

**DINÁMICA DE GEODÉSICAS ALREDEDOR DE OBJETOS
COMPACTOS**

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2006**

**DINÁMICA DE GEODÉSICAS ALREDEDOR DE OBJETOS
COMPACTOS**

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Física

Director

Dr. JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2006

*A la memoria de mi abuela,
Waldina Hernández de Dubeibe.*

”Sin su apoyo probablemente este
trabajo nunca se hubiese escrito...”

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

A mis padres y hermanos.

A mi mujer y mi hijo por permitirme robarles tanto tiempo.

Al Dr. Thomas Dittrich de la Universidad Nacional y al Msc. Jhon Fredy Martinez de la Universidade Federal de Pernambuco por estar siempre dispuestos a resolver mis dudas sobre Teoría del Caos.

A los profesores de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander.
De manera especial:

Al Dr. José David Sanabria Gómez.

Al Dr. Guillermo González.

Al Dr. Ilia Davidovich Mikhailov.

A todos los integrantes del GIRG.

TÍTULO : DINÁMICA DE GEODÉSICAS ALREDEDOR DE OBJETOS COMPACTOS*.

AUTOR : DUBEIBE MARÍN, Fredy Leonardo**.

PALABRAS CLAVES : Secciones de Poincaré, Exponentes de Lyapunov, Momentos multipolares, Estrellas de neutrones, Soluciones exactas en relatividad general.

DESCRIPCIÓN : Se estudian tres soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en el vacío: dos de ellas representan objetos compactos del tipo estrella de neutrones [16], [23], la otra representa un agujero negro estático deformado [12]. Se analiza el movimiento geodésico de una partícula de prueba, para cada una de las soluciones, usando el método de secciones de Poincaré, y se calcula el máximo exponente de Lyapunov en cada caso (usando el procedimiento de Benettin et al. [4]).

En el caso de estrellas de neutrones se encuentra que en el caso de rotación en régimen intermedio (entre el régimen de rotación rápido y el caso de rotación lenta) solo existe movimiento regular, mientras que para el caso de rotación rápida pueden existir movimientos caóticos junto con unas pequeñas islas de movimiento regular, si se modifican los valores calculados numéricamente para el parámetro de deformación en estrellas de neutrones realistas. Para el agujero negro en el caso de la deformación cuadripolar prolata se encuentran movimientos caóticos y regulares, mientras que para la deformación oblata solo se encuentra movimiento regular.

Los anteriores resultados sugieren que las geodésicas para los casos de agujeros negros muestran comportamiento caótico, mientras que para estrellas de neutrones realistas son siempre regulares. La razón de que esto suceda es que para agujeros negros el parámetro de deformación puede ser elegido arbitrariamente debido a que no existen límites teóricos (excepto los teoremas de no-hair) sobre la deformación del agujero negro, mientras que para estrellas de neutrones realistas no es posible variar arbitrariamente el cuadripolo de masa debido a los límites que impone la ecuación de estado de la que está conformada la estrella.

*Trabajo de Investigación.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TITLE : GEODESIC DYNAMICS AROUND COMPACT OBJECTS*.

AUTHOR : DUBEIBE MARÍN, Fredy Leonardo**.

KEY WORDS : Poincaré sections, Lyapunov Exponents, Multipolar moments, Neutron stars, Exact solution in general relativity.

DESCRIPTION : We study three exact solutions to the Einstein equations: two of them represent compact objects like neutrons star [16], [23], the other one represents a black hole [12]. The geodesic motion of test particles was analyzed for each solution using the Poincaré section method and the largest Lyapunov exponent (using the procedure of Benettin et al. [4]) was calculated in each case.

For neutron stars we found that, in the case of intermediate rotation rates (between fast and slowly rotating) only regular motion exists, whereas for the rapidly rotation case can appear chaotic motion and small islands of regular motion, but only when the values numerically calculated for the deformation parameter in realistic neutron stars are modified. For the black hole, in the case of prolate deformation there are chaotic and regular motions, whereas for the oblate deformation there exist only regular motions.

The results above presented suggest chaotic behavior for some cases of geodesics in black holes, whereas only regular motions exists for realistic neutron stars. The cause of this is that for black holes the deformation parameter can be arbitrarily chosen because do not exist theoretical limits (except the theorems of not-hair) for its deformation, whereas for realistic neutron stars is not possible to vary arbitrarily the cuadripole of mass due to the limits that imposes the equation of state on the stars structure.

*Work of Investigation.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director).

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. CAOS: CONCEPTOS ÚTILES	1
1.1. Historia	1
1.2. Sistemas dinámicos	2
1.3. Método de secciones de Poincaré	5
1.4. Atractores	6
1.5. Sensibilidad a las condiciones iniciales	8
1.6. Exponentes de Lyapunov	10
2. CAOS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS	12
2.1. Sistemas Hamiltonianos	12
2.2. Estructura Simpléctica	13
2.3. Transformaciones canónicas	15

2.4. Mapas hamiltonianos	16
2.5. Sistemas Integrables	17
2.6. El teorema KAM	21
3. OBJETOS COMPACTOS Y RELATIVIDAD GENERAL	25
3.1. Objetos compactos	25
3.2. El tensor métrico	26
3.3. Ecuaciones de Einstein–Maxwell	27
3.4. Forma general de una métrica estacionaria axial-simétrica	28
3.5. Potencial Efectivo	30
3.6. Ecuaciones de Movimiento	31
4. DINÁMICA DE GEODÉSICAS	33
4.1. Solución de las ecuaciones de movimiento	33
4.2. Caso 1: Solución de Erez-Rosen	34
4.3. Caso 2: Solución de Tomimatsu-Sato	39
4.4. Caso 3: Solución de Manko <i>et.al.</i>	41
5. CONCLUSIONES	46
BIBLIOGRAFÍA	48

LISTA DE FIGURAS

1.1. Órbita en el espacio de fases tridimensional ($N = 3$).	4
1.2. Sección de Poincaré para una órbita tridimensional.	6
1.3. Sección de Poincaré para una órbita tridimensional con un ciclo límite.	8
1.4. Evolución de dos trayectorias cercanas en el espacio de fases.	9
2.1. Tubo de trayectorias.	15
2.2. Órbita en un toro 2-dimensional.	18
2.3. Dos trayectorias irreducibles en un toro 2-dimensional.	19
2.4. Sección de superficie para un sistema integrable.	23
4.1. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,97, L = 3,98, k = -1,0$	36
4.2. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,939, L = 3,34, k = 5,0$	36

-
- 4.3. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,938, L = 3,33, k = 5,0$ 37
- 4.4. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,906, L = 2,858, k = 10,0$ 38
- 4.5. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,94, L = -3,12$ 41
- 4.6. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot, J = 0,5504, b = -0,3080, E = 0,95, L = -9,0$ 43
- 4.7. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,840M_\odot, J = 0,5, b = -0,3792, E = 0,1, L = -5,6$ 43
- 4.8. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot, J = 0,5504, b = 0,8, E = 0,96, L = -9,9$. 44
- 4.9. Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot, J = 0,5504, b = 0,8, E = 0,971, L = -9,3$. 44

INTRODUCCIÓN

La interacción gravitacional determina el movimiento de los objetos astronómicos, es así como se explican las órbitas que describen los planetas, el movimiento de la luna alrededor del sol, etc. Cuando se consideran objetos astrofísicos con campos gravitacionales intensos, tales como agujeros negros, estrellas de neutrones y enanas blancas, es necesario usar la teoría de la gravitación de Einstein en lugar de la gravitación newtoniana. En el contexto de la teoría de la relatividad general el campo gravitacional exterior de un cuerpo (no cargado, ni magnetizado) es descrito por una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío. Además, se sabe que la mayoría de los objetos astrofísicos no poseen una distribución de masa esféricamente simétrica, y que son usualmente objetos rotantes [19]. Por esta razón se requiere una solución estacionaria, axialsimétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de campo de Einstein de vacío para describir el campo gravitacional de los objetos astrofísicos reales.

Por otra parte, es bien sabido que algunos sistemas dinámicos exhiben un tipo específico de movimiento irregular que técnicamente se denomina caos, este fenómeno se observa a largo plazo (grandes intervalos del parámetro de evolución) y se caracteriza principalmente por una fuerte dependencia a las condiciones iniciales, es decir, un pequeño cambio en el punto de inicio del espacio de estados del sistema dinámico, causa un resultado enormemente diferente del estado final del sistema [1]. En general se sabe que la mayoría de los sistemas reales son de este tipo y que la condición necesaria para esto, es que el sistema involucre no linealidad [17].

Desde este punto de vista, se considera necesario estudiar caos en relatividad general, puesto que se pueden presentar comportamientos caóticos en las órbitas de las partículas en presencia de los campos gravitacionales descritos por esta teoría no lineal. El comportamiento regular o caótico de las partículas de prueba en presencia de tales campos gravitacionales trae consigo consecuencias importantes, como la variación de las frecuencias e intensidades de las ondas gravitacionales generadas por las partículas de prueba. Para el caso de órbitas fuertemente caóticas se ha encontrado que el espectro de energía se hace continuo, mientras que en el caso de órbitas débilmente caóticas el espectro es discreto [14]. Luego, puede pensarse, que cuando las ondas gravitacionales sean detectadas y se analice su espectro de energía, no solo podrían determinarse los parámetros astrofísicos (masa, momento angular y espín), sino también podría discutirse la dinámica no lineal del sistema relativista.

El objetivo principal del presente trabajo es explorar una nueva línea de trabajo en el área de la Relatividad General. Además, se pretende aportar al estudio de la dinámica caótica en objetos astrofísicos de importancia. Este trabajo se divide en cinco partes: en el capítulo 1, se presenta una breve historia y algunos conceptos básicos necesarios para el estudio de la teoría del caos. En el capítulo 2, se hace una breve exposición de la teoría de Hamilton y su relación con el caos. En el capítulo 3, se presentan los objetos compactos y la relatividad general y se deducen las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba alrededor de dichos objetos usando el formalismo hamiltoniano. En el capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos para los objetos compactos considerados. Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y alcances del trabajo.

1 CAOS: CONCEPTOS ÚTILES

1.1 Historia

Puede decirse que la dinámica caótica empezó con el trabajo del matemático francés Henri Poincaré en 1890. Poincaré estudió el problema de tres cuerpos que interactúan únicamente por la atracción gravitacional y encontró que las órbitas de las partículas exhibían un complicado comportamiento aperiódico con una fuerte dependencia de las condiciones iniciales (ahora denominadas órbitas caóticas). Subsecuentes grupos de matemáticos especialmente de Berkeley y Moscú— entre quienes sobresalen los nombres de Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson, Kolmogorov y colaboradores— realizaron contribuciones importantes a la dinámica caótica. A pesar de estos trabajos, la posibilidad de caos en sistemas físicos reales no fue considerada sino hasta después de unos años. Con el advenimiento de las computadoras el panorama cambió drásticamente, las soluciones numéricas de sistemas dinámicos de importancia práctica, en la mayoría de los casos exhibían comportamientos caóticos, lo que llevó a pensar a la mayoría de los científicos de la época que este comportamiento era más común que excepcional.

Cuando se estudian sistemas dinámicos que pueden ser analizados completamente de forma analítica, los sistemas eventualmente adquieren un movimiento periódico (ciclo límite) o alcanzan un estado estable (situación en la cual el movimiento cesa); estos dos casos aparecen como los únicos posibles. El movimiento caótico es irrealizable y la razón es que las órbitas caóticas no pueden representarse

usando funciones analíticas estándar. El movimiento caótico no es ni estable, ni periódico y se caracteriza por exhibir comportamientos muy complejos en sus trayectorias.

Algunos ejemplos de sistemas caóticos:

- Péndulo Doble: está formado por dos péndulos simples de longitudes l_1 y l_2 , de los que cuelgan partículas de masas m_1 y m_2 . En un instante determinado t , los hilos inextensibles forman ángulos θ_1 y θ_2 con la vertical. Este es un sistema físico simple que exhibe un rico comportamiento dinámico. El movimiento de un péndulo doble esta gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Para ciertos valores de energía el movimiento es caótico.
- El mapa logístico: es un mapeo polinomial, frecuentemente citado como un ejemplo de que tan complejo puede llegar a ser el comportamiento de una simple ecuación no lineal. El mapa fue popularizado por el biólogo Robert May.
- El mapa de Henon: es un sistema dinámico de tiempo discreto. Este es uno de los ejemplos mas estudiados de los sistemas dinámicos que exhiben comportamiento caótico.
- El atractor de Lorenz: introducido por Edward Lorenz en 1963 es un sistema dinámico determinista no-lineal tridimensional que modela fenómenos de convección atmosférica de manera muy simplificada.

1.2 Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico consiste en un conjunto de posibles estados, sujetos a una regla que determina el estado presente en términos de estados pasados. Es posible

clasificar los sistemas dinámicos en dos tipos:

1. Sistemas que evolucionan en el tiempo de forma continua (se modelan por medio de ecuaciones diferenciales)
2. Sistemas que evolucionan en el tiempo de forma discreta (se modelan por medio de mapas iterados)

En el caso de sistemas dinámicos de evolución continua en el tiempo son posibles dos tipos de modelos:

1. Con ecuaciones diferenciales ordinarias (cuando existe una única variable de evolución)
2. Con ecuaciones diferenciales parciales (cuando existe más de una variable de evolución)

En este trabajo no se tratarán sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales, solo se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias y además autónomas, es decir, que no dependan explícitamente del tiempo. En general, un sistema de este tipo puede escribirse por medio del sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{dx^{(1)}}{dt} &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) \\
 \frac{dx^{(2)}}{dt} &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx^{(N)}}{dt} &= F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

el cual puede re-escribirse en forma vectorial como

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \tag{1.2}$$

donde \mathbf{x} es un vector N -dimensional.

En la Figura 1.1 se presenta la trayectoria seguida por el estado del sistema (para el caso particular $N = 3$), cuando éste evoluciona en el tiempo. El espacio $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ en la figura es referido al espacio de fases y la trayectoria seguida por el sistema se denomina órbita. En la literatura, es común referirse a un sistema dinámico continuo en el tiempo como flujo. Para el caso de sistemas que

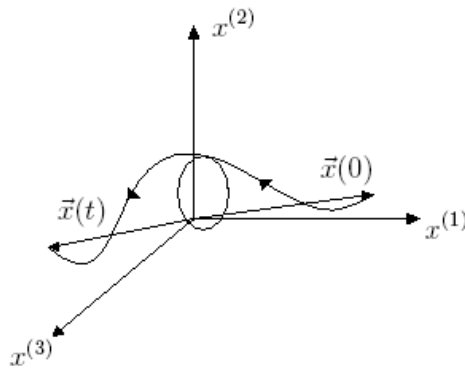


Figura 1.1: Órbita en el espacio de fases tridimensional ($N = 3$).

evolucionan en el tiempo de forma discreta, los mapas iterados pueden escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (1.3)$$

donde n denota la variable temporal y \mathbf{x}_n tiene dimensión N . Dado un estado inicial \mathbf{x}_0 , se obtiene el estado en el tiempo $n = 1$ por $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$. Teniendo determinado x_1 se puede determinar el estado en $n = 2$ por $\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ y así sucesivamente. Entonces, dada una condición inicial \mathbf{x}_0 se genera la órbita o trayectoria del sistema de tiempo discreto $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots$.

Los sistemas continuos y discretos se encuentran relacionados, ya que como se mostrará en la siguiente sección un sistema continuo de dimensionalidad N puede ser reducido a un mapa de tiempo discreto de dimensionalidad $(N - 1)$ por medio de la técnica de secciones de Poincaré.

Es razonable pensar, que la complejidad de la posible estructura de las órbitas aumente proporcionalmente con la dimensionalidad del sistema, entonces la pregunta es que tan grande debe ser N para que sea posible la aparición de caos? La respuesta para el caso de N ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden es que $N \geq 3$ [17].

En el caso de mapas iterados, antes de considerar la dimensionalidad necesaria para la ocurrencia de caos, debe hacerse una distinción entre mapas invertibles y no-invertibles. Se dice que un mapa \mathbf{M} es invertible, sí dado \mathbf{x}_{n+1} puede encontrarse el valor de \mathbf{x}_n de la forma

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}),$$

donde \mathbf{M}^{-1} es la inversa de la matriz \mathbf{M} . En caso contrario, se dice que el mapa es no-invertible. Cuando el mapa es invertible, no puede existir caos a menos que $N \geq 2$ y en el caso de mapas no-invertibles el caos puede ocurrir incluso cuando $N = 1$ [17].

1.3 Método de secciones de Poincaré

Frecuentemente es útil reducir un sistema de tiempo continuo (o flujo) a un mapa de tiempo discreto, por medio de una técnica llamada método de secciones de Poincaré. Al considerar un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias y autónomas (1.1), el mapa de Poincaré representa una reducción del flujo N -dimensional a un mapa $(N - 1)$ -dimensional. El caso particular $N = 3$ ilustra de manera clara el método (ver Figura 1.2). Se considera una solución del sistema de ecuaciones (1.1) en el caso general (órbita dibujada). Ahora se escoge alguna superficie $(N - 1)$ -dimensional en el espacio de fases N -dimensional y se observan las intersecciones de la órbita con la superficie. En el caso particular de la Figura 1.2, tal superficie es el plano $x^{(3)} = K$, sin embargo, en general la elección de tal superficie depende del problema en particular.

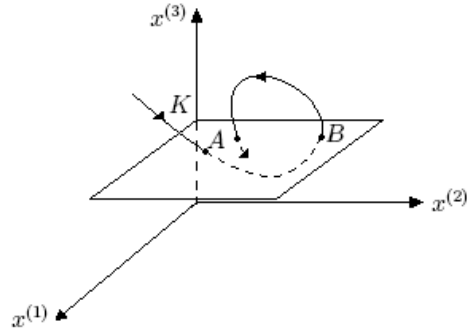


Figura 1.2: Sección de Poincaré para una órbita tridimensional.

Los puntos A y B representan dos cruces sucesivos de la órbita con la superficie. El punto A únicamente determina al punto B , ya que este puede ser usado como condición inicial en (1.1) para la determinación de B . De igual forma B determina únicamente a A , ya que la invertibilidad se sigue del teorema de existencia y unicidad. Entonces el mapa de Poincaré en la Figura 1.2 representa un mapa bidimensional invertible, que transforma las coordenadas $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ del n -ésimo corte de la sección de Poincaré a las nuevas coordenadas $(x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)})$ en el $(n+1)$ -ésimo corte.

1.4 Atractores

En los sistemas hamiltonianos tal y como ocurre en las ecuaciones de Newton, para el movimiento de partículas sin fricción, es posible escoger las variables del espacio de fases (las variables canónicas de posición y momentum) tales que el volumen en este espacio se conserve bajo la evolución temporal. Esto es, si se escoge una superficie $(N-1)$ -dimensional cerrada inicial S_0 (en $t=0$) del espacio N -dimensional de fases, y se permite evolucionar cada punto de la superficie S_0 , usándolo como condición inicial en la ecuación (1.2), entonces la superficie cerrada

S_0 evolucionará a una superficie cerrada S_t después de un tiempo t , y el volumen N -dimensional $V(0)$ de la region encerrada por S_0 será el mismo que el de la region encerrada por S_t , $V(t) = V(0)$. El sistema que satisface la conservación del volumen se denomina conservativo. Por otra parte, si el flujo no preserva el volumen y no existe un cambio de variables que permita tal conservación, el sistema se denomina no-conservativo. Por el teorema de la divergencia, se tiene que

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S_t} \nabla \cdot \mathbf{F} d^N x. \quad (1.4)$$

Si se cumple $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, en alguna región del espacio (esto significa una contracción del volumen en tal región), entonces al sistema se le llama sistema disipativo. Los sistemas disipativos están caracterizados por la presencia de conjuntos atractores o atractores en el espacio de fases. Estos son subconjuntos acotados hacia los cuales las trayectorias convergen con la evolución temporal.

De igual forma, en el caso de mapas iterados también es posible hablar de mapas conservativos y disipativos. Un mapa N -dimensional conservativo, es un mapa en el cual el volumen del espacio de fases N -dimensional se conserva en cada iteración o en el cual, es posible realizar un cambio de coordenadas para que el volumen se conserve en cada iteración. Un mapa preserva el volumen, si la magnitud del determinante de su matriz jacobiana de derivadas parciales es uno,

$$J(\mathbf{x}) \equiv |\det[\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}]| = 1. \quad (1.5)$$

Por ejemplo, para un sistema hamiltoniano de tiempo continuo la sección de Poincaré formada por la escogencia de una de las N -variables canónicas como una constante, preserva el volumen en las restantes $(N - 1)$ -variables canónicas. Por otra parte, si $J(\mathbf{x}) < 1$ en alguna región, entonces se dice que el mapa es disipativo y al igual que para los flujos posee atractores. En la Figura 1.3 se ilustra el mapa de la sección de Poincaré para un flujo tridimensional con un ciclo límite. Se observa que para el mapa los puntos A_1 y A_2 constituyen juntos un atractor. Esto es, la órbita del mapa bidimensional $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n)$ tienen una

secuencia $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots$ la cual, converge al conjunto formado por el par de puntos A_1 y A_2 , entre los cuales, el mapa orbita alternamente en el límite $n \rightarrow \infty$. Es una

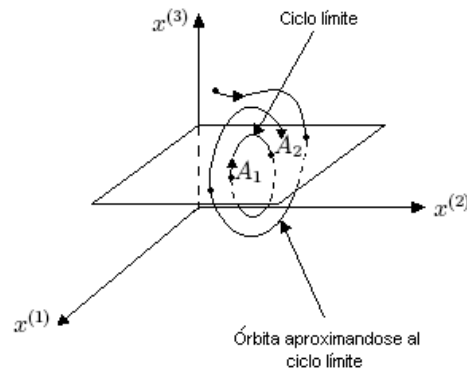


Figura 1.3: Sección de Poincaré para una órbita tridimensional con un ciclo límite.

característica de la dinámica caótica, que el atractor resultante frecuentemente tenga una estructura geométrica mucho mas compleja que la citada en el ejemplo anterior. De hecho, de acuerdo con la definición estándar de dimensión, estos atractores comúnmente tienen un valor para su dimensión que no es entero. En la terminología de Mandelbrot, tales objetos geométricos se denominan fractales. Cuando un atractor es fractal, este se denomina atractor extraño [22].

1.5 Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una característica de los sistemas en los cuales la dinámica es caótica, es que éstos exhiben una dependencia de carácter exponencial con las condiciones iniciales. Al considerar dos condiciones iniciales cercanas $\mathbf{x}_1(0)$ y $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \Delta(0)$, puede suponerse que éstas están evolucionando en el tiempo, por medio de un sistema dinámico continuo, el cual conduce a las órbitas de $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ como se observa en la Figura 1.4.

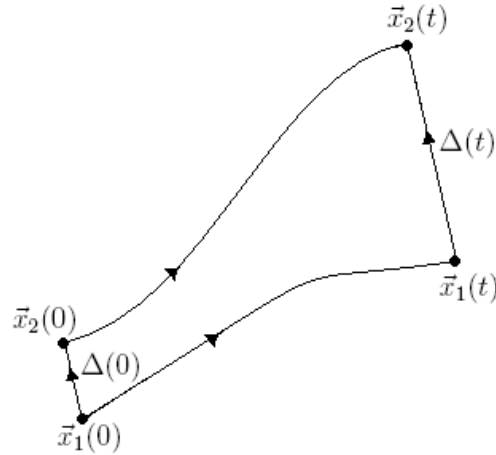


Figura 1.4: Evolución de dos trayectorias cercanas en el espacio de fases.

En el tiempo t , la separación de las dos órbitas es $\Delta(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$. Si en el límite $|\Delta(0)| \rightarrow 0$, después de un tiempo lo suficientemente grande, las órbitas permanecen acotadas y la diferencia entre las soluciones $|\Delta(t)|$ crece de forma exponencial, para una orientación típica del vector $|\Delta(0)|$ (es decir, $|\Delta(t)|/|\Delta(0)| \sim \exp(ht)$, $h > 0$), entonces se dice que el sistema exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales y que es caótico. Se ha impuesto la condición que las órbitas permanezcan acotadas, ya que si las órbitas tienden a infinito, es relativamente simple para sus distancias divergir exponencialmente.

El hecho de que el caos haga que las predicciones después de un cierto tiempo se hagan difíciles y esencialmente imposibles en el sentido práctico, tiene consecuencias importantes. En efecto, el trabajo de Lorenz fue motivado por el problema de la predicción climática. Lorenz se concentró en el problema de si es posible una predicción a largo plazo de las condiciones atmosféricas. Su demostración de que la conducción térmica por convección puede resultar caótica, formula la posibilidad de que la atmósfera sea caótica también. Entonces, incluso la más pequeña perturbación, tal como el aleteo de una mariposa, eventualmente tendrá grandes efectos por lo que la predicción a largo plazo se hará prácticamente imposible.

1.6 Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov cuantifican la expansión y contracción típicas de los atractores y otros conjuntos invariantes. Primero, se considera el caso de un mapa iterado \mathbf{M} . Sea \mathbf{x}_0 una condición inicial y \mathbf{x}_n con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ la correspondiente órbita. Si se asume un desplazamiento infinitesimal de \mathbf{x}_0 en la dirección del vector tangente \mathbf{y}_0 , entonces la evolución del vector tangente está dada por

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{y}_n, \quad (1.6)$$

donde \mathbf{DM} es el determinante del jacobiano de la matriz \mathbf{M} . El vector \mathbf{y}_{n+1} determina la evolución del desplazamiento infinitesimal de la órbita, medido desde la órbita no perturbada \mathbf{x}_n . En particular, $\mathbf{y}_n/|\mathbf{y}_0|$ da la dirección del desplazamiento infinitesimal de la órbita y $|\mathbf{y}_n|/|\mathbf{y}_0|$ es el factor por el cual el desplazamiento infinitesimal crece ($|\mathbf{y}_n| > |\mathbf{y}_0|$) o disminuye ($|\mathbf{y}_n| < |\mathbf{y}_0|$). De (1.6) se tiene $\mathbf{y}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}_0$ donde

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{x}_0).$$

Se define el exponente de Lyapunov para una condición inicial \mathbf{x}_0 y una orientación inicial del desplazamiento infinitesimal dada por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$ como

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(|\mathbf{y}_n|/|\mathbf{y}_0|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si la dimensión del mapa es N , entonces deben existir N o menos exponentes de Lyapunov distintos para un \mathbf{x}_0 dado, los cuales satisfacen

$$h_1(\mathbf{x}_0) \geq h_2(\mathbf{x}_0) \geq \dots \geq h_N(\mathbf{x}_0).$$

Frecuentemente, en la literatura se hace referencia a los números de Lyapunov $\lambda_j(\mathbf{x}_0)$, estos últimos se encuentran expresados en términos de los exponentes de Lyapunov como sigue

$$\lambda_j(\mathbf{x}_0) = \exp[h_j(\mathbf{x}_0)].$$

Un sistema dinámico discreto se define como caótico si tiene al menos un exponente de Lyapunov mayor que cero, es decir si $h_1 > 0$.

Para el caso de sistemas dinámicos continuos, los resultados anteriores pueden obtenerse de forma análoga. En este caso, la ecuación (1.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(|\mathbf{y}(t)|/|\mathbf{y}_0|) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{u}_0|, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $d\mathbf{y}(t)/dt = \mathbf{DF}[\mathbf{x}(t)] \cdot \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$, y $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t)$ es la matriz solución de la ecuación

$$d\hat{\mathbf{O}}/dt = \mathbf{DF}[\mathbf{x}(t)] \cdot \hat{\mathbf{O}}$$

sujeta a la condición

$$\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{I}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. De lo anterior se tiene que $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{y}(0)$, donde $\hat{\mathbf{O}}$ desempeña el papel de \mathbf{DM}^n en el tratamiento para mapas [17].

Una forma práctica de calcular el máximo exponente de Lyapunov, fue presentada por Benettin *et.al.* [4]. Este método, consiste en renormalizar el vector tangente $|\mathbf{y}|$ (cada $\tau_j = j\tau$ con $j = 0, 1, 2, \dots$ donde τ es algún intervalo de tiempo arbitrario no muy grande), y dividirlo por su magnitud α_j para transformarlo en un vector de magnitud 1. Almacenando los α_j puede obtenerse el mayor de los exponentes de Lyapunov como

$$h_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l\tau} \sum_{j=1}^l \ln \alpha_j, \quad (1.9)$$

para un l lo suficientemente grande, h_1 satisface

$$h_1 \simeq \frac{1}{l\tau} \sum_{j=1}^l \ln \alpha_j.$$

El procedimiento de Benettin *et.al.* será el método utilizado en este trabajo para calcular los exponentes de Lyapunov.

2 CAOS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS

2.1 Sistemas Hamiltonianos

En la formulación hamiltoniana, la dinámica del sistema está descrita por la función hamiltoniana

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

y el estado del sistema queda determinado completamente por su posición \mathbf{q} y por su momentum \mathbf{p} . Los vectores \mathbf{p} y \mathbf{q} tienen la misma dimensión N , la cual corresponde al número de grados de libertad del sistema.

Las ecuaciones de Hamilton determinan la trayectoria $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ que sigue el sistema en el espacio de fases $2N$ -dimensional y están dadas por

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.1)$$

En el caso especial en que el hamiltoniano no dependa explícitamente del tiempo $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, se cumple

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Identificando el valor del hamiltoniano con la energía E del sistema, se observa que la energía se conserva para sistemas independientes del tiempo, $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) =$ cte.

2.2 Estructura Simpléctica

Es posible escribir las ecuaciones (2.1) en la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

tomando \mathbf{x} como el vector $2N$ -dimensional

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_N \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.3)$$

con

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{I}_N es la matriz identidad N -dimensional, \mathbf{O}_N es la matriz $N \times N$ de ceros y

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial H / \partial \mathbf{p} \\ \partial H / \partial \mathbf{q} \end{bmatrix}.$$

Una de las propiedades básicas de las ecuaciones de Hamilton es que preservan el volumen $2N$ -dimensional en el espacio de fases. Esto se sigue de tomar la divergencia de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en la ecuación (2.2), de lo cual se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Entonces, si se considera una superficie cerrada inicial S_0 en el espacio de fases $2N$ -dimensional y se deja que cada punto de esta superficie evolucione en el tiempo, se obtendrá para cada instante de tiempo t una nueva superficie cerrada S_t , la cual contiene el mismo volumen que S_0 . Esto es

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} d^{2N} \mathbf{x} = \oint_{S_t} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} d^{2N} \mathbf{x} = 0.$$

Como una consecuencia de este resultado, puede decirse que los sistemas hamiltonianos no poseen atractores. Esta incompresibilidad del volumen en el espacio de fases para los sistemas hamiltonianos, se denomina teorema de Liouville.

Una de las propiedades estructurales básicas de las ecuaciones de Hamilton es que estas son simplécticas. Esto significa, que si se consideran tres órbitas que están infinitesimalmente separadas unas de las otras, $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$, $(\mathbf{p}(t) + \delta\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t))$ y $(\mathbf{p}(t) + \delta\mathbf{p}'(t), \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}'(t))$, donde $\delta\mathbf{p}$, $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}'$ y $\delta\mathbf{q}'$ son vectores infinitesimales N -dimensionales, entonces la cantidad

$$\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}' - \delta\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{p}' ,$$

la cual denominaremos area simpléctica, es independiente del tiempo

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}' - \delta\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{p}') = 0 . \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5), se interpreta diciendo que la suma algebraica de las areas de los paralelogramos formados por la proyección de los vectores $\delta\mathbf{p}$, $\delta\mathbf{q}'$, $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}'$ sobre el plano (q_i, p_i) se conserva,

$$\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}' - \delta\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N (\delta p_i \delta q'_i - \delta q_i \delta p'_i) .$$

La expresión anterior, es la forma diferencial de la integral invariante de Poincaré

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^N \oint_{\gamma} p_i dq_i , \quad (2.6)$$

donde la integral se realiza sobre una trayectoria cerrada γ en el espacio (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . La integral invariante de Poincaré es independiente del tiempo si la trayectoria cerrada γ se toma a lo largo del flujo en el espacio de fases. La generalización de la invariancia de $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$ a través del flujo, es el teorema integral de Poincaré-Cartan.

El teorema integral de Poincaré-Cartan establece que la integral de acción alrededor de la trayectoria Γ_1 , $\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt)$, es la misma para cualquier otra trayectoria Γ_2 que encierre el tubo de trayectorias (ver Figura 2.1 para el caso $N = 1$),

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) .$$

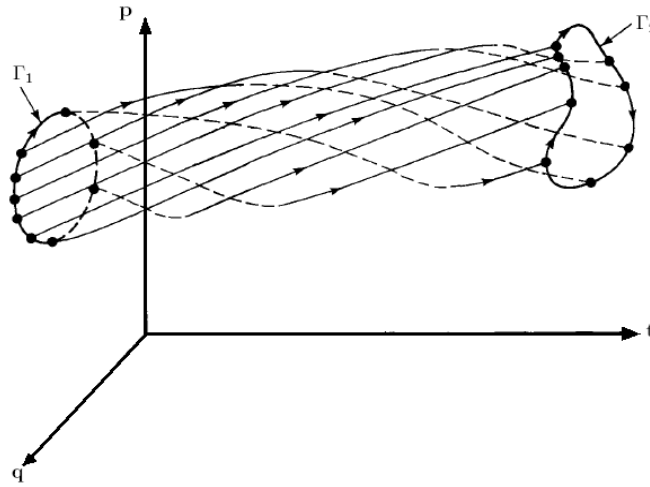


Figura 2.1: Tubo de trayectorias.

Si Γ_1 y Γ_2 se toman para dos tiempos diferentes pero constantes, entonces se recupera la integral (2.6). En el caso en que H no dependa del tiempo, el hamiltoniano es una constante de movimiento y si además se escoge Γ_1 sobre la superficie $2N$ -dimensional $H = \text{cte}$, entonces se tiene que

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (2.7)$$

2.3 Transformaciones canónicas

Al introducir un cambio arbitrario de variables $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, la forma hamiltoniana de las ecuaciones puede no preservarse. Los cambios de coordenadas que preservan la forma hamiltoniana de las ecuaciones se denominan canónicos, y los vectores de posición y momentum en términos de los cuales se tiene un sistema en la forma hamiltoniana (2.1), se denominan canónicos conjugados. Específicamente, si \mathbf{p} y \mathbf{q} satisfacen (2.1), entonces un cambio canónico de variables a un nuevo conjunto de variables canónicas conjugadas

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{t}) \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{t}),$$

conduce a las ecuaciones de evolución de la forma

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{q}}},$$

donde \bar{H} es un nuevo hamiltoniano para el sistema. Una forma de especificar un cambio canónico de variables, se logra introduciendo una función generatriz $S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, \mathbf{t})$, la cual es una función de la antigua posición \mathbf{q} y del nuevo momentum $\bar{\mathbf{p}}$. En términos de $S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, \mathbf{t})$, el cambio de variables queda especificado por

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = -\frac{\partial S(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

esta transformación es simpléctica, es decir

$$\delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}' - \delta \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{p}' = \delta \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \bar{\mathbf{q}}' - \delta \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \bar{\mathbf{p}}'.$$

El nuevo hamiltoniano queda expresado términos de la función generatriz, por medio de la relación

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \partial S / \partial t. \quad (2.9)$$

2.4 Mapas hamiltonianos

Cuando el hamiltoniano no tiene dependencia explícita del tiempo, el movimiento del sistema está restringido a la superficie $(2N - 1)$ -dimensional $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Aplicando el método de secciones de Poincaré se obtiene un mapa $(2N - 2)$ -dimensional, escogiendo como sección de superficie, el plano $q_1 = K_0 = \text{cte}$. Suponiendo que se tienen los valores de las $2N - 2$ cantidades $(p_2, p_3, \dots, p_N, q_2, q_3, \dots, q_N)$ en este plano, puede definirse como $\hat{\mathbf{x}}$ el vector que especifica los valores de estas coordenadas en la superficie de sección.

Para encontrar p_1 se resuelve la ecuación $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Esta ecuación por lo general es cuadrática en p_1 , sin embargo es posible determinar un único valor de p_1 ,

al especificar $\hat{\mathbf{x}}_n$ como el vector de coordenadas $(p_2, p_3, \dots, p_N, q_2, q_3, \dots, q_N)$ en el tiempo n en el cual $q_1 = K_0$ y $p_1 > 0$. Es decir, solo se cuentan las superficies de sección las cuales cruzan $q_1 = K_0$ desde $q_1 < K_0$ a $q_1 > K_0$. Con esta restricción, la especificación de $\hat{\mathbf{x}}_n$ determina un único punto en el espacio de fases. Este punto, introducido en las ecuaciones de Hamilton en el siguiente intervalo de tiempo con $q_1 = K_0$ y $p_1 > 0$ determina el nuevo punto $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$. Aplicando este procedimiento sucesivamente se determina un mapa de la forma

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{M}(\hat{\mathbf{x}}_n).$$

Puede demostrarse que este mapa $(2N - 2)$ -dimensional es simpléctico en las coordenadas canónicas restantes $\hat{\mathbf{p}} = (p_2, p_3, \dots, p_N)$ y $\hat{\mathbf{q}} = (q_2, q_3, \dots, q_N)$. Esto implica que el mapa también conserva el volumen $(2N - 2)$ -dimensional. Una consecuencia importante de los mapas simplécticos es que en estos los exponentes de Lyapunov ocurren en pares $\pm h_1, \pm h_2, \dots$, luego para cada exponente de Lyapunov positivo existe uno negativo de igual magnitud [17].

2.5 Sistemas Integrables

Una función $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, se dice que es una constante de movimiento para un sistema hamiltoniano H cuando $\mathbf{p}(t)$ y $\mathbf{q}(t)$ evolucionan en el tiempo por medio de las ecuaciones de Hamilton (2.1) y el valor de la función f no cambia, $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{constante}$. Más generalmente diferenciando $f(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ con respecto al tiempo y asumiendo que en el hamiltoniano no hay dependencia explícita con el tiempo, se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

La expresión que aparece al lado derecho de la segunda igualdad se denomina corchete de Poisson de f y H , y se escribe como $[f, H]$. Entonces, la condición para que f sea una constante de movimiento para un sistema hamiltoniano inde-

pendiente del tiempo, es que su corchete de Poisson con H sea cero,

$$[f, H] = 0.$$

El hamiltoniano es una constante de movimiento, ya que $[H, H] = 0$. Un sistema hamiltoniano independiente del tiempo se dice que es integrable, si tiene N constantes independientes de movimiento $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, que satisfacen

$$[f_i, f_j] = 0, \quad (2.10)$$

para todo i y j .

Cuando la condición (2.10) se cumple para todo i y j , entonces se dice que las N constantes de movimiento f_i están en involución. Las constantes de movimiento f_i son independientes si ninguna de ellas puede expresarse como una función de las otras $(N - 1)$ constantes. El hecho de que un sistema integrable tenga N constantes independientes de movimiento, implica que la trayectoria del sistema en el espacio de fases, está restringida a la superficie N -dimensional

$$f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.11)$$

donde las k_i son N constantes. La condición de que las N constantes independientes f_i estén en involución (2.10), restringe la topología de la superficie (2.11) a ser un toro N -dimensional [2]. En la Figura 2.2, se muestra una órbita en el toro para el caso $N = 2$.

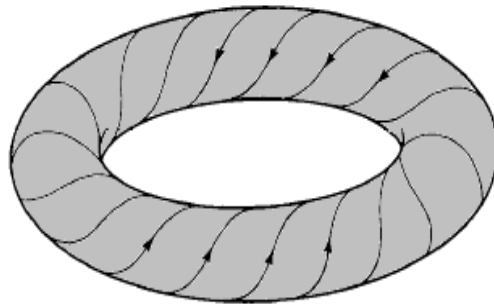


Figura 2.2: Órbita en un toro 2-dimensional.

Dado un sistema integrable, es posible realizar una transformación canónica $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$, tal que el nuevo hamiltoniano \bar{H} dependa solo de $\bar{\mathbf{p}}$ y no de $\bar{\mathbf{q}}$. Una posibilidad, es escoger las constantes de movimiento mismas como las N componentes de $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{p}_i = f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, debido a que las f_i son constantes, $d\bar{\mathbf{p}}/dt = \partial\bar{H}/\partial\bar{\mathbf{q}} = 0$ y entonces $\bar{H} = \bar{H}(\bar{\mathbf{p}})$. De hecho, es posible construir muchos conjuntos equivalentes de constantes de movimiento como N funciones independientes de las N constantes f_i . De todas las posibles elecciones, una en particular es especialmente conveniente, esta escogencia es la de las variables ángulo-acción

$$(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) = (\mathbf{I}, \theta),$$

con

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.12)$$

donde γ_i denota N trayectorias irreducibles en el N -toro, cada una de las cuales se envuelve alrededor del toro en N direcciones angulares, que pueden ser usadas para parametrizar los puntos del toro (Ver Figura 2.3). Es importante resaltar

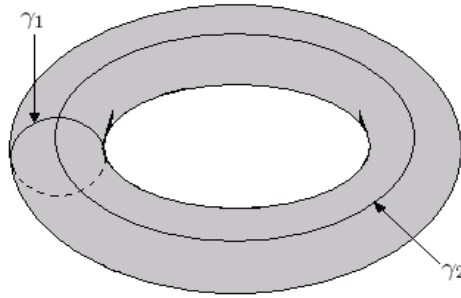


Figura 2.3: Dos trayectorias irreducibles en un toro 2-dimensional.

que las posibles deformaciones en la trayectoria γ_1 en el toro, no cambian los valores de las integrales en (2.12) debido al teorema de Poincaré-Cartan (2.7).

La coordenada θ es una coordenada tipo ángulo, porque en un circuito que sigue una de las trayectorias irreducibles γ_i alrededor del toro, la variable θ_i se incrementa en 2π , mientras que las otras variables θ_j con $j \neq i$ retornan a sus valores originales. Esto se puede demostrar mediante el cambio de variables $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \theta)$,

en términos de la función generatriz (2.8)

$$\theta = \partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{I}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{p} = \partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}. \quad (2.14)$$

Denotando $\Delta_i \theta$ el cambio de θ en un circuito alrededor de la trayectoria irreducible γ_i , y $\Delta_i S$ el correspondiente cambio en la función generatriz en un circuito, de (2.14) se tiene

$$\Delta_i S = \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 2\pi \mathbf{I}_i,$$

y de (2.13)

$$\Delta_i \theta = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \Delta_i S = 2\pi \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} I_i,$$

ó

$$\Delta_i \theta_j = 2\pi \delta_{ij}.$$

donde $\delta_{ij} \equiv 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} \equiv 0$ si $i \neq j$. El nuevo hamiltoniano en coordenadas ángulo-acción es, por su construcción, independiente de θ , y entonces las ecuaciones de Hamilton se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \bar{H}(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \equiv \omega(\mathbf{I}), \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0) \quad \text{y} \quad \theta(t) = \theta(0) + \omega(\mathbf{I})t. \quad (2.15)$$

Entonces, puede interpretarse $\omega(\mathbf{I}) = \partial \bar{H}(\mathbf{I}) / \partial \mathbf{I}$, como un vector velocidad angular para las trayectorias en el N -toro. Las trayectorias en un toro son cuasi-periódicas con N -frecuencias (un movimiento cuasi-periódico puede ser entendido como una mezcla de movimientos periódicos con diferentes frecuencias fundamentales), si no existe un vector de enteros $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ tal que

$$\mathbf{m} \cdot \omega = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Asumiendo una variación típica suave de \bar{H} con \mathbf{I} , la condición $\mathbf{m} \cdot \omega = 0$ con $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ solo puede ser satisfecha por un conjunto contable de \mathbf{I} . Entonces, si se

selecciona un punto aleatorio con probabilidad uniforme en el espacio de fases, la probabilidad es 1 de que el punto escogido este en un toro para el cual la órbita sea cuasi-periódica con N -frecuencias y rellene el toro. Por lo tanto, para sistemas integrables se puede ver que el espacio de fases está completamente ocupado por toros N dimensionales, muchos de los cuales alternamente se llenan por órbitas cuasi periódicas de N frecuencias. En contraste, con el caso de N frecuencias cuasi-periódicas está el caso de movimiento periódico, donde las órbitas en el toro N dimensional se cierran sobre si mismas. En el caso

$$\omega = \mathbf{m}\omega_0 \quad (2.17)$$

donde \mathbf{m} es otra vez el vector de enteros y ω_0 es un escalar, la órbita se cierra sobre si misma después de m_1 circuitos en θ_1 , m_2 circuitos en θ_2 , \dots . Otra vez, asumiendo una variación suave de \bar{H} con \mathbf{I} , se tiene que para sistemas integrables el conjunto de toros que satisfacen (2.17) tienen órbitas periódicas. Entonces arbitrariamente cerca a cualquier toro que tiene N frecuencias cuasi-periódicas existe un toro en el cual las órbitas son periódicas.

2.6 El teorema KAM

Una pregunta fundamental concerniente a los sistemas hamiltonianos, es qué tanto prevalece la integrabilidad de estos? Una conjetura extrema es que la integrabilidad siempre tiene lugar y cualquier dificultad encontrada en la obtención de la solución a algún problema dado, solamente surge por la incapacidad para determinar las N constantes independientes de movimiento, las cuales seguramente deben existir. Otra conjetura, la cual es esencialmente la opuesta de ésta, es que dado algún hamiltoniano integrable $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, al alterarlo un poco por la adición de una perturbación

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \varepsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (2.18)$$

entonces debe esperarse que por la perturbación $H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, todas las constantes de movimiento para el sistema integrable, $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, excepto la constante de energía, $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, se destruyan inmediatamente cuando $\varepsilon \neq 0$. Si esta segunda conjetura fuese cierta, entonces para pequeños ε , las órbitas deberían inicialmente aproximarse a las órbitas del sistema integrable, manteniéndose cerca del toro no perturbado que existe para todo t cuando $\varepsilon = 0$. Eventualmente, sin embargo, si la órbita continua evolucionando en el tiempo, puede vagar ergódicamente hacia cualquier parte de la superficie de energía.

Estos dos puntos de vista tienen soporte en la observación experimental. Por una parte el sistema solar parece ser fuertemente estable. En particular, desde su formación la tierra ha mantenido su posición relativa con el sol tal que su clima ha sido favorable para la creación de vida. Entonces, a pesar de la perturbación causada por la influencia gravitacional de los otros planetas, la órbita de la tierra se ha comportado como hubiese sido sin la presencia de los otros planetas (en este caso el sistema es integrable y se obtienen las órbitas elípticas de Kepler para la tierra alrededor del sol). Por otra parte en soporte a la segunda conjetura, se tienen las predicciones acertadas de la mecánica estadística. En mecánica estadística se considera un sistema hamiltoniano con un gran número de grados de libertad ($N \gg 1$), bajo la premisa fundamental de que el sistema tiene en cualquier instante de tiempo la misma probabilidad de estar localizado en cualquier punto de la superficie de energía (el movimiento es ergódico en la superficie de energía). Esto no sería posible, si existieran algunas constantes de movimiento que restringieran la órbita del sistema. El éxito de la mecánica estadística en todos los casos para los cuales puede ser razonablemente aplicada puede interpretarse como una evidencia que soporta la validez de esta premisa fundamental en una gran variedad de sistemas con $N \gg 1$.

Dada la discusión anterior no debería ser sorprendente encontrar alguna situación real que esté en medio de estos dos extremos. La solución de la pregunta básica de qué tanto prevalece la integrabilidad, vino sólo hasta después de los rigurosos

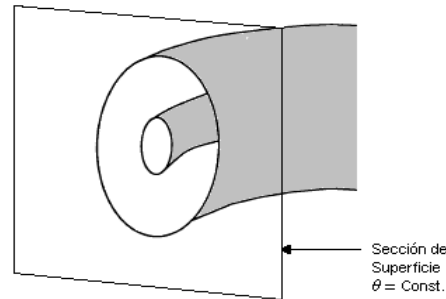


Figura 2.4: Sección de superficie para un sistema integrable.

trabajos matemáticos de Kolmogorov, Arnold y Moser (KAM) y los subsecuentes estudios computacionales de caos e integrabilidad en sistemas hamiltonianos. La pregunta básica considerada por Kolmogorov, Arnold y Moser fue qué ocurre cuando un sistema hamiltoniano se perturba. La investigación fue iniciada por Kolmogorov (1954) quien conjeturó lo que podría ocurrir con la adición de la perturbación. Este trabajo, fue completado por Arnold y Moser, el resultado obtenido se llama teorema KAM.

El teorema KAM esencialmente establece que bajo condiciones muy generales para un ε pequeño, muchos de los toros del hamiltoniano integrable no perturbado sobreviven. Se dice que un toro del sistema no perturbado con vector frecuencia ω_0 sobrevive la perturbación, si existe un toro del sistema perturbado ($\varepsilon \neq 0$) que tiene como vector frecuencia $\omega(\varepsilon) = k(\varepsilon)\omega_0$, donde $k(\varepsilon)$ tiende a 1 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tal que la superficie toroidal perturbada con frecuencia $\omega(\varepsilon)$ tiende continuamente al toro no perturbado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces, escribiendo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ los vectores frecuencia perturbados $\omega(\varepsilon)$ y no perturbados ω_0 tienen la misma relación de frecuencias de sus componentes, $\omega_{0j}/\omega_{01} = \omega_j(\varepsilon)/\omega_1(\varepsilon)$ para $j = 2, 3, \dots, N$. De acuerdo al teorema KAM, para pequeños ε , el volumen del espacio de fases del sistema perturbado no ocupado por los toros sobrevivientes es pequeño y tiende a cero cuando ε tiende a cero. Usualmente solo un número finito de órbitas sobreviven a la perturbación (puede observarse el mapa resul-

tante tomando la superficie de sección de Poincaré de un sistema con dos grados de libertad para el caso integrable de la Figura 2.4) mientras que otras se desintegran y dan lugar a comportamientos caóticos (en este caso el mapa resultante será una distribución ergódica de puntos como resultado de la evolución de una única órbita).

3 OBJETOS COMPACTOS Y RELATIVIDAD GENERAL

3.1 Objetos compactos

Se entienden por objetos compactos: las estrellas de neutrones, los agujeros negros y las enanas blancas (no serán estudiadas), tales objetos nacen cuando las estrellas normales mueren, es decir, cuando gran parte de su combustible nuclear se ha consumido. Dicho de otra forma, estos tres tipos de objetos representan los posibles estados finales de las estrellas normales.

Existen dos características principales que distinguen a los objetos compactos de otros objetos astrofísicos. Primero, los objetos compactos no pueden quemar combustible nuclear, puesto que éste ya fue consumido en la fase subsecuente a la secuencia principal de la estrella, por lo tanto, la presión que deben ejercer para contrarrestar el colapso gravitacional no puede ser una presión térmica. En lugar de esto, las enanas blancas soportan el colapso por medio de la presión de electrones degenerados, mientras que las estrellas de neutrones soportan el colapso por la presión de neutrones degenerados. Por otra parte, en los agujeros negros no existen procesos que permitan el balance con el colapso, es decir, estas son estrellas colapsadas a singularidades debido a su propio campo gravitacional.

La segunda característica distintiva de los objetos compactos es que, para su reducido tamaño (comparado con el de estrellas normales) poseen campos gravi-

tacionales intensamente fuertes, razón por la cual, la relatividad general toma vital importancia en el estudio de estos objetos, diferenciándose significativamente de la mayoría de las estrellas, cuyo comportamiento es bien explicado por la física newtoniana [20]. Esta última se desarrolla bajo la geometría euclidiana, mientras que la relatividad general se construye en el marco de la geometría de Riemann. En las siguientes secciones se presenta una breve introducción a la geometría riemanniana y su relación con la relatividad.

3.2 El tensor métrico

En el espacio tiempo de Riemann se introduce un tensor métrico, usualmente denotado $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$. El tensor métrico es simétrico, covariante y de orden 2, además es una función de las coordenadas espacio temporales. Debido a la simetría de dicho tensor, éste tiene solo diez componentes independientes. A cada componente del tensor métrico se le denomina coeficiente métrico. El cuadrado de la distancia entre dos puntos cercanos del espacio tiempo puede expresarse en términos del tensor métrico y se define en la forma

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

donde se ha empleado la convención de suma: Si en una fórmula hay un superíndice y un subíndice repetidos, se entiende que hay suma sobre los mismos. La anterior expresión es algunas veces llamada el elemento de línea. Los espacios Riemannianos se caracterizan por tener elementos de línea de la forma (3.1).

Cuando se utilizan coordenadas cartesianas tridimensionales el cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos en el espacio tridimensional Euclidiano está dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.2)$$

En el espacio plano cuadridimensional Minkowskiano, cuando se utilizan coorde-

nadas cartesianas el cuadrado de la distancia esta dado por

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (3.3)$$

donde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y c es la velocidad de la luz.

Estos espacios son casos especiales del espacio de Riemann. El tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ de un espacio Riemanniano curvado, no puede reducirse globalmente por medio de una transformación de coordenadas a un tensor métrico Minkowskiano (3.3). En un espacio Riemanniano el tensor métrico puede tener una forma complicada en la que sus componentes no son necesariamente constantes, siendo usualmente funciones de las coordenadas.

3.3 Ecuaciones de Einstein–Maxwell

Las ecuaciones de Einstein–Maxwell son una generalización de las ecuaciones de campo gravitacional newtonianas y las ecuaciones de Maxwell, que reducen a estas en un limite apropiado (límite de campo débil). En su forma mas compacta, estas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu}, & T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\gamma}F^{\gamma}_{\nu} - \frac{1}{4}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}) \\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) &= 0, & F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-impulso del campo electromagnético, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico, g el determinante del tensor métrico y $F^{\mu\nu}$ el tensor de campo electromagnético (los índices μ y ν toman los valores 0, 1, 2 y 3). Las anteriores ecuaciones representan un sistema de diez ecuaciones diferenciales de segundo orden, parciales, acopladas y no lineales.

El tensor de Einstein se define como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.5)$$

con $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ la traza del tensor de Ricci, también llamada escalar de curvatura. Es necesario aclarar que el tensor de Ricci está expresado solamente en función de derivadas y productos de derivadas del tensor $g_{\mu\nu}$ (para ver las definiciones del tensor de Ricci, el escalar de curvatura, etc. puede consultarse [24]). En el caso del espacio vacío, el tensor de energía-impulso es cero y las ecuaciones de Einstein reducen a

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

o de forma equivalente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.7)$$

Encontrar una solución de las ecuaciones de Einstein es encontrar un tensor métrico $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ que satisfaga el sistema de ecuaciones (3.4). Debido a la complejidad de las ecuaciones, no se conoce solución general de las ecuaciones de Einstein. Para obtener algunas soluciones se ha hecho necesario imponer algunos tipos de simetrías.

3.4 Forma general de una métrica estacionaria axial-simétrica

El carácter estacionario y axial-simétrico del espacio-tiempo requiere que los coeficientes métricos sean independientes de t y de ϕ

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^2, x^3), \quad (3.8)$$

donde $x^0 = t$ y $x^1 = \phi$ donde x^2 y x^3 son coordenadas espaciales. Además se requiere que el espacio-tiempo sea invariante ante una transformación simultánea de $t \rightarrow -t$ y $\phi \rightarrow -\phi$. En otras palabras, el espacio-tiempo que se considera aquí se asocia con un cuerpo rotando sobre un eje de simetría. La invariancia que se asume requiere que

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0. \quad (3.9)$$

Bajo estas condiciones, la métrica debe tener la forma

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - 2g_{01} dt d\phi + g_{11} d\phi^2 + [g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} (dx^3)^2], \quad (3.10)$$

donde todos los coeficientes métricos son funciones de x^2 y x^3 únicamente. Una nueva reducción de la métrica puede lograrse haciendo una transformación de coordenadas [7]

$$g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 = e^{2\mu}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (3.11)$$

De esta transformación se sigue que la ecuación (3.10) reduce a la forma

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - 2g_{01} dt d\phi + g_{11} d\phi^2 + e^{2\mu}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (3.12)$$

En 1953 Papapetrou [18] demostró que esta métrica puede escribirse en la forma

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{1}{f}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (3.13)$$

donde ρ y z son coordenadas de Weyl-Papapetrou con f, ω y γ funciones solo de las coordenadas ρ y z .

Las coordenadas cilíndricas de Weyl-Papapetrou están relacionadas con las coordenadas esferoidales prolatas (x, y) como sigue

$$\rho^2 = k^2(x^2 - 1)(1 - y^2) \quad , \quad z = kxy, \quad (3.14)$$

con

$$x \geq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

En las nueva coordenadas la métrica (3.13) toma la forma

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{k^2}{f} \left[e^{2\gamma}(x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right]. \quad (3.15)$$

Para el elemento de línea (3.13), las ecuaciones de Einstein de vacío reducen a

$$\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{1}{4}\rho f^{-2}(f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2) - \frac{1}{4}\rho^{-1}f^2(\omega_{,\rho}^2 - \omega_{,z}^2) \\ \gamma_{,z} &= \frac{1}{2}\rho f^{-2}f_{,z}f_{,\rho} - \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2\omega_{,\rho}\omega_{,z} \\ 0 &= f(\omega_{,\rho\rho} + \omega_{,zz} + \rho^{-1}\omega_{,\rho}) + 2f_{,\rho}\omega_{,\rho} + 2f_{,z}\omega_{,z} \\ 0 &= f(f_{,\rho\rho} + f_{,zz} + \rho^{-1}f_{,\rho}) - f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2 + \rho^{-2}f^4(\omega_{,\rho}^2 + \omega_{,z}^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Encontrar una solución estacionaria axial-simétrica de las ecuaciones de Einstein reduce a encontrar las funciones métricas f, ω y γ .

3.5 Potencial Efectivo

La dinámica del movimiento de las partículas en relatividad general se conoce a través de la métrica. Las partículas pueden presentar diversos tipos de trayectorias, en general acotadas y no acotadas. En cada caso el tipo de trayectoria queda determinado por el potencial efectivo [3], el cual puede encontrarse como sigue.

Dividiendo la métrica (3.15) por $d\tau^2$ donde τ es el tiempo propio, resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 &= f \left(\frac{dt}{d\tau} - \omega \frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \frac{k^2 e^{2\gamma} (x^2 - y^2)}{f} \left(\frac{dx/d\tau}{x^2 - 1} + \frac{dy/d\tau}{1 - y^2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{k^2 (x^2 - 1)(1 - y^2)}{f} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

usando la relación

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

donde \mathcal{L} representa el lagrangiano y $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, se tiene

$$2\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Definiendo

$$\frac{dt}{d\tau} = \dot{t}, \quad \frac{dx}{d\tau} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \dot{y}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{\varphi}, \quad (3.18)$$

la ecuación (3.17) puede escribirse como

$$2\mathcal{L} = f(\dot{t} - \omega\dot{\varphi})^2 - \frac{k^2}{f} \left[e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2)\dot{\varphi}^2 \right]. \quad (3.19)$$

Por otro lado, los momentos generalizados pueden calcularse como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

luego, para las coordenadas cíclicas t y φ aparecen dos cantidades conservadas

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = f(\dot{t} - \omega \dot{\varphi}) = E, \quad (3.20)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\omega f(\dot{t} - \omega \dot{\varphi}) - \frac{k^2}{f}(x^2 - 1)(1 - y^2)\dot{\varphi} = L, \quad (3.21)$$

denotadas E y L , y asociadas a la energía y momento angular de la partícula de prueba. De (3.20) y (3.21) se obtiene

$$\dot{t} = \frac{E}{f} - \frac{f\omega(L + E\omega)}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} \quad (3.22)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{f(L + E\omega)}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} \quad (3.23)$$

reemplazando (3.22) y (3.23) en (3.19) resulta

$$2\mathcal{L} = \frac{E^2}{f} - \frac{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)}{f} \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \right) - \frac{f(L + E\omega)^2}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)}. \quad (3.24)$$

Para geodésicas temporales $2\mathcal{L} = 1$, y definiendo el potencial efectivo Φ como

$$\Phi(x, y) = \frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2}$$

se tiene

$$\Phi(x, y) = \frac{f}{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} \left[\frac{E^2}{f} - \frac{f(L + E\omega)^2}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} - 1 \right], \quad (3.25)$$

luego el movimiento debe estar restringido a la region $\Phi \geq 0$.

3.6 Ecuaciones de Movimiento

Partiendo del lagrangiano (3.24) pueden calcularse los dos momentos faltantes, esto es

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\frac{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)}{f(x^2 - 1)} \dot{x}, \quad (3.26)$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = -\frac{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)}{f(1 - y^2)} \dot{y}. \quad (3.27)$$

El hamiltoniano puede calcularse a partir del lagrangiano usando la relación

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

de lo cual se obtiene $\mathcal{L} = H$, esto es

$$H = \frac{E^2}{2f} - \frac{f(L + E\omega)^2}{2k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} - \frac{f}{2k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} [p_x^2(x^2 - 1) + p_y^2(1 - y^2)]. \quad (3.28)$$

Por ultimo, las ecuaciones de movimiento para las partículas de prueba en espacio-tiempos estacionarios axial-simétricos, pueden calcularse aplicando (2.1) para el hamiltoniano (3.28), esto es

$$\dot{x} = -\frac{f(x^2 - 1)}{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} p_x \quad (3.29)$$

$$\dot{y} = -\frac{f(1 - y^2)}{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} p_y \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = & -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{E^2}{f} - \frac{f(L + E\omega)^2}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} - \frac{f}{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} \right. \\ & \left. \times [p_x^2(x^2 - 1) + p_y^2(1 - y^2)] \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_y = & -\frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{E^2}{f} - \frac{f(L + E\omega)^2}{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} - \frac{f}{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)} \right. \\ & \left. \times [p_x^2(x^2 - 1) + p_y^2(1 - y^2)] \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

4 DINÁMICA DE GEODÉSICAS

4.1 Solución de las ecuaciones de movimiento

En la ecuación (3.25) se expresa el potencial efectivo en términos de las constantes E, L, k y las coordenadas x y y . Éste se encuentra sujeto a la condición $\Phi \geq 0$, por su definición. No todas las combinaciones de E, L, k presentan regiones de confinamiento para las partículas, por lo que se hace necesario un estudio de cada tipo de confinamiento para cada una de las soluciones consideradas.

La solución del sistema de ecuaciones (3.29)-(3.32), puede encontrarse utilizando el método de Runge-Kutta-Feldberg . Esta rutina se ha implementado bajo el software Mathematica 5.2 y permite encontrar la solución del sistema de ecuaciones, dadas las constantes E, L, k y las condiciones iniciales $u(0), v(0), p_u(0), p_v(0)$. Debido a la existencia de la integral de movimiento (3.28) con $H = 1$, conocidos E, L, k y u, v, p_u , el momento p_v queda determinado por esta ecuación. Por la integral de movimiento (3.28), el movimiento geodésico de las partículas de prueba, está confinado a un espacio de fases tridimensional, luego, la herramienta más adecuada para estudiar este movimiento es la técnica de secciones de Poincaré.

En las siguientes secciones se presentan las métricas estudiadas y su interpretación en términos de los momentos multipolares (calculados usando el procedimiento de Hoenselaers y Perjés [13]), los cuales determinan los parámetros físicos de cada solución [21]. Además, se presentan los diferentes tipos de potenciales efec-

tivos encontrados para cada una de las soluciones, junto con las secciones de Poincaré correspondientes.

4.2 Caso 1: Solución de Erez-Rosen

En 1959 Erez y Rosen presentaron una solución estática axial-simétrica de las ecuaciones de Einstein [12]. Para esta solución, la constante k de (3.14) representa la masa del centro de atracción (por simplicidad se usará $k = c = G = 1$). La solución mas general de la forma estática axial-simétrica se obtiene haciendo $\omega = 0$ y $f = e^{2\psi}$ en (3.15), esto es

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi} \left[e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (1 - y^2)(x^2 - 1) d\phi^2 \right]. \quad (4.1)$$

Para éste elemento de línea, las ecuaciones de Einstein de vacío reducen a

$$0 = [(x^2 - 1)\psi_{,x}]_{,x} + [(1 - y^2)\psi_{,y}]_{,y} \quad (4.2)$$

$$\gamma_{,x} = \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2} [x(x^2 - 1)\psi_{,x}^2 - x(1 - y^2)\psi_{,y}^2 - 2y(x^2 - 1)\psi_{,x}\psi_{,y}] \quad (4.3)$$

$$\gamma_{,y} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} [y(x^2 - 1)\psi_{,x}^2 - y(1 - y^2)\psi_{,y}^2 + 2x(1 - y^2)\psi_{,x}\psi_{,y}] \quad (4.4)$$

La ecuación (4.2) es la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales prolatas. Las ecuaciones (4.3) y (4.4) determinan la función métrica γ cuando se conoce ψ .

Usando la técnica de separación de variables

$$\psi(x, y) = A(x)B(y),$$

la ecuación (4.2) puede escribirse como

$$[(x^2 - 1)A_{,x}]_{,x} - nA = 0 \quad \text{y} \quad [(1 - y^2)B_{,y}]_{,y} + nB = 0. \quad (4.5)$$

Las soluciones de (4.5) son las funciones de Legendre $Q_n(x)$ y los polinomios de Legendre $P_n(y)$, para la primera y segunda ecuación respectivamente. Luego la solución de (4.2) es

$$\psi(x, y) = P_n(y)Q_n(x) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El caso especial $n = 0$, junto con el cambio de coordenadas $x \rightarrow -x$

$$\psi = P_0(y)Q_0(-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right),$$

corresponde a la solución de Schwarzschild en coordenadas esferoidales prolatas.

Debido a la linealidad de (4.2), la solución general puede escribirse como

$$\psi = P_0(y)Q_0(-x) + k_l P_l(y)Q_l(-x) \quad ; \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Erez y Rosen probaron que el parámetro k_l determina el momento 2^l -polar de la fuente. Para deformación cuadripolar ($l = 2$) las funciones métricas son

$$\begin{aligned} \psi &= P_0(y)Q_0(-x) + kP_2(y)Q_2(-x) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{2}k(3y^2 - 1) \left[\frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{3}{2}x \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(1+k)^2 \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right) - \frac{3}{2}k(1-y^2) \left[x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 2 \right] + \frac{9}{16}k^2(1-y^2) \\ &\times \left[x^2 + 4y^2 - 9x^2y^2 - \frac{4}{3} + x \left(x^2 + 7y^2 - 9x^2y^2 - \frac{5}{3} \right) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{4}(x^2-1)(x^2+y^2-9x^2y^2-1) \ln^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Los cuatro primeros momentos multipolares para la métrica de Erez-Rosen son

$$M_0 = m; \quad M_1 = 0; \quad M_2 = \frac{2}{15}m^3k; \quad M_3 = 0.$$

Los términos diferentes de cero M_0 y M_2 , representan el monopolo de masa y el cuadripolo de masa de la fuente respectivamente. Por definición la deformación de la fuente es prolata para $M_2 > 0$ y oblata en el caso $M_2 < 0$, es decir, la fuente considerada tiene deformación prolata cuando $k > 0$ y oblata cuando $k < 0$. La solución considerada se interpreta como un agujero negro estático deformado [6].

Esta sección del trabajo se incluye como referencia dado que corresponde al trabajo de Letelier y Gueron [15]. Dicho trabajo fue reproducido y se encontró: (i)

que la solución utilizada no satisface la condición de planitud asintótica, (ii) un gran número de errores tipográficos, (iii) un nuevo tipo de potencial de confinamiento y además, (iv) que las regiones en las cuales están definidas las secciones de Poincaré y el potencial efectivo no son correctas. En el presente trabajo se corrigen estos errores [9]. En total se encuentran cuatro tipos de potencial de confinamiento diferentes para las deformaciones oblata y prolata.

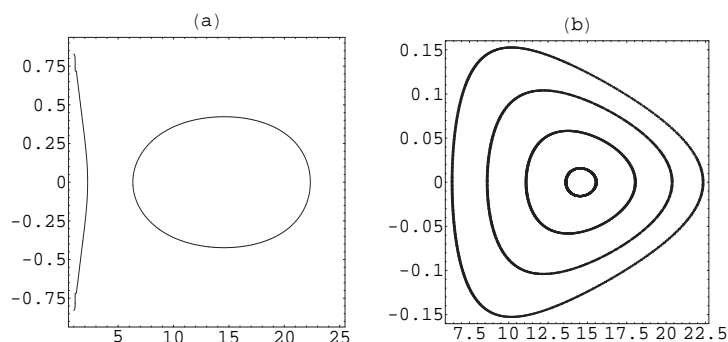


Figura 4.1: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,97, L = 3,98, k = -1,0$.

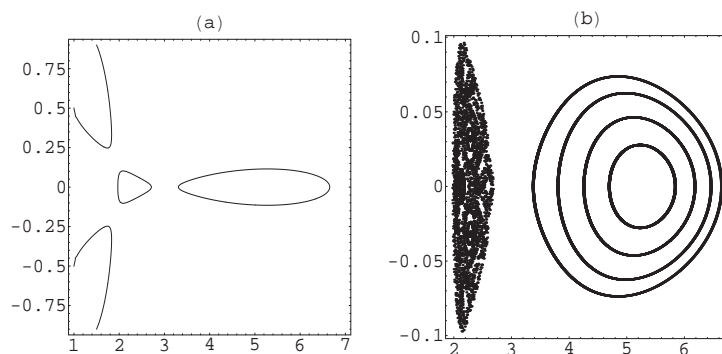


Figura 4.2: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,939, L = 3,34, k = 5,0$.

Primero se consideró la deformación oblata (configuraciones para las cuales $k < 0$), en este caso siempre se encuentran regiones de movimiento acotado muy similares a la presentada en la Figura 4.1 (a). Una configuración con dos regiones de movimiento acotado como la presentada en la Figura 4.2 (a) no fue encontrada. En la Figura 4.1 (a) se presenta la curva $\Phi = 0$ para $E = 0,97, L = 3,98, k =$

$-1,0$, se observa que solo existe una región de escape junto con una región de movimiento confinado. En este caso el origen pertenece a la región de escape, a diferencia del caso prolato donde el origen nunca pertenece a esta región.

En segunda instancia se consideró la deformación prolata, (configuraciones para las cuales $k > 0$). En la Figura 4.2 (a) se presenta la curva $\Phi = 0$ para $E = 0,939, L = 3,34, k = 5,0$. Existen cuatro regiones: dos de escape y dos de confinamiento. En la Figura 4.3 (a) se presenta el caso $E = 0,938, L = 3,33, k = 5,0$, esta configuración es muy similar a la anterior a diferencia de que solo aparece una region de confinamiento, pero casi dividida en dos. En la Figura 4.4 (a) se

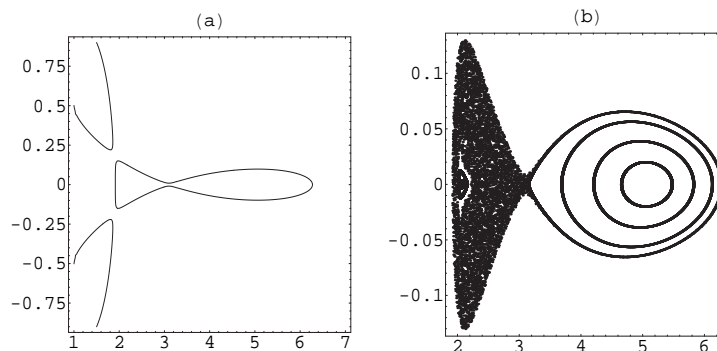


Figura 4.3: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,938, L = 3,33, k = 5,0$.

presenta el caso $E = 0,906, L = 2,858, k = 10,0$, esta configuración es muy similar a la del caso típico oblatto a diferencia de que existen dos regiones de escape. En el caso prolato también se encuentran regiones como la presentada en la Figura 4.1 (a) para el caso oblatto.

El comportamiento de las órbitas para cada una de las configuraciones anteriormente presentadas se muestran en las Figuras 4.1 (b), 4.2 (b), 4.3 (b) y 4.4 (b). En la Figura 4.1 (b), se presentan las secciones de Poincaré típicas para la deformación oblata, los parámetros usados son los correspondientes a los de la Figura 4.1 (a). Se observa que el movimiento en la región acotada es completamente regular como en el caso del agujero negro de Schwarzschild. En la Figura 4.2 (b)

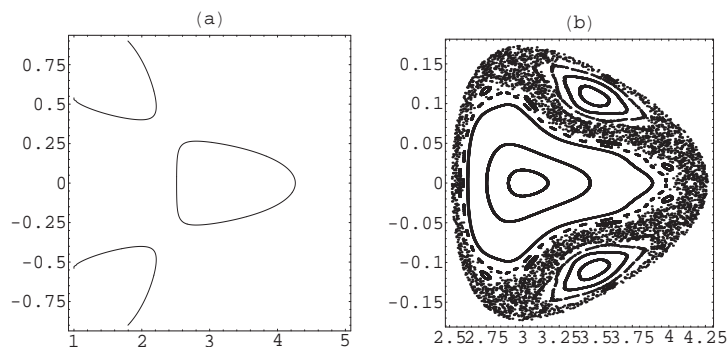


Figura 4.4: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,906$, $L = 2,858$, $k = 10,0$.

se presentan las secciones de Poincaré para las dos regiones de movimiento acotado de la Figura 4.2 (a). En la región acotada de la parte izquierda se obtiene un típica gráfica de movimiento caótico, pero las órbitas confinadas en la otra región acotada presentan movimiento completamente regular. En la Figura 4.3 (b) se muestran las secciones de Poincaré para la región confinada de la Figura 4.3 (a). Aquí se observa una región de movimiento irregular en la parte izquierda, junto con una región de movimiento regular en la derecha rodeada por una envoltura de caos. En la Figura 4.4 (b) se observa la sección de Poincaré para la región acotada de la Figura 4.4 (a). Es interesante observar que a pesar de tener una única región de confinamiento como en el caso de la Figura 4.1 (a), esta configuración presenta movimiento irregular junto con unas pequeñas islas de movimiento regular.

Además del método de secciones de Poincaré, se utilizó otra técnica para cuantificar la inestabilidad geodésica: el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. En este trabajo se calculan los exponentes de Lyapunov máximos usando la técnica sugerida por Benettin *et.al.* [4]. Se encuentra que las deformaciones prolatas consideradas exhiben un exponente de Lyapunov positivo del orden 10^{-4} , mientras que para las deformaciones oblatas el exponente de Lyapunov se anula. Esto confirma el comportamiento observado en las secciones de Poincaré calculadas.

4.3 Caso 2: Solución de Tomimatsu-Sato

En 1972 A. Tomimatsu y H. Sato [23] presentaron una solución estacionaria axial-simétrica de las ecuaciones de Einstein de vacío, la cual reduce a una de las métricas de Weyl en el límite de momento angular $J = 0$ y reduce a la métrica de Kerr en el límite $J = m^2$.

De acuerdo a la formulación de Ernst, las soluciones estacionarias axial-simétricas de espacio vacío pueden derivarse a partir de una función compleja ξ , la cual satisface la siguiente ecuación

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi \cdot \nabla\xi. \quad (4.8)$$

Tomimatsu y Sato encontraron una solución de la forma

$$\xi = \frac{p^2x^4 + q^2y^4 - 2ipqxy(x^2 - y^2) - 1}{2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2)}, \quad (4.9)$$

donde las coordenadas (x, y) son coordenadas esferoidales prolatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas por las ecuaciones (3.14), donde $k = mp/\delta$. El parámetro δ es un parámetro adimensional que toma el valor $\delta = 1$ para la solución de Kerr y $\delta = 2$ para la solución de Tomimatsu y Sato. Las funciones métricas que se derivan de (4.9) son

$$f = \frac{A}{B}; \quad \omega = \frac{2mqC(1 - y^2)}{A}; \quad e^{2\gamma} = \frac{A}{p^4(x^2 - y^2)^4},$$

donde

$$A = p^4(x^2 - 1)^4 + q^4(1 - y^2)^4 - 2p^2q^2(x^2 - 1)(1 - y^2)\{2(x^2 - 1)^2 + 2(1 - y^2)^2 + 3(x^2 - 1)(1 - y^2)\}$$

$$B = \{p^2(x^2 + 1)(x^2 - 1) - q^2(y^2 + 1)(1 - y^2) + 2px(x^2 - 1)\}^2 + 4q^2y^2\{px(x^2 - 1) + (px + 1)(1 - y^2)\}^2$$

$$C = -p^3x(x^2 - 1)\{2(x^2 + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + 3)(1 - y^2)\} - p^2(x^2 - 1) \times \{4x^2(x^2 - 1) + (3x^2 + 1)(1 - y^2)\} + q^2(px + 1)(1 - y^2)^3$$

Los cuatro primeros momentos multipolares de masa y rotación respectivamente para la métrica de Tomimatsu-Sato son

$$M_0 = m; \quad M_1 = 0; \quad M_2 = -m^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{3J^2}{m^4} \right); \quad M_3 = 0$$

$$J_0 = 0; \quad J_1 = J; \quad J_2 = 0; \quad J_3 = \frac{-J(J^2 + m^4)}{2m^2}$$

Los términos M_0 , M_2 , y J_1 representan el monopolo de masa, el cuadripolo de masa, y el momento angular de rotación de la fuente respectivamente. Por definición la fuente considerada tiene deformación oblata. La solución considerada puede interpretarse como una estrella de neutrones deformada con un rata de rotación intermedia [8]. Puede notarse que el momento cuadripolar M_2 de la solución considerada es mayor que el momento cuadripolar de la solución de Kerr $M_2 = J^2/m$, si $J < m^2$, e igual a este si $J = m^2$.

En esta solución el parámetro k queda fijo por la masa y el momento angular de la fuente $k = mp/\delta$, razón por la cual solo es posible variar la energía y momento angular de la partícula de prueba. En este caso siempre se encuentran regiones de movimiento acotado como la presentada en la Figura 4.5 (a). Una configuración con dos regiones de movimiento acotado o más no fue encontrada. En la Figura 4.5 (a) se presenta la curva $\Phi = 0$ para $E = 0,94$, $L = -3,12$, se observa que solo existe una región de escape junto con una región de movimiento confinado. En la Figura 4.5 (b) se observa que el movimiento en la región acotada de la Figura 4.5 (a) es completamente regular como ocurre en el caso de deformación oblata para la solución de Erez-Rosen. De igual forma se encuentra un exponente de Lyapunov máximo nulo. Este resultado muestra evidencia numérica de la existencia de geodésicas integrables únicamente, dicho de otra forma el caso de una partícula de prueba girando en torno a una estrella de neutrones con regimen de rotación intermedia es completamente integrable [10].

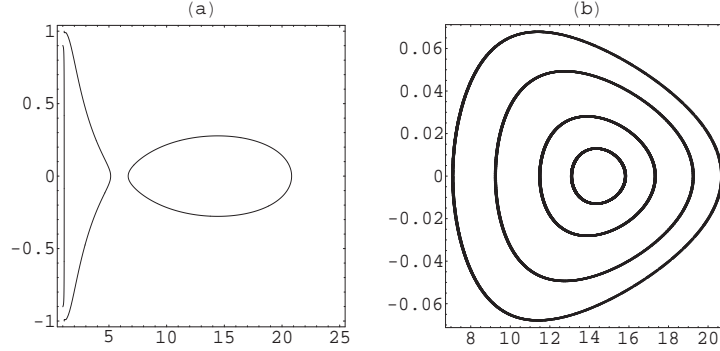


Figura 4.5: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $E = 0,94, L = -3,12$.

4.4 Caso 3: Solución de Manko *et.al.*

En el año 2000 Manko *et.al.* [16] calcularon una familia de soluciones de las ecuaciones (3.16), encontrando las siguientes funciones métricas

$$f = \frac{E}{D}, \quad e^{2\gamma} = \frac{E}{16\kappa^8(x^2 - y^2)^4}, \quad \omega = \frac{(y^2 - 1)L}{E}, \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} E &= \{4[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - m^2b](1 - y^2)^2\}^2 \\ &\quad - 16\kappa^2(x^2 - 1)(1 - y^2)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + m^2by^2\}^2, \\ D &= \{4(\kappa^2x^2 - \delta y^2)^2 + 2\kappa mx[2\kappa^2(x^2 - 1) + (2\delta + ab - b^2)(1 - y^2)] + (a - b) \\ &\quad \times [(a - b)(d - \delta) - m^2b](y^4 - 1) - 4d^2\}^2 + 4y^2\{2\kappa^2(x^2 - 1)[\kappa x(a - b) \\ &\quad - mb] - 2mb\delta(1 - y^2) + [(a - b)(d - \delta) - m^2b](2\kappa x + m)(1 - y^2)\}^2, \\ L &= 8\kappa^2(x^2 - 1)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + y^2m^2b\}\{\kappa mx[(2\kappa x + m)^2 \\ &\quad - 2y^2(2\delta + ab - b^2) - a^2 + b^2] - 2y^2(4\delta d - m^2b^2)\} + 4[\kappa^2(x^2 - 1) \\ &\quad + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - m^2b](1 - y^2)^2\}(4(2\kappa mbx + 2m^2b) \\ &\quad \times [\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)] + (1 - y^2)\{(a - b)(m^2b^2 - 4\delta d) \\ &\quad - (4\kappa mx + 2m^2)[(a - b)(d - \delta) - m^2b]\}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde

$$\delta = \frac{\mu^2 - m^2 b^2}{m^2 - (a - b)^2}, \quad d = \frac{1}{4}[m^2 - (a - b)^2] \quad \text{y} \quad \kappa = \sqrt{d + \delta}. \quad (4.12)$$

Para obtener una expresión mas compacta de la solución se han empleado coordenadas esferoidales generalizadas x e y , relacionadas con las coordenadas ρ y z mediante las expresiones

$$x = \frac{1}{2\kappa}(r_+ + r_-), \quad y = \frac{1}{2\kappa}(r_+ - r_-), \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \kappa)^2}, \quad (4.13)$$

La solución (4.11, 4.12) representa el campo exterior de un objeto masivo, rotante, deformado y magnetizado. El parámetro m representa el momento monopolar de masa, el momento angular se relaciona con el parámetro a mediante la expresión

$$J = am, \quad (4.14)$$

de forma que a representa el momento angular por unidad de masa, μ representa el momento dipolar magnético y b (denominado parámetro de deformación) se relaciona con el momento cuadripolar de masa (Ver momentos multipolares).

Esta solución tiene ciertos limites clásicos, es decir existen ciertos casos especiales en los cuales la solución reduce a otras bien conocidas: Cuando $\mu = b = 0$, la métrica reduce a la solución de Tomimatsu-Sato $\delta = 2$, cuando $\mu = 0$ y $b = \sqrt{a^2 - m^2}$, la métrica reduce a la solución de Kerr y cuando $\mu = a = 0$ y $b = im$, la métrica reduce a la solución de Schwarzschild. Para ver otras propiedades físicas de la solución puede consultarse la referencia MMS-G [16].

Los cuatro primeros momentos multipolares de masa y rotación respectivamente para la solución de Manko *et.al.* son

$$\begin{aligned} M_0 &= m; & M_1 &= 0; & M_2 &= -m(a^2 - ab + d - \delta); & M_3 &= 0, \\ J_0 &= 0; & J_1 &= am; & J_2 &= 0; \\ J_3 &= -m(a^3 - 2a^2b + ab^2 + 2ad - bd - 2a\delta + b\delta) \end{aligned}$$

Los términos M_0 , M_2 , J_1 y J_2 representan el monopolo de masa, el cuadripolo de masa, el momento angular de rotación de la fuente y el octupolo de rotación respectivamente. Esta solución se interpreta como una estrella de neutrones deformada rápidamente rotante [5].

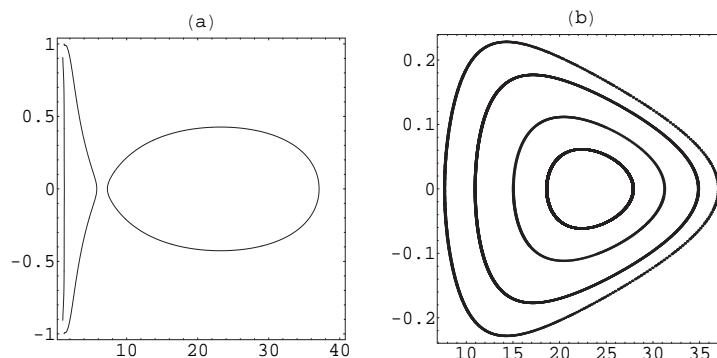


Figura 4.6: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot$, $J = 0,5504$, $b = -0,3080$, $E = 0,95$, $L = -9,0$.

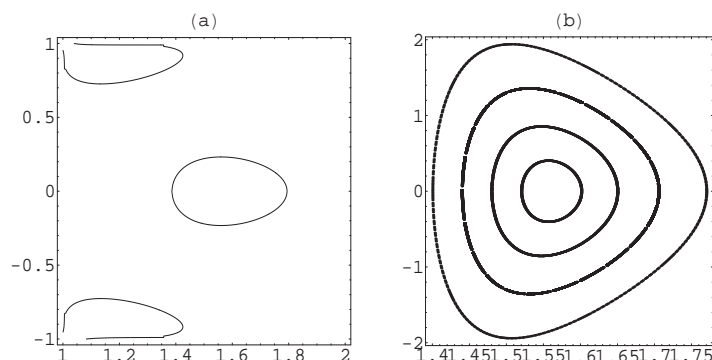


Figura 4.7: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,840M_\odot$, $J = 0,5$, $b = -0,3792$, $E = 0,1$, $L = -5,6$.

Esta solución fue usada de dos formas: primero tomando los valores calculados para estrellas de neutrones por Berti y Stergioulas (lo cual deja fija el parámetro de deformación b) y segundo tomando los valores de masa y momento angular de las tablas de Berti y Stergioulas para estrellas de neutrones realistas y variando el parámetro de deformación b . Solo se estudian estrellas descritas por la ecuación de estado FPS por ser la que mejor se ajusta (Ver [5]).

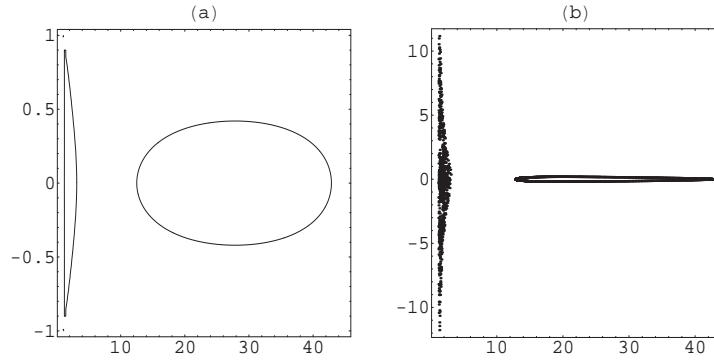


Figura 4.8: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot$, $J = 0,5504$, $b = 0,8$, $E = 0,96$, $L = -9,9$.

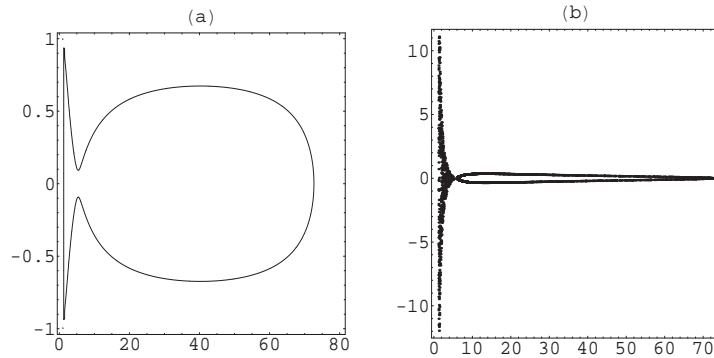


Figura 4.9: Curva $\Phi = 0$ en el plano $x - y$ y las secciones de Poincaré en el plano $x - P_x$ para $M = 1,936M_\odot$, $J = 0,5504$, $b = 0,8$, $E = 0,971$, $L = -9,3$.

En total se encuentran cuatro tipos de potencial de confinamiento diferentes para la solución de Manko *et.al.* Para el caso de parámetro b fijo, es común encontrar regiones de movimiento acotado muy similares a la presentada en la Figura 4.6 (a). En la Figura 4.6 (a) se presenta la curva $\Phi = 0$ para $M = 1,936M_\odot$, $J = 0,5504$, $b = -0,3080$, $E = 0,95$, $L = -9,0$, se observa que solo existe una región de escape junto con una región de movimiento confinado. En la Figura 4.7 (a) se presenta el caso $M = 1,840M_\odot$, $J = 0,5$, $b = -0,3792$, $E = 0,1$, $L = -5,6$, esta configuración es muy similar a la del caso anterior a diferencia de que tiene dos regiones de escape. En segunda instancia se consideró el caso de parámetro b variable. En la Figura 4.8 (a) se presenta la curva $\Phi = 0$ para $M = 1,936M_\odot$, $J = 0,5504$, $b = 0,8$, $E = 0,96$, $L = -9,9$, existen cuatro regiones:

dos de escape (casi invisibles) y dos de confinamiento. En la Figura 4.9 (a) se presenta el caso $M = 1,936M_{\odot}$, $J = 0,5504$, $b = 0,8$, $E = 0,971$, $L = -9,3$, esta configuración es muy similar a la anterior a diferencia de que solo aparece una region de confinamiento, pero casi dividida en dos. En el caso de parámetro b variable también es posible encontrar regiones como la presentada en la Figura 4.7 (a).

El comportamiento de las órbitas para cada una de las configuraciones anteriormente presentadas se muestran en las Figuras 4.6 (b), 4.7 (b), 4.8 (b) y 4.9 (b). En la Figura 4.6 (b), se presentan las secciones de Poincaré típicas para el caso de parámetro b fijo, los parámetros usados son los correspondientes a los de la Figura 4.6 (a). Se observa que el movimiento en la región acotada es completamente regular. En la Figura 4.7 (b) se presentan las secciones de Poincaré para la región de movimiento acotado de la Figura 4.7 (a), donde al igual que en el caso anterior solo se encuentra movimiento regular.

En la Figura 4.8 (b) se muestran las secciones de Poincaré para las regiones de confinamiento de la Figura 4.8 (a), aquí se observa una región de movimiento irregular en la parte izquierda, junto con una región de movimiento regular en la derecha. En la Figura 4.9 (b) se observa la sección de Poincaré para la región acotada de la Figura 4.9 (a). Esta configuración presenta una dinámica caótica en la parte izquierda de la region de confinamiento y un comportamiento completamente regular en la parte derecha. Se encuentra que los casos de parámetro b variable consideradas exhiben un exponente de Lyapunov positivo del orden 10^{-3} , mientras que para los casos de parámetro b fijo el exponente de Lyapunov se anula. Este resultado muestra la imposibilidad de geodésicas caóticas, para partículas de prueba orbitando alrededor de estrellas de neutrones rápidamente rotantes descrita por una ecuación de estado FPS [11], a pesar de que la solución si pueda exhibir movimientos caóticos.

5 CONCLUSIONES

Se realizó un estudio del comportamiento de las geodésicas de partículas de prueba orbitando alrededor de dos tipos de objetos compactos (agujeros negros y estrellas de neutrones) utilizando las técnicas de secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov.

En el caso de agujeros negros se reprodujeron y mejoraron los resultados obtenidos por Letelier y Gueron [15], encontrando un nuevo tipo de potencial efectivo de confinamiento que permite geodésicas caóticas sin regiones regulares separadas.

Por otro lado, para el caso de estrellas de neutrones se utilizaron dos soluciones exactas para describir el campo exterior de las mismas. Primero, la solución de Tomimatsu–Sato $\delta = 2$ se ajustó numéricamente para que representara el campo de una estrella de neutrones con rotación intermedia y se encontró que las geodésicas son siempre regulares. En segundo lugar, se utilizó la solución de Manko *et.al.* para describir el campo exterior de una estrella de neutrones rápidamente rotante con ecuación de estado FPS (ver [5]) y se encontró que las geodésicas también presentan un comportamiento regular.

Finalmente, se encontró que las geodésicas de partículas orbitando la fuente descrita por la solución de Manko *et.al.* presentan comportamiento caótico para valores del cuadrípulo de masa de la fuente ligeramente diferentes a los de las estrellas de neutrones realistas, en el caso de la ecuación de estado FPS.

Los anteriores resultados sugieren que las geodésicas para los casos de agujeros

negros muestran comportamiento caótico, mientras para estrellas de neutrones realistas son siempre regulares. La razón de que esto suceda es que para agujeros negros el parámetro de deformación puede ser elegido arbitrariamente debido a que no existen límites teóricos (excepto los teoremas de no-hair) sobre la deformación del agujero negro, mientras que para estrellas de neutrones realistas no es posible variar arbitrariamente el cuadrípolo de masa debido a los límites que imponen la ecuación de estado de la que está conformada la estrella.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alligood K T, Sauer T D and Yorke J A, *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems* (New York: Springer) 1996.
- [2] Arnold V I, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer) 1989.
- [3] Bardeen J, *Stability of Circular Orbits in Stationary, Axisymmetric Space-Times*. Ap. J **161** 103 (1970).
- [4] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A and Strelcyn J M, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and hamiltonian systems: A method for computing all of them*. Meccanica **15** 9 (1980).
- [5] Berti E and Stergioulas N, *Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars*. MNRAS **350** 1416 (2004).
- [6] Carmeli M, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. (Wiley, New York) 1982.
- [7] Chandrasekhar S, *The Mathematical Theory of Black Holes*. (Oxford: Clarendon Press) 1983.
- [8] Dubeibe F L, Pachon L A and Sanabria-Gomez J D, *Modelo para el campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones lentamente rotante*. Rev. Col. Fis. (Sometido) 2005.

-
- [9] Dubeibe F L, Pachon L A and Sanabria-Gomez J D, *Geodésicas alrededor de un agujero negro estático deformado* Rev. Col. Fis. (Sometido) 2005.
- [10] Dubeibe F L, Pachon L A and Sanabria-Gomez J D, *Regular geodesics around a neutron star whit intermediate rotation rates.* (En preparación)
- [11] Dubeibe F L, Pachon L A and Sanabria-Gomez J D, *Geodesic chaos around a rapidly rotating neutron star.* (En preparación)
- [12] Erez G and Rosen N *Bull. Res :Counc. Isr.* **8 F** 57 (1959).
- [13] Hoenselaers C & Perjés Z , *Multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes.* Class. Quantum Grav. **7** 1819 (1990).
- [14] Kiuchi K and Maeda Kei-chi, *Gravitational waves from a chaotic dynamical system.* Phys. Rev. D. **70** 064036 (2004).
- [15] Letelier P S and Gueron E, *Geodesic chaos around quadrupolar deformed centers of attraction.* Phys. Rev. E **66** 046611 (2002).
- [16] Manko V S, Mielke E W and Sanabria-Gómez J D, *Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star.* Phys. Rev. D. **61** 081501 (2000).
- [17] Ott S, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press) 1993.
- [18] Papapetrou A, *Eine Rotationssymmetrische Lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. Phys. **12** 309 (1953).
- [19] Quevedo H, *Multipole moments in general relativity -Static and Stationary vacuum solutions-* Fortschr. Phys. **38** 737 (1990).
- [20] Shapiro S and Teukolsky S A, *Black holes, white dwarfs and neutron stars (The physics of Compact Objects).* (John Wiley & Sons, New York) 1983.
- [21] Simon W, *The multipole expansion of stationary Einstein Maxwell fields.* J. Math. Phys. **25** 1035 (1984).

-
- [22] Strogatz S, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. (Westview Press) 2000
- [23] Tomimatsu A and Sato H, *New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass*. Phys. Rev. Lett. **29** 1344 (1972).
- [24] Weinberg S, *Gravitation and cosmology principles and applications of the general theory of relativity*. (New York: John Wiley & Sons) 1972.