DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE PLANEACIÓN DE LA EXPANSIÓN DE LA TRANSMISIÓN CON BASE EN TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

JOSE ALBERTO MENDOZA SERRANO

Tesis de grado para optar al título de Ingeniero Electricista

GERARDO LATORRE BAYONA
Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES
Bucaramanga
2004

DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE PLANEACIÓN DE LA EXPANSIÓN DE LA TRANSMISIÓN CON BASE EN TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

JOSE ALBERTO MENDOZA SERRANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES
Bucaramanga
2004

A mi familia

TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE TABLAS

LISTADO DE GRAFICOS

TITULO: DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE PLANEACIÓN DE EXPANSIÓN DE LA TRANSMISIÓN CON BASE EN TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS[*]

AUTOR: Jose Alberto Mendoza[**]

PALABRAS CLAVE: Teoría de juegos cooperativos, valor bilateral de Shapley, Kernel, planeación de la transmisión

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se presentan los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos con el fin entender los procesos que se tienen en cuenta en la distribución de costos de planeación de la expansión de la red de transmisión usando el valor bilateral de shapley (BSV) y el método del kernel, además se describen otras aplicaciones, como es el caso de la distribución de pérdidas de transmisión, la distribución de costos de generación y los cargos por el uso de la red de transporte.

En el algoritmo de distribución de costos usando el BSV, primero los agentes individuales calculan su plan de expansión considerando todos los elementos necesarios para formar coaliciones; luego se calcula el plan de expansión de todas las coaliciones posibles, teniendo en cuenta que para este paso se necesita un coordinador que recoja la información necesaria para mantener la integridad del sistema. El siguiente paso consiste en calcular los BSV y organizarlos en una lista de preferencia; se procede con la etapa de negociación donde se forman las coaliciones. El proceso se repite hasta que no se pueda formar más coaliciones o hasta que se forme la gran coalición y la distribución de costos se realiza usando un algoritmo de inducción hacia atrás basado en el BSV.

En el algoritmo de distribución de costos usando el kernel los dos primeros pasos son iguales al algoritmo usando el BSV. En el tercer paso Cada coalición escoge al agente mas fuerte, este agente se encarga de calcular todas las imputaciones K-estable con las coaliciones que sea posible formar y estos valores son organizados en una lista de preferencia. En el siguiente paso se forman las coaliciones. El proceso se repite hasta que se forme la gran coalición o hasta que no sea posible formar más coaliciones.

[*] Proyecto de grado
[**] Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Director: Dr. Gerardo Latorre Bayona.

TITLE: ALLOCATION OF TRANSMISSION EXPANSION PLANNING COST BASED ON COOPERATIVE GAME THEORY *

AUTHORS: Jose Mendoza Serrano**

KEYWORDS: cooperative game theory, kernel, bilateral Shapley value, transmission planning

DESCRIPTION:

In this work the basic concepts of cooperative game theory are presented with the end to understand the processes that are kept in mind in the allocation of transmission planning cost using the bilateral Shapley value (BSV) and the kernel method. Other applications are also described, like it is the case of the allocation of transmission losses, the generation costs allocation and the wheeling charges.

In the algorithm of costs allocation using the BSV, first the individual agents calculate their expansion plan considering all the necessary elements to form coalitions; then the plan of expansion of all the possible coalitions is calculated, keeping in mind that for this step a coordinator is needed that picks up the necessary information to maintain the integrity of the system. The following step consists on to calculate the BSV and to organize them in a preference list; you proceeds with the negotiation stage where they are formed the coalitions. The process repeats until it cannot be formed more coalitions or until it is formed the great coalition and the cost allocation is developed using an back induction algorithm having based on the BSV.

In the algorithm of costs allocation using the kernel the first two steps is similar to the algorithm using the BSV. In the third step each coalition chooses the agent but strong, this agent takes charge of calculating all the K-stable imputations with the coalitions that is possible to form and these values are organized in a preference list. In the following step they are formed the coalitions. The process repeats until he/she is formed the great coalition or until it is not possible to form more coalitions.

---

* Degree project

** School of Physicmechanics Engineering's, Department of Electrical, Electronic and Telecommunications Engineering's , Director: Dr. Gerardo Latorre Bayona

INTRODUCCIÓN

La teoría de juegos en los últimos años ha permitido el desarrollo de diversas aplicaciones, pues es la forma de análisis más usada en el estudio de problemas de conflictos que surgen de la interacción entre agentes que toman decisiones, en un ambiente competitivo. Se constituye en la disciplina del ámbito económico en la que más publicaciones han surgido en los últimos veinte años.

La teoría de juegos proporciona herramientas con las cuales es posible analizar la interacción de agentes en mercados competitivos.

La teoría de juegos se pude dividir en dos tipos; los juegos cooperativos y los no cooperativos

La diferencia que existe entre los juegos no cooperativos y los juegos cooperativos es que en la primera, la interacción de los agentes busca maximizar en un medio de competencia sus propias funciones de utilidad; mientras en la segunda, buscan una solución basada en maximizar la función de utilidad a través del beneficio conjunto, que se logre de la cooperación entre agentes.

La teoría de juegos ha sido aplicada básicamente a la distribución de costos en ambientes competitivos, donde los agentes buscan mejorar su utilidad.

En contexto de mercados eléctricos, la teoría de juegos se utiliza para solucionar situaciones varias, como despachos o cooperación entre agentes.

El propósito de este trabajo de grado es presentar los conceptos de juegos cooperativos como una herramienta importante para la solución de conflictos entre agentes que interactúan en un ambiente competitivo, debido a que en el sistema eléctrico se pueden presentar solución a diversos conflictos, como es el caso del despacho económico de potencia y la distribución de costos transmisión y generación.

Organización de la tesis

Inicialmente se presentan los conceptos de juegos cooperativos de una forma concisa y clara.

En el capítulo 2 se presentan aplicaciones importantes de la teoría de juegos cooperativos en el campo de la ingeniería eléctrica. Específicamente estas aplicaciones son: distribución de pérdidas de transmisión, distribución de costos de generación y cargos por el uso de la red de transporte.

En el capítulo 4 se presenta la aplicación: Distribución de costos de la planeación de expansión de la transmisión. En este capítulo se destaca el proceso de formación de coaliciones usando el valor bilateral de Shapley y el método del Kernel.

En el capítulo 5 se presentan dos ejemplos con el objetivo de brindar una idea mas clara sobre el proceso de distribución de costos de expansión de la transmisión, usando el método del Kernel y el valor bilateral de Shapley.

Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales del trabajo realizado.

1 CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

El concepto de teoría de juegos se origina debido al afán de solucionar conflictos de intereses de agentes que tratan de distribuir un bien común para ellos.

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas, creada para el estudio de estructuras, como también para solución de conflictos mediante la negociación entre los entes interesados en solucionar un problema en particular y para simular la interacción de agentes con diferentes intereses.

Uno de los primeros conceptos que debe ser considerado es el de jugador o agente del juego, que corresponde a una entidad capacitada para tomar decisiones en forma autónoma, con base en un interés individual que motiva sus decisiones[1].

Se consideran juegos con un número finito, N, de jugadores que pueden actuar solos o en coaliciones, con base en negociaciones de cooperación o coordinación de esfuerzos de mutua conveniencia para los integrantes de la coalición

Matemáticamente una coalición S_i es un subconjunto de todos los jugadores (N) que participan en el juego. La formación de coaliciones requiere del

[1] Zolezzi, J. Asignación de Costos de Transmisión Vía Juegos Cooperativos y Formación de Coaliciones, Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Chile, pp 57-58, 2002

acuerdo de todos los posibles miembros que quieran pertenecer a ella y no existen acuerdos entre jugadores que no sean miembros de la misma coalición.

Cada coalición formada reúne todas las condiciones que aplican a un jugador individual; es decir, una entidad capacitada para tomar decisiones en forma autónoma, con base en un interés individual que motiva sus decisiones[2]. De esta forma se pueden formar coaliciones en un juego, destacando entre ellas: la coalición individual, es decir, la formada por un solo jugador; la coalición vacía, la que no tiene miembros, y la gran coalición, la que está formada por la totalidad de jugadores que participan en el juego.

Una estructura de coaliciones S describe como se agrupan los jugadores de un determinado juego, con intereses comunes, en coaliciones mutuamente exclusivas y excluyentes, el conjunto de las m coaliciones formadas será:

$S=\{S_1,S_2,..S_m\}$

Donde S determina una partición de N que satisface tres condiciones:

1. $S_j ? Ø$, $j = 1,\ldots,m$
2. $S_i \cap S_j = Ø$ para todo $i?j$ (1-1)
3. $\cup\ S_j = S_N$

Estas condiciones manifiestan que cada jugador pertenece a una única coalición no vacía y también establece que ninguno de los jugadores en cualquiera de las m coaliciones esté conectado con otros jugadores de otras

[2] Zolezzi, J. Op.cit pp,59-60

coaliciones. Finalmente, la unión de todas las coaliciones forma la gran coalición S_N que contiene a todos los agentes que componen el sistema.

En un juego de N participantes existen 2^N coaliciones posibles.

Un juego termina en un resultado, pago o asignación para cada uno de los jugadores participantes, de modo que a un jugador i al final del juego le corresponde un pago x_i. El conjunto de pagos de todos los jugadores recibe el nombre de vector de pago o función de pago, dado por:

$x=(x_1 ,x_2 , \ldots\ldots x_n)$

Para todos los efectos prácticos se consideran los pagos expresados en unidades monetarias, teniendo presente que los costos son fijos en un determinado juego y todos los jugadores prefieren pagar menos dinero a más dinero

Se considera que los jugadores, como tomadores individuales de decisión son racionales; es decir, que quieren maximizar su utilidad y minimizar sus gastos. Sin embargo cuando deben negociar para formar coaliciones con otros agentes están sujetos a normas sociales de interacción, lo que puede producir que limite la maximización de la utilidad.

En juegos cooperativos los jugadores pueden entrar en acuerdos de compromisos y colaboración con otros jugadores, lo que trae consigo negociación obligatoria entre ellos. Por tanto existe un periodo de comunicación previo al juego.

1.1 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Un juego cooperativo de asignación de costos de N jugadores corresponde al par (S_N, c), donde S_N es el conjunto de todos los jugadores y c es una función de valores reales definida para los subconjuntos de S_N y que se denomina función característica del juego.

[3]Definición: Para cada subconjunto S_k de S_N, la función característica v de un juego da la cantidad más grande $C(S_k)$ que los miembros de S_k pueden recibir si actúan conjuntamente y forman una coalición, sin ninguna ayuda de jugadores que no pertenezcan a S_k.

Una restricción en esta definición es que el valor del juego para la coalición vacía es cero, esto es C(Ø) = 0.

1.2 SIMETRÍA

Dos jugadores son simétricos si para todas las coaliciones en las que ambos pueden participar se cumple que:

$c(S_k \cup \{i\}) = c(S_k \cup \{j\}) \forall S_k \subset S$ Tal que i,j $\notin S_k$ La simetría representa un sentido de igualdad de jugadores. Esto quiere decir que el costo de introducir al jugador i a una coalición es igual al costo de introducir al jugador j a la misma coalición

[3] Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system. Tesis doctoral. Universidad de California.1997

1.3 ATRACTIBILIDAD

El jugador i es más atractivo que el jugador j si:

$c(S_k \cup \{i\}) \leq c(S_k \cup \{j\}) \forall S_k \subset S$ Tal que $i, j \notin S_k$.

Con desigualdad estricta para al menos una coalición S_k.

Si el jugador i es sustituto de j en alguna coalición, entonces el valor de la coalición no aumenta, y al menos en un caso, disminuye[4].

1.4 PAGOS LATERALES

[5]Corresponde a la transferencia de pagos de un miembro de la coalición a otro y son realizados para asegurar la cooperación. Representan el medio formal por el cual los miembros de una coalición pueden repartirse el valor de su coalición.

1.5 MONOTONICIDAD.

Los costos se mantienen o aumentan en la medida en que se agregan más jugadores a la coalición, es decir:

$$c(S_k) \leq c(S_k \cup \{i\})$$

1.6 CONFIGURACIÓN DE PAGOS.

Es la forma como se expresa una salida, resultado o solución de un juego. Está compuesta por dos componentes: el vector de pagos, que indica la

[4] Zolezzi, J. Op.cit pp,59-60
[5] Zolezzi, J. Op.cit pp,59-60

asignación de costos en dinero a cada jugador del juego y la estructura de coaliciones que especifica cuales coaliciones fueron formadas para obtener el resultado final del juego.

La configuración de pago corresponde a un par:

$(x;d) = (x_A, x_B, ..., x_N; S_1, S_2, ...S_m); m \leq N$

Donde:

x : Es el vector de pagos o asignaciones

d : Es la estructura de la coalición.

Resumiendo: el par (S_N, c) indica un juego en el que S_N corresponde al conjunto de jugadores y c es la función característica de dicho juego.

El par $(x;d)$ define una configuración de pago, donde x es el vector de pago y d la estructura de las coaliciones.

$x(S_j) = \sum_{i \in Sj} x_i = c(S_j)\ j = 1,2,3..., m$

Cada coalición propuesta o formada no repartirá ni más ni menos que su valor a sus miembros.

1.7 SUBADITIVIDAD

La subaditividad puede ser expresada así:

c(S $\cup$ T) $\leq$ c(S) +c(T) para todo S, T $\subseteq$ S_N tal que S $\cup T =$ Ø (1-2)..

Esto quiere decir que el pago total para la gran coalición es colectivamente racional, porque el pago total para los jugadores no puede ser mayor a la sumatoria de los pagos individuales[6].

Juegos en los cuales alguna posible coalición puede incrementar los pagos de sus miembros son llamados esenciales, y esos juegos en los cuales no hay coalición que mejora el pago total es llamada no esencial. Matemáticamente, un juego esencial es uno en el cual en mínimo una de las desigualdades subaditivas se cumple.

Asumiendo subaditividad y racionalidad colectiva, la gran coalición se formará al final del juego.

En un juego cooperativo de asignación de costos con pagos laterales el comportamiento de los jugadores será racional; es decir, maximizarán su utilidad, en el sentido que formarán coaliciones en la medida que esto les favorezca. De este modo, al final del juego, sin importar la configuración final de coaliciones, los jugadores no aceptarán asignaciones de costos mayores a sus costos individuales, de la misma forma la distribución de costos de todos los jugadores deberá corresponder exactamente a los costos que deben repartir, ya que ningún jugador está dispuesto a contribuir con un costo mayor.

La división del pago c(N), representado por el vector de pagos $\vec{x}=(x_A,x_B,\ldots,x_N)$ no es evidente. Un vector de pago no será un candidato razonable para una solución a menos que satisfaga:

[6] Contreras , J. Op.cit pp,17

$$c(S_N) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \text{(Racionalidad agrupada)} \qquad (1\text{-}3)$$

$x_i \leq c(\{i\})$ (para cada $i \in N$)(racionalidad individual) (1-4)

Si $\vec{x}$ satisface (2-3) y (2-4) se puede decir que $\vec{x}$ es una imputación[7]. La ecuación (2-3) manifiesta que cualquier vector razonable de pago debe dar a todos los jugadores una cantidad que iguale la cantidad que una gran coalición lograría. La ecuación (2-4) dice que el jugador i debe recibir un pago al menos como el que recibiría si estuviera solo: (c{i}). Esta es una característica principal de los juegos cooperativos, porque un jugador se une a una coalición si es beneficioso para él hacerlo y no puede aportar más de lo que aportaría si estuviera solo

1.8 EL NÚCLEO, CONJUNTO ESTABLE Y CONJUNTO DE NEGOCIACIÓN

Los conceptos de racionalidad colectiva e individual introducidos anteriormente sugieren que puede haber una solución del juego que incluya todas las coaliciones posibles. El núcleo es el conjunto de imputaciones que satisface las racionalidades individual, colectiva y coalicional.

[7] Evans, F. Asignación de Costos en la Expansión del Sistema de Transmisión Mediante Teoría de Juegos Cooperativos: Aproximación del Kernel, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Chile p. 17. 2002

$$c(S_N) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$ (Racionalidad colectiva) (1-5)

$x_i \leq c(\{i\})$ (para cada $i \in N$)(racionalidad individual) (1-6)

$\sum xi \leq c(S_k)$ $\forall\, i \in S_k$, $\forall\ S_k \subset S_N$ (racionalidad coalicional) (1-7)

Los jugadores participantes en una determinada coalición estarán dispuestos a participar en ella y a mantenerse en ella en la medida que su asignación de costos sea menor, o a lo sumo, igual a la que obtendrían si no participan en la formación de dicha coalición. Este concepto se denomina, racionalidad de la coalición.

1.8.1 El Núcleo. Un concepto que reúne todas las imputaciones que cumplen con la racionalidad de la coalición es el núcleo del juego; que corresponde al conjunto de configuraciones de pago que no deja alguna coalición en posición de mejorar la asignación de cada uno de sus miembros[8].

En consecuencia, el núcleo de un juego es el conjunto de todas las configuraciones de pago que satisfacen las racionalidades individual, colectiva y coalicional.

A modo de ejemplo se considerará el caso de asignación de costos entre tres jugadores, para los cuales se sabe que:

---

[8] Sore, F. Definición de un Sistema Troncal Eficiente Usando Teoría de Juegos Cooperativos, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Chile p. 17. 2003

$c(A) = c(B) = c(C) = 100$; $c(AB) = 90$

$c(AC)=80$; $c(BC)=70$; $c(ABC) = 60$

Podemos observar que se trata de un juego subaditivo, cuyo núcleo está expresado por las siguientes inecuaciones [9]

$x(A) \leq 100$, $X(B) \leq 100$, $X(C) \leq 100$

$x(AB)= x(A) + x(B) \leq c(AB)=90$

$x(AC)= x(A) + x(C) \leq c(AC)=80$

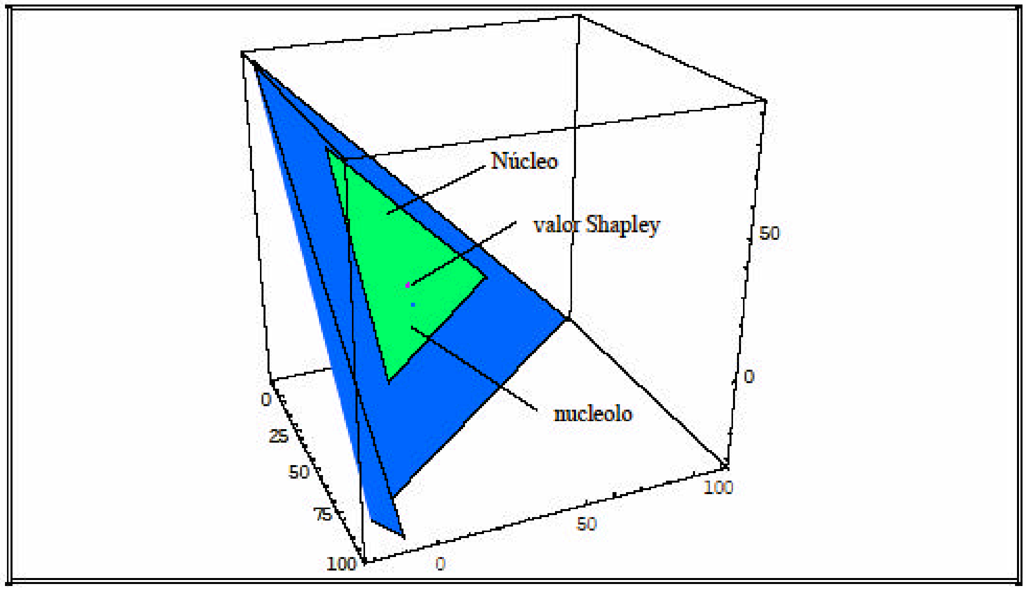
$x(BC)= x(B) + x(C) \leq c(BC)=70$

$x(N)=x(A) +x(B) +x(C)=c(ABC)=60$

En la figura que se presenta a continuación se puede apreciar el núcleo correspondiente al ejemplo representado por el sistema de inecuaciones anterior. En dicha figura se presentan dos puntos de interés, el nucleolo y el valor de shapley que se estudiaran en el presente capitulo.

[9] Zolezzi, J. Op.cit pp,67-68

Figura 1. Detalle del núcleo del juego indicando el valor de shapley y el nucleolo



Zolezzi, J. Asignación de Costos de Transmisión Vía Juegos Cooperativos y Formación de Coaliciones, Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Chile.

En juegos con núcleo no vació, la imputación puede ser aceptada, porque, a todos los jugadores miembros de la coalición, el pago que les toca aportar es menor que si estuvieran solos. Cuando el núcleo está vacío, al menos una coalición no estará satisfecha con la configuración de pagos, ya que colectivamente recibirá un pago menor a su potencial.

Shapley y Shubik (1973) notaron que un juego con un núcleo no vacío es sociológicamente neutral; o sea, cada demanda cooperativa por cada coalición puede ser concedida, y no hay necesidad de resolver conflictos. Por otra parte, en un juego sin núcleo las sociedades deben mantener activas restricciones en la actividad de las coaliciones, para evitar de este modo una secuencia de pagos injustos.

El cálculo del núcleo es directo, pero se complica cuando hay una gran cantidad de jugadores. El cálculo consiste en encontrar todas las configuraciones de pagos que tienen racionalidad de grupo y que satisfacen la racionalidad de la coalición

Las imputaciones en el núcleo tienen una cierta estabilidad, ya que todos los jugadores están conformes con la distribución de costos o de la utilidad. Sin embargo debido a que muchos juegos tienen núcleo vacío, el concepto de solución del núcleo no puede proveer una solución general para todos los juegos.

1.8.2 Conjunto estable. Von Neumann y Morgenstern (1944) propusieron un concepto de solución diferente al núcleo. Esa propuesta se denomina la solución von Neumann Morgenstern o el conjunto estable.

El conjunto estable está basado en el concepto de dominancia. Se dice que una imputación domina a otra si hay un subconjunto de jugadores que prefiere a la primera que a la segunda y la puede implementar formando una coalición. Matemáticamente, la imputación $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se dice que domina a la imputación $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si existe algún subconjunto S_k de jugadores para los cuales las siguientes dos desigualdades se cumplen:

$$Yi > xi \text{ para todo } i \in s \qquad (1\text{-}8)$$

$$\sum yi \leq c(S_k) \text{ Para todo } i \in S_k \qquad (1\text{-}9)$$

La primera desigualdad establece que todos los jugadores en el subconjunto S_k prefieren el pago ofrecido por la imputación $\bar{y}$. La segunda desigualdad declara que los miembros del subconjunto S_k tienen la opción de formar la coalición y están en posición de forzar sus preferencias, porque el valor del juego para la coalición es como mínimo el mayor valor de la suma de los pagos con la imputación.

Una solución del juego, es el conjunto de configuraciones de pago con racionalidad de grupo que tiene que satisfacer dos condiciones:

- Estabilidad interna: Ninguna de las imputaciones en el conjunto estable dominan cualquier otra dentro del conjunto
- Estabilidad externa: Hay como mínimo un miembro del conjunto estable que domina cualquier otra imputación fuera del conjunto.

Existen muchos conjuntos estables para el juego y si el juego tiene núcleo, entonces cada conjunto estable debe estar en el núcleo. Además, si el núcleo es externamente estable, entonces el núcleo es el único conjunto estable.

1.8.3 Conjuntos de negociación. Los conjuntos de negociación proveen una explicación alternativa de estabilidad.

Una configuración de pagos propuesta es una solución si en una secuencia de amenazas de romper esa configuración de pagos, por parte de un jugador, cada amenaza u objeción puede ser satisfactoriamente respondida mediante una contra objeción.

El tema central de la teoría del conjunto de negociación es su proceso de negociación. Este tiene lugar al interior de una estructura de coaliciones en la cual la estabilidad de una configuración de pagos, propuesta dentro de cada coalición de la estructura, es establecida como el resultado de secuencias de objeciones y contra objeciones; dado que cada jugador trata de mejorar su posición obteniendo una mejor asignación para él.

La teoría del conjunto de negociación asume racionalidad individual, pero no racionalidad agrupada; a diferencia del núcleo y el conjunto estable. Por esto, el concepto de subaditividad puede ser obviado.

Para definir correctamente este concepto, se requiere introducir la objeción de condiciones y la contra objeción, de modo semejante al concepto de dominación en los conjuntos estables. Si S_i es una posible coalición que involucra los jugadores k y l: a la cual corresponde una imputación $\bar{x}$ que no satisface al jugador k, dado que existe una coalición Y con un vector de pagos $\bar{y}$ que es mas atractivo para el jugador k; el par ($\bar{y}$;Y) se denomina una objeción de k en contra de l. Esto es, la coalición Y satisface la siguiente condición:

$$\sum yi = c(Y); \quad y_k < x_k, \wedge \; yi \leq xi \text{ para todo } i \in Y \text{ ;con } k,l \in S_i;\; k \in Y; l \notin Y \qquad (1\text{-}10)$$

En la objeción $(\bar{y};Y)$ en contra del jugador l, el jugador k puede obtener mejor resultado en la coalición nueva, Y, sin l y su reclamación es razonable ya que disminuye su costo y cada miembro de la coalición Y tendría un costo inferior o igual al que le corresponde en S_i.

Si existe una objeción $(\bar{y};Y)$ del jugador k en contra del jugador l, como la definida en la ecuación (2-10); para una coalición Z y una distribución de costo $\bar{z}$ del valor c(Z), el par $(\bar{z};Z)$ se denomina una contra objeción a la objeción $(\bar{y};Y)$ si :

$\sum zi = c(Z)$; $z_i \leq x_i$ para todo $i \in Z$; y $z_i \leq y_i$ para todo $i \in (Y \cap Z)$ con $l \in Z$; $k \notin Z$ (1-11)

Haciendo una contra objeción a la objeción del jugador k , el jugador l declara que puede mantener o mejorar el pago final para cada uno de los miembros de la coalición Z. Además, si cualquier miembro de Z es miembro también de la coalición Y, presentada en la objeción, ese jugador paga menos de lo que pudo haber pagado en $(\bar{y}; Y)$. Una objeción se dice que es justificada si no existe una contra objeción. De otra manera se dice que es injustificada. Un punto de negociación de un juego tiene la propiedad de que para cada par de jugadores i, j, cualquier objeción i en contra de j puede ser pagada por una contra objeción de j en contra de i. El conjunto de negociación está formado por todos los puntos de negociación.

Una de las ventajas del conjunto de negociación es que es no vacío para toda estructura de coaliciones y contiene al núcleo si este último es no vacío.

Por otro lado, las objeciones y contra objeciones son sicológicamente aceptables e interpretan el poder del conjunto de negociación.

En la teoría del núcleo y del conjunto estable, la estabilidad reside en si las coaliciones son capaces o no de romper las configuraciones de pago con racionalidad de grupos o conjuntos de estas configuraciones de pagos. En cambio, el conjunto de negociación no utiliza el requerimiento de racionalidad de grupo y explica la noción de estabilidad en términos de objeciones y contra objeciones que pueden ser establecidas en contra de la configuración de pagos individualmente racional.

Las principales desventajas radican en que la determinación práctica del conjunto de negociación implica resolver sistemas de inecuaciones conectadas con operadores lógicos and y or, y además crece con el número de jugadores, lo que hace poco factible su cálculo. El tamaño del conjunto de negociación lo hace poco útil, ya que normalmente la solución no es un solo punto.

1.9 TEORÍA DE EXCESO: KERNEL Y NUCLEOLO

El kernel es un concepto de solución que fue introducido por Davis y Maschler en 1965, y está basado en comparaciones de parejas de todos los jugadores en el juego, en términos del pago de excesos que un jugador podría tener formando una coalición que excluye al otro. El exceso de una coalición S_K en una imputación $\bar{x}$ se determina mediante la expresión:

$$e(S_k, \bar{x}) = c(S_k) - \sum_{i \in S_k} xi \qquad (1\text{-}12)$$

Es decir, el exceso representa la cantidad por la cual el valor de una coalición excede su pago elegido, o, en otras palabras, la cuantía total que los miembros potenciales de la coalición S_k colectivamente ganan o pierden (dependiendo del signo del exceso) si adoptan la imputación para formar la coalición S_k.

Ahora, se considerarán dos jugadores distintos k y l dentro de una coalición S_m, y además las coaliciones alternativas que incluyen k pero excluyen l. Cada una de estas coaliciones darán un exceso determinado mediante la ecuación (2-12), el más grande de estos excesos se denomina exceso máximo del jugador k sobre el jugador l, o sea:

$$E_{KL} = \max_{S_i / k \in S_i ; l \notin S_i} e(S_i, \bar{x}) \qquad (1\text{-}13)$$

El siguiente paso es una comparación del exceso máximo del jugador k sobre el del jugador l y viceversa. Si se cumple que:

$$E_{kl} > E_{lk} \text{ y } \quad x_l < c(l) \qquad (1\text{-}14)$$

Los agentes comparan sus máximos excesos, y aquel que tenga el mayor puede reclamar parte de las utilidades de un agente mas débil, pero su reclamo está limitado por la racionalidad individual $x_l < c(l)$. Por lo tanto, el jugador k no puede reclamar tanta utilidad del agente l como para que éste quede con una utilidad menor a la que obtendría en una coalición unitaria, por lo que el agente l ya no tendría ninguna razón para permanecer en la coalición. Entonces, se dice que el jugador k pesa mas que el jugador l con respecto a $\bar{x}$ para la coalición S_m. Si ningún jugador pesa más que el otro, los dos están en equilibrio[10]. Las condiciones de equilibrio existen entre los dos jugadores si se cumple cualquiera de las siguientes tres condiciones:

- $E_{kl} = E_{lk}$
- $E_{kl} > E_{lk}$ y $x(l) = c(l)$
- $E_{lk} > E_{kl}$ y $x(k) = v(k)$

El equilibrio sólo está definido para un par de jugadores que pertenezcan a la coalición.

Usando estos conceptos se define el kernel como el conjunto de todas las combinaciones coaliciónales, y sus respectivas imputaciones, en los que cada par de jugadores en la misma coalición están en equilibrio. Una configuración coalicional y su respectiva imputación que cumpla con ésto, se denomina K-estable[11].

El nucleolo es un concepto de solución que introdujo Schmeidler en 1969. Es un concepto relacionado con el kernel, porque también usa la idea de un exceso. Combina la idea de estabilidad del núcleo y la igualdad del valor Shapley, concepto que será definido en el presente capitulo.

[10] E. Carreño, A. Escobar, Hernán Serrano y Ramos Gallego, "Distribución de Costos en el Planeamiento de la Transmisión Usando el Concepto del Kernel"Universidad Tecnológica de Pereira, Grupo de investigación en el planeamiento de sistemas eléctricos.

[11] E, Carreño. Escobar, A. Serrano, H. Gallego, R. Distribución de costos en el planeamiento de la transmisión usando el concepto del kernel. Grupo de investigación en planeamiento de sistemas eléctricos Universidad Tecnológica de Pereira. 2003

Una ventaja del nucleolo es que cada juego tiene un único nucleolo, y a menos que el núcleo no esté vacío, el nucleolo está en el núcleo.

El nucleolo es la imputación para la cual el exceso máximo es minimizado. Puede ser expresado como:

min e_{max} , donde $e_{max} = \max\left\{\sum x_i - c(S)\right\}$ sobre toda la coalición S

1.9.1 Ventajas y desventajas del kernel.

En la teoría de juegos cooperativos existen múltiples, métodos de resolución que se diferencian por las características que presentan las interacciones entre los agentes. De esta manera, las propiedades de asignaciones de costos dependen del método de resolución, destacándose entre otras, por sus características, el kernel, el valor de shapley y el nucleolo.

- **Ventajas del kernel**

El kernel pertenece al núcleo de todo el juego, de núcleo no vacío cumpliendo con las tres racionalidades de coalición: individual, agrupada y coalicional.

Si no existe núcleo, el kernel no involucra en la asignación de costos los agentes que no se coalicionan, asignándoles solo el costo que tendrían en una coalición unitaria.

La asignación del kernel, corresponde a un equilibrio de fuerzas entre los agentes pertenecientes a una misma coalición. Así, el kernel es una distribución justa desde el punto de vista del proceso de negociación.

El kernel posee una estructura de formación de coaliciones que es transparente, en un medio de información perfecta entre los agentes.

El kernel es un esquema de asignación transparente que utiliza la simetría para la asignación de beneficios. De esto se deduce que a agentes simétricos (con características iguales) se les asigna costos iguales, característica que no presentan los otros métodos resolutivos.

- **Desventajas del kernel**

En el kernel las asignaciones de costos dependen de la estructura de la coalición. Por lo tanto, es dependiente del proceso de formación de coaliciones.

La formación de coaliciones en el kernel requiere de una información perfecta entre los agentes, ya que depende del exceso que tengan las distintas coaliciones. Si dicha información no es perfecta, la asignación es sesgada. De esta manera, el manejo de información entre los agentes se transforma en una ventaja competitiva, que se maneja en un medio de cooperación, creándose un efecto contradictorio, que es el de la competencia de la información para una mejor asignación de costos en la cooperación

1.10 EL NUCLEOLO PER CÁPITA

Esta metodología es un concepto de solución alternativa al método del nucleolo, el cual pondera las coaliciones de acuerdo con su tamaño y minimiza el máximo de:

$$\frac{c(S_i)}{|S_i|} - x(S_i)$$

Donde

$|S_i|$:Es el tamaño de la coalición S_i

1.11 SCRB

El método separable cost-remaining benefit, se basa en la idea que los costos conjuntos deben ser asignados más o menos en proporción a la disposición a pagar de los agentes.

La expresión para determinar la asignación de costos de cada uno de los agentes está dada por

$$v_i = c^!(i) + \left[\frac{r(i)}{\sum_N r_j}\right]\left[c(N) - \sum_N c^!(i)\right]$$

Donde:

$c^!(i) = c(N) - c(N-i)$, que corresponde al costo marginal de incluir al agente i.

$r(i) = \{\min\ b(i), c(i)\} - c^!(i)$

Con:

$b(i)$: Beneficio del agente i

$c(i)$: Costo alternativo

1.12 VALOR DE SHAPLEY

Es un valor a priori de cada jugador en el juego, es una función de la función característica c para cualquier estructura de coaliciones S. Para cualquier función característica, shapley (1953) mostró que existe un único vector de pago x= (x_1, x_2,….,x_n) que satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1: El valor de un juego no depende del nombre de los jugadores.

Axioma 2 : La suma del valor de cada jugador de cada coalición, en una estructura dada de la coalición corresponde al valor de la coalición, o sea, racionalidad agrupada: $c(S_N) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$

Axioma 3: si c(S-{i}) = c(S) entonces el valor de shapley tiene x_i=0. Esto es, si el jugador i no adiciona un valor a la coalición, recibe un pago de cero del valor de shapley.

Axioma 4: si x es el vector del valor de shapley para el juego v, y si y es el vector del valor de shapley para el juego $\bar{v}$, entonces el vector del valor de shapley para el juego (v + $\bar{v}$) es el vector x+y.

Si los axiomas 1-4 se cumplen, Shapley probó el siguiente resultado:

El pago al jugador i está dado por

$$x_i = \sum_{\forall S / i \notin S} pn(S)\left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \qquad (1\text{-}15)$$

Donde $pn(S) = \dfrac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}$ (1-16)

y $|S|$ es el número de jugadores en S, y para n=1, n! = n(n-1)….2(1) (0! =1)

En consecuencia el pago que el jugador i esperaría, debería ser la cantidad adicionada por el jugador i a la coalición existente de los jugadores que están presentes cuando el jugador llegó a la coalición. La ecuación (2-16) es la probabilidad de que cuando el jugador i llegó, los jugadores en el subconjunto S estarían presentes. Con la derivación del valor del juego, shapley presento un procedimiento combinacional para jugarlo. En este procedimiento, un jugador comienza el juego solo. Entonces los jugadores van entrando al juego, uno a la vez, hasta que los N jugadores son admitidos y forman la gran coalición. El orden de llegada está dado por un mecanismo causal como lo muestra la ecuación (2-16), que considera que todas las permutaciones de jugadores son equiprobable o con iguales probabilidades. Cada jugador, después de unirse a la coalición, recibe el valor total que su entrada ha añadido a la coalición.

El valor Shapley tiene algunas características atractivas, una de estas características es que la solución es un único punto para cada juego y la estructura de la coalición.

El valor de Shapley es uno de los conceptos de solución de juegos mas utilizados porque provee una buena estructura y los cálculos relativamente fáciles. Sin embargo, no refleja las fuerzas de los jugadores en el juego, como el núcleo o el conjunto de negociación.

1.12.1 Ventajas del valor de Shapley. Representa una forma directa y simple de encontrar una solución para un juego cooperativo, independiente del número de agentes.

1.12.2 Desventajas del valor de shapley. No es posible asegurar que el valor de shapley se encuentre en el núcleo del juego, ya que la solución encontrada no cumple con las racionalidades impuestas al interior del núcleo.

1.13 EXCESOS IGUALES

Entre las teorías de formación de la coalición, la teoría de excesos iguales sobresale porque también se ocupa de la división del pago final.

En esta teoría de formación de coaliciones a comienzos del juego todos los agentes esperan partes iguales en cualquier coalición de la que ellos pueden hacer parte, pero básicamente lo que los jugadores buscan, es maximizar sus beneficios.

Para el siguiente paso, la teoría predice que cada jugador espera un pago final, igual al que obtendría en la mejor coalición a que el jugador potencialmente puede unirse.

A medida que la negociación procede, las expectativas del jugador cambian debido a las coaliciones diferentes a las que pueden unirse. Cualquier exceso que sobra después que los jugadores reciban lo que esperan, está dividido igualmente entre ellos. Dado que cada jugador se introduce al juego asumiendo parte igual de cada coalición a la cual puede pertenecer, y define una ronda r= (0,1,…..) Como las r etapas discretas del proceso de negociación, donde cada jugador tiene una expectativa de lo que él obtendrá de cada miembro de la coalición. Esta expectativa es llamada $E^r(i,S)$. $\sum_{i \in S} E^r(i,S) = v(S) \quad \forall r$ y $\forall S \subseteq N$.

Basado en estas expectativas, cada jugador construye una lista prioritaria y las coaliciones se forman si las expectativas de todos los que quieren formar la coalición son conjuntamente maximizadas. Si la coalición no se forma, las expectativas en la ronda r son usadas para una siguiente ronda r+1. Para un jugador i y la coalición S, la expectativa mas alta $A^r(i,S)$ está dada por:

$$A^r(i,S) = \max_{T \neq S}[E^r(i,T)]$$

Ahora, al crear una nueva expectativa para la ronda r+1, cada jugador reclama su mejor expectativa de la ronda r, y el resto de la suma de estas reclamaciones está dividida en partes iguales, o sea:

$$E^{r+1}(i,S) = A^r(i,S) + [v(S) - \sum_{i \in S} A^r(j,S)]/s$$

A diferencia de la mayor parte de las teorías, la teoría de excesos iguales hace predicciones acerca de las estructuras de la coalición por las preferencias coaliciónales de mayor categoría, basadas en las expectativas de jugador para una ronda dada. Uno de los problemas mas críticos de esta teoría es que algunas de las definiciones son ambiguas, no hay fórmula algorítmica para $E^r(i,S)$ dando sólo el juego y el número de rondas, la construcción de todas las coaliciones alternativas posibles no es clara, excepto por los juegos muy simples. Por esto es que la teoría de excesos iguales es un buen paso hacia una teoría general de formación de la coalición, pero la ambigüedad de algunas condiciones no la hace muy útil.

1.14 ESQUEMAS DE TRANSFERENCIA.

Los modelos teóricos previos, excepto por la teoría de excesos iguales, fueron estáticos en naturaleza. No se ocuparon de la dinámica de negociación entre los jugadores. Todos ellos dieron por supuesto que las coaliciones fueron ya creadas y entonces distribuir el pago final total según reglas diferentes era el problema.

Aunque no hay teorías de formación de la coalición que pueden estar empíricamente probadas hasta ahora, la existencia de esquemas de transferencia es conocida desde 1968 (Stearns). Estos esquemas pueden usarse para construir secuencias de configuraciones del pago final para los juegos.

Un esquema de transferencia puede estar definido como una secuencia de propuestas, dónde los jugadores comienzan negociaciones en alguna distribución de pagos arbitraria de una estructura dada de la coalición, y puede secuencialmente proceder a transferir dinero de un jugador a otro según alguna fórmula.

Por consiguiente un esquema de transferencia puede ser expresado como una secuencia de configuración de pagos finales ($\bar{x}^{0}$; S), ($\bar{x}^{1}$; S),…., ($\bar{x}^{j}$; S),… en el cual la vector de pagos finales $\bar{x}$ puede cambiar, pero la estructura de la coalición S permanece igual. El cambio en los vectores del pago final se debe a la transferencia, de tamaño a, del jugador l al jugador k en la etapa j. Dado algún ($\bar{x}^{j}$,S), j=0,1…, el siguiente miembro de la secuencia ($\bar{x}^{j+1}$,S) está dado por:

$$X_K^{j+1} = X_K^{j} + a$$

$$X_l^{j+1} = X_l^{j} - a$$

$X_i^{j+1} = X_i^j \quad \forall i \neq k, l$

Los esquemas de transferencia pueden ser aplicados a varias de las teorías estáticas de distribución del pago final, como es el caso de el conjunto de negociación, el kernel y el núcleo. El esquema de transferencia para el conjunto de negociación, se basa en la idea de objeción y contraobjeción, semejante a una distribución de pago final. Si dentro de una coalición S, un jugador k tiene una objeción justificada en contra de un miembro l de la misma coalición, entonces el jugador l hace la (mínima) transferencia necesaria a un miembro de S buscando que el jugador k ya no tiene una objeción justificada en contra de jugador l. Stearns probó que esta secuencia convergerá para una configuración del pago final que está en el conjunto de negociación.

Para el kernel, hay condiciones diferentes para el esquema de transferencia, como fue probado por Stearns (1968). Ahora el esquema de transferencia emplea excesos y los excedentes máximos. Si S_{kl} es el excedente máximo del jugador k sobre jugador l entonces una función de demanda puede estar definida como:

$d_{kl} = \min[(S_{kl} - S_{lk})/2, x_l]$, si $S_{kl} > S_{lk}$

$d_{kl} = 0$ de otra manera.

Donde k y l son miembros de la misma coalición. Para garantizar convergencia, la transferencia está limitada por la demanda, o sea, 0< a = d_k.

El esquema de transferencia para el núcleo es una variación de la técnica usada por stearns en 1968. Se probó que una secuencia del vector de pago final siempre converge al núcleo si se cumplen estas dos condiciones:

1. si un vector de pago final no es una coalición racional (o sea, no tiene un exceso positivo) y necesita una corrección. Dado un vector de pago x^{-j} en una etapa j, si es objetado por alguna coalición S con exceso positivo con respecto a: $e(S,\bar{x})>0$, los miembros de S pueden negociar un nuevo vector de pago x^{-j+1} garantiza que $x^{j+1}(S) > v(s)$ pero definiendo una corrección de S tal que:

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{e(S, x^{-j})}{s} \quad \forall i \in S$$

$x_i^{j+1} = x_i^j$ De otra manera

2. Si un pago final no es un grupo racional. Las reclamaciones para pago final es demasiado alta y hay que aplicar unas correcciones para el pago final de cada jugador:

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{e(N, x^{-j})}{n}$$

Donde n es el número total de jugadores y N el conjunto de negociación de todos los jugadores.

2 APLICACION DE TEORIA DE JUEGOS A LA DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE GENERACIÓN, DISTRIBUCION DE PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN Y A LOS CARGOS POR EL USO DE LA RED DE TRANSPORTE.

En este capitulo se describirán tres aplicaciones importantes de la teoría de juegos:

1) Distribución de costos de generación.
2) Distribución de pérdidas de transmisión.
3) Determinar los cargos por el uso de la red de transporte.

2.1 DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE GENERACIÓN

Una de las aplicaciones importantes de la teoría de juegos es la distribución de costos de generación de potencia activa entre los consumidores que componen un sistema de potencia en particular. Para este propósito se usa un número de estrategias, entre las cuales están la división del costo de generación proporcional a la cantidad de demanda y el uso directo de costos marginales obtenido como una solución del despacho económico. Generalmente, un precio óptimo es determinado, el cual corresponde al mínimo costo de generación sujeto a un conjunto de restricciones.

Aunque muy usados, los costos marginales obtenidos como producto de la solución óptima del flujo de carga, no asegura una justa división de los costos de generación. En otras palabras, la sumatoria (para todas las barras) de los productos de los factores nodales determinados en la solución de un flujo de carga óptimo por la correspondiente inyección de potencia en la barra, no es igual al costo de generación total[12].

En términos económicos, el uso más eficiente de los recursos se produce cuando los consumidores asumen un costo igual al costo marginal del suministro del producto y una desviación de este conlleva a una asignación de costos ineficiente. Infortunadamente, dadas las características del sistema de transmisión, la asignación de costos con base en costos marginales con precios espacialmente distribuidos en que los generadores son remunerados a costo marginal en las barras de generación, y los consumidores pagan los costos marginales de las barras de carga, permite reunir un excedente para los propietarios del sistema de transmisión siempre y cuando la red se encuentre en mal estado; incentivando mantener una red en mal estado.

La teoría de juegos cooperativos tiene aplicación si el costo de un servicio compartido por un número de usuarios tiene que ser dividido entre esos usuarios. En este caso es el costo de la potencia activa necesaria para

---

[12] Andre Della Roca Madeiros, Roberto Salgado, Hans H. Zürn " Generation Cost Allocation – A Methodology Based On Optimal Power Flow and Cooperative Game Theory" IEEE Porto power Tech conference, 10-13 septiembre, Porto Portugal, 2001.

alimentar un conjunto de barras de cargas, que debe ser dividido entre los consumidores. Este es un interés común entre los consumidores, porque la generación de potencia activa debe se despachada al mínimo costo posible por el coordinador, el cual considera el problema como un juego cooperativo. La resistencia en la línea de transmisión y los límites de operación requieren una cantidad adicional de potencia activa que debe ser generada para suplir las pérdidas de potencia. El costo de esta cantidad tiene que ser dividido entre todos los agentes.

Uno de los métodos que se pueden usar para esta aplicación es el valor de shapley. Algunas aplicaciones del valor de shapley son la distribución de costos auxiliares y costos de congestión. La técnica de AUMAN-SHAPLEY está basada en costos incrementales asociadas con un nuevo agente en el mercado.

La integral de los costos marginales en un intervalo de carga t elimina los excesos de pagos y provee un valor de shapley para cada barra, el cual está dado por:

$$pP_i = \int_0^t \frac{\partial(P_G, V_G, t)}{\partial P_i} dt \quad i = 1,..n$$

$$pQ_i = \int_0^t \frac{\partial(P_G, V_G, t)}{\partial Q_i} dt \quad i = 1,..n$$

Donde los términos de la integral son obtenidos de la solución de un flujo de cargas óptimo.

Estos factores estiman el efecto del la inyección de potencia incremental en cada barra de carga en un intervalo de tiempo de 0 a t. El intervalo t es dividido en n subintervalos y la integral se obtiene como la suma de todas las pequeñas áreas correspondientes a estos subintervalos. La exactitud de estos cálculos depende del número de subintervalos de incrementos de t.

p_{Pi} y p_{Qi} se obtienen como la suma de todos los valores de los costos marginales, correspondientes al incremento de cada intervalo de carga dividido por el número de subintervalos.

$$p_{Pi} = \frac{\sum l_{Pi}^{(K)}}{n+1}$$

$$p_{Qi} = \frac{\sum l_{Qi}^{(K)}}{n+1}$$

Donde $l_{Pi}^{(k)}$ son los multiplicadores de lagrange de la barra de carga i obtenidos de la solución del flujo de cargas óptimo para el incremento del intervalo de carga k.

Los costos debidos a la inyección de potencia activa y reactiva están dados por:

$$C_{Pi} = p_{Pi} P_i$$

$$C_{Qi} = p_{Qi} Q_i$$

Donde P y Q son las inyecciones de potencia activa y reactiva en las barras. La contribución de esta barra a la generación total de potencia activa está dada por $\cos to_i(\$) = p_{Pi}.Pi + p_{Qi}.Qi$

El valor del costo total de generación de potencia activa puede ser evaluado así: Costo total $= \sum Costo_i(\$) = \sum p_{Pi}.Pi + p_{Qi}.Qi$

Donde i corresponde a las barras de carga, o alternativamente a las barras de generación.

El problema del flujo de carga óptimo puede ser expresado generalmente así:

Minimizar f(x)

Sujeto a g(x)=0

h(x)=0

Donde x es el valor de las variables de optimización (tensión; de cada barra, en magnitud y ángulo, generación de potencia activa; tap de los transformadores LTC, etc.); f(x) es el índice de rendimiento a ser optimizado, en este caso, es el costo de generación de la potencia activa. g(x) es el vector de ecuaciones de balance de potencia activa y reactiva; h(x) es el vector de las restricciones operacionales (limites de potencia activa y reactiva, magnitudes de tensión de las barras, etc.).

Los multiplicadores de lagrange proveen una medida de la variación incremental de la función de costos, resultante de los cambios de la inyección de potencia en todas las barras. Estos son interpretados como los costos marginales de los cambios de inyección de potencia en las barras. Si la red de potencia se representa por un modelo ac, las pérdidas de transmisión deben ser tomadas en consideración.

Debido a estas características, los multiplicadores de lagrange son utilizados para tarifar la potencia activa y reactiva a suministrar. Sin embargo la distribución de costos de generación por el uso directo de costos marginales frecuentemente produce excesos en el pago; razón por la cual algunos autores[13] han propuesto la teoría de juegos como alternativa para la distribución de estos costos.

Esta técnica de distribución de costos se puede dividir en los siguientes pasos:

1. Dividir las demandas de potencia activa y reactiva en n intervalos, para las i barras, cada intervalo corresponde a P_{Di}/n y Q_{Di}/n.
2. Comenzando con una demanda nula, incrementar cada carga adicionando un intervalo de carga acumulativamente. La carga de cada barra es incrementada en P_{Di}/n y Q_{Di}/n en cada adición.

[13] Shih-Chied Hsieh and Hsin-Min Wang " Allocation of transmission lost based on cooperative game theory and current injection models" IEEE ITIC 02, Bangkok Thailand , 2002.
X. H. Tan and T. T. Lie, "Allocation of Transmission Lost Cost Using Cooperative Game Theory In the Context of Open Transmission Acces" IEEE 2001.

3. Para cada nivel de carga después de la adición de un intervalo, correr un flujo de carga optimo para minimizar los costos de generación, lo que provee:
    - Las soluciones de las ecuaciones de potencia de la red.
    - Los costos marginales de potencia activa y reactiva en cada barra.
4. Calcular los costos marginales en cada barra, estos son los factores de participación de cada barra en los costos de generación de potencia activa. La media de los costos marginales correspondientes a los intervalos de carga, da una contribución aceptable de cada barra al costo total de generación.

2.2 DISTRIBUCIÓN DE PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN.

Las pérdidas de potencia activa debido a la componente resistiva de las líneas de transmisión es aproximadamente el 5% de la potencia activa total de carga. En cualquier línea de transmisión las pérdidas dependen del flujo de potencia en ellas. Debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones del flujo de cargas es imposible atribuir perfectamente el flujo de potencia en las ramas o los flujos ocasionados por los generadores o las cargas individuales.

2.2.1 Modelo Matemático. Con base en una solución del flujo de cargas, se pude escribir la potencia generada en la barra i como:

$S_i^G = P_i^G + jQ_i^G$.

Asimismo, el equivalente de corriente inyectada está dado por:

$$I_i^G = [\frac{S_i^G}{V_i}] = [\frac{P_i^G + jQ_i^G}{V_i}]$$

Donde V_i es la tensión en la barra i. De forma similar a partir de la potencia de demanda de la barra i $S_i^D = -(P_i^D + jQ_i^D)$, se puede obtener el equivalente de la siguiente manera:

$$Z_i^D = [\frac{V_i}{-I_i^D}] = [\frac{|V_i|^2}{P_i^D - jQ_i^D}].$$

La relación entre el vector de tensiones en las barras V_{Bus} y el vector de corriente I_G se puede expresar como: $[V_{Bus}] = [Z_{Bus}] * [I_{Bus}]$

Donde $[Z_{Bus}]$ es la matriz de impedancias.

Para calcular las contribuciones individuales en la tensión de cada barra por la corriente inyectada en una de ellas, se usa la siguiente ecuación:

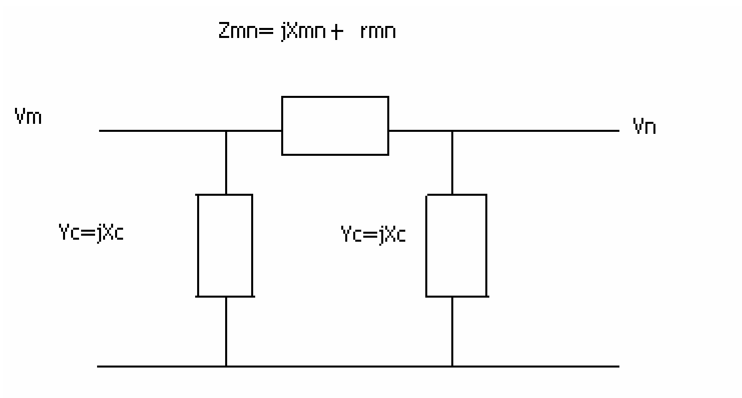
$$\begin{bmatrix} V_1^n \\ . \\ . \\ V_i^n \\ . \\ . \\ V_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} \ldots\ldots Z_{1n} \ldots\ldots\ldots Z_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{i1} \ldots\ldots\ldots Z_{in} \ldots\ldots\ldots Z_{iN} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{N1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ I_{iG} \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la contribución a la barra i de la corriente inyectada I_{iG} está dada por: $V_i^n = Z_{in} * I_{iG}$

Por el teorema de superposición, la tensión en cualquier barra i es igual a la suma de las contribuciones de tensión resultantes de todas las corrientes inyectadas a las barras: $V_i = \sum_{n=1}^{Ng} V_i n$

El modelo de las líneas de transmisión entre dos barras cualquiera m y n se muestra en la siguiente gráfica.

Figura 2. Modelo de una línea de transmisión



La contribución de corriente resultante de inyectar la corriente I_G en la línea de transmisión mn se puede expresar como:

$$I^i{}_{mn} = \frac{V_m^i - V_n^i}{r_{mn} + jx_{mn}} + V_m^i * jxc$$

Las pérdidas de potencia activa en la línea mn están dadas por: $|I_{mn}|^2 * r_{mn}$ donde I_{mn} es la corriente que está pasando por la resistencia r_{mn}; las pérdidas de potencia reactivas en la línea mn están dadas por: $|I_{mn}|^2 * x_{mn} - (|V_n|^2 - |V_m|^2) x_c$

Si las pérdidas de transmisión son debidas a n corrientes que circulan por la impedancia R+jX, entonces las pérdidas de potencia activa se pueden obtener por la siguiente expresión:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} I_i\right|^2 * R$$

Si se define la función característica del juego como $V(I) = |I|^2 R$ y X' es el valor de shapley definido como:

$$X' = \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right)$$

Una distribución de pérdidas razonables puede ser el conjunto de: $\left(x_i' \left|\sum_{i=1}^{n} I_i\right|^2 * R\right)$ Del concepto de racionalidad colectiva de la teoría de juegos se debe que:

$$v(S_N) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Entonces

$$v(S_N) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i' \left|\sum_{i=1}^{n} I_i\right|^2 * R \right) = \left|\sum_{i=1}^{n} I_i\right|^2 * R$$

2.3 CARGOS DE TRANSPORTE

En los últimos años el sector eléctrico ha sufrido diversos cambios, con el fin de optimizar los recursos existentes y garantizar la inversión necesaria para satisfacer la demanda del servicio en un futuro.

Las características del negocio de la generación permiten la participación de inversión privada construyendo nuevas plantas eléctricas. El surgimiento de nuevas plantas de generación puede propiciar un mercado de energía competitivo, se espera beneficie a los clientes de este mercado, debido a que la competencia trae consigo el mejoramiento de la calidad del servicio en lo que se refiere a seguridad, fiabilidad y mejores precios.

El acceso abierto a la transmisión establece que todos los agentes tienen las mismas facilidades para acceder al sistema, limitado solamente por las restricciones de operación fiabilidad y seguridad.

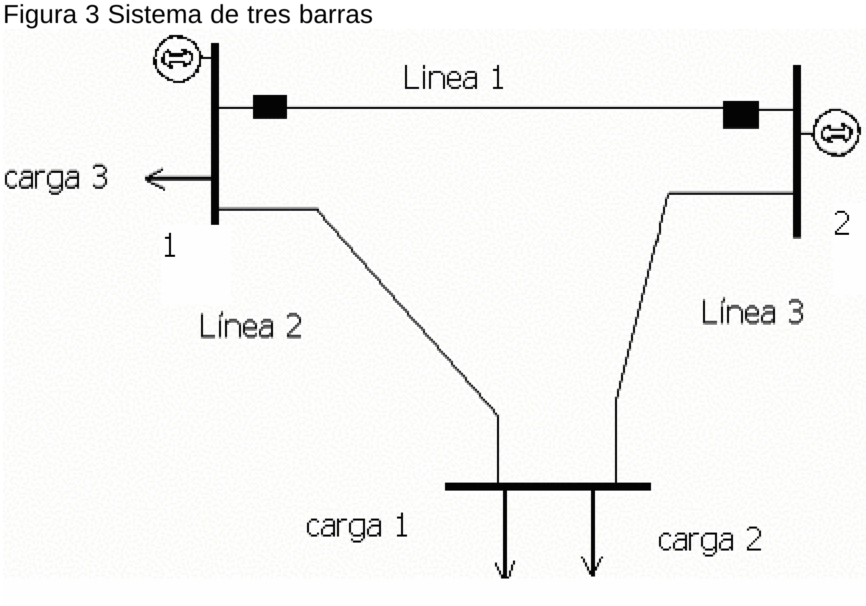
En este nuevo mercado pueden aparecer clientes que estén fuera del área de influencia de algunas plantas, lo que necesitaría un sistema de transmisión con el cual él pueda acceder a está energía, debido a que un usuario puede comprar a cualquiera de las plantas generadoras que componen el sistema.

De esta manera es importante distribuir los costos del uso de la red de transmisión por parte de los agentes que hacen uso de ella.

Para entender esta aplicación se presentará un ejemplo desarrollado por CARLOS A LOZANO Y JUAN M. GERS en el documento Game Theory Aplication For Determining Wheeling Charges.

El sistema está compuesto por tres cargas, localizadas en diferentes puntos del sistema, con diferentes perfiles de carga y dos generadores que proveen la energía necesaria a las cargas, como lo muestra la figura 3.

Figura 3 Sistema de tres barras

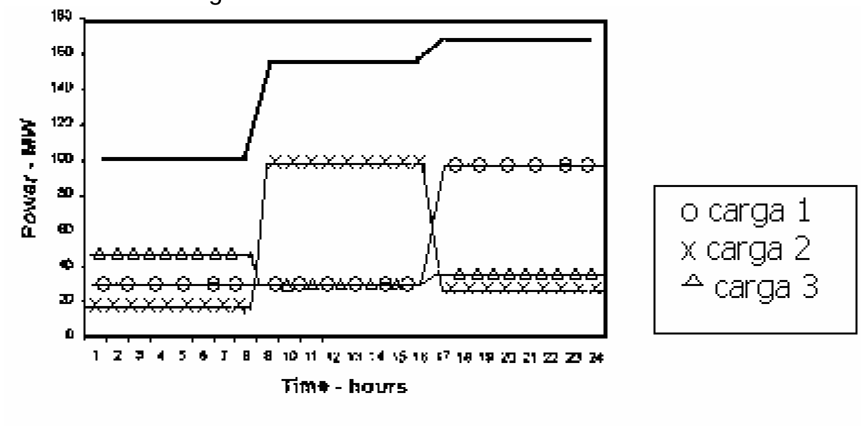


Lozano C. Gers,j Game theory application for determining wheeling charges IEEE Transactions on power system

El generador 1 está fuera de servicio.

Las transacciones son independientemente operadas en cada acuerdo, con base en el perfil de carga. La red es usada solamente por una coalición a la vez. Cuando la carga 1 está siendo analizada, las cargas 2 y 3 están fuera del sistema. De este análisis, se encontró el valor máximo para cada coalición y después este valor fue usado para calcular el costo de la transacción.

Figura 4. Perfil de carga



Lozano C. Gers,j Game theory application for determining wheeling charges IEEE Transactions on power system

Cada coalición se forma durante el proceso de transacciones. Todas las líneas en la red tienen un costo de transmisión de £100/MW

Tabla 1. Valor de cada coalición

Coalición (carga)	Línea 1 Valor máximo (MW)	Línea 2 Valor máximo (MW)	Línea 3 Valor máximo (MW)
1	33	33	67
2	33	33	67
3	33	17	17
1,2	47	47	93
1,3	60	20	80
2,3	53	23	77
1,2,3	70	30	100

Lozano C. Gers,j Game theory application for determining wheeling charges IEEE Transactions on power system

Las cargas deben pagar unos cargos por el uso de la red acordado con una tarifa establecida. En este caso por la transacción 1 (carga 1) se cobrará £13300; de los cuales £3300 se deben a que la transacción está usando la línea 1 para entregar potencia de la barra 2 a la tres, donde la carga 1 está localizada.

La cooperación entre los usuarios de las líneas de transmisión puede ser una oportunidad para reducir los costos de la potencia eléctrica.

El costo puede ser calculado multiplicando el valor máximo de cada línea por subcoalición con el costo por MW por el uso de la red.

C(S)=Máximo valor de cada línea por subcoalición

Donde S representa una subcoalición S=({1},{2}, {3})

C(1)=33*100+33*100+67*100=13300

C(2)=13300

C(3)=6700

Existen dos de tres tipos de transacciones de transporte simultáneamente que usan el mismo sistema de transmisión. La función de costo es el valor requerido para una subcoalición específica S= (1,2) (1,3) (2,3)

C(1,2)=47*100+47*100+93*100=18700

C(1,3)=16000

C(2,3)=15300

Si coinciden las tres transacciones en la gran coalición 1,2 y 3 el flujo de potencia a través1, 2 y 3 es respectivamente 70, 30 y 100 MW, la función de costo y su valor es:

C(1,2,3)=70*100+ 30*100+100*100=20000

De estas ecuaciones, el juego de coalición es definido como (N,C,X) donde X es el vector de costos. Consecuentemente el uso del juego dual (N,V,Y) puede ser formulado así:

N= 1, 2,3

V(S)= $\sum_{i \in s} C(i) - C(s)$

S= {(1),(2),(3), (1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),0}

F(N,V,Y)= $\vec{y}$

V es una función de ahorro derivada de la función de costos y $\vec{y}$ =(y_1,y_2,y_3) es el vector de imputaciones de ahorro.

Racionalidad individual: Si los jugadores actúan solos y no cooperan con otros, el ahorro que pueden tener es:

$$y1 \geq V(\{1\}) = C(\{1\}) - C(\{1\}) = 0$$
$$y2 \geq V(\{2\}) = 0$$
$$y3 \geq V(\{3\}) = 0$$

Racionalidad de la coalición: Si los jugadores están de acuerdo en actuar en coaliciones, el ahorro que tendrían será:

$$y1 + y2 \geq V(\{12\}) = (C(\{1\}) + C(\{2\}) - c(\{12\}) = 7900$$
$$y1 + y3 \geq V(\{13\}) = 4000$$
$$y2 + y3 \geq V(\{23\}) = 4700$$

Racionalidad colectiva: El ahorro total de la cooperación puede ser

$y1 + y2 + y3 = V(\{123\} = 13300$

El problema es distribuir este costo total entre las cargas del sistema

- **Solución del nucleolo**

El nucleolo puede representarse así:

$$C^{+}(e) = \{y \in Yf(y) \leq e\}$$

$$f(y) = \max_{S \in \sum^{0}} e(S, y)$$

$$e(S, y) = V(S) - \sum_{i \in S} y_i$$

Donde e representa el descontento de cada coalición en la distribución del ahorro. Entonces el propósito es minimizar este descontento.

$y1 = 4950 \quad y2 = 5650 \quad y3 = 2700$

El costo de cada transacción puede ser:

$x_i = c(i) - y_i$

Entonces:

$x1 = 8350 \quad x2 = 7650 \quad x3 = 4000$

- **Valor de Shapley**

Usando el valor de shapley se llega al siguiente resultado:

$$f_1 = \frac{0!*2!}{3!}[V(\{1\}) - V(\{1\} - \{1\})] + \frac{1!*1!}{3!}[V(\{12\}) - V(\{2\})]$$

$$+ \frac{1!*1!}{3!}[V(\{13\}) - V(\{3\})] + \frac{2!*0!}{3!}[V(\{123\}) - V(\{23\})]$$

$f_1 = 4850 \quad f_2 = 5200 \quad f_3 = 3250$

y el costo para cada jugador es:

$x1 = 8450 \quad x2 = 8100 \quad x3 = 3450$

Tabla 2. Distribución entre los participantes

Transacción	Nucleolo	Valor de shapley
1	4950	4850
2	5650	5200
3	2700	3250

Lozano C. Gers,j Game theory application for determining wheeling charges IEEE Transactions on power system

3 DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE EXPANSIÓN DE LA TRANSMISIÓN

Anteriormente el planeamiento de la transmisión se planteaba sobre un escenario centralizado, hasta que la desregulación fue adoptada en muchos países del mundo.

En este ambiente desregulado, ya no hay un solo ente que se considera dueño de la red, pues entran otros agentes al proceso, que son dueños de parte del sistema, a los cuales les interesa saber cuanta parte del costo global obtenido les toca aportar en el plan de expansión general.

En un esquema de mercado eléctrico, donde todos los agentes pueden estar relacionándose con el mismo sistema, existen metodologías de planeamiento de la expansión, para sistemas regulados que deben evolucionar para poder dar solución al problema de un nuevo ambiente competitivo

En el esquema desregulado, una decisión tomada por un agente produce efectos sobre las decisiones de los demás. En el caso particular del planeamiento de la expansión en la toma de decisiones para adicionar nuevos elementos al sistema deben participar todos los agentes y los costos de inversión deben ser distribuidos entre ellos.

La teoría de juegos cooperativos aplicada al planeamiento de de la expansión de la transmisión, determina cuales son las inversiones que se deben hacer y de que manera se debe hacer la distribución de costos de inversión entre todos los agentes que componen el sistema.

El problema de la expansión del sistema de transmisión se puede tratar como si fuera un problema de juegos cooperativos, ya que en este juego participan y pueden interactuar los agentes que componen el sistema de transmisión.

El kernel es un concepto de la teoría de juegos cooperativos que distribuye un recurso común entre los participantes en término de su importancia con respecto a los demás miembros de la coalición. En particular para el juego de la expansión de la transmisión, favorece a los miembros que salgan menos costosos para la expansión del sistema.

El valor bilateral de shapley es un concepto de la teoría de juegos que calcula una división justa de una utilidad común entre los miembros de una coalición.

A través del proceso de solución se agrupan jugadores con intereses comunes por medio de propuestas seguras para el sistema eléctrico, desde el punto de vista de la operación, y atractivas desde el punto de vista de la inversión, además es posible establecer la distribución de costos de inversión entre los agentes.

3.1 PLANIFICACIÓN DE LA RED

El objetivo de la planificación de la red de transporte de energía eléctrica es determinar las ampliaciones en capacidad de transporte a realizar en el horizonte de estudio, qué y dónde instalar, buscando satisfacer la demanda a un mínimo costo, cumpliendo con los criterios establecidos.

Los aspectos fundamentales que deben considerarse en la planificación de la red son:

- Predicción de la demanda en cada nodo y posibles expansiones en la generación.
- Características técnico-económicas de los elementos del sistema existentes y los que se incluirán.
- Restricciones o criterios de expansión.
- Criterios de selección de alternativas.

Los estudios de planificación pueden ser de largo plazo (horizontes de 15 a 30 años) o de mediano plazo (horizontes de 6 a 10 años). En los primeros se obtienen los planes maestros de expansión, mientras que los de mediano plazo sirven para definir de manera concreta y precisa todos los elementos que se añadirán a la red.

Para la planificación de la red se utilizan herramientas de cálculo, con las cuales, a partir de una información de entrada, se obtiene uno o varios planes de expansión. Según el procedimiento que se siga para obtener el plan de expansión, los métodos se pueden clasificar en: Heurísticos y de Optimización. En el heurístico se van seleccionando paso a paso las alternativas de expansión, con base en ciertas reglas para la clasificación de las opciones, sin garantizar que se encuentre el plan óptimo; mientras que los de optimización encuentran el plan de expansión óptimo a partir de un procedimiento de cálculo que da la solución a una formulación matemática del problema. El problema es no convexo, se realizan simplificaciones fuertes que pueden llevar a un óptimo local, lo que hace necesario realizar comprobaciones antes de tomar una decisión final.

Otra clasificación para los métodos de planificación de la red, teniendo en cuenta el desarrollo temporal del plan los divide en Estáticos y Dinámicos. Los primeros tienen como objetivo encontrar el plan, óptimo de expansión de la red para un único horizonte de planeamiento y se considera que todas las inversiones se realizan en el mismo instante de tiempo, al comienzo de dicho horizonte. Los dinámicos, en cambio, obtienen la expansión óptima durante un período de estudio, se determina dónde, cuándo y cuántos nuevos equipos deben ser instalados en dicho período.

Para la definición del plan óptimo se formula la planificación de la red como un problema de optimización de una función objetivo sujeta a una serie de restricciones. Esta optimización consiste en la minimización de la función objetivo, dentro de la cual se pueden considerar tres etapas: minimización de costos de inversión en nuevas instalaciones, minimización del costo de la energía no suministrada y minimización del costo de operación. Todos los métodos minimizan los costos de inversión, pero muy pocos consideran además los costos de indisponibilidad o los costos de explotación[14]. La formulación del problema se plantea de la siguiente manera:

$$\underset{x,y}{Minimo}\, CT = CI(x) + CE(y) + CF(y)$$

$$Sujeto\,a \quad \begin{aligned} RX(x) &\le a \\ RE(x,y) &\le b \\ RF(x,y) &\le h \end{aligned}$$

Donde:

x Vector de variables de inversión

y Vector de variables de explotación

CT Costos anuales totales

CI Costos anuales fijos de inversión

CE Costos anuales variables de explotación

CF Costos anuales variables de indisponibilidad

RX Restricciones de expansión

RE Restricciones de explotación

RF Restricciones de indisponibilidad

[14] Latorre, G. Modelos Estáticos para la Planificación a Largo Plazo de la Red de Transporte de Energía Eléctrica, Tesis Doctoral, Universidad Pontificia de Comillas, España, p.p 68-71, 1993.

3.2 MODELADO DEL SISTEMA.

El sistema considerado en la planeación está formado por una red de transporte que une los centros de generación con los nodos de carga. La red de transporte a su vez, está constituida por las líneas de transporte de energía y en algunos casos pueden incluirse los transformadores de potencia, los cuales se tratan como líneas.

En algunos sistemas de gran tamaño, su alta cantidad de nodos dificulta el estudio de planificación y se realizan simplificaciones agrupando los nodos cercanos en áreas y las líneas que conectan estas áreas en corredores de transporte.

En las herramientas de planificación a largo plazo de la red de transporte de energía eléctrica, se pueden considerar diferentes modelos de representación de la red, entre estos se encuentran:

- Modelo AC: Utiliza el equivalente π y sirve para analizar el comportamiento del sistema en estado estable.
- Modelo DC: Se desprecia la resistencia y la susceptancia paralelo de las líneas. El comportamiento de la red se describe mediante un sistema de ecuaciones lineales. Considera que todas las tensiones permanecen en su valor nominal.

- Modelo de transporte: Se basa en la capacidad de intercambio de energía y no en un análisis electrotécnico del sistema.
- Modelo Híbrido: Combina las características del modelo DC y el de transporte, diferenciando la red nueva de la red existente.

3.3 MODELO DE EXPANSIÓN DE LA RED

El objetivo del modelo matemático de planificación de expansión de la transmisión es minimizar el capital y los costos de operación asociados con la expansión del sistema hasta un año horizonte. Las restricciones asociadas con este modelo son las restricciones físicas y económicas que son importantes cuando se intenta expandir un sistema con un mínimo de utilidad, teniendo en cuenta las restricciones de demanda. Se puede formular el problema de planificación de expansión de transmisión en las siguientes condiciones:

$$\min \sum_{i\in N} C_i P_{Gi} + \sum_{j\in A} K_j (Z_j - Z_j^0) \qquad (4\text{-}1)$$

Donde C_i es el costo por unidad de potencia del nodo i para el periodo horizonte, P_{Gi} es la potencia real inyectada a la red por los generadores en la barra i, K_j es el costo de inversión por la construcción de una línea en paralelo a la línea j, Z_j es la variable que representa el número total de conexiones en paralelo a la línea j, Z_j^0 es el número de las conexiones existentes en paralelo de la línea j, N_g es el conjunto de generadores en los nodos, y A_n es el conjunto de las posibles líneas a conectar.

Asumiendo el modelo de flujo transporte para mayor simplicidad, el problema está sujeto a las siguientes restricciones:

a) Balance de potencia en cada barra:

$$A \cdot T = P \qquad \text{(4-2)}$$

Donde A es la matriz de incidencia, T es el vector de flujo de potencia y P es el vector de potencia inyectada a la barra.

b) Limites de la potencia que fluyen por las ramas:

$$|T| \leq T_{\max}(Z_j) \qquad \text{(4-3)}$$

Donde $T_{\max}$ es el vector de flujo de potencia limite en la red.

En un modelo de flujo de carga DC, cada elemento de la rama el vector de flujo de potencia T en la restricción (4-2) puede ser escrito así:

$$T_j = \frac{Z_j}{X_j}(q_j - q_i) \qquad \text{(4-4)}$$

Donde Z_j es la variable que representa el número total de conexiones en paralelo a la línea j, X_j es la reactancia de la línea j y q_j y q_i son los ángulos de la tensión en la barra j y en la barra i respectivamente. Entonces con la restricción (4-2):

$$B(Z_j) \cdot \Theta = P \qquad \text{(4-5)}$$

Donde $B(Z_j)$ es la matriz de susceptancia cuyos elementos son: $B_{kl} = -1/x_{kl}$ para los elementos fuera de la diagonal principal, $B_{kk} =$ a la suma de todas las susceptancias de todas las líneas conectadas a esa barra y Θ es el vector de tensiones de las barras. Finalmente, de la restricción (4-1):

$$\left| B_l \cdot A^t \cdot \Theta \right| \le T_{\max}(Z_j)$$

Donde B_l es una matriz diagonal cuyos elementos son: $\frac{Z_j}{x_j}$ y A^t es la transpuesta de la matriz A.

3.4 ALGORITMO DE DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE EXPANSIÓN USANDO EL VALOR BILATERAL DE SHAPLEY.

- Cada agente calcula el costo de su propio plan de expansión como si estuviera desconectado del sistema, considerando todos los elementos establecidos para formar coaliciones.
- Cada agente calcula el valor de su plan de expansión asumiendo que forma parte de cada una de las coaliciones posibles. Para este paso es necesario un coordinador que se encargue de reunir toda la información y de hacer el plan de manera que se garantice la integridad del sistema.

- Cada agente calcula todos los valores bilaterales de shapley para cada una de las coaliciones posibles, estos valores son organizados en una lista de preferencia.
- Se procede con la fase de negociación donde cada agente envía propuestas de coaliciones a otros agentes de acuerdo a los valores obtenidos en el paso anterior. La oferta consiste en enviar al posible asociado, el valor que obtendrían si colaboraran. Si ambos agentes encuentran que es beneficioso formar una coalición la forman, siendo considerados de ahora en adelante un solo agente.
- Esta decisión es comunicada a los demás agentes para que los borren de sus listas de preferencias.
- El proceso se repite hasta que se forme la gran coalición o hasta que en la fase de negociación ningún agente acepte ninguna oferta y no se puedan formar más coaliciones.
- La distribución de costos se hace por el método de inducción hacia atrás basado en el valor bilateral de shapley.

3.4.1 Formación de coaliciones usando el valor bilateral de shapley.

El valor de shapley es un concepto de solución de la teoría de juegos cooperativos que calcula la división de una utilidad común entre los miembros de una coalición. Puede estar definido como la medida ponderada de contribuciones marginales de un miembro para todas las coaliciones posibles en las cuales puede participar.

Matemáticamente la expresión del valor de shapley está dada así:

$$f_i = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{c(s)}\sum_{i \in S}\left[v(s) - v(s-i)\right]$$

Donde

i = jugador

s = coalición de jugadores

q = tamaño de la coalición

n = número total de jugadores

$v(q)$ = función característica asociado con la coalición q

c(q) = El número de coaliciones de tamaño q conteniendo al jugador designado i, dado por:

$$c(q) = \frac{(n-1)!}{(n-q)!\,(q-1)!}$$

El cálculo de este valor es un problema de complejidad exponencial, por lo tanto es preferible calcular el Valor Bilateral de Shapley[15], el cual puede ser adaptado para un proceso de negociación entre agentes racionales. Este valor se define para dos coaliciones C_i y C_j, que se unen para formar una más grande C_i y $C_j \subseteq A$. El Valor Bilateral de Shapley para la coalición C_i en la coalición bilateral C se define como:

[15] Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system. Tesis doctoral. Universidad de California.1997

$$bsv_{\{c_i,c_j\}}(C_i)=\frac{1}{2}v(C_i)+\frac{1}{2}(v(C)-v(C_j))$$

Las coaliciones C_i y C_j son las fundadoras de C y v (C) es el valor del juego para la coalición C.

En la formulación matemática se puede observar que los fundadores obtienen la mitad de lo que lograrían solos, mas la mitad de lo que se obtiene de la cooperación con la otra entidad. El segundo término del Valor Bilateral de Shapley refleja la fuerza de cada agente de acuerdo con su contribución, evitando el hecho de que nuevos agentes tomen ventaja de lo realizado por los demás sin pagar compensación, problema común en los esquemas de distribución de costos en la expansión de la transmisión. El Valor Bilateral de Shapley es un caso particular del concepto del Valor de Shapley y crea una distribución justa de recursos únicamente entre dos agentes.

Para el proceso de formación de coaliciones se usa el algoritmo de Klusch and Shehory, un resumen de los pasos en el proceso de formación de la coalición es dado en las siguientes subdivisiones.

- **Fase de auto cálculo.**

Cada agente individual recoge información para determinar el costo de su plan de expansión. El cálculo de su propio costo determina el costo monetario de expansión de una línea para agentes individuales. Es posible que algunos de los jugadores tengan pocos deseos de expandirse o de construir nuevas líneas, por lo tanto, para estos jugadores su costo de expansión es cero.

Brevemente se puede decir que inicialmente cada agente calcula el costo de su propio plan de expansión, como si estuviera desconectado del sistema, considerando todos los elementos establecidos para formar coaliciones.

- **Fase de comunicación**

Una vez que cada agente ha hecho cálculos de lo que cuesta solo, Se determina el costo de todas las posibles coaliciones de las cuales el puede ser miembro. Infortunadamente, un agente no se da necesariamente cuenta del ambiente que lo rodea, por tanto es necesario un coordinador que recoja toda la información. Éste es ciertamente el caso de expansión de la transmisión, donde la totalidad de la red no es conocida por todos los jugadores. Para calcular el valor bilateral de shapley, los agentes necesitan enviar su propuesta de adicionar una línea al coordinador, y luego, reciben el número adecuado de nuevas líneas para las coaliciones que se pueden formar, por los mensajes expedidos por el coordinador para todos ellos. Es posible que dos agentes puedan alcanzar un contrato que sea satisfactorio para los dos, pero perjudicial para la seguridad del sistema. Por esto es que el papel de un coordinador independiente es necesario para comprobar fiabilidad de la red y calidad de servicio. Usualmente, un flujo de carga sujeto a restricciones de seguridad debería ser suficiente.

En resumen, cada agente calcula el valor de su plan de expansión asumiendo que forma parte de cada una de las coaliciones posibles en el momento. Para este paso es necesario un coordinador que se encargue de reunir toda la información necesaria y de hacer el plan de manera que garantice la integridad del sistema.

- **Fase de cálculo del valor bilateral de shapley**

Ahora los agentes saben sus propios costos de expansión y los costos de expansión formando coaliciones con otros agentes del sistema. Después de obtener estos mensajes del coordinador, proceden a calcular el Valor Bilateral de Shapley. Luego, los agentes determinan listas de racionalidad individual de agentes preferidos: La lista ordenada por los resultados obtenidos con el valor bilateral de shapley de agentes locales para coaliciones de dos jugadores. Estas listas se alterarán sí el paso anterior es repetido con jugadores nuevos.

Básicamente en este paso cada agente calcula todos los valores bilaterales de shapley para cada una de las coaliciones posibles, estos valores son organizados en una lista de preferencia.

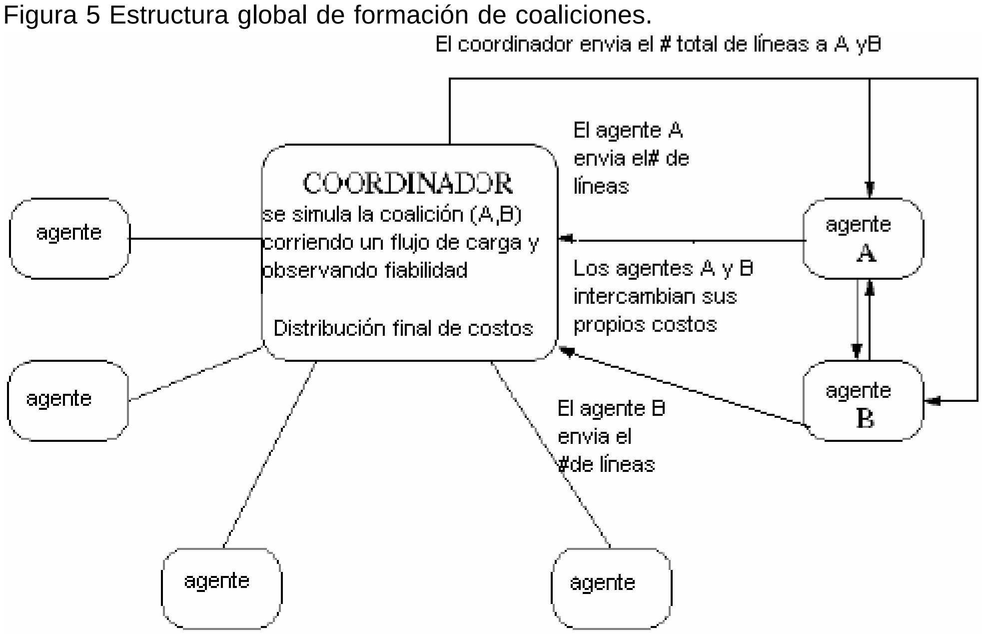
- **Fase de negociación bilateral.**

Cada agente mira la mejor opción de coalición de su lista ordenada, y extiende una oferta para el socio preferido.

La oferta consta de enviar el Valor Bilateral de shapley al socio: El valor que él lograría por colaborar con el remitente. Si pasa que para el que recibe la propuesta de coalición, su mejor opción es el que le mando la propuesta inicialmente, y ambos encuentran que es beneficioso para asociarse, lo hacen. Crean un jugador compuesto por dos agentes que se comportará como un agente desde entonces. Todos los demás agentes son informados para que los borren de sus listas de preferencias.

El proceso de formación de la coalición es repetido por todos los agentes, hasta que no se puedan formar mas coaliciones. Si ninguna coalición no es posible en un paso particular, entonces los agentes miran al segundo socio de la lista de preferencia; Si todavía no posible, con el tercero, etc., Hasta llegar al final de la lista.

Figura 5 Estructura global de formación de coaliciones.



Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system

3.4.2 Distribución de costos. Cuando se usa el proceso de formación de coaliciones basado en el valor bilateral de shapley, la distribución de costos se realiza siguiendo un algoritmo de inducción hacia atrás, teniendo en cuenta la historia de formación de coaliciones.

La solución hará uso de contratos bilaterales basados en los valores Shapley, que sea beneficioso para los individuos, pero también se considerara la historia del algoritmo de formación de coaliciones mostrado anteriormente, para recompensar o penalizar a los jugadores que benefician o dañan el sistema global. En este juego, un jugador valioso será recompensado consecuentemente por el beneficio que da al sistema y viceversa, un jugador sin valor será penalizado.

- **Algoritmo de inducción hacia atrás.**

Definir un proceso de formación de coaliciones no es suficiente para solucionar el juego de expansión de transmisión. Aun si todos los agentes convienen en los planes finales de la coalición, el problema es ubicar el costo total entre ellos. El método de inducción hacia atrás está basado en un algoritmo especial que calcula la utilidad de cada agente.

Para el proceso de distribución de costos usando este método hay que tener en cuenta que las coaliciones o que la gran coalición (si se puede formar) se ha construido. Con base en la historia de formación de las coaliciones se toman las formadoras de la coalición final, se calcula el valor bilateral de shapley y se obtiene la distribución de costos de esas dos coaliciones que formaron la coalición final. El proceso se sigue hasta distribuir los costos entre todos los agentes que componen el sistema.

Dados dos jugadores a y b como fundadoras de una coalición C en la misma estructura de la coalición. Lo que le corresponde a de la coalición C es: $bsv_{\{a,b\}}(a) = 1/2v(a) + 1/2(v(a,b) - v(b))$ y lo que le corresponde a b es x(b) = v(a,b)-x(a).

3.5 ALGORITMO DE DISTRIBUCIÓN DE COSTOS DE EXPANSIÓN USANDO EL MÉTODO DEL KERNEL

1. Cada agente calcula el costo de su propio plan de expansión como si estuviera desconectado del sistema, considerando todos los elementos establecidos para formar coaliciones

2 Cada agente calcula el valor de su plan de expansión asumiendo que forma parte de cada una de las coaliciones posibles. Para este paso es necesario un coordinador que se encargue de reunir toda la información y de hacer el plan de manera que se garantice la integridad del sistema.

3 Cada coalición escoge al agente mas fuerte, es decir , el que tenga la mayor cantidad de excesos definidos con respecto a los demás miembros, este agente se encarga de calcular todas las imputaciones K-estable con las coaliciones que sea posible formar, o sea, se calcula un vector de pagos estable de acuerdo con la definición de equilibrio presentada anteriormente, (teniendo en cuenta que el equilibrio solo está definido para un par de agentes) asumiendo que forma parte de

cada una de las coaliciones posibles y los organiza en una lista de preferencia.

4 Se procede con la etapa de negociación donde cada agente envía propuestas de coalición a otros agentes de acuerdo a los valores obtenidos en el paso anterior. Si al recibir una propuesta de coalición, la imputación recibida le otorga al grupo de agentes que conforman la coalición una utilidad mejor, y si es la primera recibida, la propuesta es aceptada, y se forma una nueva coalición, está decisión es comunicada al resto de agentes y se cancelan todas las otras propuestas pendientes.

5 Si no es posible formar otra coalición, es decir, si no se acepta ninguna propuesta, el proceso termina con una imputación estable.

6 La distribución de costos se hace en cada paso de la formación de coaliciones, es decir, que la distribución final de pagos es calculado cuando se forma la gran coalición o la última coalición que sea posible formar.

3.5.1 Formación de coaliciones usando el método del kernel.

El kernel es un concepto de solución de la teoría de juegos cooperativos en el cual la configuración coalicional es estable en el sentido de que hay un equilibrio entre pares de agentes individuales que están en la misma coalición. Dos agentes A y B, en una coalición C, están en equilibrio si ninguno pesa más que el otro en esa coalición. El agente A puede pesar mas que el agente B, si A es mas fuerte que B, donde la fuerza se refiere al potencial del agente A para reclamar parte de las utilidades del agente B.

En cada etapa del proceso de formación de coaliciones, los agentes están en una configuración coalicional. Los agentes están organizados en un conjunto de coaliciones C = {C_i}. Durante el proceso de formación de coaliciones los agentes pueden usar el concepto de solución del kernel, para objetar la distribución de pagos que está unida a la configuración coalicional. Las objeciones pueden estar basadas en el concepto del exceso, que fue definido en el capitulo 2.

- **Excesos.**

El exceso de una coalición C con respecto a una configuración de pagos x se define como:

$$e(C) = V(C) - \sum_{i \in C} X_i$$

- **Máximo exceso**

Es el máximo exceso de todas las coaliciones que incluyen A y excluyen B.

- **Equilibrio**

A y B están en equilibrio si se satisface cualquiera de las tres condiciones:

- $S_{AB} = S_{BA}$
- $S_{AB} > S_{BA}$ y $x^B = v(B)$

- $S_{BA} > S_{AB}$ y $x^{A} = v(A)$

El equilibrio sólo está definido para pares de agentes que hagan parte de la misma coalición:

Usando el concepto de equilibrio, el kernel puede ser definido como el conjunto de todas las configuraciones coaliciónales (con respecto a pagos) donde todos los pares de agentes que forman parte de una coalición están en equilibrio. Una configuración coalicional y su respectiva imputación que cumpla con esto, se denomina K-estable.

El kernel siempre existe para cualquier configuración coalicional

Para mayor claridad, un juego de tres agentes en el cual se tiene que:V(A)=V(B)=V(C)=0

V(AB) = 90; v(AC) = 80; v(BC) = 70; v(N) = 105; son los costos de los planes de expansión de estas coaliciones , A, B y C son los tres jugadores y N la gran coalición.

Si los jugadores A y C son una coalición que tienen una configuración de pagos:

$$(x;S) = (45{,}0{,}35;AC,B)$$

Donde x es el pago de cada jugador y S la configuración de la coalición. Hay dos coaliciones que incluyen A pero excluyen C, son las coaliciones A y AB. El exceso de la coalición A con respecto a $(x;S)$ es $v(A) - x_A = 0 - 45 = 45$.

Mientras que el exceso de la coalición AB es $v(AB) - x_A - x_B = 90 - 45 - 0 = 45$.

El máximo exceso del jugador A sobre el jugador C es por consiguiente S_{AC}= max (-45 ,45) =45. Similarmente se obtiene S_{CA} = 35. Entonces 45>35 y x_C>0 = v(C) por lo que el jugador A pesa mas que C con respecto a $(x;S)$ y la configuración de pagos no es un juego para el kernel.

Ahora, otra configuración de pagos para el mismo juego, pero con la gran coalición $(x;S)$ = (50, 30, 25; ABC).

El máximo exceso del jugador B sobre el jugador C es:

S_{BC} = max (v (B) –x_B, v (AB) – x_A – x_B) = max (-30,10) = 10

El máximo exceso S_{CB}= 5 10>5 y X_c>0, por lo tanto, el jugador B pesa mas que el jugador C con respecto a $(x;S)$ y esta configuración de pagos no es un juego para el kernel.

Si se prueba la siguiente configuración de pagos:

$(x;S)$ = (45, 35, 25; ABC).

Se encuentra que S_{AB}= S_{AC} = S_{CA}= S_{BC}= S_{CB} = 10. Por consiguiente todos los jugadores están en equilibrio y esta configuración de pagos es un punto del kernel.

El problema de planeamiento de la transmisión es considerado como un juego cooperativo, los pasos seguidos para formar coaliciones y distribuir costos están basados en el algoritmo de formación de coaliciones orientado al kernel.

El algoritmo de formación de coaliciones orientado al kernel es un algoritmo de negociación descentralizado que determina una configuración de pagos estable. La negociación de las coaliciones implica que los agentes están sincronizados en determinados puntos y al final de cada iteración se forma una nueva coalición compuesta de dos coaliciones antiguas o no se aceptan propuestas de coaliciones.

Cada iteración del algoritmo de formación de coaliciones orientado al kernel se puede dividir en tres fases:

a) Hacer cálculos y enviar ofertas de coalición.

Inicialmente, todos los jugadores son considerados como coaliciones individuales. La coalición escoge al representante más fuerte (en el sentido del kernel) para calcular ofertas de la coalición. En este paso se calcula un nuevo vector de pago de todas las coaliciones que se pueden crear. Entonces una configuración de pagos k-estable se calcula para cada estructura de la coalición que puede formarse por fuera de la vieja estructura, uniendo su coalición con uno en la lista de mayor categoría. Luego el representante envía una propuesta a cada coalición prometedora.

b) Formación de la coalición.

Si el pago de todos los miembros de la coalición es mas grande que sus pagos actuales en sus coaliciones originales, y si la oferta recibida es la primera en la lista de preferencia, entonces la propuesta es aceptada, y esta decisión es comunicada a todas las coaliciones actuales.

c) Distribución de costos y criterios de parada

El costo es distribuido en cada iteración usando el concepto k-estable, y cuando el proceso de formación de coaliciones termina, la distribución de costos es la última calculada. La negociación continua hasta que no sea posible formar más coaliciones, es decir, si no se acepta ninguna propuesta, el proceso termina con una imputación estable.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS.

Para ilustrar el modo de funcionamiento de los dos métodos planteados anteriormente, se presentaran dos casos de ejemplo.

Ejemplo 1: en este ejemplo se tienen tres agentes (A,B,C) que componen el sistema. Los costos de expansión de las posibles coaliciones son:

Tabla 3 Costo de los planes de expansión para el juego de tres agentes

Coalición	costo
A	-100
B	-100
C	-100
A,B	-90
A,C	-80
B,C	-70
A,B,C	-60

Investigación del autor

Con todos los costos de expansión se procede a establecer la formación de coaliciones y la distribución de costos.

Con el valor bilateral de shapley:

Primera iteración:

A solo = -100

A con B: $bsv_{(A,B)}(A)=\frac{1}{2}v(A)+\frac{1}{2}(v(A,B)-v(B))=-45$

A con C: $bsv_{(A,C)}(A)=\frac{1}{2}v(A)+\frac{1}{2}(v(A,C)-v(C))=-40$

B solo = -100

B con A: $bsv_{(A,B)}(B)=\frac{1}{2}v(B)+\frac{1}{2}(v(A,B)-v(A))=-45$

B con C $bsv_{(B,C)}(B)=\frac{1}{2}v(B)+\frac{1}{2}(v(B,C)-v(C))=-35$

C solo = -100

C con A: $bsv_{(A,C)}(C)=\frac{1}{2}v(C)+\frac{1}{2}(v(A,C)-v(A))=-40$

C con B: $bsv_{(B,C)}(C)=\frac{1}{2}v(C)+\frac{1}{2}(v(B,C)-v(B))=-35$

A queda solo y B se une con C porque es más beneficioso para B unirse con C que con A y para C es mas beneficioso unirse con B que con A, por lo tanto forman coalición

<u>Segunda iteración:</u>

A solo = -100

A con B,C: $bsv_{(A,BC)}(A)=\frac{1}{2}v(A)+\frac{1}{2}(v(A,B,C)-v(B,C))=-55$

BC solo = -35

BC con A: $bsv_{(A,BC)}(BC)=\frac{1}{2}v(B,C)+\frac{1}{2}(v(A,B,C)-v(A))=-15$

Entonces se unen A,B,C y se forma la gran coalición

Distribución de costos

$$bsv_{(A,BC)}(A) = \frac{1}{2}v(A) + \frac{1}{2}(v(A,B,C) - v(B,C)) = -45$$

$$bsv_{(A,BC)}(BC) = \frac{1}{2}v(B,C) + \frac{1}{2}(v(A,B,C) - v(A)) = -15$$

$$bsv_{(B,C)}(B) = \frac{1}{2}v(B) + \frac{1}{2}(bsv_{(A,BC)}(A,B,C) - v(C)) = -7.5$$

$$bsv_{(B,C)}(C) = \frac{1}{2}v(C) + \frac{1}{2}(bsv_{(A,BC)}(A,B,C) - v(B)) = -7.5$$

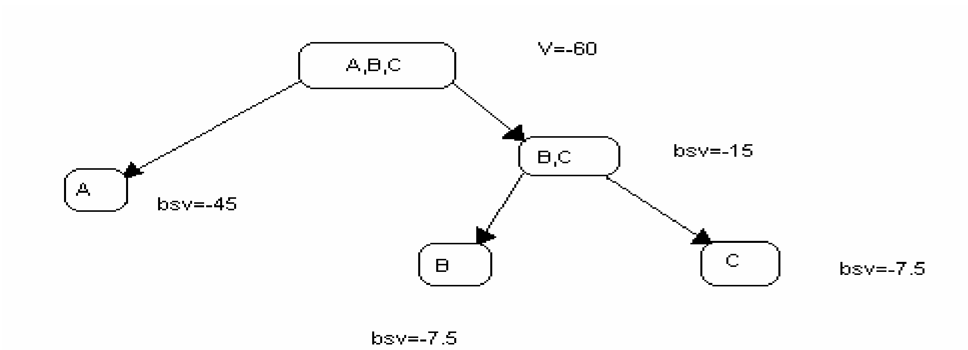
Se tiene que los costos de la coalición son:

X(A)= -45;

X(B) = -7.5;

X(C) = -7.5;

figura 6. Proceso de distribución de costos para el ejemplo de tres agentes, usando el metodo de inducción hacia atras



Investigación del autor

Con el método del kernel.

Se debe encontrar un vector de pagos para las posibles coaliciones que se pueden formar

X(B) +X(C)=-70

$X(A)+X(C) =-80$

$X(A)+X(B) =-90$

Si A y B desean formar coalición

De la definición de equilibrio se tiene que los excesos máximos de A y de B deben ser iguales, por lo tanto:

$V(A)-X(A) = V(B)- X(B)$

De donde se obtiene que $X(A) = X(B) = V(A,B)/2 = -45$

Si A y C desean formar coalición

$V(A)-X(A) = V(C)- X(C)$

De donde se obtiene que $X(A) = X(C) = V(A,C)/2 = -40$

Si B desea formar coalición con C

$X(B)=X(C) = -35$

Por lo tanto en la primera ronda del proceso de formación de coaliciones B y C forman coalición.

De la misma manera se calculamos el vector de pagos para la gran coalición, obteniéndose:

Si $X_A=X_B=X_C=-20$

Ahora se probara que el vector de pagos calculado anteriormente cumple con las condiciones de equilibrio.

Calculamos los excesos de A

$V(A)-X(A) =-80$

Con respecto a B

V(A)-X(A)-X(C)=-60

Con respecto a C

V(A)-X(A)-X(C)=-60

Calculamos los excesos de B

V(B)-X(B) =-80

Con respecto a A

V(B)-X(B)-X(C)=-60

Con respecto a C

V(B)-X(B)-X(A)=-60

Calculamos los excesos de C

V(C)-X(C) =-80

Con respecto a A

V(C)-X(C)-X(B)=-60

Con respecto a C

V(C)-X(C)-X(A)=-60

$S_{AC}=S_{CA}=S_{BC}=S_{CB}=S_{AB}=S_{BA}=-60$

Por lo tanto la configuración de pagos

(X;S)=(-20 -20 -20; ABC)

Es un punto para el kernel

El pago que le corresponde a cada agente es:

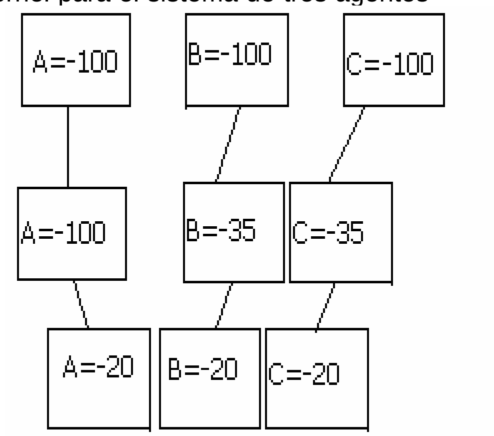
$X_A=-20$;

$X_B=-20$;

X_C=-20;

El proceso de formación de coaliciones usando el método del kernel se observa en la siguiente gráfica.

Figura 7 Resultado del kernel para el sistema de tres agentes



Ejemplo 2: se resolverá un caso ejemplo de seis agentes cuyas características se describen a continuación. En cada uno de los métodos se describen detalladamente los pasos efectuados.

La configuración inicial tiene cinco nodos: 1, 2, 3, 4 y 5 y 6 ramas 1-2, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, y 3-5 como se muestra en la figura.

Cuando el sistema se expande hay una barra nueva: bus 6 y 4 nuevas líneas: 2-6, 3-5, 4-6 y 5-6. La conexión entre dos cualquier barras está permitida con un límite de 4 líneas en paralelo. Los datos de las diferentes líneas están mostrados en la siguiente tabla. Donde la capacidad de transporte de cada línea es determinada basada en límites térmicos y requerimientos de estabilidad.

La grafica a continuación muestra el sistema con sus líneas existentes y las posibles líneas que se desean añadir a este sistema.

Para esta aplicación en específico se tiene que cualquier grupo de unidades de generación y las cargas atribuidas para la misma barra pertenecen a un solo agente.

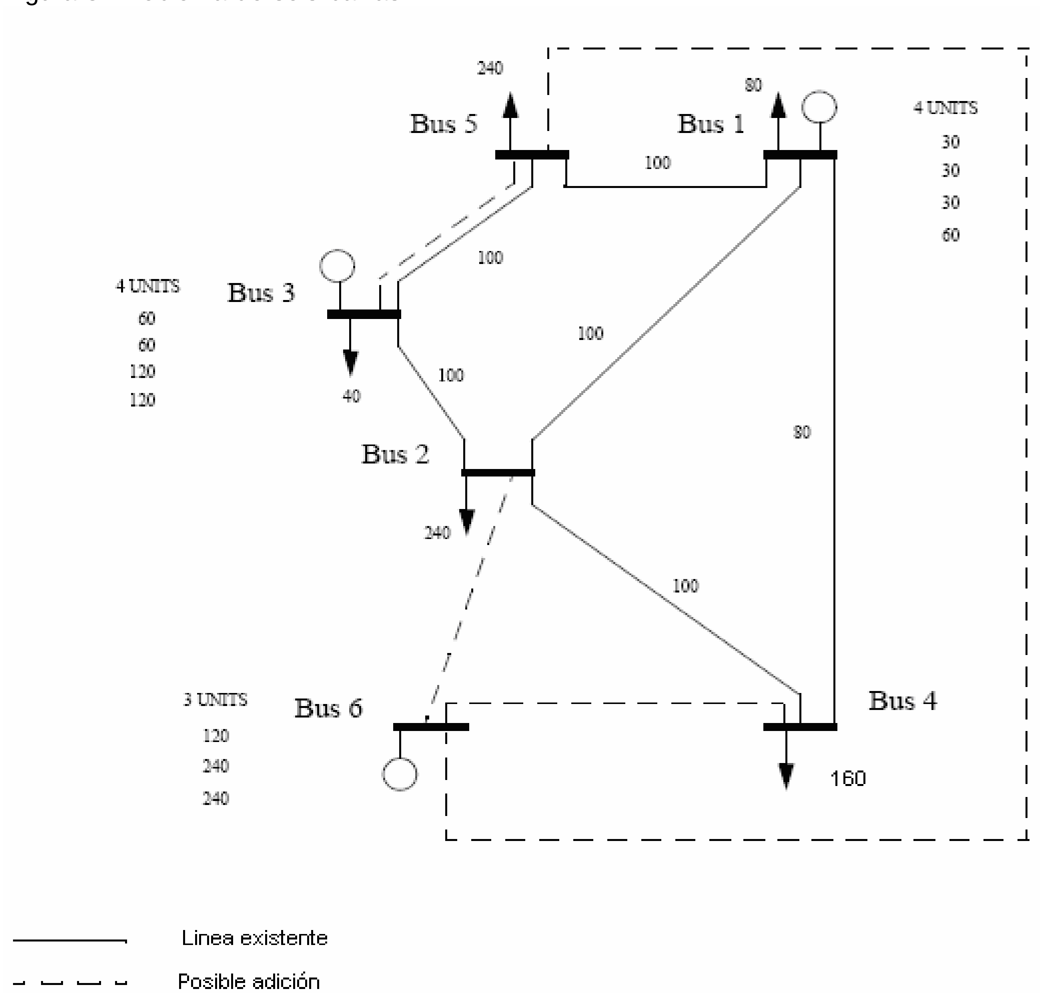
Una coalición de agentes es un conjunto de agentes consistente en: En mínimo un generador, una carga, y una línea de transmisión. Hay tres axiomas que una coalición tiene que satisfacer:

1. El generador debe responsabilizarse por la demanda, o sea, la salida total del generador en la coalición debe ser mayor o igual a la carga.
2. Las líneas nuevas y existentes no deben sobrepasar los límites térmicos cuando se está corriendo el flujo de carga para la coalición.
3. Deben haber una o mas líneas de transmisión, ya sea existentes o posibles candidatas, conectando todas las barras en la coalición.

Estos tres axiomas crean lo que se conoce como coaliciones autónomas, porque pueden probar sus planes de expansión sin tener que necesariamente hacer negociaciones con cualquier otra entidad similar.

Para este caso solo se busca satisfacer la demanda de las cargas, pueden existir otros casos en el que se quiera hacer despacho u otro tipo de distribución de costos.

Figura 8. Problema de seis barras



Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system

En la siguiente tabla se muestran el costo, la capacidad de transporte y la admitancia de las líneas de transmisión.

Tabla 4. Datos del problema de seis barras

Barra: De/hacia	Costos (unidades)	Susceptancia ($1/\Omega$)	Capacidad (MW)
1/2	40	2.50	100
1/4	60	1.67	80
1/5	20	5.00	100
2/3	20	5.00	100
2/4	40	2.50	100
2/6	30	3.33	100
3/5	20	5.00	100
4/6	30	3.33	100
5/6	61	1.64	78

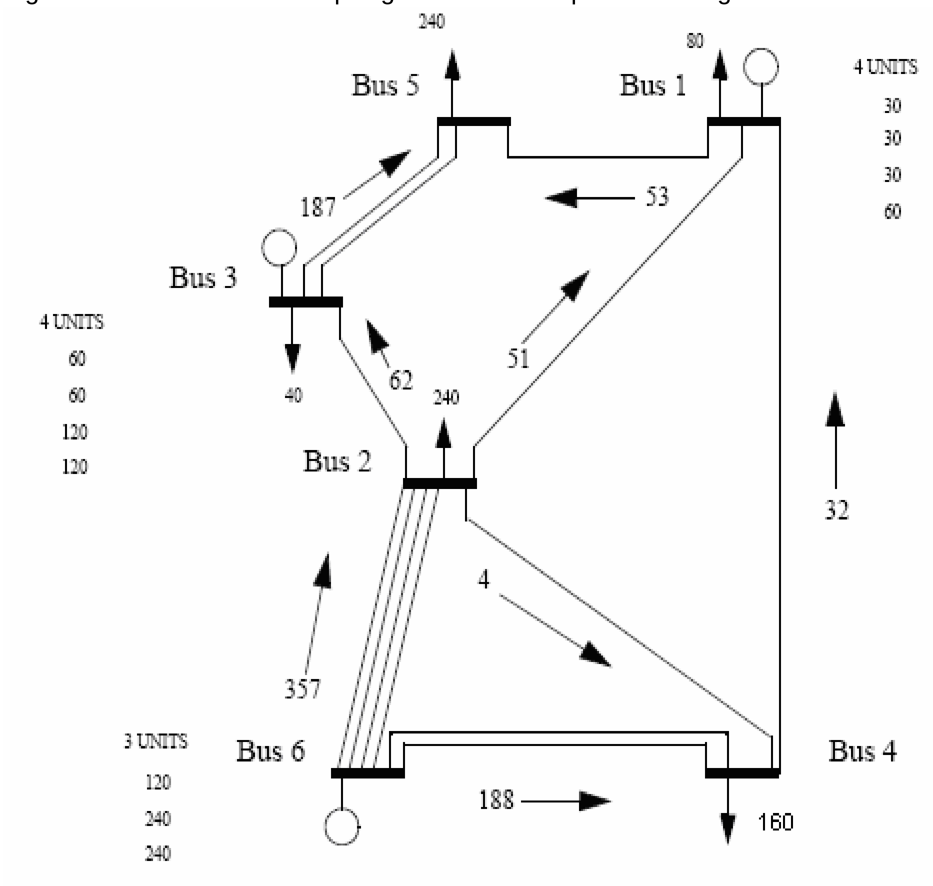
Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system

La solución obtenida por garver sin redespacho de generación (la salida de los generadores 1, 3 y 6 es respectivamente 50, 165 y 545 MW) Como se muestra en la figura. Las flechas indican la dirección de la potencia activa a través de las líneas. La solución óptima tuvo un costo de 200 unidades monetarias y los circuitos que se adicionaron fueron: n_{26} 4 circuitos, n_{35} 1 circuito y n_{35} 2circuitos.

Si la generación se redespacha, o sea la generación real se extiende desde 0 hasta la generación máxima disponible (150, 360, y 600 MW respectivamente), la solución óptima tiene un costo de -110 unidades monetarias, y los circuitos que se adicionaron fueron: n_{26} 3 circuitos y n_{35} 1 circuito.

En la figura 9 se muestra la solución obtenida por garver sin redespacho de la generación.

Figura 9. Solución obtenida por garver sin redespacho de la generación



Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system

Se realizara la distribución de costos de costos por los dos métodos así:

1. Usando el Valor Bilateral de Shapley (BSV)

De acuerdo con la definición de coalición las posibles coaliciones que se pueden formar son:

1 agente: {2}, {4}, {5} y {6}

2 agentes: {2,6}, {3,5}, {4,6} y {5,6}

3 agentes: { 1,2,6}, {1,3,5}, {1,4,6}, {1,5,6}, {2,3,6}, {2,4,6}, {2,5,6}, {3,5,6} y {4,5,6}

4 agentes: {1,2,3,6}, {1,2,4,6},{1,2,5,6},{1,4,5,6}, {2,3,4,6}, {2,3,5,6} y {3,4,5,6}

5 agentes: {1,2,3,4,6}, {1,2,3,5,6}, {1,2,4,5,6} y {2,3,4,5,6}

La gran coalición: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Las otras posibles coaliciones violan los tres axiomas vistos anteriormente.

Ahora se presenta en valor de los planes de expansión para todas las posibles coaliciones:

Tabla 5. Costo de los planes de expansión todas las posibles coaliciones

Coalición	costos
1	0
2	-90
3	0
4	-60
5	-40

6	-60
(2,6)	-90
(3,5)	-40
(4,6)	-60
(5,6)	-183
(1,2,6)	-60
(1,3,5)	-20
(1,4,6)	-30
(1,5,6)	-183
(2,3,6)	-60
(2,4,6)	-120
(2,5,6)	-334
(3,5,6)	-81
(4,5,6)	-304
(1,2,3,6)	-30
(1,2,4,6)	-120
(1,2,5,6)	-273
(1,3,5,6)	-61
(1,4,5,6)	-182
(2,3,4,6)	-90
(2,3,5,6)	-100
(3,4,5,6)	-141
(1,2,3,4,6)	-90
(1,2,3,5,6)	-80
(1,2,4,5,6)	-272

(1,3,4,5,6)	-70
(2,3,4,5,6)	-160
(1,2,3,4,5,6)	-110

Contreras, J. A cooperative game theory approach to transmission planning in power system

Ahora se calculan los Valores Bilaterales de Shapley para saber cual es la mejor opción para formar coalición:

<u>Primera iteración:</u> Jugadores 1, 2, 3, 4, 5 y 6

1: ninguna elección

2: solo: v (2) = -90

2 con 6: $bsv_{\{2,6\}}$ (2) = ½ v (2) + ½ (v (26) – v (6)) = -60

3: solo: v (3) = 0

3 con 5: $bsv_{\{3,5\}}$ (3) = ½ v (3) + ½ (v (35) – v (5)) = 0

4: solo: v (4) = -60

4 con 6: $bsv_{\{4,6\}}$ (4) = ½ v (4) + ½ (v (46) – v (6)) = -15

5: solo: v (5) = -40

5 con 3: $bsv_{\{5,3\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(35) – v(3))= -40

5 con 6: $bsv_{\{5,6\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(56) – v(6)) = -81.5

6: solo: v (6)= -60

6 con 4: $bsv_{\{6,4\}}$ (6) = ½ v(6) +½ (v(46) – v(4)) = -30

6 con 2: $bsv_{\{6,2\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(26) – v(2)) = -30

6 con 5: $bsv_{\{6,5\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(56) – v(5)) = -101.5

Estado: 1 no tiene alternativa; 2 prefiere a 6; 3 está indeciso entre solo y 5 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 5); 4 prefiere 6; 5 está indeciso entre solo y 3 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 3); 6 está indeciso entre 2 y 4 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 4).

Coaliciones después de la ronda 1: 6 se une con 4 y 3 se une con 5, 1 y 2 están solos.

<u>Segunda iteración:</u> jugadores 1,2,(3,5),(4,6)

1: solo: $v(1) = 0$

1 con 35: $bsv_{\{1,35\}}(1) = ½\, v(1) + ½\, (v(135) – v(35)) = 10$

1 con 4,6: $bsv_{\{1,4,6\}}(1) = ½\, v(1) + ½\, (v(146) – v(46)) = 15$

2: solo: $v(2) = -90$

2 con 4,6: $bsv_{\{2,4,6\}}(2) = ½\, v(2) + ½\, (v(246) – v(46)) = -75$

35: solo: $v(35) = -40$

35 con 1: $bsv_{\{1,3,5\}}(35) = ½\, v(35) + ½\, (v(135) – v(1)) = -30$

35 con 4,6: $bsv_{\{3,5,4,6\}}(35) = ½\, v(35) + ½\, (v(3456) – v(46)) = -60.5$

46 solo: $v(46) = -60$

4,6 con 1: $bsv_{\{1,4,6\}}(46) = ½\, v(46) + ½\, (v(146) – v(1)) = -45$

4,6 con 2: $bsv_{\{1,4,6\}}(46) = ½\, v(46) + ½\, (v(46) – v(2)) = -45$

Estado:1 está puede formar coalición con 3,5 y con 4,6 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 4,6), 4,6 puede formar coalición con 1 o con 2 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere a 1).

Coaliciones después de la ronda 2: 1 se une con 4,6;2 solo y 3,5 solo.

Tercera iteración:(1,4,6),2 y (3,5)

1,4,6 solo: v(146)= -30

1,4,6 con 2: $bsv_{\{1,4,6,2\}}$ (146) = ½ v(146) + ½ (v(1246) – v(2)) = -30

1,4,6 con 3,5: $bsv_{\{1,3,4,5,6\}}$ (146) = ½ v(146) +½ (v(13456) – v(35)) = -30

2: solo: v(2) = -90

2 con 1,4,6: $bsv_{\{1,4,6,2\}}$ (2) = ½ v(2) + ½ (v(1246) – v(146)) = -90

3,5: solo: v(35) = -40

3,5 con 1,4,6 : $bsv_{\{1,3,4,5,6\}}$ (35) = ½ v(5) +½ (v(13456) – v(146)) = -45

Estado: 1,4,6 puede formar coalición con 3,5; 2 puede quedarse solo o formar coalición 1,4,6 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere solo); 3,5 puede formar coalición con 1,4,6.

Coaliciones después de la tercera ronda: 2 solo y 1,4,6 se une con 3,5

Cuarta iteración: jugadores 2 y 1,3,4,5,6

2 solo: v(2)=-90

2 con 1,3,4,5,6: $bsv_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (2) = ½ v(2) + ½ (v(123456) – v(13456))= -65

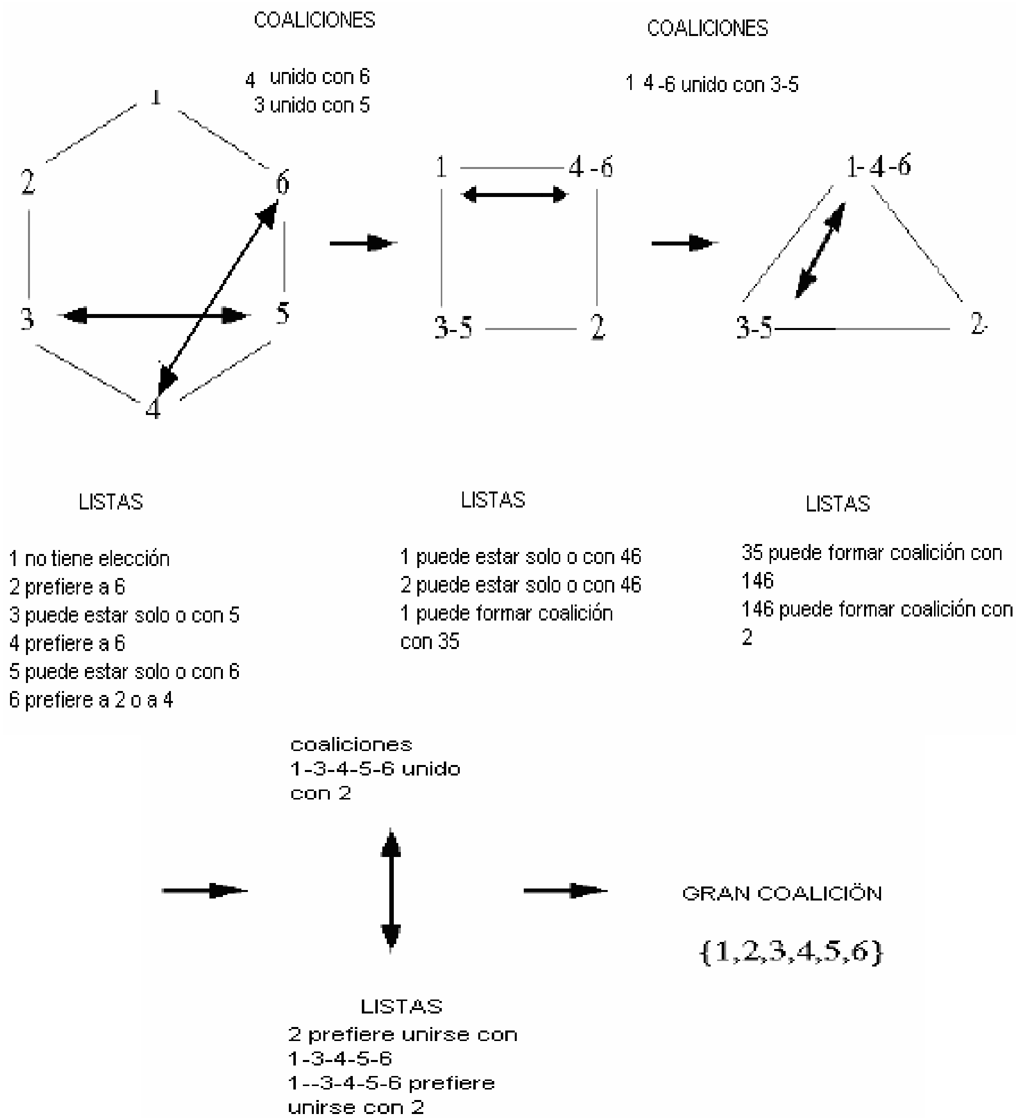
1,3,4,5,6 solo: v(13456)=-70

1,3,4,5,6 con 2: $bsv_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (13456) = ½ v(13456) + ½ (v(123456) – v(2)) =-45

Se ha formado la gran coalición.

Las coaliciones se formaron en el siguiente orden:

Figura 10. Proceso de formación de coaliciones



Investigación del autor

Una vez que la gran coalición es creada seguimos con el algoritmo de inducción hacia atrás para calcular la distribución del valor por BSVs.: BIM (o método de inducción hacia atrás). El proceso es como sigue:

Las formadoras de la gran coalición fueron las coaliciones (1,3,4,5,6) y (2)

BIM: $bsv_{(13456,2)}(13456) = \frac{1}{2}v(13456) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(2)) = -45$

BIM: $bsv_{(13456,2)}(2) = \frac{1}{2}v(2) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(13456)) = -65$

BIM: $bsv_{(35,146)}(35) = \frac{1}{2}v(35) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(13456) - v(146)) = -27.5$

BIM: $bsv_{(35,146)}(146) = \frac{1}{2}v(146) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(13456) - v(35)) = -17.5$

BIM: $bsv_{(3,5)}(3) = \frac{1}{2}v(3) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(35) - v(5)) = -6.25$

BIM: $bsv_{(3,5)}(5) = \frac{1}{2}v(5) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(35) - v(3)) = -33.75$

BIM: $bsv_{(1,46)}(1) = \frac{1}{2}v(1) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(146) - v(46)) = 21.25$

BIM: $bsv_{(1,46)}(46) = \frac{1}{2}v(46) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,146)}(146) - v(1)) = -38.75$

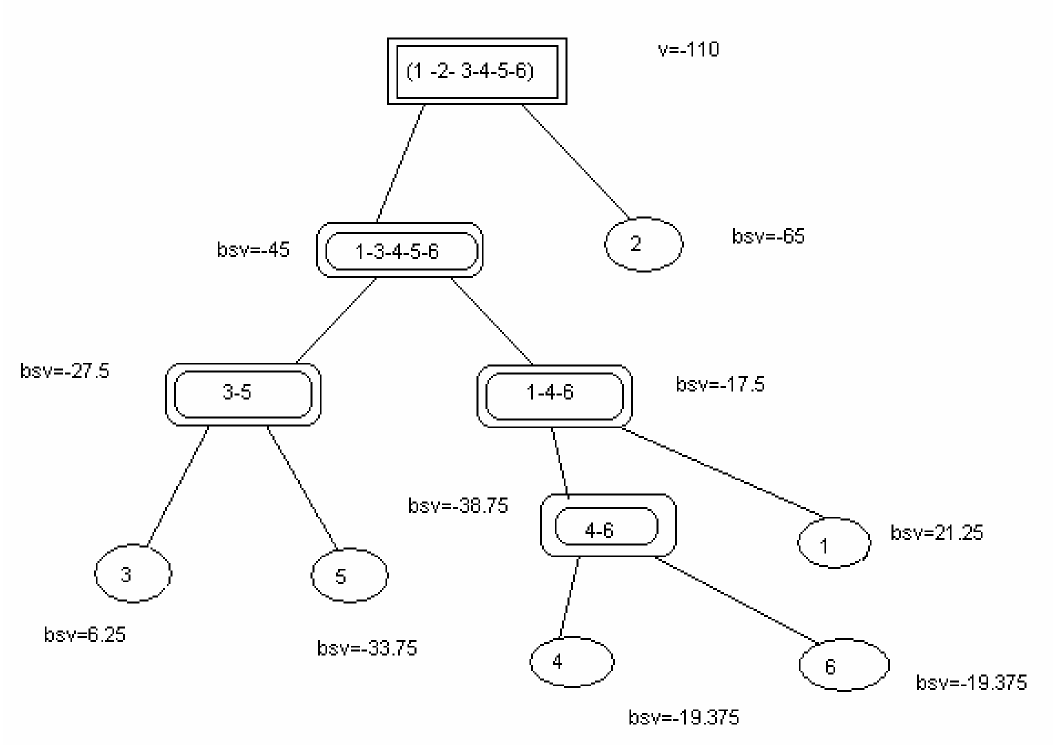
BIM: $bsv_{(4,6)}(4) = \frac{1}{2}v(4) - \frac{1}{2}(bsv_{(146)}(46) - v(6)) = -19.375$

BIM: $bsv_{(4,6)}(6) = \frac{1}{2}v(6) - \frac{1}{2}(bsv_{(146)}(46) - v(6)) = -19.375$

El proceso acaba aquí, porque los valores de los agentes individuales son encontrados: (21.25, - 35, 6.25, - 19.375, - 33.75, - 19.375). se Nota que sólo la primera ronda usa BSVs en su sentido clásico, o sea, en los segundos y subsiguientes pasos del BIM, el valor total a dividir es dado por el BSV previo, en lugar del valor presente.

En la figura 11 se muestra este proceso paso a paso

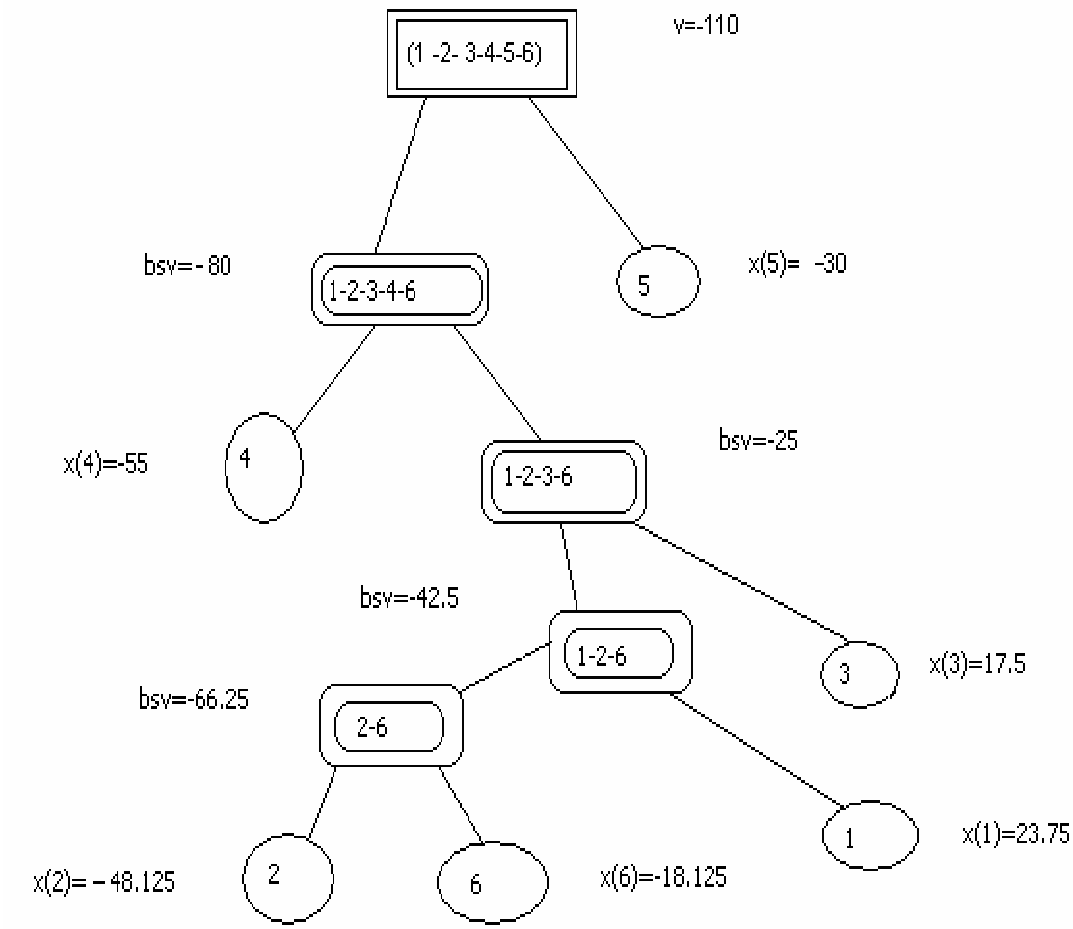
Figura 11. Proceso de distribución de costos usando el algoritmo de inducción hacia atrás



Investigación del autor

En la figura [12] se muestra otro proceso de formación de coaliciones.

Figura 12. Proceso de distribución de costos para otro proceso de formación de coaliciones



Investigación del autor.

En la figura [12] se observa que lo que le corresponde a cada agente es:

X=[23.75, -48.125, 17.5, -55, -30, -18.125]

2. Usando el método del kernel:

En el método del kernel en la formación de coaliciones se distribuyen los costos entre los agentes que forman la coalición. Para este ejemplo se colocara la coalición con su respectivo vector de pagos.

Para la obtención de los resultados se utilizo el programa computacional coala-ideas creado por los ingenieros MATTHIAS KLUSH y TORSTEN VIELHAK.

La secuencia de formación de coaliciones se realizo de la siguiente manera

I. [1, {2,6}, 3, 4, 5]

II. [{1,2,6}, 3, 4, 5]

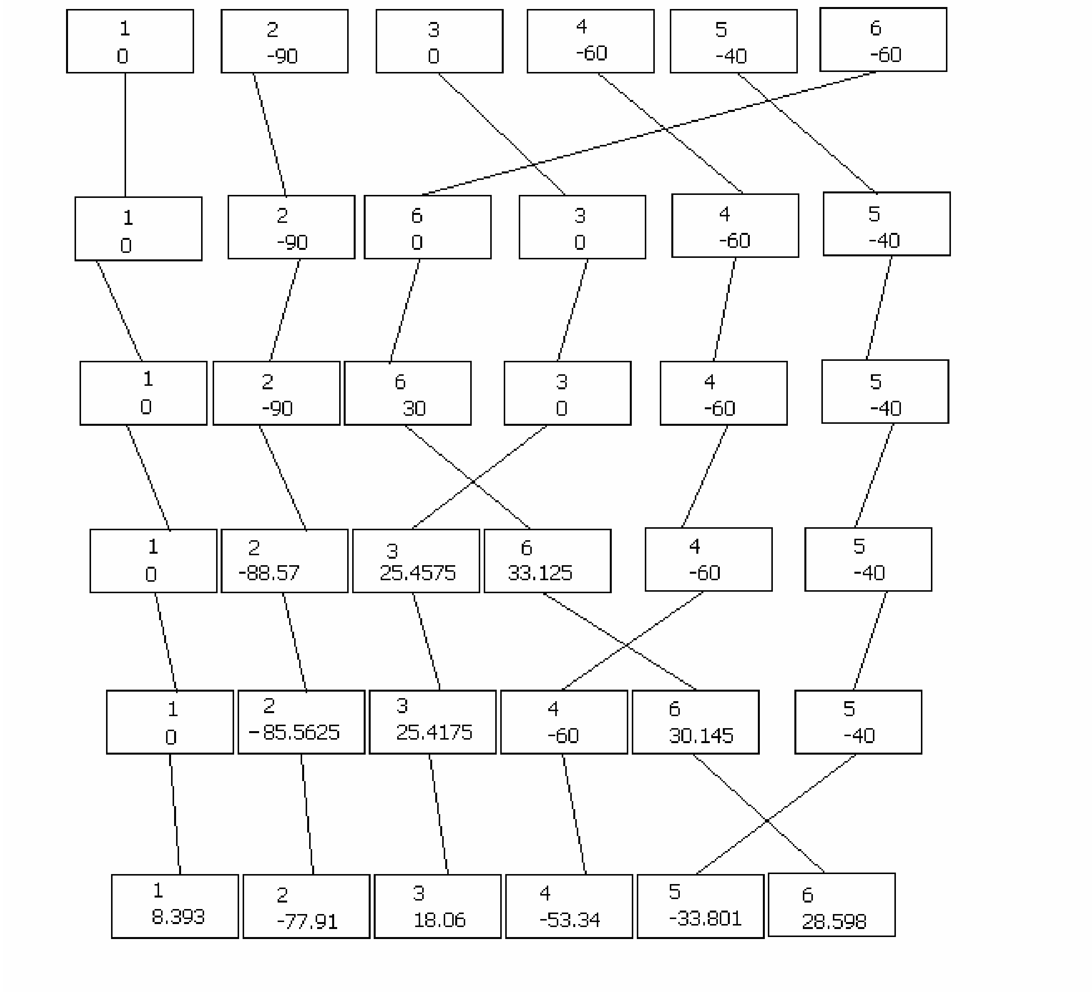
III. [{1,2,4,6}, 3, 5]

IV. [{1,2,3,4,6}, 5]

V. [{1,2,3,4,5,6}] se forma la gran coalición que contiene a todos los agentes del sistema

En la siguiente tabla se muestra el proceso con su respectiva asignación de costos.

Figura 13. Proceso de distribución de costos y formación de coaliciones unsando el étodo del kernel



La distribución de costos final es [{1,2,3,4,5,6}, {(8.393), (-77.91), (18.06), (-53.34), (-33.801), (28.598)}]

CONCLUSIONES

Se han presentado los aspectos más importantes de la teoría de juegos y unos conceptos básicos que permiten el entendimiento del proceso de formación de coaliciones usando el valor bilateral de shapley y el método del kernel, de tal manera que cualquier persona sin conocimiento previo puede analizar estos conceptos y entender esos procesos.

El principal aporte de esta tesis consistió en el análisis de cada uno de los pasos en el proceso de distribución de costos de expansión de la transmisión con base en teoría de juegos cooperativos y la presentación de un algoritmo, donde se indican cada uno de los pasos a seguir en ese proceso, con base en el valor bilateral de shapley y el método del kernel.

Se aplicó el algoritmo de distribución de costos basado en el valor bilateral de shapley y en el método del kernel al sistema de seis barras de Garver.

Los resultados obtenidos al utilizar los dos métodos de distribución de costos fueron diferentes, pero coinciden en que el agente dos es el que mas aporta en la distribución de costos final en cada método. Los agentes uno y tres al contrario de aportar reciben pago en este juego de expansión, debido a que a ellos no les interesaba formar coaliciones al principio de la negociación, ya que eran agentes suficientes, porque generaban la potencia que las cargas demandaban. Los resultados obtenidos al utilizar el concepto del kernel no son muy convincentes debido a que le asigna utilidad al generador que posee mayor necesidad de expandir el sistema de transmisión.

Se describieron tres aplicaciones importantes de la teoría de juegos cooperativos en el campo de la ingeniería eléctrica, con base en conceptos básicos de sistemas de potencia, como el flujo de carga y el modelo de corrientes inyectadas a la barra, que se usó como función característica en la ‘Distribución de pérdidas de transmisión’.

BIBLIOGRAFÍA

Andre Della Roca Madeiros, Roberto Salgado, Hans H. Zürn “Generation Cost Allocation – A Methodology Based On Optimal Power Flow and Cooperative Game Theory” IEEE Porto power Tech conference, 10-13 septiembre, Porto Portugal, 2001.

Carlos A. Lozano and Juan M Gers “Game Theory Application for Determining Wheeling Charges” International Conference On Electric Utility Deregulation and Restructuring an Power Technologies 2000, city University London Abril 4-7 2000.

Contreras J, Klusch M y Whu F (1998) Multi Agent Coalition Formation in Power Transmission Planing: Bilateral Shapley Value Approach.

Contreras J, Klusch M, Vielhalk T y Whu F. Multi Agent Coalition Formation in Power Transmission Planing: Bilateral Shapley Value and kernel Approaches. Procedings of the 13th Power System Computation Conference on practical Aplicaction on Multiagent System. PAAM 97 pp1-12, April, Londres Inglaterra.

E. Carreño, A. Escobar, Hernán Serrano y Ramos Gallego, “Distribución de Costos en el Planeamiento de la Transmisión Usando el Concepto del Kernel”Universidad Tecnológica de Pereira, Grupo de investigación en el planeamiento de sistemas eléctricos.

E. Carreño, A. Escobar, Hernán Serrano y Ramos Gallego, “Distribución de Costos en el Planeamiento de la Transmisión Usando el valor bilateral de shapley, Universidad Tecnológica de Pereira, Grupo de investigación en el planeamiento de sistemas eléctricos.

F. Evans Miranda "Asignación de costos en la expansión del sistema de transmisión mediante teoría de juegos cooperativos: Aproximación del Kernel" Tesis de maestría , Departamento de ingeniería eléctrica, Pontificia Universidad Católica de Chile, 2002.

Garver, L. L., "Transmission Net Estimation Using Linear Programming ," IEEE Transactions on Power Apparatus & Systems, vol. PAS-89, n.7, pp. 1688-1697 Sept./Oct. 1970.

J. Contreras, " A Cooperative Game Theory Approah to transmission planning in power system," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, may 1997.

J. Contreras and F.F Wu, "Coalition Formation in Transmission Expansion Planning," IEEE Trans. On power system vol. 14 Nº 3 , Agosto 1999 pp 114-1152

J. Contreras and F.F Wu, "A Kernel-Oriented Algorithm For Transmission Expansion Planning", IEEETrans. On power system vol. 15 Nº 4 , Noviembre 2000 pp 1434-1440

Klusch, M., Shehory , O., "A polynomial Kernel-oriented coalition algorithm for rational information agents," Proc. 2. International Conference on Multi-Agent Systems ICMAS-96, Kyoto (Japan), AAAI Press, 1996.

Klusch, M., and Shehory, O., “Coalition Formation Among Rational information Agents,” Proceedings of MAAMAW-96, Eindhoven, LNAI Series vol. 1038:204-217, Springer verlag.

Lie T., Tanh X. H., ‘Aplication the Shapley Value on Transmission Cost Allocation In The Competitive Power Market Environment’, Generation, Transmission and Distribution, IEEE Procedings Volume 149 2002 pp 15-20.

Shih-Chied Hsieh and Hsin-Min Wang “ Allocation of transmission lost based on cooperative game theory and current injection models” IEEE ITIC 02, Bangkok Thailand , 2002.

Shehory, O., and Kraus, S., “A Kernel-oriented model for coalition formation in general environments: Implementation and results,” Proceedings AAAI-96 Portland, OR, 1996.

Sore, F. Definición de un Sistema Troncal Eficiente Usando Teoría de Juegos Cooperativos, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Chile p. 17. 2003.

Vieira Filho X, Pereira M, Groenstin B, B Mello, J Mello y Granville S. (1997) Transmisión System Cost Allocation Based on Cooperative Game theory. Brasil.

X. H. Tan and T. T. Lie, “Allocation of Transmission Lost Cost Using Cooperative Game Theory In the Context of Open Transmission Acces” IEEE 2001.

Zolezzi, J. Asignación de Costos de Transmisión Vía Juegos Cooperativos y Formación de Coaliciones, Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Chile 2002.

ANEXO A. CÁLCULOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE COSTOS USANDO EL VALOR BILATERAL DE SHAPLEY PARA DOS COALICIONES ALTERNATIVAS

Primer Caso

Primera iteración: Jugadores 1, 2, 3, 4, 5 y 6

1: ninguna elección

2: solo: v (2) = -90

2 con 6: $bsv_{\{2,6\}}$ (2) = ½ v (2) + ½ (v (26) – v (6)) = -60

3: solo: v (3) = 0

3 con 5: $bsv_{\{3,5\}}$ (3) = ½ v (3) + ½ (v (35) – v (5)) = 0

4: solo: v (4) = -60

4 con 6: $bsv_{\{4,6\}}$ (4) = ½ v (4) + ½ (v (46) – v (6)) = -15

5: solo: v (5) = -40

5 con 3: $bsv_{\{5,3\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(35) – v(3))= -40

5 con 6: bsv{5,6} (5) = ½ v(5) + ½ (v(56) – v(6)) = -81.5

6: solo: v (6)= -60

6 con 4: $bsv_{\{6,4\}}$ (6) = ½ v(6) +½ (v(46) – v(4)) = -30

6 con 2: $bsv_{\{6,2\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(26) – v(2)) = -30

6 con 5: $bsv_{\{6,5\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(56) – v(5)) = -101.5

Estado: 1 no tiene alternativa; 2 prefiere a 6; 3 está indeciso entre solo y 5 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 5); 4 prefiere 6; 5 está indeciso entre solo y 3 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere

3); 6 está indeciso entre 2 y 4 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 4).

Coaliciones después de la ronda 1: 6 se une con 2 y 3 ,5, 1 y 4 están solos.

Segunda iteración: jugadores 1,(2,6),3,4,5

1: solo: v(1) = 0

1 con 2,6: $bsv_{\{1,26\}}$ (1) = ½ v(1) +½ (v(126) – v(26)) = 15

3: solo: v(3) = -0

3 con 2,6: $bsv_{\{3,2,6\}}$ (3) = ½ v(3) + ½ (v(236) – v(26)) = 15

4: solo: v(4) = -0

4 con 2,6: $bsv_{\{2,4,6\}}$ (4) = ½ v(4) + ½ (v(246) – v(26)) = -45

5:solo: v(5) = -40

5 con 2,6: $bsv_{\{2,4,6\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(256) – v(26)) = -142

2,6 con 1: $bsv_{\{1,2,6\}}$ (2,6) = ½ v(2,6) + ½ (v(126) – v(1)) = -75

2,6 con 3: $bsv_{\{2,3,6\}}$ (2,6) = ½ v(2,6) + ½ (v(236) – v(3)) = -75

2,6 con 4: $bsv_{\{1,2,6\}}$ (2,6) = ½ v(2,6) + ½ (v(246) – v(4)) = -75

2,6 con 5: $bsv_{\{1,2,6\}}$ (2,6) = ½ v(2,6) + ½ (v(256) – v(5)) = -192

Estado:(2,6) puede formar coaliciones con 3 con 4 y con 1, escogiendo al azar entre los tres estados, él prefiere 1), 1 , 3 y 4 puede formar coalición con (2,6)

Coaliciones después de la ronda 2: 1 se une con (2,6);3,4,5 están solos

Tercera iteración:(1,2,6),3, 4 y 5

1,2,6 solo: v(126)= -90

1,2,6 con 3: $bsv_{\{1,3,6,2\}}$ (126) = ½ v(126) + ½ (v(1236) – v(3)) = -45

1,2,6 con 4: $bsv_{\{1,4,6,2\}}$ (126) = ½ v(126) + ½ (v(1246) – v(4)) = -60

1,2,6 con 5: $bsv_{\{1,5,6,2\}}$ (126) = ½ v(126) + ½ (v(1256) – v(5)) = -146.5

3 solo: v(3)= 0

3 con 1,2,6: $bsv_{\{1,3,6,2\}}$ (3) = ½ v(3) + ½ (v(1236) – v(126)) = 15

4 solo: v(4)=-60

4 con 1,2,6: $bsv_{\{1,4,6,2\}}$ (4) = ½ v(4) + ½ (v(1246) – v(126)) = -60

5 solo: v(4)=-40

5 con 1,2,6: $bsv_{\{1,5,6,2\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(1256) – v(126)) = -126.5

Estado: (1,2,6) puede formar coalición con 3; 3 puede formar coalición 1,2,6

Coaliciones después de la tercera ronda: 4 y 5 solos y 1,2,6 se une con 3

<u>Cuarta iteración:</u> jugadores 4,5, y (1,2,3, 6)

4 solo: v(4)=-60

4 con 1,2,3,6: $bsv_{\{1,2,3,4,6\}}$ (4) = ½ v(4) + ½ (v(12346) – v(1236))= -60

5 solo : v(5)=-40

5 con 1,2,3,6: $bsv_{\{1,2,3,5,6\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(12356) – v(1236))= -30

(1,2,3,6) solo : v(1,2,3,6)=-30

1,2,3,6 con 4: $bsv_{\{1,2,3,4,6\}}$ (1,2,3,4,6) = ½ v(1,2,3,6) + ½ (v(12346) – v(4))= -30

1,2,3,6 con 5: $bsv_{\{1,2,3,5,6\}}$ (1,2,3,5,6) = ½ v(1,2,3,6) + ½ (v(12356) – v(5))= -45

Estado: (1,2,3,6) le da lo mismo solo que con 4 ; 4 puede formar coalición (1,2,3,6) 5 puede formar coalición (1,2,3,6) Coaliciones después de la tercera ronda: 5 solo y 1,2,3,6 se une con 4.

Quinta iteración: jugadores 5 y (1,2,3,4, 6)

5 con 1,2,3,4,6: $bsv_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(123456) – v(12346)) =-30

1,2,3,4,6 con 5: $bsv_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (12346) = ½ v(12346) + ½ (v(123456) – v(5)) =-80

Se ha formado la gran coalición.

Una vez que la gran coalición es creada seguimos con el algoritmo de inducción hacia atrás para calcular la distribución del valor por BSVs.: BIM (o método de inducción hacia atrás). El proceso es como sigue:

Las formadoras de la gran coalición fueron las coaliciones (1,2,3,4,6) y (5)

BIM: $bsv_{(123456,5)}(12346) = \frac{1}{2}v(12346) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(2)) = -80$

BIM: $bsv_{(12346,5)}(5) = \frac{1}{2}v(5) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(12346)) = -30$

BIM: $bsv_{(1236,4)}(1236) = \frac{1}{2}v(1236) - \frac{1}{2}(bsv_{(5,12346)}(12346) - v(4)) = -25$

BIM: $bsv_{(12346,4)}(4) = \frac{1}{2}v(4) - \frac{1}{2}(bsv_{(5,12346)}(12346) - v(1236)) = -55$

BIM: $bsv_{(126,3)}(126) = \frac{1}{2}v(126) - \frac{1}{2}(bsv_{(1236,4)}(1236) - v(3)) = -42.5$

BIM: $bsv_{(126,3)}(3) = \frac{1}{2}v(3) - \frac{1}{2}(bsv_{(1236,4)}(1236) - v(126)) = -17.5$

BIM: $bsv_{(26,1)}(26)=\frac{1}{2}v(26)-\frac{1}{2}(bsv_{(126,3)}(126)-v(1))=-66.25$

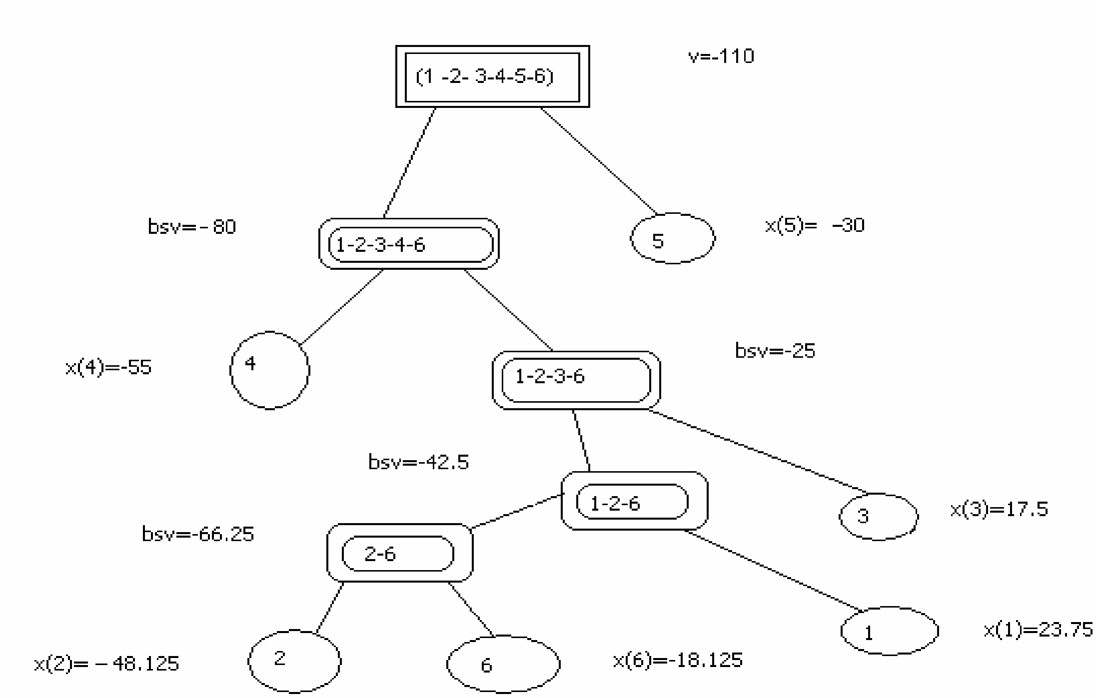
BIM: $bsv_{(26,1)}(1)=\frac{1}{2}v(1)-\frac{1}{2}(bsv_{(126,3)}(126)-v(26))=-23.75$

BIM: $bsv_{(2,6)}(2)=\frac{1}{2}v(2)-\frac{1}{2}(bsv_{(26,1)}(26)-v(6))=-48.125$

BIM: $bsv_{(2,6)}(6)=\frac{1}{2}v(6)-\frac{1}{2}(bsv_{(26,1)}(26)-v(2))=-18.125$

El proceso acaba aquí, porque los valores de los agentes individuales son encontrados: X=[23.75, -48.125, 17.5, -55, -30, -18.125].Se Nota que sólo la primera ronda usa BSVs en su sentido clásico, o sea, en los segundos y subsiguientes pasos del BIM, el valor total a dividir es dado por el BSV previo, en lugar del valor presente.

En la figura siguiente figura se muestra este proceso paso a paso



- **Segundo caso**

Primera iteración: Jugadores 1, 2, 3, 4, 5 y 6

1: ninguna elección

2: solo: v (2) = -90

2 con 6: $bsv_{\{2,6\}}$ (2) = ½ v (2) + ½ (v (26) – v (6)) = -60

3: solo: v (3) = 0

3 con 5: $bsv_{\{3,5\}}$ (3) = ½ v (3) + ½ (v (35) – v (5)) = 0

4: solo: v (4) = -60

4 con 6: $bsv_{\{4,6\}}$ (4) = ½ v (4) + ½ (v (46) – v (6)) = -15

5: solo: v (5) = -40

5 con 3: $bsv_{\{5,3\}}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(35) – v(3))= -40

5 con 6: $bsv\{5,6\}$ (5) = ½ v(5) + ½ (v(56) – v(6)) = -81.5

6: solo: v (6)= -60

6 con 4: $bsv_{\{6,4\}}$ (6) = ½ v(6) +½ (v(46) – v(4)) = -30

6 con 2: $bsv_{\{6,2\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(26) – v(2)) = -30

6 con 5: $bsv_{\{6,5\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(56) – v(5)) = -101.5

Estado: 1 no tiene alternativa; 2 prefiere a 6; 3 está indeciso entre solo y 5 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 5); 4 prefiere 6; 5 está indeciso entre solo y 3 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 3); 6 está indeciso entre 2 y 4 (escogiendo al azar entre los dos estados, él prefiere 4).

Coaliciones después de la ronda 1: 3 se une con5 y 1, 2 , 4 y 6 están solos.

Segunda iteración: jugadores (3 ,5),1,2,,4,6

1: solo: v(1) = 0

1 con 3,5: $bsv_{\{1,35\}}$ (1) = ½ v(1) +½ (v(135) – v(35)) = 10

6: solo: v(6) = -60

(3,5) : solo : v(3,5)= -40

6 con 3,5: $bsv_{\{6,35\}}$ (6) = ½ v(6) +½ (v(635) – v(35)) = -50.5

35 con 6: $bsv_{\{6,35\}}$ (3,5) = ½ v(3,5) +½ (v(635) – v(6)) = -30.5

35 con 1: $bsv_{\{1,35\}}$ (3,5) = ½ v(3,5) +½ (v(135) – v(1)) = -30

Estado:(3,5) puede formar coaliciones con 1 y con 6, escogiendo al azar entre los tres estados, él prefiere 1), 1 y 6 puede formar coalición con (3,5)

Coaliciones después de la ronda 2: 1 se une con (3,5);2, 4, 6 están solos

Tercera iteración:(1,3, 5), 2, 4 y 6

1,3,5 solo: v(135)= -20

1,3,5 con 6: $bsv_{\{1,3,5,6\}}$ (135) = ½ v(135) + ½ (v(1356) – v(6)) = -10.5

6 con 1,3,5: $bsv_{\{1,3,5,6\}}$ (6) = ½ v(6) + ½ (v(1356) – v(6)) = -50.5

Estado: (1,3,5) solo puede formar coalición con 6; 6 puede formar coalición (1,3,5) Coaliciones después de la tercera ronda: 4 y 2 solos y 1,3,5 se une con 6

Cuarta iteración: jugadores 2,4, y (1,3,5, 6)

4 solo: v(4)=-60

2 solo: v(2)=-90

4 con 1,3,5,6: $bsv_{\{1,3,4,5,6\}}$ (4) = ½ v(4) + ½ (v(13456) – v(1356))= -34.5

1,3,5,6 con 4: bsv$_{\{1,3,4,5,6\}}$ (1,3,5,6) = ½ v(1,3,5,6) + ½ (v(13456) – v(4))=

-35.5

2 con 1,3,5,6: bsv$_{\{1,2,3,5,6\}}$ (2) = ½ v(2) + ½ (v(12356) – v(1356))= -54.5

1,3,5,6 con 2: bsv$_{\{1,3,2,5,6\}}$ (1,3,5,6) = ½ v(1,3,5,6) + ½ (v(12356) – v(2))=

-25.5

Estado: (1,3,5,6) puede formar coalición con 2 y 4 ; 4 y 2 puede formar coalición (1,3,5,6)

Coaliciones después de la tercera ronda: 4 solo y 1,3,5,6 se une con 2.

Quinta iteración: jugadores 4 y (1,2,3,5, 6)

4 con 1,2,3,4,6: bsv$_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (4) = ½ v(4) + ½ (v(123456) – v(12356)) =-45

1,2,3,5,6 con 4: bsv$_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ (12356) = ½ v(12356) + ½ (v(123456) – v(4)) =-65

Se ha formado la gran coalición.

Una vez que la gran coalición es creada seguimos con el algoritmo de inducción hacia atrás para calcular la distribución del valor por BSVs.: BIM (o método de inducción hacia atrás). El proceso es como sigue:

Las formadoras de la gran coalición fueron las coaliciones (1,2,3,5,6) y (4)

BIM: $bsv_{(12356,4)}(12356) = \frac{1}{2}v(12356) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(4)) = -65$

BIM: $bsv_{(12356,4)}(4) = \frac{1}{2}v(4) - \frac{1}{2}(v(123456) - v(12356)) = -45$

BIM: $bsv_{(1356,2)}(1356) = \frac{1}{2}v(1356) - \frac{1}{2}(bsv_{(4,12356)}(12356) - v(2)) = -18$

BIM: $bsv_{(1356,2)}(2) = \frac{1}{2}v(2) - \frac{1}{2}(bsv_{(4,12356)}(12356) - v(1356)) = -47$

BIM: $bsv_{(135,6)}(135) = \frac{1}{2}v(135) - \frac{1}{2}(bsv_{(1356,2)}(1356) - v(6)) = 11$

BIM: $bsv_{(135,6)}(6) = \frac{1}{2}v(6) - \frac{1}{2}(bsv_{(1356,2)}(1356) - v(135)) = -29$

BIM: $bsv_{(35,1)}(1) = \frac{1}{2}v(1) - \frac{1}{2}(bsv_{(135,6)}(135) - v(35)) = 25.5$

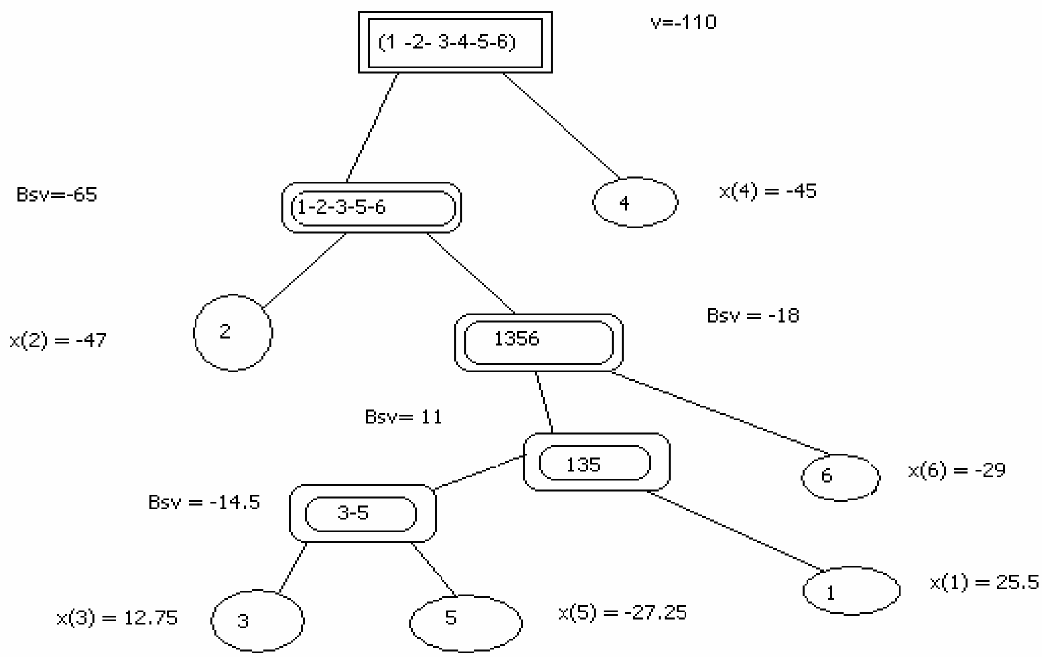
BIM: $bsv_{(35,1)}(35) = \frac{1}{2}v(35) - \frac{1}{2}(bsv_{(135,6)}(135) - v(1)) = -14.5$

BIM: $bsv_{(3,5)}(3) = \frac{1}{2}v(3) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,1)}(35) - v(5)) = 12.75$

BIM: $bsv_{(3,5)}(5) = \frac{1}{2}v(5) - \frac{1}{2}(bsv_{(35,1)}(35) - v(3)) = -27.25$

El proceso acaba aquí, porque los valores de los agentes individuales son encontrados: X=[25.5, -47, 12.75, -45, -27.25, -29].Se Nota que sólo la primera ronda usa BSVs en su sentido clásico, o sea, en los segundos y subsiguientes pasos del BIM, el valor total a dividir es dado por el BSV previo, en lugar del valor presente.

En la figura se muestra este proceso paso a paso



(1 -2- 3-4-5-6)
v=-110
Bsv=-65
1-2-3-5-6
4
x(4) = -45
x(2) = -47
2
1356
Bsv = -18
Bsv= 11
135
6
x(6) = -29
Bsv = -14.5
3-5
1
x(1) = 25.5
x(3) = 12.75
3
5
x(5) = -27.25