

**ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE  
PRUEBA EN EL CAMPO GRAVITACIONAL  
GENERADO POR LA SUPERPOSICIÓN DE UN  
AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD CON UN  
DISCO ANULAR**

**JEISSON SNEIDER CUARÁN CASTRILLÓN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA**

**2023**

**ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE  
PRUEBA EN EL CAMPO GRAVITACIONAL  
GENERADO POR LA SUPERPOSICIÓN DE UN  
AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD CON UN  
DISCO ANULAR**

**JEISSON SNEIDER CUARÁN CASTRILLÓN**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO  
DE FÍSICO**

**DIRECTOR  
GUILLERMO A. GONZÁLEZ VILLEGAS, Ph. D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA**

**2023**

*A mi madre, mi hermana y mi sobrino.*

## Agradecimientos

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo A. González Villegas por la constante guía en el desarrollo de este proyecto.

# Tabla de contenido

<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>Abstract</b>	<b>10</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Geodésicas en el espacio-tiempo de Weyl</b>	<b>13</b>
2.1. Espacio-tiempo de Weyl . . . . .	13
2.2. Líneas geodésicas . . . . .	14
2.3. Movimiento de partículas de prueba . . . . .	16
2.3.1. Geodésicas ecuatoriales en el espacio-tiempo de Weyl . . . . .	18
2.3.2. Geodésicas en el plano $(r, z)$ . . . . .	23
<b>3. Geodésicas en la superposición de agujero negro con disco anular</b>	<b>25</b>
3.1. Espacio-tiempo de un agujero negro superpuesto con un disco anular	25
3.2. Geodésicas ecuatoriales . . . . .	26
3.2.1. Geodésicas temporales . . . . .	28
3.2.2. Geodésicas nulas . . . . .	34
3.2.3. Órbitas circulares importantes . . . . .	39
3.3. Geodésicas en el plano $(r, z)$ . . . . .	40
<b>4. Conclusiones</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>
<b>Apéndices</b>	<b>48</b>
<b>A. Relación entre <math>(r, z)</math> y <math>(\rho, \theta)</math></b>	<b>49</b>
<b>B. Agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>50</b>

# Lista de figuras

2.1.	<i>Bosquejo del potencial efectivo como función del radio <math>r</math> con sus puntos máximos y mínimos.</i>	19
2.2.	<i>Bosquejo del momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular <math>r</math> para geodésicas temporales con sus regiones estables e inestables.</i>	21
3.1.	<i>Potencial efectivo como función de <math>\rho/a</math> para geodésicas temporales en el plano ecuatorial con diferentes valores del momento angular específico y un valor fijo de <math>\alpha/a = 1</math>. El punto rojo en a) corresponde a la órbita circular marginalmente estable de radio <math>\rho/a \approx 0.437</math>.</i>	29
3.2.	<i>Momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular, <math>\rho/a</math>, para geodésicas temporales dentro y fuera del disco. El punto rojo en a), con coordenadas <math>(\rho/a, L^2/m^2) = (0.437, 8.47)</math>, corresponde a la órbita circular marginalmente estable.</i>	30
3.3.	<i>Comportamiento de la función <math>F(\rho/a)</math> para diferentes valores del momento angular específico. La línea negra horizontal permite visualizar las raíces de la función.</i>	31
3.4.	<i>Potencial efectivo como función de <math>\rho/a</math> para geodésicas temporales fuera del disco con <math>L^2 = 12.96m^2</math>. Las líneas discontinuas corresponden a valores de energía específica al cuadrado.</i>	32
3.5.	<i>Geodésicas temporales fuera del disco con las condiciones iniciales establecidas en el cuadro 3.1.</i>	33
3.6.	<i>Potencial efectivo como función de <math>\rho/a</math> para geodésicas temporales dentro del disco con <math>L^2 = 12.96m^2</math>. Las líneas discontinuas horizontales en a) corresponden a valores de energía específica al cuadrado. En b) se presenta la geodésica temporal con energía específica <math>E_1 = 0.95</math>.</i>	35
3.7.	<i>Potencial efectivo como función de <math>\rho/a</math> para geodésicas temporales dentro del disco con <math>L^2 = 51.84m^2</math>. La línea discontinua horizontal en a) corresponde a un valor de energía específica al cuadrado. En b) se presenta la geodésica temporal con energía específica <math>E_3 = 1.1</math>.</i>	36
3.8.	<i>Potencial efectivo como función de <math>\rho/a</math> para geodésicas nulas en el plano ecuatorial con diferentes valores del momento angular específico.</i>	37

3.9. Geodésica nula fuera del disco con las condiciones iniciales establecidas en el cuadro 3.2. . . . .	38
3.10. Variación de $\rho_{ms}/a$ , $\rho_{mb}/a$ y $\rho_{ph}/a$ en función de $\alpha/a$ . La línea horizontal roja corresponde al borde interno del disco. . . . .	40
3.11. Geodésicas meridionales de partículas radialmente eyectadas hacia el infinito desde un marco de referencia local en $\rho = 3m$ y $\theta = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$ para a), b) y $\theta = 19^\circ, 29^\circ, \dots, 89^\circ$ para c)-f). Las partículas de a), c), e) tienen rapidez inicial $\hat{v} = 0.4$ , y las de b), d), f) tienen $\hat{v} = 0.8$ . Se toma $\alpha/a = 1$ para a)-d) y $\alpha/a = 0.3$ para e), f). La línea horizontal negra representa al disco con borde interno en $\rho = 6m$ y la circunferencia negra de radio $\rho = 2m$ representa el horizonte de sucesos. . . . .	43
B.1. Momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular, $9^{-1}\rho m^{-1}$ , para geodésicas temporales en el campo gravitacional de un agujero negro de Schwarzschild. La línea discontinua corresponde al radio de la órbita circular marginalmente estable ( $\rho_{ms}$ ). En b) se cambia la escala de a) para representar la región estable e inestable. . . . .	51

# Lista de cuadros

3.1. <i>Condiciones iniciales para las geodésicas temporales fuera y dentro del disco presentadas en las figuras que aparecen en la primera columna.</i> .	31
3.2. <i>Condiciones iniciales para la geodésica nula fuera del disco presentada en la figura que aparece en la primera columna.</i> . . . . .	38

# Resumen

**TÍTULO:** ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN EL CAMPO GRAVITACIONAL GENERADO POR LA SUPERPOSICIÓN DE UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD CON UN DISCO ANULAR<sup>1</sup>

**AUTOR:** JEISSON SNEIDER CUARÁN CASTRILLÓN<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Geodésicas, Espacio-tiempo de Weyl, Agujero negro de Schwarzschild, Disco anular, Órbitas circulares.

## DESCRIPCIÓN:

En este trabajo de investigación se estudió el movimiento de partículas de prueba, temporales y nulas, en un espacio-tiempo de Weyl correspondiente a la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con el primer miembro de la familia de discos anulares de González, Gutiérrez-Piñeres y Viña-Cervantes [1]. Para ello, se resolvieron las ecuaciones de las geodésicas para dicho espacio-tiempo mediante solución numérica; primero, se consideró la naturaleza de las posibles órbitas ecuatoriales por medio de un análisis cualitativo del potencial efectivo, dentro y fuera del disco, y segundo, se eyectó partículas radialmente en el primer cuadrante del plano  $(r, z)$ . Además, se analizó la existencia de órbitas circulares ecuatoriales estables, inestables y marginalmente estables. Como principales resultados se determinó la órbita circular marginalmente estable, la órbita marginalmente ligada y la órbita circular de fotones sobre el plano ecuatorial.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas.

# Abstract

**TITLE:** STUDY OF THE MOTION OF TEST PARTICLES IN THE GRAVITATIONAL FIELD GENERATED BY THE SUPERPOSITION OF A SCHWARZSCHILD BLACK HOLE WITH AN ANNULAR DISK<sup>3</sup>

**AUTHOR:** JEISSON SNEIDER CUARÁN CASTRILLÓN<sup>4</sup>

**KEYWORDS:** Geodesics, Weyl space-time, Schwarzschild black hole, Annular disk, Circular orbits.

**DESCRIPTION:**

In this research work has been studied the motion of test particles, time-like and null geodesics, in a Weyl space-time corresponding to the superposition of a Schwarzschild black hole with the first member of the family of annular disks of González, Gutiérrez-Piñeres and Viña-Cervantes [1]. For this, the geodesic equations for said space-time were solved by numerical solution; first, the nature of possible equatorial orbits was considered by means of a qualitative analysis of the effective potential, inside and outside the disk, and second, particles were ejected radially in the first quadrant of the  $(r, z)$  plane. In addition, the existence of stable, unstable and marginally stable equatorial circular orbits was analyzed. As main results, the marginally stable circular orbit, the marginally bound orbit and the circular photon orbit on the equatorial plane were determined.

---

<sup>3</sup>Undergraduate Thesis.

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas.

# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones de Einstein en la teoría de la relatividad general permiten comprender una gran variedad de fenómenos astrofísicos cuando los campos gravitacionales son intensos, debido a que en estos campos se aprecia que la trayectoria de la luz, el tiempo y el espacio se ven afectados por la gravedad [2], contrario a las predicciones de la mecánica newtoniana; además, permiten modelar algunos objetos astrofísicos, tales como: galaxias, mediante los discos de polvo contrarrotantes [3] (véase la discusión realizada en [4], con sus respectivas referencias, sobre el modelado de discos contrarrotantes en galaxias tipo S0 y Sa); las binarias de rayos X, mediante la interacción de un agujero negro de Kerr con un disco de acreción circundante [5]; planetas, más propiamente características como la precesión [6]; entre otros.

Adicionalmente, la relatividad general relaciona el movimiento de la materia con la curvatura del espacio-tiempo de tal modo que el estudio del movimiento de las partículas, que por ejemplo trazan líneas de dirección constante, permite determinar características de la curvatura del espacio-tiempo (véase el capítulo 3 del libro [7]); estas trayectorias cumplen con el principio de mínima acción y reciben el nombre de geodésicas, las cuales, por la relación dada en la relatividad general, pueden ser determinadas dada la configuración del espacio-tiempo. Por ende, para la métrica de Schwarzschild se puede encontrar bastante detallado el estudio analítico de las geodésicas temporales y nulas en textos como [8], si se considera la constante cosmológica en la anterior métrica se obtienen las geodésicas de manera analítica en [9, 10], para la métrica de Weyl se estudia geodésicas circulares importantes en el plano ecuatorial con simulaciones numéricas [11] y en la superposición de un agujero negro con un disco anular se estudian las geodésicas para analizar el movimiento de las partículas de polvo en el disco [12]. El estudio de las geodésicas, por ser una de las metas en la comprensión de las características del campo gravitacional generado por objetos astrofísicos, resulta de gran relevancia; es por ello que, una vez obtenida la métrica del campo gravitacional en cuestión, se procede a estudiar el movimiento de las partículas libres para determinar propiedades físicas como la estabilidad de las órbitas.

Luego de presentada la teoría de la relatividad general en 1915 por A. Einstein,

se intentó hallar la solución a las ecuaciones de campo que son no lineales. Para el caso de discos axialmente simétricos sin presión radial Bonnor & Sackfield [13] y Morgan & Morgan [14] obtuvieron soluciones exactas. Seguidamente, Morgan & Morgan consideraron la presión radial [3] y González & Letelier la tensión radial [15] en los discos con simetría axial. Además, diferentes autores determinaron soluciones exactas para discos delgados estáticos [16–18] y discos delgados estacionarios [19,20]. Por otro lado, la superposición de un agujero negro con discos delgados estáticos o estacionarios también fue desarrollada por varios autores [21, 22]. Recientemente, González y Gutiérrez-Piñeres [23] superpusieron un agujero negro de Schwarzschild con el primer miembro de la familia de discos anulares [1].

Sobre las geodésicas en distintas configuraciones espacio-temporales se tiene gran cantidad de material bibliográfico, por mencionar a algunos autores: Harvey [24] presentó un estudio de las geodésicas en un espacio-tiempo de Kasner, Olum [25] presentó un estudio de geodésicas en un espacio tiempo estático de Mallett y López-Suspés & González [11] estudiaron las geodésicas de partículas neutras en un espacio tiempo de Weyl.

Por ende, el presente trabajo de investigación pretende estudiar las geodésicas para la superposición, realizada en el artículo [23], de un agujero negro de Schwarzschild con un disco delgado anular infinito (el disco tiene borde interno). Para ello, este trabajo se organiza de la siguiente forma. En el capítulo 2, primero se considera la simetría estática y axialmente simétrica de los campos de Weyl, permitiendo determinar la geometría del espacio-tiempo; segundo, se utiliza el formalismo lagrangiano para determinar la ecuación de las geodésicas; tercero, se limita el movimiento de las partículas sobre el plano ecuatorial con el fin de definir un potencial efectivo que permita, mediante análisis cualitativo, el estudio de las posibles órbitas, y cuarto, se limita el movimiento de las partículas sobre el primer cuadrante del plano  $(r, z)$  con el fin de estudiar las posibles órbitas de partículas con masa eyectadas radialmente hacia el infinito. En el capítulo 3, se introducen las funciones métricas del sistema superpuesto (un agujero negro superpuesto con un disco anular [23]) en las ecuaciones de movimiento obtenidas en el capítulo 2, para luego resolver dichas ecuaciones mediante solución numérica; además, se hace un estudio de las órbitas circulares importantes en el plano ecuatorial. Finalmente, en el capítulo 4 se exponen las conclusiones obtenidas del trabajo realizado.

# Geodésicas en el espacio-tiempo de Weyl

## 2.1. Espacio-tiempo de Weyl

Las ecuaciones de campo de Einstein, a pesar de ser un sistema determinado de diez ecuaciones independientes para diez funciones independientes (para el espacio-tiempo cuatridimensional, por tener métrica lorentziana de signatura  $+2$ , las funciones dependen de cuatro variables  $x^\mu$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), por lo general no son posibles de resolver sin considerar simetrías. Al suponer simetrías en algunos casos se obtienen soluciones analíticas, sirva de ejemplo el bien conocido problema de simetría esférica donde se obtienen dos funciones (o funciones métricas) de una variable para un campo en el vacío (véase las secciones 8.1-8.2 del libro [26] y las secciones 23.1-23.2 del libro [27]).

Un campo estático implica que las componentes del tensor métrico no dependen de la coordenada temporal  $x^0$  y, además, hay simetría de reflexión temporal permitiendo que el elemento de línea  $ds^2$  sea invariante bajo la transformación  $x^0 \rightarrow -x^0$ ; de esta manera, el elemento de línea toma la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

donde la coordenada temporal es  $x^0 = t$  y las coordenadas espaciales son  $x^i$ ; con  $i = 1, 2, 3$ <sup>1</sup>. Téngase en cuenta que se está utilizando el sistema de unidades geometrizadas en el cual  $c = G = 1$ , con  $c$  la rapidez de la luz en el vacío y  $G$  la constante gravitacional.

Por otro lado, un campo axialmente simétrico implica que el elemento de línea  $ds^2$  (en coordenadas cilíndricas, con  $\varphi$  la coordenada acimutal) es invariante bajo la transformación  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ; es decir, el espacio-tiempo es invariante bajo rotaciones.

---

<sup>1</sup>Se está utilizando la notación de índices latinos que van desde 1 a 3, mientras que los índices griegos van desde 0 a 3.

Por ende, para un campo gravitacional estático y axialmente simétrico, el elemento de línea en coordenadas canónicas de Weyl  $(t, \varphi, r, z)$  puede ser escrito de la siguiente manera [28–30]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{-2\Phi} [r^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda} (dr^2 + dz^2)], \quad (2.2)$$

donde las funciones métricas  $\Phi$  y  $\Lambda$  solo dependen de  $r$  y  $z$ . Cabe resaltar que el eje de simetría es  $r = 0$ ; para  $z$  fijo,  $r$  aumenta monótonamente al infinito; para  $r$  fijo,  $z$  aumenta monótonamente en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , y  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Si se consideran las ecuaciones de Einstein en el vacío, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [31]:

$$\Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \Phi_{,zz} = 0, \quad (2.3)$$

$$\Lambda_{,r} = r (\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2), \quad (2.4)$$

$$\Lambda_{,z} = 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z}, \quad (2.5)$$

donde  $\Phi$  satisface la ecuación de Laplace y  $\Lambda$ , por ser la ecuación (2.3) condición de integrabilidad de las ecuaciones (2.4) y (2.5), se puede determinar por cuadraturas dada la función métrica  $\Phi$ :

$$\Lambda[\Phi] = \int_{eje}^{r,z} r [(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) dr + 2\Phi_{,r}\Phi_{,z} dz]. \quad (2.6)$$

La importancia de la ecuación lineal (2.3) radica en la facilidad que brinda para superponer soluciones de  $\Phi$ , como por ejemplo para el caso particular de superponer un agujero negro con un disco anular según se muestra en el siguiente capítulo. Y como se expone en la ecuación (2.6), una vez obtenida  $\Phi$  en principio se puede obtener  $\Lambda$ .

## 2.2. Líneas geodésicas

En un espacio euclidiano la distancia más corta entre dos puntos está dada por la longitud de una línea recta que conecta esos dos puntos. En el caso de la relatividad general, para un espacio-tiempo se debe generalizar la noción de línea recta, esto ya que se debe tener en cuenta la curvatura del espacio-tiempo en caso de que no sea minkowskiano. Por ende, sea una curva  $\gamma(\tau)$  con vector tangente  $\mathbf{u}$  sobre una superficie  $M^2$ ; a partir del elemento de línea sobre  $M$ , definido como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.7)$$

se puede definir un elemento de longitud a lo largo de la curva como:

$$dl = \sqrt{\epsilon ds^2} = \sqrt{\epsilon g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}, \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Nótese que la deducción de la ecuación de las geodésicas se puede hacer a cualquier “espacio curvado” (o más propiamente, variedad riemanniana) a pesar de que en este caso se limite al espacio-tiempo.

donde  $\epsilon$  se denomina el indicador del vector tangente  $\mathbf{u}$  y toma los siguientes valores en caso de que sea vector espacial, temporal o nulo; respectivamente:

- $\epsilon = 1$ , para  $u^\mu u_\mu > 0$ .
- $\epsilon = -1$ , para  $u^\mu u_\mu < 0$ .
- $\epsilon = 0$ , para  $u^\mu u_\mu = 0$ .

En términos de las componentes del vector tangente,  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ , el elemento de longitud se expresa como:

$$dl = \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau, \quad (2.9)$$

de tal manera que la longitud de la curva entre dos puntos  $a$  y  $b$  está dada por la ecuación:

$$l = \int_a^b \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau. \quad (2.10)$$

Se define la geodésica como una curva cuya longitud tiene un valor estacionario con respecto a variaciones de la curva que dejan fijos los extremos [32, 33]; es decir, al aplicar la variación por la transformación  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$  se espera que para los puntos estacionarios  $\delta l = 0$ , tal que para los puntos fijos extremos  $\delta x^\mu(a) = \delta x^\mu(b) = 0$ , entonces:

$$\delta \int_a^b \sqrt{\epsilon g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau = 0. \quad (2.11)$$

Sea  $\omega \equiv g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ , la solución de la ecuación (2.11) está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange que toman la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \omega}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial \omega}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \frac{\partial \omega}{\partial u^\sigma}. \quad (2.12)$$

Al considerar a  $\tau$  un parámetro afín tal que  $\tau = \tilde{A}l + \tilde{B}$ , con  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  constantes arbitrarias, entonces  $d\omega/d\tau = 0$ . Así, el lado derecho de la ecuación (2.12) se anula; de lo cual por la definición de  $\omega$  al reemplazarlo se obtiene:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.13)$$

la ecuación de las geodésicas. La línea geodésica se puede entender como una generalización de la línea recta, puesto que la primera corresponde a la línea de dirección constante (o trayectoria de distancia más corta, según la deducción realizada mediante el cálculo variacional) en un espacio-tiempo no necesariamente minkowskiano.

Cabe resaltar que en la deducción de la ecuación (2.13) se supuso tácitamente que la curva  $\gamma(\tau) = x^\mu(\tau)$  no tiene direcciones nulas, o de lo contrario para un vector tangente nulo se obtendría de la ecuación (2.8) que  $dl = d\tau = 0$  y por ende la ecuación (2.13) no sería aplicable ya que presentaría problemas. Para resolver este problema, se propone que las geodésicas nulas tengan vector tangente nulo  $u^\mu = dx^\mu/d\kappa$ , con  $\kappa$  algún parámetro variando a lo largo de la línea geodésica nula; así,

se define  $\omega \equiv g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \equiv \text{constante}$  de manera que el lado derecho de la ecuación (2.12) se anula y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\kappa^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\kappa} \frac{dx^\nu}{d\kappa} = 0, \quad (2.14)$$

de este modo, las líneas geodésicas nulas son curvas que satisfacen la ecuación (2.14) para algún parámetro  $\kappa$  con la condición de que  $\omega = u^\mu u_\mu = 0$  o lo que es lo mismo [32]:

$$\omega = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\kappa} \frac{dx^\nu}{d\kappa} = 0. \quad (2.15)$$

Se puede apreciar que la ecuación (2.14) mantiene la misma forma que la ecuación (2.13), salvo por el parámetro  $\kappa$ ; lo cual también se puede deducir de la formulación de la geodésica como una curva en la cual su vector tangente se transporta paralelamente [33], tal que su vector tangente satisface:

- $u^\mu u_\mu > 0$ , para geodésicas espaciales.
- $u^\mu u_\mu < 0$ , para geodésicas temporales.
- $u^\mu u_\mu = 0$ , para geodésicas nulas.

Además, por la definición de la cuadiaceleración ( $\mathbf{a} = a^\mu e_\mu$ ) a partir de la derivada covariante de la cuadrivelocidad, fácilmente se aprecia que  $a^\mu = 0$  proporciona la ecuación de las geodésicas. De esta manera, las geodésicas en el espacio-tiempo son líneas de mundo de partículas en caída libre. Así, las partículas masivas se mueven a través de geodésicas temporales con cuadrimomento por unidad de masa  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo propio; las partículas sin masa se mueven a través de geodésicas nulas con cuadrimomento  $u^\mu = dx^\mu/d\kappa$ , y a través de las geodésicas espaciales se mueven las hipotéticas partículas denominadas taquiones, cuya rapidez es mayor que la rapidez de la luz en el vacío. Estas últimas no son de interés en esta investigación debido a su carácter no físico.

Al hacer una comparación de la ecuación de las geodésicas (2.13) con la segunda ley de Newton, si se interpreta el término  $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}$  como la aceleración de la partícula, entonces el término  $-\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$  se podría llamar la fuerza por unidad de masa actuando sobre la partícula en el campo gravitacional. Así, las componentes del tensor métrico ( $g_{\mu\nu}$ ) se pueden comparar con el “potencial” del campo gravitacional y su derivada con la “intensidad” del campo ( $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ) [34].

### 2.3. Movimiento de partículas de prueba

Como ya se mencionó previamente, el movimiento de una partícula de prueba<sup>3</sup> libre en un campo gravitacional está dado por una línea geodésica. Por ende, con el fin de determinar las ecuaciones de movimiento de esta partícula en el campo gravitacional con una métrica dada por la ecuación (2.2), se considera que estas partículas

<sup>3</sup>Partícula que no influye en el espacio-tiempo sobre el cual se mueve.

cumplan con el principio de mínima acción; de esta manera, se utiliza el formalismo lagrangiano partiendo de la geometría del espacio-tiempo como se muestra en las dos siguientes ecuaciones:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.16)$$

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.17)$$

donde  $\tau$  es el parámetro afín a lo largo de la geodésica y físicamente corresponde al tiempo propio para las partículas que describen geodésicas temporales. Es decir, conocida la métrica dada por la ecuación (2.16), se determina la función lagrangiana  $\mathcal{L}$  de (2.17) que para el caso del espacio-tiempo estático y axialmente simétrico corresponde a:

$$2\mathcal{L} = -e^{2\Phi} \dot{t}^2 + e^{-2\Phi} [r^2 \dot{\varphi}^2 + e^{2\Lambda} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2)], \quad (2.18)$$

donde el punto denota derivación con respecto al parámetro  $\tau$ .

Esta función lagrangiana satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.19)$$

donde el momento generalizado y su derivada con respecto al parámetro  $\tau$  respectivamente se definen de la siguiente manera:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}. \quad (2.20)$$

Para las coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, r, z)$ , de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene respectivamente:

$$\ddot{t} + 2\Phi_{,r} \dot{r} \dot{t} + 2\Phi_{,z} \dot{z} \dot{t} = 0, \quad (2.21)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \left[ \frac{1}{r} - \Phi_{,r} \right] \dot{r} \dot{\varphi} - 2\Phi_{,z} \dot{\varphi} \dot{z} = 0, \quad (2.22)$$

$$\ddot{r} + (\Lambda_{,r} - \Phi_{,r}) (\dot{r}^2 - \dot{z}^2) + 2(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}) \dot{r} \dot{z} + r e^{-2\Lambda} \left[ (r\Phi_{,r} - 1) \dot{\varphi}^2 + \frac{e^{4\Phi}}{r} \Phi_{,r} \dot{t}^2 \right] = 0, \quad (2.23)$$

$$\ddot{z} + (\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}) (\dot{z}^2 - \dot{r}^2) + 2(\Lambda_{,r} - \Phi_{,r}) \dot{r} \dot{z} + e^{-2\Lambda} \Phi_{,z} [r^2 \dot{\varphi}^2 + e^{4\Phi} \dot{t}^2] = 0. \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.21)-(2.24) son las cuatro ecuaciones diferenciales no lineales de movimiento de una partícula de prueba libre en un campo gravitacional estático y axialmente simétrico.

Y los respectivos momentos generalizados son:

$$p_t = -e^{2\Phi} \dot{t}, \quad (2.25)$$

$$p_\varphi = r^2 e^{-2\Phi} \dot{\varphi}, \quad (2.26)$$

$$p_r = e^{2(\Lambda-\Phi)} \dot{r}, \quad (2.27)$$

$$p_z = e^{2(\Lambda-\Phi)} \dot{z}, \quad (2.28)$$

de lo cual se obtiene que el hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = 2\mathcal{L} - \mathcal{L} = \mathcal{L}, \quad (2.29)$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{L}, \quad (2.30)$$

esto implica que no hay energía potencial en el problema; como se aprecia en la ecuación (2.17), la energía cinética es la única que contribuye a la energía mecánica.

Por otro lado, para el caso particular de la métrica en (2.2), se aprecia que en su función lagrangiana (2.17) no aparecen las coordenadas  $t$  y  $\varphi$ , esto indica que hay dos cantidades conservadas debido a que dichas coordenadas son cíclicas. Entonces, se introducen las constantes de movimiento (energía específica  $E$  y momento angular específico  $L$  con respecto a infinito) determinadas por la conservación del momento generalizado correspondiente a dichas coordenadas:

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow E = -p_t = \text{constante}, \quad (2.31)$$

$$\frac{dp_\varphi}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \rightarrow L = p_\varphi = \text{constante}, \quad (2.32)$$

de manera que  $E^2 = e^{4\Phi} \dot{t}^2$ , resultado de comparar (2.25) con (2.31), y  $L^2 = r^4 e^{-4\Phi} \dot{\varphi}^2$ , resultado de comparar (2.26) con (2.32), permiten escribir la función lagrangiana de la ecuación (2.18) con la siguiente forma:

$$2\mathcal{L} = -\frac{E^2}{e^{2\Phi}} + \frac{L^2 e^{2\Phi}}{r^2} + e^{2(\Lambda-\Phi)} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.33)$$

### 2.3.1. Geodésicas ecuatoriales en el espacio-tiempo de Weyl

En este caso se procede a estudiar las geodésicas temporales y nulas. Para ello se tiene en cuenta que  $2\mathcal{L} = \omega = \epsilon$  (véase la definición de  $\omega$  en la sección 2.2), tal que  $\epsilon$  toma los dos siguientes valores:

- Geodésicas temporales ( $\epsilon = -1$ ):  $2\mathcal{L} = -1$ , para las geodésicas trazadas por partículas con masa.
- Geodésicas nulas ( $\epsilon = 0$ ):  $2\mathcal{L} = 0$ , para las geodésicas trazadas por partículas sin masa (los fotones).

Por ende, con el fin de estudiar las partículas de prueba libre en el plano ecuatorial, se toma  $z = 0$  en la ecuación (2.33); además, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.26) y (2.32), se determinan las órbitas mediante la coordenada radial  $r$  y acimutal  $\varphi$ , de acuerdo a la solución de las siguientes dos ecuaciones de movimiento:

$$\dot{r}^2 = e^{-2\Lambda} \left[ E^2 + e^{2\Phi} \epsilon - \frac{L^2}{r^2} e^{4\Phi} \right], \quad (2.34)$$

$$\dot{\varphi} = r^{-2} L e^{2\Phi}. \quad (2.35)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.34), se puede determinar el potencial efectivo  $V_{ef}$  al escribir la ecuación de la siguiente forma [11]:

$$\frac{E^2}{2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 e^{2\Lambda} + \frac{e^{2\Phi}}{2} \left[ \frac{L^2}{r^2} e^{2\Phi} - \epsilon \right], \quad (2.36)$$

$$\rightarrow V_{ef} = e^{2\Phi} \left[ \frac{L^2}{r^2} e^{2\Phi} - \epsilon \right], \quad (2.37)$$

donde  $E$  se puede interpretar como la energía mecánica específica de la partícula de prueba y el potencial efectivo, dado que se está considerando  $z = 0$ , solo depende de la coordenada radial  $r$ .

De la ecuación (2.2) se aprecia que la métrica de Weyl es asintóticamente plana si en el infinito (o “muy lejos” del origen de coordenadas) las funciones métricas  $\Phi$  y  $\Lambda$  se anulan, permitiendo que el espacio-tiempo tenga un comportamiento minkowskiano. Por consiguiente, para el potencial efectivo en el plano ecuatorial se aprecia que por la ecuación (2.37):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef} = -\epsilon, \quad (2.38)$$

es decir, para geodésicas ecuatoriales nulas o temporales se obtiene que cuando  $r \rightarrow \infty$  el potencial efectivo tiende a 0 o 1, respectivamente.

Por otro lado, mediante un análisis cualitativo del potencial  $V_{ef}$  se pueden determinar las órbitas circulares inestables y las órbitas circulares estables, dadas por los máximos y mínimos de  $V_{ef} = V_{ef}(r)$  (véase la figura 2.1).

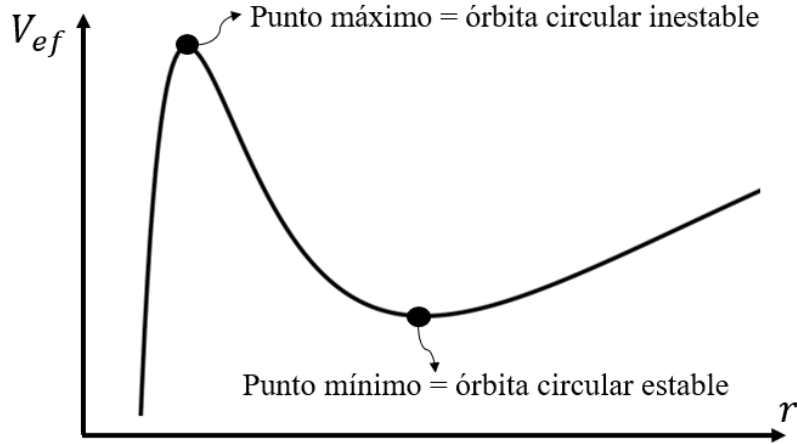


Figura 2.1: Bosquejo del potencial efectivo como función del radio  $r$  con sus puntos máximos y mínimos.

Para determinar los máximos y mínimos del potencial efectivo  $V_{ef}(r)$ , se calcula la primera derivada radial del potencial efectivo y se iguala a cero:

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dr} \right|_{r=r_c} = 0, \quad (2.39)$$

$$\rightarrow L^2 e^{2\Phi} (2r\Phi_{,r} - 1) - r^3 \Phi_{,r} \epsilon = 0, \quad (2.40)$$

las raíces de la ecuación (2.40) son los radios  $r_c$  de las órbitas circulares temporales (para  $\epsilon = -1$ ) y nulas (para  $\epsilon = 0$ ). Se aprecia que el radio de las órbitas circulares temporales depende del momento angular específico  $L$ ; puesto que para órbitas circulares nulas la ecuación (2.40) se reduce a [12]:

$$2r\Phi_{,r} - 1 = 0. \quad (2.41)$$

Es por esto que el momento angular específico  $L$  para las partículas masivas que trazan órbitas circulares está dado por la siguiente expresión [12]:

$$L^2 = \frac{r^3\Phi_{,r}e^{-2\Phi}}{1 - 2r\Phi_{,r}}. \quad (2.42)$$

Nótese que por estar elevado al cuadrado el momento angular específico, se debe cumplir la condición  $0 \leq r\Phi_{,r} < 1/2$ . Además, como el radio de la órbita circular es constante ( $r = r_c = \text{constante}$ ), entonces por la ecuación (2.36) se obtiene que  $E^2 = V(r)$ , o escrito de otra forma al reemplazar el momento angular específico de la ecuación (2.42) en la ecuación (2.37):

$$E^2 = \frac{e^{2\Phi}(1 - r\Phi_{,r})}{1 - 2r\Phi_{,r}}, \quad (2.43)$$

donde también se debe cumplir la condición  $0 \leq r\Phi_{,r} < 1/2$ .

La condición de estabilidad de las órbitas circulares establece que el potencial efectivo  $V_{ef}$  debe ser un mínimo, lo cual en términos de la segunda derivada radial implica:

$$\left. \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \right|_{r=r_c} > 0. \quad (2.44)$$

Es decir, para órbitas circulares nulas, de la ecuación (2.41) se obtiene:

$$\Phi_{,r} + r\Phi_{,rr} > 0, \quad (2.45)$$

y para órbitas circulares temporales, de la ecuación (2.40), se obtiene [12]:

$$r\Phi_{,rr} + 3\Phi_{,r} + 2r\Phi_{,r}^2(2r\Phi_{,r} - 3) > 0, \quad (2.46)$$

de nuevo, con la condición  $0 \leq r\Phi_{,r} < 1/2$ . Del mismo modo, se presenta órbita circular inestable si hay un punto máximo en el potencial efectivo, en cuyo caso las expresiones en (2.45) y (2.46) serán menores a cero.

Adicionalmente, para partículas masivas, al ser igualada a cero la derivada radial de  $L^2$  se obtiene:

$$\frac{dL^2}{dr} = r\Phi_{,rr} + 3\Phi_{,r} + 2r\Phi_{,r}^2(2r\Phi_{,r} - 3) = 0, \quad (2.47)$$

$$\rightarrow \frac{dL^2}{dr} = \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = 0, \quad (2.48)$$

por consiguiente, si para  $L^2 = L^2(r)$  hay una posición donde su pendiente sea nula ( $dL^2/dr = 0$ ); implica que hay una región donde la pendiente es positiva  $dL^2/dr > 0$ ,

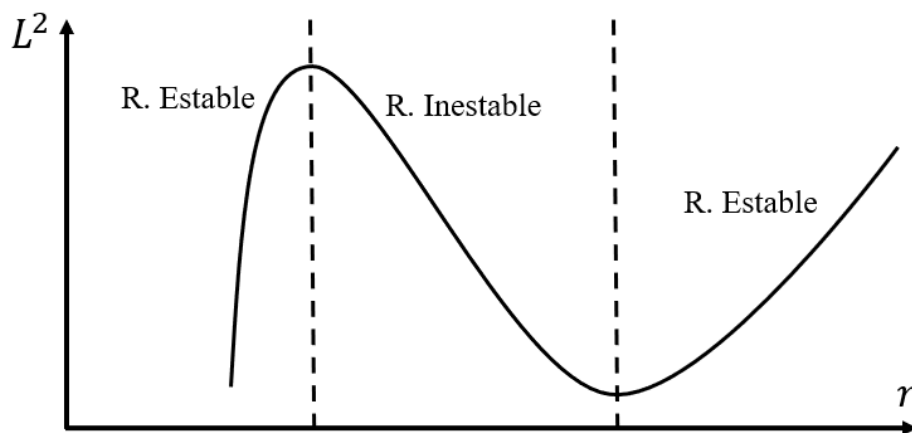


Figura 2.2: Bosquejo del momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular  $r$  para geodésicas temporales con sus regiones estables e inestables.

denominada región estable, y otra donde la pendiente es negativa  $dL^2/dr < 0$ , denominada región inestable (véase la figura 2.2).

Como se menciona en el artículo de López-Suspés & González [11], la expresión  $dL^2/dr \geq 0$  es completamente equivalente a la siguiente expresión:

$$L \frac{dL}{dr} \geq 0, \quad (2.49)$$

donde la igualdad permite determinar el radio de la órbita circular estable y la desigualdad define la condición de estabilidad de órbitas circulares para perturbaciones radiales. Esto último es conocido como el criterio de estabilidad de Rayleigh (véase la sección 27 del libro [35] que trata sobre el criterio de estabilidad para un fluido en rotación y el artículo de Letelier [36] que trata el criterio de estabilidad de Rayleigh para una partícula moviéndose en una órbita circular atraída por un campo gravitacional).

En la figura 2.2 se ilustra una función  $L^2 = L^2(r)$  que tiene un punto máximo y un punto mínimo; este comportamiento se aprecia al estudiar el movimiento de partículas de prueba con masa en, por ejemplo, campos de una singularidad desnuda [37]. No obstante, cuando se trata de agujeros negros de Schwarzschild ubicados en el centro de coordenadas, se tiene la expectativa física de que el movimiento de las partículas sea más caótico cuando se acerca a  $r = 0$  (horizonte de sucesos) por la derecha, como se espera del teorema de Israel [38]; esto último se menciona en [39] para el espacio-tiempo gamma y en [11] para algunos casos particulares del espacio-tiempo de Weyl. Por ende, para que el campo gravitacional presente el esperado comportamiento atractivo, se requiere que el momento angular específico sea muy alto para mantener la órbita cerca del horizonte de sucesos; entonces  $L^2 = L^2(r)$  debe ser una función cóncava hacia arriba con solo las regiones inestable y estable que están más a la derecha en dicha figura, es decir,  $L^2$  solo tiene un punto mínimo. Así, el valor mínimo del momento angular específico  $L^2$  está dado por el radio de

la última órbita circular ( $r_{ms}$ ), también conocida como la órbita circular marginalmente estable. Por lo mencionado previamente sobre el criterio de estabilidad, para determinar el radio  $r_{ms}$  se utiliza la expresión:

$$r\Phi_{,rr} + 3\Phi_{,r} + 2r\Phi_{,r}^2(2r\Phi_{,r} - 3) = 0, \quad (2.50)$$

para el caso de geodésicas temporales, y  $r_{ms}$  corresponde a un punto de inflexión del potencial efectivo.

Cabe resaltar que para geodésicas nulas, el radio de la órbita circular marginalmente estable se determina con la expresión:

$$\Phi_{,r} + r\Phi_{,rr} = 0. \quad (2.51)$$

De esta manera, por el criterio de estabilidad y la ecuación (2.45), se puede determinar la estabilidad de la órbita circular y el radio  $r_{ms}$  para fotones mediante la siguiente expresión [11]:

$$\frac{d}{dr}(r\Phi_{,r}) \geq 0, \quad (2.52)$$

donde  $r\Phi_{,r}$  es constante debido a la ecuación (2.41); de manera que su derivada radial siempre será igual a cero. Entonces, no se puede encontrar una solución para la desigualdad, lo cual implica que todas las órbitas de fotones son inestables en los campos de Weyl (no hay órbita circular marginalmente estable de fotones).

El radio de la órbita marginalmente ligada ( $r_{mb}$ ) está dado por la condición de que la energía específica  $E$  con respecto al infinito sea igual a la unidad, entonces de la ecuación (2.43) se obtiene la siguiente expresión [12]:

$$2r\Phi_{,r} + e^{2\Phi}(1 - r\Phi_{,r}) - 1 = 0, \quad (2.53)$$

cuya raíz proporciona el radio  $r_{mb}$  para partículas con masa y es un punto máximo del potencial efectivo, con momento angular específico  $L$  determinado de la ecuación (2.42), por ende la órbita de la partícula es inestable. Para partículas sin masa que trazan órbitas circulares inestables, la ecuación (2.41) permite determinar el radio de la órbita circular de fotones  $r_{ph}$ , tal que es la órbita límite bajo la cual el movimiento circular es imposible.

Por otro lado, en un movimiento circular uniforme ( $r = constante$  y  $z = constante$ ) la velocidad angular acimutal con respecto al infinito se define de la siguiente manera:

$$\Omega_T = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = constante, \quad (2.54)$$

donde  $\dot{t} = Ee^{-2\Phi}$  y  $\dot{\varphi} = r^{-2}L^2e^{2\Phi}$ , según las ecuaciones (2.25) y (2.26). De manera que para las partículas masivas que trazan geodésicas ecuatoriales circulares se obtiene [11]:

$$\Omega_T^2 = \frac{L^2e^{8\Phi}}{E^2r_c^4}, \quad (2.55)$$

con  $r_c$  las raíces de la ecuación (2.40) para  $\epsilon = -1$ . Y para las partículas sin masa que trazan geodésicas ecuatoriales circulares, debido a que  $2r\Phi_{,r} = 1$  equivale a  $L^2 e^{4\Phi} = E^2 r^2$ , se obtiene [11]:

$$\Omega_N = \frac{e^{2\Phi}}{r_c}, \quad (2.56)$$

con  $r_c$  las raíces de la ecuación (2.41). Como se menciona en [12], la velocidad angular  $\Omega_N$  denota la magnitud física límite de  $\Omega_T$ ; es decir,  $|\Omega_T| < \Omega_N$ , correspondiente al movimiento lumínico.

Es importante mencionar que las ecuaciones de esta subsección solo dependen de la función métrica  $\Phi$ , esto permite desarrollar un análisis cualitativo de las geodésicas ecuatoriales en el espacio-tiempo de Weyl; no obstante, la función métrica  $\Lambda$  ha de jugar un papel importante en la solución de las ecuaciones de movimiento como se aprecia en la ecuación (2.34).

### 2.3.2. Geodésicas en el plano $(r, z)$

En este caso se procede a estudiar las geodésicas temporales trazadas por partículas de prueba radialmente eyectadas hacia afuera desde la vecindad del centro en el primer cuadrante del plano  $(r, z)$ <sup>4</sup>, lo cual implica que las partículas presentan momento angular nulo, por ende se toma  $\varphi = \text{constante}$  y se recurre a la ecuación de las geodésicas (2.13). En dicha ecuación se requiere determinar los símbolos de Christoffel, que según las ecuaciones (2.21)-(2.24) para  $\varphi = \text{constante}$  son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Phi_{,r}; & \Gamma_{tz}^t &= \Phi_{,z}; \\ \Gamma_{tt}^r &= \Phi_{,r} e^{4\Phi-2\Lambda}; & \Gamma_{rr}^r &= \Lambda_{,r} - \Phi_{,r}; & \Gamma_{rz}^r &= \Lambda_{,z} - \Phi_{,z}; & \Gamma_{zz}^r &= -\Gamma_{rr}^r; \\ \Gamma_{tt}^z &= \Phi_{,z} e^{4\Phi-2\Lambda}; & \Gamma_{rr}^z &= -\Gamma_{rz}^r; & \Gamma_{rz}^z &= \Gamma_{rr}^r; & \Gamma_{zz}^z &= \Gamma_{rz}^r. \end{aligned}$$

Debido a que la ecuación de las geodésicas es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden, se debe implementar dos condiciones iniciales con el fin de obtener solución única al resolverlas. Para  $\tau = \tau_0$ , la primera condición es la posición inicial de cada partícula  $x_0^\lambda = x^\lambda(\tau_0)$  y la segunda condición es su cuadrivelocidad inicial  $\dot{x}_0^\lambda = \dot{x}^\lambda(\tau_0)$ ; donde  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$  en este caso de geodésicas en el plano meridional.

Como se muestra en [12], la cuadrivelocidad  $u^\lambda = e_{\hat{\kappa}}^\lambda u^{\hat{\kappa}}$  se puede parametrizar en términos de la rapidez  $\hat{v}$  y la dirección  $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$  medida en una tétrada ortonormal local estática  $(x^\beta)$  hecha de vectores unitarios (sin suma sobre  $\kappa$ ):

$$e_{\hat{\kappa}}^\lambda = |g_{\kappa\kappa}|^{-1/2} \delta_{\hat{\kappa}}^\lambda, \quad (2.57)$$

cada uno apuntando a lo largo de la  $\kappa$ -ésima coordenada global de Schwarzschild; donde las componentes de la cuadrivelocidad son:

$$u^{\hat{\kappa}} = \hat{\gamma}(1, \hat{v} \cos \hat{\mu}, \hat{v} \sin \hat{\mu} \cos \hat{\nu}, \hat{v} \sin \hat{\mu} \sin \hat{\nu}), \quad (2.58)$$

<sup>4</sup>El plano  $(r, z)$  también se puede denominar plano meridional como en la subsección 3.2.1 del libro [40]; sin embargo, téngase en cuenta que en el presente trabajo de investigación únicamente se estudia las geodésicas radialmente eyectadas en dicho plano.

con  $\hat{\gamma} = (1 - \hat{v}^2)^{-1/2}$  el factor de Lorentz.

## Geodésicas en la superposición de agujero negro con disco anular

### 3.1. Espacio-tiempo de un agujero negro superpuesto con un disco anular

Particularizando lo previamente mencionado sobre el espacio-tiempo de Weyl para el caso de la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco anular [23], se acude a las coordenadas esferoidales oblatas debido a la simetría del problema<sup>1</sup>. Para ello, se define:

$$r^2 = a^2 (1 + x^2) (1 - y^2), \quad (3.1)$$

$$z = axy, \quad (3.2)$$

tal que las coordenadas esferoidales oblatas  $(x, y)$ , en función de las coordenadas cuasi-cilíndricas de Weyl  $(r, z)$ , son:

$$x^2 = \frac{\sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2} + (r^2 + z^2 - a^2)}{2a^2}, \quad (3.3)$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2} - (r^2 + z^2 - a^2)}{2a^2},$$

donde  $a$  es el radio interno del disco, con  $a \geq \sqrt{3}m$ . De esta manera, se introducen las funciones métricas  $\Phi$  y  $\Lambda$  definidas en el artículo [23] de manera explícita y exacta como:

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right] + \frac{\alpha y}{a(x^2 + y^2)}, \quad (3.4)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \eta^2} \right] - \frac{\alpha^2}{4a^2} \left[ \frac{1 - y^2}{(x^2 + y^2)^4} \right] A(x, y) + \alpha \left[ \frac{1 - y}{x^2 + y^2} \right] (\Lambda_1 - \Lambda_2), \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Porque en el artículo de González y Gutiérrez-Piñeres [23] se considera el disco anular ubicado en el plano  $z = 0$ .

donde

$$A(x, y) = x^4(9y^2 - 1) + 2x^2y^2(y^2 + 3) + y^4(y^2 - 1), \quad (3.6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{ay(1-y)(1+x^2) - mx(1+y)(\zeta-1)(1-\eta)}{[ax + m(1-\zeta-\eta)]^2 + a^2(1-y)^2}, \quad (3.7)$$

$$\Lambda_2 = \frac{ay(1-y)(1+x^2) - mx(1+y)(\zeta+1)(1-\eta)}{[ax - m(1+\zeta-\eta)]^2 + a^2(1-y)^2}, \quad (3.8)$$

y se resalta que  $\alpha$  es una constante arbitraria tal que  $\alpha > 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Además,  $(\zeta, \eta)$  son las coordenadas esferoidales prolatas<sup>2</sup>, las cuales están definidas de la siguiente manera:

$$r^2 = m^2 (\zeta^2 - 1) (1 - \eta^2), \quad (3.9)$$

$$z = m\zeta\eta, \quad (3.10)$$

tal que  $1 \leq \zeta < \infty$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$  y  $m$  es la masa del agujero negro.

Para presentar las soluciones en coordenadas de Schwarzschild se tiene en cuenta la relación entre las coordenadas canónicas de Weyl y las coordenadas cuasi-esféricas mostradas en el apéndice A; para ello, se reescriben las ecuaciones en (A.4) de la siguiente forma:

$$\rho \sin \theta = \sqrt{r^2 + m^2 \sin^2 \theta} + m \sin \theta, \quad \rho \cos \theta = z + m \cos \theta. \quad (3.11)$$

Dado que las partículas de un fluido de polvo se mueven a lo largo de geodésicas, es adecuado ubicar el borde interno del disco de polvo cerca al radio de la órbita circular marginalmente estable del agujero negro (esto es  $\rho_{ms} = 6m$ , véase el apéndice B que trata sobre el agujero negro de Schwarzschild). Es por ello que en este trabajo de investigación se ubica el borde interno del disco en  $\rho = a = 6m$  para las geodésicas meridionales y en  $\rho = a = 9m$  para las geodésicas ecuatoriales, con el fin de comparar los resultados obtenidos con lo realizado en el artículo [12].

## 3.2. Geodésicas ecuatoriales

Debido a que en este caso se toma  $z = 0$ , se pueden simplificar algunos términos de las funciones métricas presentadas en las ecuaciones (3.4) y (3.5) teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Si se considera  $x = \eta = 0$ , entonces se obtiene la región fuera del disco  $0 \leq r \leq a$ .
- Si se considera  $y = \eta = 0$ , entonces se obtiene la región dentro del disco  $r \geq a$ .
- Si se considera  $y = 1$ , entonces se obtiene el eje de simetría  $r = 0$ .

---

<sup>2</sup>Estas coordenadas son necesarias para expresar las soluciones del agujero negro de Schwarzschild que aparecen en el primer término de las ecuaciones (3.4) y (3.5).

Con la primera condición se obtienen las funciones métricas  $\Phi^f = \Phi(x = \eta = 0)$  y  $\Lambda^f = \Lambda(x = \eta = 0)$  expresadas de la siguiente manera:

$$\Phi^f = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right] + \frac{\alpha}{ay}, \quad (3.12)$$

$$\Lambda^f = \frac{\alpha a (1 - y)^2}{y} \left[ \frac{1}{m^2 (1 - \zeta)^2 + a^2 (1 - y)^2} - \frac{1}{m^2 (1 + \zeta)^2 + a^2 (1 - y)^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} \right] + \frac{\alpha^2 (1 - y^2)^2}{4a^2 y^4}, \quad (3.13)$$

por ende, el potencial efectivo fuera del disco ( $V_{ef}^f$ ) toma la siguiente forma:

$$V_{ef}^f = \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) e^{2\alpha/ay} \left[ \frac{L^2}{r^2} \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) e^{2\alpha/ay} - \epsilon \right], \quad (3.14)$$

donde  $y = \sqrt{1 - (r/a)^2}$  y  $\zeta = \sqrt{(r/m)^2 + 1}$ .

Así mismo, con la segunda condición se obtienen las funciones métricas  $\Phi^d = \Phi(y = \eta = 0)$  y  $\Lambda^d = \Lambda(y = \eta = 0)$  expresadas de la siguiente manera:

$$\Phi^d = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right], \quad (3.15)$$

$$\Lambda^d = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} \right] + \frac{\alpha^2}{4a^2 x^4}, \quad (3.16)$$

por ende, el potencial efectivo dentro del disco ( $V_{ef}^d$ ) toma la siguiente forma:

$$V_{ef}^d = \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) \left[ \frac{L^2}{r^2} \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) - \epsilon \right], \quad (3.17)$$

donde  $x = \sqrt{(r/a)^2 - 1}$  y  $\zeta = \sqrt{(r/m)^2 + 1}$ .

Para estudiar estas soluciones en coordenadas de Schwarzschild se deben tener en cuenta las siguientes relaciones, obtenidas de la ecuación (3.11) o, de forma equivalente, de la ecuación (A.4):

$$r = \sqrt{\rho(\rho - 2m)}, \quad z = 0, \quad (3.18)$$

lo cual implica que  $\rho = 2m$  es donde está ubicado el horizonte de sucesos. No obstante, para la representación gráfica de las geodésicas sobre el plano ecuatorial se utilizan las coordenadas cartesianas  $(X, Y)$  relacionadas con las coordenadas de Weyl de la siguiente manera:

$$X = (\sqrt{r^2 + m^2} + m) \cos \varphi, \quad (3.19)$$

$$Y = (\sqrt{r^2 + m^2} + m) \sin \varphi, \quad (3.20)$$

donde la evolución de  $r = r(t)$  y  $\varphi = \varphi(t)$  se obtienen de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento (2.34) y (2.35) mediante el método de Runge-Kutta de sexto orden según el artículo [41].

Se procede a hacer el análisis cualitativo del potencial efectivo dentro y fuera del disco; para ello, se tiene en cuenta el correspondiente valor que toma  $\epsilon$  para geodésicas temporales y nulas.

### 3.2.1. Geodésicas temporales

Para este caso se toma  $\epsilon = -1$  y  $\alpha/a = 1$ , por ende se obtiene el potencial efectivo mostrado en la figura 3.1. Se aprecia que el potencial efectivo presenta una discontinuidad de salto infinito en el borde interno del disco; esto debido a que el potencial fuera del disco tiende a infinito cuando  $r$  tiende al borde interno por izquierda ( $a^-$ ) y el potencial dentro del disco tiende a un valor finito cuando  $r$  tiende al borde interno por derecha ( $a^+$ ). El punto rojo en el potencial efectivo con momento angular específico  $L_{ms}^2 \approx 8.47m^2$  corresponde a la órbita circular marginalmente estable con radio  $\rho_{ms} \approx 0.437a$ , o de manera equivalente  $\rho_{ms} \approx 3.933m$ .

El valor de  $L_{ms}^2$  es obtenido de la ecuación (2.47), el cual corresponde al punto mínimo del momento angular específico fuera del disco representado en la figura 3.2. En esta última figura se muestran las regiones estables e inestables dentro y fuera del disco; cabe resaltar que la función  $L^2/m^2$  dentro del disco es equivalente a lo esperado en un campo gravitacional generado únicamente por un agujero negro (véase la figura B.1) pero con la condición de que  $\rho/a \geq 1$ , por ende la región de estabilidad<sup>3</sup> es  $a \leq \rho < \infty$  y  $13.5m^2 \leq L^2 < \infty$ , y la función  $L^2/m^2$  fuera del disco presenta la región de estabilidad  $\rho_{ms} \leq \rho < \rho_2 \approx 0.5539a$  y  $L_{ms}^2 \leq L^2 < \infty$ .

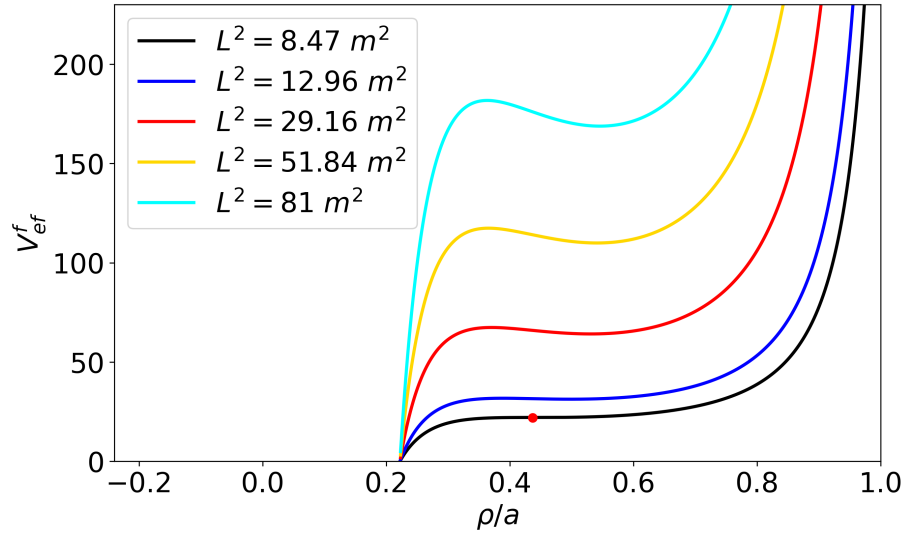
Además, de la ecuación (2.40) se define la siguiente función:

$$F(r) = L^2 e^{2\Phi} (2r\Phi_{,r} - 1) + r^3 \Phi_{,r}, \quad (3.21)$$

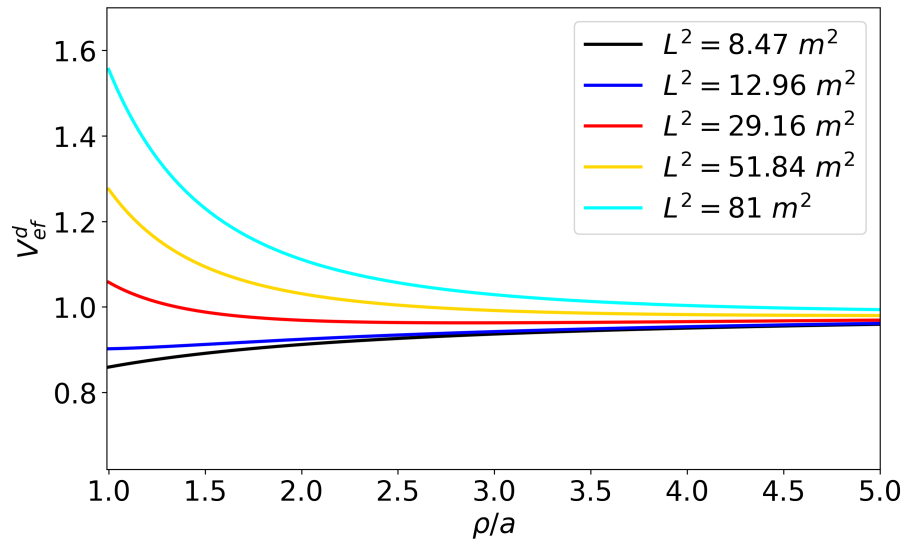
y se hace el cambio de variable  $r = \sqrt{\rho(\rho - 2m)}$  con el fin de graficar la función  $F(\rho/a)$  de la figura 3.3; donde se aprecia que al aumentar el momento angular específico, de las raíces de  $F(\rho/a)$ , se obtiene que el radio de la órbita circular inestable tiende a  $\rho_1 \approx 0.3600a$  y el radio de la órbita circular estable tiende a  $\rho_2 \approx 0.5539a$ . En la siguiente subsección se esclarece qué son los radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$  que sirven de asíntotas del momento angular específico fuera del disco (véase la figura 3.2(a)).

---

<sup>3</sup>Se recomienda no descartar que la condición de estabilidad para discos delgados se puede estudiar mediante perturbaciones de la forma expresada en la ecuación (21) del artículo [42]; sin embargo ese no es el enfoque que se da en este trabajo de investigación.

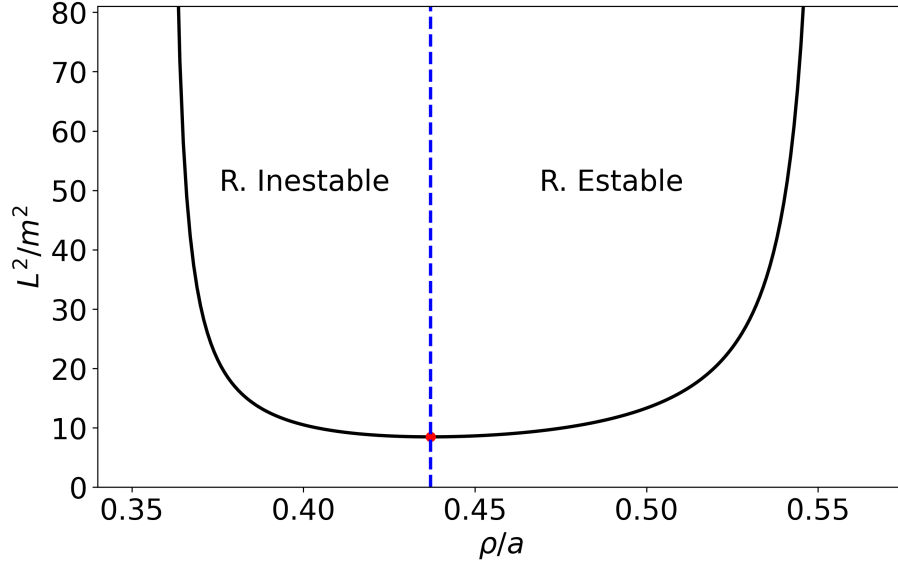


(a) Potencial efectivo fuera del disco.

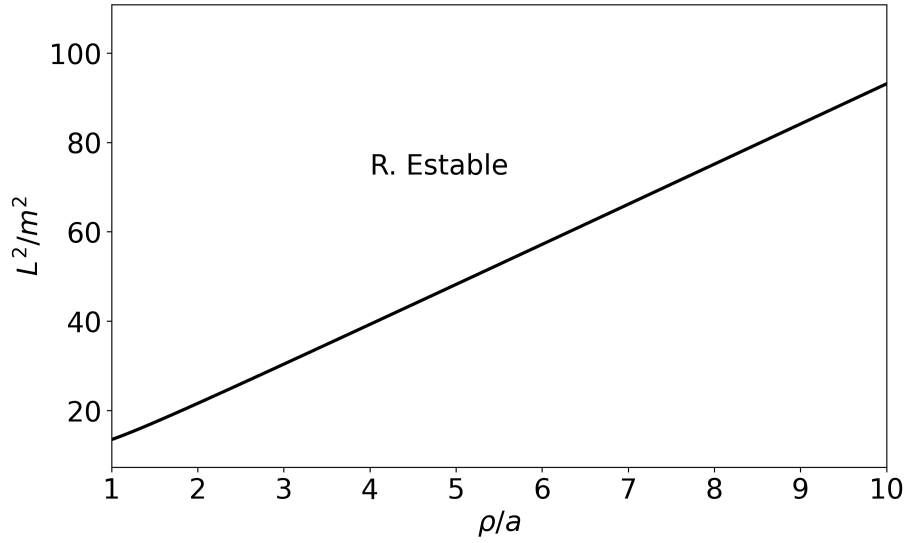


(b) Potencial efectivo dentro del disco.

Figura 3.1: Potencial efectivo como función de  $\rho/a$  para geodésicas temporales en el plano ecuatorial con diferentes valores del momento angular específico y un valor fijo de  $\alpha/a = 1$ . El punto rojo en a) corresponde a la órbita circular marginalmente estable de radio  $\rho/a \approx 0.437$ .



(a)  $L^2/m^2$  fuera del disco.



(b)  $L^2/m^2$  dentro del disco.

Figura 3.2: Momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular,  $\rho/a$ , para geodésicas temporales dentro y fuera del disco. El punto rojo en a), con coordenadas  $(\rho/a, L^2/m^2) = (0.437, 8.47)$ , corresponde a la órbita circular marginalmente estable.

En la figura 3.4 se pretende estudiar con más detalle el potencial fuera del disco para geodésicas temporales con  $\alpha/a = 1$ ; para ello, se fija un valor de momento angular específico  $L^2 = 12.96m^2$  y se toman tres valores de energía específica al cuadrado (esto es,  $E^2 = E_i$ ) teniendo en cuenta que el punto máximo local del potencial corresponde a la órbita circular inestable con energía  $E_{max}^2 = 31.760$  y el punto mínimo local del potencial corresponde a la órbita circular estable con energía  $E_{min}^2 = 31.276$ . De este modo, para  $E_{min}^2 < E_1 < E_{max}^2$  se obtiene que la partícula con masa queda confinada entre dos radios ( $B$  y  $C$ ), dando lugar a una órbita ligada,

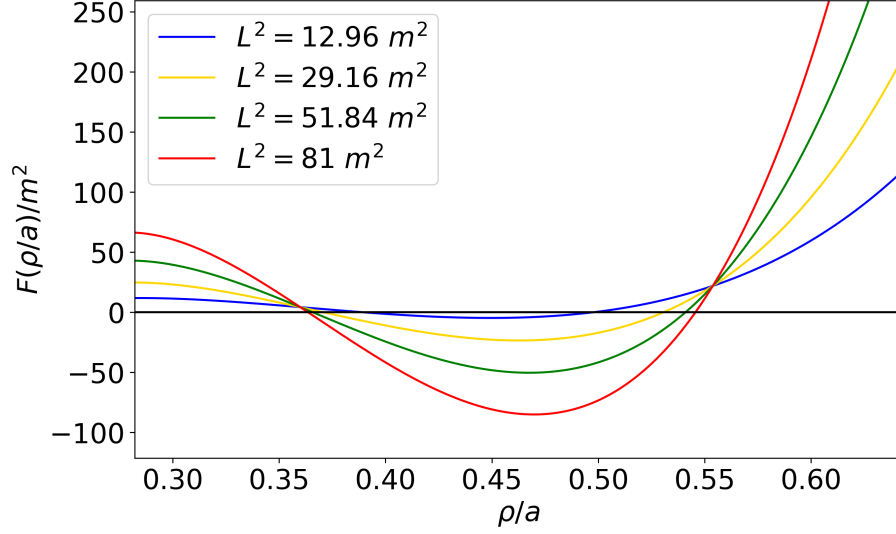


Figura 3.3: Comportamiento de la función  $F(\rho/a)$  para diferentes valores del momento angular específico. La línea negra horizontal permite visualizar las raíces de la función.

o se encuentra con un punto de retorno en el radio  $A$  para el caso de que sea eyectada hacia el disco con velocidad radial inicial  $\dot{\rho}(t=0) > 0$ ; para  $E_3 > E_{max}^2$  la partícula se encuentra con un punto de retorno en el radio  $H$ , en caso de que sea eyectada con  $\dot{\rho}(t=0) > 0$ , y para  $E_2 = E_{max}^2$  la partícula se encuentra con un punto de retorno en el radio  $D$ , en caso de que sea eyectada con  $\dot{\rho}(t=0) > 0$ , pero luego queda en una órbita circular inestable (contrario a los puntos de retorno en  $A$  y  $H$  donde la partícula cae inevitablemente hacia el horizonte de sucesos).

Figura	$L^2/m^2$	$E^2$	$\rho(t=0)$	$\varphi(t=0)$	$\dot{\rho}(t=0)$
3.5(a)	12.96	31.675	0.4593	$\pi/3$	0.3862
3.5(b)	12.96	31.760	0.5552	$\pi/3$	-0.3216
3.5(c)	12.96	31.900	0.3665	$\pi/3$	0.2604
3.6(b)	12.96	0.950	1.3162	$\pi/3$	0.0481
3.7(b)	51.84	1.100	5.1123	$\pi/3$	-0.3158

Cuadro 3.1: Condiciones iniciales para las geodésicas temporales fuera y dentro del disco presentadas en las figuras que aparecen en la primera columna.

Como caso particular, dadas las condiciones iniciales del cuadro 3.1: para  $E_1 = 31.675$  se obtiene la órbita ligada de la figura 3.5(a) con  $B = \rho/a \approx 0.4148$  y  $C = \rho/a \approx 0.5580$ , para  $E_2 = 31.760$  se obtiene la órbita circular inestable de la figura 3.5(b) y para  $E_3 = 31.900$  se obtiene la órbita de la figura 3.5(c) con  $H = \rho/a \approx 0.5717$ . En dichas figuras, se representan las circunferencias de radio  $B$ ,  $C$  y  $H$  con líneas discontinuas de color verde.

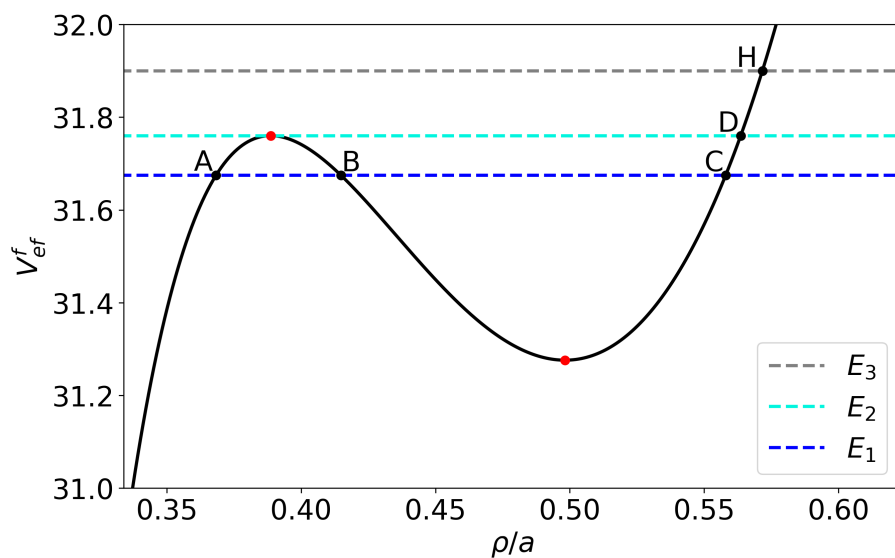
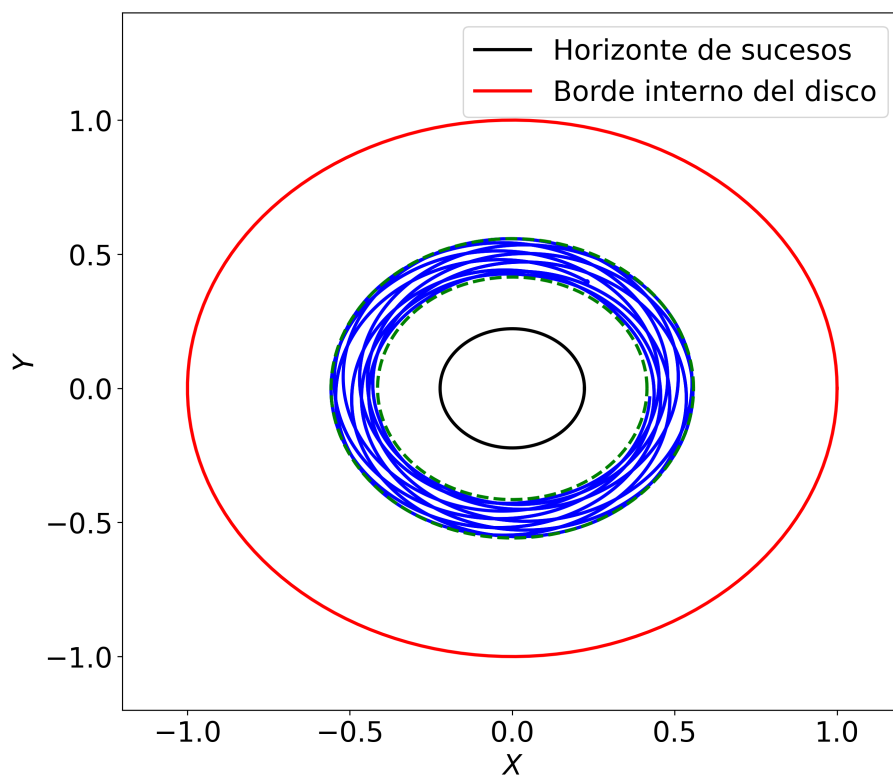
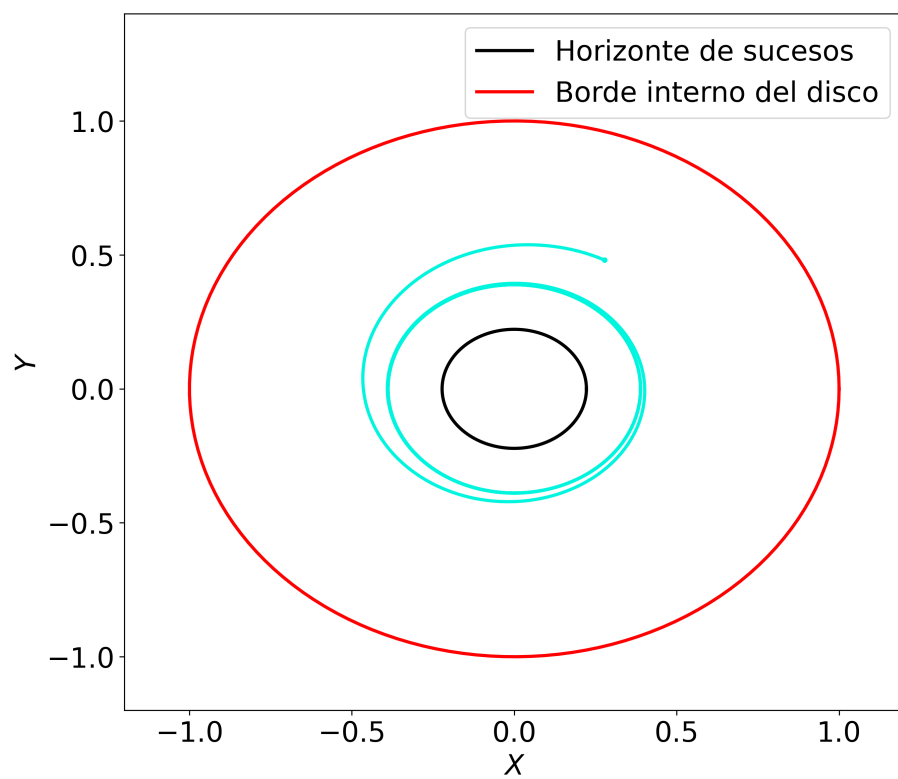


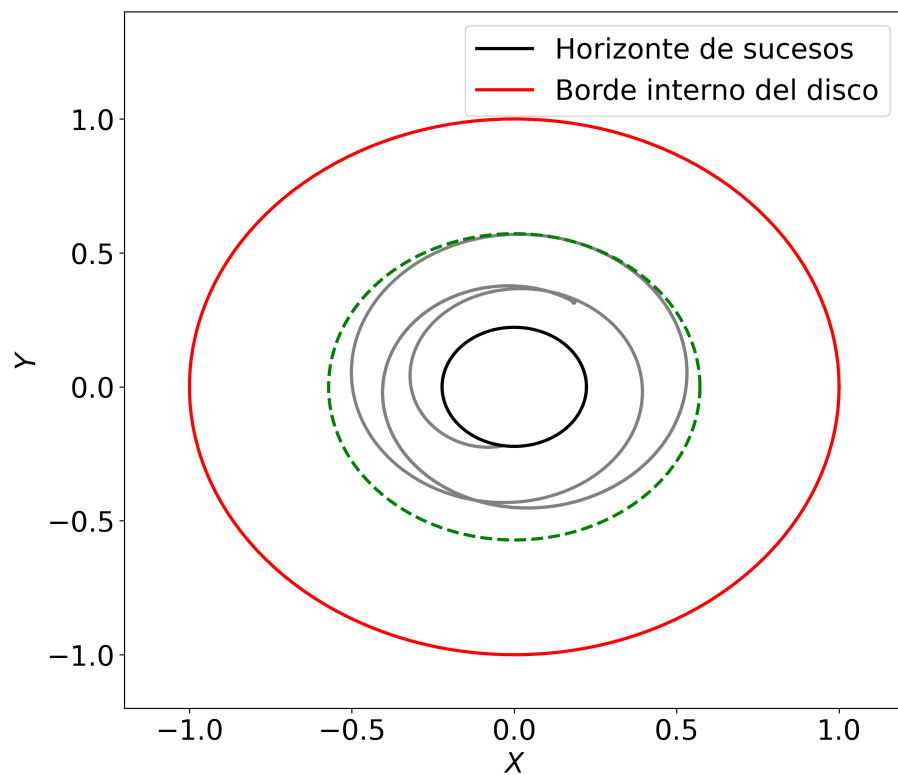
Figura 3.4: Potencial efectivo como función de  $\rho/a$  para geodésicas temporales fuera del disco con  $L^2 = 12.96m^2$ . Las líneas discontinuas corresponden a valores de energía específica al cuadrado.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.5: Geodésicas temporales fuera del disco con las condiciones iniciales establecidas en el cuadro 3.1.

En las figuras 3.6 y 3.7 se pretende estudiar con más detalle el potencial dentro del disco para geodésicas temporales con  $\alpha/a = 1$ ; para ello, en la primera figura se fija un valor de momento angular específico  $L^2 = 12.96m^2$  y en la segunda  $L^2 = 51.84m^2$ . En la figura 3.6(a) se toman dos valores de energía específica al cuadrado (esto es,  $E^2 = E_i$ ), teniendo en cuenta que para  $\rho/a \rightarrow \infty$  el potencial efectivo tiende a 1; entonces, para  $0.9022 \leq E_1 < 1$  se obtiene que la partícula se encuentra con un punto de retorno en el radio  $N$  al ser eyectada hacia el infinito con velocidad radial inicial  $\dot{\rho}(t=0) > 0$  y luego procede a caer hacia el agujero negro sin pasar del borde interno del disco, y para  $E_2 > 1$  la partícula no se encuentra con puntos de retorno, pero al caer hacia el agujero negro tampoco podrá pasar del borde interno del disco debido a la discontinuidad de salto infinito del potencial efectivo. En la figura 3.7(a) solo es posible tomar  $E_3 > 1$ , de tal modo que la partícula se encuentra con un punto de retorno  $P$  al ser eyectada hacia el agujero negro con velocidad radial inicial  $\dot{\rho}(t=0) < 0$ , pero luego se aleja hacia el infinito.

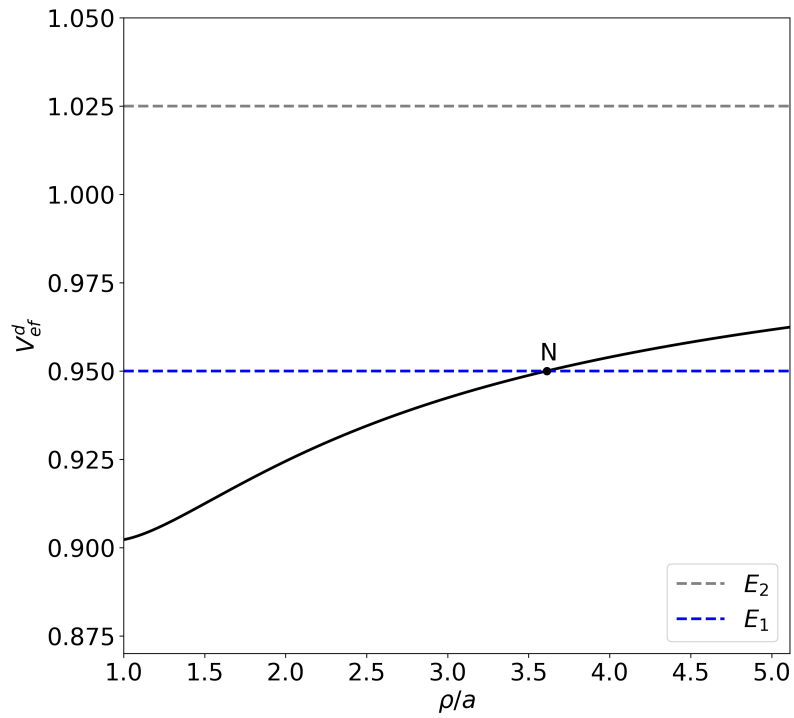
Como caso particular, dadas las condiciones iniciales del cuadro 3.1: para  $E_1 = 0.95$  se obtiene la órbita de la figura 3.6(b) con  $N = \rho/a \approx 3.6133$  y para  $E_3 = 1.1$  se obtiene la órbita no ligada de la figura 3.7(b) con  $P = \rho/a \approx 1.4711$ . En dichas figuras, se representan las circunferencias de radio  $N$  y  $P$  con líneas discontinuas de color verde. Estas geodésicas dentro del disco representan el movimiento trazado por las partículas del fluido de polvo.

### 3.2.2. Geodésicas nulas

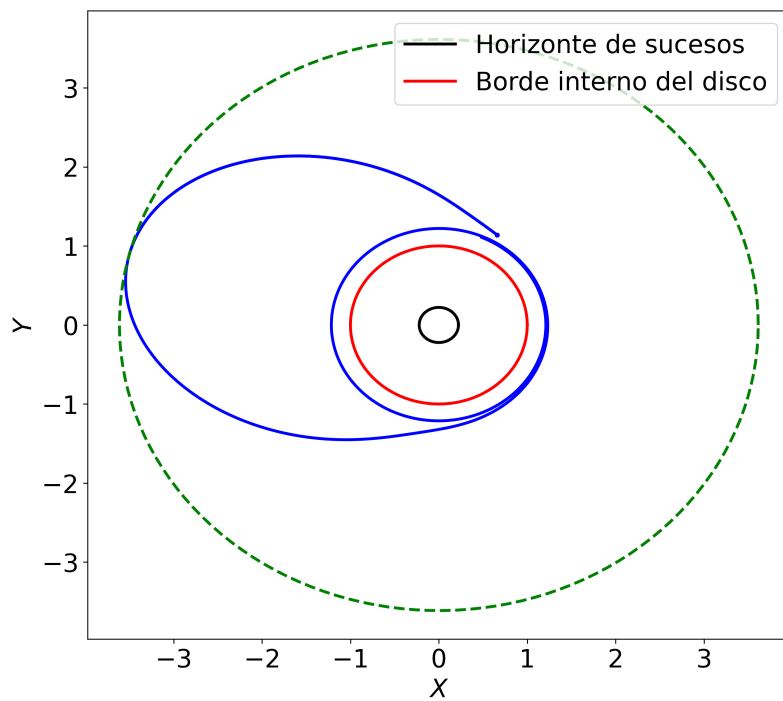
Para este caso se toma  $\epsilon = 0$  y  $\alpha/a = 1$ , por ende se obtiene el potencial efectivo mostrado en la figura 3.8. Se aprecia que el potencial efectivo, al igual que para las geodésicas temporales, presenta una discontinuidad de salto infinito en el borde interno del disco.

El potencial efectivo para las geodésicas nulas presenta un comportamiento muy similar al de los potenciales efectivos de la figura 3.4 y la figura 3.7(a); por ende, los fotones han de trazar las órbitas previamente explicadas para dichas figuras. Sin embargo, cabe resaltar que los fotones en este campo gravitacional generado por la superposición de un agujero negro con un disco anular presentan una órbita circular inestable de radio  $\rho_1 \approx 0.3600a$  y una órbita circular estable de radio  $\rho_2 \approx 0.5539a$ ; esta órbita circular estable es debida al comportamiento asintótico del potencial efectivo en el borde interno del disco cuando  $\rho \rightarrow a^-$ .

Para geodésicas nulas, y temporales, el borde interno del disco por izquierda ( $a^-$ ) produce una barrera de potencial efectivo que prohíbe el paso de las partículas hacia el interior del disco y, por consiguiente, hacia el infinito; de hecho, el borde interno del disco actúa con un campo gravitacional repulsivo, contradiciendo lo esperado físicamente de la naturaleza atractiva del campo gravitacional. Además, el efecto repulsivo del borde interno del disco permite la posibilidad de órbitas ligadas trazadas por fotones fuera del disco; como ejemplo de esto, en la figura 3.9 se muestra

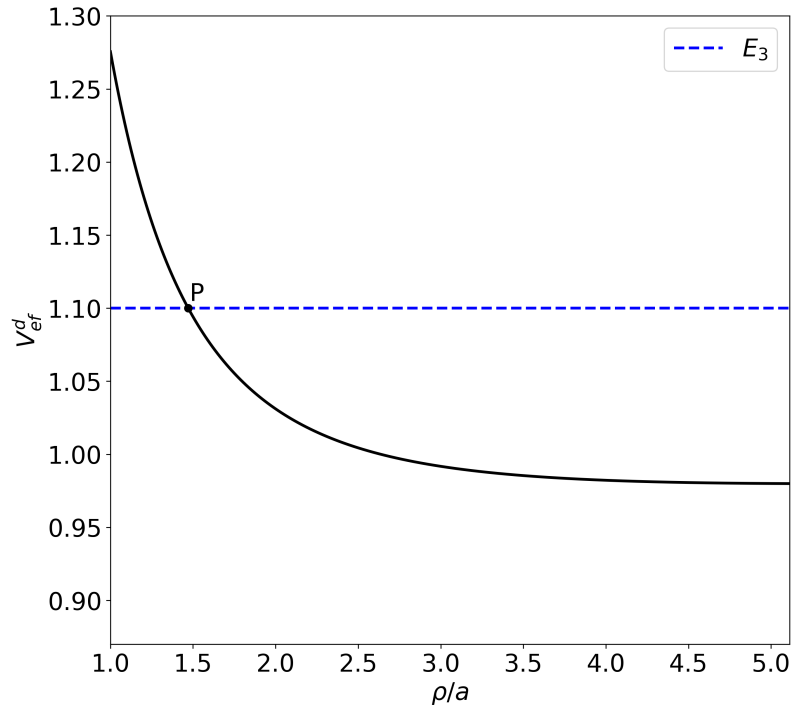


(a)

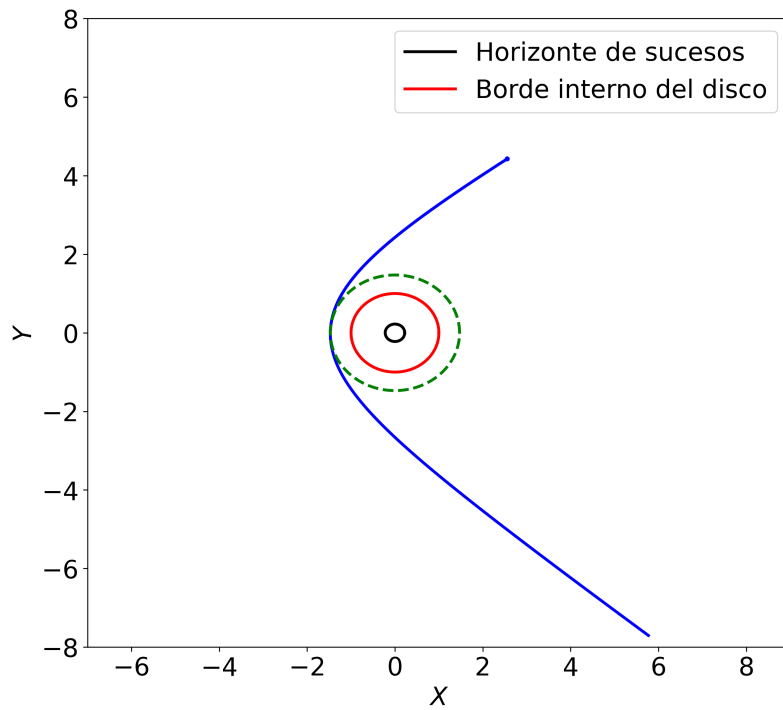


(b)

Figura 3.6: *Potencial efectivo como función de  $\rho/a$  para geodésicas temporales dentro del disco con  $L^2 = 12.96\text{m}^2$ . Las líneas discontinuas horizontales en a) corresponden a valores de energía específica al cuadrado. En b) se presenta la geodésica temporal con energía específica  $E_1 = 0.95$ .*

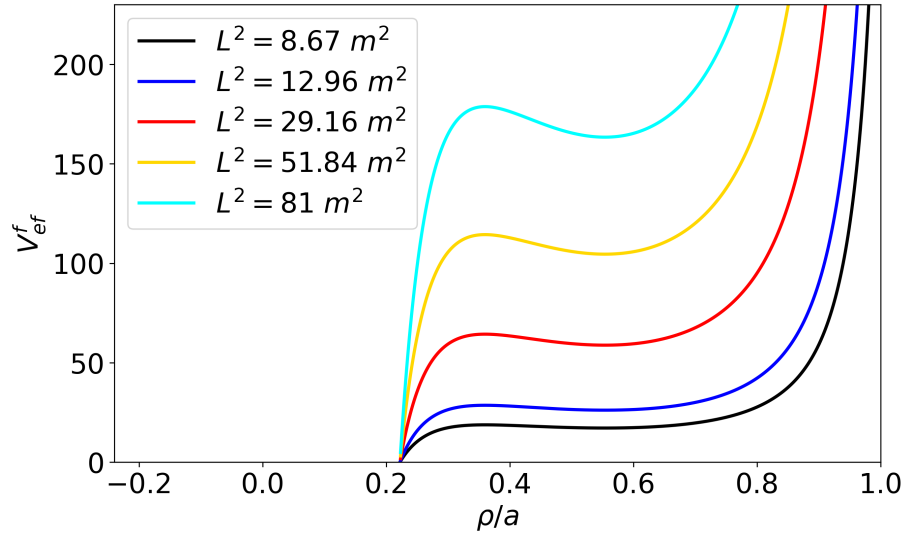


(a)

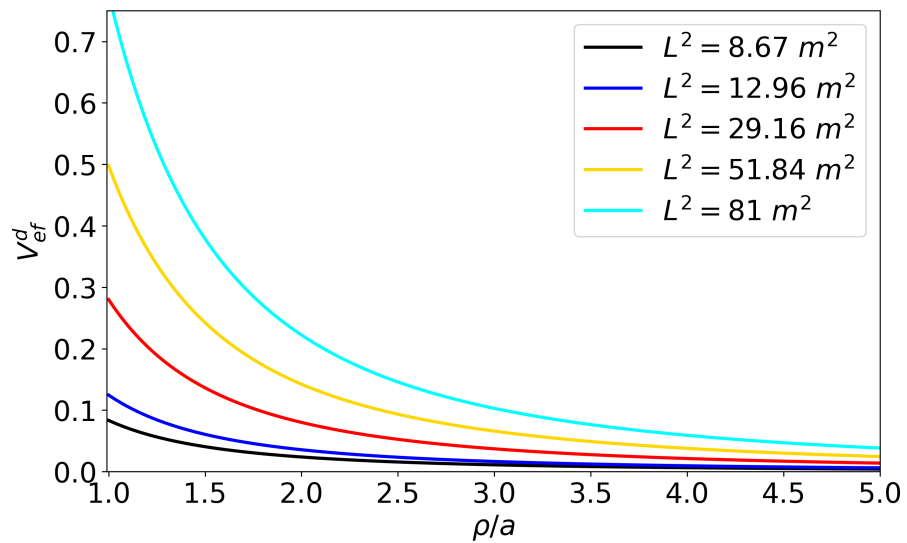


(b)

Figura 3.7: *Potencial efectivo como función de  $\rho/a$  para geodésicas temporales dentro del disco con  $L^2 = 51.84m^2$ . La línea discontinua horizontal en a) corresponde a un valor de energía específica al cuadrado. En b) se presenta la geodésica temporal con energía específica  $E_3 = 1.1$ .*



(a) Potencial efectivo fuera del disco.



(b) Potencial efectivo dentro del disco.

Figura 3.8: *Potencial efectivo como función de  $\rho/a$  para geodésicas nulas en el plano ecuatorial con diferentes valores del momento angular específico.*

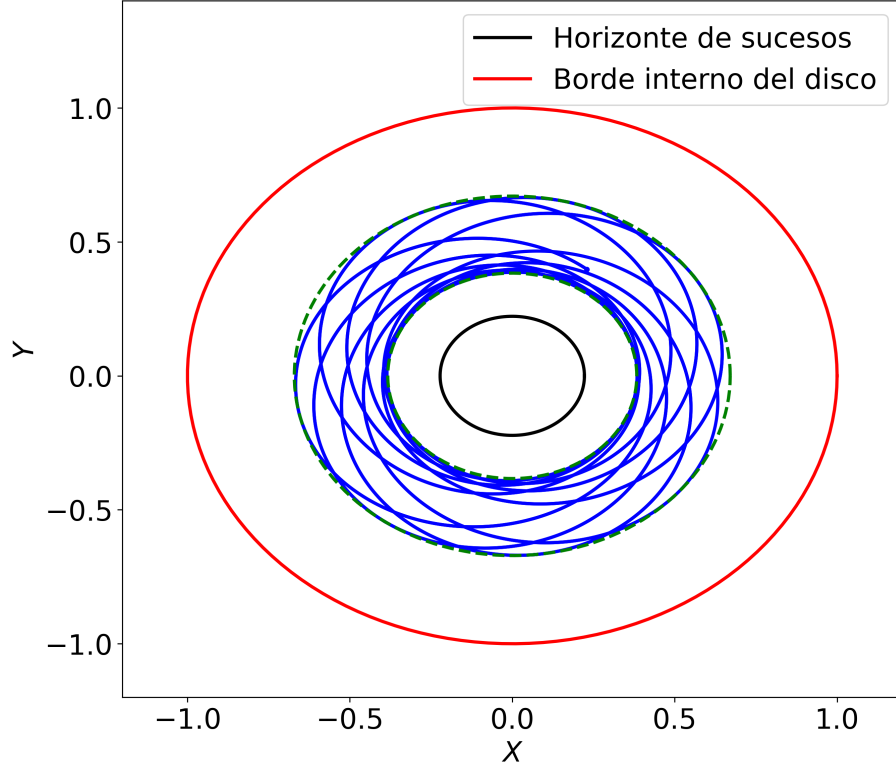


Figura 3.9: Geodésica nula fuera del disco con las condiciones iniciales establecidas en el cuadro 3.2.

la órbita de un fotón con las condiciones iniciales del cuadro 3.2 y con puntos de retorno en las circunferencias de radio  $\rho = 0.3834a$  y  $\rho = 0.6709a$  representadas con líneas discontinuas de color verde.

Figura	$L^2/m^2$	$E^2$	$\rho(t=0)$	$\varphi(t=0)$	$\dot{\rho}(t=0)$
3.9	12.96	28.441	0.4593	$\pi/3$	0.8921

Cuadro 3.2: Condiciones iniciales para la geodésica nula fuera del disco presentada en la figura que aparece en la primera columna.

Cabe resaltar que los radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , por ser las raíces de la ecuación (2.41), son independientes del momento angular específico  $L$ , lo cual implica que todas las curvas de la figura 3.8(a) presentan la misma coordenada radial  $\rho_1$  para el máximo local y la misma coordenada radial  $\rho_2$  para el mínimo local. Adicionalmente, estos radios sirven de asíntotas en el momento angular específico  $L^2/m^2$  de las partículas masivas debido a que para  $\rho < \rho_1$  y  $\rho > \rho_2$  no es posible el movimiento circular.

### 3.2.3. Órbitas circulares importantes

Las órbitas circulares importantes<sup>4</sup> son: la órbita circular marginalmente estable de radio  $\rho_{ms}$ , la órbita marginalmente ligada de radio  $\rho_{mb}$  y la órbita circular de fotones de radio  $\rho_{ph}$ ; cuya importancia recae en que permiten determinar si es posible la presencia de órbitas circulares estables, inestables, ligadas o no ligadas, en ciertas regiones del plano  $z = 0$ . Dado que estas órbitas no son posibles dentro del disco, según los potenciales efectivos en las figuras 3.1(b) y 3.8(b), entonces esta subsección se restringe únicamente para el caso fuera del disco.

En el artículo [43] se calcula que la masa total del disco es la suma de las dos siguientes cantidades:

$$M_{\Sigma} = -\frac{\alpha a}{\sqrt{r_o^2 - a^2}}, \quad (3.22)$$

$$M_{disco} = \frac{\alpha a}{\sqrt{r_o^2 - a^2}}, \quad (3.23)$$

donde  $\Sigma$  es la superficie dada por cualquier elipsoide  $x_o$ , para todo  $x_o > 0$  constante, que se interseca con la coordenada radial de Weyl en  $r_o = \sqrt{(a^2 - 2ma)(1 + x_o^2)}$ ; la superficie encierra el borde interno del disco ya que  $r_o > \sqrt{a^2 - 2ma}$  o, de forma equivalente para la coordenada radial esférica,  $\rho_o > a$ . Así,  $M_{\Sigma}$  es la masa para  $0 \leq r \leq r_o$  y  $M_{disco}$  es la masa para  $r_o \leq r < \infty$ . Por ende, con  $r_o = \sqrt{\rho_o(\rho_o - 2m)}$ , se obtiene que el borde interno del disco (ubicado en  $x_o \rightarrow 0$ , luego  $\rho_o \rightarrow a$ ) provee una contribución negativa infinita ( $M_{\Sigma} \rightarrow -\infty$ ) a la masa total calculada con la fórmula de Komar (la cual es cero para el espacio-tiempo con las funciones métricas  $\Phi$  y  $\Lambda$ ), dando lugar a lo previamente comentado en la subsección 3.2.2 sobre su carácter de campo gravitacional repulsivo, y el resto del disco (tal que  $\rho > a$ ) provee una contribución positiva infinita ( $M_{disco} \rightarrow \infty$ ) cuando  $\rho_o \rightarrow a$ .

Así, la constante  $\alpha$  está muy relacionada con la masa del disco anular como se aprecia en las ecuaciones (3.22) y (3.23); por lo cual, en el presente trabajo de investigación se procede a estudiar las órbitas circulares importantes en función de  $\alpha$  como se aprecia en la figura 3.10. Las curvas en esta figura son el resultado de aplicar el método de interpolación de Lagrange mediante un *script* en Python para las raíces obtenidas de las ecuaciones (2.41), (2.50) y (2.53) al variar  $\alpha$ .

Nótese primero la curva  $\rho_{ms}/a$ , de la cual se establece que el movimiento circular en las regiones *I* – *III* es inestable y en las regiones *IV* – *VI* es estable. Además, en la región *III* no es posible el movimiento circular debido a la curva  $\rho_{ph}/a$  de la órbita circular inestable de fotones. Como consecuencia de la naturaleza repulsiva del borde interno del disco, la curva  $\rho_{ph}/a$  (de la inusual órbita circular estable de fotones) prohíbe la posibilidad de movimiento circular en las regiones *V* y *VI*; en principio, debido a la curva  $\rho_{mb}/a$ , las regiones *II* y *IV* deberían ser no ligadas, pero nuevamente se recalca que sí son ligadas producto de la barrera de potencial en

<sup>4</sup>Téngase en cuenta que las órbitas de esta subsección son “importantes” con respecto a las dos subsecciones previas debido a que en esta subsección se varía  $\alpha$ , mientras que en 3.2.1 y 3.2.2 solo se toma el caso particular  $\alpha = a$ .

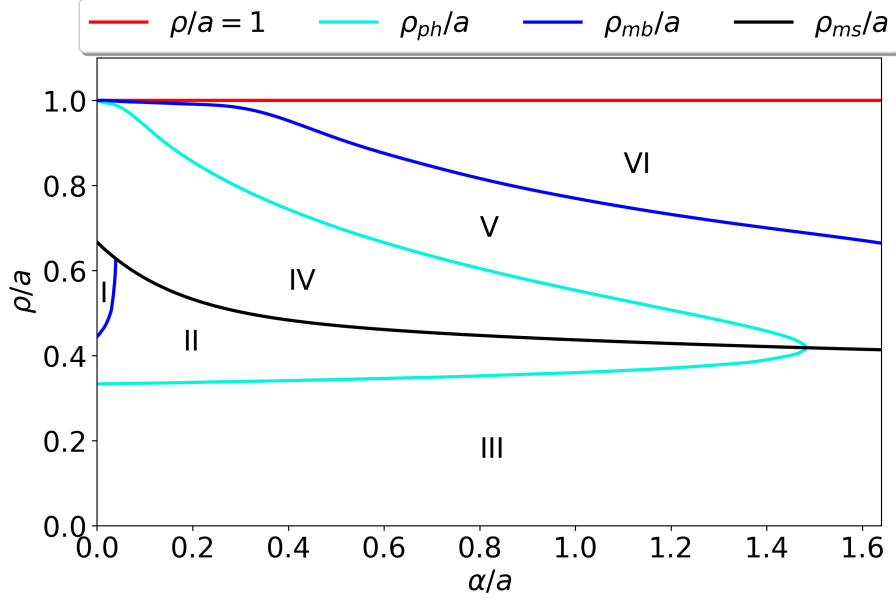


Figura 3.10: Variación de  $\rho_{ms}/a$ ,  $\rho_{mb}/a$  y  $\rho_{ph}/a$  en función de  $\alpha/a$ . La línea horizontal roja corresponde al borde interno del disco.

$\rho \rightarrow a^-$  (la cual no permite que las partículas puedan escapar al infinito). Además, se aprecia que para valores de  $\alpha/a$  del orden  $10^{-2}$  o menor, la contribución del disco a la superposición tiende a ser despreciable y por ello se genera la región I donde el movimiento circular es ligado e inestable. Cabe resaltar que para  $\alpha/a = 0$ , de la figura 3.10 se obtiene:  $\rho_{ms}/a = 6/9$ ,  $\rho_{mb}/a = 4/9$  y  $\rho_{ph}/a = 3/9$ , resultado esperado según el apéndice B. Y para discos con  $\alpha/a > 1.48$  no se presentan órbitas circulares de fotones, lo cual implica que no será posible el movimiento circular debido a la fuerte naturaleza de campo gravitacional repulsivo del borde interno del disco.

### 3.3. Geodésicas en el plano $(r, z)$

En este caso, se ubica el disco con borde interno en  $\rho = a = 6m$ , correspondiente al radio de la órbita circular marginalmente estable de un espacio-tiempo afectado únicamente por un agujero negro de Schwarzschild. Además, los resultados presentados a continuación surgen de tener en cuenta que la ecuación de las geodésicas (2.13) se puede escribir de forma equivalente en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F^\lambda(x^\lambda(\tau), u^\lambda(\tau)) = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu(\tau)u^\nu(\tau), \quad (3.24)$$

el cual corresponde a un sistema de ecuaciones acopladas, cuya solución numérica para la evolución de  $r = r(\tau)$  y  $z = z(\tau)$  se obtiene mediante un *script* en Python al introducir los símbolos de Christoffel para  $\varphi = constante$  previamente determinados.

Como se menciona en la subsección 2.3.2, el sistema de ecuaciones  $F^\lambda$  en (3.24) es de segundo orden y requiere dos condiciones iniciales: la posición inicial  $x^\lambda(\tau_0)$

y el parámetro de rapidez inicial  $\hat{v}$ , que parametriza la cuatriveicidad inicial  $u^\lambda(\tau_0)$ .

Por ende, en la figura 3.11 se presentan las respectivas geodésicas temporales trazadas por partículas eyectadas hacia el infinito en las coordenadas de Schwarzschild dadas por la ecuación (3.11) para las siguientes condiciones iniciales:

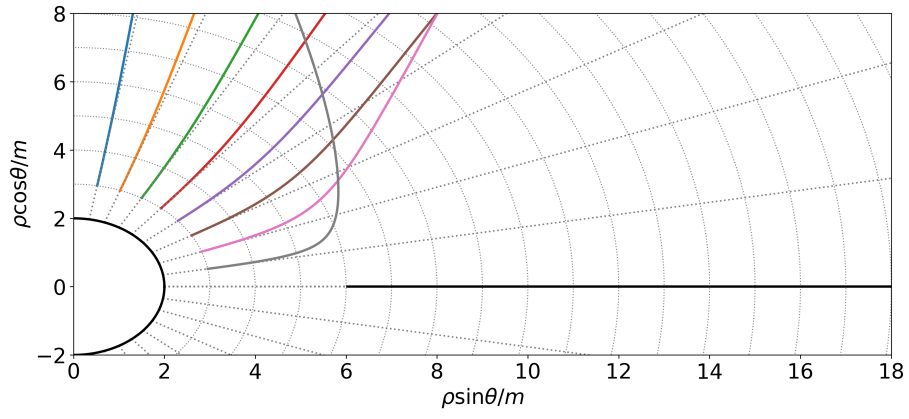
1. Para la posición inicial sobre un marco de referencia local en  $\rho = 3m$  y  $\theta = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$ , se eyecta ocho partículas con rapidez inicial  $\hat{v} = 0.4$  en la figura 3.11(a) y rapidez inicial  $\hat{v} = 0.8$  en la figura 3.11(b); con  $\alpha/a = 1$ .
2. Para la posición inicial sobre un marco de referencia local en  $\rho = 3m$  y  $\theta = 19^\circ, 29^\circ, \dots, 89^\circ$ , se eyecta ocho partículas con rapidez inicial  $\hat{v} = 0.4$  en la figura 3.11(c) y rapidez inicial  $\hat{v} = 0.8$  en la figura 3.11(d); con  $\alpha/a = 1$ .
3. Para la posición inicial sobre un marco de referencia local en  $\rho = 3m$  y  $\theta = 19^\circ, 29^\circ, \dots, 89^\circ$ , se eyecta ocho partículas con rapidez inicial  $\hat{v} = 0.4$  en la figura 3.11(e) y rapidez inicial  $\hat{v} = 0.8$  en la figura 3.11(f); con  $\alpha/a = 0.3$ .

Además, debido al cambio de coordenadas de  $(r, z)$  por las coordenadas  $(\rho, \theta)$ , se obtiene que la dirección radial para las partículas eyectadas con las anteriores condiciones iniciales está dada por el siguiente vector unitario en coordenadas de Schwarzschild:

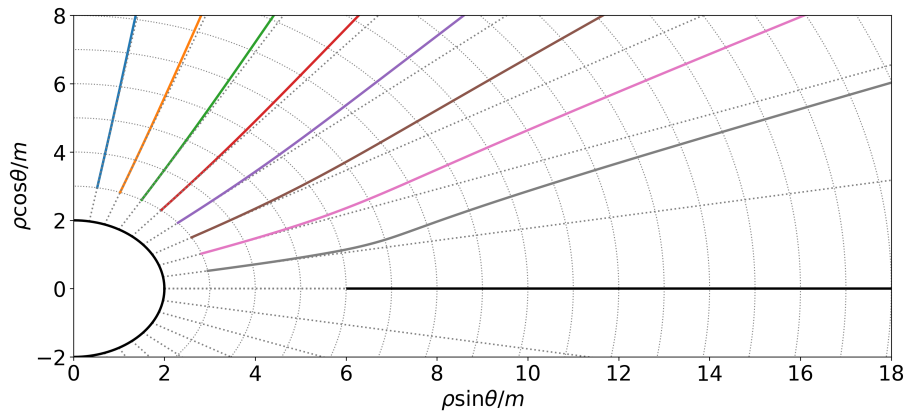
$$e^\rho = \frac{2m \sin \theta e^r}{\sqrt{4m^2 - m^2 \cos^2 \theta}} + \frac{\sqrt{3}m \cos \theta e^z}{\sqrt{4m^2 - m^2 \cos^2 \theta}}, \quad (3.25)$$

el cual está en función de los vectores unitarios en coordenadas de Weyl. Sin esta pequeña corrección de los vectores unitarios, por ejemplo, una partícula con posición inicial  $(\rho = 3m, \theta = 10^\circ)$  presentaría un movimiento radial en la dirección de un  $\theta < 10^\circ$ , implicando un error. Dicho esto, en la figura 3.11 las líneas rectas punteadas del *grid* permiten comparar el movimiento radial de las partículas con el caso especial donde el espacio-tiempo únicamente sea afectado por el agujero negro.

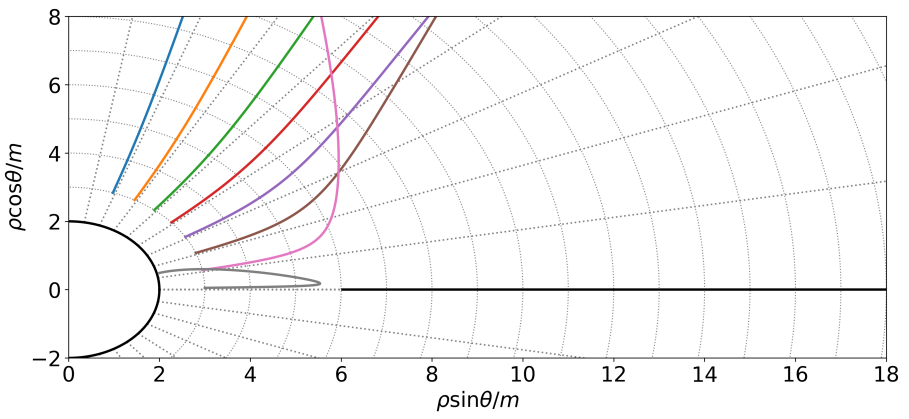
Cabe resaltar que se aumenta  $\theta$  en el ítem 2 y 3 para ver el efecto repulsivo más cerca del borde interno del disco que en el ítem 1. Y se disminuye  $\alpha/a$  en el ítem 3 para ver cómo actúa el disco con menor influencia en el espacio-tiempo superpuesto, recordando que  $\alpha/a$  está muy relacionado con la masa del disco según las ecuaciones (3.22) y (3.23). Además, se aumenta el parámetro de rapidez  $\hat{v}$  en las figuras 3.11(b), 3.11(d) y 3.11(f) para ver cómo la partícula tiende a escapar, de forma radial, más fácilmente de la influencia del campo gravitacional generado por el sistema superpuesto; aunque no muy lejos del borde interno del disco la partícula puede quedar detenida como se muestra en la curva gris de la figura 3.11(d), lo cual es debido a que el disco genera un campo gravitacional atractivo en esa región ya que su masa tiende a ser positiva infinita según la ecuación (3.23).



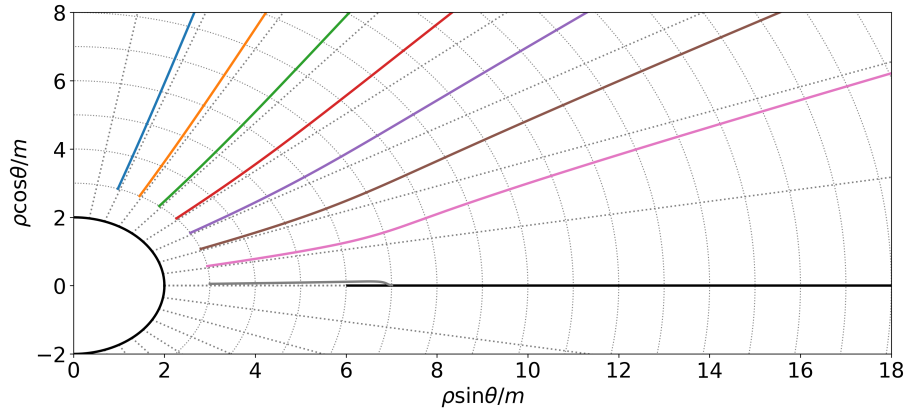
(a)



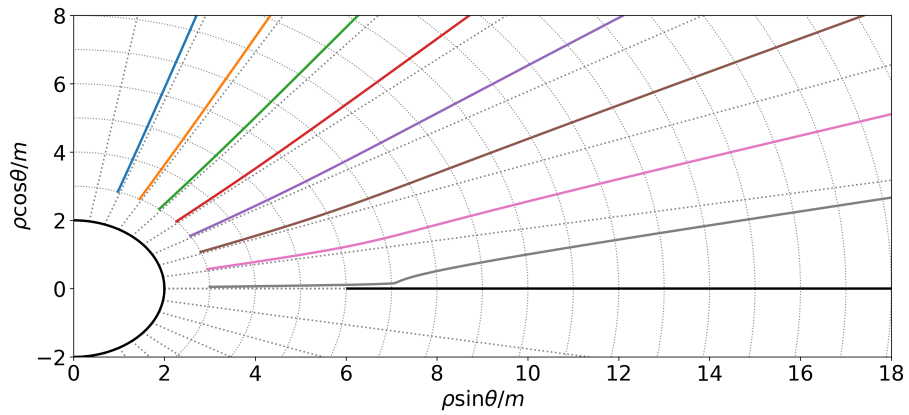
(b)



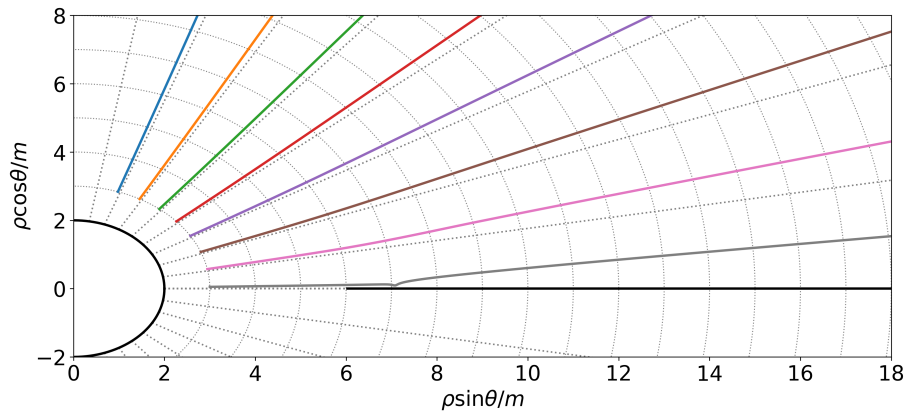
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.11: Geodésicas meridionales de partículas radialmente eyectadas hacia el infinito desde un marco de referencia local en  $\rho = 3m$  y  $\theta = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$  para a), b) y  $\theta = 19^\circ, 29^\circ, \dots, 89^\circ$  para c)-f). Las partículas de a), c), e) tienen rapidez inicial  $\hat{v} = 0.4$ , y las de b), d), f) tienen  $\hat{v} = 0.8$ . Se toma  $\alpha/a = 1$  para a)-d) y  $\alpha/a = 0.3$  para e), f). La línea horizontal negra representa al disco con borde interno en  $\rho = 6m$  y la circunferencia negra de radio  $\rho = 2m$  representa el horizonte de sucesos.

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo de investigación se estudiaron las geodésicas en un campo gravitacional generado por la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco delgado anular infinito; donde se consideraron las ecuaciones de movimiento para partículas que trazan geodésicas, temporales y nulas, en el plano ecuatorial y para partículas eyectadas radialmente hacia el infinito que trazan geodésicas temporales en el plano  $(r, z)$ . Para la simulación de las geodésicas resultantes se utilizó el método de Runge-Kutta de sexto orden.

Para las geodésicas ecuatoriales se obtuvo que el potencial efectivo presenta una discontinuidad de salto infinito en el borde interno del disco ubicado en  $\rho = a$ , tanto para geodésicas nulas como para geodésicas temporales, debido a que en  $a^-$  el borde interno del disco genera un campo gravitacional inusualmente repulsivo. Por medio de un análisis cualitativo del potencial efectivo se determinaron las posibles órbitas ecuatoriales y con el momento angular específico la estabilidad de las órbitas circulares; además, se obtuvo la órbita circular marginalmente estable, la órbita marginalmente ligada y la órbita circular de fotones en función de la constante  $\alpha$ , donde esta última está relacionada con la masa del disco.

Para las geodésicas en el plano  $(r, z)$  nuevamente se mostró el carácter de campo repulsivo por parte del borde interno del disco; sin embargo, también se mostró el carácter de campo atractivo cuando la partícula de prueba se mueve muy cerca del disco ubicado en  $z = 0$ .

Por otro lado, se presentaron los resultados de este trabajo de investigación en la modalidad ponencia en el *XXIX* congreso nacional de física llevado a cabo en Armenia, Quindío los días 17, 18 y 19 de Septiembre del 2022.

# Bibliografía

- [1] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and V. M. Viña-Cervantes, “Relativistic static thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions,” *Phys. Rev. D*, vol. **79**, p. 124048, 2009.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. (John Wiley & Sons, New York), 1972.
- [3] L. Morgan and T. Morgan, “Gravitational field of shells and disks in general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. **2**, pp. 2756–2761, 1970.
- [4] C. Struck, “Galaxy collisions,” *Phys. Rep*, vol. **321**, pp. 1–137, 1999.
- [5] M. J. Rees, “Astrophysical Evidence for Black Holes,” in *Black Holes and Relativistic Stars* (R. M. Wald, ed.), p. 79, Jan. 1998.
- [6] A. J. S. Capistrano, J. A. M. Peñagos, and M. S. Alárcon, “Anomalous precession of planets for a weyl conformastatic solution,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **463**, pp. 1587—1591, 1970.
- [7] R. M. Wald, *General relativity*. (Univ. Chicago Press, Chicago), 2010.
- [8] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. (Oxford University press, New York), 1983.
- [9] E. Hackmann and C. Lämmerzahl, “Complete analytic solution of the geodesic equation in schwarzschild–(anti-)de sitter spacetimes,” *Phy. Rev. Lett.*, vol. **100**, p. 171101, 2008.
- [10] E. Hackmann and C. Lämmerzahl, “Geodesic equation in schwarzschild–(anti-)de sitter space-times: Analytical solutions and applications,” *Phy. Rev. D*, vol. **78**, p. 024035, 2008.
- [11] F. López-Suspes and G. A. González, “Equatorial circular orbits of neutral test particles in weyl spacetimes,” *Braz. J. Phys*, vol. **44**, pp. 385–397, 2014.
- [12] O. Semerák, M. Žáček, and T. Zellerin, “Test-particle motion in superposed weyl fields,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **308**, pp. 705–717, 1999.

- [13] W. A. Bonnor and A. Sackfield, “The interpretation of some spheroidal metrics,” *Commun. math. Phys.*, vol. **8**, pp. 338–344, 1968.
- [14] T. Morgan and L. Morgan, “The gravitational field of a disk,” *Phys. Rev. D*, vol. **183**, pp. 1097–1101, 1969.
- [15] G. A. González and P. S. Letelier, “Relativistic static thin discs with radial stress support,” *Class. Quant. Grav.*, vol. **16**, p. 479, 1999.
- [16] D. Lynden-Bell and S. Pineault, “Relativistic disks - ii. self-similar disks in rotation,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **185**, p. 695, 1978.
- [17] J. P. S. Lemos, “Self-similar relativistic discs with pressure,” *Class. Quant. Grav.*, vol. **6**, p. 1219, 1989.
- [18] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz, “Relativistic disks as sources of static vacuum spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. **47**, p. 4334, 1993.
- [19] J. Bičák, , and T. Ledvinka, “Relativistic disks as sources of the kerr metric,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. **71**, p. 1669, 1993.
- [20] G. A. González and P. S. Letelier, “Rotating relativistic thin disks,” *Phys. Rev. D*, vol. **62**, p. 064025, 2000.
- [21] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, “Superposition of morgan and morgan discs with a schwarzschild black hole,” *Class. Quant. Grav.*, vol. **10**, p. L75, 1993.
- [22] O. Semerák, T. Zellerin, and M. Žáček, “The structure of superposed weyl fields,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **308**, pp. 691–704, 1999. **Erratum:** vol. **322**, pp. 207–208, 2001.
- [23] G. A. González and A. C. Gutiérrez-Piñeres, “Counterrotating dust disk around a schwarzschild black hole: New fully integrated explicit exact solution,” *Rev. Integr. temas mat.*, vol. **26**, pp. 123–130, 2008.
- [24] A. Harvey, “Geodesics in kasner universes,” *Phys. Rev. D*, vol. **39**, pp. 673–676, 1989.
- [25] K. D. Olum, “Geodesics in the static mallett spacetime,” *Phys. Rev. D*, vol. **81**, pp. 673–676, 2010.
- [26] C. Bambi, *Introduction to general relativity*. (Springer Nature Singapore), 2018.
- [27] H. Stephani, *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity*. (Cambridge University Press), 2004.
- [28] H. Weyl, “Zur gravitationstheorie,” *Ann. Physik.*, vol. **54**, pp. 117–145, 1917.
- [29] H. Weyl, “Ausbreitung elektromagnetischer wellen über einem ebenen leiter,” *Ann. Physik.*, vol. **365**, pp. 481–500, 1919.

- [30] H. Weyl, “Bemerkung über die axialsymmetrischen lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen,” *Ann. Physik.*, vol. **364**, pp. 185–188, 1919.
- [31] J. Griffiths and J. Podolský, *Exact space-times in Einstein’s General Relativity*. (Cambridge University Press), 2009.
- [32] J. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus*. Mathematical expositions, (University of Toronto Press), 1969.
- [33] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. (Addison Wesley), 2004.
- [34] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. (Butterworth-Heinemann), 1980.
- [35] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*. (Pergamos press, Oxford), 2nd ed., 1987.
- [36] P. S. Letelier, “Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures,” *Phys. Rev. D*, vol. **68**, p. 104002, 2003.
- [37] K. Boshkayev, E. Gasperín, A. C. Gutiérrez-Piñeres, H. Quevedo, and S. Toktarbay, “Motion of test particles in the field of a naked singularity,” *Phys. Rev. D*, vol. **93**, p. 024024, 2016.
- [38] W. Israel, “Event horizons in static vacuum space-times,” *Phys. Rev.*, vol. **164**, pp. 1776–1779, 1967.
- [39] L. Herrera, F. M. Paiva, and N. O. Santos, “Geodesics in the  $\gamma$  spacetime,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. **9**, pp. 649–659, 2000.
- [40] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, 2011.
- [41] H. A. Luther, “An explicit sixth-order runge-kutta formula,” *Department of Mathematics, Texas A&M University*, vol. **22**, p. 434, 1968.
- [42] M. Ujevic and P. S. Letelier, “Stability of general relativistic geometric thin disks,” *Phys. Rev. D*, vol. **70**, p. 084015, 2004.
- [43] R. J. Gleiser, “Relativistic static thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions,” *Phys. Rev. D*, vol. **85**, p. 028501, 2012.
- [44] H. Quevedo, “General static axisymmetric solution of einstein’s vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates,” *Phys. Rev. D*, vol. **39**, pp. 2904–2911, 1989.

# Apéndices

## Relación entre $(r, z)$ y $(\rho, \theta)$

Al trabajar en coordenadas esferoidales prolatas  $(t, \varphi, \zeta, \eta)$  se obtiene que la métrica de Schwarzschild toma la siguiente forma [44]:

$$ds^2 = \frac{1 - \zeta}{\zeta + 1} dt^2 + m^2(\zeta + 1)^2 \left[ \frac{d\zeta^2}{\zeta^2 - 1} + \frac{d\eta^2}{1 - \eta^2} \right] + m^2(\zeta + 1)^2(1 - \eta^2)d\varphi^2, \quad (\text{A.1})$$

de lo cual, al comparar con la métrica de Schwarzschild en coordenadas cuasi-esféricas<sup>1</sup>  $(t, \varphi, \rho, \theta)$ , se obtiene la siguiente transformación de coordenadas:

$$\zeta = \frac{\rho}{m} - 1, \quad \eta = \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

donde  $m$  es la masa del agujero negro. Además, las coordenadas esferoidales prolatas se relacionan con las coordenadas canónicas de Weyl  $(t, \varphi, r, z)$  mediante la siguiente transformación de coordenadas:

$$r^2 = m^2(\zeta^2 - 1)(1 - \eta^2), \quad z = m\zeta\eta, \quad (\text{A.3})$$

de manera que al reemplazar en esta última transformación lo expresado en la ecuación (A.2) se obtiene:

$$r = \sqrt{\rho(\rho - 2m)} \sin \theta, \quad z = (\rho - m) \cos \theta, \quad (\text{A.4})$$

permitiendo relacionar las coordenadas canónicas de Weyl con las coordenadas esféricas para todo  $\rho \geq 2m$ .

---

<sup>1</sup>Comúnmente denominadas como coordenadas de Schwarzschild.

## Agujero negro de Schwarzschild

En el capítulo 3 se menciona que  $\alpha$  es mayor a cero, condición necesaria para que la densidad de energía superficial del disco de polvo sea siempre positiva [23]; sin embargo, se puede apreciar que es posible tomar  $\alpha = 0$  para el caso trivial donde el disco no contribuye en la superposición, quedando solo el agujero negro de Schwarzschild. Esto implica que las geodésicas ecuatoriales del agujero negro se pueden estudiar mediante un análisis cualitativo del potencial efectivo dado por la ecuación (3.17) tal que  $\zeta = \sqrt{(r/m)^2 + 1}$  para todo  $r \geq 0$ . Por consiguiente, el momento angular específico  $L$  para partículas con masa que trazan órbitas circulares se determina por la ecuación (2.42) con la función métrica  $\Phi$  dada por la ecuación (3.15).

Teniendo en cuenta que, para el caso de geodésicas en el plano ecuatorial, de las ecuaciones en (A.4) se obtiene:

$$r = \sqrt{\rho(\rho - 2m)}, \quad z = 0, \quad (\text{B.1})$$

permitiendo obtener la función  $L^2 = L^2(\rho)$  en la figura B.1. De dicha figura, se aprecia que el punto de intersección, entre la línea discontinua y la función  $L^2 = L^2(\rho)$ , tiene coordenadas  $(9^{-1}\rho m^{-1}, L^2/m^2) = (6/9, 12)$ ; es decir, los bien conocidos valores correspondientes a la órbita circular marginalmente estable de radio  $\rho_{ms} = 6m$  y momento angular específico  $L_{ms} = 2\sqrt{3}m$ .

Además, dada la función métrica  $\Phi$  por la ecuación (3.15), de las ecuaciones (2.53) y (2.41) respectivamente se obtiene que el radio de la órbita marginalmente ligada es  $\rho_{mb} = 4m$  y el radio de la órbita circular de fotones es  $\rho_{ph} = 3m$  (esto es,  $r = \sqrt{3}m$  para la coordenada radial de Weyl. Se resalta esto debido a que en el artículo [23] se debe satisfacer la condición de que  $a \geq \sqrt{3}m$ , necesario para que se satisfaga la condición de energía dominante en la superposición de un agujero negro con un disco anular. Físicamente implica que no es posible ubicar el borde interno del disco en un radio menor al de la órbita circular de fotones).

La importancia de determinar los radios  $\rho_{ph}$ ,  $\rho_{mb}$  y  $\rho_{ms}$  en el plano ecuatorial radica en que permiten delimitar las siguientes regiones: para órbitas con radio  $\rho < \rho_{ph}$  no es posible el movimiento circular, órbitas circulares con radio  $\rho < \rho_{mb}$  son no ligadas

o radio  $\rho > \rho_{mb}$  son ligadas, órbitas circulares con radio  $\rho < \rho_{ms}$  son inestables o radio  $\rho > \rho_{ms}$  son estables (véase las geodésicas temporales y nulas ilustradas en las secciones 19-20 del libro [8] donde se trata las órbitas ligadas, no ligadas, estables e inestables).

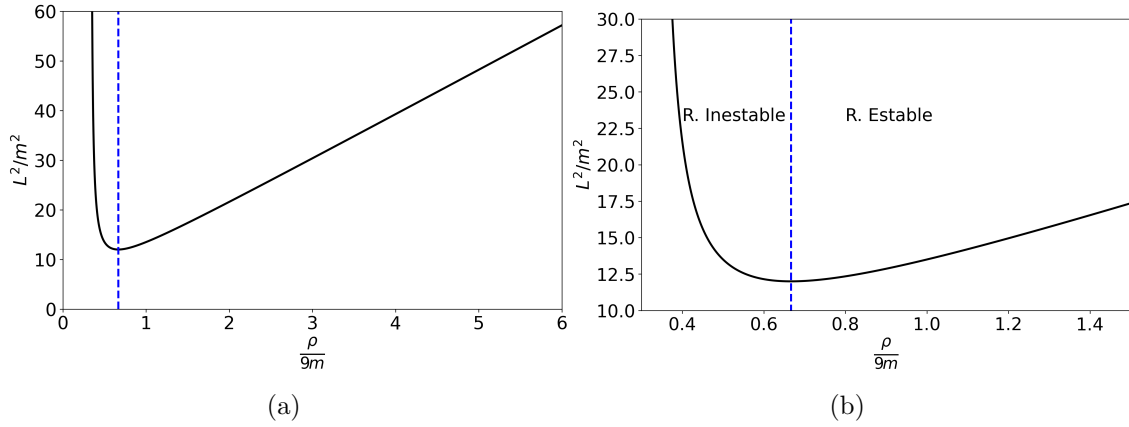


Figura B.1: *Momento angular específico al cuadrado como función del radio de la órbita circular,  $9^{-1}\rho m^{-1}$ , para geodésicas temporales en el campo gravitacional de un agujero negro de Schwarzschild. La línea discontinua corresponde al radio de la órbita circular marginalmente estable ( $\rho_{ms}$ ). En b) se cambia la escala de a) para representar la región estable e inestable.*