CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS INCORRECTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA DEL PRIMER SEMESTRE DEL AÑO 2006, EN LA ASIGNATURA CÁLCULO DIFERENCIAL

GRACIELA MORANTES MONCADA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE HISTORIA
ESPECIALIZACION EN TEORÍA, MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN SOCIAL
BUCARAMANGA
2008

CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS INCORRECTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA DEL PRIMER SEMESTRE DEL AÑO 2006, EN LA ASIGNATURA CÁLCULO DIFERENCIAL.

GRACIELA MORANTES MONCADA

Monografía presentada como requisito para optar al título de:
ESPECIALISTA EN TEORÍA, MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN SOCIAL

Directora:
YOLIMA BELTRÁN VILLAMIZAR
Doctora en Teoría y Política Educativa y Educación Comparada e Internacional Pennsylvania State University

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE HISTORIA
ESPECIALIZACION EN TEORÍA, MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN SOCIAL
BUCARAMANGA
2008

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE GRÁFICAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

TITULO: CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS INCORRECTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA DEL PRIMER SEMESTRE DEL AÑO 2006, EN LA ASIGNATURA CÁLCULO DIFERENCIAL*.

AUTORA: GRACIELA MORANTES MONCADA**

PALABRAS CLAVES: Procedimientos incorrectos, deficiencias matemáticas, estándares básicos de calidad para la educación matemática, competencias matemáticas.

DESCRIPCIÓN:

Durante los primeros semestres de cualquier programa de ingeniería la componente principal de su pensúm está en el área de matemáticas, que luego se convierte en una herramienta fundamental para las asignaturas propias de cada ingeniería. Pero, los bajos resultados en las materias del área así como la deserción por causas académicas durante los primeros semestres de los diferentes programas de ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana (UPB) Bucaramanga, son indicios de una preparación insuficiente de los estudiantes para iniciar estas asignaturas.

En la mayoría de los casos los bajos resultados son generados por procedimientos y/o razonamientos incorrectos realizados por los estudiantes durante la solución de pruebas, lo que llevó a plantear la necesidad de caracterizar los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en la asignatura Cálculo Diferencial. Hacer esta caracterización permitirá diseñar e implementar propuestas pedagógicas para nivelar a los estudiantes en aquellos conceptos en los cuales tengan deficiencias.

La caracterización de los procedimientos incorrectos se fundamentó en los estándares básicos de calidad para la educación matemática, los estándares de competencia matemática para el ingreso a la educación universitaria y Algunos de los errores clásicos explicados por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e Invar.

A partir de los hallazgos se pudo concluir que los errores más frecuentes se presentan cuando se requiere desarrollar procedimientos que incluyan para su solución operaciones aritméticas, algebraicas, manejo de propiedades, reglas y fórmulas, así como en aquellos que involucraban el manejo de elementos de una función tales como dominio, recorrido y gráfica y que muchos estudiantes, al parecer, tienen idea del procedimiento a seguir cuando se enfrentan a un problema pero les falta claridad en el uso de los conceptos o herramientas matemáticas apropiadas para su desarrollo debido al aprendizaje deficiente o incompleto de fórmulas, algoritmos, reglas, teoremas, definiciones o conceptos; es decir, no saben usar los conocimientos o se sienten inseguros de ellos y por eso no los aplican.

La investigación termina dando unas recomendaciones tendientes a evitar que los estudiantes presenten aprendizajes deficientes y a mejorar cuando estos se presentan.

* Monografía de Grado
** Facultad de Ciencias Humanas, Escuela de Historia. Dra. Yolima Beltrán Villamizar.

ABSTRACT

TITLE: DESCRIPTION OF INCORRECT PROCEDURES MADE BY FIRST– TERM 2006 PONTIFICIA BOLIVARIANA STUDENTS IN DIFFERENCIAL CALCULUS*.

AUTHOR: GRACIELA MORANTES**.

KEY WORDS: Incorrect procedures, differencial Mathematics, basic quality framework for mathematics, mathematics competences.

DESCRIPTION:

Mathematics is the most important component in the first terms of any engineering program pensum that later on becomes in an essencial tool for the other common subjects in each engineering. But both, bad results in the subjects as well as desertion caused by academic results in the first term of different engineering programs in Pontificia Bolivariana University show a student bad preparation to take this subjects.

In most cases the bad results owing to wrong procedures and/or wrong reasoning done by students during the solution of tests lead to the need of a description of incorrect procedures done by first term 2006 Pontificia Bolivariana students in differencial calculus. This description lets design and setup pedagogical proposal to balance students in those concepts they have weaknesses.

This description of incorrect procedures was based on Basic quality framework for Mathematics education, Math competence for the entrance to higher Education and some classic errors explained by Davis, Rodatz, Moushovitz, Zaslavksy and Invar.

It could be concluded from the results that most common mistakes occur when developing procedures that include arithmetical, algebraic operations, use of properties, rules and formulas as well as those that need the use of elements of a function as domain, trajectory, graphics that some students seem to have some idea about the procedure to follow but they lack clarification in the house of concepts on Mathematics tools to salve the problem owing to the bad methods of learning of formulas, algorits, rules, theorems, definitions or concepts in other words they don't know how to use the knowledge or they feel insecure so they don't apply them.

This research finishes grieving some recommendations to avoid students bad learning processes and to improve when these appear.

---

* Monograph of Grade
** School Ability of Human Sciences, School of History. Dra. Yolima Beltrán Villamizar.

INTRODUCCION

Los bajos resultados en las asignaturas del área de matemáticas así como la deserción por causas académicas y la repitencia durante los primeros semestres de los diferentes programas de ingeniería, cuyo pensun tiene una componente matemática fuerte en estos semestres, son indicios de una preparación insuficiente de los estudiantes para afrontar estas asignaturas. Los procedimientos matemáticos incorrectos desarrollados por quienes recién ingresan a la universidad, o la ausencia de ellos, son el reflejo de las posibles deficiencias en el área con las que inician su carrera.

La preocupación por esta situación ha sido una constante de los docentes del área de matemáticas de la Universidad Pontificia Bolivariana (UPB) Bucaramanga, quienes cada semestre evidencian las dificultades de los estudiantes que inician un programa de ingeniería sin las competencias matemáticas básicas necesarias para los aprendizajes siguientes. Así, en la búsqueda de herramientas que le permitan al estudiante apropiarse de estas competencias básicas, se propone con esta investigación:

- Caracterizar los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial.
- Identificar patrones comunes de los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial del primer semestre del año 2006 en la Universidad Pontificia Bolivariana.
- Identificar patrones diferenciales de los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial del primer semestre del año 2006 en la Universidad Pontificia Bolivariana.

- Indagar sobre las formas de razonamiento utilizadas en la solución incorrecta de las pruebas efectuadas a los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en la asignatura cálculo diferencial.

Esta investigación tendrá un enfoque de tipo cualitativo por cuanto se propone revisar un contexto específico con unos determinantes particulares en cuanto la diversidad social, cultural, económica y académica que poseen los estudiantes de recién ingreso a la Universidad Pontificia Bolivariana.

El trabajo se organizará en cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera: contempla

PRIMERO. Se describe, formula y justifica el problema de investigación y se exponen los objetivos de la misma. Se hace un recorrido por los antecedentes y situación actual de los trabajos sobre errores y deficiencias en el área de matemáticas en Colombia y países como Alemania, Estados Unidos y España. Termina con un reconocimiento y dimensionamiento del contexto en el cual se desarrolla la investigación.

SEGUNDO. Se expone el supuesto teórico que fundamenta el trabajo y con el cual se podrá comparar lo hallado para elaborar conclusiones y recomendaciones.

TERCERO. Se presenta la metodología con que se desarrolló la investigación, así como las estrategias y técnicas utilizadas para recoger la información requerida.

CUARTO. Se presentan los hallazgos de las entrevistas y los exámenes realizados.

QUINTO. Se exponen las conclusiones del trabajo y algunas posibles recomendaciones.

El presente trabajo servirá como base para desarrollar propuestas didácticas que permitan nivelar a los muchachos que ingresan a los cursos de ingeniería con sus conocimientos elementales básicos deficientes en las asignaturas del área de matemáticas.

1. APROXIMACIÓN A LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

1.1 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En cada semestre el momento más difícil para los docentes, especialmente para los del área de matemáticas, es la hora de las evaluaciones parciales (previos), y lo es más para muchos de los estudiantes:

- Para los docentes, porque esperan ver reflejados en los resultados de las evaluaciones el fruto del esfuerzo de un período, un período de preparación de clases, diseño y corrección de pruebas y trabajos, atención a estudiantes, etc.

- Para los estudiantes porque, aunque su meta es obtener buenos resultados, cuando están frente a la prueba se sienten como si fuera la primera vez que vieran los símbolos, problemas y expresiones matemáticas con que se les pide trabajar. "¿Cómo es esto posible si estudié todo el día de ayer y toda la noche?", "¿por qué me bloqueo si yo entiendo?", preguntan.

¿Si todos trabajan buscando buenos resultados por qué éstos no se obtienen? Es la pregunta lógica de cualquiera de los involucrados en el quehacer académico y que sirve como motivación para las siguientes conjeturas:

- La mayoría de los estudiantes ingresa a la universidad con bases escasas o nulas en el área de matemáticas, porque el sistema educativo colombiano permite que culminen su bachillerato con un mínimo de logros alcanzados.
- Los jóvenes no tienen una disciplina de estudio porque están acostumbrados al facilismo de sus cursos de bachillerato. No trabajan fuera de clase.

- Muchos de ellos siempre han tenido una persona que les "dirija" las tareas, y por tanto, no han asumido su compromiso académico con verdadera pertenencia y esto no les ha permitido construir su saber.
- El criterio de elección del programa académico que inician no es el más adecuado y a la menor dificultad, se pierde el interés.
- El proceso evaluativo seguido en el colegio difiere al de la universidad, los estudiantes en el primer semestre preguntan cuando se les hace la recuperación. Además, el contenido evaluado corresponde a períodos de tiempo muy reducido (una semana o dos, máximo).

Son las conjeturas hechas desde afuera, desde la perspectiva docente pero, posiblemente, no se ha profundizado sobre lo que piensan los estudiantes, sobre sus hábitos y rutinas de estudio, sus prácticas para preparar una evaluación, sobre los errores puntuales que cometen en el procedimiento de una solución incorrecta; no se les ha preguntado ¿Cuál es el razonamiento realizado en la solución incorrecta de las pruebas?, ni se ha indagado por sus motivaciones, sus concepciones, etc.

Este trabajo pretende precisamente abordar el problema de las fallas en la solución de las pruebas para indagar sobre los errores típicos que los estudiantes cometen en el desarrollo de la asignatura cálculo diferencial de la Universidad Pontificia Bolivariana. Para lograrlo se pretende buscar respuestas a la pregunta: ¿Cuáles son los patrones comunes y cuáles los diferentes de los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes en las evaluaciones de la asignatura Cálculo Diferencial del primer semestre del año 2006 en la Universidad Pontificia Bolivariana?

Se trabajará con Cálculo Diferencial por ser la asignatura del área de matemáticas del primer semestre de los programas de Ingeniería donde mayores porcentajes de deserción y pérdida se presentan (ver cuadro, anexo K).

2. JUSTIFICACIÓN

El avance y profundización en los cursos del área de matemáticas se fundamentan en los resultados de las evaluaciones realizadas a los estudiantes. Durante el proceso de evaluación se determina el nivel del trabajo que los estudiantes pueden desarrollar y si éstos han asimilado los temas impartidos por el docente; por tanto, si es posible avanzar hacia temas más adelantados y de mayor grado de dificultad.

Cuando se ignoran las dificultades detectadas en las evaluaciones y se desarrolla el contenido programático de temas se producen resultados desafortunados como son la cancelación de las asignaturas o pérdida del curso, generando en los estudiantes desconfianza de sus habilidades en el área de matemáticas.

En las charlas informales de los profesores de matemáticas se comenta sobre los "errores típicos" que cometen los estudiantes que ingresan a los programas de Ingeniería durante los primeros semestres de estudio. Errores en el procedimiento y solución de ejercicios, en las respuestas cuando se indaga por el manejo de conceptos previos, de razonamiento lógico, etc., que los llevan a fracasar en las asignaturas del área. Generalmente, las causas por las cuales sucede según algunos docentes, son:

- Los estudiantes ingresan a la universidad con muchas falencias en los temas vistos en el bachillerato.
- No tienen los preconceptos básicos.
- No tienen disciplina de estudio.
- Se equivocaron de carrera.

Pero son conclusiones que se deducen a partir de la percepción de los resultados globales y cuantitativos del proceso de evaluación sin detenerse a buscar en detalle qué está pasando por la mente de cada estudiante.

Con esta investigación se busca justamente identificar patrones de errores comunes e indagar con los estudiantes de cálculo diferencial, por ser la asignatura del primer semestre del área de matemáticas en la que tradicionalmente se presenta mayor dificultad, el porqué de sus soluciones incorrectas e identificar los obstáculos para resolver problemas con el fin de que sirva como pauta para anticiparse a las probables fallas que pueda presentar el estudiante y ubicar en cada uno un centro de observación especial, una mayor atención del profesor y del alumno que les permita detectar si el proceso de aprendizaje está bien encaminado o, si por el contrario tiene dificultades y es necesario invitar al alumno a enfocarse mejor, teniendo como base los patrones de errores. “A partir de sus errores, un joven puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal”. [1]

Las matemáticas han sido reconocidas como columna vertebral en la formación del ingeniero. Desafortunadamente, los dominios matemáticos de la mayoría de los estudiantes que ingresan a las facultades de Ingeniería no son los esperados, y los bajos desempeños en el área constituyen una causa importante de repitencia y abandono de los estudios de Ingeniería (ver cuadro anexo L). Por esta razón, es necesario identificar los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes así como las prácticas de estudio y los procesos de resolución de problemas para

---

[1] KILPATRICK, Jeremy; GOMEZ, Pedro Y RICO Luis. “Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995; p.76.

contribuir en el diseño e implementación de estrategias e instrumentos pedagógicos orientados a la nivelación de los conocimientos básicos necesarios para el buen desempeño y el mejoramiento en los niveles de comprensión del área.

"Si no se hace nada para remediar el fracaso en matemáticas, el cuerpo social mismo se verá afectado; por una parte, porque así se privará de competencias que le serían muy útiles; por otra parte, porque por el miedo al fracaso en matemáticas muchos alumnos se alejan de las actividades científicas, donde los efectivos son insuficientes, para orientarse hacia estudios literarios o jurídicos, carreras que ya están pletóricas". [2]

---

[2] NOT, Louis. Las pedagogías del conocimiento. Ed. Fondo de Cultura económica, Bogotá, 1998; p.274.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Caracterizar los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar patrones comunes de los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial del primer semestre del año 2006 en la Universidad Pontificia Bolivariana.
- Identificar patrones diferenciales de los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes en las evaluaciones de la asignatura cálculo diferencial del primer semestre del año 2006 en la Universidad Pontificia Bolivariana.
- Indagar sobre las formas de razonamiento utilizadas en la solución incorrecta de las pruebas efectuadas a los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en la asignatura cálculo diferencial.
- Describir las prácticas de los estudiantes con resultados satisfactorios en las pruebas de la asignatura cálculo diferencial realizadas en la Universidad Pontificia Bolivariana durante primer semestre del año 2006.
- Indagar por el razonamiento de los estudiantes acerca de los procedimientos empleados para obtener los resultados satisfactorios observados.

4. ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

El estudio de los procedimientos incorrectos -errores- no es muy común dentro del ámbito educativo del país; sin embargo, en los últimos años se han desarrollado algunos trabajos de investigación que permiten deducir el reciente interés por este elemento del conocimiento:

- El profesor Eliseo Ramírez Rincón[3], docente de planta de la UDCA (Universidad de Ciencias Aplicadas y Ambientales), publicó el artículo "Errores cometidos por los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un problema de variación en matemáticas" sustentado en la investigación titulada "Errores que comete un estudiante de primer semestre de ingeniería de UDCA" y que pretende determinar las dificultades que los inducen a cometer errores al interpretar, modelar y resolver problemas de matemáticas en diversos contextos, para establecer categorías de dichos errores, estudiar los patrones de regularidad de los errores e incorporarlos al currículo como un conocimiento incompleto y no acabado.

En este artículo el profesor Ramírez relaciona la bibliografía de otro trabajo de su autoría titulado "Errores en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, en la interpretación y en la modelación matemática". Tesis de Maestría de la Universidad Pedagógica Nacional.

- La profesora Ana Dulcelina López Rueda, docente de Planta de la UNAB (Universidad Autónoma de Bucaramanga), desarrolló su tesis de Maestría en

[3] RAMIREZ R, Eliseo. "Errores cometidos por los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un problema de variación en matemáticas" En: Matemática Educativa: Fundamentos de la matemática universitaria. Ed. Escuela Colombiana de Ingeniería. Bogotá, 2004; p.149.

Pedagogía titulada “Deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de Ingeniería de una universidad privada”[4] . Los hallazgos con esta investigación le permitieron concluir que los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería de la UNAB tienen una auto percepción negativa en cuanto al dominio de conceptos básicos requeridos para aprender Cálculo Diferencial, condición que atribuyen a factores internos como la falta de estudio, desconcentración, desmotivación o ausencia de métodos de estudio adecuados; a factores externos como falta de tiempo, deficiente preparación del colegio, políticas educativas gubernamentales sobre evaluación y al profesor quien como mediador de los aprendizajes es fuente de experiencias positivas o negativas para el estudiante.

Encontró además, en relación con los vacíos, la marcada tendencia a cometer errores en: retención y memorización de reglas (faltó presición); operaciones con expresiones/fracciones numéricas/algebraicas (aplicación inadecuada); empleo de algoritmos (hicieron mezclas) ; identificación y manejo de operaciones básicas en los reales (aplicación inadecuada de propiedades), definición de relaciones trigonométricas (planteamientos inadecuados); diagramación y solución de problemas (identificación/ubicación inapropiada de datos/variables o confundieron modelos matemáticos) y a nivel afectivo se captó principalmente desatención y poca recursividad (faltó aplicación de reversibilidad para confirmar resultados).

En su tesis relaciona algunos trabajos interesantes que se han realizado en diferentes universidades e instituciones colombianas y extranjeras sobre aspectos relacionados con las deficiencias en el rendimiento en el área de matemáticas y la deserción por esta causa.

---

[4] LOPEZ R, Ana Dulcelina. “Deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo Diferencial en estudiantes de ingeniería de una universidad privada”. UNAB, 2005.

A nivel internacional el doctor Luís Rico[5], profesor de la Universidad de Granada, hace una recopilación de los estudios que se han desarrollado en torno a los errores en diferentes países:

Estudios en Alemania

El interés por el estudio de errores en Alemania en el período comprendido entre las dos guerras mundiales puede atribuirse a la importancia creciente de la pedagogía empírica, que empleaba técnicas de introspección propias de la psicología experimental. Se pueden reconocer en estos trabajos la influencia de las tres escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la teoría de la Gestalt, y la denominada psicología del pensamiento.

Se considera que Weiner (1922) es el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores; trató de establecer patrones de errores que explicasen las equivocaciones individuales en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares. Dentro del concepto general de "incorrecto", estableció la distinción entre equivocado, falsificación y errores; también agrupó los errores en cinco categorías: errores familiares, errores persistentes, errores por similitud, errores mixtos y errores debidos a situaciones emocionales.

Por su parte, Seseman (1931) se preocupó por proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para una metodología didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Consideraba los errores como fenómenos que surgían de leyes que se habían formado mediante una incorrecta combinación de tendencias. Distinguió tres tipos de errores en aritmética: mecánicos, asociativos y funcionales.

---

[5] KILPATRICK, Jeremy; GOMEZ, Pedro Y RICO Luis. "Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995; p. 77-81.

A su vez, Kiessling (1925) se ocupó principalmente de la denominada tendencia al error, especie de predisposición especial de algunas personas para equivocarse; también trabajó en el tratamiento teórico de la evaluación y tratamiento del error.

También Rose (1928) trató de establecer una clasificación de las causas del error en educación matemática: inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer los rasgos de un problema matemático.

Este interés en el estudio de los errores por parte de los educadores alemanes continúa a partir de los 60 con nuevas aportaciones, de las que se recogen algunas de las más destacables que se mencionan a continuación.

Schalaak (1968) ha observado algunos nodos puntuales de error mediante el análisis de las producciones en la resolución de problemas en una prueba; entre ellos destaca la comprensión inadecuada de los enunciados, determinación incorrecta de los números, etc.

Glück (1971) ha trabajado sobre los errores de cálculo, llegando a diferenciar cinco tipos de errores: cambios de operación, aproximaciones aditiva o multiplicativa, resultados parciales, sólo el primer digito correcto y errores de trascripción.

Pippig (1977) ha estudiado las deficiencias en el cálculo aritmético y ha tratado de interpretarlas desde una perspectiva psicológica, en especial los errores y dificultades que surgen cuando se trabaja en problemas aritméticos; logra describir causas de error en las diferentes etapas del proceso de solución.

Estudios en la Unión Soviética

A comienzos de los sesenta se consolidó un campo de investigación sobre educación matemática en la URSS, entre cuyos estudios se encontraba el análisis de los errores de los estudiantes y las dificultades individuales del aprendizaje escolar. De este modo se lograron nuevos conocimientos relativos a habilidades matemáticas específicas y sobre aspectos del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas. Estos trabajos de la escuela soviética recibieron una difusión considerable debido a la traducción realizada por Kilpatrick y Wiszuro, que fue editada en 1967 por el NCTM (National Council Teachers Matematics). Entre las contribuciones realizadas al estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas se destacan dos autores:

- Kuzmitskaya quedeterminó cuatro causas de error en el estudio de las dificultades: insuficiencia de la memoria a corto plazo; comprensión insuficiente de las condiciones del problema; errores debidos a la ausencia de reglas verbales para la realización de cálculos; errores por uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas, y

- Menchinskaya quién destacó la regularidad de los errores de los estudiantes en educación matemática y enfatizó la complejidad de los procesos que están entre las causas potenciales de error. Señala cuatro áreas de causas, no totalmente diferenciadas: errores debido a una realización incorrecta en una operación, errores por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente debidos a la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados.

Estudios en los Estados Unidos

La tradición investigadora sobre análisis de errores en educación matemática en los Estados Unidos se pone de manifiesto en el trabajo de Buswell y Judd (1925) donde se recogen 31 estudios, realizados hasta el momento, que tratan explícitamente de errores en matemáticas. Thorndike (1917) con su "Psicología de la aritmética" realiza uno de los primeros trabajos más completos sobre determinación de errores.

Buswell (1925) logró identificar una multitud de errores tipo en las cuatro operaciones aritméticas, ampliando un método de análisis más complejo, en el que incluía no sólo los ejercicios escritos sino también observaciones en el aula y entrevistas para el diagnóstico.

Los planteamientos hacia enfoques más constructivos para la enseñanza de la aritmética recibieron un fuerte impulso del estudio sobre errores realizados hasta la fecha y de las deficiencias encontradas para clasificar e interpretar los errores detectados.

Brueckner (1935) y otros investigadores encauzaron sus trabajos en este campo cinco objetivos:

- Listar todas las técnicas potenciales erróneas.
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
- Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y a las operaciones con el cero.
- Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.
- Tratar de clasificar y agrupar los errores.

La ultima publicación de Brueckner (1984), traducida al castellano, nos presenta un tratamiento y desarrollo sistemático de los objetivos anteriores, que ha tenido influencia en la investigación hecha en España.

Esta corriente de investigación ha continuado en años recientes con los trabajos de Engelhard (1975), Lankford (1972) y Cox (1975). Nuevas corrientes han surgido en los últimos años, así el análisis de errores ha recibido un impulso considerable por parte de los investigadores que han trabajado en diseño de actividades, tratamientos metodológicos y organización curricular dirigidos a disminuir las frecuencias en los errores drásticamente. La enseñanza por diagnóstico en matemáticas, desarrollada por Ashlock (1975), Reisman (1972), Robitaille (1976) y el inglés Bell (1986), entre otros, tiene también en el análisis de errores uno de sus instrumentos más importantes. Los trabajos de investigación sobre las estructuras básicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollados por Ginsburg (1977), Erlwanger (1975) y otros, han empleado el análisis de errores como método de investigación, conjuntamente con entrevistas clínicas y estudios de casos. Para estos autores la mayor parte de los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas basados en experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base en los conocimientos matemáticos iniciales.

Estudios en España

Por lo que se prefiere a España, encontramos que el trabajo realizado en la Revista Bordón (1953) por diversos autores Villarejo A. y Fernández Huerta J. en 1953, dedica una reflexión considerable a determinar los errores más usuales en aritmética escolar, así como a presentar unas bases para la enseñanza correctiva en aritmética basada en métodos diagnósticos derivados de los errores detectados.

El interés por el estudio e investigación sobre los errores cometidos por los escolares se recupera en este país en los últimos años, con el despegue producido en la didáctica de la matemática. La mayor parte de los trabajos publicados en la Editorial Síntesis se ocupa de los errores principales detectados en cada uno de los tópicos que integran el área temática correspondiente. Entre estos trabajos destaca el de Centeno (1988) en el que se plantea la necesidad de interpretar los errores para orientar el proceso de enseñanza.

Características de los estudios revisados:

Haciendo un resumen de la revisión bibliográfica realizada encontramos que la mayor parte de los estudios sobre errores realizados con anterioridad a 1960, han consistido prioritariamente en recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas y en un análisis de los tipos de errores detectados para, en algunos casos, proceder a una clasificación que permita examinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta y hacer inferencias sobre que factores pueden haber conducido al error.

Una de las metas usuales de estos estudios ha consistido en preparar listados de ejercicios en los que la cantidad de práctica propuesta para cada hecho o algoritmo numérico reflejase su dificultad intrínseca, medida por el rendimiento obtenido en poblaciones estándar. Para ello, los investigadores trabajan con un gran número de niños a los que se pasaban pruebas; con porcentaje de alumnos que los realizaban mal. Se trataba de intentos empíricos para descubrir simplemente qué problemas aritméticos eran intrínsecamente sencillos y cuáles intrínsecamente difíciles. La influencia de la metodología psicométrica y de las evaluaciones con relación a norma está muy presente en todos estos trabajos iniciales sobre el estudio de errores.

Brownell (1941) criticó ampliamente la técnica de ordenar combinaciones numéricas y ejercicios con base en los porcentajes de éxito obtenidos y diseñó nuevos métodos para describir la naturaleza de los errores.

Los trabajos de Tyler en primer lugar, y los de Bloom posteriormente entre muchos otros, produjeron un cambio sustancial en la concepción del currículo y, en particular, en la evaluación de los alumnos. Surgen así las pruebas con relación a criterio en donde son los objetivos marcados para cada disciplina los que establecen inicialmente el estándar adecuado. Las necesidades de expansión de los sistemas educativos a toda la población escolar impulsan la democratización en las aulas, enfatizando la necesidad de abandonar los fuertes criterios selectivos que habían predominado hasta el momento. Los objetivos planteados para cada clase de conocimientos se diversifican en cognitivos, procedímentales y actitudinales y lo que es más importante, cada uno de los objetivos empiezan a cualificarse como adecuados o inadecuados, para un determinado nivel, en función del rendimiento logrado por los correspondientes alumnos, completando así la tendencia general de evaluar a los alumnos por sus éxitos con una visión alternativa de valorar los objetivos por el porcentaje de éxito que los alumnos de un determinado nivel logran sobre el mismo.

Esta nueva conceptualización obliga a un análisis más fino de las producciones de los alumnos. ¿Cuáles son las causas por las que determinados aspectos de un objetivo logran éxitos considerables mientras que otros presentan dificultades insuperables para los mismos alumnos?

¿Son las tareas propuestas las que producen los errores? ¿Son los conceptos subyacentes? ¿Por qué esos saltos bruscos y esas profundas diferencias entre tareas aparentemente muy similares?

4.1 RECONOCIMIENTO Y DIMENSIONAMIENTO DEL CONTEXTO[6]

Este trabajo de investigación se desarrolla en la Universidad Pontificia Bolivariana (UPB), seccional Bucaramanga, en la Escuela de Ingenierías, Departamento de Ciencias Básicas y con una temática correspondiente al área de Matemáticas.

4.1.1 Misión. La Universidad Pontificia Bolivariana tiene por misión la formación integral de las personas que la constituyen, mediante la evangelización de la cultura, en la búsqueda constante de la verdad, con procesos de docencia, investigación y servicios, reafirmando los valores del humanismo cristiano, para bien de la sociedad.

4.1.2 Visión. La Universidad Pontificia Bolivariana tiene como visión, ser una institución católica de excelencia educativa en la formación integral de las personas, con liderazgo ético, científico, empresarial y social al servicio del país.

4.1.3 Programas Académicos. Actualmente la UBP Seccional Bucaramanga ofrece 10 programas de pregrado agrupados en tres escuelas: Escuela de Ingenierías y administración, Escuela de Ciencias Sociales y Escuela de Derecho y Ciencias Políticas.

La Escuela de Ingenierías y administración cuenta con los siguientes programas:

Administración de Empresas
Ingeniería Informática

[6] UPB. [online]. (noviembre, 2006). Disponible en WWW:<http://www.upbbga.edu.co>.

Ingeniería Electrónica
Ingeniería Industrial
Ingeniería Civil
Ingeniería Ambiental
Ingeniería Mecánica

La Escuela de Ciencias Sociales cuenta con los siguientes programas:

Comunicación Social
Psicología

La Escuela de Derecho y Ciencias Políticas cuenta con el programa de Derecho

Propósitos de formación de los diferentes Programas de ingeniería de la UPB-Bucaramanga: La Universidad Pontificia Bolivariana, seccional Bucaramanga busca formar profesionales:

- **En ingeniería Informática**: Con criterio científico, técnico, empresarial y humanista, que diseñen, implementen y soporten soluciones de tecnología informática, que lleven Desarrollo y Crecimiento Económico a las Organizaciones, de Cara a un Mejor Bienestar de Nuestro Entorno Social.

- **En ingeniería Electrónica**: Con altas calidades humanas, en concordancia con los valores y principios Bolivarianos, altamente competitivos en las áreas técnicas de instrumentación, control, robótica, automatización, telecomunicaciones y biomédica.

- **En ingeniería Industrial:** La misión es la formación integral de profesionales de calidad, con el respaldo de docentes altamente calificados y un currículo flexible que responde a las necesidades del entorno. Buscamos a través de la extensión, los programas de postgrado y los convenios internacionales contribuir al desarrollo de la sociedad, en concordancia con los lineamientos y principios que orientan nuestra institución.

- **En Ingeniería Civil**: La misión es la formación profesional integral de los Ingenieros Civiles de alta calidad en la planeación, diseño y ejecución de obras civiles, atendiendo la protección y conservación del medio ambiente, compatible con el desarrollo sostenible.

- **En Ingeniería Ambiental:** El programa busca formar integralmente Ingenieros Ambientales altamente competentes para planear, diseñar y ejecutar soluciones eficientes a los problemas de contaminación de aguas, aire y suelo; comprometidos con el mejoramiento de la calidad de vida de la comunidad, mediante la protección y conservación del medio ambiente, compatible con el desarrollo sustentable.

- **En Ingeniería Mecánica**: El programa busca formar integralmente Ingenieros Mecánicos para ser líderes tecnológicos y empresariales, como la región y el país lo requiere para un desarrollo sostenible.

El trabajo se desarrollará en el área de matemáticas que forma parte del Departamento de Ciencias Básicas, creado como Departamento dependiente de la Escuela de Ingenierías y Administración en enero de 1998. Este es un Departamento de servicios (no tiene programas propios) cuyo objetivo es ofrecer a los programas de ingenierías y administración de empresas las asignaturas del área de matemáticas, del área de física y del área de química que requieran.

Una de las asignaturas del pénsun de todas las ingenierías es la de Cálculo Diferencial (ver programa: anexo E). Esta asignatura está ubicada en el primer semestre de cualquiera de los programas de Ingeniería y tiene una intensidad horaria de 5 horas semanales obligatorias y 1 hora de "consulta programada" voluntaria en la que no se avanza en tema y se resuelven ejercicios y preguntas de los estudiantes. Como es la primera asignatura del área de matemáticas con la que el estudiante se debe enfrentar cuando ingresa a la Universidad, es donde se detectan las falencias en el área con las que inician los diferentes programas de Ingeniería, por lo que se revisarán los errores cometidos por los estudiantes matriculados en los 9 grupos de esta asignatura durante el primer semestre de 2006.

4.1.4 Evaluaciones. El semestre académico se divide en dos cortes de 7 u 8 semanas dependiendo de la programación anual que se realiza desde el año inmediatamente anterior. Para las asignaturas de las áreas que dependen del Departamento de Ciencias Básicas se deben obtener 4 notas parciales cada una de las cuales tiene un valor del 25%, distribuidas en dos exámenes (que abarcan cada uno aproximadamente el 50% del contenido del curso) y dos notas de seguimiento dentro de las que se tiene en cuenta el avance del estudiante por medio de evaluaciones cortas, trabajos, nota de la consulta programada, exposiciones y todas las opciones que el profesor acuerde con los estudiantes para evaluar este 25% en cada corte. Los exámenes se realizan al finalizar cada corte, es decir, en la semana 8 o 9 y en la semana 17, dependiendo del calendario de cada semestre. Durante estas dos semanas los estudiantes sólo presentan exámenes.

5. SUSTENTO TEÓRICO

El error se ha estigmatizado como una falta de la que se debe huir para no recibir el castigo por haberla cometido, de la que no se quiere volver a saber para no sentirse avergonzado. Desde niños hemos escuchado y sentido los cumplidos cuando acertamos en nuestras acciones y en contraste las críticas y sanciones cuando nos equivocamos y cometemos errores puesto que: "El error siempre es una transgresión, desviación o uso incorrecto de una norma, que puede ser lingüística, cultural, pragmática, y de una gran variedad de tipos más"[7].

Cometer un error es, por tanto, considerar como verdadera una teoría, norma, regla, fórmula o propiedad que no lo es. Corregir el error es buscar la teoría, norma, regla, fórmula o propiedad verdadera confrontarla con la falsa y aplicarla correctamente. Al respecto Bachelard escribió: "Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual"

En todos los ámbitos se exalta la consecución de logros, el éxito en las tareas y la conquista de metas y se rechaza el error y el fracaso. No se promueven ni la superación del error ni el aprendizaje de la corrección del mismo.

En el ámbito educativo ocurre lo mismo, como docentes elogiamos los aciertos de los estudiantes y censuramos los errores que cometen. No realizamos un acompañamiento en la corrección del error particular del estudiante ni seguimiento para la superación de dicho error. Es así como el estudiante rechaza el error ocultándolo y huyendo de él, perdiendo por consiguiente la posibilidad de aprender del mismo. En este sentido, el docente hace un control

[7] BLANCO PICADO, Ana Isabel. Instituto Cervantes en Varsovia. El error en el proceso de aprendizaje. En: http://www.cuadernoscervantes.com/art_38_error.html

del aprendizaje pero no una retroalimentación cognoscitiva que permita corregir los errores. Sin embargo, “es posible aprender a tomar el error, la frustración y el fracaso como fuentes de aprendizaje”[8].

Probablemente el escaso tratamiento que le hacemos a los errores se deba al modelo pedagógico con que enseñamos y que a su vez, en la mayoría de los casos, es el mismo con el que nos enseñaron, pues “los alumnos no olvidan el patrón visual y vital de enseñanza que se les ofrezca en la clase, por encima de teorías y planteamientos retóricos”….”Los alumnos, futuros maestros, enseñaran a sus alumnos como se les enseñe a ellos”[9].

5.1 ENSEÑANZA ACTUAL

La forma como enseñamos es determinante en el aprendizaje de los estudiantes, el modelo pedagógico que el profesor use puede favorecer o estorbar el aprendizaje. Rafael Flórez Ochoa[10] muestra cómo la labor docente de muchos maestros en las escuelas es frecuentemente no inteligente en lo pedagógico, en lo científico y cultural e indica el hecho de que su pensamiento sea eminentemente tradicionalista como una de las causas:

“Los rasgos pedagógicos observados durante varios años en diversos grupos poblacionales de educadores nos permiten caracterizar su pensamiento como eminentemente tradicionalista, por ser en esencia autoritario en la relación maestro-alumno, repetitivo, memorístico y formalista en la metodología de enseñanza, y transmisor de contenidos ya hechos y acabados que el alumno debe almacenar pasivamente. Es decir, la pedagogía tradicionalista que guía la acción

---

[8] RODRÍGUEZ, Mauro. Aprendizaje Creativo Continuo, Ed. Trillas, Primera edición, España, 2006. p.75
[9] OCHOA F., Rafael. Evaluación, Pedagógica y cognición. Ed. McGrawHill, Bogotá, 1999. p 32.
[10] OCHOA F., Rafael. Hacia una pedagogía del conocimiento. Ed. McGrawHill, Bogotá, 2000. p XIV.

pedagógica del maestro es precisamente la negación de la inteligencia de los muchachos…"

Actualmente, en las asignaturas de Ciencias Básicas de Ingenierías en la mayoría de las universidades se sigue una metodología basada en la exposición magistral de temas, realización de ejercicios por parte del profesor y afianzamiento con resolución de ejercicios por parte del estudiante ya sea individual o en grupos. "Esta escuela tradicional ha considerado siempre que las nociones transmitidas no están perfectamente integradas sino al término de una serie de ejercicios de puesta en práctica de los conocimientos, cuya repetición asegura el aprendizaje y siempre ha acompañado las lecciones-exposiciones orales de ejercicios de aplicación"[11], es decir, se enseña bajo la concepción de que "el estudiante es un receptor pasivo en el cual se depositan los saberes. Para esta concepción, la escuela es el centro donde se transmite el conocimiento, creado por fuera de ella y el cual es incorporado al alumno a través del maestro, quien necesariamente ocupa, junto con el saber el papel central en la relación educativa" [12].

Se ratifica de esta manera la pedagogía tradicional como modelo pedagógico actual: Exceso de teoría, abuso de las recetas, ausencia de fundamentación, exaltación del "activismo", son elementos claramente identificables, cuando describimos las prácticas y políticas en las facultades de educación[13].

5.2 PEDAGOGÍA TRADICIONAL

Olga Lucía Zuluaga ofrece la siguiente definición de pedagogía: "Entiendo por pedagogía la disciplina que conceptualiza, aplica y experimenta los conocimientos referentes a la enseñanza de los saberes específicos, en las diferentes culturas"[14].

---

[11] NOT, Louis. Las pedagogías del conocimiento. Ed. Fondo de Cultura Económica, Bogotá, 1994. p. 38.
[12] DE ZUBIRÍA S. Julián. Los Modelos Pedagógicos. Ed. Fundación Alberto Merani, Bogotá, 1994. p29
[13] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p. 24.
[14] ZULUAGA G. Olga Lucía. Pedagogía e Historia. Ed. Universidad de Antioquia, Bogotá, 1999. p.11

Sin embargo, numerosos estudios revelan que el docente comprende la enseñanza como la transmisión de contenidos y la pedagogía como el método o las técnicas para "llegar al alumno"[15].

Para Alain[16], el teórico de la Escuela Tradicional, el principal papel del maestro es el de repetir y hacer repetir, corregir y hacer corregir, en tanto que el estudiante deberá imitar y copiar durante mucho tiempo. Aunque lo que el copie no lo entiende, debe hacerlo ya que es gracias a su reiteración que podrá aprenderlo.

La concepción de la pedagogía tradicional sostiene que "el alumno es una tábula rasa sobre la que se van imprimiendo desde el exterior saberes específicos; la función de la escuela consiste en dirigir esta transmisión de una manera sistemática y acumulativa". De acuerdo con Julián De Zubiría, la pedagogía tradicional se apoya en los siguientes postulados:

- Postulados primero (propósitos): La función de la escuela es la de transmitir los saberes específicos y las valoraciones socialmente aceptadas.

Presupone que los saberes son los elaborados por fuera de la institución educativa y que llegan a ella mediante la lección que dicta el docente. El estudiante es identificado con un receptor, que gracias a la imitación y a la reiteración logrará reproducir los saberes que le fueron transmitidos.

- Postulado segundo (contenidos): Los contenidos curriculares están constituidos por las normas y las informaciones socialmente aceptadas.

---

[15] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p 23.
[16] Ibid., p. 52.

El objeto de estudio son los conocimientos específicos ya que la finalidad de la educación instruccional es la de dotar a sus estudiantes de los saberes enciclopédicos acumulados por siglos. El conocimiento "de hecho" que tienen los profesores se compone de: a) saberes académicos, b) saberes basados en la experiencia, c) rutinas y guiones de acción y d) las teorías implícitas[17].

- Postulado tercero (secuencia): El aprendizaje tiene carácter acumulativo, sucesivo y continuo, por ello el conocimiento debe secuenciarse instruccional o cronológicamente.

El estudiante es un elemento pasivo del proceso que, si atiende como es debido podrá captar la lección enseñada por el maestro. Y como siempre el alumno aprende igual, el maestro debe enseñar igual.

Se presentan dos formas de concatenar y organizar los contenidos: la secuenciación instruccional y la secuenciación cronológica. En la primera de ellas sólo se debe enseñar un contenido cuando la información previa ya haya sido aprendida; en la segunda, aquel se imparte teniendo en cuenta el orden de la aparición de los fenómenos en la realidad.

- Postulado cuarto (el método): La exposición oral y visual del maestro, hecha de una manera reiterada y severa, garantiza el aprendizaje. La escuela tradicional le asigna al maestro la función de transmitir un saber, al tiempo que el alumno debe cumplir el papel de receptor sobre el cual se imprimirán los conocimientos. Ninguno de los dos es considerado activo en el proceso educativo, ya que el maestro es un reproductor de saberes elaborados por fuera de la escuela, y el estudiante debe ser un reproductor de los saberes transmitidos en la escuela.

---

[17] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p 23.

- Postulado quinto (los recursos didácticos): Las ayudas educativas deben ser lo más parecidas a lo real para facilitar la percepción, de manera que su presentación reiterada conduzca a la formación de imágenes mentales que garanticen el aprendizaje.

- Postulado sexto (la evaluación): La finalidad de la evaluación será determinar hasta que punto han quedado impresos los conocimientos transmitidos.

Una mirada reflexiva a estos postulados nos revela que esta es la tendencia más arraigada en nuestra "cultura escolar" y que esta parece ser la única manera de hacer las cosas. El maestro sabe, selecciona contenidos y los explica a los estudiantes, definiendo en la asignatura cada uno de los términos y asegurándose de que el estudiante los entiende porque los memoriza, los repite y los consigna por escrito en sus cuadernos[18].

Bajo la pedagogía tradicional el alumno tiende a mecanizar y memorizar procedimientos, fórmulas, y hasta razonamientos que en muchos casos lo conducen a cometer errores bajo la presión de la evaluación ya sea oral o escrita: "La escuela tradicional abandonó el pensamiento, concentrando sus esfuerzos en los aprendizajes mecánicos obtenidos mediante la reiteración de la exposición y la práctica. Es la escuela que privilegia lo particular y específico, desconociendo que ello no puede ser entendido sin la presencia de instrumentos generales del conocimiento. En realidad, puede hacerlo dado que no se preocupa por la comprensión, sino por el aprendizaje mecánico"[19].

[18] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p. 50.

[19] DE ZUBIRÍA S. Julián. Los Modelos Pedagógicos. Ed. Fundación Alberto Merani, Bogotá, 1994. p. 60.

5.3 EVALUACIÓN

En la práctica cotidiana del maestro universitario y del educador en general, la evaluación depende de la concepción que cada uno tenga de aprendizaje, ciencia, educación, enseñanza[20].

Se ha sustentado el enfoque tradicional como modelo pedagógico actual, en consecuencia, las prácticas de evaluación de los docentes están delineadas por esta concepción de la enseñanza: “La realidad actual para evaluar al estudiante continúa bajo el enfoque de la pedagogía clásica o tradicional”[21].

La escuela tradicional concibe al estudiante como una tabula rasa sobre la cual se imprimen desde el exterior imágenes o conocimientos. Desde un enfoque sociológico, Paolo Freire denomina “bancaria” a esta concepción educativa, puesto que se realiza mediante el depósito y el retiro de contenidos: el “educador” es quien cumple las funciones de elegir contenidos, prescribir, hablar, disciplinar, y educar, mientras que el educando es el receptor que sigue las prescripciones, escucha, acata las normas y recibe la educación. La función de la evaluación es, entonces, la de determinar la presencia o ausencia de los contenidos transmitidos[22].

Así, la evaluación se aplica para “medir” el aprendizaje de los diferentes alumnos que han recibido la misma cantidad de contenidos y con el mismo rasero para garantizar su “objetividad”. Es por esta razón que “La evaluación se identifica, con excesiva frecuencia, con las pruebas, es decir, con los exámenes escritos

[20] EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES. En Encuentro Internacional sobre políticas, investigaciones y experiencias en evaluación educativa: consecuencias para la educación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2004 p. 115.
[21] Ibid., p. 104.
[22] DE ZUBIRÍA S. Julián. Los Modelos pedagógicos. Ed. Fundación Alberto Merani, Bogotá, 1994. p. 60.

que realizamos en la escuela[23]. Y es, en muchos casos el único medio por el que detectamos las equivocaciones –errores- que los estudiantes cometen al intentar reproducir los conocimientos transmitidos en las clases, es ahí donde surgen las inconsistencias, donde se determina si el estudiante "captó" la lección recibida del maestro: "la realidad de la docencia universitaria aún sigue contemplando la evaluación como una técnica para elaborar preguntas adecuadas para un examen y la mejor manera de calificarlas, olvidando los conceptos y el significado profundo de lo que implica la evaluación educativa" [24].

Estos y otros problemas de la evaluación actual los resume Tamayo[25], así:

- Con frecuencia, los apuntes acumulan información errónea sobre los contenidos explicados, de la misma manera determinados libros de texto favorecen la acumulación de errores en los alumnos.
- Los alumnos tienden a preparar mecánicamente los exámenes, memorizando los contenidos sin relacionarlos con la estructura de significados, de manera que tienden a olvidarlo pronto. Esto crea un problema muy generalizado de tener que partir cada vez de cero, con lo que se rentabiliza poco el esfuerzo de la enseñanza.
- Los exámenes crean el problema de adiestrar a los alumnos en un estilo rutinario y mecánico de aprendizaje, lo que supone un obstáculo para cualquier estrategia de cambio.

Estos problemas que presenta la evaluación dentro de la enseñanza tradicional son fuente de errores y al no reflexionar sobre ellos el alumno suele repetir ya sea el mismo proceso de memorización que le proporcionó el fracaso anterior, la

---

[23] NOVAK. Joseph D. Conocimiento y aprendizaje. Ed. Alianza Editorial, Madrid, 1998. p 227
[24] Evaluación de los aprendizajes. En Encuentro Internacional sobre políticas, investigaciones y experiencias en evaluación educativa: consecuencias para la educación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2004 p. 111.
[25] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p. 50.

misma preparación mecánica o la misma acumulación de errores por apuntes mal tomados.

Hay que destacar que en la enseñanza transmisionista tradicional la evaluación de los alumnos es un procedimiento que se utiliza casi siempre al final de la unidad o del periodo lectivo para detectar si el aprendizaje se produjo y decidir si el alumno repite el curso o es promovido al siguiente. Se trata de una evaluación final o sumativa, externa a la enseñanza misma y que permite verificar el aprendizaje de los alumnos de manera cualitativa, simplemente comprobando si el alumno aprendió o no el conocimiento transmitido; o de manera cuantitativa asignándole algún numeral o porcentaje al aprendizaje que el alumno muestra en relación con el promedio del grupo al que pertenece (evaluación según norma) o en relación con la precisión del logro del objetivo de aprendizaje esperado o enseñado (evaluación según criterio) [26] .

En la enseñanza tradicional la evaluación es reproductora de conocimientos, clasificaciones, explicaciones y argumentaciones previamente estudiadas por el alumno en notas de clase o textos prefijados, sin que ello signifique repetición memorística, pues también se evalúan en esta perspectiva tradicional niveles y habilidades de comprensión, análisis, síntesis y valoración de lo estudiado, ya sea en pruebas orales o en pruebas escritas de preguntas abiertas. Las preguntas escritas pueden ser cerradas o de una respuesta precisa, tipo test, llamadas también preguntas objetivas y pueden redactarse de diferentes formas según requieran del estudiante información o comprensión y reflexión sobre el tema objeto de examen[27].

En la dinámica actual del sistema educativo colombiano se aprecia que la evaluación no retroalimenta el proceso y su acción se reduce a la medición

[26] OCHOA F., Rafael. Evaluación, Pedagogía y cognición. Ed. McGrawHill, Bogotá, 1999. p 35.
[27] Ibid., p. 36.

terminal y aislada para definir una calificación, en otras palabras se considera que evaluar es medir o cuantificar lo que ha aprendido un educando, por esto los profesores la realizan para definir que alumno se promueve, como herramienta de control y en menor frecuencia para promover el aprendizaje[28].

De lo anterior se deduce que bajo la concepción tradicional de la enseñanza, es en las pruebas escritas donde se pueden detectar con mayor posibilidad los errores que los estudiantes cometen.

Pero los errores no sólo surgen de la concepción de enseñanza y de la evaluación que se emplee si no también de las condiciones o del proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta que "los conceptos de enseñanza y aprendizaje son dos procesos correlativos, inseparables uno del otro, relacionados como causa y efecto probables, aunque se sabe que muchos aprendizajes, quizá, se obtienen de la vida sin que haya mediado ninguna enseñanza"[29].

5.4 APRENDIZAJE

El ser humano por su condición racional privilegiada entre todas las criaturas del universo ha podido mejorar su vivienda, su medio de transporte, su salud y, en general, sus condiciones de vida gracias al aprendizaje. La capacidad de aprender le ha permitido no sólo construir una vivienda para protegerse de las inclemencias del clima sino tener un sitio en donde vivir confortablemente, no sólo diseñar calzado para protegerse los pies al caminar sino inventar el avión para trasladarse de una nación a otra en poco tiempo, no sólo usar hierbas para curar

[28] Evaluación de los aprendizajes. En Encuentro Internacional sobre políticas, investigaciones y experiencias en evaluación educativa: consecuencias para la educación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2004 p. 111.
[29] Ibid., p. 36.

sus enfermedades sino hacer intervenciones quirúrgicas para mejorar y alargar su vida.

El aprendizaje es el medio por el cual se adquieren habilidades, conocimientos, valores y actitudes que se heredan de generación en generación, por tanto, es el medio por el cual cada una puede aportar a la siguiente. Pero este logro no se ha dado de manera única para cada ser humano sino que ha dependido de la tendencia (teoría) bajo la cual haya tenido lugar su aprendizaje.

5.4.1 Definición de Aprendizaje:[30]

1. El aprendizaje es un cambio relativamente permanente en la conducta como resultado de la experiencia.

2. El aprendizaje es un cambio relativamente permanente en las asociaciones o representaciones mentales como resultado de la experiencia.

Según el autor de estas dos definiciones, ellas difieren principalmente respecto a lo que cambia cuando tiene lugar el aprendizaje. La primera definición se refiere a un cambio en la conducta, un cambio externo que podemos observar y refleja la perspectiva de un grupo de teorías conocidas como conductismo. El conductismo propuso un modelo de aprendizaje de tipo asociativo: $E \rightarrow R$. Los Estímulos (externos) llegan al individuo quien produce las Respuestas (internas o conductuales). La instalación de nuevas conductas por repetición de asociaciones $E \rightarrow R$ define el aprendizaje por condicionamiento. Este es un proceso mecánico en el que el repertorio de comportamientos del aprendiz está determinado por los

[30] ORMROD, Jeanne Ellis. Aprendizaje Humano, Ed. Pearson, Prentice Hall, cuarta edición, Espana, 2005. Pág 4.

reforzamientos que el medio proporciona: se recompensan y reproducen las "buenas" respuestas y las "malas" se castigan y son abandonadas[31].

Las teorías conductistas se centran en el aprendizaje de conductas tangibles y observables, tales como atarse los zapatos o resolver correctamente un problema aritmético.

Aunque el conductismo se instauró en los años cincuenta del siglo XX, pareciera que su propuesta siguiera vigente en nuestros días, pues seguimos reproduciendo las "buenas" respuestas y huyendo de las respuestas "malas" o errores.

Por el contrario la segunda definición de aprendizaje se centra en un cambio en las representaciones o asociaciones mentales, un cambio interno que no podemos ver, lo que refleja la perspectiva de un grupo de teorías conocidas como cognitivismo. Las teorías cognitivas no se centran en la conducta sino en los procesos de pensamiento (en ocasiones denominados acontecimientos mentales) implicados en el aprendizaje humano. Algunos ejemplos de tales procesos pueden ser: encontrar la relación entre la adición y la sustracción o utilizar trucos mnemotécnicos para recordar el vocabulario de un examen de inglés.

Bajo la teoría conductista del aprendizaje, cometer un error es entonces presentar conductas no apropiadas y respuestas incorrectas cuando se exige la espontaneidad de ellas. Y bajo la concepción cognitiva, es dar muestra de la elaboración no adecuada de procesos de pensamiento en la respuesta lógica a situaciones en los diferentes ambientes donde se presenten.

---

31 MORENO A, Luis. y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas. En: Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá 2002. p.43.

5.4.2 Establecer cuándo se ha producido el aprendizaje. Mientras no se haya producido algún tipo de aprendizaje no se puede hablar de errores puesto que éstos son inherentes al aprendizaje mismo. Por lo que es muy importante establecer cuándo se ha producido el aprendizaje. ORMROD[32], en "Aprendizaje Humano", dice que una persona aprende cuando se percibe un cambio en la conducta. Ya sea que se adopte una perspectiva conductista o cognitiva, se sabe que ha ocurrido un aprendizaje cuando se observa un cambio en la conducta de una persona. Por ejemplo, se podría ver a un aprendiz:

- Realizando una conducta completamente nueva.
- Cambiando la frecuencia de una conducta ya existente.
- Cambiando la velocidad de una conducta ya existente.
- Modificando la complejidad de una conducta ya existente.
- Respondiendo de manera diferente ante un estímulo determinado.

Según el autor, los anteriores son indicios de que se ha producido un aprendizaje que puede ser temporal o definitivo según sea de interés o no para la persona que aprende y según sea la forma en que se haya dado.

En este caso se puede determinar la presencia de errores al confrontar lo que el aprendiz debió asimilar con las respuestas que emite sobre lo aprendido. Estos errores pueden variar dependiendo de las formas de aprendizaje.

5.4.3 Formas de Aprendizaje. En nuestra vida no sólo aprendemos conocimientos sino también habilidades, actitudes y conductas que están influenciados por el medio, la edad, la cultura y la forma como este aprendizaje se

[32] ORMROD, Jeanne Ellis. Aprendizaje Humano, Ed. Pearson, Prentice Hall, cuarta edición, Espana, 2005. Pág 6.

haya realizado. Mauro Rodríguez[33] hace la siguiente clasificación de las formas más notables de aprendizaje:

- **Aprendizaje Sensoriomotor**. El que se realiza con cada uno de los sentidos. Los sentidos corporales son las ventanas por las que entra el mundo. Tenemos aprendizaje visual, auditivo, táctil, gustativo, olfativo y cinético.

- **Aprendizaje intelectual**. Mientras el mundo sensorial es concreto, la inteligencia sabe ser abstracta; el primero es la esfera de lo particular, la segunda, la de lo general; el sensorial la esfera de los hechos, lo intelectual es el reino de las ideas que suelen ser universales. El aprendizaje intelectual que funda la diferencia entre el hombre y los animales, y que ha hecho posible la filosofía y todas las ciencias, procede de abstracciones.

- **Aprendizaje Memorístico**. Cuando se limita a guardar en la memoria datos, como cuando aprendemos un número telefónico, o la nueva dirección de un amigo o cuál es la capital de un país. La memoria es importante, tanto que se llegó a equiparar aprender con memorizar, pero esto es ya una distorsión y un exceso. El memorismo es el reino de la superficialidad y el terreno abonado para toda suerte de manipulaciones. Uno de los elementos más vistosos de este aprendizaje es la repetición. Existen dos formas de memoria: la recognitiva y la reproductiva, la primera consiste en poder reconocer, la segunda en poder evocar y reproducir lo aprendido.

- **Aprendizaje por discriminación**. El niño aprende elaborando conceptos indiferenciados. Este es un proceso de pulido y afinación por el que no sólo pasan los niños, sino también las comunidades, las cuales maduran de formas primitivas y toscas a ya elaboradas y refinadas.

---

[33] RODRÍGUEZ, Mauro. Aprendizaje Creativo Continuo, Ed. Trillas, Primera edición, España, 2006.

- **Aprendizaje perceptual**. La percepción se distingue de la sensación pura, en que ésta es mera recepción en tanto que la percepción es síntesis de lo objetivo con lo subjetivo; refleja el efecto de las experiencias pasadas sobre la recepción sensorial del presente. Mientras la sensación pura es (o sería) pasiva, la percepción tiene algún grado de actividad y de creatividad del sujeto. Y notemos que hay toda una gama entre percepciones que se acercan a la captación exacta (totalmente objetiva), y otras que se acercan a una visión fantasiosa (elaboración subjetiva).

- **Aprendizaje psicomotor.** Aprendemos a usar un serrucho, a encestar el balón en el juego de básquetbol, a dar en el blanco a la primera. Aquí no se trata de conocimientos como de habilidades.

- **Aprendizaje emotivo**. Se aprende a sentir y a manejar adecuadamente los sentimientos. Finalmente hemos superado el viejo y tenaz dilema: “racional o emocional”, “cerebro o corazón”. Los más recientes estudios sobre inteligencia emocional nos han hecho comprender que se puede ser al mismo tiempo racional y también emocional.

- **Aprendizaje por transferencia**. Tenemos la capacidad de extrapolar lo aprendido, y más concretamente la aplicación a un campo B de algunos procesos adquiridos en un campo A. La transferencia es positiva cuando facilita la segunda tarea, es decir, el aprendizaje de algo parecido. Es negativa cuando interfiere y estorba. Otra faceta de esto es que no basta adquirir conocimientos, hay que saber usarlos, y no siempre quien es capaz de lo primero es capaz de lo segundo.

- **Aprendizaje verbal**. Se da a través de la comunicación por vía de palabras orales o escritas. Las palabras informan, mandan, acusan, desahogan,... Muchos aprendizajes psicomotores requieren una etapa verbal.

- **Aprendizaje multimodal**. Para un aprendizaje podemos usar un sólo sentido, y podemos también utilizar canales paralelos de procesamiento como varias vías para llegar a diferentes partes del cerebro. Así se explica que una lesión localizada en una zona del cerebro no elimine totalmente algunos aprendizajes. El modo más común del estímulo multimodal para el aprendizaje es el audiovisual.

- **Aprendizaje Programado**. Es una modalidad creada por el psicólogo B.F. Skinner. Utiliza una "máquina de enseñar". Se basa en los siguientes principios:

1. Es la característica del hombre a modificar su medio. Las experiencias que adquiere mediante los actos realizados con tal fin, actúan a su vez sobre las conductas sucesivas.
2. La conducta operativa puede ser reforzada por cada pequeño progreso en dirección del éxito (condicionamiento operante)
3. Es normal que el aprendizaje sea incremental, es decir, por pequeños pasos sucesivos, más bien que por saltos.
4. El efecto del refuerzo depende de la forma en que se efectúa. Hay formas de refuerzo muy eficaces y las hay débiles. Un refuerzo inmediato es más efectivo que uno muy diferido.
5. Como toda conducta tiene una determinación múltiple, es difícil ser profeta en este campo. Un mismo estímulo origina en individuos diversos reacciones diversas.

- **Aprendizaje cooperativo.** La tradición escolar se centró en el aprendizaje individual. Sólo recientemente se descubrió el valor de la comunidad de aprendizaje, donde se crea la dinámica de dar y recibir. Hoy se sabe que el grupo interactivo es el lugar ideal de aprendizaje.

- **Aprendizaje a partir de los errores.** Es posible aprender a tomar el error, la frustración y el fracaso como fuentes de aprendizaje. Mucho de la literatura de superación personal, del manejo de las actitudes y del desarrollo de la autoestima va en ese sentido. Por tanto, el error debe convertirse en una forma de aprendizaje continuo.

Pero el error es un obstáculo del aprendizaje que puede llegar a afectar al estudiante tanto en su desempeño académico como en su autoestima y seguridad: "…es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra". [34]

5.4.4 Obstáculos del Aprendizaje. Existen condiciones, situaciones o circunstancias en la vida de cada persona que pueden llegar a favorecer u obstaculizar su aprendizaje. Mauro Rodríguez[35] hace la siguiente descripción de los obstáculos del aprendizaje:

- **Falta de Plan de vida y de objetivos.** Muchas personas que caminan por la vida sin saber a donde se dirigen, tienen aprendizajes derivados de los estímulos que les llegan del medio, pero tales vivencias quedan en estado fragmentario, desorganizado, caótico; son como alimento que no se digiere. Falta un principio dinámico que unifique y conduzca.

---

[34] BACHELARD, Gaston. (1984). *La formación del espíritu científico*. 12º Ed. Buenos Aires: Siglo XXI. P.15.
[35] RODRÍGUEZ, Mauro. Aprendizaje Creativo Continuo, Ed. Trillas, Primera edición, España, 2006. p. 80-84

- **Estancamiento, pereza, abulia.** Muy ligado al anterior. Se trata de sujetos que viven la propia vida como cadena de rutinas, sin mística de superación personal ni de autorrealización ni de crecimiento. Carecen del impulso a renovarse y, como no les interesa crecer, tampoco les interesa aprender.

- **Cuadros neuróticos de ansiedad.** Una persona con graves problemas emocionales no puede manejar información de forma eficiente y efectiva; tiene problemas de atención, de memoria y de desajustes psicosomáticos. Es un principio general que mientras la angustia y la inactividad atrapan y congelan, la acción productiva y creativa tonifica y libera.

- **"Educación de empleado."** En los países tercermundistas y sobre todo en las familias de bajos recursos, la mayoría de los chicos son formados y preparados para ser ejecutores de órdenes y de programas ajenos. Difícilmente podrán tener el impulso para aprendizajes ambiciosos, riesgosos, innovadores, emprendedores, conquistadores. Son los trabajadores que a cada paso manifiestan auto limitaciones al desarrollo: "lo hago como siempre se ha hecho", "no tiene caso intentar más", "no me toca hacer más", "no me meto en problemas", "más vale malo por conocido que bueno por conocer".

- **Problemas de lenguaje.** En muchas áreas estos dificultan el aprendizaje. Es estrechísima la relación mutua entre aprendizaje y lenguaje de un sujeto (sobre todo mala comprensión de las palabras y frases) lo convierten en un operario que trabaja con un instrumento roto o muy desgastado.

- **Deficiencias sensoriales.** Mala vista, deficiente audición, etc. Ocasionan que actuemos como quien pone un buen aparato, pero suministrándole materia prima de mala calidad.

- **Baja Autoestima.** En los países en vías de desarrollo, la baja autoestima es una enfermedad casi endémica. Esta deficiencia refleja la psicología típica de los pueblos conquistados y colonizados, pueblos en los que durante siglos los habitantes se sintieron ciudadanos no participativos y mudos; pueblos en los que las cosas muy buenas y valiosas se esperaban de fuera, de la lejana metrópoli.

Silver[36] describe los obstáculos de aprendizaje en términos de procesos con dificultades y explica que la definición parte de un modelo cibernético predominante en educación especial y en la base de la mayoría de los tests e instrumentos educativos para la comprensión del aprendizaje y de los trastornos del aprendizaje. Por lo tanto, hay que considerar múltiples procesos y áreas problema. Diferencia cuatro grupos de procesos con posibles dificultades de aprendizaje: input, integración, memoria y output. Se pueden encontrar dificultades de aprendizaje en cada uno de los grupos de procesos. Así, describe Silver (1989):

a. **Los trastornos de imput** incluyendo los trastornos perceptivo-visuales y auditivos;
b. **Los trastornos de integración,** en donde se integrarían los trastornos de secuenciación, abstracción y organización y ello tanto a nivel visual como auditivo;
c. **Los trastornos de memoria** que puede observarse a corto y a largo plazo y ambas a nivel visual y a nivel auditivo, y
d. Los **trastornos de output** reflejados en trastornos de lenguaje, sea a nivel de espontaneidad, de demanda o específico y a nivel de trastorno motor, sea a nivel grueso o fino.

---

[36] GARCIA, Jesús Nicasio. Manual de Dificultades de Aprendizaje, Ed. Nancea, S. A. de Ediciones, Madrid, 1999; p. 42.

Las personas que están afectadas por alguna de las condiciones anteriores pueden presentar aprendizajes incompletos o incorrectos los cuales son fuente de obstáculos para un verdadero aprendizaje, y por tanto, de errores.

Ya ubicados en el contexto de construcción del saber, y en los elementos claves que aparecen, en lo que concierne al error en general, es hora de centrar la atención en los aspectos que tienen que ver con el error en el área de matemáticas. El primero que se va a considerar es:

5.5 ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMATICAS

El área de matemáticas como parte del currículo del bachillerato o de cualquiera de las ingenierías, se enseña también bajo el paradigma tradicional: "La enseñanza tradicional induce en los estudiantes la idea de que las matemáticas están referidas a un conjunto de expresiones simbólicas desprovistas de conexión con cualquier fragmento de su conocimiento[37].

Gloria García, María Castiblanco y Rodolfo Vergel[38], hacen una descripción de las prácticas actuales en las clases de matemáticas, así:

La enseñanza se restringe casi exclusivamente a la presentación verbal por parte del profesor de enunciados y procedimientos matemáticos y en la mayoría de las clases se discriminan las tareas para el profesor y el estudiante, pues el profesor; es quien tiene bajo su responsabilidad proponer los problemas y, por consiguiente, es el responsable de validar la solución.

---

[37] MORENO A, Luis. y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas. En: Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá 2002. p. 61.
[38] GARCIA O, Gloria, CASTIBLANCO A, María G y VERGEL C, Rodolfo. Prácticas de evaluación en las clases de matemáticas en la educación Básica. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005. p. 32.

Acerca de las normas que regulan el intercambio que se da en el aula, la expresión oral en la clase de matemáticas es manejada, y casi totalmente orientada, por el profesor; por tanto, es él quién “decide qué aspectos tratar y cuáles no, determina cuándo se inicia y termina una interacción o cuando hay necesidad de enunciar preguntas y de escuchar respuestas”. Las normas que regulan la interacción en las clases, si bien son implícitas están reguladas por los siguientes aspectos:

- La ausencia de comprensión del tema se manifiesta en las preguntas acerca del cómo desarrollar las tareas.
- La validez de las actuaciones de los estudiantes está determinada por el profesor y en algunas ocasiones por el texto.
- La validez de lo que explica y dice en general el profesor no se cuestionan y no es usual que los profesores admitan la posibilidad de cometer un error.
- Las respuestas de los estudiantes deben ser “correctas” y únicas, o que se convalida en los ejercicios escritos, pues sólo se acepta la respuesta correcta.
- Las reacciones de los profesores para validar las producciones de los estudiantes son tácitas en la mayoría de los casos, y se realizan a través de un gesto o de una expresión verbal indirecta.
- El centro de atención de las intervenciones de los profesores con respecto a las producciones de los estudiantes es indicar lo que es incorrecto, “tanto desde el punto de vista de la forma como del contenido matemático”.
- El trabajo individual prevalece en las clases y los estudiantes no pueden preguntar a sus compañeros mientras desarrollan las tareas.

Con lo anteriormente expuesto se deduce que la matemática se percibe como una disciplina acotada estáticamente revelando que “aún actuamos bajo la concepción positivista en la que el ideal es la objetividad máxima, por tanto, pretende explicar toda la realidad mediante un método único y desde la observación absoluta y transparente" [39].

De ahí que el estudiante se sienta apocado cuando no acierta en las pruebas, cuando no logra reproducir lo que el profesor le enseñó. No tiene la confianza de exhibir sus errores al profesor para que se le proporcione la retroalimentación necesaria. No acepta cometer errores pues generalmente se la ha presentado la matemática como un área infalible.

El segundo aspecto imprescindible de considerar cuando se trata el error en matemáticas es la evaluación:

5.6 LA EVALUACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Ochoa Flórez[40] describe tres experiencias de enseñanza y evaluación: la del principio de Arquímedes, la de la teoría de grafos y la del principio de proporcionalidad, y concluye entre otras cosas, que evaluar no es una técnica general y abstracta sino una actividad ligada a la enseñanza; que varía según el tema y la estrategia de la enseñanza; que requiere anticipar los probables nodos de sentido o encrucijadas mínimas por las cuales el alumno tiene que pasar de forma secuencial para ubicar en cada uno un centro de observación especial, una mayor atención del profesor y del alumno que les permita detectar si el proceso de aprendizaje es promisorio y bien encaminado o, si por el contrario es necesario invitar al alumno a enfocarse mejor, recordándole la pregunta inicial y reconviniendo con él, el sentido del problema paso a paso.

---

[39] BIGGE, Morris L, Teorías de aprendizaje para maestros. Primera edición. Editorial Trillas, México, 1996.
[40] OCHOA F., Rafael. Evaluación, Pedagógica y cognición. Ed. McGrawHill, Bogotá, 1999, p. 137.

Aunque este es el ideal de evaluación, como dice Ochoa Flórez, ésta varía según el método de enseñanza. En la enseñanza tradicional: "la evaluación se asume como una acción de control que se realiza para verificar y demostrar objetivamente las adquisiciones de los estudiantes en términos medibles, precisos, puntuales y claros (objetivos)"[41].

En este modelo de enseñanza se presenta una organización cognitiva de los contenidos matemáticos dando prioridad en su formulación a los aspectos algorítmicos y procedimentales del conocimiento matemático. Cuando se maneja la resolución de problemas como medio para el desarrollo de capacidades, la resolución se entiende como aplicación de cálculos. "Los contenidos de la enseñanza vuelven a ser los algoritmos y el aprendizaje de los estudiantes de nuevo es reducido a técnicas y destrezas" [42].

De la descripción que hace Vasco del proceso de producción de la Teoría de Grafos de Euler pueden establecerse pasos o niveles de matematización que toda enseñanza cognitiva debe diferenciar; si pretende detectar el nivel o fase que el alumno alcanza en su proceso de aprendizaje de las matemáticas. Ellas son:

- Primera Fase: La representación mental que el alumno hace de su propia actividad sobre los objetos, sobre sus representaciones simbólicas.
- Segunda Fase: Las operaciones que el alumno realiza sobre sus propias representaciones ya interiorizadas y sistematizadas.
- Tercera Fase: La identificación de los obstáculos y de los excesos de información para resolver el problema.
- Cuarta Fase: La interrelación entre los elementos o variables esenciales a la solución.

[41] GARCIA O, Gloria, CASTIBLANCO A, María G y VERGEL C, Rodolfo. Prácticas de evaluación en las clases de matemáticas en la educación Básica. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005. p.25.
[42] Idem., p.47.

- Quinta Fase: La operación y el ensayo de la solución.
- Sexta Fase: Comprobación y Generalización.
- Séptima Fase: La demostración lógico-formal, si es el caso.

Es importante que dentro de la evaluación se determinen las fases que el alumno ha superado en cada pregunta para llegar así a retroalimentarlo de acuerdo a su nivel de avance.

Un tercer aspecto que se debe considerar en el manejo del error en matemáticas es la forma en que se obtiene el aprendizaje dentro de la asignatura:

5.7 APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

"El aprendizaje es reducido a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas"[43], lo que deja entrever el modelo tradicional con el que el estudiante aprende. Gloria García, María Castiblanco y Rodolfo Vergel[44], nos muestran algunas características de la forma como se percibe el aprendizaje en las clases de matemáticas, las cuales se mencionan a continuación:

- En este enfoque sólo existe una vía de aprendizaje: la instrucción, que se concibe como la presentación que hace el profesor, acompañada de sesiones de preguntas y respuestas, es la actividad que conforma el núcleo del segmento presentación de contenidos.

- El modelo es textualizado a través de las programaciones didácticas y en textos curriculares y escolares; la organización de los contenidos matemáticos

---

[43] GARCIA O, Gloria, CASTIBLANCO A, María G y VERGEL C, Rodolfo. Prácticas de evaluación e las clases de matemáticas en la educación Básica. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005. p.39.

[44] Idem., p. 40.

se formula en listas de temas y cada tema se considera independizado de los otros o vinculado por cuestiones de prerrequisitos.

- La estructura del texto autoriza al didacta, como señala Chevallard, a creer en la ficción de que el aprendizaje tiene un inicio y un fin y que el proceso de aprender es equivalente a la estructura del texto. Se cree también en la ficción de una concepción de aprendizaje isomorfa temporalmente respecto al modelo que marca el texto, al mismo tiempo que establece la duración del proceso didáctico. La ficción lleva a que la mayoría de las veces los obstáculos que se presentan en el proceso didáctico, retrasos, bloqueos y errores de estudiantes tengan que ser negociados o solucionados con recursos como los ejercicios repetitivos, lo que Chevallard denomina algoritmación del saber objeto de enseñanza.

Por otra parte esta ficción tiende a promover una visión del error como una simple falta en relación con el pleno del texto, lo que lleva necesariamente al profesor a establecer la corrección. El error es asumido como una laguna o ausencia de conocimiento por parte del estudiante. El estudiante busca no equivocarse y la demostración de que aprendió es reducida a repetir de memoria lo que el profesor le enseñó.

Para Gascón[45], el contrato didáctico vigente asigna al profesor la responsabilidad última del aprendizaje del estudiante, por lo que el profesor tiene la obligación frente a los alumnos de explicar con toda claridad lo que debe hacer el alumno y de controlar paso a paso y constantemente la actividad del estudiante. El estudiante debe reproducir casi mecánicamente, y su conocimiento o comprensión es totalmente dependiente del profesor. El tipo de trabajo que se propone al

[45] Ibid., p.25.

estudiante es tecnicista, en tanto no interesan los aspectos justificativos e interpretativos de la actividad matemática.

5.8 EXPLICACION DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS (DAM)

Garcia[46], nos presenta explicaciones de las diferentes posibles causas de los problemas que se presentan con el aprendizaje de las matemáticas, en las cuáles se profundiza en los párrafos siguientes:

5.8.1 Explicación Neuropsicológica. La primera explicación histórica de las dificultades de aprendizaje y en concreto de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas fue la neuropsicológica; no así en los enfoques actuales.

Morrison y Siegel (1991) hacen la doble distinción de acalculia cuando se produce una dificultad de aprendizaje de las matemáticas ocasionada por una lesión cerebral en una persona adulta, y de discalculia cuando no hay evidencia de lesión o disfunción cerebral que ocasione estas dificultades y se da en un niño. Evidentemente, si el niño con discaculia llega a mayor y mantiene su dificultad de aprendizaje de las matemáticas también habría que hablar de acalculia.

La distinción anterior refleja el foco en que este tipo de explicación se centra en las disfunciones neurológicas y en los procesos internos. Inicialmente, desde este enfoque se hacía una extrapolación de la conducta manifestada en adultos con acalculia a la explicación de la observada (DAM) en niños, por lo que procedía a realizar una «exploración de corteza», a la búsqueda de posibles fallos en los centros corticales de las habilidades matemáticas -¿corticales, frontales,

[46] GARCIA, Jesús Nicasio. Manual de Dificultades de Aprendizaje, Ed. Nancea, S. A. de Ediciones, Madrid, 1999. págs. 67-75

parietales, temporales?- que se relacionaran causalmente con las conductas anómalas de aprendizaje de las matemáticas. Una ejemplificación de esta explicación es la propuesta por Luria (Luria, 1974; 1979; 1983) y por lo tanto, así se establecerían los principios de la intervención (Tsvétkova, 1977, referido al lenguaje y la lectoescritura). Luria describe lesiones occipitoparietales y frontales en el origen de dos tipos de alteraciones de las habilidades matemáticas.

En las lesiones occipitoparietales se producen las siguientes manifestaciones:

1. Déficit en el concepto de número y en las operaciones matemáticas.
2. Percepción incorrecta de los nombres de cantidad.
3. Déficit en la estructura categórica de los números, lo que se refleja en los errores al leer o escribir números.
4. Déficit en el reconocimiento de las relaciones entre los números por lo que no es capaz más que de referir series numéricas.

En las lesiones frontales las manifestaciones son:

1. Déficit en la habilidad de recodificar la información en el contexto de la solución de problemas.
2. Comprensión inadecuada de sistemas conceptuales y lógico gramaticales de las relaciones numéricas:
3. Dificultades serias en la planificación de la solución.

Igualmente se han descrito errores de cálculo tras la estimulación eléctrica del lado derecho (decrece el cómputo) e izquierdo (acelera el cómputo) del tálamo (Morrison y Siegel, 1991). Todo ello serviría de base para justificar la idea de que, puesto que tras una lesión cerebral en los adultos se observan alteraciones en los procesos cognitivos que pueden ser medidas por pruebas psicométricas habría que estudiar a los niños que presentan dificultades para ver si existe algún tipo de disfuncionalidad en las áreas cerebrales correspondientes.

Los enfoques neuropsicológicos actuales como los de Rourke y colaboradores o de Bakker y colaboradores han criticado duramente estas posturas como innatas, no influenciables por el entorno, estáticas, por no explicar el funcionamiento del cerebro o no tener en cuenta el desarrollo en relación con el aprendizaje (Morrison y Siegel, 1992).

5.8.2 Explicación Educativa. La explicación educativa representó históricamente la segunda explicación de las dificultades de aprendizaje y en concreto de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Se pasó de una explicación basada en procesos cognitivos centrales o internos a factores de ejecución externos. Serían las tareas educativas las responsables de la dificultad de aprendizaje. Se trata de las explicaciones basadas en el condicionamiento clásico o asociativo, en el operante o instrumental y más recientemente en factores cognitivo-sociales que ya entrarían dentro de la tercera explicación. Los factores que producen el aprendizaje explican las dificultades del mismo, y en concreto los referidos al aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades.

Los enfoques conductuales y sus aplicaciones en el aprendizaje y la instrucción tuvieron y mantienen una gran influencia. Conceptos como la asociación entre condiciones estimulares y de respuesta, antecedentes y consecuentes, programas de refuerzo, fortalecimiento del aprendizaje, condiciones, tasa y cantidad de la práctica, habitación, etc., son centrales.

Dentro de las explicaciones educativas están los modelos de diagnóstico prescriptivo de enseñanza o el programa DISTAR de aritmética (Engelmann y Carnina, 1975).

Igualmente, la utilización de tests de conocimientos precisos puede medir los cambios operados por efecto del aprendizaje o los conocimientos específicos en diferentes jerarquías de contenidos matemáticos que es preciso aprender.

Las dificultades de aprendizaje y en concreto las dificultades de aprendizaje de las matemáticas son explicadas por cuestiones como las siguientes:

1. Dificultades en las habilidades prerrequeridas.
2. Escasa instrucción o ausencia de la misma.
3. Incorrecta presentación de estímulos.
4. Refuerzo inadecuado o insuficiente.
5. Ineficacia de los procedimientos o métodos educativos.
6. Escasas oportunidades para la práctica; etc.

Este enfoque ha sido criticado por su mecanicismo, por no considerar el constructivismo del conocimiento del niño, por ser puramente reactivo e ignorar la personalidad global del alumno con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y sus procesos internos, sus deseos, intenciones, planes, etc., lo que convertiría los aprendizajes en no significativos y no relevantes para la persona que los aprende. Estas críticas proceden de diversos frentes.

5.8.3 Explicación Cognitiva. La explicación cognitiva de las dificultades de aprendizaje y de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas está en auge en los últimos años y el rigor reflejado inicialmente en sus aseveraciones basadas en estudios de laboratorio (Psicología de la Instrucción).

Los aprendizajes más susceptibles de estudiar y explicar son los académicos -lectura, escritura, cálculo-, y ello en situaciones reales tal y como plantea la psicología de la instrucción.

¿Cómo procesan la información las personas con dificultades de aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo procesan la información verbal y la no verbal estas personas? ¿Qué podemos aprender de los errores al realizar problemas de cálculos aritméticos? ¿y de las personas sin dificultades de aprendizaje de las matemáticas? ¿Reflejan los errores que cometen las personas, con dificultades de aprendizaje de las matemáticas o sin ellas, cuando resuelven problemas matemáticos algún sistema, regla, regularidad? ¿Existen diferencias básicas en la forma sistemática de resolver los problemas o en los errores que cometen entre las personas con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y sin ellas? Cuestiones de este tenor se plantean desde enfoques cognitivos como el del procesamiento de la información (PI) y que han contribuido sobremanera al desarrollo de estrategias y programas de intervención eficaces y con gran justificación y fundamentación teórica basados en la enseñanza directa de las tareas matemáticas, pero enfatizando los procesos que se ponen en marcha en cada momento (cfr., Reid, 1988, 1989; Reid y Stone, 1991). Ángel Rivière (1990) se queja, no sin pesar, de la contradicción que supone el que una parte importante de la psicología cognitiva y en concreto de la instrucción actual, se esté construyendo mediante la utilización de problemas matemáticos con los aportes en la explicación teórica y aplicada, y los pocos estudios en relación con las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Por fortuna esta situación está cambiando. Aunque esta queja es ampliamente recogida por distintos investigadores de campo (Morrison y Siegel, 1991).

Son diversas las explicaciones procedentes de los enfoques cognitivos en relación con las dificultades de aprendizaje de las matemáticas (Morrison y Siegel, 1991). Pensemos en los enfoques basados en los planteamientos piagetianos que son de sobra conocidos (Piaget y Szeminska, 1941), en los enfoques más específicos aplicados a aspectos concretos de las tareas matemáticas, por ejemplo, el conteo (Bermejo y Lago, 1991) en que los enfoques proliferan y se diversifican sobre manera. Estos enfoques, no obstante, se pueden «simplificar» en tres, según

Morrison y Siegel (1991): un enfoque basado en el establecimiento de reglas inapropiadas, un enfoque basado en la dependencia del contexto y no conquistar la descontextualización, y un enfoque basado en el paradigma de los tiempos de reacción para el establecimiento de modelos mentales de los problemas aritméticos.

Una ilustración de este tipo de enfoques está en Gonzáles y Kolers (1987) quienes realizan un análisis de tres modelos de la aritmética mental. En concreto:

1. Los modelos analógicos, que parten de que el análisis de la línea numérica es clave, suponiendo que los números se extienden desde el menos infinito al más infinito, en teoría, y que las operaciones mentales tienen en cuenta los rasgos de la línea numérica, sobre todo en la adición y sustracción.
2. Los modelos del conteo, en que se asume que las personas cuando realizan operaciones mentales consideran los elementos numéricos de forma discreta.
3. Los modelos de redes, suponen que las personas disponen en su mente de pares ordenados de elementos numéricos que se han adquirido a partir de la experiencia y manipulación de los mismos. Entre estos elementos se establecen nodos y vías de conexión, pudiendo estas vías tener pesos numéricos correspondientes a los pares ordenados que facilitan su conexión ante un problema.

Si bien defienden un sistema según el cual, la codificación se realizaría gracias a la mediación verbal y a través de los sistemas numéricos representados formal y mentalmente.

Existen diferentes enfoques que utilizan metodologías diversas, pero que podrían agruparse en la consideración de que los errores que cometen las personas con dificultades de aprendizaje de las matemáticas no son aleatorios sino que son de carácter sistemático y consistente con el conocimiento matemático que poseen estas personas y que está representado en el uso de reglas procedimentales o en el uso de algoritmos internos y que tendrían cierta estabilidad al aplicarse a situaciones instruccionales diversas y a tareas y problemas matemáticos específicos.

5.8.4 El establecimiento de reglas inapropiadas. El desarrollo y uso de las reglas son de naturaleza específica y se refieren a problemas tipo, explicitando las acciones a realizar, los pasos a seguir, las estrategias a utilizar en la solución de problemas cuando se enfrenta la persona a problemas tipo (Brown y VanLehn, 1980, 1982).

En la escuela, el maestro verbaliza los procedimientos y reglas adecuadas a seguir en la solución de los problemas matemáticos; esta explicitación posibilita que el niño durante los procesos de instrucción e interacción educativa vaya internalizando las reglas procedimentales, las vaya practicando y automatizándolas y poniéndolas en funcionamiento, aplicándolas, al presentársele los problemas específicos significativos y relevantes para las reglas internalizadas (cfr., 1988; Reid y Stone, 1991). ¿Qué ocurre cuando se aprenden incorrectamente las reglas, o cuando no se aprenden referidas a tipos de problemas distintos o cuando no se aplican bien o cuando no se han internalizado bien? El resultado son los errores que se manifiestan de forma sistemática y consistente con el tipo de anomalía de que se trate en relación con las reglas procedimentales aplicadas a la solución de los problemas matemáticos específicos o problemas de tipo.

La intervención educativa eficaz habrá de tener en cuenta estas cuestiones y diagnosticar adecuadamente el paso en que la internalización y uso de las reglas procedimentales en relación con la solución de los problemas matemáticos falla para intervenir modificando la regla aplicable o la aplicación relevante a problemas tipo frente a otros que requerirían otras reglas, etc.

Una ilustración matizada de esto aplicada a la explicación de uno de los primeros conceptos matemáticos que adquieren los niños, es el referente al aprender a contar o conteo (Bermejo y Lago, 1991). Uno de los modelos del conteo, aplicado a niños de cinco años, es el de Greeno, Riley y Gelman (1984), según el cual los niños utilizan tres elementos de su competencia para comprender el conteo:

1. Un componente conceptual o comprensión de los principios del proceso, realización del plan de conteo aplicando esquemas de acción a sistemas de producción con resultados específicos.
2. Un segundo componente de la competencia de conteo se refiere al de procedimiento relacionando metas, acciones y condiciones a satisfacer, para lo cual hay que poner en marcha reglas heurísticas de planificación que permiten interpretar y conocer los procedimientos y acciones en relación con metas especificas, reglas de comprobación de teoremas y reglas heurísticas de comprobación.
3. Y un tercer componente de la competencia de conteo o de uso, referido a los aspectos directos de la conducta de solución del problema de conteo como los aspectos de la monitorización y las reglas que hay que poner en marcha, tales como: la armonización del marco de la tarea, la puesta en funcionamiento de las reglas de comprobación de teoremas y los heurísticos de comprobación, etc. en la realización concreta.

Una versión modificada del modelo de Greeno, Riley y Gelman (1984) se recoge en una gráfica por Bermejo y Lago (1991, p. 40) en forma de diagramas de flujo. En síntesis los pasos adaptados serían los siguientes: 1. comienzo, 2. representar el conjunto, 3. identificar el primer objeto del grupo, 4. situar el marcador en el objeto siguiente, 5. recuperar el primer numeral, 6. situar el marcador en el objeto siguiente, 7. ¿ha superado el marcador el último objeto del grupo? 8ª. Sí, 9ª. ¿Hay objetos del grupo?, 10ª. No, 11ª. Objeto conseguido, 12ª. Asociar numeral y conjunto, 13ª. Stop, B: 8b. No, 9b. Identificar el siguiente objeto, 10b. Situar el marcador en el objeto siguiente, 11b. Recuperar el siguiente numeral, 12b. Situar el marcador en el siguiente numeral, 6. , 7. A: 8ª… A este nivel, realmente este apartado se aproxima al del uso de modelos mentales aunque en determinados pasos de estos modelos se pongan en funcionamiento el desarrollo y aplicación de reglas.

5.8.5 La no consecución de la descontextualización. El aprendizaje matemático exige una cierta desvinculación (Donaldson, 1979) de los intereses, significados, intenciones próximos al niño, lo que la convierte en una experiencia mental ardua antes de poder comprender el disfrute que tal actividad puede representarse de sensación de coherencia y rigor, de necesidad lógica, de conocimiento elegante y parsimonioso, de belleza, tal y como describen muchos matemáticos y que ya comprendieron tan bien los pitagóricos griegos, que iban introduciéndose en su conocimientos (acusmáticos) para llegar al dominio de sus misterios (mathematikoi) con lo que se podía acceder a la experiencia <<mística>> que supone el conocimiento matemático (Rivière, 1990). Puesto que las matemáticas actúan a modo de, “filtros selectivos” para el paso de unos niveles educativos a los siguientes más avanzados o incluso de “filtro social” (Davis y Hersh, 1989), quienes no conquistan precozmente esta desvinculación o esta descontextualización que supone el conocimiento matemático, se enfrentan a serias dificultades educativas e incluso a dificultades de aprendizaje de las matemáticas. La “desvinculación” o “desconexión” se refiere a una característica del pensamiento que tiene que ver con la abstracción. Con el dominio de reglas, con la puesta en práctica de modelos mentales, pero ello no quiere decir que podamos “retomar” y “reinterpretar” la realidad de una manera nueva, y en donde “se comprenda” su importancia como instrumento de mediación social y cognitivo, como instrumento construido socialmente e históricamente y que es preciso “re-contextualizar” en el sentido que proponen los enfoques socio-históricos culturales.

La solución de problemas matemáticos supone el uso de las reglas o la aplicación de modelos de solución que están al margen de las condiciones concretas en que se producen. ¿Qué ocurre cuando el niño se hace "dependiente del contexto" en la solución de los problemas matemáticos? Pues que comete errores sistemáticos que reflejan el no uso "siempre" de las reglas pertinentes ante problemas tipo, o que se guía de claves del marco de la tarea sin identificar correctamente el algoritmo pertinente o que no es capaz de recuperar de su memoria el algoritmo más adecuado o incluso que carece de éxitos en situaciones anteriores, lo que le va a llevar a la comisión de errores ante las tareas matemáticas (Morrison y Siegel, 1991). El conocimiento del contexto muchas veces facilita la aplicación de los procedimientos adecuados para la solución de los problemas matemáticos, como la aplicación de ciertas analogías que pueden facilitar su correcta solución. Pero, sin embargo, el niño ha de ser capaz de extraer del contexto y de la tarea los elementos esenciales de sus intenciones y deseos, pero que es preciso abstraer y construir en forma de reglas procedimentales o en forma de modelos, etc. Si esto no se logra, puede darse dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

5.8.6 Los modelos mentales para las tareas matemáticas. Frente a los enfoques basados en las reglas o al papel de la desvinculación, se proponen explicaciones elaboradas a partir del "paradigma de los tiempos de reacción", que proporcionaría una vía privilegiada para evidenciar los procesos mentales puestos de manifiesto en el cómputo de los problemas aritméticos. Según el modelo clásico aditivo de Sternberg, quien modificó el de sustracción de Donders (Tudela, 1985a), se pueden proponer diversos modelos, y los tiempos de reacción apoyarían al "mejor modelo". Si se toma la *suma mental* se ha sugerido que los niños utilizarían un *algoritmo de conteo*, que implicaría la "codificación del estímulo", hacer un "recuento interno", "incrementar el recuento" y dar la solución o "respuesta". El tiempo de reacción entre la presentación del estímulo y la emisión de la respuesta es un compuesto aditivo en donde estarían representadas las distintas operaciones o pasos requeridos. De todos estos pasos, sólo uno no tendría un tiempo de reacción constante y por lo tanto, el tiempo de reacción diferencial reflejaría el tiempo requerido para un paso dado. El tiempo de reacción que exigen las diversas operaciones es constante de un ensayo a otro. En el ejemplo, la codificación del estímulo, el recuento interno y la elaboración de la respuesta, siendo el tiempo de reacción diferencial atribuible al incremento del recuento, lo cual es posible hallar el mejor modelo que encaje con los datos mediante el cálculo de los “mínimos cuadrados”. Siguiendo este paradigma se ha intentado explicar el desarrollo matemático de los niños. Por ejemplo, se ha intentado explicar la suma simple de un dígito presentada horizontalmente en niños mediante estrategias de conteo y en adultos por procesos de recuperacióny la resta en los niños mediante estrategias de conteo. Morrison y Sigel (1991) recogen los siguientes modelos posibles que proporcionó Groen y Parkman del estudio de 1972.

- Modelo 1: el contador se pone a cero, después se añaden ambos sumandos partiendo del incremento de uno de ellos.
- Modelo 2: el contador se pone en el primer sumando, el número mayor de la izquierda, después se añade el otro sumando incrementándose el primero.
- Modelo 3: el contador se pone en el primer sumando, el mayor número de la derecha y a el se incrementará el valor del segundo sumando.
- Modelo 4: el contador se fija en el primer sumando que sería el número más pequeño y a él se añadirá el segundo mediante el incremento del primero
- Modelo 5: el contador se fija al primer sumando que sería el número más grande y a él se incrementaría el segundo sumando.

Parece ser que el paradigma aditivo del tiempo de reacción de Sternberg apoyaría al modelo 5 como el que mejor explicaría las operaciones desarrolladas por los niños en la solución de estas sumas simples de un dígito. Excepto para sumas simples, conllevadas o dobles, el contador interno se fija al sumando mayor puesto que el tiempo de reacción más grande aparece referido al segundo sumando. Cuando se aplica a adultos, éstos tardan muy poco tiempo, aduciéndose explicaciones basadas en la recuperación de la memoria con rapidez y el algoritmo de conteos lo que utilizará ocasionalmente. Se ha encontrado que a medida que los niños dominan el uso de problemas matemáticos, por ejemplo, a partir de tercero de Primaria, irían pasando de un modelo incremental o basado en el conteo a un modelo basado en la recuperación de la memoria, es decir, se iría pasando de un “conocimiento procedimental” a un “conocimiento declarativo”, que es lo que se observa en adultos. Este cambio de estrategia –y si se quiere de un modelo aditivo a uno basado en el almacenamiento y recuperación de la memoria– ha sido confirmado con modificaciones del paradigma del tiempo de reacción incluyendo “verdadero vs. Falso” (Tudela, 1985b), citado por Geary, Widaman, Little y Cormier, (1987) en los niños normales, cambio que se hace muy difícil en los niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y que se refleja en tiempos de reacción más prolongados. En los niños de cuarto y sexto de primaria, normales, se observaba el cambio de la estrategia basada en el conteo a la de recuperación de la memoria, lo que no ocurría en sus iguales con dificultades de aprendizaje de las matemáticas. En cambio, en los niños de catorce años con este tipo de dificultades se comenzaba a observar el cambio de estrategias pero con mayor lentitud. Geary et al. (1987) concluye que los alumnos con dificultades de aprendizaje de las matemáticas presentan diferencias significativas a nivel académico, tales como:

1. En el desarrollo madurativo de los procesos implicados en la solución de problemas.
2. En la duración mayor requerida para su solución.
3. Y en las habilidades de auto-monitorización del proceso de solución de problemas.

Puesto que no “controlaron” los niveles de lectura puede que este factor haya influido en los resultados. Para subsanar esta deficiencia metodológica, Kirby y Becker (1988) compararon los resultados con el paradigma del tiempo de reacción entre una muestra de niños con niveles adecuados de logro, una muestra de niños con dificultades de aprendizaje de la lectura y una muestra de niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas en quinto de primaria. La muestra total la componían 48 niños, 16 niños en cada muestra. Los 48 niños fueron seleccionados a partir de 200 niños de quinto de Primaria que asistían a clases ordinarias. La selección se hizo con base en criterios de discrepancia. Los resultados muestran que los niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas eran deficitarios en la eficiencia operacional o velocidad de procesamiento, pero no en la codificación o en la aplicación de estrategias, en relación con los controles normales. En este estudio no está claro si se trata de niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas realmente o sólo se trata de niños con bajos niveles matemáticos, al igual que ocurre con las dificultades de aprendizaje de la lectura. Este problema se refleja en el uso exclusivo de criterios de “discrepancia” y no en otros criterios más amplios. De cualquier modo, los resultados son ilustrativos de las dificultades que presentan las personas con DAM mediante el uso de paradigmas del tiempo de reacción. A diferencia del estudio anterior de Geary et al., (1987), sólo se observó en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas mayor lentitud o pobre eficiencia operacional y no diferentes estrategias. Puesto que la cuestión está por desentrañar, habrá que esperar otras investigaciones.

5.9 ANÁLISIS, CAUSAS Y CLASIFICACIÓN DE ERRORES

Luis Rico[47] hace un análisis de los errores de los estudiantes y sus causas y presenta una clasificación apoyado en Brousseau, Davis y Werner, quienes señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

1. Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
2. Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
3. También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
4. Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Algunos de los errores clásicos explicados por el modelo de Davis son:

1. Reversiones binarias. Por ejemplo: $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$
2. Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Por ejemplo: $2x - x = 2$
3. Errores por recuperación de un esquema previo. Entre los ejemplos que propone se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas tales como el de adición con dos entradas, el simétrico de la sustracción y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.

---

[47] KILPATRICK, Jeremy; GOMEZ, Pedro Y RICO Luis. "Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995; p. 88.

4. Errores producidos por una representación inadecuada.
5. Reglas que producen reglas. Así, de la implicación: (x – 2) (x-3) = 0 ; x=2 o x=3, se pasa a: (x-2) (x-3) = 2 ; x=4 o x=5

Radatz realiza una clasificación de errores a partir del procedimiento de la información y establece cinco categorías generales, que se desarrollan a continuación:

1. **Errores debido a dificultades de lenguaje**. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántica en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
2. **Errores debido a dificultades para obtener información espacial.** Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se esta iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.

Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procedimiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimientos sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia

de los algoritmos, conocimientos inadecuados de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4. **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se haya modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

- Errores de perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema
- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5. **Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.** Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por los alumnos de secundaria en matemáticas, Movshovitz, Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. **Datos mal utilizados**. Se incluyen aquí aquellos que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta algo que no es necesario; se olvida algún dato necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien; se hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. **Interpretación incorrecta del lenguaje**. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
3. **Inferencias no válidas lógicamente**. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente,

necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

4. **Teoremas o definiciones deformados**. Se incluye aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva aun sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocible
5. **Falta de verificación en la solución**. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si quien resolvió hubiese constatado la solución de la pregunta enunciada el error habría podido evitarse.
6. **Errores técnicos.** Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Para identificar los errores que los estudiantes cometen es necesario conocer lo que los estudiantes deberían saber cuando ingresan a la universidad, es decir, lo que ellos aprendieron en sus años de primaria y bachillerato; por tanto, es importante conocer los estándares básicos de calidad para la educación Matemática en Colombia.

5.10 ESTÁNDARES BÁSICOS DE CALIDAD PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA[48]

El Ministerio de Educación Nacional en cumplimiento a la Ley 115 de 1994, formuló los Lineamientos Curriculares (1998) como orientación general para generar procesos de reflexión y análisis crítico en las formulaciones y desarrollos de los Proyectos Educativos Institucionales. En el marco del desarrollo de la Ley General de Educación, también el Ministerio formuló los Indicadores de Logros Curriculares (Resolución 2343 de 1996) en el área de Matemáticas.

Estos indicadores han sido agrupados en cinco tipos de pensamiento matemático, cada uno de los cuales describe los sistemas simbólicos propios de cada campo de las matemáticas, los fenómenos y problemas asociados a cada campo y modos de uso de los sistemas simbólicos.

Con este tipo de organización se busca establecer varios ejes conductores diferentes y necesarios en la construcción del conocimiento matemático, pues de un lado, se amplia la perspectiva de las acciones dominantes y comunes (representar, argumentar, demostrar) de la actividad matemática, y de otro, la organización también permite reconocer conceptos articuladores y recurrentes (por ejemplo, número, función).

A continuación se presenta cada tipo de pensamiento organizado por niveles (se tomó sólo para el bachillerato) con sus respectivos logros agrupados:

[48] MINISTERIO DE ECUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas. Lineamientos Curriculares. 1998. Bogotá. MEN.

ESTÁNDARES DE SEXTO A SÉPTIMO

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

1. Resolver y formular problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
2. Utilizar números racionales, en su notación fraccionaria o decimal, para resolver problemas en contextos de medidas, cocientes, razones, proporciones y porcentajes.
3. Justificar la representación polinomial de los números racionales utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
4. Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, etc.).
5. Resolver y formular problemas utilizando propiedades fundamentales de la teoría de números.
6. Justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
7. Formular y resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos con dominios numéricos.
8. Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
9. Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
10. Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
11. Establecer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
12. Justificar la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.

13. Reconocer argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
2. Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
3. Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.
4. Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
5. Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
6. Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.
7. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
2. Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
3. Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
4. Establecer relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.
5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y LOS SISTEMAS DE DATOS

1. Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
2. Reconocer relación entre un conjunto de datos y su representación.
3. Usar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares..)
4. Usar medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
5. Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
6. Conjeturar acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares
8. Predecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

1. Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
2. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).
3. Analizar las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos.
4. Utilizar métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.
5. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que

representan.

ESTÁNDARES DE OCTAVO A NOVENO

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

1. Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
2. Resolver problemas y simplificar cálculos usando relaciones inversas entre operaciones.
3. Utilizar la notación científica para representar cantidades y medidas.
4. Identificar la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas que lo requieran y para resolver problemas.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Conjeturar y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
2. Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
3. Aplicar y justificar criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
4. Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

1. Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.

2. Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
3. Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en contextos de las ciencias.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y LOS SISTEMAS DE DATOS

1. Reconocer cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.
2. Interpretar analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas
3. Interpretar conceptos de media, mediana y moda.
4. Seleccionar y usar algunos métodos estadísticos adecuados según el tipo de información.
5. Comparar resultados experimentales con probabilidad matemática esperada.
6. Resolver y formular problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
7. Reconocer tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.
8. Calcular probabilidad de eventos simples usando métodos diversos. (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo)
9. Usar conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia...)

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

1. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

2. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
3. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
4. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
5. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
6. Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.
7. Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.
8. Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.
9. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.

ESTÁNDARES DE DIEZ A ONCE

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

1. Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
2. Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
3. Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos).
4. Utilizar argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.
5. Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

1. Identificar las propiedades de las curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y un cilindro.
2. Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesianas y otros (polares, esféricos,...).
3. Resolver problemas donde se usen las propiedades geométricas de las cónicas de manera algebraica.
4. Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
5. Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas
6. Reconocer y describir curvas y o lugares geométricos.

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

1. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
2. Resolver y formular problemas que involucran magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.
3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y LOS SISTEMAS DE DATOS

Comparar estudios provenientes de medios de comunicación.

1. Justificar inferencias provenientes de los medios o de estudios diseñados en el ámbito escolar

2. Diseñar experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
3. Describir tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.
4. Interpretar nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable, estadígrafo y parámetro).
5. Usar comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)
6. Interpretar conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
7. Resolver y plantear problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad. (Combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazamiento)
8. Proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

1. Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
2. Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos.
3. Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
4. Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.

Estos estándares básicos se pueden contrastar con lo que se espera que el estudiante pueda responder cuando ingresa a la universidad; por ello es importante reconocer las competencias con las que el estudiante debe ingresar a la universidad.

5.11 COMPETENCIAS MATEMÁTICAS BÁSICAS DEL INGENIERO

Competencia.

Este concepto puede ser asumido como un saber hacer razonado para hacer frente a la incertidumbre; manejo de la incertidumbre en un mundo cambiante en lo social, lo político y lo laboral dentro de una sociedad globalizada y en continuo cambio. De esta manera, las competencias no podrían abordarse como comportamientos observables solamente, sino como una compleja estructura de atributos necesarios para el desempeño en situaciones diversas donde se combinan conocimiento, actitudes, valores y habilidades con las tareas que se tienen que desempeñar en determinadas situaciones[49].

Específicamente las competencias matemáticas **"involucran el conocimiento de conceptos matemáticos, su alcance y sus limitaciones en su aplicación para la solución de problemas, la comprensión y la evaluación de argumentos matemáticos, la habilidad para representar situaciones matemáticamente, resolver y proponer problemas que requieran el uso de los conocimientos adquiridos, expresarse matemáticamente e interpretar resultados matemáticos"[50].** Entendiendo como capacidad a un conjunto de condiciones, cualidades o aptitudes, especialmente intelectuales, que permiten el desarrollo de un proceso o actividad, el cumplimiento de una función, el desempeño de una tarea específica, etc., y habilidad como conocer, comprender y saber cómo actuar (es decir, la aplicación práctica y operativa del conocimiento en ciertas situaciones). Las habilidades tienen que ver con toda la manipulación algebraica y

---

[49] TOBÓN T., Sergio. Formación Basada en competencias. Primera edición. Ecoe Ediciones, Bogotá, 2004; p. 45.

[50] ALVAREZ P., Carlos A y otros. Identificación de las competencias matemáticas básicas del ingeniero. XXV Reunión Nacional de Facultades de Ingeniería.

la aplicación de algoritmos, como por ejemplo calcular derivadas, integrales, límites, resolver ecuaciones, realizar operaciones, entre otros. Y la capacidad tiene que ver con la posibilidad de decidir qué conocimientos se deben aplicar para resolver un problema, comprender las definiciones, los teoremas y saber aplicarlos adecuadamente, etc.

Definición de Estándares para las Matemáticas Universitarias

Un equipo de investigadores de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y la Pontificia Universidad Javeriana y con el apoyo financiero de Colciencias, adelantan el proyecto "Definición de estándares de Competencia Matemática para el Ingeniero", tendiente a definir los ámbitos de dominio y los niveles de competencia matemática básica para los egresados de programas de formación profesional que reciben cursos de matemáticas. En el marco de esta investigación han llegado a determinar una serie de criterios para definir los estándares de competencia matemática para el ingreso a la educación universitaria y han definido cuatro ámbitos de dominio centrados en contenidos y otro en procesos cognitivos específicos al pensamiento matemático, a saber:

i. Numérico,
ii. Algebraico,
iii. Geométrico,
iv. Funcional,
v. Razonamiento Matemático y solución de problemas.

Este grupo de investigadores considera que para la iniciación en las matemáticas universitarias es necesario que el educando evidencie haber alcanzado un dominio básico de unidades conceptuales tales como la de número, medida, espacio o función, cuya conceptualización implica el uso de herramientas básicas de representación tales como las cadenas de razonamiento y los mapas conceptuales, así como las operaciones propias del pensamiento conceptual (Zubiria, 1999).

Desagregación funcional de cada uno de los ámbitos:

Atendiendo a los anteriores elementos elaboraron los núcleos conceptuales para cada ámbito de dominio, el conjunto de procesos cognitivos y los ambientes de aprendizaje de cada uno de ellos, los cuales se explicitan a continuación.

I. **Numérico**. Este ámbito trata sobre los sistemas numéricos, las relaciones y operaciones que existen entre ellos y las diferentes maneras de representarlos, las razones y proporciones, interés simple y compuesto y la aplicación de todos estos conceptos al planteamiento, modelación y solución de problemas (ver tabla 1).

Tabla 1: Elementos del Pensamiento Matemático Numérico

NÚCLEOS CONCEPTUALES	PROCESOS COGNITIVOS	AMBIENTES DE APRENDIZAJE Y DE ACTUACIÓN
Sistemas numéricos	Identificación y diferenciación de los sistemas numéricos, relaciones y operaciones entre sistemas numéricos. Representaciones de los sistemas numéricos.	Usar diferentes estrategias de cálculo como el cálculo mental. Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos. Proponer situaciones de la cotidianidad en las que intervengan operaciones entre sistemas numéricos. Mostrar diferentes estrategias y maneras de obtener un mismo resultado.
Razones y proporciones	Aplicación del concepto de proporción para plantear y resolver problemas. Comprensión los conceptos de interés simple y compuesto y la aplicación para resolver problemas.	Proponer situaciones en las que intervengan nociones de razones y proporciones interés simple y compuesto.
Potencias y radicales	Operaciones con potencias, radicales y logaritmos con números reales.	Proponer situaciones en las que intervengan nociones de potencias y logaritmos.

II. Geométrico. Es considerado como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellas, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN 1998) (ver tabla 2):

Tabla 2. Elementos del Pensamiento Matemático Geométrico

NÚCLEOS CONCEPTUALES	PROCESOS COGNITIVOS	AMBIENTES DE APRENDIZAJE Y DE ACTUACIÓN
Nociones fundamentales: Punto, Línea, Plano, ángulos		Utilización de elementos de dibujo (regla, compás, escuadras) para la construcción y exploración de figuras geométricas.
Formas planas: Polígonos regulares, circunferencia, relaciones entre figuras, regularidades, simetrías	Descripción de la forma de los objetos, características, propiedades. Construcción de figuras geométricas planas, a partir de datos previamente establecidos. Comparación de figuras planas y clasificación. Composición y descomposición de figuras planas para formar otras figuras. Establecer elementos de regularidad y simetría en figuras. Desarrollar argumentos matemáticos sobre las relaciones, propiedades y características de las figuras geométricas.	Identificación de formas geométricas planas (Polígonos Regulares) en su entorno inmediato, para incrementar la comprensión de dicho entorno y desarrollar nuevas posibilidades de actuación sobre el mismo. Curiosidad e interés por identificar formas y figuras, para solucionar problemas relacionados con su entorno y utilización del espacio.
Formas Espaciales: Los cuerpos geométricos y sus elementos; vértices, aristas, caras. Cubo, esfera, prisma, pirámide, cono, cilindro.	Descripción de figuras geométricas espaciales, construcción de cuerpos geométricos. Comparación de cuerpos geométricos y clasificación. Composición y descomposición de cuerpos geométricos para formar otros. Establecer elementos de regularidad y simetría en cuerpos	Identificación de cuerpos geométricos en su entorno inmediato, para incrementar la comprensión de dicho entorno y desarrollar nuevas posibilidades de actuación sobre el mismo. Curiosidad e interés por identificar formas y figuras, para solucionar problemas relacionados con su entorno. Desarrollo de argumentos lógicos para justificar conclusiones.

	geométricos. Resolución de problemas.	
Posición espacial	Descripción e interpretación de las posiciones relativas en el espacio. Interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial. Construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclideanas, para facilitar la adaptación y utilización del espacio.	Construcción y uso de sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias. Cálculo de distancias. Proposición de situaciones en las que intervengan nociones como proximidad, separación, orden, cerramiento, continuidad, etc. Potenciación de la búsqueda de regularidades y la estimación de propiedades en estas relaciones: transitividad, conservación, reflexibilidad. Proposición de situaciones en las que el alumno formule hipótesis y conjeturas.
Transformaciones	Reconocimiento y aplicación de traslaciones, giros y simetrías. Reconocimiento y creación de formas que tengan simetría. Predicción y descripción de resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales. Descripción de movimientos que muestren congruencia entre formas. Elaboración de conjeturas matemáticas a partir de las transformaciones.	Construcción y uso de sistemas de coordenadas para especificar traslaciones, rotaciones, simetrías.

III. Algebraico. Este ámbito involucra la representación, generalización y formalización de patrones en cualquier aspecto de la matemática. El núcleo central de éste ámbito es la modelación algebraica (ver tabla 3).

Tabla 3. Elementos del pensamiento matemático algebraico

NÚCLEOS CONCEPTUALES	PROCESOS COGNITIVOS	AMBIENTES DE APRENDIZAJE Y DE ACTUACIÓN
Expresiones algebraicas	Reconocimiento y clasificación de expresiones algebraicas. Realización de operaciones con polinomios, utilización adecuada de productos notables para el desarrollo y simplificación de operaciones algebraicas, calculo de cocientes y restos en divisiones de polinomios. Factorización de polinomios. Cálculo del m.c.d. y m.c.m de polinomios. Operaciones con fracciones algebraicas. Manejo de exponentes fraccionarios, racionalización de expresiones algebraicas. Realización de cálculos básicos con números complejos.	Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales. Utilización de la geometría para deducir expresiones algebraicas.
Ecuaciones e inecuaciones	Resolución de: ecuaciones lineales, sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, ecuaciones de segundo grado, ecuaciones que pueden ser reducidas a segundo grado, inecuaciones lineales e inecuaciones cuadráticas.	Proposición de situaciones de la cotidianidad en las que intervengan ecuaciones lineales. Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales.
Modelación y solución de problemas	Traducción de expresiones y problemas del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, solución e interpretación de la solución. Conocimiento del plano cartesiano y representación gráfica de ecuaciones lineales. Identificación de las gráficas de ecuaciones según su grado. Identificación de los elementos básicos de las cónicas.	Proposición de situaciones de la cotidianidad en las que intervengan ecuaciones. Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales.

IV. Funcional. De igual manera que el ámbito algebraico, este ámbito involucra la representación, generalización y formalización de patrones, es la modelación pero en este caso las expresiones involucran funciones (ver tabla 4).

Tabla 4. Elementos del pensamiento matemático funcional

NÚCLEOS CONCEPTUALES	PROCESOS COGNITIVOS	AMBIENTES DE APRENDIZAJE Y DE ACTUACIÓN
Función	Reconocimiento de relaciones funcionales, distinción entre variable dependiente, independiente, parámetro y constante. Identificación y cálculo de dominio y rango. Operaciones entre funciones. Representación gráfica, algebraica y en lenguaje natural de las funciones. Identificación de funciones inyectivas, biyectivas, polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y sus inversas. Identificación de transformaciones como desplazamiento, amplificaciones, contracciones y reflexiones.	Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales. Proposición de situaciones de la cotidianidad en las que intervengan diferentes clases de funciones.
Ecuaciones que involucran funciones	Resolución de ecuaciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y con valor absoluto. Aplicación de funciones inversas en la solución de ecuaciones.	Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales.
Modelación y solución de problemas	Identificación de la función como relación variacional. Traducción de problemas del lenguaje natural al lenguaje funcional, solución e interpretación de resultados. Análisis de problemas de optimización que involucren funciones básicas.	Proposición de situaciones de la cotidianidad que involucren trabajo con funciones. Exploración de conjeturas mediante la utilización de instrumentos computacionales. Utilización de los conceptos de la física para crear modelos matemáticos.

V. Razonamiento matemático. En este ámbito no se especifican núcleos conceptuales, sino que se trabaja de forma transversal a todos los otros ámbitos ya que el razonamiento matemático está presente en todo el trabajo matemático escolar y universitario. Tiene que ver con formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, justificar procesos, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente (ver tabla 5).

Tabla 5. Elementos del razonamiento matemático

NÚCLEOS CONCEPTUALES	PROCESOS COGNITIVOS	AMBIENTES DE APRENDIZAJE Y DE ACTUACIÓN
	Formula conjeturas. Resuelve problemas mediante la selección de conceptos y técnicas matemáticas apropiadas. Reconoce proposiciones condicionales, condiciones necesarias y suficientes. Traduce problemas del lenguaje común al matemático y los resuelve. Identifica patrones y realiza generalizaciones. Verifica la validez de la solución de un problema.	Desarrollo de argumentos lógicos para justificar conclusiones. Estimulación de este razonamiento con preguntas como ¿por qué?, ¿qué pasaría si?, ¿puedes dar un ejemplo?, ¿puedes dar un ejemplo en contra?, ¿qué condición se debe poner?, ¿esto es siempre, algunas veces o nunca así? Revisión de razonamientos en los que se han presentado errores. Seguimiento de argumentaciones lógicas.

Los elementos esbozados en este capítulo nos aportan el sustento teórico necesario para abordar con mayor precisión el desarrollo de los objetivos propuestos es esta investigación.

6. PROCESO METODOLOGICO

En esta investigación se pretende caracterizar los procedimientos incorrectos realizados por los estudiantes de la Universidad Pontificia Bolivariana del primer semestre del año 2006, en la asignatura cálculo diferencial. Para lograrlo es necesario indagar sobre los razonamientos que hacen los estudiantes al contestar las preguntas de las pruebas de la asignatura.

Cada estudiante tiene una forma particular de asumir la preparación, de afrontar la presentación, y de contestar las preguntas de las pruebas en las asignaturas de matemáticas de acuerdo con sus vivencias y experiencias académicas anteriores, sus preconceptos, sus costumbres, actitudes y el contexto general en el que ha desarrollado el trabajo del área de matemáticas. No hay elementos completamente homogéneos.

Conforme a la lógica del problema se debe abordar por una vía de tipo cualitativo porque: “Ante todo la investigación cualitativa es una investigación contextuada, es decir, no es una investigación que podamos pensar de manera universal, abierta, válida para cualquier contexto sino que tiene su peso especifico en los determinantes particulares”[51]. Se ocupa de hacer un reconocimiento de la diversidad de lo social, de la diversidad en lo cultural, de la diversidad en lo político, en lo económico, y aún en la propia realidad.

Y en este caso se trata de investigar en un contexto específico que tiene unas singularidades particulares que no necesariamente son transferibles a otros contextos porque puede que lo que ocurra con cada estudiante sea diferente; Si bien hay elementos comunes, hay otros que son particulares.

[51] SANDOVAL C, Carlos. Investigación Cualitativa, ARFO Editores e Impresores Ltda. Bogotá, 2002.

Se pretende recoger información de las evaluaciones y entrevistas hechas a los estudiantes y con estos datos caracterizar patrones de errores y de razonamientos incorrectos, es decir, construir un texto a partir de una explicación interpretativa de datos significativos derivados de las fuentes mencionadas. Por tanto, la metodología adecuada en este caso es la teoría fundada que es una metodología general para desarrollar teoría basada en datos sistemáticamente capturados y analizados por el Investigador. Es una Teoría Emergente que evoluciona en el transcurso del proceso investigativo a través del interjuego entre análisis y recolección de datos.

6.1 POBLACIÓN

La investigación se realizó en la Universidad Pontificia Bolivariana (UPB) sede Bucaramanga, en la Escuela de Ingeniería y Administración; la población está compuesta por los estudiantes que matricularon la asignatura Cálculo Diferencial durante el primer semestre académico del año 2006, que en total fueron 296.

Estos estudiantes pertenecen a los seis programas de Ingeniería de la Escuela y se distribuyen de la siguiente forma:

INGENERIA ELECTRONICA	41
INGENIERIA INDUSTRIAL	132
INGENIERIA CIVIL	45
ING. AMBIENTAL	37
INGENIERIA MECANICA	29
INGENIERIA INFORMATICA	12

6.2 MUESTRA

En esta investigación fueron revisados los parciales de los 296 estudiantes matriculados en la asignatura Cálculo Diferencial en el primer semestre del año 2006, con el fin de detectar los errores cometidos por cada uno de ellos. Estos 296 estudiantes estaban distribuidos en 9 grupos dirigidos por 6 docentes 3 de los cuales tenía a su cargo dos grupos y los otros 3 uno cada uno. Sin embargo, de los 296 estudiantes que presentaron el primer parcial sólo 246 presentaron el segundo. Esto debido, quizá, a causas de calamidad doméstica o a la cancelación masiva que se presenta cuando los estudiantes conocen la tercera nota y que les alerta sobre las posibilidades que tienen para aprobar la asignatura. Ellos pueden cancelar hasta el último día de clases.

Se realizó entrevista (Ver entrevista en anexo A) sólo a los 18 estudiantes que se presentaron a la segunda sesión del taller llamado “Aprender del Error” al que fueron invitados (Ver carta de invitación anexo D) todos los estudiantes en cuyos previos obtuvieron calificación de 2.0 o inferior por ser el grupo de estudiantes que presentó mayor cantidad de errores en sus evaluaciones, los cuales sumaron 143.

Además, se realizó entrevista (Ver entrevista en anexo B) a los 28 estudiantes con mejores resultados de los 9 (nueve) grupos de la asignatura Cálculo Diferencial; estos estudiantes fueron seleccionados por el profesor que dirigió el curso a solicitud del investigador.

La muestra es intencional porque “todos los elementos muestrales de la población fueron seleccionados bajo estricto juicio personal del investigador” [52], es decir, es el investigador el que en base a su conocimiento del universo selecciona aquellos casos que cumplen una o más condiciones que necesita.

[52] SANDOVAL C, Carlos. Investigación Cualitativa, ARFO Editores e Impresores Ltda. Bogotá, 2002.

6.3 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Con el fin de realizar entrevistas se invitó a los estudiantes a participar en un taller llamado "Aprender del error" (ver carta anexo D), en el que se trabajó por sesiones de una (1) hora aproximadamente. Se envió la comunicación a quienes obtuvieron en el primer parcial de Cálculo Diferencial una calificación inferior o igual a dos (2.0), por ser estos estudiantes los que presentan más procedimientos erróneos en el parcial. Inicialmente se citaron sólo 60 estudiantes que cumplían esta condición y que estaban matriculados en cuatro grupos distintos.

En la primera sesión se entregó a cada estudiante una copia del parcial de Cálculo Diferencial con los errores cometidos resaltados y con una indicación de dicho error. Se pidió que lo revisaran y que preguntaran si tenían dudas sobre los errores. Pero al parecer poco interés generó en ellos hacer la revisión puesto que devolvieron el parcial a escasos minutos sin manifestar inquietudes.

En esta misma sesión también se presentó a los estudiantes, proyectados en acetatos, algunos errores típicos frecuentes cometidos en los diferentes parciales. Se pidió que buscaran el error dentro del procedimiento y se les mostró la forma correcta de hacer el ejercicio y la indicación del origen del error y la respectiva corrección.

Esta sesión se realizó el día 28 de abril a las 12:00M en el aula G302 de la UPB. Asistieron 12 (doce) de los 60 estudiantes convocados, de los cuales algunos participaron respondiendo a las preguntas sobre los errores cometidos por ellos o sus compañeros y sugiriendo la forma de corregirlos. Otros fueron apáticos sólo escuchaban y miraban al tablero o hablaban con un compañero. La poca concurrencia posiblemente se debió al horario y día de la convocatoria puesto que fue un viernes antes de puente festivo y muchos estudiantes que vienen de otras ciudades viajan a visitar a sus familias. También porque uno de los grupos tenía programado un viaje fuera de la ciudad el mismo día.

Al final de la sesión la docente solicitó a los estudiantes sugerencias para mejorar el taller y continuar el siguiente viernes a la misma hora. Uno de los estudiantes sugirió avanzar en tema porque “los errores que se cometieron ya se cometieron”, dijo. Por tanto, la docente pidió para la siguiente sesión llevar ejercicios para resolver en el tablero y revisar los errores típicos que se cometen en ellos.

La segunda sesión fue el viernes 5 de mayo y sólo asistieron tres (3) estudiantes del total de convocados, de los cuales ninguno había asistido a la primera convocatoria, es decir, de los que asistieron a la primera convocatoria no regresó ninguno. Probablemente faltó insistir en cada grupo para que recordaran el compromiso de asistir al taller. En este taller la docente inició resolviendo algunos ejercicios en donde los asistentes dijeron tener mayor dificultad sobre los temas que estaban trabajando en sus cursos de Cálculo Diferencial en ese momento, haciendo énfasis en la revisión de los errores típicos que se cometen en cada ejercicio. Luego, una estudiante que ya cursó todos las asignaturas de cálculo se quedó haciendo este trabajo mientras la docente pasó a la siguiente aula a aplicar la entrevista.

Debido a la ausencia de convocados no se realizaron más talleres a este grupo.

Un segundo grupo fue convocado de igual forma para el día 4 de mayo a las 12:00M en el aula G302 de la UPB. A esta nueva convocatoria asistieron 43 estudiantes de los 83 citados que eran parte de los 5 grupos restantes.

En este taller la profesora hace una introducción sobre el motivo por el cual fueron convocados los estudiantes y les recuerda que todos los presentes tuvieron errores en el parcial y la idea es precisamente revisar estos errores. Les habló sobre la cultura de éxito a la que estamos acostumbrados y cómo nos está haciendo daño puesto que valoramos los logros pero no aprovechamos los errores como herramienta para aprender de ellos. De cómo cuando no revisamos nuestra historia estamos condenados a repetirla y si no se revisan los errores se volverán a cometer puesto que éstos generalmente están muy arraigados en los estudiantes y se cometen porque no se han interiorizado como tales.

Cada estudiante recogió su parcial en donde estaban marcados los errores que cometió, los revisó pero no hizo preguntas sobre ellos, algunos mostraron interés por quedarse con el parcial. La docente procedió a mostrarles los errores cometidos por algunos de los asistentes pidiendo que cualquiera de ellos los detectara, continuando con la explicación de porqué es un error y cómo corregirlo en cada caso, ampliando con otros errores parecidos que usualmente se cometen.

Se solicitaron sugerencias sobre lo que se podría desarrollar en el siguiente taller y algunos pidieron que se les ayudara con el tema de derivadas que era en el que estaban trabajando en ese momento.

La siguiente sesión con el mismo grupo fue el día 11 de mayo en la misma aula y hora. A esta sesión asistieron 15 estudiantes de los 43 que habían asistido a la sesión anterior. Con ellos se siguió el mismo procedimiento que con el grupo anterior para aplicarles la entrevista.

Debido a la cercanía del segundo parcial fue difícil organizar otro taller con estos estudiantes.

Para revisar los errores de los estudiantes, como ya se había descrito, se tomaron los parciales de los 296 alumnos matriculados en los 9 grupos de la asignatura Cálculo Diferencial, se inspeccionaron minuciosamente para determinar los diferentes errores cometidos tanto en el primero como en el segundo parcial.

6.4 PROCESO DE ANÁLISIS

El análisis realizado en el presente trabajo enfatizó esencialmente en dos procesos: **en el análisis exploratorio que consistió en recoger los datos obtenidos de las entrevistas a los estudiantes**. Estos datos se registraron a través de grabaciones que luego fueron transcritas y tabuladas, lo que permitió indagar sobre las prácticas de estudio tanto de los alumnos con bajo rendimiento como de los aventajados. Por otro lado, **la revisión de los exámenes** con la que se detectaron los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes de los diferentes cursos de cálculo diferencial, realizando por separado la revisión de los primeros y segundos exámenes.

7. HALLAZGOS

7.1 ENTREVISTAS.

Con la aplicación de las entrevistas se encontró una oportunidad de interrelacionarse con los estudiantes e indagar sobre sus prácticas de estudio, manejo del tiempo, intereses y sentir hacia el área de matemáticas.

La información obtenida con estas entrevistas se tabuló teniendo en cuenta cada pregunta por separado tanto para los estudiantes con "buenos" como para los estudiantes con "malos" resultados (ver anexo C).

Con base en los datos más frecuentes encontrados en cada pregunta se elaboró el cuadro comparativo que aparece a continuación en el que se establece un paralelo entre las respuestas más frecuentes tanto de los estudiantes con "malos" resultados como de los estudiantes con "buenos" resultados.

Tabla 6: Cuadro comparativo de criterios encontrados en entrevistas a estudiantes con "BUENOS" Y "MALOS" resultados en las pruebas parciales.

CRITERIO	***ESTUDIANTES CON "BUENOS" RESULTADOS***	***ESTUDIANTES CON "MALOS" RESULTADOS***
Los resultados obtenidos en los parciales se deben a:	• Perseverancia y estudio constante. • Asistencia a clase. • Método de estudio adecuado. • Buenas Bases.	• Poco estudio. • Confusión.
Para preparar las evaluaciones:	• Repasa los apuntes de clase y transcribe ejercicios. • Explica a los compañeros.	• Estudia en grupos. • Repasa los apuntes.

	• Hace consultas extraclase al profesor. • Estudia con otra persona (profesor, amigo, particular)	
Tiempo dedicado a preparar el parcial:	• Menos de un día (por horas en diferentes momentos) • De uno a dos días. • Más de dos día	• Menos de 6 horas. • Menos de un día (por horas en diferentes momentos). • De uno a dos días.
Asistencia a clase:	• Siempre. • Casi siempre.	• Buena. • Regular. • poco
Considera que los resultados obtenidos corresponden a su esfuerzo:	• Sí.	• No.
Prefieren estudiar:	• Individualmente (no pierden tiempo).	• En grupos (para despejar dudas).
Forma de Afianzamiento de temas después de clase:	• Repasando los apuntes y transcribiendo ejercicios. • Explicando al compañero. • Preguntando al profesor (dudas).	• No se hace. • Estudiando ejercicios del cuaderno. • Repasando con otra persona.
Temas que se le facilitan:	• Álgebra. • Todos.	• Aritmética (operaciones). • Nociones de algunos temas.
Temas que se le dificultan:	• Trigonometría. • Fraccionarios.	• Trigonometría • Factorización • Todos
Temas de matemáticas de bachillerato con más incidencia en Cálculo Diferencial	• Factorización • Trigonometría. • Limites. • Derivadas.	• Trigonometría. • Factorización. • Geometría.
Sentir antes del parcial:	• Seguridad • Tranquilidad	• Nerviosismo
Sentir durante el parcial:	• Seguridad • Tranquilidad	• Confusión
Prefiere encontrar en el parcial:	• Situaciones problemáticas para resolver. • Sólo operaciones para desarrollar.	• Sólo operaciones para desarrollar.

Se siente mejor con preguntas en que deba:	• Resolver una situación problemática. • Realizar sólo operaciones	• Realizar sólo operaciones
Cuando está resolviendo la evaluación, se le facilita más:	• Desarrollar el procedimiento. • Entender las preguntas.	• Desarrollar el procedimiento.
Cree que las dificultades provienen de:	• Método de estudio. • Falta de dedicación. • Desinterés por la clase. • Malas bases. • Ambiente de clase (no aclaran dudas, por temor a la burla)	• Malas bases. • Poca asistencia a clase. • Falta de estudio. • Métodos inadecuados de estudio.
Cree que las dificultades se pueden superar:	• Buscando asesoría. • Practicando en casa. • Fijando las bases. • Asistiendo y atendiendo a clase. • Usando métodos adecuados de estudio.	• Estudiando más. • Cambiando el método de estudio.

Rendimiento en el área en el bachillerato:	• Excelente • Bueno	• Bueno. • A veces bueno a veces malo.

Las conclusiones del Cuadro Comparativo de criterios en entrevistas a estudiantes con "BUENOS" Y "MALOS" resultados en las pruebas parciales, muestran que:

Aunque los estudiantes con "malos" resultados manifiestan inconformidad con lo obtenido, dicen haber estudiado poco, sin método y con auxilio de compañeros en horarios en que a los últimos se les facilite. Se conforman con "repasar" los ejercicios del cuaderno de apuntes y buscar compañeros que les aclaren dudas dedicando muy poco tiempo a la preparación de las evaluaciones, no obstante, la cantidad de temas que se acumulan para un examen parcial como el de Cálculo Diferencial.

Carecen de disciplina de estudio que permita afianzar los temas tanto en su aspecto conceptual como procedimental que refleje trabajo individual que posibilite asumir solos la responsabilidad de decidir el algoritmo adecuado para resolver un problema, un ejercicio o simplemente una operación matemática. Estudian dependiendo de sus compañeros de grupo y sin método adecuado.

Faltan bases justamente en los temas que tienen mayor incidencia sobre el curso de cálculo diferencial, lo que, sumado al poco tiempo que dedican para estudiar, es decir, la escasa preparación, da como resultado inseguridad al presentarse al parcial y confusión cuando intenta resolverlo.

Además, algunos manifiestan desmotivación para asistir a clases o poco interés en atender a las explicaciones debido a la no comprensión de los temas.

Por el contrario, la mayoría de los estudiantes con “buenos” resultados en los parciales manifiestan estudio constante, asistencia regular a clases y atención adecuada dentro de ellas. Dedican tiempo al estudio individual pero creen que el hecho de explicarle a los compañeros, cuando estudian en grupos, les ayuda bastante para afianzar los temas y prepararse mejor para las evaluaciones.

Aunque manifiestan tener dificultades con algunos temas, logran superarlas con perseverancia y constancia en el estudio; además, cuando tienen dudas en los problemas o ejercicios asisten a las consultas individuales con el profesor titular de la asignatura lo cual les permite sentirse más seguros de sus conocimientos tras el intercambio con el docente.

Su rendimiento en el área ha sido muy bueno desde el bachillerato; por tanto confían en sus habilidades y aptitudes matemáticas lo que se traduce en tranquilidad y seguridad al enfrentar las pruebas.

Lo hallado en las entrevistas ratifica la afirmación de Papalia en su libro "Desarrollo Humano":

"Los estudiantes que creen que pueden dominar el material académico y regular su propio aprendizaje, tienen más probabilidad de intentar tener éxito y de lograrlo que aquellos que no creen en su propia capacidad. Los estudiantes autorregulados se interesan por aprender, establecen objetivos exigentes y emplean estrategias apropiadas para lograrlos. Se esfuerzan mucho, persisten en las dificultades y buscan ayuda cuando es necesario. Los estudiantes que no creen en su capacidad para conseguir el éxito tienden a frustrarse y deprimirse, sentimientos que les dificulta alcanzar el éxito." [53]

Observación:

Las entrevistas realizadas a todos los estudiantes fueron similares pero tenían algunas preguntas diferenciales para estudiantes con "malos" resultados y para estudiantes con "buenos" resultados. En las respuestas de los estudiantes con "malos" y "buenos" resultados, por separado, se encontraron algunas particularidades importantes, que se incluyen a continuación:

Estudiantes con "malos" resultados:

- Algunos de los estudiantes manifestaron dentro de la entrevista haber estudiado "muchísimo" para el primer parcial pero a la pregunta de cuánto tiempo, contestaron que 3 horas, 4 horas, 5 horas, lo cual es muy poco para preparar una evaluación cuyo contenido abarca lo visto en siete u ocho semanas de clase.

---

[53] PAPALIA, Diane; WENDKOS, Rally y DUSKIN, Ruth. Desarrollo Humano. 8 ed. Bogotá; McGraw-Hill, 2001; p.434

- Aunque la mayoría de estos estudiantes cree haber dedicado suficiente tiempo para preparar la evaluación consideran que deben estudiar más para las siguientes evaluaciones y que con hacerlo mejorarán sus resultados y superarán los deficientes conocimientos previos en el área de matemáticas con los que llegan a la universidad.
- Algunos afirman haber iniciado la carrera por causas distintas a su propio interés (por una beca, porque se parece a lo que realmente quería). Y otros porque eso era lo que querían pero no pensaron que tuviera "tanta" matemática (Electrónica: "es que a mí siempre me ha gustado cacharrear con cables". Informática: "a mi me encanta cacharrear con el computador").
- La nota de seguimiento, que es el resultado del trabajo en clase, trabajo en grupos, participación, asistencia a clase y evaluaciones cortas, es bastante regular para la mayoría de los estudiantes, a pesar de que manifiestan que su rendimiento en el área de matemáticas era bueno en el colegio.

Estudiantes con "buenos" resultados:

- La mayoría de los estudiantes manifiesta la poca necesidad de estudio y atribuyen su éxito a condiciones personales particulares (Disposición individual, habilidad mental, inteligencia superior). Se consideran una minoría aventajada dentro de su grupo.
- Aunque muchos creen que en la universidad la exigencia es mayor no les implica un esfuerzo superior al que estaban acostumbrados en el bachillerato.
- Cuando cometen errores los atribuyen a la distracción, descuido o aplicación de procesos incorrectos.
- Consideran que el estudio de las asignaturas que no son del área de matemáticas exige más lectura, que son menos prácticas, menos exactas, lo cual concuerda con su idea de que el aprendizaje de una asignatura como Cálculo Diferencial es de tipo mecánico y memorístico.

Otras Observaciones generales de la lectura de las entrevistas:

- Los estudiantes reconocen que falta estudiar, dedicar más tiempo con lo cual el éxito sería mayor.
- Algunos estudiantes, aunque reconocen su falta de estudio no están conformes con los resultados.
- El cambio de ritmo de enseñanza del colegio a la universidad afecta su rendimiento.
- Es claro que el nivel de exigencia en la educación media generalmente es muy bajo.
- Aún no se es conciente de la importancia del aprendizaje analítico y los docentes continuamos evaluando a nivel mecánico y memorístico. De ahí que los estudiantes no vean su importancia.
- Hay mucho descuido por fijar las bases, muchos de los estudiantes entrevistados no terminaron los cursos de inducción.

7.2 REVISIÓN DE EXÁMENES

Con la revisión de los dos exámenes (primero y segundo corte) de los estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana, durante el primer semestre del año 2006, se encontraron errores de diferentes tipos los cuales se clasificaron con base en:

a. **Los estándares básicos de calidad para la educación básica y media en el área de matemáticas.**
b. **Las competencias matemáticas básicas de ingreso a los programas de ingeniería y**
c. **Los errores clasificados por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e invar,** los cuales se desarrollan en las secciones siguientes**.**

7.2.1. Errores clasificados con base en los estándares de calidad de la educación básica y media en el área de matemáticas. Para clasificar los errores teniendo en cuenta los estándares básicos de calidad en el área de matemáticas para la educación básica, se asignó un código a cada estándar para referenciar los errores que muestran la falta de dominio de dicho estándar:

A: ERRORES EN ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS.

B: ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.

C: ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS.

E: ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS.

Además, se utilizaron los siguientes símbolos para diferenciar los errores por niveles y pensamientos, así, por ejemplo:

A1: Error en el primer estándar de la lista correspondiente a los estándares del pensamiento numérico, en los grados sexto a séptimo.

B3’: Error en el tercer estándar de la lista correspondiente a los estándares del pensamiento espacial y sistemas geométricos, en los grados octavo a noveno.

E5”: Error en el quinto estándar de la lista correspondiente a los estándares del pensamiento variacional y sistemas algebraicos en los grados décimo a undécimo.

En el anexo F se relacionan cuatro tablas con los errores encontrados en los doce parciales diferentes, dos por cada profesor, haciendo la clasificación correspondiente en el pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico y pensamiento variacional. Del pensamiento aleatorio y sistema de datos no se encontraron temas que lo abordaran; por tanto, no se pudo revisar.

Algunos errores se ubicaron en dos o más categorías simultáneamente, por lo cual se tabuló la información teniendo en cuenta la frecuencia con la que aparece cada error.

Los símbolos P1, P2, P3, P4, P5 y P6 de las tablas corresponden a los 6 profesores que dirigían los cursos de cálculo Diferencial en el primer semestre del 2006. Cada uno de los tres primeros docentes orientaba dos grupos mientras que los tres últimos cada uno 1 grupo, para un total de 9 grupos.

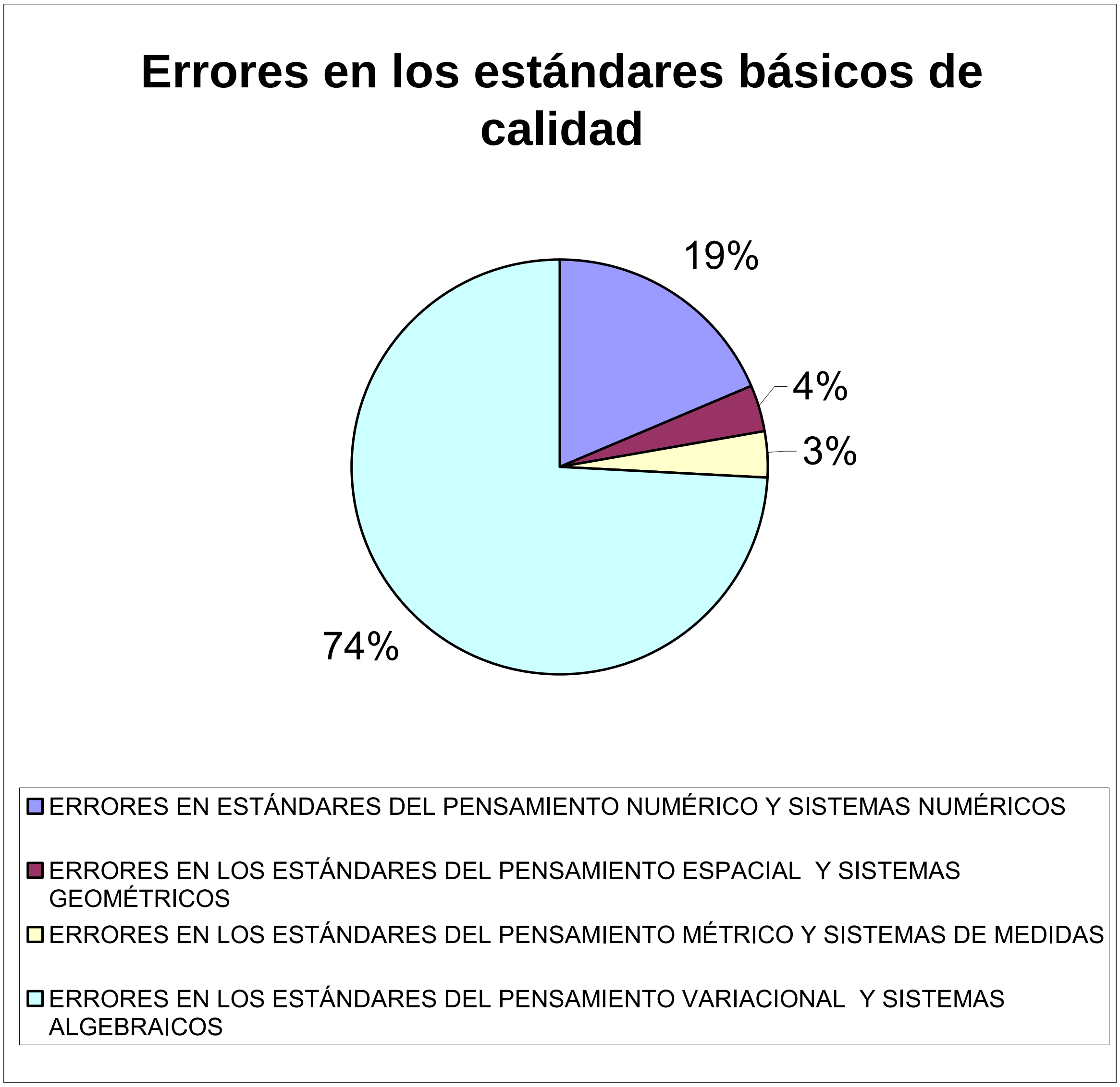
Con los resultados obtenidos en las tablas (Anexo F) se compiló la información tomando sólo los cuatro tipos de pensamiento que se abordaron en los parciales, de lo cual se obtuvo:

Tabla 7. Clasificación de errores según el tipo de pensamiento matemático

ERRORES SEGÚN EL TIPO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO	**CANTIDAD**
o ERRORES EN ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	570
o ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	110
o ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	98
o ERRORES EN LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS	2259

Estos resultados son representados en la figura 1:

Gráfica 1. Errores en los estándares básicos de calidad.



De los datos mostrados se puede constatar que:

- En los estándares del pensamiento variacional y sistemas algebraicos es donde mayor cantidad de errores cometen los estudiantes: Este resultado se debe, entre otras causas, al hecho de que en el curso de cálculo diferencial se utilizan con mucha frecuencia herramientas algebraicas como la factorización, los productos notables, las ecuaciones y las desigualdades, y herramientas trigonométricas como identidades y gráficas, coincidiendo con los temas donde, durante la entrevista, los estudiantes manifestaron tener más dificultades. Otra razón es la proporción de temas que incluyen estos estándares puesto que en cálculo diferencial la mayoría corresponde al ámbito funcional.

- El segundo lugar en cantidad de errores lo ocupó el pensamiento numérico y sistemas numéricos, lo cual es comprensible teniendo en cuenta que este pensamiento incluye manejo y aplicación de algoritmos, fórmulas y propiedades por ejemplo de la potenciación, radicación y logaritmación, entre otras y los estudiantes no recuerdan las fórmulas o las han memorizado incompletas o con errores, lo que dificulta también el desarrollo de algoritmos.

- Si se tienen en cuenta los dos parciales realizados a los estudiantes, en conjunto (ver tabla anexo F) se puede observar que el error cometido con mayor frecuencia corresponde al estándar: "*Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada*" del pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Con este resultado se concluye que los estudiantes tienen dificultad para desarrollar un algoritmo, para aplicar propiedades de las operaciones de los números reales, para llevar a cabo procedimientos algebraicos y para usar expresiones algebraicas.

- El segundo lugar en frecuencia de errores se encuentra en el estándar *"Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea y como valor de la pendiente de la recta tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos*" también del pensamiento variacional y sistemas algebraicos. De aquí se puede decir que los estudiantes no tienen manejo del concepto de derivada, pero lo que más se notó durante la revisión fue la dificultad en la aplicación de las reglas de derivación en general y de los algoritmos usados para hallar derivadas en las que son necesarios procedimientos específicos como por ejemplo: la regla de la cadena, derivación implícita, regla de L'hopital y derivación de funciones exponenciales. Esta dificultad puede ser una consecuencia de las fallas con las que el estudiante se apresta para estos temas, teniendo en cuenta las conclusiones anteriores.

- Otra razón por la cual se presentó una buena cantidad de errores en este estándar fue debido a la resolución de problemas (ver tabla anexa G), en este caso de problemas de optimización. Vale la pena mencionar que aunque sólo en el segundo parcial se pide a los estudiantes resolver situaciones problemáticas que requieran modelización matemática son muy pocos los que las resuelven correctamente. La mayoría comete errores al hacer la interpretación del problema, al aplicar las reglas de derivación sobre las ecuaciones establecidas, al tomar datos equivocados como variables o como constantes, entre otros. Algunos estudiantes ni siquiera intentan resolver el problema y otros sólo tratan de hacer un esquema pero con datos incorrectos marcados sobre la gráfica.

- Otros errores frecuentes en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos se encontraron en los siguientes estándares: "*Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera*", "*Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales*" e "*Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan*". Con base en estos errores se puede deducir que los estudiantes tienen dificultad en el manejo de las gráficas de las funciones tanto algebraicas como trigonométricas y en la interpretación de las transformaciones cualitativas que sobre la gráfica generan los cambios en la ecuación de dicha gráfica, posiblemente esta sea una consecuencia de la escasa preparación en los estándares del pensamiento geométrico con la que llegan los estudiantes.

- Otros errores que se presentaron con bastante frecuencia corresponden a los estándares “*Justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones*” y “*Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos*” del pensamiento numérico y sistemas numéricos. Con este error se ratifica la dificultad que tienen los estudiantes para aplicar propiedades de las operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división (se observa esta dificultad por ejemplo cuando transponen términos en una ecuación) y de otras operaciones como radicación, potenciación y logaritmación.

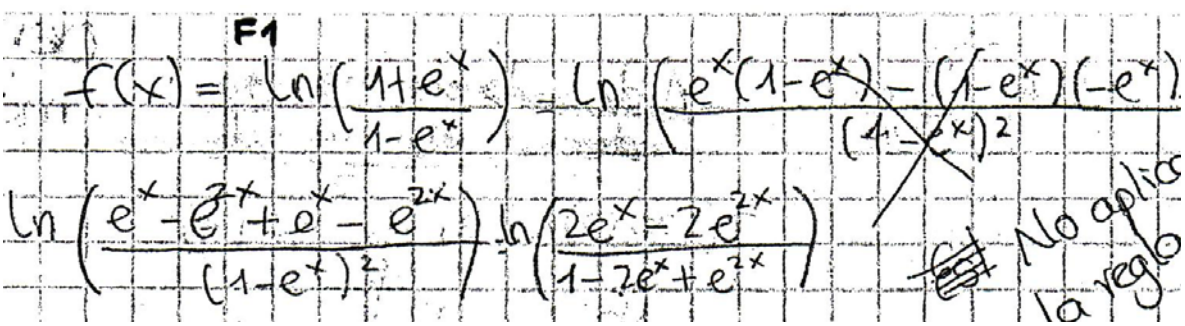
- En los estándares del pensamiento espacial y sistemas geométricos y en los del pensamiento métrico y sistemas de medidas se encontró la menor cantidad de errores, quizá, porque la proporción con que se abordan estos pensamientos en las evaluaciones revisadas es mínima.

7.2.2. Análisis de los errores clasificados con base en los estándares de calidad de la educación básica y media en el área de matemáticas. A continuación se analizan con mayor énfasis algunos errores concernientes al pensamiento variacional y sistemas algebraicos encontrados en los exámenes por ser en esta dimensión donde se halló la mayor cantidad de errores, posiblemente, porque es el pensamiento abordado con mayor frecuencia en las diferentes preguntas de los exámenes o quizá porque “el pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales” [54] por lo que, los ejercicios referentes a él tienen mayor grado de dificultad para el estudiante, o debido a que “el álgebra sustituye al número por una cantidad abstracta que corresponde a números cualesquiera y se pone el acento en las transformaciones mismas de esas cantidades, es decir en las operaciones como tales” [55] por lo cual se requiere que los estudiantes hayan llegado al “estadio de desarrollo cognitivo correspondiente a las operaciones formales (12-15 años y vida adulta)”[56] y muchos de ellos probablemente aún no lo han logrado.

De los estándares de este pensamiento los que corresponden a los grados 10^0 y 11^0 recogen la mayoría de los estándares de los otros niveles; por tanto, se revisan con mayor énfasis estos estándares:

E”2: ***Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea y como valor de la pendiente de la recta tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.***

Ejemplo de error en este estándar:

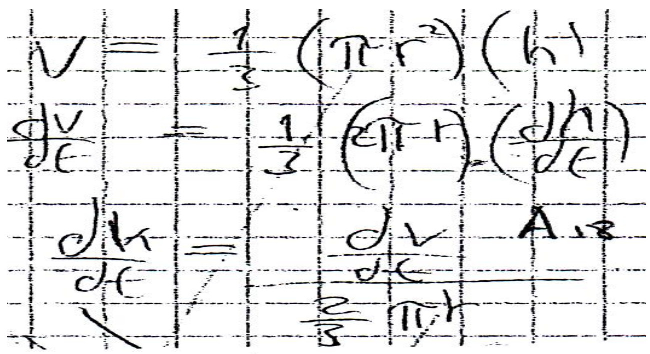


---

[54] VASCO U. Carlos Eduardo. Didáctica de las Matemáticas, artículos selectos. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2006. p. 139.
[55] NOT, Louis. Las pedagogías del conocimiento. Ed. Fondo de Cultura económica, Bogotá, 1998. p. 310
[56] TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999. p. 73

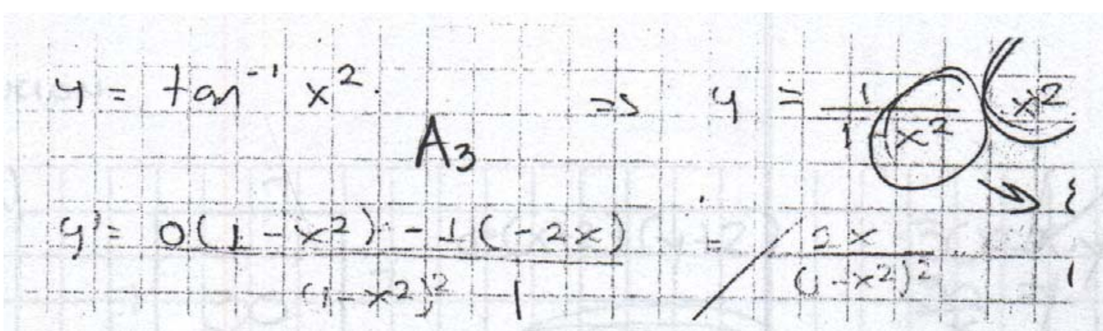
En el ejercicio se pide hallar la derivada de una función compuesta, por tanto se debe aplicar la regla de la cadena. Pero el estudiante halló la derivada del logaritmo, cuyo argumento es un cociente, como si fuera el logaritmo de la derivada de un cociente. Con esto demuestra confusión al aplicar la regla para hallar la derivada de una función compuesta al igual que para hallar la derivada de un logaritmo puesto que lo que hace es combinar inadecuadamente las dos reglas.

Otro ejemplo:



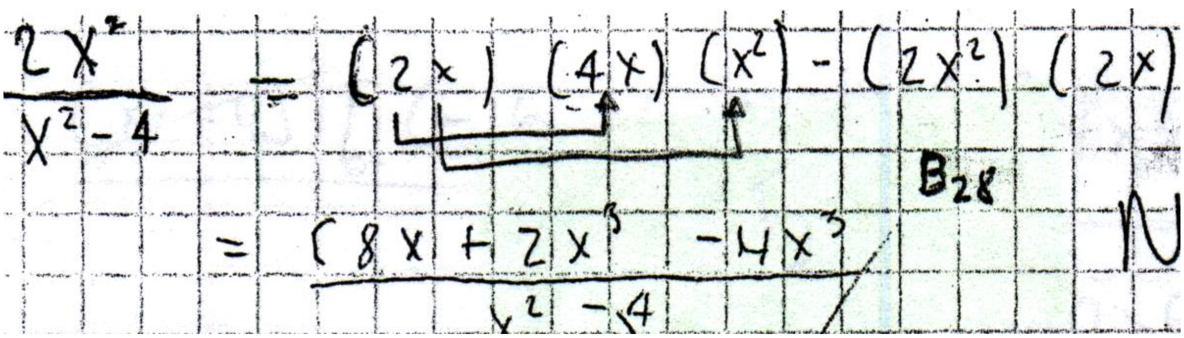
Este es un ejercicio donde el estudiante debe resolver un problema aplicando la derivada del volumen del cono. En este caso el error consiste en aplicar la derivada de un producto como el producto de las derivadas, error que se encontró en varios exámenes.

Otro ejemplo:



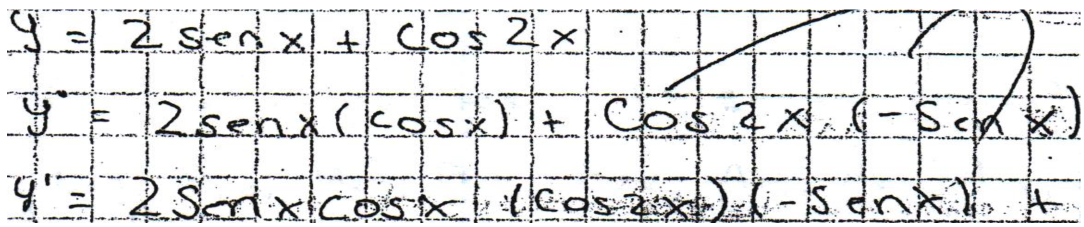
Aquí, el estudiante deriva la función trigonométrica inversa después de transformarla incorrectamente en una expresión similar (cambió el signo y no elevó el argumento al cuadrado) a su derivada por el argumento, para luego aplicar la derivada del cociente en la que también comete errores puesto que combina las reglas para hallar la derivada de un producto y la derivada de un cociente ya que se nota que separó $\frac{1}{x^2-1}x^2$ en el producto de los factores $\frac{1}{x^2-1}$ y x^2, tomó la derivada de cada uno de los factores y para el primero que es un cociente halla la derivada del numerador y la multiplica por la función del denominador, luego toma el otro factor, aparentemente como $1x^2$ y asume que la derivada es 1 multiplicada por la derivada de x^2, es decir, $2x$ y divide la diferencia de estos resultados en el cuadrado del denominador. Por tanto, combina erróneamente tres reglas de derivación: la regla para hallar la derivada de la función inversa de la tangente, la derivada del producto y la derivada del cociente.

Otro ejemplo:



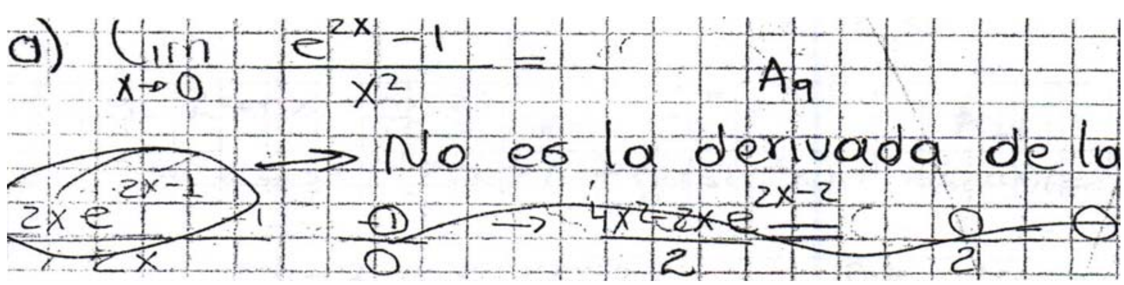
En este ejercicio, el estudiante derivó incorrectamente el cociente puesto que en el primer término de la diferencia escribe el producto de las derivadas de numerador y denominador multiplicadas por x^2, para el segundo multiplicó correctamente la función del numerador por la derivada de la función del denominador pero no dividió la diferencia por el cuadrado de la función del denominador. Después, distribuye erróneamente un factor sobre los otros dos factores en el primer término de la diferencia y divide por la función del denominador pero sin elevarla al cuadrado.

Otro ejemplo:



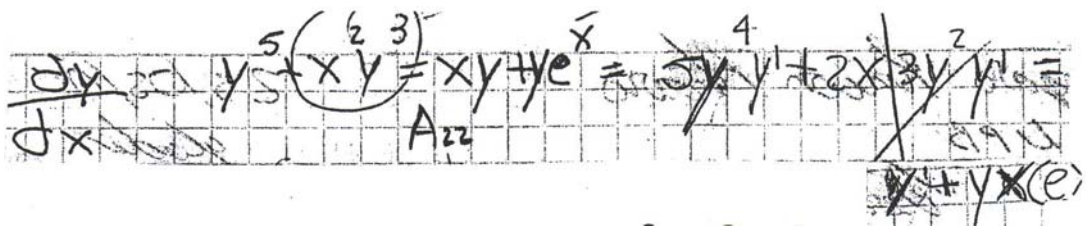
En este ejercicio el estudiante debe aplicar la derivada para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 2senx + \cos 2x$ en un punto dado. Pero, aplica la regla de la cadena erróneamente puesto que deriva cada término de la suma de dos funciones al parecer porque cree que la derivada de cada sumando es el mismo sumando por su derivada, es decir, pareciera que pensara que se debe hallar la derivada "interna" que no es cierto para el primer sumando porque no es una función compuesta y en el segundo que si es una función compuesta la deriva incorrectamente como el producto de la función por la derivada de ella misma pero sin tener en cuenta precisamente el ángulo que también es una función por lo que debería hallar la derivada interna.

Otro ejemplo:



En este ejercicio el estudiante debe aplicar la derivada para hallar el límite de una función aplicando la regla de L'Hopital pero deriva la función exponencial, en el numerador, como si fuera una función potencia, como el límite le sigue dando una indeterminación reincide en el error.

Otro ejemplo:

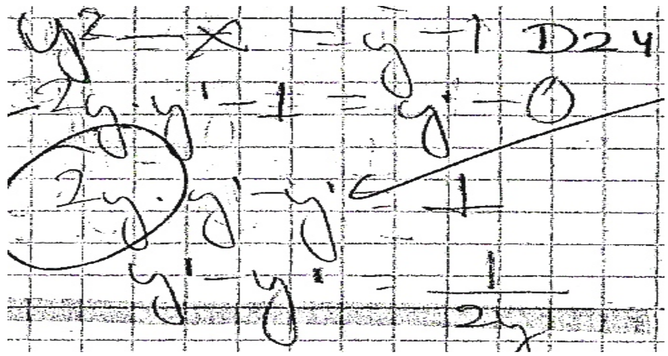


En este caso el estudiante debe hallar la derivada de una función implícita de x, para lo cual aplica la derivación implícita. Aunque el procedimiento para hallar este tipo de derivada lo siguió correctamente, falló al aplicar la derivada del producto puesto que la tomó como el producto de las derivadas de cada uno de los factores. Al parecer tampoco halló bien la derivada de la función exponencial puesto que la tomó como la derivada de una función potencia.

Con los errores en los ejercicios anteriores se puede observar que los estudiantes tienen idea de las reglas para hallar las derivadas de las diferentes funciones pero las confunden, las combinan, no las recuerdan completamente sino vagamente, y no las han asimilado como verdaderas herramientas en la solución de problemas.

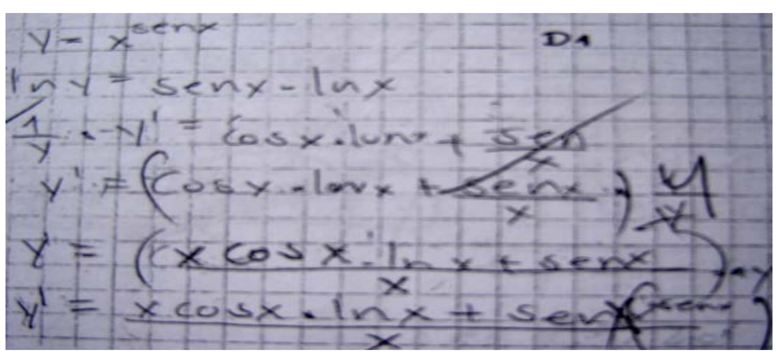
E'2: ***Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.***

Ejemplo de error en este estándar:



En este ejercicio el estudiante halla correctamente la derivada de la función implícita dada, pero, del renglón 3 al renglón 4 transpone el factor de un sumando a dividir el término de la derecha de manera incorrecta puesto que en este caso, realmente, lo que se hace es dividir toda la ecuación en $2y,\ y \neq 0$, por tanto, lo que quedaría a la izquierda sería $y' - \dfrac{y'}{2y}$ y no $y' - y'$. Al parecer el estudiante tiene la idea de la forma mnemotécnica para transponer términos en una ecuación algebraica (lo que está sumando para a restar o viceversa, lo que está multiplicando pasa a dividir y viceversa) sin tener en cuenta que cuando transpone términos que están multiplicando o dividiendo afectan todos los términos de la ecuación.

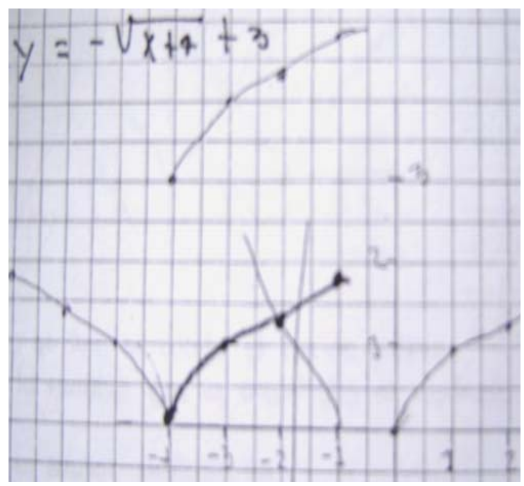
Otro ejemplo:



En este ejercicio el estudiante aplicó correctamente las reglas de derivación necesarias para hallar la derivada pedida pero, del tercero al cuarto renglón cuando quiso transponer términos, pasa a y que divide el término de la izquierda a dividir también a la derecha lo cual muestra un error en el manejo de expresiones algebraicas equivalentes.

E'8: ***Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.***

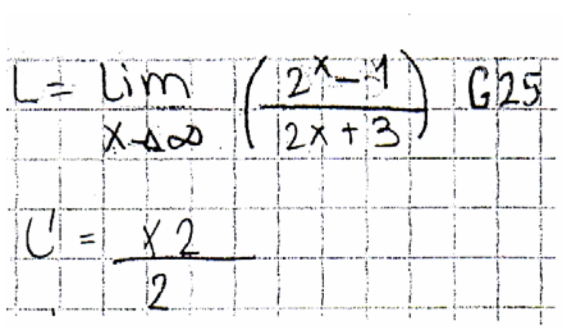
Ejemplos de errores en este estándar:

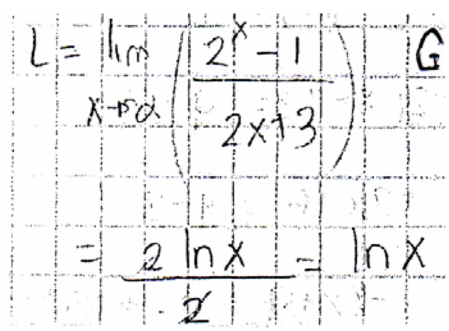


En estos ejercicios se pide graficar una función utilizando transformaciones indicadas por una ecuación a partir de funciones elementales reconocidas por los estudiantes. Pero, ellos asumen erróneamente el efecto de los cambios de la ecuación sobre lo que debe transformarse en la gráfica. Por ejemplo, en la gráfica de la izquierda se pide al estudiante que grafique $y = -\ln(-x) + 2$ partiendo de la gráfica de $\ln x$, pero éste supone que el efecto de multiplicar $\ln x$ por -1 produce una simetría respecto del eje y, lo cual no es cierto porque la simetría se produce pero con respecto al eje x. Además, no completó el ejercicio. En la gráfica de la derecha, se pide graficar $y = -\sqrt{x+4} + 3$ y el estudiante dibuja $\sqrt{x}$ y la desplaza correctamente 4 unidades a la izquierda como lo indica la ecuación (aunque no se sabe exactamente cual es la gráfica final) luego dibuja una gráfica simétrica respecto de la recta $x = -4$ lo cual es incorrecto puesto que el efecto que produce el signo negativo que antecede a $\sqrt{x+4}$ sobre la gráfica es una simetría con respecto al eje x.

E”1: ***Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos***.

Ejemplo de errores en este estándar:





En este caso se pide a los estudiantes aplicar la regla de L’hopital para hallar el límite dado. Entonces debían hallar la derivada del numerador y la del denominador, como efectivamente intentaron hacerlo pero de manera incorrecta, puesto que la derivada del numerador tiene errores: en la solución de la izquierda halló la derivada como si estuviera derivando una potencia y en el ejercicio de la derecha tenía una idea más aproximada de la derivada pero también incorrecta puesto que la derivada de $2^x - 1$ es $2^x \ln 2$ y no $2\ln x$.

E”3: ***Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.***

Ejemplo de errores en este estándar:

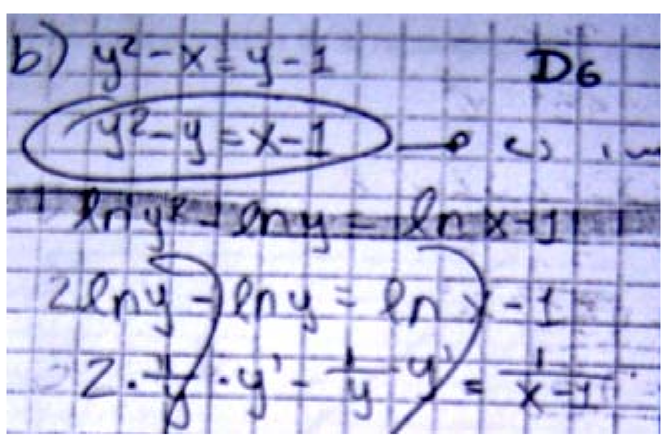
En este ejercicio se pide al alumno que grafique la función $y = x^4 + 4x^3$ usando el dominio, las intersecciones, las simetrías, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y concavidad. El estudiante cometió errores al hallar los puntos críticos de la función (para lo cual debe derivar), por tanto, los intervalos de crecimiento y concavidad también son incorrectos.

Errores en otros estándares:

A continuación se presentan ejemplos de errores cometidos en otros estándares:

A'2 ***Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.***

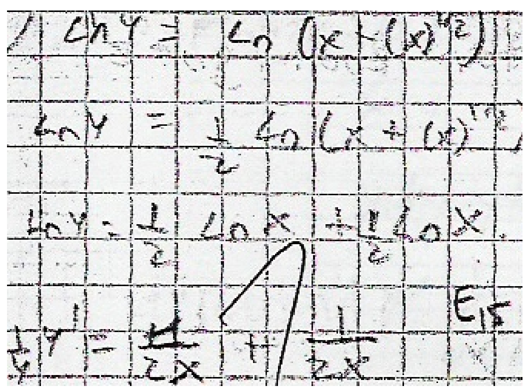
Ejemplo de error en este estándar:



En este problema se pide al estudiante hallar $\frac{dy}{dx}$ a partir de la expresión dada. Como la variable y no está despejada se debe aplicar la derivación implícita, pero el estudiante aplicó $\ln$ a la ecuación sin necesidad, y en el tercer renglón se observa como halló de manera incorrecta el logaritmo de la diferencia como la diferencia de los logaritmos y del cuarto al quinto renglón no simplificó el resultado que obtuvo. Es interesante ver cómo en el quinto renglón derivó el resultado erróneo de forma implícita aplicando procedimientos correctos. Aquí el estudiante parece tener claro el algoritmo para hallar la derivada implícita pero tiene errores en el manejo de operaciones entre números reales.

A'4 ***Identificar la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas que lo requieran y para resolver problemas.***

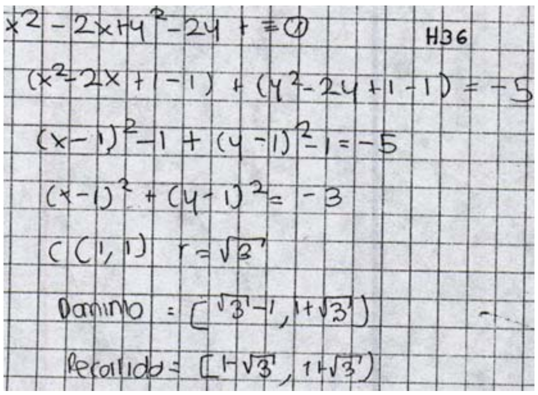
Ejemplo de error en este estándar:

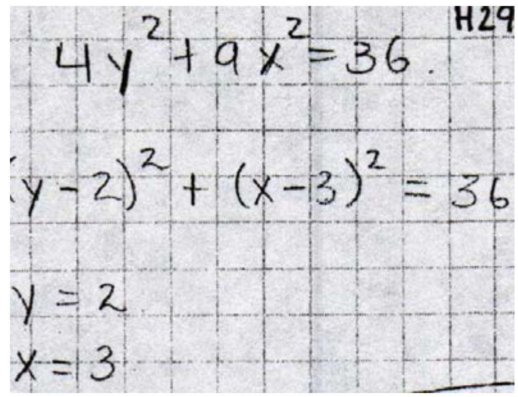


En este ejercicio el estudiante aplica correctamente las reglas de las derivadas pero utiliza erróneamente las propiedades de los logaritmos puesto que asume que el logaritmo de la suma es la suma de los logaritmos de cada sumando (segundo a tercer renglón).

B”3: ***Resolver problemas donde se usen las propiedades geométricas de las cónicas de manera algebraica.***

Ejemplo de errores en este estándar:

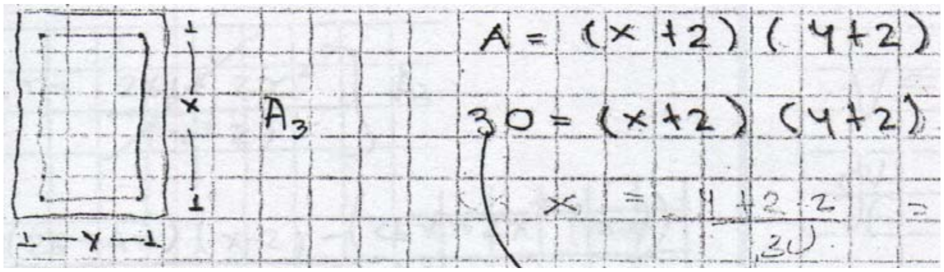




En estos ejercicios se pide al estudiante identificar y graficar la relación binaria dada. En el ejercicio de la izquierda, luego de efectuar correctamente operaciones algebraicas para llegar a la forma canónica de la ecuación, el estudiante obtiene una suma de cuadrados igual a una cantidad negativa lo cual es imposible en los números reales, pero sin tener en cuenta este argumento asume que la ecuación corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{-3}$. Además, halló dominio y recorrido como si correspondiera a una función lo cual es incorrecto y no se lo están pidiendo. En el ejercicio de la derecha el estudiante toma el coeficiente de cada término de la ecuación para hallar el centro de la cónica sacando raíz cuadrada de cada uno de ellos, lo cual es incorrecto puesto que estos números determinan los cortes de la cónica con los ejes y no el centro de ella.

B”4: ***Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.***

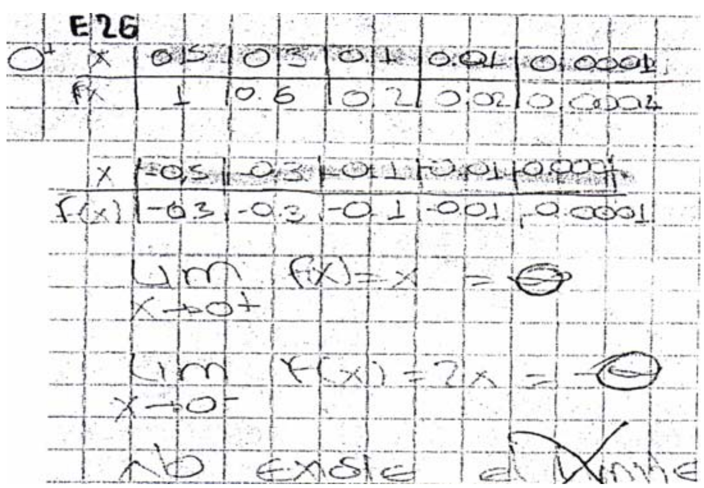
Ejemplo de error en este estándar:



En este problema el estudiante debe hacer un gráfico de la situación que para este caso corresponde a una hoja impresa un área dada, luego, la gráfica corresponde a un rectángulo cuya área impresa según la grafica del estudiante es xy y no $(x+2)(y+2)$ como lo escribió. Además, trata de despejar x transponiendo los términos de manera incorrecta.

C"3. ***Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.***

Ejemplo de error en este estándar:

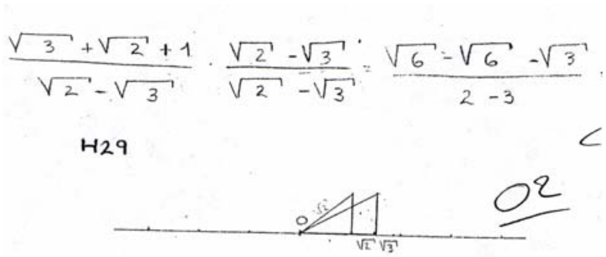


En este ejercicio se pide al estudiante hallar el límite cuando x tiende a 0 por la izquierda y por la derecha. A pesar de que los valores de $f(x)$ se aproximan a

0 tanto por la izquierda como por la derecha escribe ∞ y no infiere el resultado correcto, 0.

A”5: ***Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.***

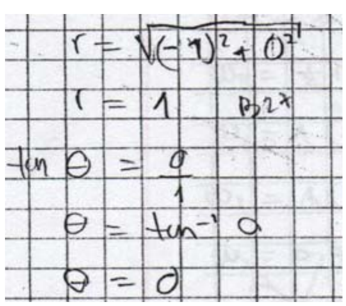
Ejemplo de error en este estándar:

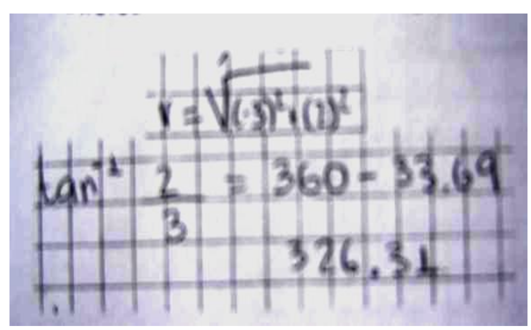


En este ejercicio el estudiante debía cambiar la notación del número real dado para poderlo representar gráficamente, para lo cual debió multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por la conjugada del denominador, es decir, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y no por $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, como lo hizo.

C’2: ***Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.***

Ejemplo de error en este estándar:

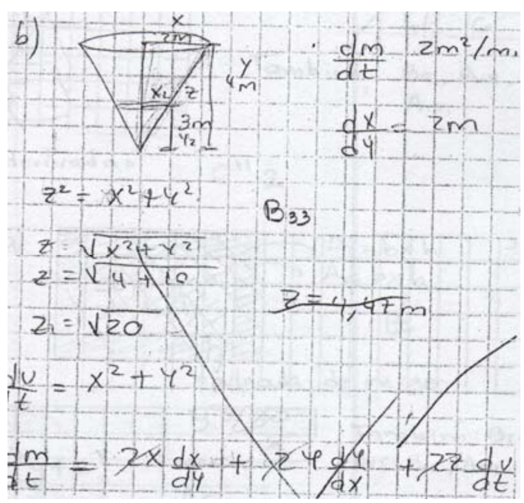




El primero es un ejercicio en el que el docente pide al estudiante hallar las raíces sextas de un número complejo, para lo cual debe hallar el ángulo que se forma entre el eje positivo de las x y el módulo del número complejo. Pero el estudiante halló el ángulo que debía usar de manera incorrecta puesto que debió tomar el denominador (cateto opuesto) que corresponde a la parte real del número complejo y no el módulo (hipotenusa) como aparentemente lo hizo. En el segundo el estudiante comete un error similar.

C"2: ***Resolver y formular problemas que involucran magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.***

Ejemplo de error en este estándar:



En este ejercicio se pide al estudiante resolver un problema en el que debe buscar el modelo matemático de la situación a partir de su gráfica, que para este caso es un cono invertido. A partir de los triángulos marcados en la gráfica dibujada adecuadamente por el estudiante debe establecer una proporción entre los lados de los dos triángulos para dejar una variable en términos de la otra, reemplazar en el volumen del cono y luego derivar. Pero el estudiante no estableció la proporción sino que aplicó de manera incorrecta el teorema de Pitágoras entre los lados del triángulo grande.

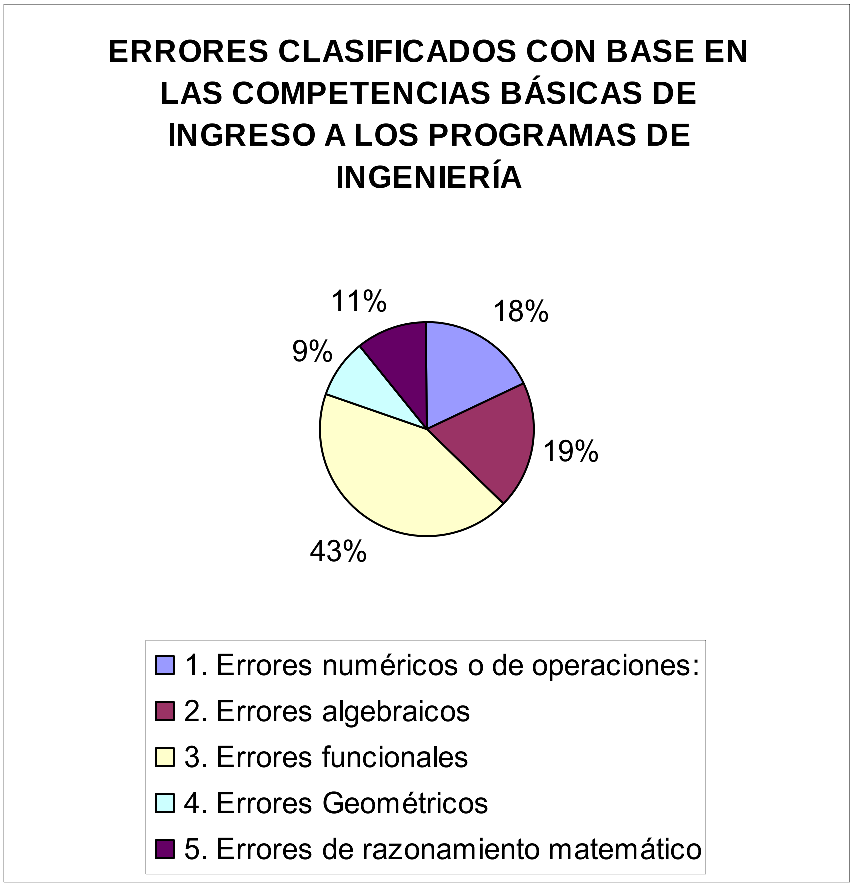
7.2.3 Errores clasificados con base en las competencias matemáticas básicas de ingreso a los programas de ingeniería. Esta clasificación se hace con base en las competencias matemáticas básicas con que debe ingresar el estudiante a los programas de Ingeniería, de acuerdo con la investigación que está desarrollando un equipo de investigadores de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y la Pontificia Universidad Javeriana con el apoyo financiero de Conciencias. El proyecto se titula "Definición de estándares de Competencia Matemática para el Ingeniero".

En la tabla 8 que aparece a continuación se hizo un resumen de los errores encontrados los cuales aparecen discriminados en las tablas del anexo H. Estos errores se agruparon teniendo en cuenta la frecuencia con la que se presentaron dentro de los exámenes:

Tabla 8. Clasificación de errores con base en las competencias básicas de ingreso a los programas de Ingeniería.

ERRORES FRECUENTES DE LOS ESTUDIANTES EN EL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL CLASIFICADOS CON BASE EN LAS COMPETENCIAS BÁSICAS DE INGRESO A LOS PROGRAMAS DE INGENIERÍA.	TOTALES
1. Errores numéricos o de operaciones	458
2. Errores algebraicos	478
3. Errores funcionales	1272
4. Errores Geométricos	221
5. Errores de razonamiento matemático	275

Gráfica 2. Clasificación de errores con base en las competencias básicas de ingreso a los programas de Ingeniería.



De la figura 2 se puede concluir que:

- Los errores que se presentan con mayor frecuencia son los funcionales, como ya se había detectado con la clasificación por estándares de calidad en el área de matemáticas.
- Revisando la tabla del anexo G se puede observar que los errores más frecuentes de esta categoría *son "Aplica las reglas de derivación de manera incorrecta o no las aplica"* y "*No hace el análisis de problemas de optimización que involucren funciones básicas*", la cantidad de errores en el primero, como ya se mencionó, se debe probablemente al énfasis de la asignatura en las

técnicas de derivación que soportan todo el segundo corte de acuerdo con las pruebas realizadas; y el segundo porque muchos estudiantes no se interesaron por resolver este ítem del segundo parcial.

- Otro tipo de errores que se presentaron con bastante frecuencia fueron los errores numéricos y de operaciones coincidiendo con lo que se había detectado en la clasificación anterior.
- Los errores de razonamiento matemático presentan un porcentaje bajo posiblemente porque buena parte de las pruebas requiere para su solución procedimientos algorítmico-mecánicos y el uso de fórmulas, para los cuales el estudiante no precisa de análisis y razonamientos del nivel superior y la parte de la prueba en los que los requieren, mucho de ellos no la contestaron.
- Los errores geométricos son los que se presentan con menor frecuencia seguramente por la baja proporción de ítems en donde estos temas son necesarios.

7.2.4. Análisis de los errores que se presentaron con mayor frecuencia clasificados con base en las competencias matemáticas básicas de ingreso a los programas de ingeniería. Teniendo en cuenta que la revisión de los errores se realizó con el examen de cada alumno, su énfasis se hizo en el saber conocer del estudiante "el saber conocer se define como la puesta en acción-actuación de un conjunto de herramientas necesarias para procesar la información de manera significativa acorde con las expectativas individuales, las propias capacidades y los requerimientos de una situación en particular"[57]. A continuación se hace la revisión de los errores que se presentaron con mayor frecuencia:

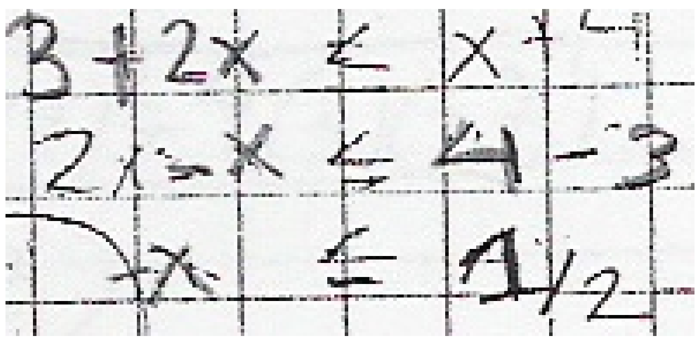
[57] TOBÓN T., Sergio. Formación Basada en competencias. Primera edición. Ecoe Ediciones, Bogotá, 2004. p. 171

Errores numéricos o de operaciones:

Ejemplo:

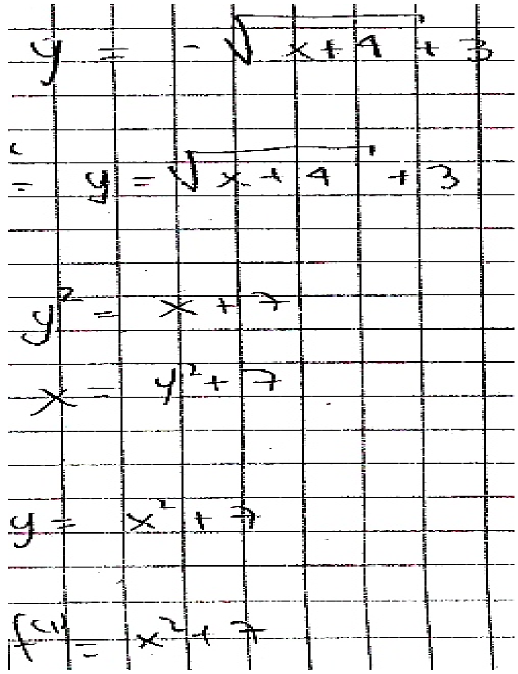
Aquí el joven tiene idea del procedimiento para dividir fraccionarios pero usa erróneamente el producto de medios como numerador y el producto de extremos como denominador, es decir, halla el recíproco de la fracción que necesita.

Otro ejemplo



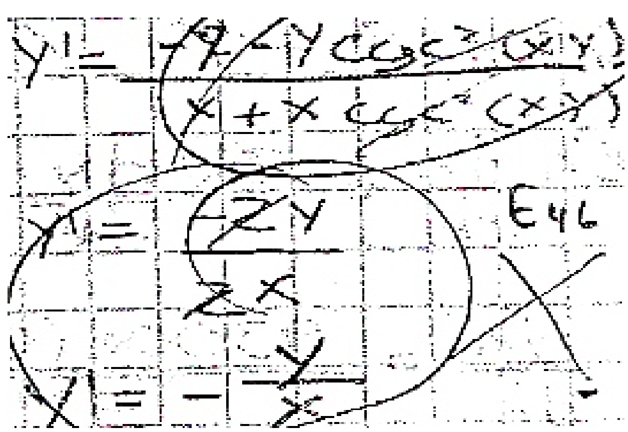
En este caso el estudiante transpone correctamente los términos pero en el tercer renglón efectúa de forma incorrecta la diferencia entre los dos términos de la izquierda, lo cual le emite un resultado completamente diferente al correcto.

Otro ejemplo



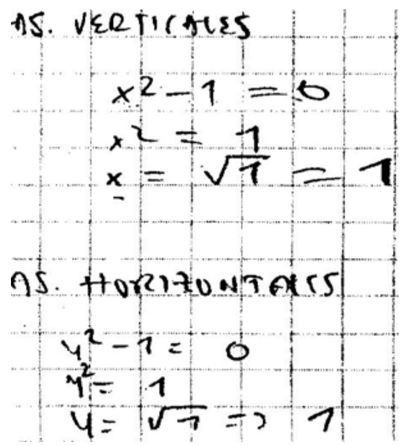
Aquí el error está del segundo al tercer paso, puesto que el estudiante eleva al cuadrado a ambos términos de la ecuación pero al parecer en el lado derecho sólo elevó al cuadrado el primer sumando y no la suma, como debió hacerlo, porque sumó $x+4$ con 3 para obtener 7, lo cual es incorrecto. De acuerdo con este ejercicio, el estudiante recuerda el algoritmo a seguir para resolverlo, pero se equivoca en el procedimiento del algoritmo.

Otro ejemplo



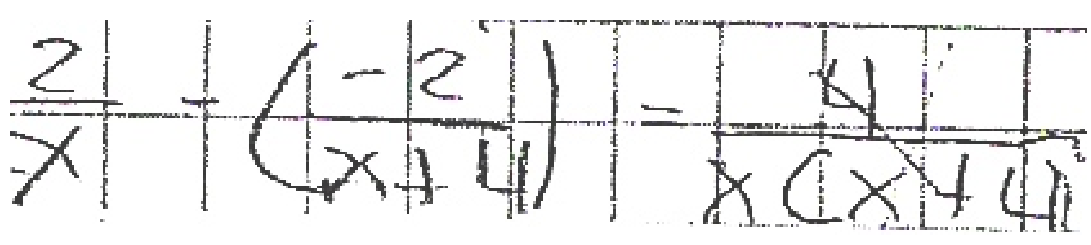
En este ejercicio el estudiante simplifica la expresión eliminando términos que son factores de sumandos del numerador y del denominador, respectivamente, lo cual no es posible porque se altera la fracción.

Otro ejemplo



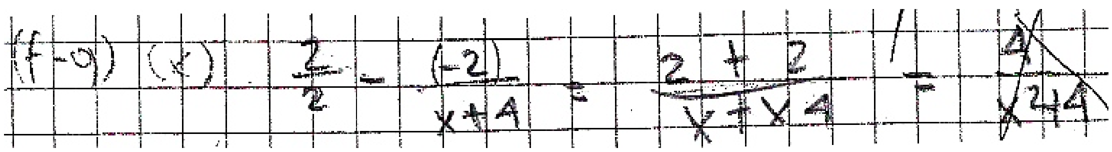
En estos casos el estudiante halló la raíz cuadrada de 1 pero no tuvo en cuenta el signo $\pm$ que debe incluir el resultado de hallar una raíz par. De lo anterior, se puede inferir que el estudiante conoce el algoritmo para hallar las asíntotas de la gráfica de una función pero tiene falencias en las operaciones que debe aplicar.

Otro ejemplo



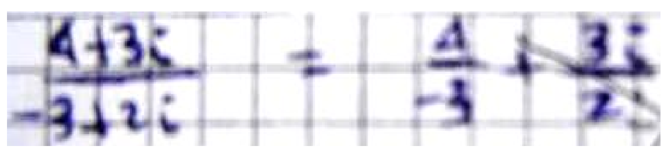
En este ejercicio el estudiante realiza la diferencia de fraccionarios como un producto de fraccionarios con el signo incorrecto. Parece que confunde la diferencia de fraccionarios con distinto signo con el producto de fraccionarios con igual signo.

Otro ejemplo



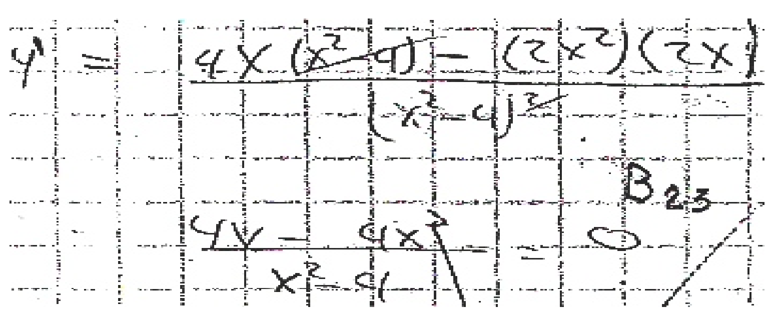
En el mismo ejercicio, otro estudiante, primero multiplica los signos y luego suma de forma incorrecta las fracciones resultantes como la suma de los numeradores sobre, al parecer, el producto de los denominadores, que también está desarrollado erróneamente.

Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante debía efectuar el cociente entre los números complejos, pero lo que hizo fue separar de manera incorrecta los sumandos de numerador y denominador, respectivamente.

Otro ejemplo



En este caso, el estudiante desarrolla correctamente la regla para hallar la derivada de un cociente pero elimina términos que son factores del sustraendo de la diferencia y del denominador; por tanto, al eliminarlos cambia la fracción completamente.

Con los errores anteriores se puede concluir que aunque los estudiantes tengan conocimiento de los temas evaluados, los errores de operaciones o errores aritméticos que cometen, afectan el procedimiento a seguir en el desarrollo de los ejercicios.

Algunos errores algebraicos son:

Ejemplo

$$x^2+5 \leq 2x+1 \leq x^2-3 \qquad H7$$
$$x^2+5-2x-1-x^2+3 \leq 0$$
$$-2x+7 \leq 0$$
$$-2x \leq -7$$
$$x \leq \frac{7}{2} \rightarrow 7/2 \geq x \rightarrow [7/2, +\infty)$$

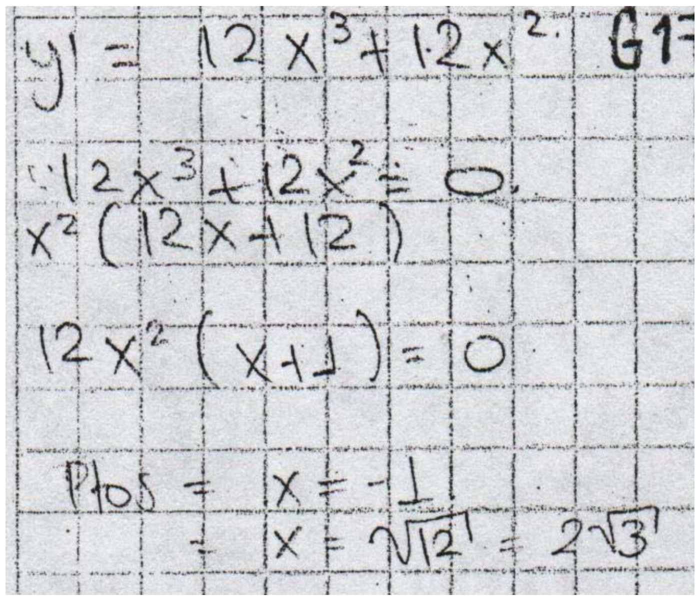
En este ejercicio el estudiante asume la desigualdad compuesta como una desigualdad sencilla y transpone todos los términos a un sólo miembro de la desigualdad. Además, multiplica los dos miembros de la desigualdad por -1 sin cambiar su sentido, lo cual es incorrecto.

Otro ejemplo

$$q = x^3 - x^2 - 2xq$$
$$q = x - 2xq$$
$$q = -xq$$

Aquí el alumno hace la diferencia entre dos términos no semejantes $x^3 - x^2$ para obtener el resultado incorrecto x para luego cometer otro error similar hallando erróneamente $x - 2xy$ igual a $-xy$.

Otro ejemplo

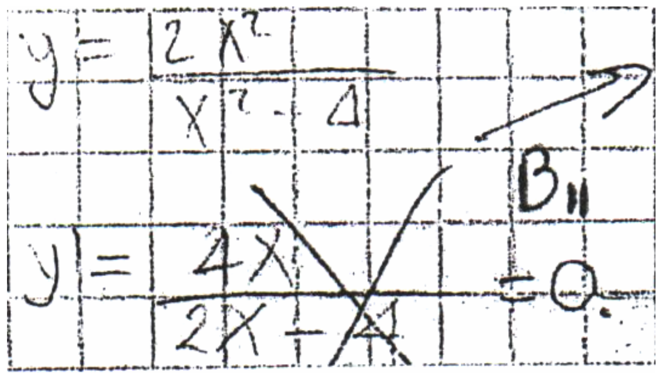


Aquí, se pedía al estudiante hallar los valores extremos de la función $y = 3x^4 + 4x^3$ para lo cual halló correctamente la derivada e igualó a 0 para hallar los valores de x donde posiblemente haya extremos, pero al factorizar para encontrar estos valores de x tomó el factor $12x^2 = 0$ transpuso el número 12 a dividir y el resultado lo asumió diferente de cero, por tanto, obtuvo un valor incorrecto al que luego le sacó la raíz cuadrada, sin tener en cuenta el $\pm$.

Los errores anteriores muestran dificultad de los estudiantes en operaciones básicas entre expresiones algebraicas lo cual incide sobre su rendimiento puesto que para ellos la matemática no es una herramienta para resolver problemas o ejercicios sino un obstáculo para avanzar a temas de niveles superiores.

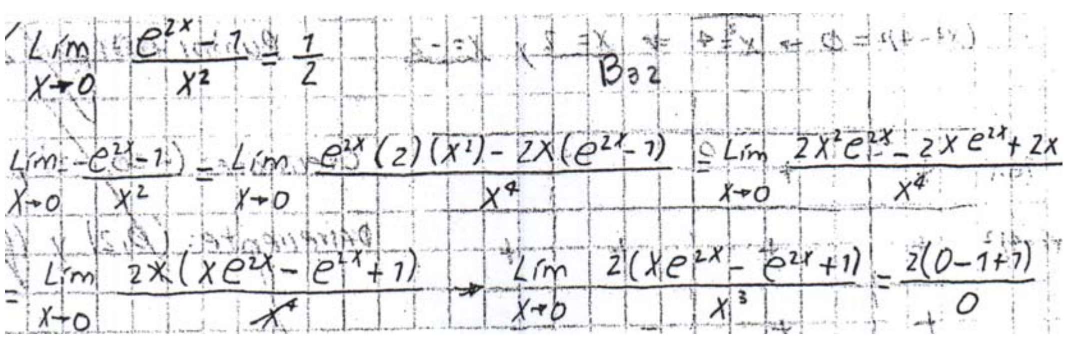
Algunos errores funcionales:

Ejemplo:



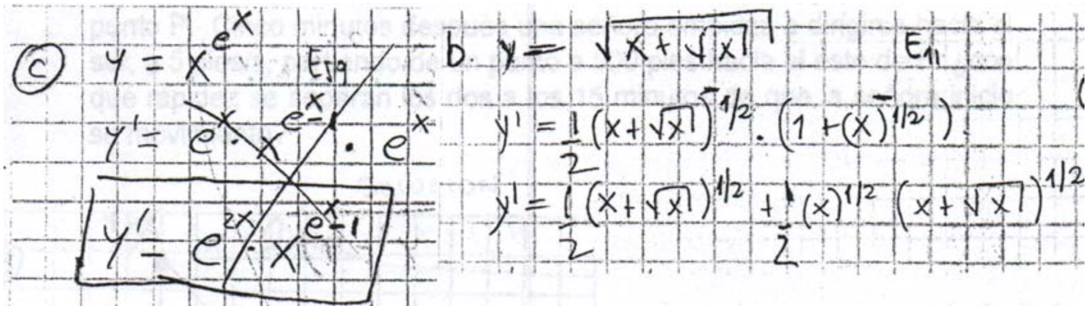
En este ejercicio el estudiante halla la derivada de un cociente como si fuera igual a la derivada del numerador sobre la derivada del denominador lo cual es incorrecto; además, comete otro error porque deriva el número 4 como si la derivada de una constante fuera igual a la misma constante.

Otro ejemplo



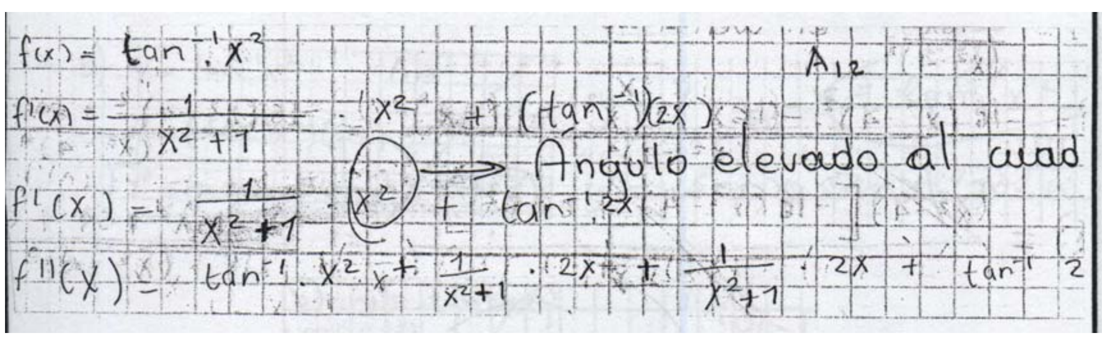
En este ejercicio el estudiante debe aplicar la regla de L'hopital para hallar el límite de la función dada, es decir, debe hallar el límite de la derivada del numerador sobre la derivada del denominador pero lo que hizo fue aplicar la regla para hallar la derivada de un cociente.

Otro ejemplo



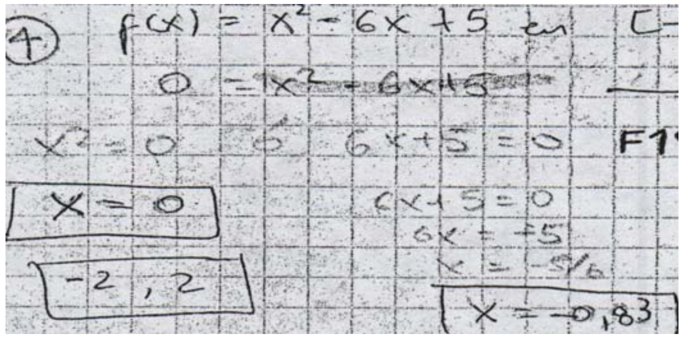
En el ejercicio de la izquierda el estudiante deriva aplicando la regla de la potencia lo cual es incorrecto puesto que ésta se usa cuando la base es variable y el exponente es constante pero no cuando tanto la base como el exponente son variables. En el ejercicio de la derecha el estudiante aplica la derivada de una potencia como corresponde pero no le resta 1 al exponente, como se ve en la corrección hecha por el profesor y al usar la regla de la cadena para derivar la función interna $x+\sqrt{x}$, que es un función compuesta, deriva el primer término de la función y el segundo lo deja igual.

Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante separa $\tan^{-1}$ de su argumento x^2 y deriva como si fuera un producto entre dos funciones. Para derivar, toma la función inversa con argumento x.

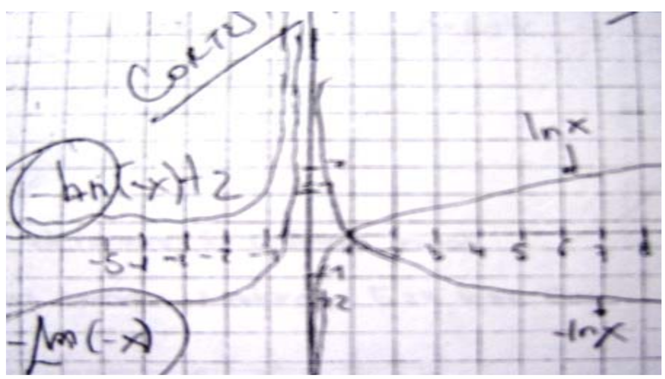
Otro ejemplo



En este ejercicio se pide al estudiante hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ para lo cual debe hallar los puntos críticos derivando la función e igualando a 0 esta derivada, pero el estudiante igualó a cero la función no la derivada, y, tomó el primer término de la ecuación que le quedó y también lo igualó a cero, lo mismo hizo con los términos restantes. El alumno muestra dificultad en la conceptualización de los valores extremos y en la comprensión del procedimiento para hallarlos así como en la operacionalización de expresiones algebraicas.

Errores Geométricos

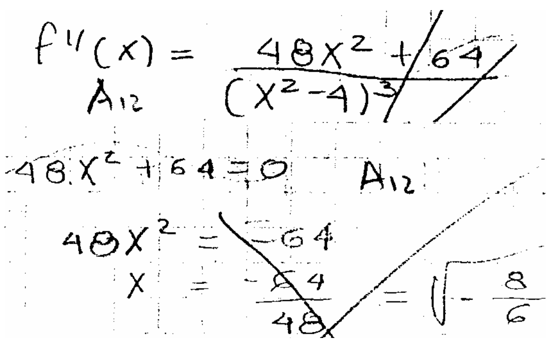
Ejemplo



En este ejercicio el estudiante debe hacer desplazamientos de la gráfica de la función $\ln x$ de acuerdo con las ecuaciones. En este caso el alumno tiene una idea aproximada de lo que debe hacerse pero no es cuidadoso para establecer las simetrías de las gráficas correspondientes. La simetría respecto del eje y entre $-\ln x$ y $-\ln(-x)$ no la establece correctamente por lo que los puntos de corte con el eje x no quedan simétricamente distribuidos; el desplazamiento hacia arriba de 2 (dos) no está claramente demarcado.

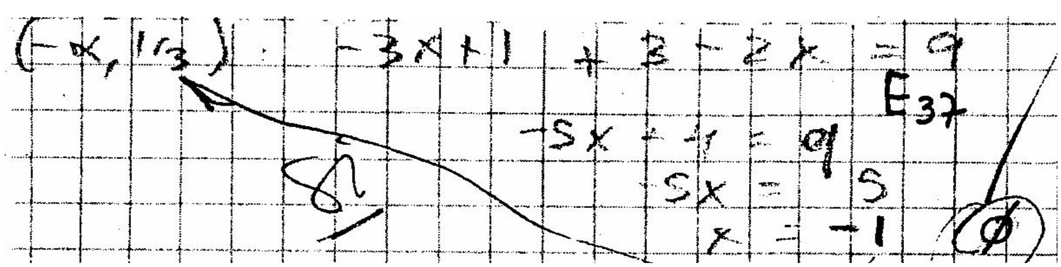
Errores de razonamiento matemático

Ejemplo



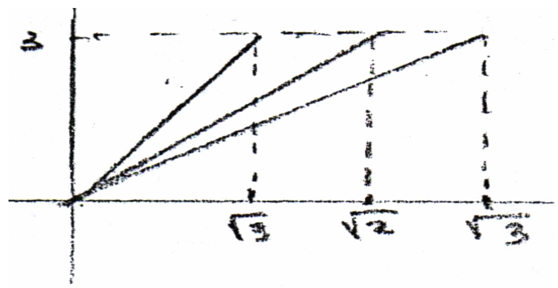
En este ejercicio el estudiante debe igualar la segunda derivada a 0 para determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión pero no hace el razonamiento correspondiente teniendo en cuenta que el cociente dado sólo será igual a 0 si el numerador es cero y que éste nunca será cero porque es una suma de cantidades positivas.

Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante halló el valor de x que satisface la ecuación pero al determinar la solución escribió que es ϕ (vacía) porque hizo un razonamiento incorrecto y no tuvo en cuenta que el número $-1 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

Otro ejemplo

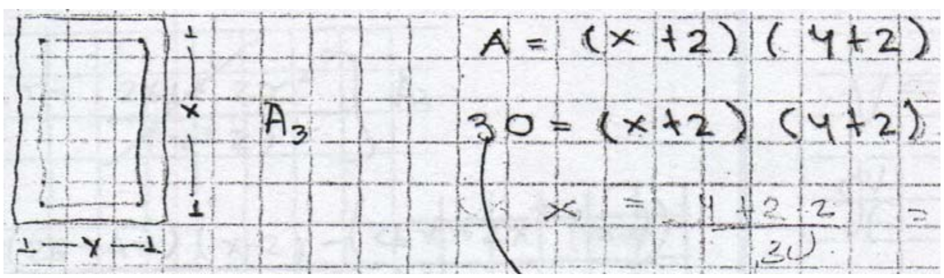


En este caso el estudiante debe representar gráficamente los números irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ para hallar el resultado gráfico del cociente $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, pero no tuvo en cuenta que tiene dos triángulos con la misma altura y diferente hipotenusa, por tanto, sus bases deben ser diferentes y ubica $\sqrt{3}$ como la medida de las bases de estos dos triángulos.

7.2.5. Errores clasificados con base en la investigación realizada por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e Invar. Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e invar hicieron una clasificación de errores por separado aunque al analizarlas se detectan coincidencias que se aprovecharon para hacer una clasificación teniendo en cuenta los errores encontrados en los parciales revisados:

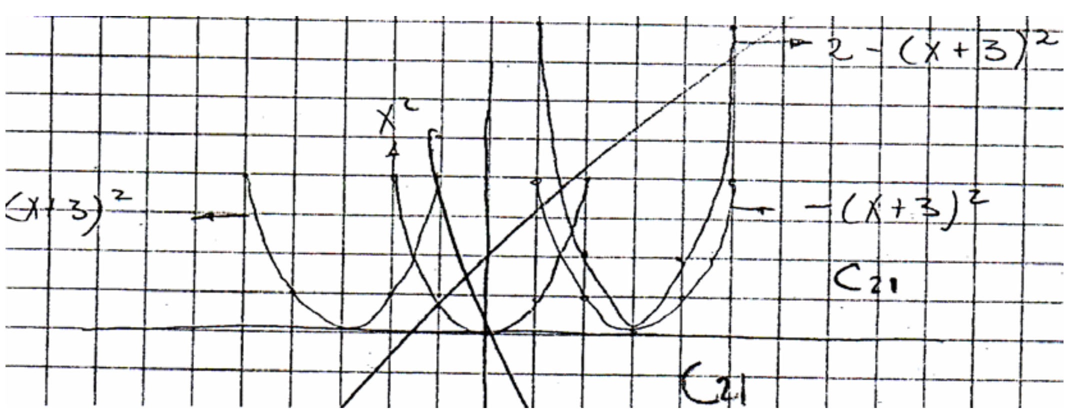
Errores tipo 1: *Inducidos por el lenguaje o la notación.* Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Se incluyen también errores por lectura incorrecta de la notación usada.

Ejemplo



En este problema el estudiante debe hacer un gráfico de la situación que para este caso corresponde a una hoja impresa un área dada, luego, la gráfica corresponde a un rectángulo cuya área impresa según la gráfica del estudiante es xy y no $(x+2)(y+2)$ como lo escribió. Además, trata de despejar x transponiendo los términos de manera incorrecta.

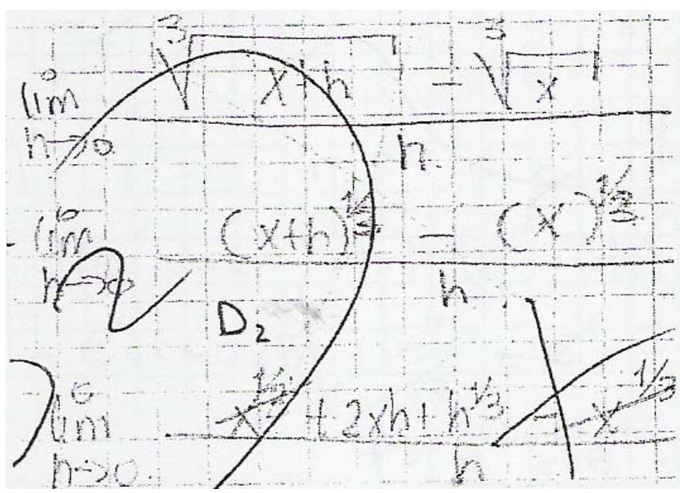
Otro ejemplo



En este ejercicio se pide graficar la función $y = 2 - (x+3)^2$ pero el estudiante hizo una traducción incorrecta de las expresiones algebraicas dadas puesto que tomó el efecto del signo – en la expresión haciendo simetría con el eje y lo cual es incorrecto porque la simetría que se presenta es con el eje x. Además, al sumar 2 unidades a la expresión alargó la gráfica y debía desplazarla verticalmente hacia arriba.

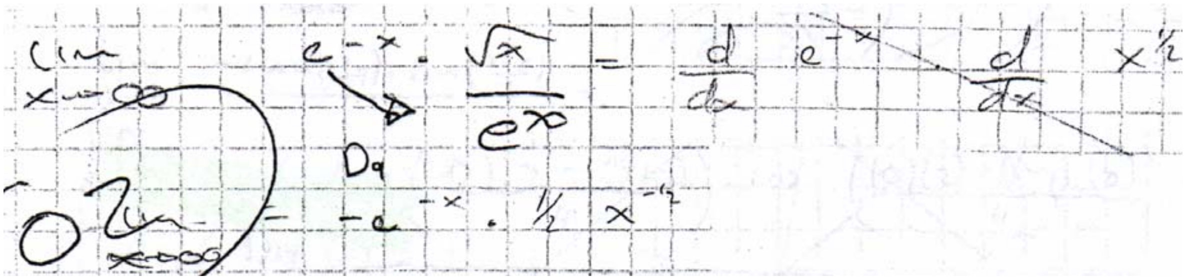
Errores tipo 2*: Teoremas o definiciones deformados.* Se incluye aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocible.

Ejemplo



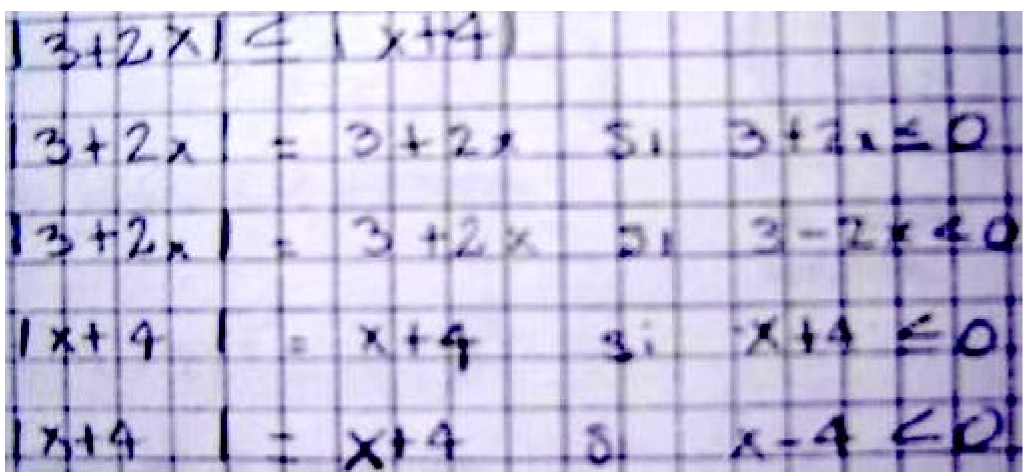
En este ejercicio el estudiante desarrolla $(x+h)^{1/3}$ como si fuera el producto notable $(x+h)^2$, es decir, usó una fórmula que recordaba pero de manera incorrecta.

Otro ejemplo



En este ejercicio el alumno deriva una función producto como el producto de las derivadas, lo cual es incorrecto. Es importante observar cómo después de cometer el error en la fórmula halló correctamente la derivada de cada término.

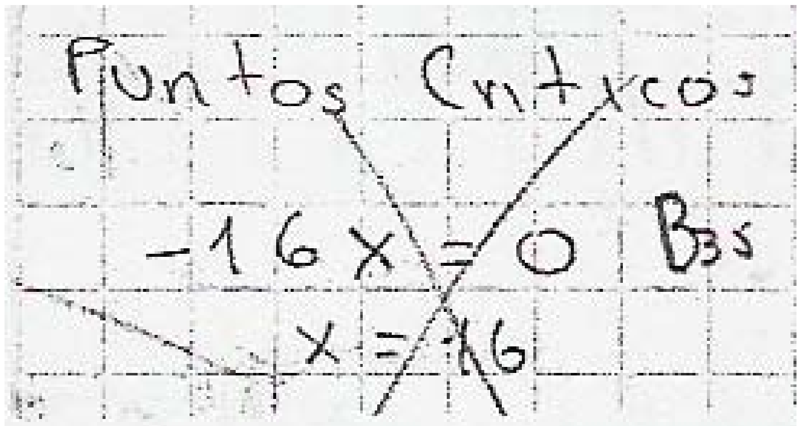
Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante trata de aplicar la definición de la función valor absoluto pero lo hace de manera incorrecta porque cambia signos sobre la condición y no sobre el resultado de aplicar la función.

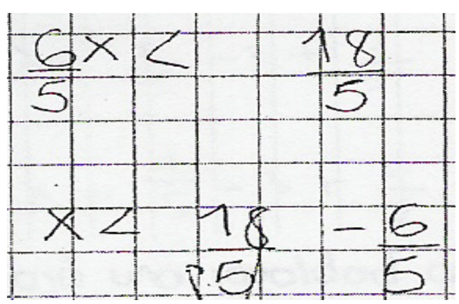
Errores tipo 3: ***Errores técnicos.*** Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Ejemplo



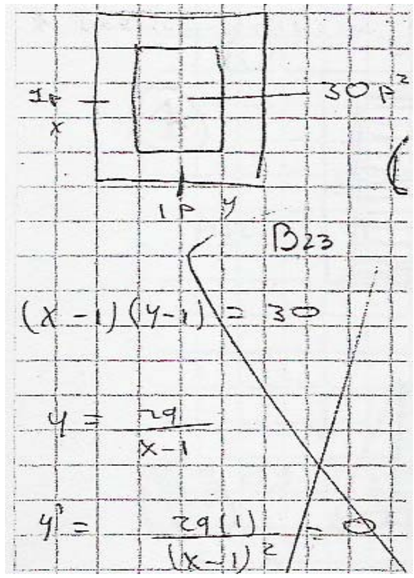
En este ejercicio el estudiante transpuso el coeficiente (-16) de x al otro miembro de la ecuación, entonces, -16 se convierte en el denominador a la derecha y con signo negativo, por tanto, el resultado sería 0 y no el 16 que obtuvo.

Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante transpone el coeficiente de x, es decir, $\frac{6}{5}$ a restar y no a dividir como debió hacerlo.

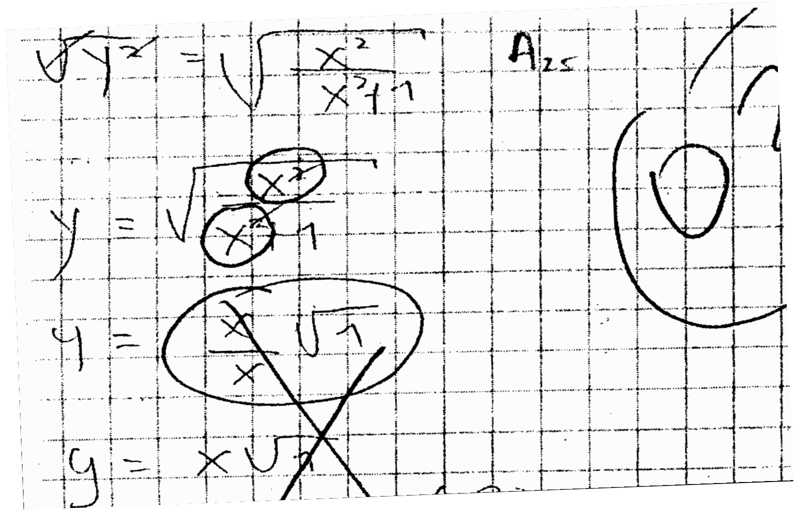
Otro ejemplo



En este ejercicio el estudiante hizo una interpretación correcta del problema y escribió el modelo matemático correspondiente a la situación pero (renglón 1 a 2) toma el número -1 del segundo factor de la izquierda y lo transpone incluso con el mismo signo, lo cual es incorrecto puesto que no se deben transponer partes de factores de un miembro de la ecuación. Al final, deriva la expresión obtenida pero también comete un error de signo.

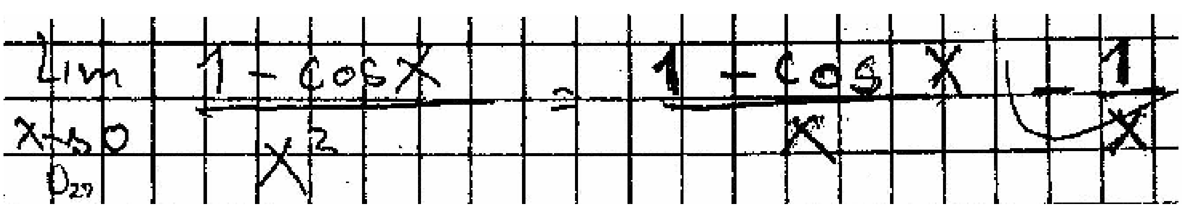
Errores tipo 4: ***Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.*** En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimientos sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimientos inadecuados de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Ejemplo



En este ejercicio el estudiante extrae por separado cada x^2 de la raíz cuadrada como si fueran factores (segundo a tercer renglón), además, escribe $\frac{x}{x} = x$ y el 1 de la expresión que estaba en el denominador lo convirtió en numerador.

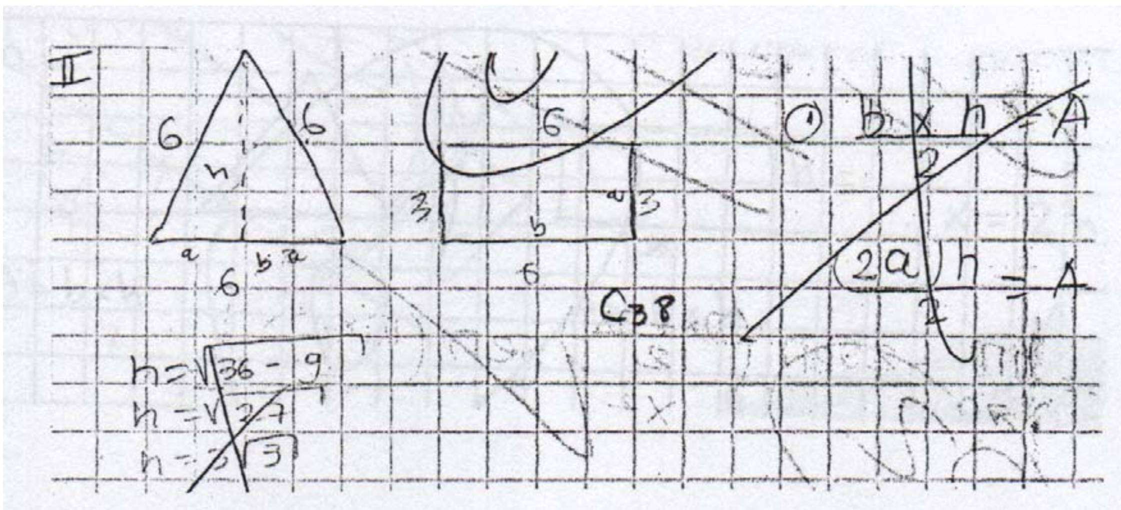
Otro ejemplo



Aquí el estudiante convierte un cociente de fraccionarios en una resta separando el denominador en dos factores lo cual es incorrecto.

Errores tipo 5: *Datos mal utilizados*. Se incluyen aquí aquellos que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien; se hace una lectura incorrecta del enunciado.

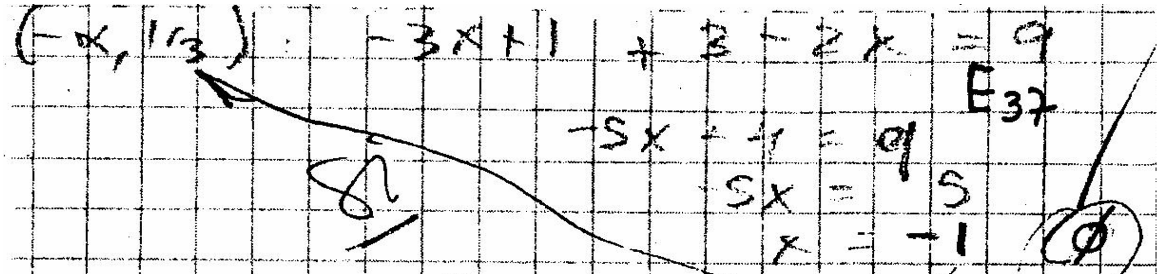
Ejemplo



En este ejercicio se pide al estudiante dividir un alambre en dos trozos para formar un triángulo y un cuadrado de tal manera que la suma de sus áreas sea mínima o máxima. Aquí el joven asignó valores constantes a las expresiones variables que deben representar los lados de las dos figuras. De acuerdo a los valores asignados asumió que el alambre se debía dividir en dos partes iguales.

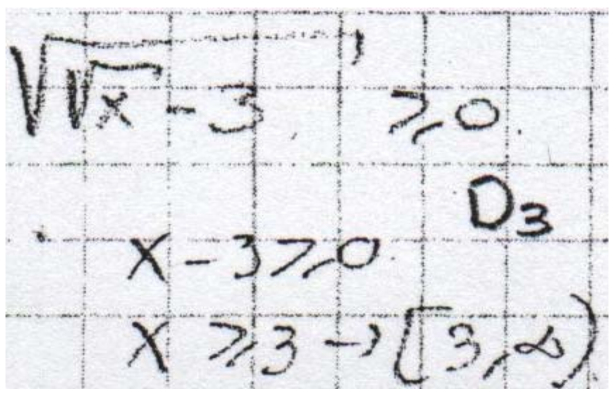
Errores tipo 6: ***Falta de verificación en la solución***. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciando el error habría podido evitarse.

Ejemplo



En este ejercicio el estudiante halló el valor de x que satisface la ecuación pero al determinar la solución escribió que es ϕ (vacía) porque hizo un razonamiento incorrecto y no tuvo en cuenta que el número $-1 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

Otro Ejemplo

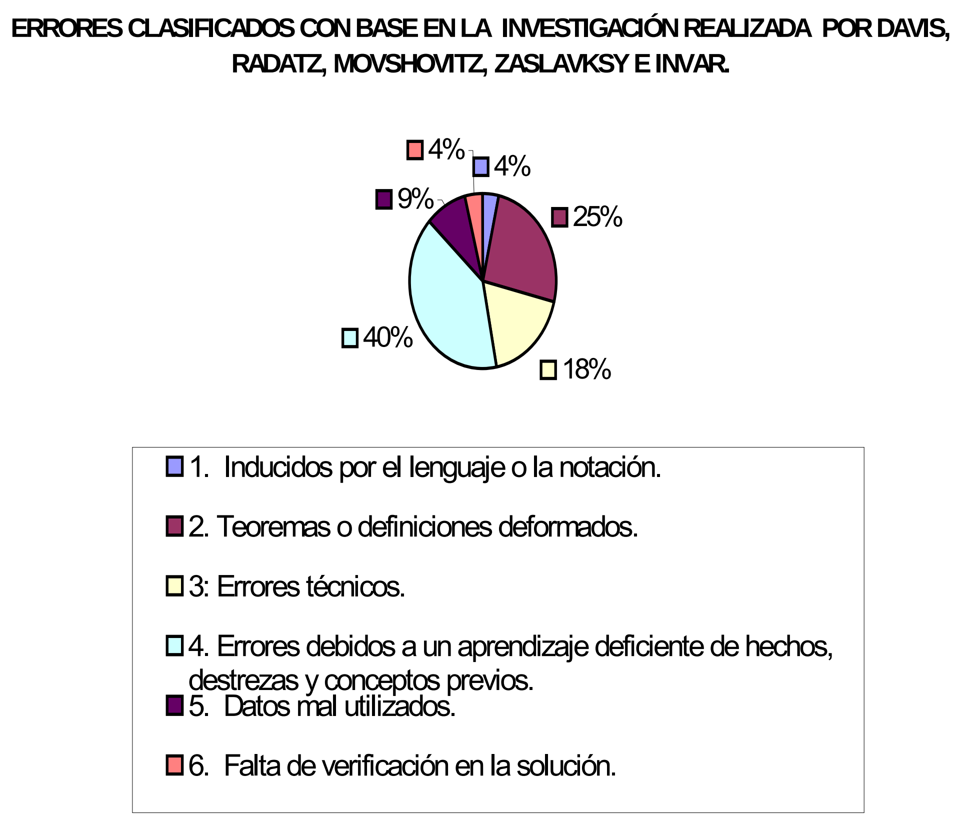


En este ejercicio el estudiante obvia en la desigualdad el radical de x interno, es decir, toma $x-3 \geq 0$ en lugar de $\sqrt{x}-3 \geq 0$. Si el estudiante hubiera confrontado la solución con los valores que puede tomar x se habría dado cuenta de que si $x=3$, $\sqrt{x}-3<0$ y la raíz externa no daría como resultado un número real.

Tabla 9. Errores Clasificados con base en la investigación realizada por Davis, Radatz, Movshovitz, zaslavksy e invar.

RESUMEN DE ERRORES CLASIFICADOS CON BASE EN LA INVESTIGACIÓN REALIZADA POR DAVIS, RADATZ, MOVSHOVITZ, ZASLAVKSY E INVAR.	
TIPOS DE ERRORES	**T0TALES**
1. Inducidos por el lenguaje o la notación	90
2. *Teoremas o definiciones deformados.*	651
3: ***Errores técnicos.***	458
4. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	1025
5. Datos mal utilizados.	235
6. *Falta de verificación en la solución*	100

Gráfica 3. Clasificación de errores con base en la investigación realizada por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e invar.



CONCLUSIONES

Con base en la figura anterior se puede concluir que la mayoría de los errores presentados por los estudiantes de Cálculo Diferencial son ***Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**,* más aún teniendo en cuenta que le siguen en orden numérico los errores debidos a ***Teoremas o definiciones deformados y los errores técnicos*** que en muchos casos se pueden incluir también dentro de esta categoría.

Los errores que se presentan con menor frecuencia son ***los Inducidos por el lenguaje o la notación,*** quizá porque las evaluaciones realizadas no abarcaron suficientes ítems que pudieran detectar este error o porque muchos estudiantes no desarrollaron las situaciones problemáticas incluidas en las pruebas, en donde quizá se hubiera podido presentar este tipo de error cuando intentara hacer la interpretación del problema y la traducción del lenguaje usual al lenguaje simbólico.

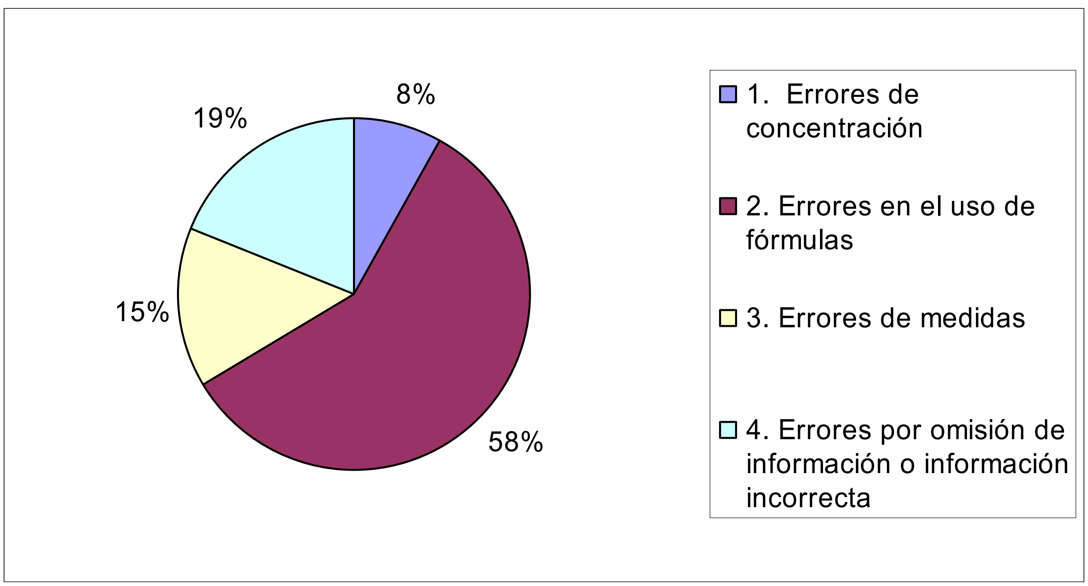
OTROS ERRORES

En menor cantidad se encontraron otro tipo de errores que aparecen discriminados en la tabla anexa, a continuación se registra el resumen de la tabla:

Tabla 10. Otros errores

Otros errores	Total
1. Errores de concentración	25
2. Errores en el uso de fórmulas	180
3. Errores de medidas	46
4. Errores por omisión de información o información incorrecta	58

Gráfica 4. Otros errores



CONCLUSIONES

El error cometido con mayor frecuencia es en el uso de fórmulas lo cual es consecuencia precisamente del manejo de teoremas, reglas y definiciones deformados como ya se había detectado en la clasificación anterior, esto puede ser consecuencia de asociaciones incorrectas entre diferentes fórmulas.

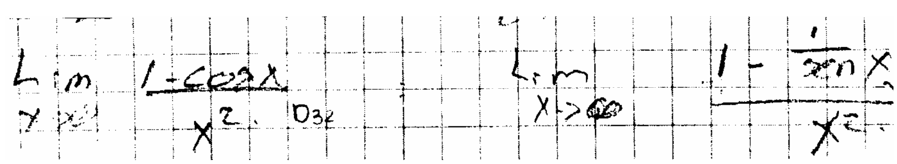
Los que se presentan con menor frecuencia son los errores por falta de concentración, aunque es difícil determinarlo teniendo en cuenta que la revisión sobre un examen de este comportamiento puede ser pura especulación.

ANÁLISIS DE OTROS ERRORES

El error encontrado con más frecuencia es en el uso de fórmulas, por tanto, se presentan a continuación ejemplos de esta categoría:

Errores en el uso de fórmulas

Ejemplo



En este ejercicio el estudiante cambió $\cos x$ por $\frac{1}{senx}$ lo cual es incorrecto.

Otro ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)}$$

Dn

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1)^2-(\cos x)^2}{x^2\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = 0$$

En este ejercicio el estudiante usó la estrategia adecuada para hallar este tipo de límite pero no cambió la expresión trigonométrica $1-\cos^2 x$ por su identidad $sen^2 x$ como debía hacerlo.

CONCLUSIONES

Con base en los errores hallados al comparar con cada uno de los tres elementos seleccionados**:** Los estándares básicos de calidad para la educación básica y media en el área de matemáticas, las competencias matemáticas básicas de ingreso a los programas de ingeniería y los errores clasificados por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e invar, se concluyó que:

Los errores más frecuentes se presentaron en los ítems de las pruebas que requerían para su solución operaciones aritméticas, algebraicas, manejo de propiedades, reglas y fórmulas, así como en aquellos que involucraban el manejo de elementos de una función tales como dominio, recorrido y gráfica.

Muchos estudiantes, al parecer, tienen idea del procedimiento a seguir cuando se enfrentan a un problema pero les falta claridad en el uso de los conceptos o herramientas matemáticas apropiadas para su desarrollo debido al aprendizaje deficiente o incompleto de fórmulas, algoritmos, reglas, teoremas, definiciones o conceptos; es decir, no saben usar los conocimientos o se sienten inseguros de ellos y por eso no los aplican.

Muchos estudiantes ingresan a los programas de Ingeniería sin los requisitos mínimos en el área de matemáticas y aunque tratan de mejorar apoyándose en los compañeros formando grupos de trabajo, la mayoría no logra superar estas falencias porque vienen acumulándolas desde sus primeros años de escolaridad.

La mayoría de ellos no tiene una disciplina de estudio y cree que con sólo la asistencia a clases, que en muchos casos no es constante, es suficiente para tener éxito en las evaluaciones.

Los estudiantes que manifestaron tener falencias en las bases matemáticas dijeron también sentir inseguridad y presentar confusión para desarrollar las evaluaciones del área.

Algunos muestran un comportamiento bastante laxo ante los resultados negativos y manifiestan su deseo de hacer cursos vacacionales o remediales para “pasar” la materia.

Algunos errores nacen en la comprensión o el procesamiento que hace el estudiante con la información que recibe, debido a la interpretación inadecuada del problema o de la situación matemática en general.

Los estudiantes no son conscientes de los errores que cometen en sus prácticas de estudio y en el desarrollo de las pruebas, realizan los procedimientos incorrectos convencidos de sus aciertos y pocas veces revisan sus errores para aprender de ellos; por esta razón, es difícil superar las dificultades que presentan si no se les hace ver estos errores.

Se encontraron errores debidos, quizá, a que el alumno memorizó el procedimiento del mismo ejercicio o problema ya resuelto u otro similar y no hizo el análisis de la situación matemática o del ejercicio dado sino que trató de seguir un procedimiento memorizado de forma insuficiente.

Algunos estudiantes resuelven ejercicios automáticamente como si se tratara de un procedimiento similar al que ya usaron para resolver problemas de otro contexto. Por esta razón, cuando se indaga por la solución de un nuevo ejercicio, se confunde y no logra desarrollarlo debido a la relación incorrecta que hace de lo que ya había aplicado y la nueva información.

Revisando los resultados de estudios hechos en España, Estados Unidos y Rusia encontramos similitud en algunos errores encontrados con lo cual podemos afirmar que sin importar la región o el país donde se haya realizado el estudio los errores y sus causas son similares.

La mayoría de los errores son sistemáticos y no ocasionales, se cometen continuamente debido a la no corrección y falta de atención en el mismo.

RECOMENDACIONES

Con base en las conclusiones obtenidas de las entrevistas y de la revisión de los exámenes se recomienda:

Desarrollar estrategias de nivelación con los estudiantes que muestren falencias en los requisitos matemáticos mínimos de ingreso a un programa de Ingeniería para evitar el fracaso en los cursos iniciales del área y la desmotivación y deserción por razones académicas.

Desarrollar talleres para invitar a los estudiantes al manejo de métodos de estudio, de comprensión de lectura y de grupos colaborativos en los que deba aportar y ser integrante activo no simplemente receptor del trabajo de los demás.

El aprendizaje como actividad inherente a la vida está expuesto a los errores que como seres humanos podemos cometer. Pero debemos quitarle la carga negativa y hacer que el alumno lo vea como una oportunidad de retroalimentación y aprendizaje.

Desarrollar los contenidos del área aplicándolos más a situaciones problemáticas de tal manera que el estudiante pueda asimilar mejor los temas.

Las reglas, teoremas y definiciones, se deben usar en diferentes contextos y tipos de problemas para que el estudiante los asimile bien y no las aprenda referidas a un concepto específico que no le permita recuperarlas de su memoria cuando las necesite para otras aplicaciones.

Ver el error como un elemento que obstaculiza el aprendizaje futuro y que debe corregirse para mejorar la adquisición de conocimientos nuevos. El objetivo principal de la corrección debe ser lograr el aprendizaje.

Invitar a los estudiantes a que reorganicen sus conocimientos para que tengan claro cuáles son sus fortalezas y sus falencias y trabajen en ellas para mejorar.

Se recomienda a los docentes corregir con los alumnos los errores presentados en cada evaluación para que el estudiante aprenda del error.

Buscar estrategias que permitan solucionar y prever los errores.

Como se demostró en la investigación, en general, los estudiantes presentan el mismo tipo de errores, por tanto, sin desconocer las dificultades individuales, se pueden incluso prever y aplicar estrategias de retroalimentación generales.

Desarrollar estrategias para que el estudiante deba realizar trabajo independiente.

BIBLIOGRAFÍA

ALVAREZ P., Carlos A y otros. Identificación de las competencias matemáticas básicas del ingeniero. XXV Reunión Nacional de Facultades de Ingeniería.

BACHELARD, Gaston. (1984). *La formación del espíritu científico*. 12º Ed. Buenos Aires: Siglo XXI.

BIGGE, Morris L, Teorías de aprendizaje para maestros. Primera edición. Editorial Trillas, México, 1996.

BLANCO PICADO, Ana Isabel. Instituto Cervantes en Varsovia. El error en el proceso de aprendizaje. En: http://www.cuadernoscervantes.com/art_38_error.html.

CELY, Carmen Luz y otros, Imaginarios sobre la evaluación, EN: Revista CEDEDUIS, UIS. Universidad Industrial de Santander. 2004.

DE ZUBIRÍA S. Julián. Los Modelos Pedagógicos. Ed. Fundación Alberto Merani, Bogotá, 1994.

Evaluación de los aprendizajes. En Encuentro Internacional sobre políticas, investigaciones y experiencias en evaluación educativa: consecuencias para la educación. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2004.

GARCIA O, Gloria, CASTIBLANCO A, María G y VERGEL C, Rodolfo. Prácticas de evaluación e las clases de matemáticas en la educación Básica. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005.

GARCIA, Jesús Nicasio. Manual de Dificultades de Aprendizaje, Ed. Nancea, S. A. de Ediciones, Madrid, 1999.

KILPATRICK, Jeremy; GOMEZ, Pedro Y RICO Luis. "Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

LOPEZ R, Ana Dulcelina. "Deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo Diferencial en estudiantes de ingeniería de una universidad privada". UNAB, 2005.

MALDONADO G. Miguel Ángel, Las competencias, una Opción de vida, Ed. Ecoe Ediciones, Bogotá, 2002.

MINISTERIO DE ECUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas. Lineamientos Curriculares. 1998. Bogotá. MEN.

MORENO A, Luis. y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas. En: Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá 2002.

NAGHI N, Mohammad. Metodología de la Investigación. Segunda Edición. Editorial Limusa, México, 2002.

NOT, Louis. Las pedagogías del conocimiento. Ed. Fondo de Cultura económica, Bogotá, 1998.

NOVAK. Joseph D. Conocimiento y aprendizaje. Ed. Alianza Editorial, Madrid, 1998.

OCHOA F., Rafael. Evaluación, Pedagógica y cognición. Ed. McGrawHill, Bogotá, 1999.

OCHOA F., Rafael. Hacia una pedagogía del conocimiento. Ed. McGrawHill, Bogotá, 2000. p XIV.

ORMROD, Jeanne Ellis. Aprendizaje Humano, Ed. Pearson, Prentice Hall, cuarta edición, Espana, 2005.

RAMIREZ R, Eliseo. "Errores cometidos por los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un problema de variación en matemáticas" En: Matemática Educativa: Fundamentos de la matemática universitaria. Ed. Escuela Colombiana de Ingeniería. Bogotá, 2004.

RODRÍGUEZ, Mauro. Aprendizaje Creativo Continuo, Ed. Trillas, Primera edición, España, 2006.

SANDOVAL C, Carlos. Investigación Cualitativa, ARFO Editores e Impresores Ltda. Bogotá, 2002.

TAMAYO V. Alfonso. Cómo identificar formas de enseñanza. Ed. Magisterio, Bogotá, 1999.

TOBÓN T., Sergio. Formación Basada en competencias. Primera edición. Ecoe Ediciones, Bogotá, 2004.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, Competencias y Proyecto Pedagógico. Unibiblos, Bogotá, 2001.

VASCO U. Carlos Eduardo. Didáctica de las Matemáticas, artículos selectos. Ed. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2006.

ANEXOS

Anexo A: Entrevista aplicada a estudiantes con resultados “malos”

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE CIENCIA BÁSICAS

Investigación: Propuesta Pedagógica de Nivelación en el Área de matemáticas para los estudiantes de primer semestre de ingenierías.

La Escuela de Ingenierías y Administración preocupada por el mejoramiento académico de sus estudiantes está desarrollando el proyecto “Propuesta de nivelación en el área de Matemáticas para los estudiantes de primer semestre de ingenierías”.

Uno de los objetivos de la investigación es indagar sobre el razonamiento realizado en la solución incorrecta de las pruebas realizadas a los estudiantes del primer semestre del 2006, en la asignatura Cálculo Diferencial. Para lograr este objetivo le solicito me conceda la siguiente entrevista:

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

PROFESOR CON EL QUE ESTÁ MATRICULADO______________________________
PROGRAMA ACADÉMICO A QUE PERTENECE__________________________
SEMESTRE ACADÉMICO QUE CURSA_______________________________
SEXO: H___ M________________
COLEGIO DEL QUE PROVIENE________________
NOTA DEL AREA DE MATEMATICAS EN EL EXAMEN ICFES__

PREGUNTAS:

1. ¿Cómo le fue en el primer parcial de cálculo diferencial?.

2. ¿A qué atribuye los resultados en el primer parcial de cálculo diferencial?

3. ¿Cómo se preparó para el primer parcial de cálculo diferencial? (estrategias?)

4. ¿Los resultados obtenidos en la evaluación corresponden a su esfuerzo?

5. ¿Qué cambiará de esa preparación para presentar el segundo parcial?

6. ¿Cuál es su forma de afianzar lo visto en la clase?

7. ¿Cuáles son sus preferencias en cuánto a la forma de estudiar (en grupo, individual, con asesoría de profesor particular…)?

8. ¿Qué tiempo de estudio le dedicó para la preparación de dicho parcial?

9. ¿Cuando usted se presentó al parcial, ¿cómo se sintió (seguro de sus conocimientos, tranquilo,…)?

10. ¿Cuándo recibió el parcial de Cálculo que pensó (yo sé lo que están preguntando, ah! esto lo se hacer porque ya hice varios ejercicios similares, no tengo ni idea de lo que pregunta el profesor, esto es fácil, no me acuerdo de nada, me bloqueé, eso no lo estudié…)?

11. ¿Cuándo usted realizó el procedimiento para responder cada una de las preguntas de la evaluación de Cálculo Diferencial, ¿cómo se sintió (seguro de cada paso, Inseguro)?

12. ¿Con qué tipo de pregunta se siente mejor: en dónde debe resolver una situación problemática, dónde debe sólo efectuar operaciones, dónde debe seguir un algoritmo específico (procedimiento)?

13. ¿Qué cree que se le facilita más, entender la pregunta o efectuar el procedimiento para contestarla?

14. ¿En qué temas cree que tiene mayor facilidad y en cuáles mayor dificultad: fraccionarios, potenciación, radicación, factorización, productos notables, geometría, trigonometría, resolución de problemas…?

15. ¿De dónde cree que provienen las dificultades que tuvo con la solución a las preguntas del parcial de Cálculo Diferencial? (Fallas en temas base para tomar el curso de cálculo diferencial, falta de estudio, falta de tiempo, falta de comprensión de los temas…)

16. ¿Cómo le ha ido en la nota de acompañamiento? (Quices trabajos etc.
17. Con qué regularidad asiste a clase?

18. ¿Qué temas del área de matemáticas vistos en el bachillerato cree que inciden más sobre los temas de cálculo diferencial?

19. ¿Cómo era su rendimiento académico en el área de matemáticas durante su bachillerato?

20. ¿Cuáles son las diferencias entre el trabajo en el área de matemáticas en el colegio y ahora en la universidad? ¿Lo ha afectado el cambio?

21. ¿Cómo cree usted que puede superar las dificultades que ha presentado en este curso?

Anexo B: Entrevista aplicada a estudiantes con resultados “buenos”

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE CIENCIA BÁSICAS

Investigación: Propuesta Pedagógica de Nivelación en el Área de matemáticas para los estudiantes de primer semestre de ingenierías.

La Escuela de Ingenierías y Administración preocupada por el mejoramiento académico de sus estudiantes está desarrollando el proyecto “Propuesta de nivelación en el área de Matemáticas para los estudiantes de primer semestre de ingenierías”.

Uno de los objetivos de la investigación es indagar sobre el razonamiento realizado en la solución correcta de las pruebas realizadas a los estudiantes del primer semestre del 2006, en la asignatura Cálculo Diferencial. Para lograr este objetivo le solicito me conceda la siguiente entrevista:

ENTREVISTA A ESTUDIANTES

PROFESOR CON EL QUE ESTÁ MATRICULADO______________________________
PROGRAMA ACADÉMICO A QUE PERTENECE__________________________
SEMESTRE ACADÉMICO QUE CURSA_______________________________
SEXO: H___ M________________
COLEGIO DEL QUE PROVIENE_________________
NOTA DEL AREA DE MATEMATICAS EN EL EXAMEN ICFES__

PREGUNTAS:

1. ¿Estuvo usted antes matriculado en la asignatura cálculo diferencial o una similar?
2. ¿Cómo le fue en la asignatura cálculo diferencial?
3. ¿A qué atribuye los resultados en esta asignatura?
4. ¿Cómo se preparó para las evaluaciones de cálculo diferencial? (estrategias?)
5. Qué tiempo de estudio dedicó para la preparación de cada parcial?
6. ¿Los resultados obtenidos en las evaluaciones corresponden a su esfuerzo?
7. ¿Cuál es su forma de afianzar lo visto en la clase?
8. ¿Cuáles son sus preferencias en cuánto a la forma de estudiar (en grupo, individual, con asesoría de profesor particular…)?
9. Cuando usted se presentó a los parciales, ¿cómo se sintió (seguro de sus conocimientos, tranquilo,…)?
10. Cuándo recibía el parcial de Cálculo que pensaba (yo sé lo que están preguntando, ah! esto lo se hacer porque ya hice varios ejercicios similares, no

tengo ni idea de lo que pregunta el profesor, esto es fácil, no me acuerdo de nada, me bloqueé, eso no lo estudié…)?

11. Cuándo usted realizó el procedimiento para responder cada una de las preguntas de las evaluaciones de Cálculo Diferencial, ¿cómo se sintió (seguro de cada paso, Inseguro)?
12. ¿Con qué tipo de pregunta se siente mejor: en dónde debe resolver una situación problemática, dónde debe sólo efectuar operaciones, dónde debe seguir un algoritmo específico (procedimiento)?
13. ¿Qué cree que se le facilita más, entender la pregunta o efectuar el procedimiento para contestarla?
14. En qué temas cree que tiene mayor facilidad y en cuáles mayor dificultad: fraccionarios, potenciación, radicación, factorización, productos notables, geometría, trigonometría, resolución de problemas…?
15. Con qué regularidad asiste a clase?
16. Qué temas del área de matemáticas vistos en el bachillerato cree que inciden más sobre los temas de cálculo diferencial?
17. ¿Cómo era su rendimiento académico en el área de matemáticas durante su bachillerato?
18. ¿A qué atribuye su éxito con las asignaturas del área de matemáticas?
19. Cuáles son las diferencias entre el trabajo en el área de matemáticas en el colegio y ahora en la universidad? ¿Lo ha afectado el cambio?

20. ¿Cómo estudia una asignatura del área de matemáticas y cómo una de otra de área, como español, humanidades, etc.?

21. ¿Qué tipo de aprendizaje cree que tiene usted en la asignatura cálculo diferencial, mecánico, analítico, o memorístico?

22. ¿Qué tipo de errores comete con mayor frecuencia?

23. Usted como observador dentro del grupo ¿A qué atribuye las dificultades que presentaron algunos compañeros con la asignatura Cálculo Diferencial?

24. De haber sabido las dificultades que iban a presentar ¿Qué consejo les hubiera dado? Y hoy, ¿Qué consejo les da para que superen estas dificultades?

Anexo C: Tablas con tabulación por pregunta de la información obtenida en las entrevistas a los estudiantes con "malos" y "Buenos" resultados
Estudiantes de "malos" resultados.

Preliminares	
Colegio de procedencia	
Público	1
Privado	11
Fuera de la zona metropolitana	6
Promedio ICFES	
30-40	4
41-50	4
Mas de 50 (máx.=65)	10
Programa que cursa	
Ing. Mecánica	3
Ing. Industrial	8
Ing. Civil	1
Ing. Electrónica	5
Ing. Ambiental	1

1. Como le fue en el 1º parcial de Cálculo?	
Mal	15
Bien	1
Regular	2

2. A qué atribuye los resultados en el primer parcial?	
No lo sabe expresar	5
No entiende Confusión	2
Poco estudio	10
malas bases	1

3. Como se preparó para el primer parcial?	
Estudio con otros	8
Repaso los apuntes	6
Revisó varios libros	4

4. Los resultados obtenidos en la evaluación corresponden a si esfuerzo?	
Si	1
No	17

5. Que cambiará de esa preparación para presentar el segundo parcial?	
No cambia	2
Estudiar mas	10
Dedicarse mas en clase y fuera de ella	6

6. Formas de afianzar lo visto en clase	
Estudio los ejercicios del cuaderno	13
Estudio de varios libros	2
Repaso con otra persona	3

7. Cuales son sus preferencias en cuanto a la forma de estudiar?	
Individual	2
Asesoría de un profesor	4
En grupo	12

8. Que tiempo dedica a preparar el parcial?	
Menos de 6 horas	5
Menos de 1 día	8
Mas d e1 día	5

9. como se sintió al presentarse, al recibir el parcial	
Nerviosos	12
Ansioso	2
tranquilo	4

10. Cuando ya tiene el parcial en sus manos	
Decepcionado	2
Dudoso	3
Confundido	10
Seguro	3

12. Con que tipo de pregunta se siente mejor?	
Donde debe resolverse una situación matemática	0
Donde debe efectuarse solo operaciones	16
Donde debe seguir un algoritmo específico	2

13. Que se le facilita mas?	
Entender la pregunta	1
Hacer el proceso	17

14. temas de mayor dificultad	
Aritmética(operaciones)	16
No cromo de algún tema	2

15. temas de mayor dificultad	
Todos	4
Trigonometría	11
Geometría	1
factorización	8
Elaboración de gráficos	1
razón de cambio	5

16. De donde provienen las dificultades	
Poca asistencia a clase	4
Malas bases	12
Métodos inadecuados de estudio	5
Falta de estudio	6

17. Como le ha ido en la nota de acompañamiento	
Bien	
Regular	
Mal	

17'. Con que regularidad asistes a clases	
Buena	10
Regular	4
poco	4

18’. Que temas del área de matemáticas vistos en bachillerato inciden mas sobre el cálculo	
Trigonometría	8
factorización	8
Logaritmos	1
Física	1
Límites	3
Geometría	5

19. Como era su rendimiento en matemáticas en el bachillerato	
mal	1
A veces bueno, a veces malo	2
Bueno	15
Excelente	0

20. Como puede superar las dificultades	
Mejorando la auto confianza	2
Cambiar el método de estudio	3
Estudiar mas	13

Estudiantes con "buenos" resultados

Preliminares

Colegio de procedencia	
Público	6
Privado	9
Fuera del área metropolitana	13
Promedio ICFES	
30-40	2
41-50	5
Mas de 51	17
Programas que cursan	
Ing. Mecánica	3
Ing. Ambiental	5
Ing. Civil	4
Ing. Electrónica	3
Ing. Industrial	13

1. Estuvo antes matriculado en la asignatura?	
No	26
Si (vienen de la UIS)	2

2. Como le fue en la asignatura?	
Excelente	1
Bien	23
Esperaba más	4

3. A que atribuye los resultados?	
Asistencia regular a clase	5
Buen profesor y atención	3
Perseverancia y estudio constante	10
Gusto por las matemáticas	1
Buenas bases y atención a clase	4
Métodos de estudio acertados	5

4. Estrategias para preparar evaluaciones?	
Repasar los apuntes de clase y transcribir ejercicios	10
Explicar a los compañeros	10
Estudia con otra persona (profesor, amigo, particular)	5
Consultas extra-clases al profesor	6

5. Que tiempo de estudio dedicó a la preparación del parcial?	
Menos de un día	18
De 1 día a 2 días	7
Mas de 2 días	3

6. Los resultados corresponden al esfuerzo?	
Si (vienen de la UIS)	20
Esperaba más	7
No	1

7. Forma de afianzar lo visto en clase	
Repasar los apuntes de clase y transcribir ejercicios	18
Preguntar al profesor (dudas)	5
Estudio en grupo (dudas)	3
Explicarle al compañero	7

8. Preferencias en cuanto a la forma de estudiar	
Grupo	6
Individual	19
Profesor particular	3

9. Como se sintió cuando se presentó al parcial?	
Al principio nervioso pero luego tranquilo(a)	6
Muy relajado y tranquilo(o)	10
Seguro(a)	12

10. Cuando empezó a leer el parcial que sintió?	
Me pareció difícil	4
Desconocimiento	5
Tranquilidad	13
Examinó el parcial (deseo indagar)	6

11. Cuando realizó el procedimiento de cada pregunta?	
Seguro(a)	26
Inseguro	2

12. Tipo de pregunta con la que se siente mejor	
Resolver situación problema	12
Resolver solo operaciones	10
Seguir un algoritmo específico	2
Todas	4

13. Que se le facilita mas?	
Entender la pregunta	8
Efectuar el procedimiento	14
Ambas	4
Depende de la situación	2

14. Temas con mayor facilidad	
Todos	6
Algebra	16
Geometría	2
Aritmética	2
Resolución de problemas	2

14´. Temas con menor dificultad	
Trigonometría	18
fraccionarios	4
Geometría	2
Algebra	1
Resolución de problemas	3

15. Con que regularidad asistes a clase?	
Siempre	20
Casi siempre	6
Tuvo menos de 3 fallas	2

16. Temas de bachillerato con más incidencia en el Cálculo Diferencial	
Factorización	8
Límites y derivadas	6
Trigonometría	6
Desigualdades	1
Geometría	2
Todo lo visto	8

17. Como era su rendimiento académico en el bachillerato (matemáticas)	
Excelente	12
Bien	15
A veces bueno a veces no	1

18. A que atribuye su éxito en las asignaturas del área de matemáticas?	
Dedicación	10
Actitud frente a la asignatura y al docente	8
Buenas bases	8
Habilidades innatas	6
Concentración en clase	4

19. Diferencias en el trabajo (matemático) Colegio a la Universidad	
Mayor exigencia en la Universidad	8
Mayor exigencia en el colegio	2
Ritmo (Más suave en el colegio)	10
En la U cada quien se las arregla solo	4
Más responsable y criterio en la U.	6

20. Cómo estudia una asignatura de Matemáticas y como una de otra área	
Otra exige mas lectura	10
Otra es menos exacta	4
Otra es menos práctica	12
Otra exige mas interpretación	6

21. Aprendizaje de Cálculo Diferencial	
Mecánico	14
Analítico	4
Memorístico	6
Mezcla	6

22. Que tipo de errores comete con mayor frecuencia?	
Por distracción, descuido (signos, fórmulas, calculadora)	18
Aplicación de procesos correctos (despejes, operaciones)	6
Falta de preparación (Tema equivocado)	4

23. Dificultad de los otros	
falta de dedicación	6
Falta de interpretación (gráfica, enunciado)	2
Malas bases	4
Desinterés por la clase	6
Ambiente de clase (aclarar dudas)	4
Mecanización sin aprendizaje	2
Método de estudio	8

24. Consejo a otros para superar dificultades	
Buscar asesoría	8
Practicar en casa	6
Mayor dedicación	2
Asistir y atender a clase	4
Métodos adecuados	4
Fijar las bases	4

Anexo D: Carta remitida a los estudiantes invitándolos al taller "aprender del error"

Bucaramanga, 24 de abril de 2006

Estudiante

La Escuela de Ingenierías y Administración en su preocupación por el mejoramiento académico de sus estudiantes está desarrollando el proyecto "Propuesta Pedagógica para Nivelación en el área de matemáticas de los estudiantes de primer semestre de ingenierías".

Uno de los objetivos de la investigación es la revisión de los errores cometidos por los estudiantes en las evaluaciones parciales de la asignatura Cálculo Diferencial. Con los resultados de ésta revisión se realizará el taller "APRENDER DEL ERROR" con el fin de socializarlos y sugerir a cada estudiante su corrección.

Por tanto, lo invito a participar en el taller que iniciará el próximo viernes 28 de abril a las 12:00m, en el aula G302.

Espero contar con su presencia, que será importante para su mejoramiento académico y el desarrollo de esta investigación.

Graciela Morantes Moncada
Docente del Área de Matemáticas
UPB-Bucaramanga

Anexo E: Programa de cálculo Diferencial

NOMBRE DEL CURSO

CÁLCULO DIFERENCIAL

CODIGO DEL CURSO

0001

CRÉDITOS

5

TIEMPO DE DEDICACIÓN

5	0	0	5

OBJETIVOS

Desarrollar la capacidad de análisis del estudiante, en el planteamiento y solución de ejercicios y problemas según el área de la especialidad.
Fomentar el interés del alumno por el estudio del cálculo diferencial, como una herramienta necesaria para adquirir conocimientos mas avanzados en áreas que requieren de su aplicación.
Establecer relación entre el cálculo y otras áreas de la ingeniería, mecanizando ejercicios y problemas prácticos.

CONTENIDO

SEMANA	TEMAS
1	CONJUNTO UNIVERSAL DE LOS NÚMEROS. Conjunto de los Reales. Axiomas de cuerpo cerrado. Teoremas de Cuerpo (Repaso de Álgebra en lo que se refiere a las operaciones.
	Intervalos-Desigualdades. De grado 1 o lineales. De grado 2 o

SEMANA	TEMAS
2	cuadráticas. De grado superior. Factorización y combinación de signos. Desigualdad racional o fraccionaria. Desigualdad Irracional. Aplicaciones Generales- Combinaciones. Valor Absoluto. Concepto Geométrico. Definición. Teoremas y Aplicaciones. Solución sobre la recta real.
3	Números Complejos. Definición y Propiedades. Gráfica Rectangular. Plano Compleja.
4	RELACIONES Y FUNCIONES. Relaciones. -Par Ordenado. –Igualdad. –Equivalencia. Funciones(Dominio, recorrido, simetrías e interceptos). Funciones lineales. Funciones cuadráticas. Funciones Polinómicas. Funciones Racionales. Funciones Irracionales. Funciones Valor Absoluto.
5	Funciones Trascendentales. -Funciones Trigonométricas. Funciones Exponenciales y Logarítmicas- -Funciones Hiperbólicas
7	LIMITES Y CONTINUIDAD. Introducción a los límites. Estudio rigurosos sobre los límites. Teoremas sobre límites.
8	Límites Trigonométricos. Límites en el infinito y límites infinitos. Límites Indeterminados.
9	Continuidad de funciones. Continuidad Evitable e Inevitable
10	Derivada. Problema de la recta tangente. Definición de derivada. Reglas de derivación. Derivada de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Regla de la cadena.
11	Derivadas de orden superior. implícita. Derivación
12	Derivada de las funciones trascendentales. Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas. Diferenciales y aproximaciones.
13	APLICACIONES DE LA DERiVADA. Tasas relacionadas
14	Máximos y mínimos. Monotonía y Concavidad. Problemas de máximos y mínimos.
15	Elaboración de gráficas. Teorema del valor medio. Teorema de Rolle y de l’Hopital.

Anexo F: Tabla de errores clasificados con base en los estándares de calidad de la educación básica y media en el área de matemáticas

ESTANDARES DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS CON ERRORES; ESTUDIANTES DE:	P1	P2	P3	P4	P5	P6	T0TALES
PRIMER PARCIAL							
A2.Utilizar números racionales, en su notación fraccionaria o decimal, para resolver problemas en contextos de medidas, cocientes, razones, proporciones y porcentajes.					15	15	30
A'1. Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.				2	1	4	7
A"5. Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.		1	1		7		9
A6. Justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.	31	27	28	39	32	5	162
A'2 Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	9	3	37	17	18	33	117
A8. Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	57	6	0	0	0	0	63
A5. Resolver y formular problemas utilizando propiedades fundamentales de la teoría de números.	3	3					6
A'4. Identificar y utilizar la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas que lo requieran y para resolver problemas.	38						38

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
A6. Justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.	0	50	19	4	12	1	86
A'2 Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	6			3	5		14
A8. Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	2	1					3
A9. Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	19						19
A'4. Identificar la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas que lo requieran.			16				16

ESTANDARES DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMETRICOS CON ERRORES; ESTUDIANTES DE:	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**TOTALES**
PRIMER EXAMEN PARCIAL							
B"3. Resolver problemas donde se usen las propiedades geométricas de las cónicas de manera algebraica.						10	10
B"2Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesianas y otros (polares, esféricos,...).	27	6				5	38
B7. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.		4					4
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
B"4. Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.	58						58
TOTALES	85	10	0	0	0	15	110
TOTALES	165	91	101	65	90	58	570

ESTANDARES DEL PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS CON ERRORES; ESTUDIANTES DE:	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**TOTALES**
PRIMER EXAMEN PARCIAL							
C"3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.				32			32
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
C"2. Resolver y formular problemas que involucran magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración y la densidad media.				5			5
C"3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.					11		11
C3. Calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.						5	5
C4. Establecer relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.			4			1	5
C'1.Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.	20	19					39
C'2 Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	1						1
TOTALES	21	19	4	37	17	6	98

ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS CON ERRORES; ESTUDIANTES DE:	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**TOTALES**
PRIMER EXAMEN PARCIAL							
E'2.Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	70	96	127	39	80	63	475
E'8.Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.	56	35		3	24	16	134
E'9. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.	43	94		12	28		177
E5. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	105	38	48	24	40	5	260
E'3. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.	13	8					21
E2. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).		3	6				9
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
E'2.Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	119	73	38	15	46	5	296
E'8.Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.		31		2	11	16	60
E'9. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.			15				15
E5. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.		12				6	18

E”2.Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea y como valor de la pendiente de la recta tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	150	152	159	31	48	50	590
E”1 Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	42	15			21	6	84
E’7. Interpretar y utilizar las diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una recta que representa en el plano cartesiano en situaciones de variación				3		5	8
E’4. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas	6	32	30	6	2		76
E”3. Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.			12	3	20		35
E1. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).						1	1
TOTALES	560	539	411	126	312	159	2259

Anexo G: Situación presentada con la resolución de problemas

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	TOTALES
No intentó resolver la situación problemática (Al parecer ni siquiera leyó el problema).	17	48	9	5	8	10	97
Intentó hacer un gráfico de la situación pero asignó valores constantes y variables incorrectamente y no escribió ecuaciones (leyó pero probablemente interpretó mal el problema).	33	28	17	10	3	8	99
Realizó un gráfico y escribió ecuaciones pero cometió errores diversos en la solución e interpretación del problema.	80	44	21	9	13	35	202
Resolvió correctamente el problema.	4	8	15	2	2	1	32
TOTALES	134	128	62	26	26	54	430

Anexo H: Tabla de errores más frecuentes clasificados con base en las competencias matemáticas básicas de ingreso a los programas de ingeniería

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES DE:	P1	P2	P3	P4	P6	P7	TOTALES
1. Errores numéricos o de operaciones:	91	51	84	42	121	46	435
➢ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$	6						6
➢ Transpuso términos de manera incorrecta.	5	1	14				20
➢ Al resolver la raíz cuadrada no tiene en cuenta el + ó -.	48			7	7	15	77
➢ Elimina sumandos en un cociente.	1						1
➢ Aplica de manera incorrecta las propiedades de los logaritmos.	17						17
➢ Resta exponenciales de bases distintas.	1						1
➢ Confunde recíproco con inverso aditivo.	1						1
➢ Halla el cuadrado de una potencia como el producto de bases y exponentes.	1						1
➢ Errores de operaciones varias (aritméticos).	4	4	14	18	62	6	108
➢ No intercepta intervalos cuando resuelve una desigualdad.		1		2	1	11	15
➢ Errores de signos.				10	24	1	35
➢ Mezcla la parte real y la parte					1		1

imaginaria del número complejo.							
➢ No hace diferencia entre la forma trigonométrica y compleja del número.					1		1
➢ $y=\sqrt{x+4}+3 \Rightarrow y^2=x+7$.					1		1
➢ No usa el producto por la conjugada para eliminar raíces en el denominador						7	7
SEGUNDO PARCIAL							
➢ Errores aritméticos.	7	26	40	2	18	4	97
➢ Uso Incorrecto de signos.		11					11
➢ No hace el análisis del signo de numerador y denominador para dar el signo del cociente (suma de cuadrados es positiva).		8					8
➢ Aplicó de manera incorrecta las propiedades de los logaritmos correspondientes, o no las aplicó donde era necesario.			16	3			19
➢ Canceló sumandos del numerador y del denominador de un cociente					2		2
➢ Aplica de forma incorrecta la propiedad distributiva.					1		1
➢ Altera la expresión debido a que multiplica pero no divide por ella.					1		1

➢ Transpone términos de manera incorrecta.					2	2	4
2. Errores algebraicos	67	103	155	58	86	63	532
PRIMER PARCIAL							
➢ Factorizó de manera incorrecta.	7					8	15
➢ √x+5 + √x = √2x + 5.	1						1
➢ No Halló el intervalo admisible para la existencia de la raíz cuadrada (desigualdad).	39	2					41
➢ Reduce términos no semejantes	1					2	3
➢ Comete errores al resolver una ecuación exponencial: igualó incorrectamente los exponentes.	13			3			16
➢ Al resolver una ecuación exponencial cambia la variable por un número.	5						5
➢ Errores algebraicos.		78	108	21	5	14	226
➢ Halla de manera incorrecta los extremos del intervalo solución de una desigualdad.			6				6
➢ Aplica de manera incorrecta la definición de valor absoluto en una ecuación.			18	17	9	18	62

➢ halla una solución incorrecta de la ecuación y no verifica su validez.			13				13
➢ Tienen dificultad en el manejo del sentido de la desigualdad.		3			5		8
➢ Tiene dificultad para hallar la intersección de la gráfica con los ejes coordenados.				6	11	4	21
➢ Halla solución de una desigualdad como si fuera un número y no un intervalo.				8		1	9
➢ Dificultad en el procedimiento para resolver una desigualdad.					2		2
➢ Tiene dificultad con el procedimiento para hallar el dominio y el rango de una función.					31	1	32
➢ Toma sólo una parte de una desigualdad compuesta para resolverla.						2	2
➢ Aplica la definición de valor absoluto pero no la aplica para resolver la desigualdad dada o reemplaza de manera incorrecta.						6	6
➢ Eliminó el valor absoluto elevando al cuadrado la ecuación.						3	3
SEGUNDO PARCIAL							
➢ Errores de álgebra.	1	20	10		11	4	46
➢ Consideró los puntos de intersección como puntos de separación de los intervalos.				3			3
➢ Factorizó de manera incorrecta.					12		12
3. Errores funcionales	406	293	213	100	165	87	1264

PRIMER PARCIAL							
➢ Dibuja la gráfica de una función sin tener en cuenta su dominio o rango. Ó Dibuja sin la información requerida.	84	25	6		2	5	122
➢ Confunde el procedimiento para hallar el dominio y el recorrido con el usado para hallar interceptos.	2						2
➢ Grafica incorrectamente ó no hizo la gráfica.	31	7		7	7	15	45
➢ No da la ecuación a partir de la gráfica.	51						51
➢ Halla de manera incorrecta el ángulo para encontrar las raíces sextas; de -1; ó no da la forma trigonométrica del número complejo.	25	6			12	5	48
➢ Aplica erróneamente la propiedad conmutativa en la composición de funciones.	14	1			5		20
➢ No evalúa la función compuesta en el valor pedido.	3						3
➢ Asume la composición de funciones como el producto de funciones.	4	2			1		7
➢ Concepto erróneo de composición de funciones.	3		5				8
➢ Halló $f^{-1} = 1/f$.		1	1		1		3
➢ No halló la inversa de la función			12		1		13

➢ No comprobó f^{-1} o tuvo errores al tratar de comprobar.			5				5
➢ Halló f^{-1} cambiando *x* por *y* y *y* por *x*.			3				3
➢ No utilizó el algoritmo apropiado para hallar el límite.		7					7
➢ No tiene claro cuando la discontinuidad es removible o irremovible. En algunos casos utiliza límites indiscriminadamente y en otros no usa.				31			31
➢ Tiene dificultades con el concepto de límites unilaterales.				10			10
➢ Tomó las funciones con dominio dividido como si fueran funciones distintas en cada parte del dominio.				2			2
➢ Da la solución de un límite en términos de una indeterminación.				8			8
➢ Cancela términos o multiplica por variables que son factores de coeficientes y de ángulos de funciones trigonométricas simultáneamente.				1			1
➢ Tiene dificultad con el procedimiento para hallar el dominio y el rango de una función.					31	1	32
➢ No identifica la función lineal.						1	1
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
➢ Aplica de manera incorrecta la regla de L`hopital.	42	14				13	69

➢ Aplica las reglas de derivación de manera incorrecta o no las aplica. Aplica las reglas de derivación de funciones trigonométricas de manera incorrecta.	64	79	122	9	42	12	328
➢ Efectúa operaciones entre ángulos de funciones coeficientes y las mismas funciones.	33		3		7		43
➢ Concepción errónea de que la función no puede interceptar la asíntota y por tanto no está definida en ese punto.		31					31
➢ Usó estrategias no adecuadas o no correctas para calcular el límite.		2			8		10
➢ No tuvo en cuenta las asíntotas para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad o cometieron errores al hallarlas.		12					12
➢ Toma $\tan^{-1} x = 1/\tan x$.		10					10
➢ Usa proporciones para relacionar la altura y el radio del cono pero toma alguna de las dos como constantes.		8					8
➢ Toma información variable como constante.		6	9				15
➢ No usó derivadas en los problemas de aplicación de derivadas.		6	1	1			8
➢ Aplica las reglas de derivadas sobre funciones interpretadas de manera incorrecta.			9				9

➢ Errores al determinar la concavidad o los signos de la derivada en cada intervalo.			9				9
➢ Gráfica de la función de manera errónea.			5	2	12	9	28
➢ No aplicó derivación logarítmica, obteniendo así derivadas incorrectas.				8			8
➢ Derivó con respecto a la variable *y* y no con respecto a la *x.*				6			6
➢ No evalúa en el punto para determinar la pendiente o evalúa de manera incorrecta.					5	1	6
➢ Realizaron la gráfica de algunos puntos pero no se aproximaron lo suficientemente a cero.					3		3
➢ Tomó el dominio de la función incorrecta respecto a la expresión dada cuando la variable se aproximan a un valor.					1		1
➢ Aunque tomó valores próximos a cero por la derecha y por la izquierda no interpretó la tendencia que obtuvo como resultado.					3		3
➢ Determina el punto crítico pero no los intervalos de crecimiento y concavidad de forma correcta.					4		4
➢ Halla correctamente los intervalos pero determina de forma incorrecta si la función crece o decrece.					5		5

➢ No usó derivadas para hallar puntos críticos o para determinar si f es creciente o decreciente para hallar la pendiente.					2	2	4
➢ No tiene claro el procedimiento para hallar el recorrido de una función.						5	5
➢ No hace el análisis de problemas de optimización que involucren funciones básicas.	50	76	26	15	13	18	198
4. Errores Geométricos	74	70	20	17	31	7	219
PRIMER PARCIAL							
➢ No da la ecuación a partir de la gráfica.	51						51
➢ No da la forma trigonométrica del número complejo.					8		8
➢ Tiene dificultad para hallar las asíntotas ó no tiene en cuenta las asíntotas para dibujar la gráfica.		28	20	3			51
➢ Ubicó las asíntotas verticales como horizontales y viceversa.		3					3
➢ Comete errores en los desplazamientos de las gráficas o cambios de las gráficas (multiplica por una escala).		35		14	23		72
➢ Grafica los números imaginarios de manera incorrecta.						4	4
➢ No grafica las secciones cónicas o las grafica de forma incorrecta.						2	2
➢ Confunde las ecuaciones de la cónica.						1	1

SEGUNDO PARCIAL							
➢ No usó proporciones para relacionar los lados de los triángulos semejantes que sirven como gráfica de la situación.	20	4					24
➢ Las ecuaciones obtenidas no corresponden con la gráfica.	3						3
5. Errores de razonamiento matemático	55	99	48	17	36	20	275
PRIMER PARCIAL							
➢ Cree que el cero del numerador indetermina el cociente.	1						1
➢ No tiene claro el procedimiento para desarrollar una demostración.	4						4
SEGUNDO PARCIAL							
➢ No hace el análisis de problemas de optimización que involucren funciones básicas.	50	76	26	15	13	18	198
➢ No hace el análisis del signo de numerador y denominador para dar el signo del cociente (suma de cuadrados es positiva).		11					11
➢ No tuvo en cuenta las asíntotas para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad o cometieron errores al hallarlas.		12					12
➢ Hizo un gráfico para representar la situación pero asignó solo constantes sobre dicho gráfico; en algunos casos			16				16

solo intentó hacer un gráfico.							
➢ Parece conocer la respuesta pero con el procedimiento usado no llega a ésta.			6				6
➢ interpreta erróneamente la pregunta.				2			2
➢ Cambió de senx a cosx sin ninguna justificación.					1		1
➢ Para hallar el límite usa una tabla de valores arbitrarios que no se aproximan al número dado					10		10
➢ Aunque tomó valores próximos a cero por la derecha y por la izquierda no interpretó la tendencia que obtuvo como resultado.					3		3
➢ Determina el punto crítico pero no los intervalos de forma correcta.					4		4
➢ halla correctamente los intervalos pero determina de forma incorrecta si la función crece o decrece.					5		5
➢ No interpretó el ejercicio y halló lo que no le pedían.						1	1
➢ Planteó correctamente el problema pero no reemplazó los datos.						1	1

TABLA RESUMEN DE ERRORES MAS FRECUENTES CLASIFICADOS CON BASE EN LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS BÁSICAS DE INGRESO A LOS PROGRAMAS DE INGENIERIA							
TIPO DE ERRORES	P1	P2	P3	P4	P6	P7	TOTALES
1. Errores numéricos o de operaciones:	109	51	88	35	139	36	458
2. Errores algebraicos	66	103	155	47	46	61	478
3. Errores funcionales	333	213	187	89	200	69	1091
4. Errores Geométricos	70	73	20	17	31	10	221
5. Errores de razonamiento matemático	55	99	48	17	36	20	275

Anexo I: Tabla de otros errores

1. Errores por falta de concentración	***1***	***9***	***0***	***3***	***10***	***1***	***24***
PRIMER EXAMEN PARCIAL							
➢ Copió mal el enunciado.	1	1			8		10
➢ Errores cometidos por distracción.				1			1
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL							
➢ Copió mal el enunciado o cambió la información de un paso a otro.		8		2	2	1	13
2. Errores en el uso de fórmulas	127	33	0	5	13	2	180
➢ Usó la fórmula de manera incorrecta para hallar las raíces de -1.	2				1		3
➢ Usó de manera incorrecta la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.					8		8
➢ Incorrecta la identidad trigonométrica o no la usó.		12		4			16
➢ $\text{sen } x / x \neq \text{sen}^2 x / x$				1			1
SEGUNDO PARCIAL							
➢ Aplica identidades de manera incorrecta.	42	2			2		46
➢ Usa fórmulas incorrectas	83	19			2	2	106
3. Errores de medidas	25	6	3	3	4	5	46
PRIMER PARCIAL							
➢ Halla de manera incorrecta el ángulo para encontrar las raíces sextas.	25	6			4	5	40
SEGUNDO PARCIAL							
➢ No hizo conversión de unidades.			3				3
➢ No tiene en cuenta unidades o las confunde.				3			3

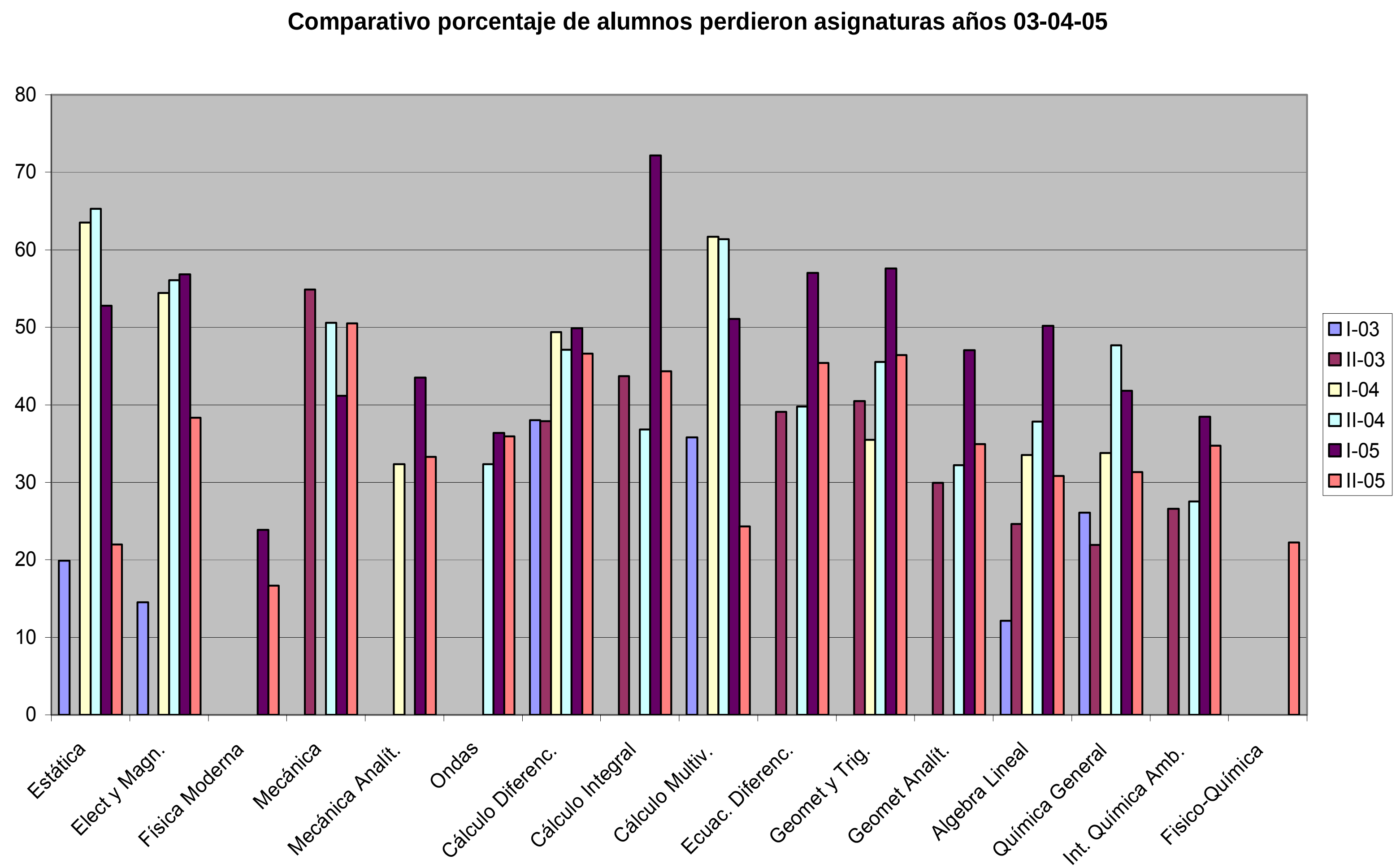
4. Errores por omisión de información o información incorrecta	42				5	11	58
SEGUNDO PARCIAL							
➢ Asumió información incorrecta en el problema dado.	42					11	53
➢ Omite información dada al resolver el problema.					5		5

RESUMEN TABLA DE OTROS ERRORES							
1. Errores de concentración	1	9	0	3	11	1	25
2. Errores en el uso de fórmulas	127	33	0	5	13	2	180
3. Errores de medidas	25	6	3	3	4	5	46
4. Errores por omisión de información o información incorrecta	42	0	0	0	5	11	58

Anexo J: Tabla de errores clasificados con base en la investigación realizada por Davis, Radatz, Movshovitz, Zaslavksy e invar.

TIPOS DE ERRORES	P1	P2	P3	P4	P5	P6	T0TALES
PRIMER PARCIAL							
1. Inducidos por el lenguaje o la notación	6	9			32	13	60
2. ***Teoremas o definiciones deformados.***	213	122	74	10	8	22	449
3. ***Errores técnicos.***		72	24	13	72	8	189
4. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	70	40	126	27	113	21	397
5. Datos mal utilizados.		43	28	9	26	17	123
6. ***Falta de verificación en la solución***			6		1		7
SEGUNDO PARCIAL							
1. Inducidos por el lenguaje o la notación	7	1	1		7	14	30
2. ***Teoremas o definiciones deformados.***	27	23	104	8	30	10	202
3. ***Errores técnicos.***	56	43	52	52	41	25	269
4. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	222	147	58	94	58	49	628
5. Datos mal utilizados.	11	48	18	6	21	8	112
6. ***Falta de verificación en la solución***	59	3	19		4	8	93

Anexo K. Comparativo porcentaje de alumnos que perdieron asignaturas en los años 2003, 2004 y 2005



Anexo L: Estudio de deserción

DISTRIBUCIÓN DE ESTUDIANTES QUE DESERTARON POR RAZONES ACADÉMICAS Y CAUSAS DESCONOCIDAS EN LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS EN LA UPB SECCIONAL BUCARAMANGA COHORTES INCOMPLETAS 2001 – 2004

COHORTE	NÚMERO DE ALUMNOS POR PROGRAMA ACADÉMICO																						NÚMERO TOTAL DE ALUMNOS QUE DESERTARON
	INGENIERÍA ELECTRÓNICA		INGENIERÍA INDUSTRIAL	INGENIERÍA CIVIL			INGENIERÍA AMBIENTAL		ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS		INGENIERÍA MECÁNICA		INGENIERÍA INFORMÁTICA		PSICOLOGÍA		COMUNICACIÓN SOCIAL		DERECHO		GENERAL UPB		
	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	
2001	27	11	18	18	25	12	24	10		4					17	18	14	14			125	87	212
2002	16	10	21	12	20	8	18	12	3	2	18	9			9	23	3	7			108	83	191
I - 2003	19	15	17	15	11	3	15	7	1	5	15	8	8	3	13	23	16	18			115	97	212
II - 2003	6		4	5																	10	5	15
I - 2004	7	5	11	8	5		4	4	5	3	3	2	4	2	4	6	3	5	2	4	48	39	87
II - 2004		1	3	5											1	4					4	10	14
TOTAL	75	42	74	63	61	23	61	33	9	14	36	19	12	5	44	74	36	44	2	4	410	321	731
Porcentaje (%)	64,10	35,90	54,01	45,99	72,62	27,38	64,89	35,11	39,13	60,87	65,45	34,55	70,59	29,41	37,29	62,71	45,00	55,00	33,33	66,67	56,09	43,91	

Nota Aclaratoria

1) DESERCIÓN POR RAZONES ACADEMICAS

D.C.D. DESERCIÓN POR CAUSA DESCONOCIDA

2). En el estudio de las cohortes aquí señaladas, se realizó el seguimiento hasta el primer semestre de año 2005

Fuente: Estudio de deserción detallado. Agosto 31 de 2005

COHORTES INCOMPLETAS 2003 – 2006

COHORTE	NÚMERO DE ALUMNOS POR PROGRAMA ACADÉMICO																						NÚMERO TOTAL DE ALUMNOS QUE DESERTARON
	INGENIERÍA ELECTRÓNICA		INGENIERÍA INDUSTRIAL		INGENIERÍA CIVIL		INGENIERÍA AMBIENTAL		ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS		INGENIERÍA MECÁNICA		INGENIERÍA INFORMÁTICA		PSICOLOGÍA		COMUNICACIÓN SOCIAL		DERECHO		GENERAL UPB		
	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	D.R.A.	D.C.D.	
I - 2003	22	18	19	22	11	5	19	8	2	5	17	10	8	7	13	30	16	19			127	124	251
II - 2003	10	1	9	8																	19	9	28
I - 2004	10	8	16	17	5	1	7	7	5	5	6	5	4	3	8	12	3	9	2	4	66	71	137
II - 2004	2	2	9	12											2	7					13	21	34
I - 2005	10	2	7	17	7	5	1	4	1	2	2	5	3	4	5	10	8	8	2	4	46	61	107
II - 2005	3	2	5	9	2	3	6	2	3	4	1	2	6	3	1	5	4	2		1	31	33	64
I- 2006	2	2	10	8	3	3	2	5	2	1	4	1	4	2	2	3		1		2	29	28	57
TOTAL	59	35	75	93	28	17	35	26	13	17	30	23	25	19	31	67	31	39	4	11	331	347	678
Porcentaje (%)	62,77	37,23	44,64	55,36	62,22	37,78	57,38	42,62	43,33	56,67	56,60	43,40	56,82	43,18	31,63	68,37	44,29	55,71	26,67	73,33	48,82	51,18	100,00

Nota Aclaratoria

1) D.R.A.: DESERCIÓN POR RAZONES ACADEMICAS

D.C.D.: DESERCIÓN POR CAUSA DESCONOCIDA