\hat{a}_0 = \frac{\overrightarrow{O'P_c} - (\overrightarrow{O'P_c} \cdot \hat{s}) \hat{s}}{|\overrightarrow{O'P_c} - (\overrightarrow{O'P_c} \cdot \hat{s}) \hat{s}|}$$

$$\hat{n}_0 = \hat{s} \times \hat{a}_0$$

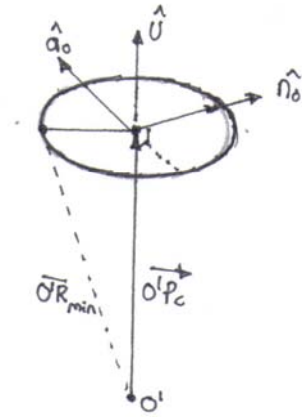
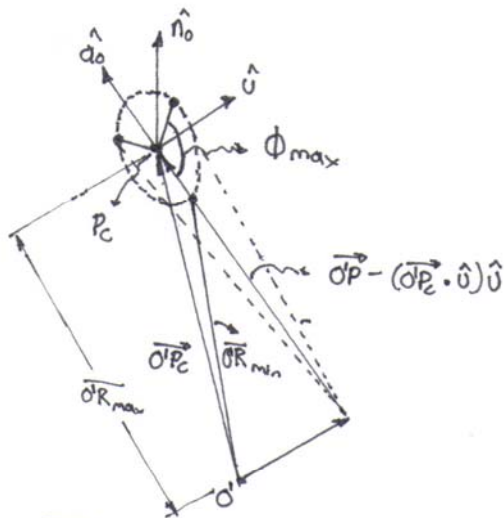
Se comprueba si existe solución alguna:

$$\overline{O'R}_{\min} = |\overrightarrow{O'P_c} - (d_{67} + K) \cdot \hat{a}_0|$$

$$\overline{O'R}_{\min} \leq d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56}.$$

Cumpléndose la anterior desigualdad se define el ángulo ϕ y su rango de valores.

$$-\phi_{\max} \leq \phi \leq \phi_{\max}$$



si: \vec{OP}_c y \hat{u} no son paralelos
 $\overline{OP}_{max} = |\vec{OP}_c + (d_{67}+k)\hat{a}_0|$

si \hat{u} y \vec{OP}_c son paralelos.
 $\phi_{max} = 180^\circ$

si $\overline{OP}_{max} \leq d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56}$.

$$\phi_{max} = 180^\circ$$

de lo contrario.

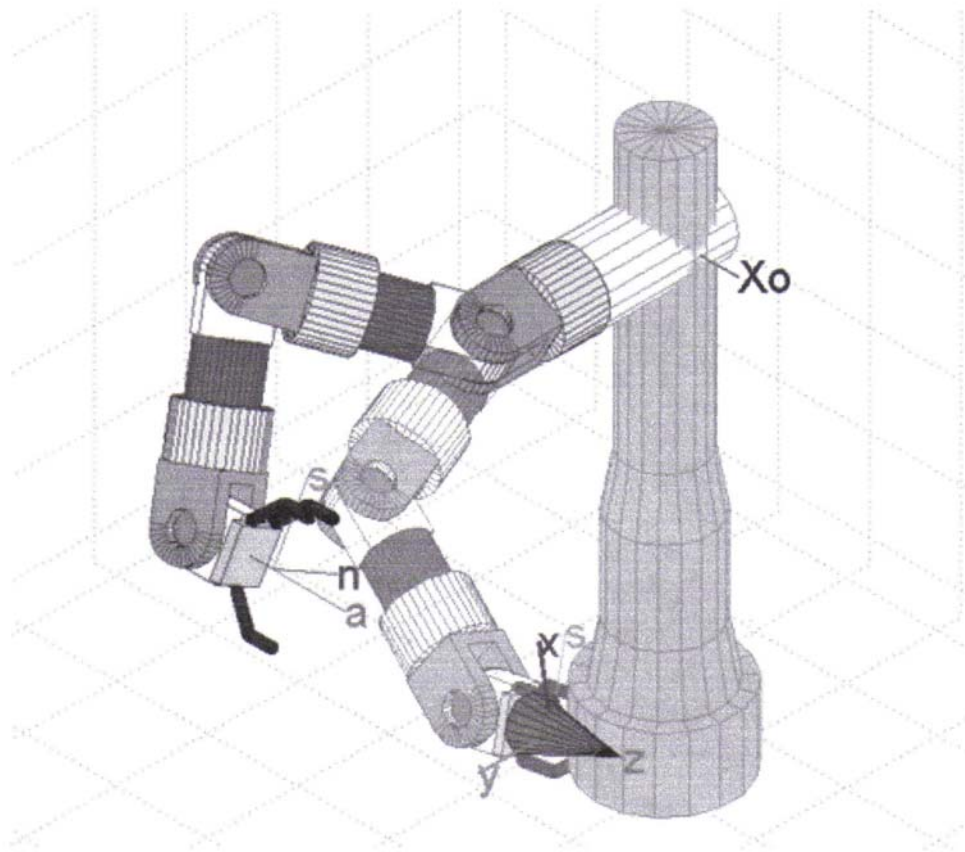
$$\phi_{max} = \cos^{-1} \left(\frac{\overline{OP}_c^2 + (d_{67}+k)^2 - (d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56})^2}{2 \cdot \overline{OP}_c \cdot (d_{67}+k)} \right)$$

Se hallan las soluciones, si estas existen, para:

$$\phi = -\phi_{max}, -\phi_{max} + \Delta\phi, -\phi_{max} + 2\Delta\phi, \dots, \phi_{max}.$$

$$\text{donde } \Delta\phi = \frac{2\phi_{max}}{[[2\phi_{max}]]}$$

C.5. SUJECIÓN DEL CONO

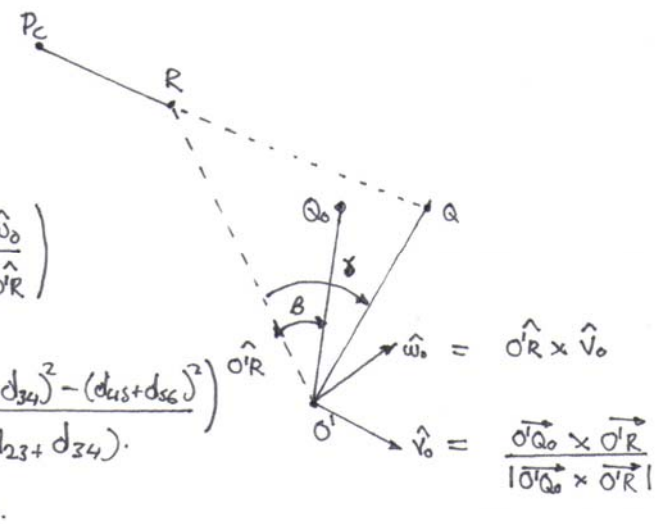


Para sujetar esta pieza los vectores \hat{a} y \hat{z} deben ser paralelos. Los vectores \hat{n} y \hat{s} han de ubicarse sobre el plano $x-y$ o sobre un plano paralelo a este, dependiendo de la altura del cono.

- Se comprueba si el punto es alcanzable mediante:

$$\frac{|\vec{O}^i P_c - (d_{67} + k) \hat{a}|^2 - (d_{23} + d_{34})^2 - (d_{45} + d_{56})^2}{2 \times (d_{23} + d_{34})(d_{45} + d_{56})} \leq 1$$

- Se halla la posición del punto Q sobre el plano formado por $\vec{O}^i Q_0$ y $\vec{O}^i R$



The diagram illustrates a 3D coordinate system with origin O^i . Vectors $\vec{O}^i Q_0$ and $\vec{O}^i R$ define a plane. Point Q lies on this plane. Other vectors shown include $\vec{O}^i A$, $\vec{O}^i P_c$, $\vec{O}^i S_0$, $\vec{O}^i N_0$, $\vec{O}^i V_0$, and $\vec{O}^i W_0$. Angles γ and β are indicated between $\vec{O}^i Q$ and $\vec{O}^i R$, and between $\vec{O}^i Q_0$ and $\vec{O}^i R$ respectively.

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\vec{O}^i Q_0 \cdot \hat{w}_0}{\vec{O}^i Q_0 \cdot \hat{r}} \right)$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{O}^i R^2 + (d_{23} + d_{34})^2 - (d_{45} + d_{56})^2}{2 \cdot \vec{O}^i R \cdot (d_{23} + d_{34})} \right)$$

$$\gamma = \gamma \cdot \text{signo}(\beta)$$

$$\hat{w}_0 = \hat{r} \times \hat{v}_0$$

$$\hat{v}_0 = \frac{\vec{O}^i Q_0 \times \vec{O}^i R}{|\vec{O}^i Q_0 \times \vec{O}^i R|}$$

$$\vec{O}^i Q = (d_{23} + d_{34}) \cdot (\cos \gamma \cdot \hat{r} + \sin \gamma \cdot \hat{w}_0)$$

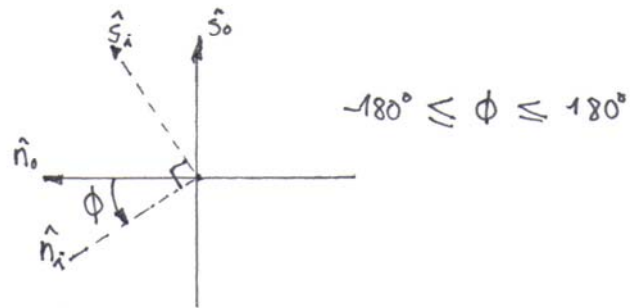
- Se especifican los vectores \hat{n}_0 y \hat{s}_0

$$\hat{n}_0 = \frac{\hat{a} \times \vec{QR}}{|\hat{a} \times \vec{QR}|} \quad \text{y} \quad \hat{s}_0 = \hat{a} \times \hat{n}_0$$

Si \hat{a} y \vec{QR} son paralelos o antiparalelos y/o $\vec{O}^i Q_0$ y $\vec{O}^i R$ lo son,

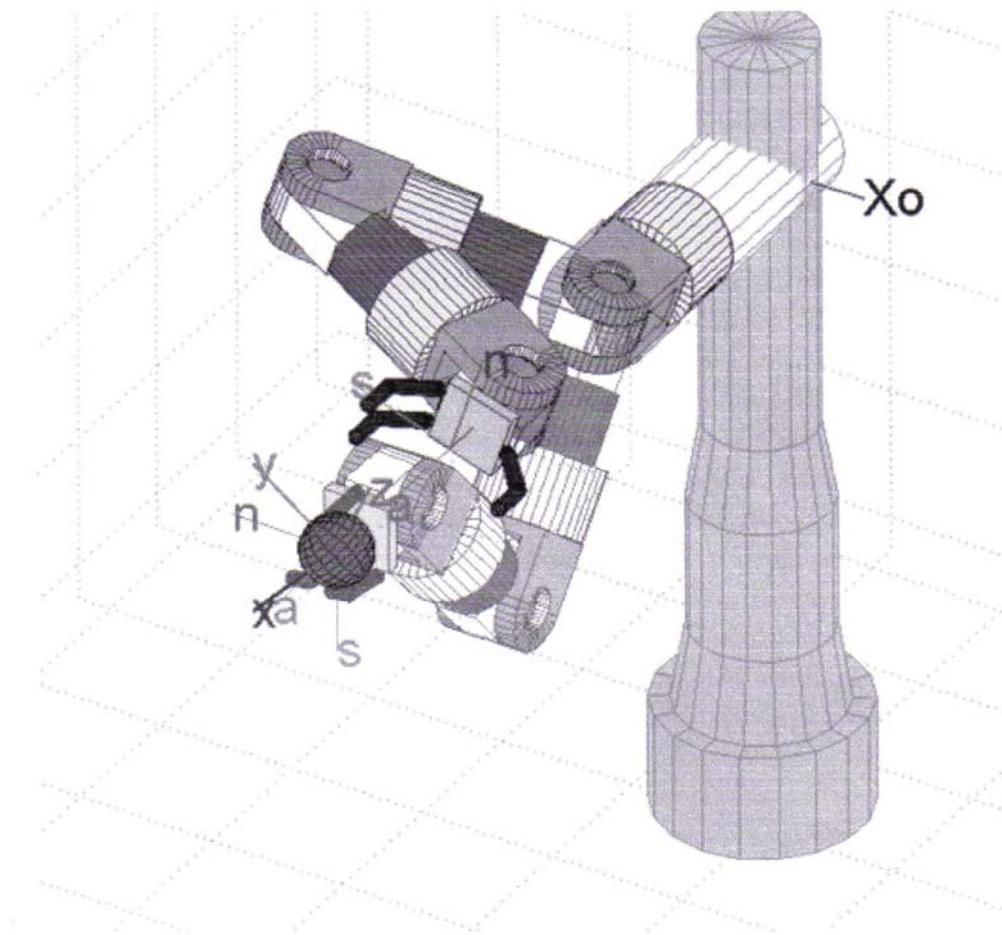
$$\hat{n}_0 = \hat{n} \quad \text{y} \quad \hat{s}_0 = \hat{s}$$

- Se obtienen las soluciones para diferentes pares de vectores \hat{n}_i y \hat{s}_i :



- Se elige la solución que ocasione los menores desplazamientos. Los ángulos asociados a las juntas se hallan según se indica en la SOLUCIÓN GENERAL.

C.6. SUJECIÓN DE LA ESFERA



Esta pieza permite ser sujeta en cualquier orientación del efector final. La solución se plantea siguiendo el criterio de menores desplazamientos de las juntas.

Como primer paso se debe determinar si la posición deseada es alcanzable.

Si $\overline{O'P_c} \leq d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56} + d_{67} + K$ puede ser alcanzable.

Cumpliendo esto, se ha de realizar por lo menos otra comparación.

$$\text{Definase } \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{(\overline{O'P_c})_x^2 + (\overline{O'P_c})_y^2} \cdot \text{signo}((\overline{O'P_c})_x)}{(\overline{O'P_c})_z} \right)$$

Este valor debe cumplir:

$$\theta_{2 \min} \leq \phi \leq \theta_{2 \max} \text{ es alcanzable.}$$

En caso contrario,

$$\Delta\phi = \begin{cases} \phi - \theta_{2 \max}, & \phi > \theta_{2 \max} \\ \theta_{2 \min} - \phi, & \phi < \theta_{2 \min} \end{cases}$$

si $d_{45} + d_{56} + d_{67} + K \geq \overline{O'P_c}^2 + (d_{23} + d_{34})^2 - 2 \cdot \overline{O'P_c} \cdot (d_{23} + d_{34}) \cdot \cos \Delta\phi$
la esfera es alcanzable.

El siguiente paso es determinar el punto Q. Se comparan las distancias $\overline{Q_0P_c}$ y $d_{45} + d_{56} + d_{67} + K$, obteniendo tres casos diferentes:

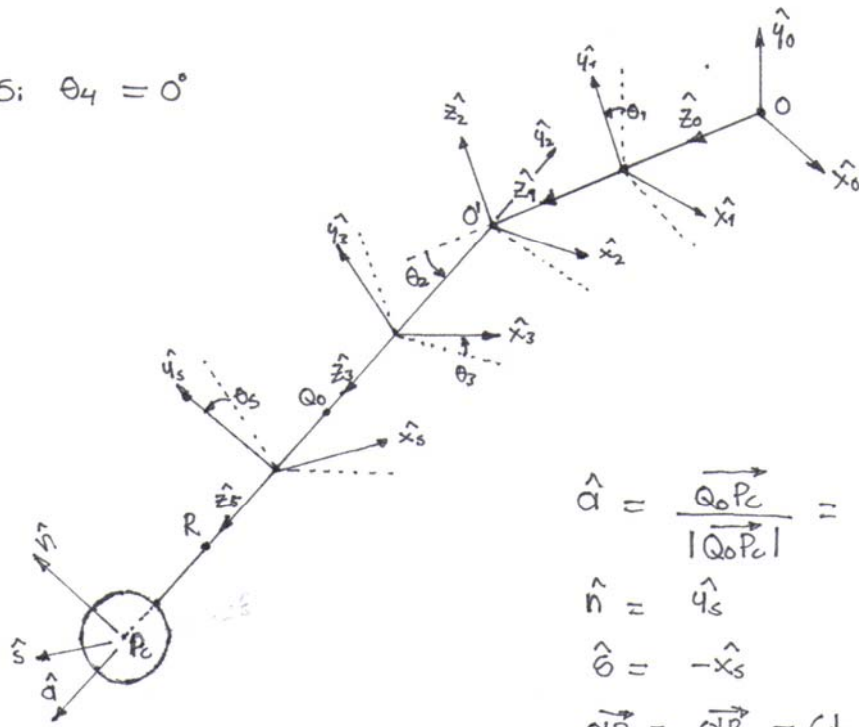
$$\text{Si } \overline{Q_0P_c} = d_{45} + d_{56} + d_{67} + K$$

$$\text{Se determina } \theta_4 = \cos^{-1}(\hat{O'Q_0} \cdot \hat{Q_0P_c})$$

$$\text{Si } \theta_4 \leq \theta_{4 \max} \Rightarrow Q = Q_0$$

En caso contrario \rightarrow cambiar Q.

Si: $\theta_4 = 0^\circ$



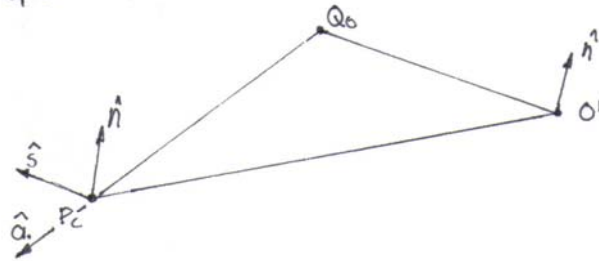
$$\hat{a} = \frac{\vec{O_0 P_c}}{|\vec{O_0 P_c}|} = \hat{z}_5$$

$$\hat{n} = \hat{y}_5$$

$$\hat{e} = -\hat{x}_5$$

$$\vec{O'R} = \vec{O'P_c} - (d_{67} + k) \hat{a}$$

Si: $\theta_4 \neq 0^\circ$



$$\hat{n} = \frac{\vec{O'Q_0} \times \vec{O'P_c}}{|\vec{O'Q_0} \times \vec{O'P_c}|}$$

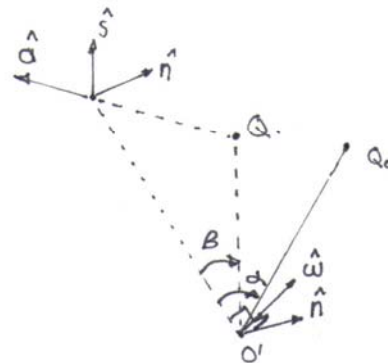
$$\hat{a} = \frac{\vec{Q_0 P_c}}{|\vec{Q_0 P_c}|}$$

$$\hat{e} = \hat{a} \times \hat{n}$$

Si: $|\vec{Q_0 P_c}| > d_{45} + d_{56} + d_{67} + k$

$$\hat{n} = \frac{\vec{O'Q_0} \times \vec{O'P_c}}{|\vec{O'Q_0} \times \vec{O'P_c}|}$$

$$\hat{\omega} = \vec{O'P_c} \times \hat{n}$$



$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\vec{o}^1 \hat{Q}_0 \cdot \hat{\omega}}{\vec{o}^1 \hat{Q}_0 \cdot \hat{o}^1 P_c} \right)$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{o}^1 P_c^2 + (d_{23} + d_{34})^2 - (d_{45} + d_{56} + d_{67} + k)^2}{2 \cdot \vec{o}^1 P_c \cdot (d_{23} + d_{34})} \right) \cdot \text{signo}(\alpha)$$

$$\vec{o}^1 \hat{Q} = (d_{23} + d_{34}) \cdot (\cos \beta \cdot \hat{o}^1 P_c + \text{sen} \beta \cdot \hat{\omega})$$

$$\hat{a} = \hat{Q} P_c$$

$$\hat{s} = \hat{a} \times \hat{n}$$

$$\theta_4 = \cos^{-1} (\vec{o}^1 \hat{Q} \cdot \hat{Q} P_c)$$

Si $\theta_4 > \theta_{4\max} \rightarrow$ cambiar Q .

Si $\vec{o}^1 P_c < d_{45} + d_{56} + d_{67} + k$

Definase :
$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{o}^1 P_c^2 - (d_{45} + d_{56})^2 - (d_{67} + k)^2}{2 \cdot (d_{45} + d_{56}) \cdot (d_{67} + k)} \right)$$

si $\phi \leq |\theta_6|_{\max}$

$$\hat{n}_1 = \frac{\vec{Q}_0 R_0 \times \vec{Q}_0 P_c}{|\vec{Q}_0 R_0 \times \vec{Q}_0 P_c|}$$

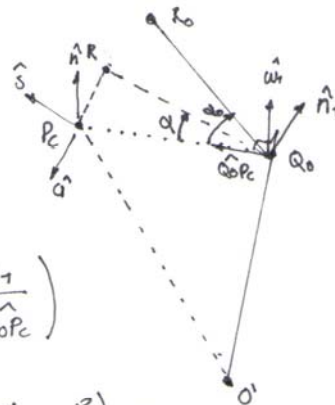
$$\hat{\omega}_1 = \vec{Q}_0 P_c \times \hat{n}_1$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\vec{Q}_0 R_0 \cdot \hat{\omega}_1}{\vec{Q}_0 R_0 \cdot \vec{Q}_0 P_c} \right)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{Q}_0 P_c^2 + (d_{45} + d_{56})^2 - (d_{67} + k)^2}{2 \cdot \vec{Q}_0 P_c \cdot (d_{45} + d_{56})} \right) \cdot \text{signo}(\alpha_0)$$

$$\vec{Q}_0 R = (d_{45} + d_{56}) \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{Q}_0 P_c + \text{sen} \alpha \cdot \hat{\omega}_1)$$

$$\theta_4 = \cos^{-1} (\vec{o}^1 \hat{Q}_0 \cdot \vec{Q}_0 R_1)$$



$$\hat{a} = \frac{\vec{Q}_0 P_c - \vec{Q}_0 R}{|\vec{Q}_0 P_c - \vec{Q}_0 R|}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{Q}_0 R \times \hat{a}}{|\vec{Q}_0 R \times \hat{a}|}$$

$$\hat{s} = \hat{a} \times \hat{n}$$

$$Q = Q_0 :$$

Si $\theta_4 > \theta_{4 \max} \rightarrow$ Cambiar Q

Si $\phi > |\theta_6|_{\max} \rightarrow$ cambiar Q

Si no se necesita cambiar el punto Q , se prosigue al cálculo de las posiciones angulares asociadas a las juntas.

ANEXO D. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN.

A continuación se describen los métodos de común aplicación en la interpolación en el espacio de juntas (polinomios de diferentes grados, cicloidal, aceleración rectangular) además de un par de métodos de desarrollo propio (aceleración senoidal y cosenoidal) y un método de planteado en [9] (aceleración trapezoidal).

$\theta'_{0\max}$
 $\theta''_{0\max}$
 $\theta'''_{0\max}$ → Valores máximos posibles de velocidad, aceleración y sobreaceleración, respectivamente, relativas en cada una de las juntas.

θ'_{\max}
 θ''_{\max}
 θ'''_{\max} → Valores máximos de velocidad, aceleración y sobreaceleración, desarrollados en la junta analizada.

$\Delta\theta = (\theta_f - \theta_i)$ → Desplazamiento angular

D.1. POLINOMIO DE GRADO 3

Este método de interpolación permite que la señal de velocidad sea continua en el conjunto de intervalos. Por el contrario, la señal de aceleración es discontinua en las fronteras de cada intervalo produciendo una sobreaceleración elevada, idealmente infinita.

$$\text{Sea } s(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \quad (\text{D.1})$$

$$s'(\tau) = 3a\tau^2 + 2b\tau + c \quad (\text{D.2})$$

$$s''(\tau) = 6a\tau + 2b \quad (\text{D.3})$$

$$s'''(\tau) = 6a \quad (\text{D.4})$$

Donde: $0 \leq s(\tau) \leq 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \tau = t/T$

Las variables articulares se definen así:

$$\theta(t) = (\theta_f - \theta_i) \cdot s(\tau) + \theta_i \quad (\text{D.5})$$

$$\theta'(t) = (\theta_f - \theta_i) \cdot s'(\tau) / T \quad (\text{D.6})$$

$$\theta''(t) = (\theta_f - \theta_i) \cdot s''(\tau) / T^2 \quad (\text{D.7})$$

$$\theta'''(t) = (\theta_f - \theta_i) \cdot s'''(\tau) / T^3 \quad (\text{D.8})$$

Para las condiciones iniciales y finales:

$$s'(0) = 0, \text{ y } s'(1) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación tienen los siguientes valores:

$$a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$$

Resultando en los valores máximos y mínimos de las derivadas de S

$$s'_{\max} = s'(1/2) = 3/2, \quad s'_{\min} = s'(0) = s'(1) = 0$$

$$s''_{\max} = s''(0) = 6, \quad s''_{\min} = s''(1) = -6$$

$$s''' = \begin{cases} (-12 - s'''(0^-)) \cdot \delta(0) & \tau = 0 \\ -12 & 0 < \tau < 1 \\ (s'''(1^+) + 12) \cdot \delta(1) & \tau = 1 \end{cases} \quad \text{Por tanto es posible que :}$$

$$s'''_{\max} \rightarrow +\infty$$

$$s'''_{\min} \rightarrow -\infty$$

Obteniendo a partir de estos los siguientes valores:

$$|\theta'_{\max}| = |s'|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T} = \frac{3}{2} \frac{|\Delta\theta|}{T} \leq \theta'_{0\max} \quad (\text{D.9})$$

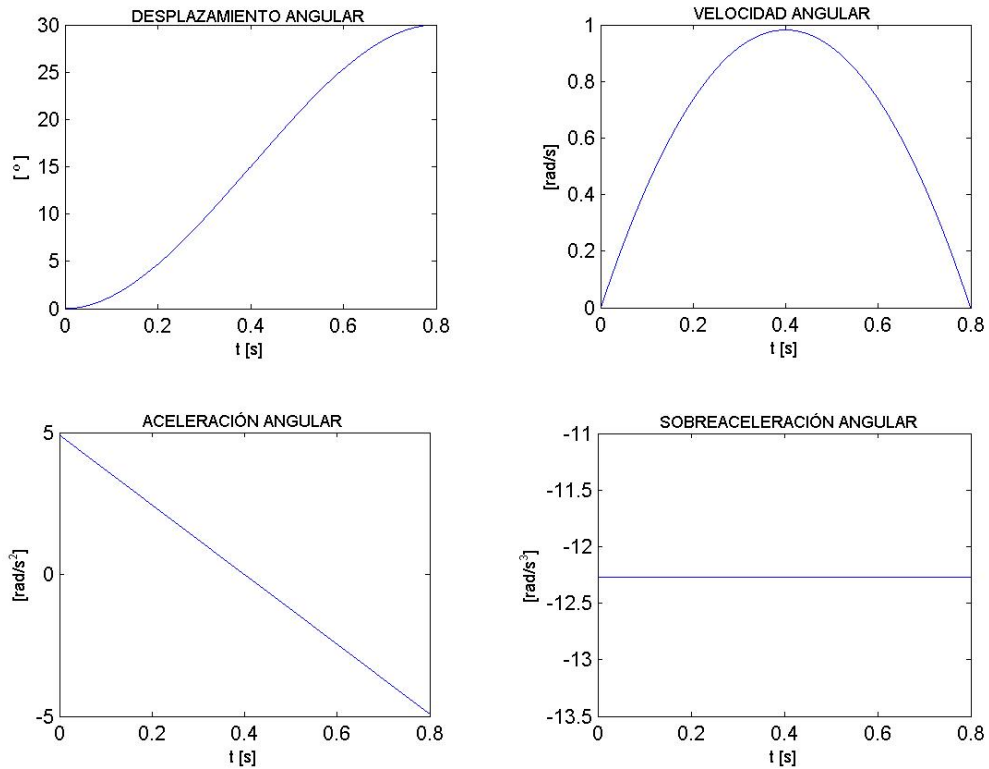
$$|\theta''_{\max}| = |s''|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^2} = 6 \frac{|\Delta\theta|}{T^2} \leq \theta''_{0\max} \quad (\text{D.10})$$

$$|\theta'''_{\max}| = |s'''|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^3} = 12 \frac{|\Delta\theta|}{T^3} \quad (\text{D.11})$$

El mínimo valor que puede tomar T se determina de la siguiente manera:

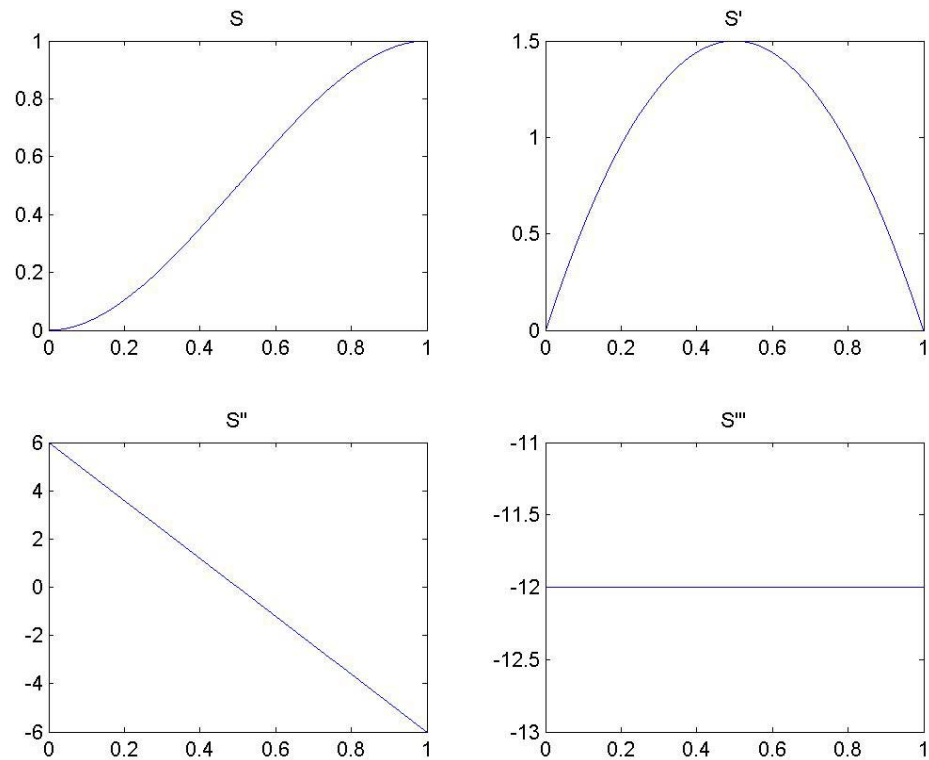
$$T_{\min} = \text{máximo} \left(\frac{3}{2} \frac{|\Delta\theta|}{\theta'_{0\max}}, \sqrt{6 \frac{|\Delta\theta|}{\theta''_{0\max}}} \right) \quad (\text{D.12})$$

Figura D.1. Polinomio de tercer grado. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobrealceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi [\text{rad/s}]$, $\theta''_{0\max} = 5 [\text{rad/s}^2]$, $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D.2. Polinomio de tercer grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales nulas.



Fuente: Autor del proyecto.

Para condiciones iniciales y/o finales diferentes de cero, los coeficientes de la ecuación son los siguientes:

$$a = s'(0) + s'(1) - 2, \quad b = 3 - 2s'(0) - s'(1), \quad c = s'(0), \quad d = 0$$

Si $a \neq 0$

$$|s'|_{\max} = \begin{cases} \max\{s'(0), s'(1), s'(-b/3a)\} & 0 < -b/3a < 1 \\ \max\{s'(0), s'(1)\} & -b/3a \leq 0, \quad 1 \leq -b/3a \end{cases}$$

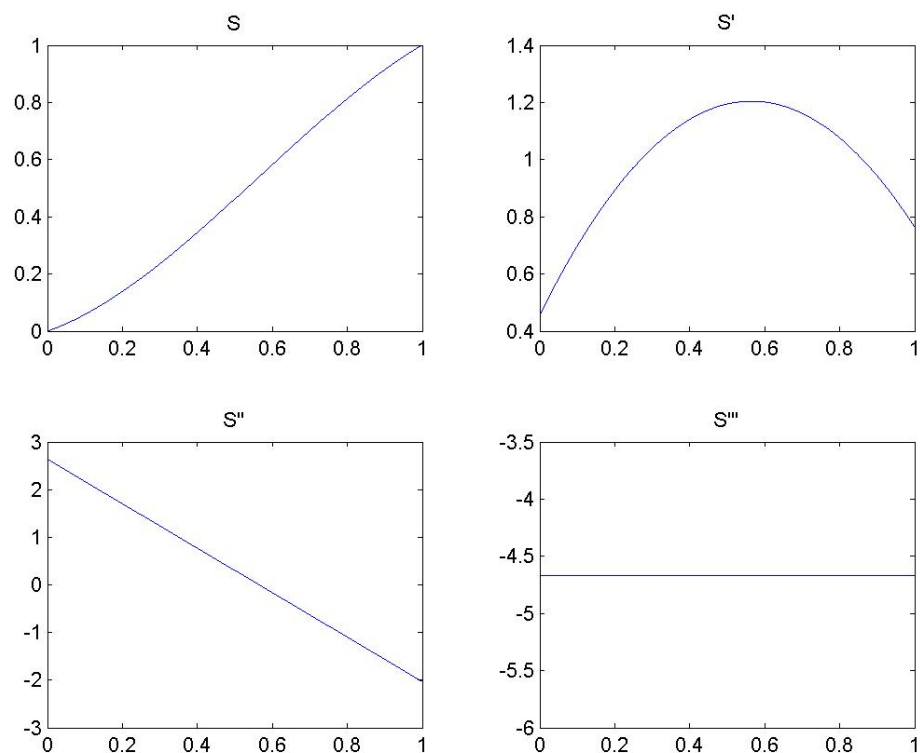
$$|s''|_{\max} = \max\{|s''(0)|, |s''(1)|\}$$

Si $a = 0, \Rightarrow s'(0) + s'(1) = 2$

$$|s'|_{\max} = \begin{cases} s'(0), & s'(0) > 1 \\ s'(1), & s'(0) < 1 \\ 1, & s'(0) = 1 \end{cases}$$

$$|s''|_{\max} = |2b| = 2|1 - s'(0)|$$

Figura D.3. Polinomio de tercer grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado para velocidades inicial y final diferentes de cero.



Fuente: Autor del proyecto.

D.2. POLINOMIO DE GRADO 5

El empleo de un polinomio de quinto grado permite la asignación de las condiciones iniciales y finales de las funciones de velocidad y aceleración. Esto implica que la señal de aceleración puede hacerse continua en el conjunto de

intervalos produciendo una sobreaceleración de valor finito en las fronteras de los intervalos.

$$\text{Sea} \quad s(\tau) = a\tau^5 + b\tau^4 + c\tau^3 + d\tau^2 + e\tau + f \quad (\text{D.13})$$

$$s'(\tau) = 5a\tau^4 + 4b\tau^3 + 3c\tau^2 + 2d\tau + e \quad (\text{D.14})$$

$$s''(\tau) = 20a\tau^3 + 12b\tau^2 + 6c\tau + 2d \quad (\text{D.15})$$

$$s'''(\tau) = 60a\tau^2 + 24b\tau + 6c \quad (\text{D.16})$$

$$\text{Donde:} \quad 0 \leq s(\tau) \leq 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \tau = t/T$$

Las variables articulares se definen de igual manera que para el *polinomio de tercer grado* (D.5-D.8).

Para las condiciones iniciales y finales:

$$s'(0) = 0, \quad s'(1) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s''(1) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación tienen los siguientes valores:

$$a = 6, \quad b = -15, \quad c = 10, \quad d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0$$

Resultando en los valores máximos y mínimos de las derivadas de S

$$s'_{\max} = 15/8, \quad s'_{\min} = 0$$

$$s''_{\max} = 10 \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad s''_{\min} = -10 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$s'''_{\max} = 60, \quad s'''_{\min} = -30$$

Obteniendo a partir de estos los siguientes valores:

$$|\theta'_{\max}| = |s'_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T} = \frac{15}{8} \frac{|\Delta\theta|}{T} \leq \theta'_{0\max} \quad (\text{D.17})$$

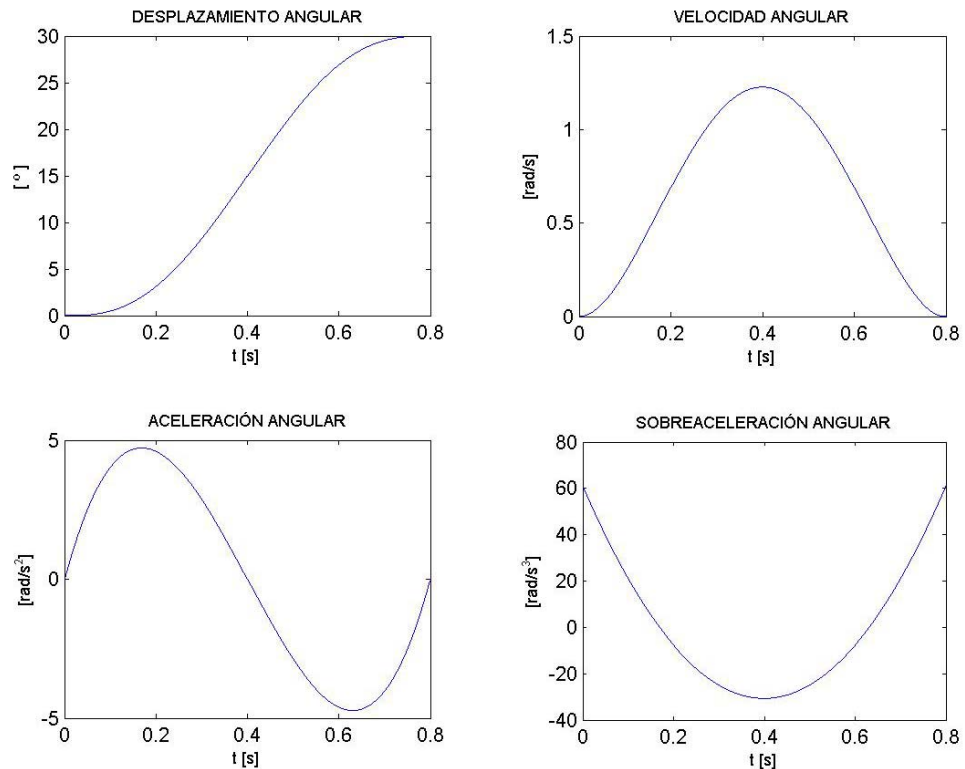
$$|\theta''_{\max}| = |s''|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \frac{|\Delta\theta|}{T^2} \leq \theta''_{0\max} \quad (\text{D.18})$$

$$|\theta'''_{\max}| = |s'''|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^3} = 60 \frac{|\Delta\theta|}{T^3} \quad (\text{D.19})$$

El mínimo valor que puede tomar T se determina de la siguiente manera:

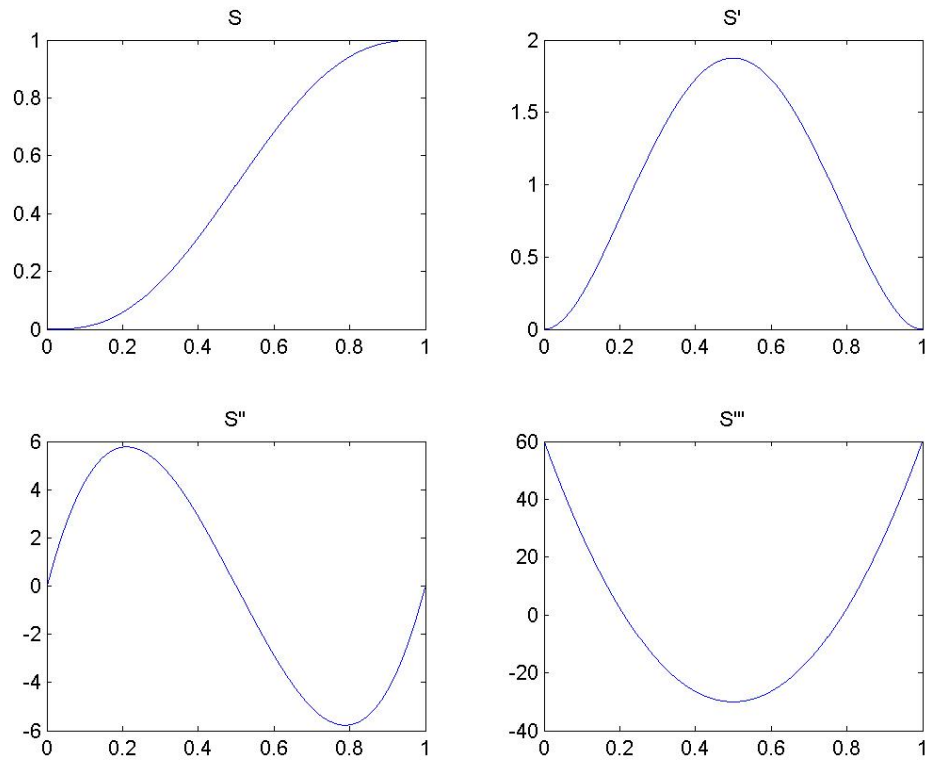
$$T_{\min} = \text{máximo} \left(\frac{15}{8} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{\theta'_{0\max}}, \sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{\theta''_{0\max}}} \right) \quad (\text{D.20})$$

Figura D.4. Polinomio de quinto grado. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi [\text{rad/s}]$, $\theta''_{0\max} = 5 [\text{rad/s}^2]$, $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D.5. Polinomio de quinto grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales nulas.



Fuente: Autor del proyecto.

Para condiciones iniciales y/o finales diferentes de cero, los coeficientes de la ecuación son los siguientes:

$$a = \frac{s''(1) - s''(0) - 6s'(1) - 6s'(0) + 12}{2}$$

$$b = -s''(1) + \frac{3}{2}s''(0) + 7s'(1) + 8s'(0) - 15$$

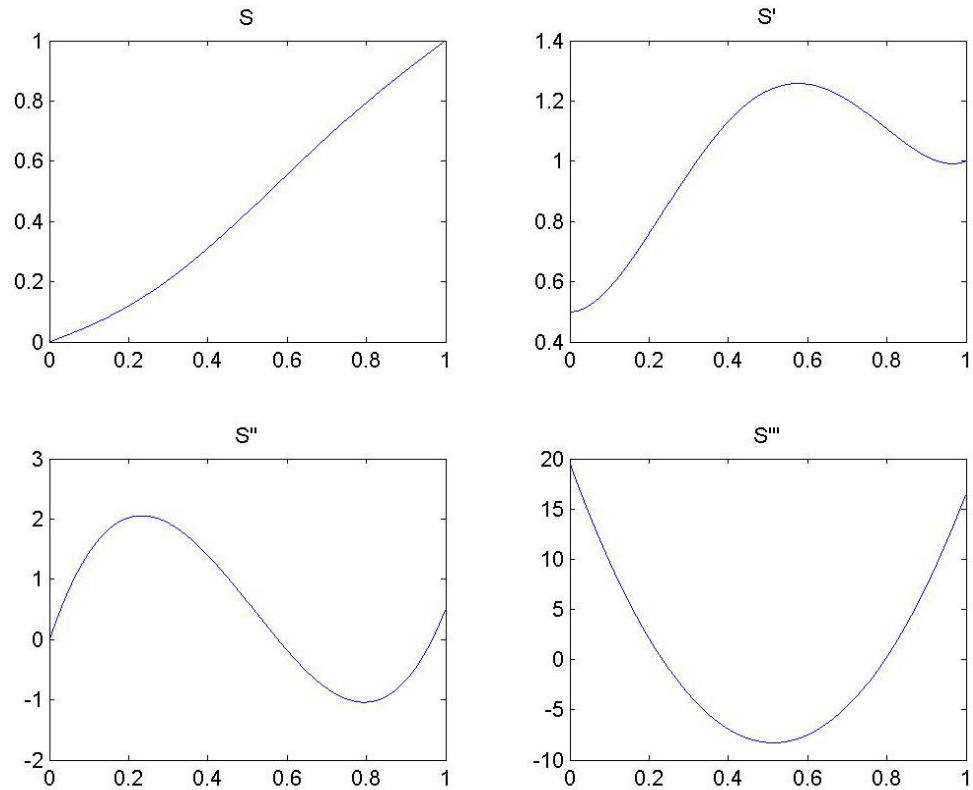
$$c = \frac{1}{2}s''(1) - \frac{3}{2}s''(0) - 4s'(1) - 6s'(0) + 10$$

$$d = \frac{1}{2}s''(0)$$

$$e = s'(0)$$

$$f = 0$$

Figura D.6. Polinomio de quinto grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer orden con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales y finales diferentes de cero.



Fuente: Autor del proyecto.

Para solo las condiciones de velocidad inicial y/o final diferentes de cero, los coeficientes de la ecuación son los siguientes:

$$a = -3s'(1) - 3s'(0) + 6$$

$$b = 7s'(1) + 8s'(0) - 15$$

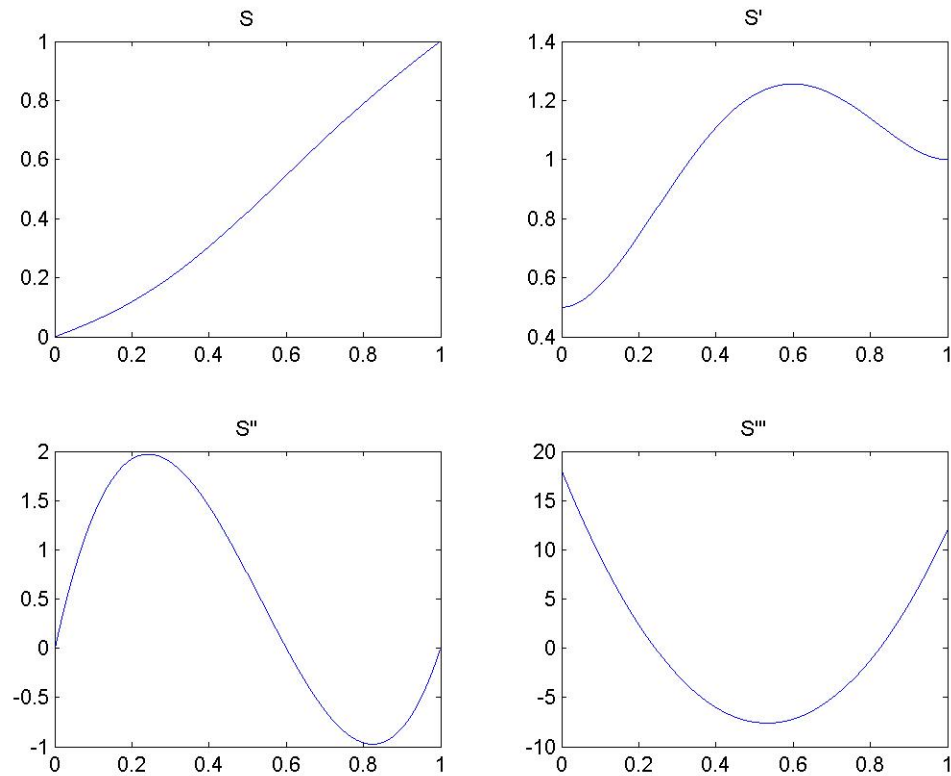
$$c = -4s'(1) - 6s'(0) + 10$$

$$d = 0$$

$$e = s'(0)$$

$$f = 0$$

Figura D.7. Polinomio de quinto grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado para velocidades inicial y final diferentes de cero.



Fuente: Autor del proyecto.

D.3. POLINOMIO DE GRADO 7

A diferencia del método anterior, el uso de un polinomio de séptimo grado logra la continuidad en la curva de sobreaceleración en las fronteras de cada intervalo.

$$\text{Sea } s(\tau) = a\tau^7 + b\tau^6 + c\tau^5 + d\tau^4 + e\tau^3 + f\tau^2 + g\tau + h \quad (\text{D.21})$$

$$s'(\tau) = 7a\tau^6 + 6b\tau^5 + 5c\tau^4 + 4d\tau^3 + 3e\tau^2 + 2f\tau + g \quad (\text{D.22})$$

$$s''(\tau) = 42a\tau^5 + 30b\tau^4 + 20c\tau^3 + 12d\tau^2 + 6e\tau + 2f \quad (\text{D.23})$$

$$s''''(\tau) = 210a\tau^4 + 120b\tau^3 + 60c\tau^2 + 24d\tau + 6e \quad (D.24)$$

Donde: $0 \leq s(\tau) \leq 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \tau = t/T$

Las ecuaciones (D.5-D.8) definen las variables articulares de la forma dada para los *polinomios de tercer y quinto grado*.

Para las condiciones iniciales y finales:

$$s'(0) = 0, \quad s'(1) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s''(1) = 0, \quad s'''(0) = 0, \quad s'''(1) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación tienen los siguientes valores:

$$a = -20, \quad b = 70, \quad c = -84, \quad d = 35, \quad e = 0, \quad f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0$$

Resultando en los valores máximos y mínimos de las derivadas de s

$$\begin{aligned} s'_{\max} &= 35/16, & s'_{\min} &= 0 \\ s''_{\max} &= 84 \frac{\sqrt{5}}{25}, & s''_{\min} &= -84 \frac{\sqrt{5}}{25} \\ s'''_{\max} &= 42, & s'''_{\min} &= -105/2 \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de estos los siguientes valores:

$$|\theta'_{\max}| = |s'_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T} = \frac{35}{16} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T} \leq \theta'_{0\max} \quad (D.25)$$

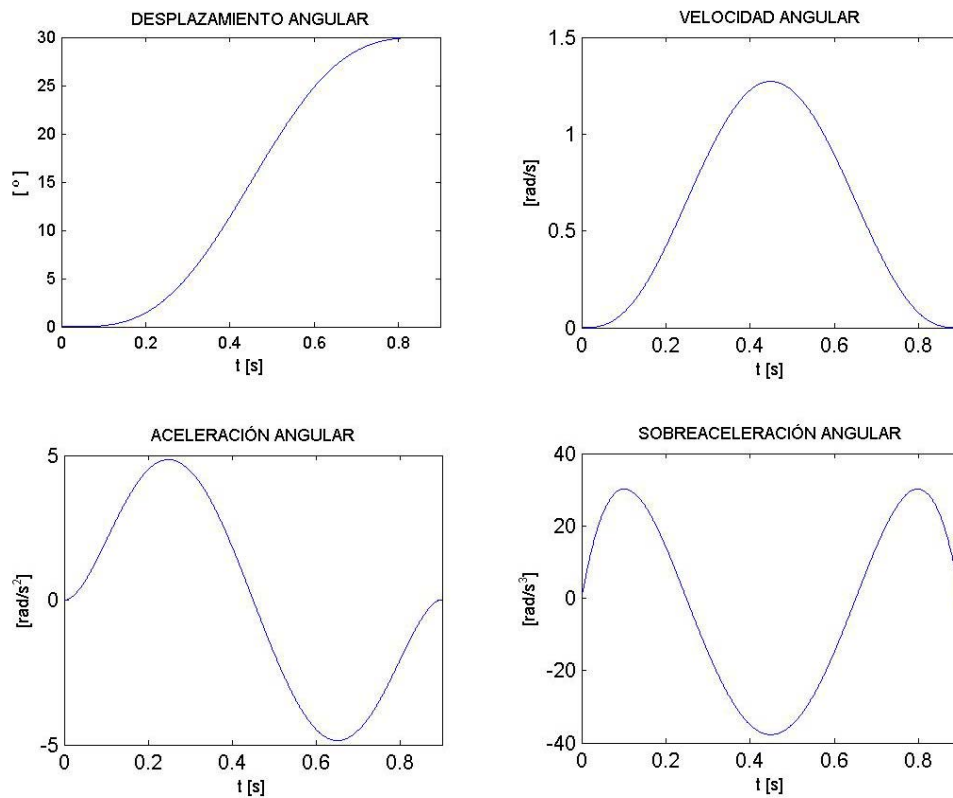
$$|\theta''_{\max}| = |s''_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^2} = \frac{84\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^2} \leq \theta''_{0\max} \quad (D.26)$$

$$|\theta'''_{\max}| = |s'''|_{\max} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^3} = \frac{105}{2} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^3} \quad (D.27)$$

El mínimo valor que puede tomar T se determina de la siguiente manera:

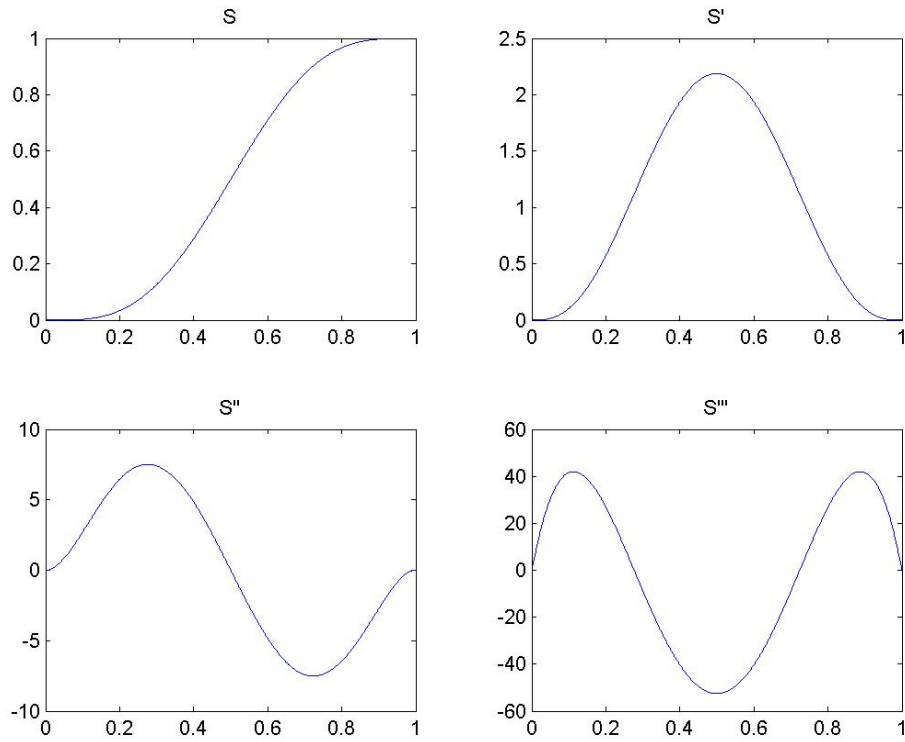
$$T_{\min} = \text{máximo} \left(\frac{35}{16} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{\theta'_{0\max}}, \sqrt{\frac{84\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{|\Delta\theta|}{\theta''_{0\max}}} \right) \quad (D.28)$$

Figura D.8. Polinomio de séptimo grado. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D.9. Polinomio de séptimo grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales nulas.



Fuente: Autor del proyecto.

Para condiciones iniciales y/o finales diferentes de cero, los coeficientes de la ecuación son los siguientes:

$$a = \frac{1}{6} s'''(1) - 29s'''(0) - 2s''(1) + 4s''(0) + 10s'(1) + 10s'(0) - 20$$

$$b = -\frac{1}{2} s'''(1) + 98s'''(0) + \frac{13}{2} s''(1) - 15s''(0) - 34s'(1) - 36s'(0) + 70$$

$$c = -\frac{1}{2} s'''(1) - 111s'''(0) - 7s''(1) + 20s''(0) + 39s'(1) + 45s'(0) - 84$$

$$d = -\frac{1}{6} s'''(1) + 41s'''(0) + \frac{5}{2} s''(1) - 10s''(0) - 15s'(1) - 20s'(0) + 35$$

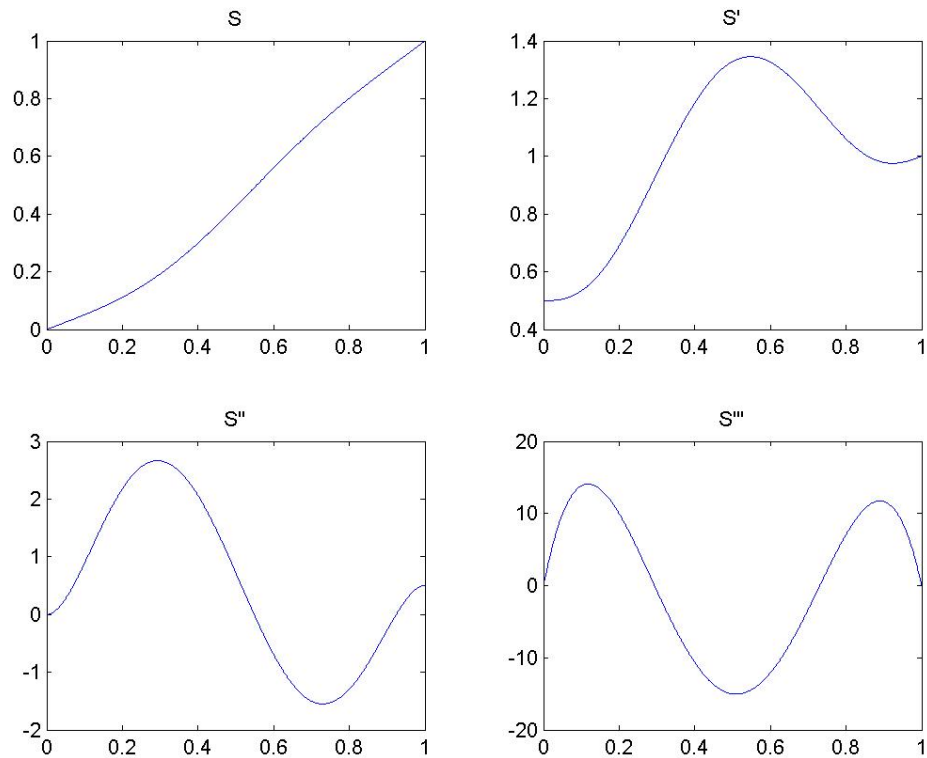
$$e = s'''(0)$$

$$f = s''(0)$$

$$g = s'(0)$$

$$h = 0$$

Figura D.10. Polinomio de séptimo grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales y finales de velocidad y de aceleración diferentes de cero.

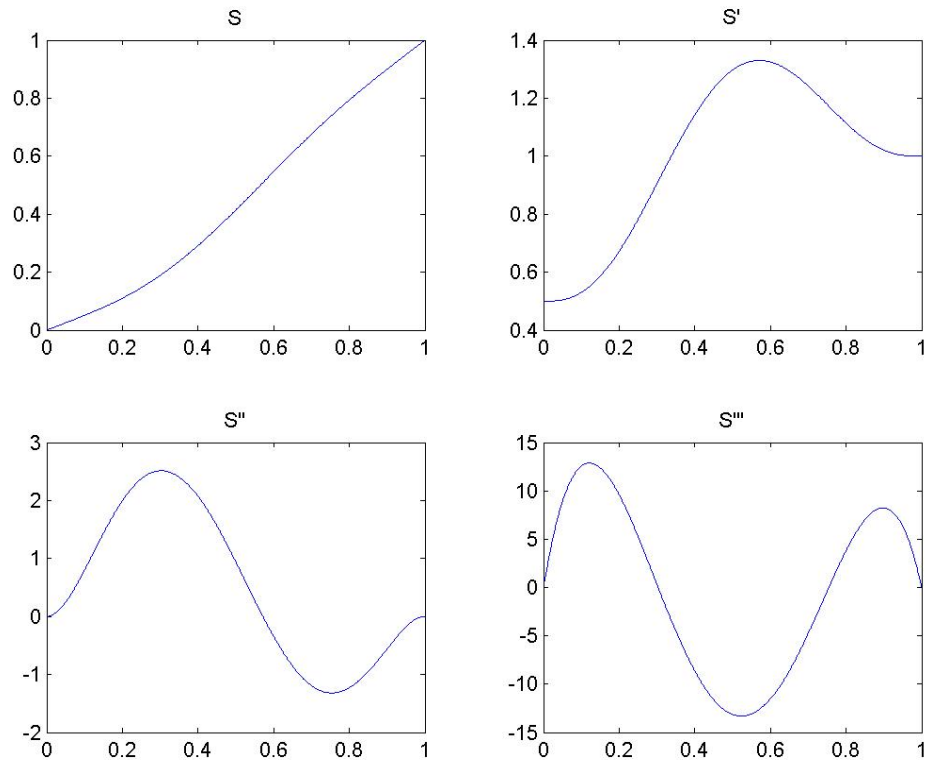


Fuente: Autor del proyecto.

Para solo las condiciones de velocidad inicial y/o final diferentes de cero, los coeficientes de la ecuación se reducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 a &= 10s'(1) + 10s'(0) - 20, & e &= 0 \\
 b &= -34s'(1) - 36s'(0) + 70, & f &= 0 \\
 c &= 39s'(1) + 45s'(0) - 84, & g &= s'(0) \\
 d &= -15s'(1) - 20s'(0) + 35, & h &= 0
 \end{aligned}$$

Figura D.11. Polinomio de séptimo grado. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado para velocidades inicial y final diferentes de cero.



Fuente: Autor del proyecto.

D.4. MOVIMIENTO CICLOIDAL

La utilización de las funciones que describen el movimiento cicloidal permite la continuidad en velocidad y aceleración en los puntos frontera del intervalo. Además, ofrece un desplazamiento normalizado, al igual que en los métodos anteriores, facilitando la manipulación del tiempo, si esta es necesaria. Para condiciones iniciales y/o finales diferentes de cero, este método no es aplicable.

$$\text{Sea } s(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2\pi\tau) \quad (\text{D.29})$$

$$s'(\tau) = 1 - \cos(2\pi\tau) \quad (\text{D.30})$$

$$s''(\tau) = 2\pi \cdot \text{sen}(2\pi\tau) \quad (\text{D.31})$$

$$s'''(\tau) = 4\pi^2 \cdot \text{cos}(2\pi\tau) \quad (\text{D.32})$$

Donde: $0 \leq s(\tau) \leq 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \tau = t/T$

Las variables articulares se definen de igual manera que para los métodos que emplean *polinomios*.

Para las condiciones iniciales y finales:

$$s'(0) = 0, \quad s'(1) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s''(1) = 0$$

Resultando en los valores máximos y mínimos de las derivadas de S

$$\begin{aligned} s'_{\max} &= 2, & s'_{\min} &= 0 \\ s''_{\max} &= 2\pi, & s''_{\min} &= -2\pi \\ s'''_{\max} &= 4\pi^2, & s'''_{\min} &= -4\pi^2 \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de estos los siguientes valores:

$$|\theta'_{\max}| = |s'_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T} = 2 \frac{|\Delta\theta|}{T} \leq \theta'_{0\max} \quad (\text{D.33})$$

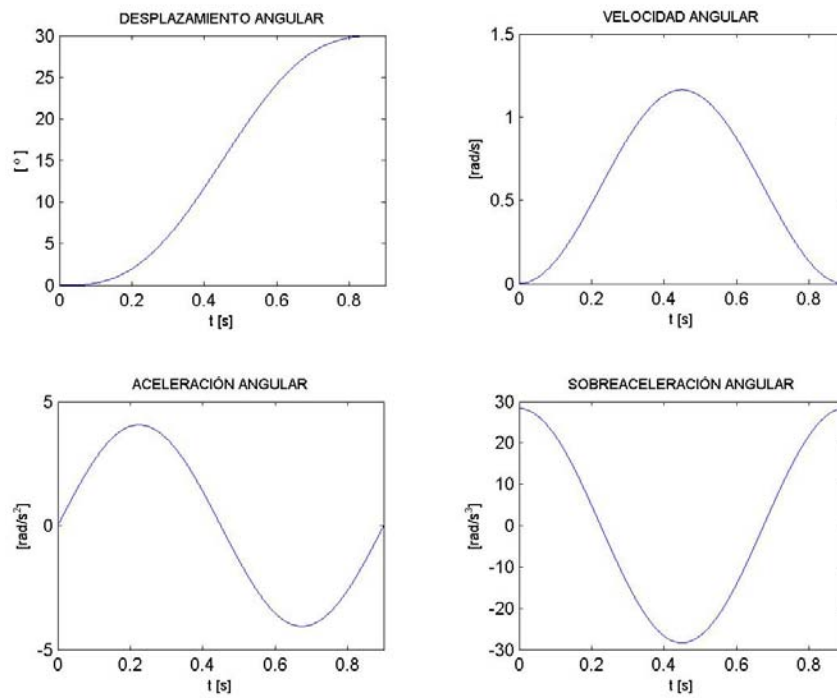
$$|\theta''_{\max}| = |s''_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^2} = 2\pi \frac{|\Delta\theta|}{T^2} \leq \theta''_{0\max} \quad (\text{D.34})$$

$$|\theta'''_{\max}| = |s'''_{\max}| \cdot \frac{|\Delta\theta|}{T^3} = 4\pi^2 \frac{|\Delta\theta|}{T^3} \quad (\text{D.35})$$

El mínimo valor que puede tomar T se determina de la siguiente manera:

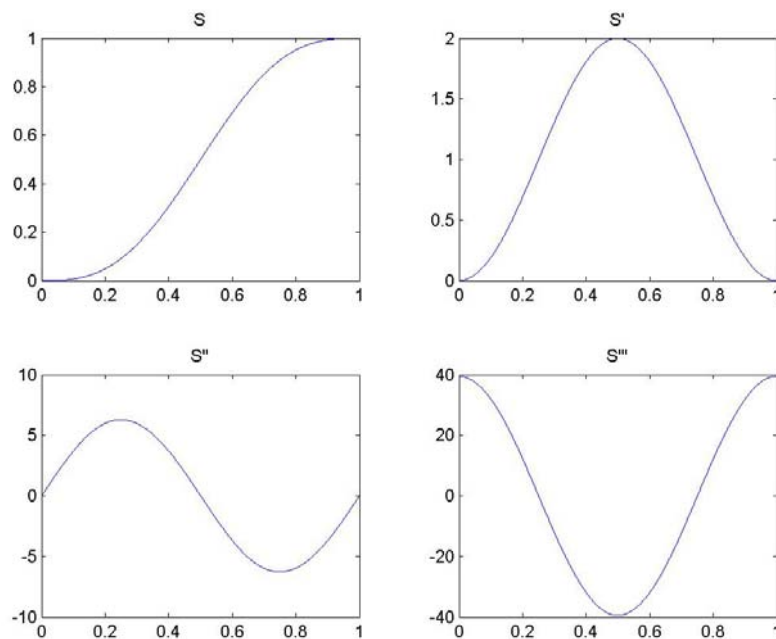
$$T_{\min} = \text{máximo} \left(2 \frac{|\Delta\theta|}{\theta'_{0\max}}, \sqrt{2\pi \frac{|\Delta\theta|}{\theta''_{0\max}}} \right) \quad (\text{D.35})$$

Figura D.12. Movimiento cicloidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D.13. Movimiento cicloidal. Desplazamiento normalizado y sus derivadas de primer, segundo y tercer grado con respecto al tiempo normalizado, para condiciones iniciales nulas.



Fuente: Autor del proyecto.

D.5. ACELERACIÓN RECTANGULAR

La denominación de este método se debe a la forma de la curva de aceleración obtenida, compuesta por señales escalón. La sobreaceleración, puesto que la aceleración es discontinua, está representada por señales impulso. La curva de velocidad está formada por rampas y un tramo de valor constante.

En primera instancia se asignan los valores máximos posibles a los valores máximos de aceleración y de velocidad.

$$\theta'_{\max} = \theta'_{o_{\max}}$$

$$\theta''_{\max} = \theta''_{o_{\max}}$$

La velocidad se ha de revisar y corregir si es necesario:

si $\Delta\theta \cdot \theta''_{\max} < \theta'_{\max}{}^2 \Rightarrow \theta'_{\max} = \sqrt{\Delta\theta \cdot \theta''_{\max}}$, esta expresión está dada para realizar el desplazamiento en el menor tiempo posible.

El tiempo mínimo en lograr el cambio deseado en la variable de junta se define así:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \quad (D.36)$$

Para realizar el desplazamiento en un tiempo mayor al mínimo calculado, se han de modificar: el valor de aceleración máxima y/o el valor de velocidad máxima. Es demostrable que el cambio simultáneo en las variables de aceleración y velocidad aplicando el mismo factor de reducción en ellas, ilustrado en las ecuaciones siguientes, es el más adecuado puesto que cumple la restricción de velocidad y permite reducir la aceleración, razón de gran importancia en la corrección de tiempos por sobre paso de momentos máximos posibles.

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \quad \theta''_{\max} = k \cdot \theta'_{\max}, \quad \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max} \quad (D.37)$$

Para velocidades inicial y/o final diferentes de cero, el tiempo mínimo está dado por:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}}\right)^2 \right) \quad (D.38)$$

Para aumentar el tiempo de ejecución, se han de emplear las expresiones:

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \quad \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max}, \quad (D.39)$$

$$\theta''_{\max} = k \cdot \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}}\right)^2 \right) \quad (D.40)$$

Debe cerciorarse el cumplimiento de la desigualdad:

$$2\Delta\theta \cdot \theta''_{\max} \geq 2\theta'_{\max}{}^2 - \theta_i'^2 - \theta_f'^2 \quad (D.41)$$

De no cumplirse lo anterior, se han aplicar las siguientes modificaciones:

$$\theta'_{\max} = \frac{\Delta\theta}{T} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_i\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_f\right)^2}{2}} \quad (D.42)$$

$$\theta''_{\max} = \frac{2\theta'_{\max} - \theta'_i - \theta'_f}{T} \quad (D.43)$$

Ecuaciones que describen el movimiento:

- Para $0 \leq t \leq t_1$, donde $t_1 = \frac{\theta'_{\max} - \theta'_i}{\theta''_{\max}}$

$$\theta(t) = \frac{\theta''_{\max}}{2} t^2 + \theta'_i \cdot t + \theta_i$$

$$\theta'(t) = \theta''_{\max} \cdot t + \theta'_i$$

$$\theta''(t) = \theta''_{\max}$$

$$\theta'''(t) = (\theta''_{\max} - \theta''(0^-)) \cdot \delta(t) - (\theta''_{\max} - \theta''(t_1^+)) \cdot \delta(t - t_1)$$

- Para $t_1 < t \leq t_2$, donde $t_2 = T - \frac{\theta'_{\max} - \theta'_f}{\theta''_{\max}}$

$$\theta(t) = \theta'_{\max} \cdot (t - t_1) + \theta(t_1)$$

$$\theta'(t) = \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = 0$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_2 < t \leq T$,

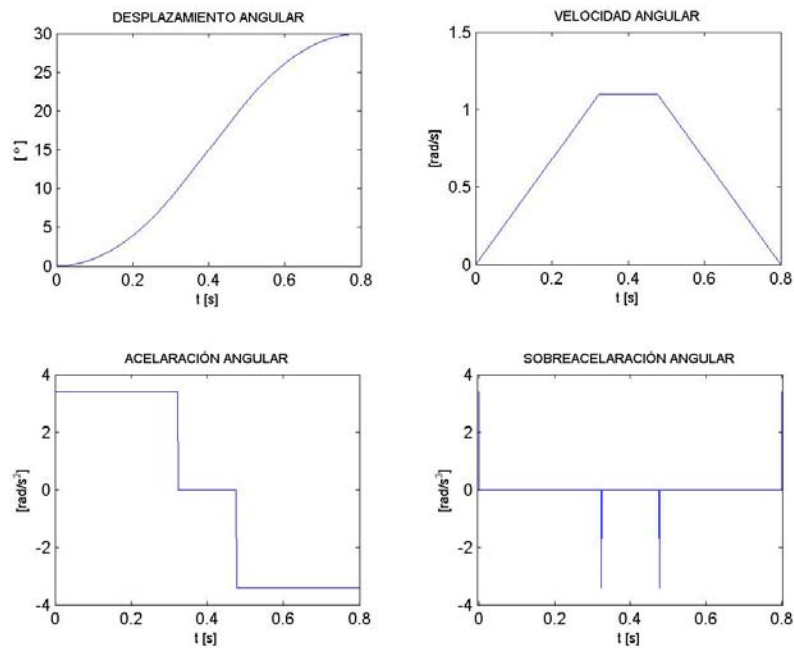
$$\theta(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot (t - t_2)^2 + \theta'_{\max} \cdot (t - t_2) + \theta(t_2)$$

$$\theta'(t) = -\theta''_{\max} \cdot (t - t_2) + \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = -\theta''_{\max}$$

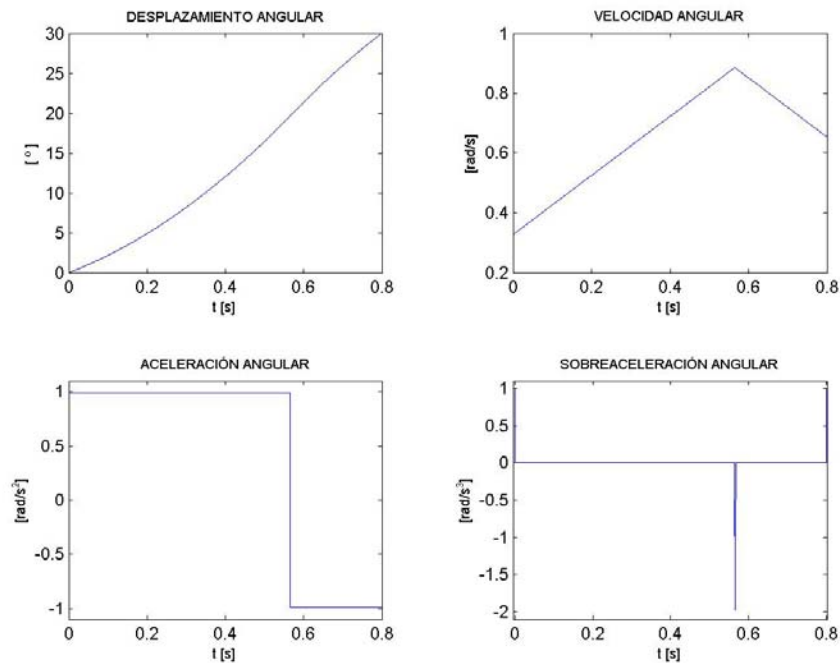
$$\theta'''(t) = -(\theta''_{\max} - \theta''(t_2^-)) \cdot \delta(t - t_2) + (\theta''_{\max} - \theta''(T^+)) \cdot \delta(t - T)$$

Figura D.14. Aceleración rectangular. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D15. Aceleración rectangular. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) \neq 0$, $\theta'(T) \neq 0$



Fuente: Autor del proyecto.

D.6. ACELERACIÓN SENOIDAL

La curva de aceleración en este método está conformada por dos tramos de medio ciclo de onda senoidal y un tramo de aceleración nula. Esta curva es continua, produciendo una sobreaceleración de valor finito en todos los puntos aunque discontinua.

Se asignan los valores máximos posibles a los valores máximos de aceleración y de velocidad.

$$\theta'_{\max} = \theta'_{o_{\max}}$$

$$\theta''_{\max} = \theta''_{o_{\max}}$$

La velocidad se ha de inspeccionar y corregir si es necesario:

$$\text{si } \Delta\theta \cdot \theta''_{\max} < \frac{\pi}{2} \theta'_{\max}{}^2 \Rightarrow \theta'_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \Delta\theta \cdot \theta''_{\max}} \quad (\text{D.44})$$

El menor tiempo en el que se logra ejecutar el desplazamiento deseado se define así:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \quad (\text{D.45})$$

De manera análoga al método de aceleración rectangular, las ecuaciones para lograr el desplazamiento en un tiempo mayor al mínimo calculado son:

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \quad \theta''_{\max} = k \cdot \theta''_{o_{\max}}, \quad \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{o_{\max}} \quad (\text{D.46})$$

Para velocidades inicial y/o final diferentes de cero, el tiempo mínimo está dado por:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}}\right)^2 \right) \quad (\text{D.47})$$

Para aumentar el tiempo de ejecución, se han de emplear las expresiones:

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \quad \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max} \quad (\text{D.48})$$

$$\theta''_{\max} = k \cdot \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}}\right)^2 \right) \quad (\text{D.49})$$

Debe cerciorarse el cumplimiento de la desigualdad:

$$\frac{4}{\pi} \Delta\theta \cdot \theta''_{\max} \geq 2\theta'_{\max}{}^2 - \theta_i'^2 - \theta_f'^2 \quad (\text{D.50})$$

De no cumplirse lo anterior, se han aplicar las siguientes modificaciones:

$$\theta'_{\max} = \frac{\Delta\theta}{T} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_i\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_f\right)^2}{2}} \quad (\text{D.51})$$

$$\theta''_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\theta'_{\max} - \theta'_i - \theta'_f}{T} \quad (\text{D.52})$$

Ecuaciones que describen el movimiento:

- Para $0 \leq t \leq t_1$, donde $t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max} - \theta'_i}{\theta''_{\max}}$ y $\omega_1 = \frac{2\theta''_{\max}}{\theta'_{\max} - \theta'_i}$

$$\theta(t) = \frac{\theta''_{\max}}{\omega_1} \cdot \left(t - \frac{\text{sen}(\omega_1 \cdot t)}{\omega_1} \right) + \theta'_i \cdot t + \theta_i$$

$$\theta'(t) = \frac{\theta''_{\max}}{\omega_1} (1 - \cos(\omega_1 \cdot t)) + \theta'_i$$

$$\theta''(t) = \theta''_{\max} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$\theta'''(t) = \theta''_{\max} \cdot \omega_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

- Para $t_1 < t \leq t_2$, donde $t_2 = T - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\theta'_{\max} - \theta'_f}{\theta''_{\max}}$

$$\theta(t) = \theta'_{\max} \cdot (t - t_1) + \theta(t_1)$$

$$\theta'(t) = \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = 0$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_2 < t \leq T$, y $\omega_3 = \frac{2\theta''_{\max}}{\theta'_{\max} - \theta'_f}$

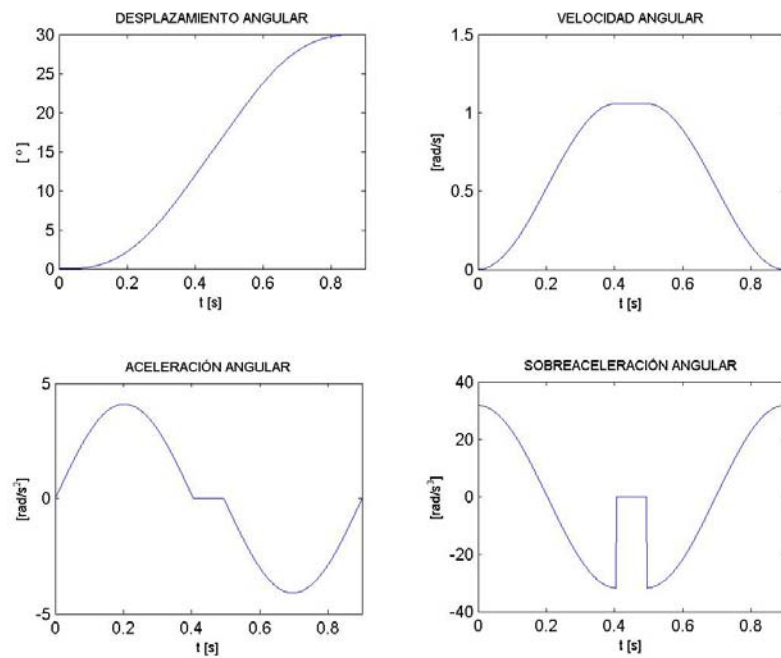
$$\theta(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{\omega_3} \cdot \left((t - t_2) - \frac{\text{sen}(\omega_3 \cdot (t - t_2))}{\omega_3} \right) + \theta'_i \cdot (t - t_2) + \theta(t_2)$$

$$\theta'(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{\omega_3} (1 - \cos(\omega_3 \cdot (t - t_2))) + \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = -\theta''_{\max} \cdot \text{sen}(\omega_3 \cdot (t - t_2))$$

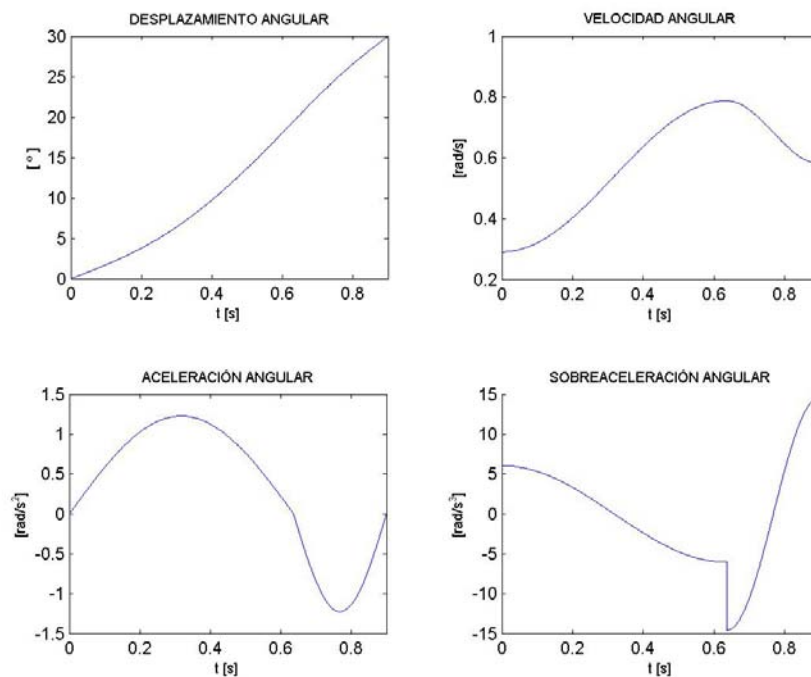
$$\theta'''(t) = -\theta''_{\max} \cdot \omega_3 \cdot \cos(\omega_3 \cdot (t - t_2))$$

Figura D16. Aceleración senoidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D17. Aceleración senoidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) \neq 0$, $\theta'(T) \neq 0$



Fuente: Autor del proyecto.

D.7. ACELERACIÓN COSENOIDAL

La aceleración está dada por dos ciclos completos de onda cosenoidal y un tramo de aceleración nula. La sobreaceleración resultante es continua en todo el conjunto de intervalos.

Se asignan los valores máximos posibles a los valores máximos de aceleración y de velocidad.

$$\theta'_{\max} = \theta'_{o_{\max}}$$

$$\theta''_{\max} = \theta''_{o_{\max}}$$

El valor de la velocidad se ha de examinar y modificar si es necesario:

$$\text{si } \Delta\theta \cdot \theta''_{\max} < 2\theta'_{\max}{}^2 \Rightarrow \theta'_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta\theta \cdot \theta''_{\max}} \quad (\text{D.53})$$

El tiempo empleado en ejecutar el desplazamiento deseado se define así:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + 2 \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \quad (\text{D.54})$$

Las ecuaciones para lograr el desplazamiento en un tiempo mayor al mínimo calculado son:

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - 2 \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \quad \theta''_{\max} = k \cdot \theta''_{o_{\max}}, \quad \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{o_{\max}} \quad (\text{D.55})$$

Para velocidades inicial y/o final diferentes de cero, el tiempo mínimo está dado por:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}} \right)^2 \right) \quad (\text{D.56})$$

Para aumentar el tiempo de ejecución, se han de emplear las expresiones:

$$k = \frac{\Delta\theta / \theta'_{\max}}{T - 2 \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}}}, \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max} \quad (\text{D.57})$$

$$\theta''_{\max} = k \cdot \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{\theta'_i}{\theta'_{\max}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\theta'_f}{\theta'_{\max}} \right)^2 \right) \quad (\text{D.58})$$

Debe cerciorarse el cumplimiento de la desigualdad:

$$\Delta\theta \cdot \theta''_{\max} \geq 2\theta'_{\max}{}^2 - \theta_i'^2 - \theta_f'^2 \quad (\text{D.59})$$

De no cumplirse lo anterior, se han aplicar las siguientes modificaciones:

$$\theta'_{\max} = \frac{\Delta\theta}{T} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_i \right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{T} - \theta'_f \right)^2}{2}} \quad (\text{D.60})$$

$$\theta''_{\max} = 2 \frac{2\theta'_{\max} - \theta'_i - \theta'_f}{T} \quad (\text{D.61})$$

Ecuaciones que describen el movimiento:

- Para $0 \leq t \leq t_1$, donde $t_1 = 2 \frac{\theta'_{\max} - \theta'_i}{\theta''_{\max}}$ y $\omega_1 = \frac{\pi \cdot \theta''_{\max}}{\theta'_{\max} - \theta'_i}$

$$\theta(t) = \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos(\omega_1 \cdot t)}{\omega_1^2} \right) + \theta'_i \cdot t + \theta_i$$

$$\theta'(t) = \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left(t - \frac{\text{sen}(\omega_1 \cdot t)}{\omega_1} \right) + \theta'_i$$

$$\theta''(t) = \frac{\theta''_{\max}}{2} (1 - \cos(\omega_1 \cdot t))$$

$$\theta'''(t) = \frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \omega_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

- Para $t_1 < t \leq t_2$, donde $t_2 = T - 2 \frac{\theta'_{\max} - \theta'_f}{\theta''_{\max}}$

$$\theta(t) = \theta'_{\max} \cdot (t - t_1) + \theta(t_1)$$

$$\theta'(t) = \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = 0$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_2 < t \leq T$, y $\omega_3 = \frac{\pi \cdot \theta''_{\max}}{\theta'_{\max} - \theta'_f}$

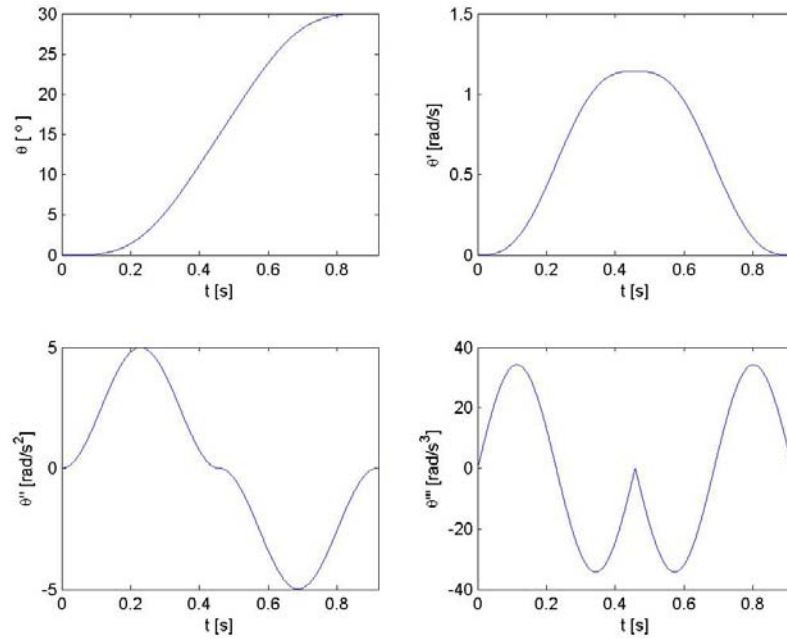
$$\theta(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \left(\frac{(t - t_2)^2}{2} - \frac{1 - \cos(\omega_3 \cdot (t - t_2))}{\omega_3^2} \right) + \theta'_i \cdot (t - t_2) + \theta(t_2)$$

$$\theta'(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \left((t - t_2) - \frac{\text{sen}(\omega_3 \cdot (t - t_2))}{\omega_3} \right) + \theta'_{\max}$$

$$\theta''(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot (1 - \cos(\omega_3 \cdot (t - t_2)))$$

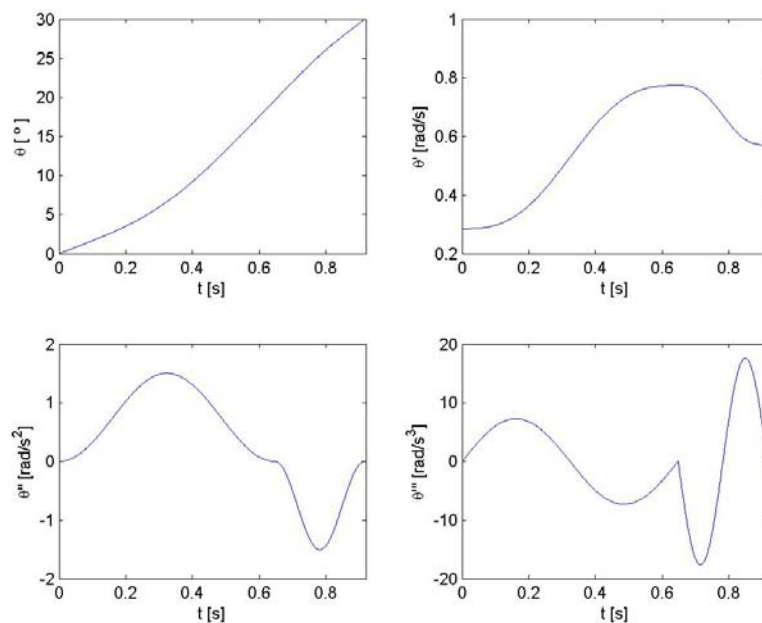
$$\theta'''(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot \omega_3 \cdot \text{sen}(\omega_3 \cdot (t - t_2))$$

Figura D.18. Aceleración cosenoidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) = 0$, $\theta'(T) = 0$



Fuente: Autor del proyecto.

Figura D.19. Aceleración cosenoidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi$ [rad/s], $\theta''_{0\max} = 5$ [rad/s²], $\theta'(0) \neq 0$, $\theta'(T) \neq 0$



Fuente: Autor del proyecto.

D.7. ACELERACIÓN TRAPEZOIDAL

En [9] se plantea este método de interpolación, siendo aplicable cuando se ha establecido un límite a la sobreaceleración puesto que el valor máximo de esta variable hace parte de las ecuaciones que describen el movimiento y de las restricciones. Si se hace que el valor máximo posible de sobreaceleración tienda a infinito este método resulta ser el *método de aceleración rectangular*, por tanto este método de *aceleración trapezoidal* es el resultado de la inclusión del máximo de sobreaceleración en las ecuaciones del *método de aceleración rectangular*, elevando el número de tramos a siete y las restricciones a dos. Este mismo proceso es aplicable a los métodos anteriores de aceleraciones *senoidal* y *cosenoidal*, las modificaciones resultantes no se encuentran incluidas en este texto pues las formulaciones desarrolladas no requieren valor máximo alguno de sobreaceleración.

Se asignan los valores máximos posibles a los valores máximos de velocidad, aceleración y sobreaceleración.

$$\theta'_{\max} = \theta'_{o_{\max}}$$

$$\theta''_{\max} = \theta''_{o_{\max}}$$

$$\theta'''_{\max} = \theta'''_{o_{\max}}$$

Se presentan las siguientes condiciones a cumplir en este método:

$$\frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \geq \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \geq \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \quad (\text{D.62})$$

Si se cumple $\frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \geq \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$ y no $\frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \geq \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$

$$k = \frac{\theta'_{\max} \cdot \theta'''_{\max}}{\theta''_{\max}{}^2} < 1 \rightarrow \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max}, \theta''_{\max} = k \cdot \theta''_{\max}$$

Si se cumple $\frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} \geq \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$ y no $\frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \geq \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$

$$k = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \left/ \left(\frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \right) \right. < 1$$

$$\rightarrow \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max}, \theta''_{\max} = k \cdot \theta''_{\max}, \theta'''_{\max} = k \cdot \theta'''_{\max}$$

Si ninguna condición se cumple:

$$m = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \left/ \left(2 \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \right) \right. < 1, \quad n = m \frac{\theta'_{\max} \cdot \theta'''_{\max}}{\theta''_{\max}{}^2} < m$$

$$\rightarrow \theta'_{\max} = m \cdot \theta'_{\max}, \theta''_{\max} = n \cdot \theta''_{\max}$$

El tiempo mínimo de realización del desplazamiento es:

$$T_{\min} = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \quad (\text{D.63})$$

Para un tiempo mayor:

$$k = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} \left/ \left(T - \frac{\theta'_{\max}}{\theta''_{\max}} - \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}} \right) \right. \quad (\text{D.64})$$

$$\rightarrow \theta'_{\max} = k \cdot \theta'_{\max}, \theta''_{\max} = k \cdot \theta''_{\max}, \theta'''_{\max} = k \cdot \theta'''_{\max} \quad (\text{D.65})$$

Las siguientes expresiones describen el movimiento:

- Para $0 \leq t \leq t_1$, donde $t_1 = \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$

$$\theta(t) = \frac{1}{6} \theta'''_{\max} \cdot t^3 + \theta_i$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2} \cdot \theta_{\max}''' \cdot t^2$$

$$\theta''(t) = \theta_{\max}''' \cdot t$$

$$\theta'''(t) = \theta_{\max}'''$$

- Para $t_1 < t \leq t_2$, donde $t_2 = \frac{\theta_{\max}'}{\theta_{\max}''}$

$$\theta(t) = \frac{\theta_{\max}''}{2} \cdot (t - t_1)^2 + \theta'(t_1) \cdot (t - t_1) + \theta(t_1)$$

$$\theta'(t) = \theta_{\max}'' \cdot (t - t_1) + \theta'(t_1)$$

$$\theta''(t) = \theta_{\max}''$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_2 < t \leq t_3$, donde $t_3 = \frac{\theta_{\max}'}{\theta_{\max}''} + \frac{\theta_{\max}''}{\theta_{\max}'''}$

$$\theta(t) = -\frac{1}{6} \theta_{\max}''' \cdot (t - t_2)^3 + \frac{1}{2} \theta''(t_2) \cdot (t - t_2)^2 + \theta'(t_2) \cdot (t - t_2) + \theta(t_2)$$

$$\theta'(t) = -\frac{1}{2} \theta_{\max}''' \cdot (t - t_2)^2 + \theta''(t_2) \cdot (t - t_2) + \theta'(t_2)$$

$$\theta''(t) = -\theta_{\max}''' \cdot (t - t_2) + \theta''(t_2)$$

$$\theta'''(t) = -\theta_{\max}'''$$

- Para $t_3 < t \leq t_4$, donde $t_4 = \frac{\Delta\theta}{\theta_{\max}'}$

$$\theta(t) = \theta_{\max}' \cdot (t - t_3) + \theta(t_3)$$

$$\theta'(t) = \theta_{\max}'$$

$$\theta''(t) = 0$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_4 < t \leq t_5$, donde $t_5 = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$

$$\theta(t) = -\frac{1}{6}\theta'''_{\max} \cdot (t-t_4)^3 + \theta'(t_4) \cdot (t-t_4) + \theta(t_4)$$

$$\theta'(t) = -\frac{1}{2}\theta'''_{\max} \cdot (t-t_4)^2 + \theta'(t_4)$$

$$\theta''(t) = -\theta'''_{\max} \cdot (t-t_4)$$

$$\theta'''(t) = -\theta'''_{\max}$$

- Para $t_5 < t \leq t_6$, donde $t_6 = \frac{\Delta\theta}{\theta'_{\max}} + \frac{\theta''_{\max}}{\theta'''_{\max}}$

$$\theta(t) = -\frac{\theta''_{\max}}{2} \cdot (t-t_5)^2 + \theta'(t_5) \cdot (t-t_5) + \theta(t_5)$$

$$\theta'(t) = -\theta''_{\max} \cdot (t-t_5) + \theta'(t_5)$$

$$\theta''(t) = -\theta''_{\max}$$

$$\theta'''(t) = 0$$

- Para $t_6 < t \leq T$,

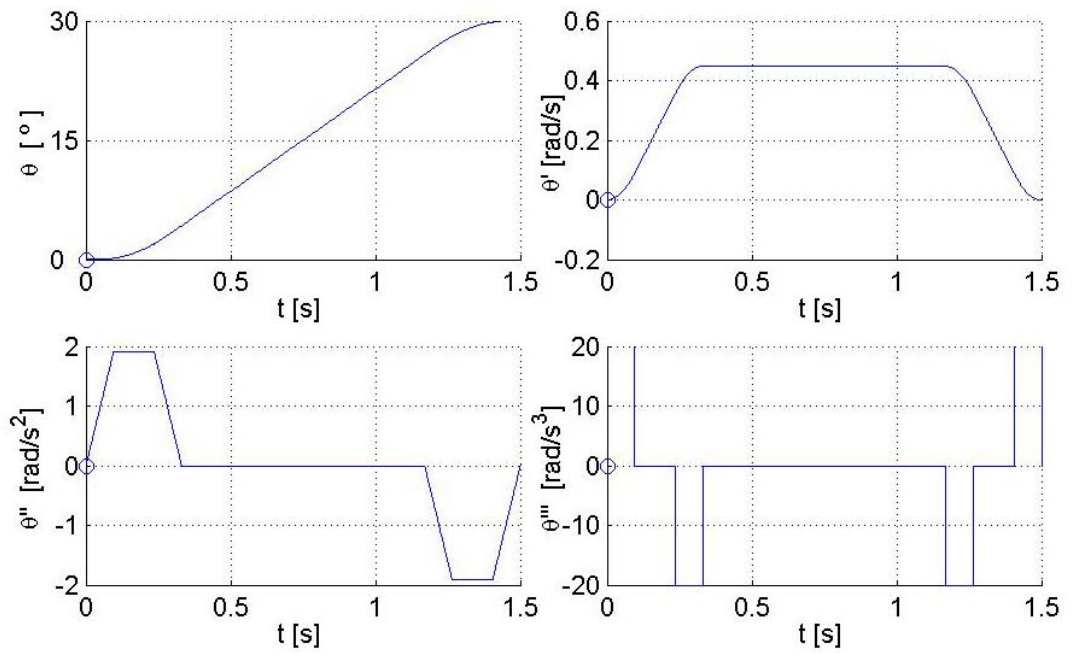
$$\theta(t) = \frac{1}{6}\theta'''_{\max} \cdot (t-t_6)^3 + \frac{1}{2}\theta''(t_6) \cdot (t-t_6)^2 + \theta'(t_6) \cdot (t-t_6) + \theta(t_6)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}\theta'''_{\max} \cdot (t-t_6)^2 + \theta''(t_6) \cdot (t-t_6) + \theta'(t_6)$$

$$\theta''(t) = \theta'''_{\max} \cdot (t-t_6) + \theta''(t_6)$$

$$\theta'''(t) = \theta'''_{\max}$$

Figura D.20. Aceleración trapezoidal. Curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para $\Delta\theta = 30^\circ$, $\theta'_{0\max} = \pi[\text{rad/s}]$, $\theta''_{0\max} = 5[\text{rad/s}^2]$



Fuente: Autor del proyecto.