

Ecuaciones Algebraicas Difusas

Martha Elisa Porras Cortés

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2022

Ecuaciones Algebraicas Difusas

Martha Elisa Porras Cortés

Trabajo de grado para optar al título de Matemática

Director

Rafael Antonio Castro Triana

Doctorado en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

Primeramente a mi Jesús nazareno por permitirme alcanzar este logro tan importante en mi vida, que a pesar de tantos obstáculos, caídas, lágrimas y momentos en los que quise desertar de mi carrera él estuvo ahí con su infinito amor y misericordia ayudándome en todo momento para poder culminar mi carrera profesional y por ende mi trabajo de grado.

Mi hermosa madre María Helena Cortes Serrano por ser el motivo de mi inspiración para elegir y culminar mi carrera profesional, mi motor y el amor de mi vida más grande. Todo esto es por ella y para ella.

Mi papito Jorge Eliecer Porras (q.e.p.d) por declarar desde mi nacimiento que yo sería una mujer exitosa, que sería el tesoro más grande de mi madre, que alcanzaría todo lo que me propusiera y que yo cumpliría los suyos de él, de mi madre y míos.

Don Juan Francisco Girartá (q.e.p.d) que desde que me conoció confió en mí y en mis conocimientos diciéndome que sería una de las mejores matemáticas.

Mi nonito adoptivo Roberto Gil Martínez por su amor, por consentirme desde que llego a mi vida siendo una niña, después de la muerte de mi padre.

Mi primo hermano Franklin Duarte Cortés porque desde niña me protegía, jugaba conmigo, me consentía, cuando me hice mujer y entre a estudiar mi carrera profesional siempre me dio ánimo y consejos para no desfallecer en mi carrera.

Estoy infinitamente agradecida por este hermoso momento uno de los más significativos y felices de mi vida. A cada uno de ustedes que mencione anteriorme mil gracias. Los amo.

Agradecimientos

Agradezco a mi mamita por sus esfuerzos para sacarme adelante desde niña, pagar mis estudios y ayudarme a cumplir este sueño y muchos más.

Un reconocimiento y agradecimiento especial a mi director de tesis y maestro Dr. Rafael Antonio Castro Triana no solo por dirigir mi proyecto de grado, si no por estar disponible para mí para ayudarme a estudiar cuando se me presentaban dudas de algunas asignaturas que vi en el trascurso de mis estudios.

Mis compañeros, amigos y colegas Jefferson Pinzón, Jorge Martínez, Camilo Cansino y otros que quizás se me olvidó mencionar por dedicar con paciencia y cariño tantas horas de estudio conmigo preparando los exámenes de las asignaturas.

Gracias a cada uno de ustedes y en su honor me comprometo a dar lo mejor de mí siempre como profesional.

CONTENIDO

	pág.
Introducción	9
1. Preliminares	11
1.1. Conceptos Fundamentales	11
1.2. Aritmética difusa basada en el principio de extensión de Zadeh	15
2. Operaciones difusas basadas en la traslación	27
2.1. Ejemplos de operaciones básicas basadas en TPN	29
3. Números difusos aproximados	48
3.1. Relaciones tipo 1 y tipo 2	48
3.2. Números difusos aproximados	54
3.3. Álgebra de las operaciones basadas en TPN	55
4. Solución de las ecuaciones algebraicas difusas	60
4.1. Solución de la ecuación difusa $A + X = B$	60
4.2. Solución de la ecuación difusa $AX = B$	70
4.3. Solución de la ecuación difusa $AX + B = C$	76
4.4. Solución de la ecuación difusa $AX^2 = B$	92
4.5. Solución de la ecuación difusa $AX^2 + B = C$	102
4.6. Comparación de ejemplos numéricos.	105
5. Conclusiones	126

Resumen

Título: Ecuaciones Algebraicas Difusas *

Autor: Martha Elisa Porras Cortés **

Palabras Clave: Aritmética difusa, Ecuación difusa, Principio de extensión (PE), Traslación usando el promedio del soporte (TPN).

Descripción: Con el desarrollo de la teoría de números difusos, y su aplicación, aparece la solución de ecuaciones con parámetros difusos. Los métodos clásicos, que involucran el principio de extensión y los alfa niveles, en la solución de ecuaciones difusas son restrictivas; porque muy a menudo no hay solución o se deben colocar condiciones muy fuertes en las ecuaciones para que tengan solución. Estos hechos nos motivó a estudiar ecuaciones difusas.

En este trabajo analizamos las operaciones aritméticas difusas basadas en la traslación usando el promedio del núcleo, hecho que denotamos con TPN, para resolver ecuaciones difusas del tipo: $A+X = B$, $AX = B$, $AX + B = C$, $AX^2 = B$, y $AX^2 + B = C$.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Antonio Castro Triana, Doctorado en Matemáticas.

Abstract

Title: Fuzzy Algebraic Equations *

Author: Martha Elisa Porras Cortés **

Keywords: Fuzzy Arithmetic, Fuzzy Equation, Principle of Extension (EP), Translation using Average Support (TPN).

Description: With the development of fuzzy number theory, and its application, the solution of equations with fuzzy parameters appears. Classical methods, involving the extension principle and alpha levels, in solving fuzzy equations are restrictive; because very often there is no solution or very strong conditions must be placed on the equations for them to have a solution. These facts motivated us to study fuzzy equations.

In this work we analyze the fuzzy arithmetic operations based on the translation using the average of the kernel, a fact that we denote with TPN, to solve fuzzy equations of the type: $A + X = B$, $AX = B$, $AX + B = C$, $AX^2 = B$, y $AX^2 + B = C$.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Antonio Castro Triana, Doctorado en Matemáticas.

Introducción

Varios investigadores han propuesto diferentes métodos para resolver ecuaciones difusas: Dubois y Prade 1984¹; Sánchez 1984²; Buckley 1992; Wasowski 1997; Biacino y Lettieri 1989; Jiang 1986³; Buckley y Qu 1990⁴; Kawaguchi y Date 1993⁵; Zhao y Govind 1991⁶; Wang y Ha 1994⁷; Klir y Yuan 1995⁸; Mazarbhuiya 2011⁹; Buckley 1997¹⁰.

-
- ¹ DIDIER Dubois y HENRI Prade. "Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations". En: *Control and Cybernetics* 13.3 (1984), págs. 129-146.
 - ² Elie Sanchez. "Solution of fuzzy equations with extended operations". En: *Fuzzy sets and Systems* 12.3 (1984), págs. 237-248.
 - ³ Hua-biao Jiang. "The approach to solving simultaneous linear equations that coefficients are fuzzy numbers". En: *Journal of National University of Defence Technology (Chinese)* 3 (1986), págs. 96-102.
 - ⁴ JJ Buckley y Yunxia Qu. "Solving linear and quadratic fuzzy equations". En: *Fuzzy sets and systems* 38.1 (1990), págs. 43-59.
 - ⁵ Mayuka F Kawaguchi y Tsutomu Da-Te. "A calculation method for solving fuzzy arithmetic equations with triangular norms". En: *[Proceedings 1993] Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. IEEE. 1993, págs. 470-476.
 - ⁶ Renhong Zhao y Rakesh Govind. "Solutions of algebraic equations involving generalized fuzzy numbers". En: *Information sciences* 56.1-3 (1991), págs. 199-243.
 - ⁷ X Wang y M Ha. *Solving a system of fuzzy linear equations*. 1994.
 - ⁸ George Klir y Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995.
 - ⁹ Fokrul Alom Mazarbhuiya, Anjana Kakoti Mahanta, Hemanta K Baruah et al. "Solution of the fuzzy equation $A + X = B$ using the method of superimposition". En: *Applied Mathematics* 2.8 (2011), págs. 1039-1045.
 - ¹⁰ James J Buckley, Esfandiar Eslami y Yoichi Hayashi. "Solving fuzzy equations using neural nets". En: *Fuzzy Sets and Systems* 86.3 (1997), págs. 271-278.

Mizumoto y Tanaka 1982, muestra la no existencia de inverso aditivo e inverso multiplicativo. La falta de inverso se vuelve significativo cuando se usan números difusos, por ejemplo en análisis de sistemas Jain 1976a¹¹, proceso de decisión de aspectos múltiples Jain 1977¹², analisis de la tolerancia en sistemas complejos Jain 1976b¹³, modelos de sistemas Yager 1977¹⁴, diagnóstico médico Sánchez 1977¹⁵.

¹¹ Ramesh Jain. "Outline of an approach for the analysis of fuzzy systems". En: *International Journal of Control* 23.5 (1976), págs. 627-640.

¹² Ramesh Jain. "A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets". En: *International Journal of systems science* 8.1 (1977), págs. 1-7.

¹³ Ramesh Jain. "Tolerance analysis using fuzzy sets". En: *International Journal of Systems Science* 7.12 (1976), págs. 1393-1401.

¹⁴ Ronald R Yager. "Building fuzzy systems models". En: *Applied general systems research*. Springer, 1978, págs. 313-320.

¹⁵ Elie Sanchez. "Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in Brouwerian logic". En: *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Elsevier, 1993, págs. 159-165.

1. Preliminares

En este Capítulo, presentamos algunas definiciones y notaciones básicas.

1.1. Conceptos Fundamentales

Definición 1.1 (Conjunto normal, α -nivel y soporte). .

Un conjunto difuso A sobre el conjunto de los números reales \mathbb{R} , es determinado por su función de pertenencia $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, esto es $A = \{(x, \mu_A(x) | x \in \mathbb{R}\}$.

A continuación nombramos unas propiedades básicas de un conjunto difuso:

(i) A se llama normal si existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_A(x) = 1$. De lo contrario, A es subnormal.

(ii) El soporte de A , denotado $sop(A)$, es el subconjunto de \mathbb{R} cuyos elementos tienen grados de pertenencia al conjunto A distintos de cero, es decir,

$$sop(A) = \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) > 0\}.$$

(iii) Un α nivel de un conjunto difuso A en \mathbb{R} , es el conjunto denotado por $[A]^\alpha$ y definido por,

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{si } \alpha > 0, \\ cl(sop(A)) & \text{si } \alpha = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Donde $cl(sop(A))$ denota la clausura del soporte de A , y notamos

$$[A]^0 = cl(sop(A)).$$

Afirmación 1.2. *En este trabajo a la colección de los conjuntos difusos sobre el conjunto de los números reales, lo denotamos con $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. Sea $A \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, su función de*

pertenencia del conjunto A , la denotamos con μ_A . ó simplemente la sola letra A , es decir, el valor de pertenencia de x al conjunto A , también se nota $A(x)$ como en la siguiente definición.

Definición 1.3 (Número difuso). .

Un conjunto difuso A en \mathbb{R} es llamado un número difuso si satisface las siguientes condiciones:

- (i) A es normal,
- (ii) A es convexo, es decir para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{A(x), A(y)\}, \text{ para todo } \lambda \in [0, 1]$$

- (iii) A es semicontinuo superiormente, en $x_0 \in \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $A(x) - A(x_0) < \varepsilon$, siempre que $|x - x_0| < \delta$
- (iv) El soporte de $[A]^0$ es compacto.

Las condiciones (ii) y (iv) hacen que todos los α - niveles de cada conjunto difuso sean conjuntos compactos y convexos en \mathbb{R} . En efecto, la condición (ii) implica que para cada $\alpha \in [0, 1]$, $[A]^\alpha$ es convexo, mientras que la condición (iii) implica que los α -niveles $[A]^\alpha$ son cerrados, con lo cual siendo $[A]^0$ compacto, se tiene que $[A]^\alpha$ es compacto para cada $\alpha \in [0, 1]$. La condición (i) muestra el hecho de que el espacio $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ generaliza los conjuntos clásicos de \mathbb{R} , en el sentido de que la función de pertenencia de un conjunto difuso. Es la generalización de la función característica que define un conjunto clásico.

Definición 1.4. (Numero difuso Pseudo-triangular y Numero difuso pseudo-trapezoidal)

Un numero difuso \tilde{A} es llamado numero difuso pseudo-trapezoidal si su función de

pertenencia $\mu_A(x)$ está dada por

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} l_{\tilde{A}}(x) & \underline{a} \leq x \leq a_1 \\ 1 & a_1 \leq x \leq a_2 \\ r_{\tilde{A}}(x) & a_2 \leq x \leq \bar{a} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

Donde $l_{\tilde{A}}(x)$ es una función no decreciente definida en el intervalo $[\underline{a}, a_1]$, $r_{\tilde{A}}(x)$ es una función no creciente definida en el intervalo $[a_2, \bar{a}]$, y denotamos este número difuso \tilde{A} con

$$\tilde{A} = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_A(x), r_A(x)).$$

En el caso en que $l_A(x)$ y $r_A(x)$ sean funciones lineales, como por ejemplo, $l_A(x)$ es la recta que une los puntos $(\underline{a}, 0)$ y $(a_1, 1)$; $r_A(x)$ es la recta que une los puntos $(a_2, 1)$ y $(\bar{a}, 0)$. Un número difuso pseudo-triangular es un número difuso pseudo-trapezoidal cuando $a_1 = a_2 = a$.

El número difuso pseudo-triangular \tilde{A} se denota por

$\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a}, l_A(x), r_A(x))$ y cuando $l_A(x)$ es la recta que une los puntos $(\underline{a}, 0)$ y $(a, 1)$, y $r_A(x)$ es la recta que une los puntos $(a, 1)$ y $(\bar{a}, 0)$, lo denotamos $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a}, -, -)$ o simplemente por $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a})$.

Definición 1.5. (Igualdad de números difusos).

Dos números difusos \tilde{A} y \tilde{B} son iguales (denotados $\tilde{A} = \tilde{B}$) si y solo si

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Definición 1.6. Sea \tilde{A} un número difuso. Definimos:

$$(i) \text{núcleo}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

$$(ii) a.c(\tilde{A}) = \frac{1}{2} \left\{ \min(\text{núcleo}(\tilde{A})) + \max(\text{núcleo}(\tilde{A})) \right\},$$

$$(iii) \underline{\text{soporte}}(\tilde{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a.c(\tilde{A}) \right\},$$

$$(iv) \overline{\text{soporte}}(\tilde{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a.c(\tilde{A}) \right\},$$

$$(v) \underline{P}_{\tilde{A}} = \left\{ x \in \text{soporte}(\tilde{A}) \mid \inf(\text{soporte}(\tilde{A})) \leq x \leq \min(\text{núcleo}(\tilde{A})) \right\},$$

$$(vi) \overline{P}_{\tilde{A}} = \left\{ x \in \text{soporte}(\tilde{A}) \mid \max(\text{núcleo}(\tilde{A})) \leq x \leq \sup(\text{soporte}(\tilde{A})) \right\},$$

$$(vii) \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) & x \in \underline{P}_{\tilde{A}}, \\ 1 & x \in \text{núcleo}(\tilde{A}), \\ \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) & x \in \overline{P}_{\tilde{A}}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Respecto a las operaciones aritméticas difusas que utilizan el principio de extensión o la aritmética de intervalo (en el dominio de los alfa niveles), se tiene un problema al construir las funciones de pertenencia de dichos operadores.

Aunque las definiciones en ¹⁶ de resta y división, usa una aritmética de intervalos tiene unos cálculos complejos.

¹⁶ Luciano Stefanini. "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy sets and systems* 161.11 (2010), págs. 1564-1584.

1.2. Aritmética difusa basada en el principio de extensión de Zadeh

El principio de extensión de Zadeh es la herramienta básica para introducir las operaciones usuales en los conjuntos difusos, ya que permite extender funciones de números reales a funciones de números difusos.

Definición 1.7. Extensión de Zadeh.

- Dada la función $f : X \rightarrow Y$ el principio de extensión de zadeh, extiende f a la función F en el contexto difuso,

$$F = \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y),$$

donde F se define para cada conjunto difuso A sobre X , $A \in \mathcal{F}(X)$, por:

$$F(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

- Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ y $f : U \times V \rightarrow W$ una función real. Esta se extiende a

$$F : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W),$$

de la siguiente forma. Sean $u \in \mathcal{F}(U)$ y $v \in \mathcal{F}(V)$ cantidades difusas. Se define $w = F(u, v)$ como un subconjunto de W , con función de pertenencia:

$$\mu_w(z) = \begin{cases} \sup_{f(x,y)=z} \{\min \{\mu_u(x), \mu_v(y)\}\}, & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

donde $f^{-1}(z) = \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z \in W\}$.

A la función F se le llama la extensión de f . Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces para todo $(u, v) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$ se tiene que $f(u, v) \in \mathcal{F}(W)$.

Teorema 1.8. Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : U \times V \rightarrow W$ una función real continua. Entonces f se puede extender a una función F

$$F = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W),$$

con α -niveles.

$$[F(u, v)]^\alpha = f([u]^\alpha, [v]^\alpha) \text{ para todo } \alpha \in [0, 1] \quad (5)$$

La demostración de este teorema favor ver en¹⁷.

La expresión 5 es más sencilla que 4, es por este hecho que se intenta siempre obtener la imagen de la función en términos de sus α -niveles.

Afirmación 1.9. En lo que sigue en lugar de usar la notación F usamos la misma f ya que su significado se entiende en el contexto.

Si X posee una estructura de espacio vectorial, se puede utilizar el principio de extensión de Zadeh para definir la multiplicación por escalar de un conjunto difuso sobre $\mathcal{F}(X)$ como sigue.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideramos $f : X \rightarrow X$, donde $f(x) = \lambda x$. Sea A un número difuso sobre X , con función de pertenencia $\mu_A(x)$. En el contexto algebraico se acostumbrara a escribir $\mu_A(x) = A(x)$. La función f induce el conjunto difuso $F(A) = \lambda A$ con función de pertenencia definida por.

$$(\lambda A)(x) = \begin{cases} A\left(\frac{x}{\lambda}\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Si } \lambda = -1 \text{ se obtiene que } (-1)A(x) = -A(x) = A(-x). \quad (7)$$

¹⁷ Omar A AbuAarqob, Nabil T Shawagfeh y Omar A AbuGhneim. "Functions defined on fuzzy real numbers according to zadehs extension". En: *International Mathematical Forum*. Vol. 3. 16. 2008, págs. 763-776.

Definición 1.10. Aritmética de los números difusos. A continuación presentamos las definiciones de suma, resta, multiplicación y división usando el principio de extensión de Zadeh.

Definición 1.11. Suma de números difusos

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$f(x, y) = x + y$$

es decir, f es el operador suma. Sean A y B números difusos. La función de pertenencia de la suma es

$$f(A, B)(z) = \sup_{z=x+y} \min\{A(x), B(y)\} \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

usando la notación $f(A, B) = A + B$ se obtiene

$$(A + B)(z) = \sup_{z=x+y} \min [A(x), B(y)] \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Definición 1.12. Resta extendida de Números Difusos

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$f(x, y) = x - y$$

es decir, f es el operador resta. Sen A y B números difusos, se tiene

$$f(A, B)(z) = \sup_{z=x-y} \{ \min \{ A(x), B(y) \} \} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

usando la notación $f(A, B) = A - B$ se obtiene

$$(A - B)(z) = \sup_{z=x-y} \min [A(x), B(y)] \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

De la siguiente igualdad

$$\sup_{z=x-y} \{\min \{A(x), B(y)\}\} = \sup_{z=x+(-y)} \{\min \{A(x), -B(y)\}\}$$

se obtiene, $A - B = A + (-B)$. Sin embargo, si $A \in F$ es un número difuso. se tiene que;

$$(A - A)(z) = \sup_{z=x-y} \min\{A(x), A(y)\} = \sup_{x=y+z} \min\{A(y+z), A(y)\} \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

no es igual al número difuso $\bar{0}$, donde.

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.13. Multiplicación de números difusos

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = x \cdot y,$$

es decir, f es el operador multiplicación. Sean A y B números difusos. Por el principio de extensión se obtiene

$$f(A, B)(z) = \sup_{z=x \cdot y} \{\min \{A(x), B(y)\}\}$$

usando la notación $f(A, B) = A \cdot B$ se obtiene

$$(A \cdot B)(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min [A(x), B(y)] \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Definición 1.14. División de números difusos

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por,

$$f(x, y) = \frac{x}{y},$$

es decir, f es el operador división. Sean A y B números difusos, por el principio de extensión se tiene

$$f(A, B)(z) = \sup_{z = \frac{x}{y}, y \neq 0} \{ \min \{ A(x), B(y) \} \}$$

usando la notación $f(A, B) = \frac{A}{B}$ se obtiene

$$(A/B)(z) = \sup_{z=x/y} \min [A(x), B(y)] \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

En general se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Sean A, B dos números difusos continuos (sus funciones de pertenencia son funciones continuas), entonces, el conjunto difuso $A * B$ definido por*

$$(A * B)(z) = \sup_{z=x*y} \min \{ A(x), B(y) \} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (8)$$

es un número difuso continuo.

Ver demostración en ⁸

Donde $*$ representa cualquiera de las operaciones suma, resta, multiplicación o división. Cuando la operación es la división, el soporte de B no debe contener al 0.

Teorema 1.16. *Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua y A un número difuso, entonces*

$$[f(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$$

donde $f(A)$ es la extensión de f y

$$f([A]^\alpha) = \{ f(x) \mid x \in [A]^\alpha \}.$$

Ver demostración en ¹⁸

Teorema 1.17. (Teorema de descomposición) Para todo $A \in \mathcal{F}(X)$.

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{[A]^\alpha} \quad (9)$$

Donde $\chi_{[A]^\alpha}$ es la función característica del α nivel de A .

Ver demostración en ⁸

Por el anterior teorema podemos caracterizar las operaciones de los conjuntos difusos utilizando la aritmética de intervalos (los α niveles).

Teorema 1.18. Sean A y B números difusos y $*$ cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). El conjunto difuso $A * B$ sobre \mathbb{R} puede expresarse a partir de sus α -niveles y soporte como

$$[A * B]^\alpha = [A]^\alpha * [B]^\alpha, \text{ para } \alpha \in [0, 1] \quad (10)$$

donde $[A]^\alpha * [B]^\alpha$ esta definido por 8 y

$$[A]^\alpha * [B]^\alpha = \{a * b \mid a \in [A]^\alpha, b \in [B]^\alpha\}. \quad (11)$$

Ver demostración en ¹⁹

Teorema 1.19. Sea X es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Si $A, B \in \mathcal{F}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

¹⁸ Hung T Nguyen. "A note on the extension principle for fuzzy sets". En: *Journal of mathematical analysis and applications* 64.2 (1978), págs. 369-380.

¹⁹ Tofigh Allahviranloo, Irina Perfilieva y Fazlollah Abbasi. "A new attitude coupled with fuzzy thinking for solving fuzzy equations". En: *Soft computing* 22.9 (2018), págs. 3077-3095.

entonces $A + B \in \mathcal{F}(X)$ y $\lambda B \in \mathcal{F}(X)$, y se tiene.

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha \quad y \quad [\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Ver demostración en ¹⁹

Definición 1.20. Sea $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ el conjunto de los números difusos sobre el conjunto de los números reales. Sean $u, v \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, con funciones de pertenencia μ_u, μ_v y α -niveles $[u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ y $[v_\alpha^-, v_\alpha^+]$, respectivamente.

En términos de α -niveles, las operaciones básicas son:

- suma:

$$[u + v]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+] + [v_\alpha^-, v_\alpha^+] = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \quad (12)$$

- Multiplicación por un escalar:

$$[ku]^\alpha = [\min \{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}, \max \{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \quad (13)$$

- Resta:

$$[u - v]^\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \quad (14)$$

- Multiplicación:

$$[u \cdot v]^\alpha = [\min \{X_\alpha\}, \max \{X_\alpha\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \quad (15)$$

donde $X_\alpha = \{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\}$.

Considerando la ecuación cuadrática

$$ax^2 = b \quad (16)$$

donde a y b son números difusos triangulares positivos y los α - niveles respectivos: $[a]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ y $[b]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$.

Sea x la solución con α - nivel $[x]^\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$.

Sustituyendo estos α - niveles en 16, se obtiene la ecuación.

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] [x_\alpha^-, x_\alpha^+]^2 = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]. \quad (17)$$

Calculamos $[x_\alpha^-, x_\alpha^+]^2 = [x_\alpha^-, x_\alpha^+] [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$

$$X_\alpha = \{(x_\alpha^-)^2, x_\alpha^- x_\alpha^+, x_\alpha^+ x_\alpha^-, (x_\alpha^+)^2\}$$

$\min X_\alpha = (x_\alpha^-)^2$ y $\max X_\alpha = (x_\alpha^+)^2$ y si X es un número difuso positivo se tiene;

$[x_\alpha^-, x_\alpha^+]^2 = [(x_\alpha^-)^2, (x_\alpha^+)^2]$. A continuación calculamos el producto.

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] [(x_\alpha^-)^2, (x_\alpha^+)^2] = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$$

$$X_\alpha = [a_\alpha^-(x_\alpha^-)^2, a_\alpha^-(x_\alpha^+)^2, a_\alpha^+(x_\alpha^-)^2, a_\alpha^+(x_\alpha^+)^2]$$

$\min X_\alpha = a_\alpha^-(x_\alpha^-)^2$ y $\max X_\alpha = a_\alpha^+(x_\alpha^+)^2$

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] [(x_\alpha^-)^2, (x_\alpha^+)^2] = [a_\alpha^-(x_\alpha^-)^2, a_\alpha^+(x_\alpha^+)^2] = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]. \quad (18)$$

Entonces

$$x_\alpha^- = \pm \sqrt{\frac{b_\alpha^-}{a_\alpha^-}}, \text{ y } x_\alpha^+ = \pm \sqrt{\frac{b_\alpha^+}{a_\alpha^+}}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$x_1^\alpha = \left[\sqrt{\frac{b_\alpha^-}{a_\alpha}}, \sqrt{\frac{b_\alpha^+}{a_\alpha}} \right]$$

$$x_2^\alpha = \left[-\sqrt{\frac{b_\alpha^+}{a_\alpha}}, -\sqrt{\frac{b_\alpha^-}{a_\alpha}} \right]$$

■ **División:**

$$\left[\frac{u}{v} \right]^\alpha = [\min \{X_\alpha\}, \max \{X_\alpha\}] \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \quad (19)$$

$$\text{donde } X_\alpha = \left\{ \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+} \right\}.$$

Ejemplo 1.21. Sean los números triangulares $u = (1, 2, 3, -, -)$ y $v = (2, 5, 6, -, -)$.

A continuación determinamos el α -nivel del número difuso $u = (1, 2, 3, -, -)$.

La recta que une $(1, 0)$ y $(2, 1)$ es $y = x - 1$. Sea $\alpha = x - 1$, entonces $x = \alpha + 1$, es el extremo izquierdo de $[u]^\alpha$.

La recta que une $(2, 1)$ y $(3, 0)$ es $y = 3 - x$. Sea $\alpha = 3 - x$, entonces $x = 3 - \alpha$, es el extremo derecho de $[u]^\alpha$, Así por lo tanto $[u]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$.

Análogamente se determina el α -nivel del número difuso $v = (2, 5, 6, -, -)$ $[v]^\alpha = [3\alpha + 2, 6 - \alpha]$.

El α - nivel de la suma $u + v$ es

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha] + [3\alpha + 2, 6 - \alpha] = [4\alpha + 3, 9 - 2\alpha],$$

El α - nivel de $-v$ es

$$[-v]^\alpha = [\min \{-2 - 3\alpha, -6 + \alpha\}, \max \{-2 - 3\alpha, -6 + \alpha\}] = [-6 + \alpha, -2 - 3\alpha]$$

El α - nivel de la diferencia $u - v$ es

$$[u - v]^\alpha = [1 + \alpha - (6 - \alpha), 3 - \alpha - (2 + 3\alpha)] = [-5 + 2\alpha, 1 - 4\alpha],$$

$$u - v = \bigcup_{\alpha} [-5 + 2\alpha, 1 - 4\alpha]$$

$$= (-5, -3, 1, -, -)$$

El α - nivel del producto $u \cdot v$ es

Para cada $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\} \\ &= \{(1 + \alpha)(2 + 3\alpha), (1 + \alpha)(6 - \alpha), (3 - \alpha)(3 + 3\alpha), (3 - \alpha)(6 - \alpha)\} \end{aligned}$$

En este caso como u y v son positivos,(los primero números en u y v son positivos) entonces.

$$[u \cdot v]^\alpha = [(1 + \alpha)(2 + 3\alpha), (3 - \alpha)(6 - \alpha)].$$

Desde un punto de vista algebraico, la adición y multiplicación son conmutativas, asociativas y tienen un elemento neutro. Si se incluye el número real 0 como un conjunto difuso cuya función de pertenencia μ_0 definida por.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

entonces el número difuso $0 \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ y se tiene que $u + 0 = 0 + u = 0$. De la misma forma, definiendo el número real 1 por

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

también se logra que $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$.

Aún así, tanto la suma como la multiplicación de números difusos no admiten un elemento inverso. Esto es:

$$\begin{aligned} u + v = w &\not\Leftrightarrow u = w - v, \\ u \cdot v = w &\not\Leftrightarrow u = w/v. \end{aligned}$$

Además, en general no se tiene la igualdad $u - u = 0$, ni $u/u = 1$. Esto es un problema a la hora de resolver una determinada ecuación.

Ejemplo 1.22. Si $u = (1, 2, 3, -, -)$ entonces los α -niveles son:

$$[u]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Usando 14

$$[u - u]^\alpha = [1 + \alpha - (3 - \alpha), 3 - \alpha - (1 + \alpha)] = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha] \neq [0, 0] \quad (20)$$

De la misma forma

$$\left[\frac{u}{u} \right]^\alpha = [\min \{X_\alpha\}, \max \{X_\alpha\}] \text{ para } \alpha \in [0, 1] \quad (21)$$

donde $X_\alpha = \left\{ 1, \frac{1+\alpha}{3-\alpha}, \frac{3-\alpha}{1+\alpha} \right\}$.

Ahora bien, como $1 \leq 1 + \alpha \leq 2 \leq 3 - \alpha \leq 3$ entonces

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1+\alpha}{3-\alpha} \leq 1,$$

$$1 \leq \frac{3-\alpha}{1+\alpha}.$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{u}{u} \right]^\alpha = \left[\frac{1 + \alpha}{3 - \alpha}, \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} \right] \neq [1, 1]. \quad (22)$$

Se dificultan la solución de las ecuaciones $A + X = B$ y $A \cdot X = B$, donde A, B son números difusos y X es la incognita.

Incluso si existe una solución, es difícil de encontrarla. Yager (1980)²⁰ presentó un

²⁰ Ronald R Yager. "On the lack of inverses in fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy Sets and Systems* 4.1 (1980), págs. 73-82.

procedimiento que permite determinar el grado en el que una solución satisface la ecuación dada, una solución aproximada a la solución verdadera. Mizumoto y Tanaka creen que esta incertidumbre no está relacionada con las limitaciones en las operaciones aritméticas difusas basadas en el principio de extensión de Zadeh (PE),²¹ introdujo nuevas operaciones aritméticas sobre números difusos. Después de definir nuevas operaciones, se introducen varias clases de equivalencia y luego, define la aproximación difusa.

Uno de los objetivos es comparar los procedimientos de resolver las ecuaciones $A + X = B$ y $AX = B$ usando las operaciones aritméticas difusas de suma, resta, multiplicación y división presentadas en este capítulo, con las respectivas operaciones basadas en la traslación del promedio de los núcleos (TPN), definidos en el siguiente capítulo.

²¹ Fazlollah Abbasi, Tofiq Allahviranloo y Saeid Abbasbandy. "A new attitude coupled with fuzzy thinking to fuzzy rings and fields". En: *Journal of intelligent & fuzzy systems* 29.2 (2015), págs. 851-861.

2. Operaciones difusas basadas en la traslación

Al resolver ecuaciones con parámetros difusos, por medio de los métodos que involucran el principio de extensión y los α , muy amenudo no hay solución, o se deben poner condiciones muy fuertes en las ecuaciones para que haya solución.

Estos hechos motivan el estudio de las operaciones aritméticas básicss difusas basadas en la traslación usando el promedio del núcleo (TPN) propuestas en 10 y usarlas en la solución de las ecuaciones difusas: $A + X = B$, $AX = B$, $AX + B = C$.

Definición 2.1. El promedio del núcleo del número difuso pseudo- trapezoidal

$$A = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_A(x), r_A(x)) \text{ es } a.c(A) = \frac{a_1+a_2}{2}$$

y el promedio del núcleo de

$$B = (\underline{b}, b_1, b_2, \bar{b}, l_B(x), r_B(x)) \text{ es } a.c(B) = \frac{b_1+b_2}{2}.$$

Las operaciones aritmeticas básicas difusas basadas en la traslación usando el promedio de los núcleos (TPN), con números difusos pseudo-trapezoidales se describen a continuación para hacer más simple la escritura notamos: $\phi = a.c(A)$ y $\psi = a.c(B)$.

$$A = \bigcup_{\alpha} [A]^{\alpha}, \quad [A]^{\alpha} = [\underline{A}_{\alpha}, \bar{A}_{\alpha}], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad A_1 = [a_1, a_2],$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [B]^{\alpha}, \quad [B]^{\alpha} = [\underline{B}_{\alpha}, \bar{B}_{\alpha}], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad B_1 = [b_1, b_2].$$

La suma $\widetilde{A+B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$, la resta $\widetilde{A-B} = \widetilde{A} - \widetilde{B}$, la multiplicación $\widetilde{A \cdot B} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$ y la división $\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \widetilde{A} \div \widetilde{B}$, basadas en TPN, se definen a continuación.

$$\widetilde{A+B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A+B}]^{\alpha},$$

$$[\widetilde{A+B}]^{\alpha} = \left[\frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{\underline{A}_{\alpha} + \underline{B}_{\alpha}}{2} \right), \frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{\bar{A}_{\alpha} + \bar{B}_{\alpha}}{2} \right) \right] \quad (23)$$

$$\widetilde{-B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha}, \quad [\widetilde{-B}]^{\alpha} = [-2\psi + \underline{B}_{\alpha}, -2\psi + \overline{B}_{\alpha}] \quad (24)$$

$$\widetilde{A - B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A - B}]^{\alpha},$$

$$[\widetilde{A - B}]^{\alpha} = \left[\frac{\phi - 3\psi}{2} + \left(\frac{\underline{A}_{\alpha} + \underline{B}_{\alpha}}{2} \right), \frac{\phi - 3\psi}{2} + \left(\frac{\overline{A}_{\alpha} + \overline{B}_{\alpha}}{2} \right) \right] \quad (25)$$

$$\widetilde{A \cdot B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha}$$

$$[\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\left(\frac{\psi}{2} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{\psi}{2} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] & \phi \geq 0, \psi \geq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi}{2} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{\psi}{2} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] & \phi \geq 0, \psi \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi}{2} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \overline{B}_{\alpha}, \left(\frac{\psi}{2} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \underline{B}_{\alpha} \right] & \phi \leq 0, \psi \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi}{2} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \overline{B}_{\alpha}, \left(\frac{\psi}{2} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \underline{B}_{\alpha} \right] & \phi \leq 0, \psi \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\widetilde{B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha}, \quad [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] \quad (27)$$

$$\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha}$$

$$[\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha} = \left[\frac{A}{B} \right]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{2\psi} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{2\psi} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] & \phi \geq 0, \psi > 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{2\psi} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] & \phi \geq 0, \psi < 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{2\psi} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha} \right] & \phi \leq 0, \psi < 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{2\psi} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha} \right] & \phi \leq 0, \psi > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Observación 2.2. La división por el número difuso 0 cuyo promedio de núcleo $a.c(0) = 0$, no esta definido.

Ya que el número difuso $\tilde{A} = (\underline{a}, a_1, a_2, \overline{a}, l_{\tilde{A}}(x), r_{\tilde{A}}(x))$ es un número pseudo trian-

gular cuando $a_1 = a_2$, las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN. con números pseudo - triangulares es un caso particular de la respectiva operación en números difusos pseudo trapezoidales.

2.1. Ejemplos de operaciones básicas basadas en TPN

En esta subsección, presentamos varios ejemplos de operaciones aritméticas difusas usando el promedio del núcleo (TPN) y comparamos con el método que utiliza el principio de extensión (PE), descrito en el primer capítulo.

Ejemplo 2.3. En este ejemplo, comparamos los resultados del método TPN con el método del PE (α -nivel).

Sean.

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = \alpha + 1, \quad \overline{A}_{\alpha} = 4 - 2\alpha$$

$$\tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 2\alpha + 3, \quad \overline{B}_{\alpha} = 6 - \alpha.$$

1. Basado en el Principio de extensión (PE).

Calculamos.

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A+B}]^{\alpha}, \text{ Usando 12, se tiene.}$$

$$\begin{aligned} [\widetilde{A+B}]^{\alpha} &= [\alpha + 1, 4 - 2\alpha] + [2\alpha + 3, 6 - \alpha] \\ &= [3\alpha + 4, 10 - 3\alpha]. \end{aligned}$$

Calculamos.

$$\widetilde{-B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha},$$

Partiendo de.

$[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha] = [2\alpha + 3, 6 - \alpha]$. Usando 13 se obtiene

$$\begin{aligned} [B]^\alpha &= [\min \{-\underline{B}_\alpha, -\overline{B}_\alpha\}, \max \{-\underline{B}_\alpha, -\overline{B}_\alpha\}] \\ &= [\min \{-2\alpha - 3, -6 + \alpha\}, \max \{-2\alpha - 3, -6 + \alpha\}] \\ &= [-6 + \alpha, -2\alpha - 3], \end{aligned}$$

ya que $-6 + \alpha \leq -2\alpha - 3 \forall \alpha \in [0, 1]$.

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\tilde{A} - \tilde{B}]^\alpha.$$

Usando 14.

$$\begin{aligned} [A - B]^\alpha &= [\alpha + 1 - (6 - \alpha), 4 - 2\alpha - (2\alpha + 3)] \\ &= [2\alpha - 5, 1 - 4\alpha] \end{aligned}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\tilde{A} \cdot \tilde{B}]^\alpha$$

Usando 15

$$X_\alpha = \{(\alpha + 1)(2\alpha + 3), (\alpha + 1)(6 - \alpha), (4 - 2\alpha)(2\alpha + 3), (4 - 2\alpha)(6 - \alpha)\}$$

$$(\alpha + 1)(2\alpha + 3) \leq (\alpha + 1)(6 - \alpha) \leq (4 - 2\alpha)(6 - \alpha)$$

$$(\alpha + 1)(2\alpha + 3) \leq (4 - 2\alpha)(2\alpha + 3).$$

Por lo tanto

$$\text{máx } X_\alpha = (\alpha + 1)(2\alpha + 3)$$

$$(4 - 2\alpha)(6 - \alpha) \geq (4 - 2\alpha)(2\alpha + 3) \geq (\alpha + 1)(2\alpha + 3)$$

$$(4 - 2\alpha)(6 - \alpha) \geq \alpha + 1)(6 - \alpha)$$

Luego $\max X_\alpha = (4 - 2\alpha)(6 - \alpha)$

Luego.

$$[\tilde{A} \cdot \tilde{B}]^\alpha = [(\alpha + 1)(2\alpha + 3), (4 - 2\alpha)(6 - \alpha)]$$

$$\tilde{B}^{-1} = \bigcup_{\alpha} [\tilde{B}^{-1}]^\alpha,$$

Usando 18 calculamos $[B^{-1}]^\alpha$. Como $B = [2\alpha + 3, 6 - \alpha]$ entonces.

$$X_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\alpha+3}, \frac{1}{6-\alpha} \right\}$$

$$3 \leq 2\alpha + 3 \leq 6 - \alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{2\alpha+3} \geq \frac{1}{6-\alpha}$$

$\min X_\alpha = \frac{1}{6-\alpha}$, $\max X_\alpha = \frac{1}{2\alpha+3}$, por lo tanto

$$[\tilde{B}^{-1}]^\alpha = \left[\frac{1}{6-\alpha}, \frac{1}{2\alpha+3} \right]$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B}^{-1} = \bigcup_{\alpha} [\tilde{A} \cdot \tilde{B}^{-1}]^\alpha,$$

Recordando que $[A]^\alpha = [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$,

$[B^{-1}]^\alpha = \left[\frac{1}{6-\alpha}, \frac{1}{2\alpha+3} \right]$. Usando 15

$$X_\alpha = \left\{ \frac{\alpha+1}{6-\alpha}, \frac{\alpha+1}{2\alpha+3}, \frac{4-2\alpha}{6-\alpha}, \frac{4-2\alpha}{2\alpha+3} \right\}$$

$$\min X_\alpha = \frac{\alpha+1}{6-\alpha}, \max X_\alpha = \frac{4-2\alpha}{2\alpha+3},$$

por lo tanto

$$\left[\tilde{A} \cdot \tilde{B}^{-1} \right]^\alpha = \left\{ \frac{\alpha+1}{6-\alpha}, \frac{4-2\alpha}{2\alpha+3} \right\}$$

2. Usando las operaciones aritméticas difusas basadas en la traslación, usando el promedio del núcleo (TPN)

Usando definición 2.1, ecuación 23 se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{A+B} \right]^\alpha &= \\ &= \left[\frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{A_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{\bar{A}_\alpha + \bar{B}_\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{2+5}{2} + \left(\frac{\alpha+1+2\alpha+3}{2} \right), \frac{2+5}{2} + \left(\frac{4-2\alpha+6-\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{7}{2} + \left(\frac{3\alpha+4}{2} \right), \frac{7}{2} + \left(\frac{-3\alpha+10}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{3\alpha+11}{2}, \frac{-3\alpha+17}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\bigcup_\alpha \left[\widetilde{A+B} \right]^\alpha, \left[\widetilde{A+B} \right]^\alpha = \left[\frac{7}{2} + \frac{3\alpha+4}{2}, \frac{7}{2} + \frac{10-3\alpha}{2} \right]$$

Usando definición 2.1, ecuación 24 se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{-B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha} = \\
 &= [-2\psi + \underline{B}_{\alpha}, -2\psi + \overline{B}_{\alpha}] \\
 &= [-10 + 2\alpha + 3, -10 + 6 - \alpha] \\
 &= [2\alpha - 7, -\alpha - 4]
 \end{aligned}$$

Usando definición 2.1, ecuación 25 se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A - B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A - B}]^{\alpha} = \\
 &= \left[\frac{\phi - 3\psi}{2} + \left(\frac{A_{\alpha} + B_{\alpha}}{2} \right), \frac{\phi - 3\psi}{2} + \left(\frac{\overline{A}_{\alpha} + \overline{B}_{\alpha}}{2} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{2 - 3(5)}{2} + \left(\frac{\alpha + 1 + 2\alpha + 3}{2} \right), \frac{2 - 3(5)}{2} + \left(\frac{\alpha + 1 + 2\alpha + 3}{2} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{2 - 15}{2} + \left(\frac{3\alpha + 4}{2} \right), \frac{2 - 15}{2} + \left(\frac{3\alpha + 4}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-13}{2} + \left(\frac{3\alpha + 4}{2} \right), \frac{-13}{2} + \left(\frac{3\alpha + 4}{2} \right) \right] \\
&= \left[\frac{3\alpha - 9}{2}, \frac{3\alpha - 9}{2} \right]
\end{aligned}$$

Usando definición 2.1, ecuación 26 primer renglón se tiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A \cdot B} &= \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A \cdot B} \right]^{\alpha} = \\
&= \left[\left(\frac{\psi}{2} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{\psi}{2} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] \\
&= \left[\frac{5}{2}(\alpha + 1) + \frac{2}{2}(2\alpha + 3), \frac{5}{2}(4 - 2\alpha) + \frac{2}{2}(6 - \alpha) \right] \\
&= \left[\frac{5\alpha + 5}{2} + \frac{4\alpha + 6}{2}, \frac{20 - 10\alpha}{2} + \frac{12 - 2\alpha}{2} \right] \\
&= \left[\frac{9\alpha + 11}{2}, 16 - 6\alpha \right]
\end{aligned}$$

Usando definición 2.1, ecuación 27 primer renglón se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{B^{-1}} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha} = \\
 &= \left[\left(\frac{1}{\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] \\
 &= \left[\left(\frac{1}{5^2} \right) (2\alpha + 3), \left(\frac{1}{\psi^2} \right) (6 - \alpha) \right] \\
 &= \left[\left(\frac{1}{25} \right) (2\alpha + 3), \left(\frac{1}{25} \right) (6 - \alpha) \right]
 \end{aligned}$$

Usando definición 2.1, ecuación 28 primer renglón se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A \cdot B^{-1}} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha} = \\
 &= \left[\left(\frac{1}{2\psi} \right) \underline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \underline{B}_{\alpha}, \left(\frac{1}{2\psi} \right) \overline{A}_{\alpha} + \left(\frac{\phi}{2\psi^2} \right) \overline{B}_{\alpha} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2(5)} (\alpha + 1) + \frac{2}{2(5)^2} (2\alpha + 3), \frac{1}{2(5)} (4 - 2\alpha) + \frac{2}{2(5)^2} (6 - \alpha) \right] \\
 &= \left[\frac{1}{10} (\alpha + 1) + \frac{1}{25} (2\alpha + 3), \frac{1}{10} (4 - 2\alpha) + \frac{1}{25} (6 - \alpha) \right]
 \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos muestran a los extremos de los α - niveles como funciones no lineales.

Ejemplo 2.4. Sean

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 2\alpha + 1, \quad \overline{A}_{\alpha} = 3 + \sqrt{1 - \alpha}$$

$$\widetilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = (2\alpha + 2)^2, \quad \overline{B}_{\alpha} = (5 - \alpha)^2$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, se obtiene:

$$\widetilde{A + B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A + B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 23 se tiene}$$

$$[\widetilde{A + B}]^{\alpha} = \left[\frac{19}{2} + \frac{2\alpha + 1 + (2\alpha + 2)^2}{2}, \frac{19}{2} + \frac{3 + \sqrt{1 - \alpha + (5 - \alpha)^2}}{2} \right]$$

$$\widetilde{-B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 24 se tiene}$$

$$[\widetilde{-B}]^{\alpha} = [-32 + (2\alpha + 2)^2, -32 + (5 - \alpha)^2]$$

$$\widetilde{A - B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A - B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 25 se tiene}$$

$$[\widetilde{A - B}]^{\alpha} = \left[\frac{-45}{2} + \frac{2\alpha + 1 + (2\alpha + 2)^2}{2}, \frac{-45}{2} + \frac{3 + \sqrt{1 - \alpha + (5 - \alpha)^2}}{2} \right]$$

$$\widetilde{A \cdot B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 26 primer renglón se tiene}$$

$$[\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} = \left[8(2\alpha + 1) + \frac{3}{2}(2\alpha + 2)^2, 8(3 + \sqrt{1 - \alpha}) + \frac{3}{2}(5 - \alpha) \right]$$

$$\widetilde{B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 27 se tiene}$$

$$[\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha} = \left[\frac{1}{256}(2\alpha + 2)^2, \frac{1}{256}(5 - \alpha)^2 \right]$$

$$\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 28 primer renglón se tiene}$$

$$[\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha} = \left[\frac{1}{32}(2\alpha + 1) + \frac{3}{512}(2\alpha + 2)^2, \frac{1}{32}(3 + \sqrt{1 - \alpha}) + \frac{3}{512}(5 - \alpha)^2 \right].$$

Ejemplo 2.5. Sean

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \quad \overline{A}_{\alpha} = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha}$$

$$\tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 2 - \sqrt{-\ln\alpha}, \quad \overline{B}_{\alpha} = 2 - \ln\alpha$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, obtenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{A+B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A+B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 23 se tiene} \\ [\widetilde{A+B}]^{\alpha} &= \left[\frac{5}{2} + \frac{5 - (\sqrt{4-4\alpha} + \sqrt{-\ln\alpha})}{2}, \frac{5}{2} + \frac{5 + (\sqrt{16-16\alpha} - \ln\alpha)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{-B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 24 se tiene} \\ [\widetilde{-B}]^{\alpha} &= [-2 - \sqrt{-\ln\alpha}, -2 - \ln\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A-B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A-B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 25 se tiene} \\ [\widetilde{A-B}]^{\alpha} &= \left[\frac{-3}{2} + \frac{5 - (\sqrt{4-4\alpha} + \sqrt{-\ln\alpha})}{2}, \frac{-3}{2} + \frac{5 + (\sqrt{16-16\alpha} - \ln\alpha)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A \cdot B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 26 primer renglón se tiene} \\ [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} &= \left[3 - \sqrt{4 - 4\alpha} + \frac{3}{2}(2 - \sqrt{-\ln\alpha}), 3 + \sqrt{16 - 16\alpha} + \frac{3}{2}(2 - \alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B^{-1}} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 27 se tiene} \\ [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha} &= \left[\frac{1}{4}(2 - \sqrt{-\ln\alpha}), \frac{1}{4}(2 - \ln\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B^{-1}}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 28 primer renglón se tiene}$$

$$\widetilde{A \cdot B}^{-1} = \left[\frac{1}{4}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - \sqrt{-ln\alpha}), \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16 - 16\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - ln\alpha) \right].$$

Ejemplo 2.6. Sean

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}, \quad \overline{A}_{\alpha} = 5 + \sqrt{4 - 4\alpha},$$

$$\widetilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 3\alpha + 1, \quad \overline{B}_{\alpha} = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right).$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, obtenemos:

$$\widetilde{A + B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A + B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 23 se tiene}$$

$$[\widetilde{A + B}]^{\alpha} = \left[\frac{9}{2} + \frac{6+3\alpha-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}}{2}, \frac{9}{2} + \frac{9+\sqrt{4-4\alpha}+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2})}{2} \right],$$

$$\widetilde{-B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{-B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 24 se tiene}$$

$$[\widetilde{-B}]^{\alpha} = \left[3\alpha - 7, 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) - 4 \right],$$

$$\widetilde{A - B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A - B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 25 se tiene}$$

$$[\widetilde{A - B}]^{\alpha} = \left[\frac{-7}{2} + \frac{6+3\alpha-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}}{2}, \frac{-7}{2} + \frac{9+\sqrt{4-4\alpha}+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2})}{2} \right]$$

$$\widetilde{A \cdot B} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 26 primer renglón se tiene}$$

$$[\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} = \left[2\left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} + \frac{5}{2}(3\alpha + 1)\right), 2\left(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}\right) + \frac{5}{2}\left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$\widetilde{B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} [\widetilde{B^{-1}}]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 27 se tiene}$$

$$\left[\widetilde{B^{-1}}\right]^{\alpha} = \left[\frac{1}{16}(3\alpha + 1), \frac{1}{16}(4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}))\right]$$

$$\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A \cdot B^{-1}}\right]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 28 primer renglón se tiene}$$

$$\left[\widetilde{A \cdot B^{-1}}\right]^{\alpha} = \left[\frac{1}{8}(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}) + \frac{5}{32}(3\alpha + 1), \frac{1}{8}(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{32}(4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}))\right]$$

Ejemplo 2.7. Sean

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \quad \overline{A}_{\alpha} = 6 + \alpha,$$

$$\widetilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 2 + \ln\alpha, \quad \overline{B}_{\alpha} = 4 - \ln\alpha.$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, obtenemos:

$$\widetilde{A + B} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A + B}\right]^{\alpha}, \text{ por definición 23, ecuación 23 se tiene}$$

$$\left[\widetilde{A + B}\right]^{\alpha} = \left[\frac{7}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4\alpha} + \ln\alpha}{2}, \frac{7}{2} + \frac{10 - \alpha - \ln\alpha}{2}\right]$$

$$\widetilde{-B} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{-B}\right]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 24 se tiene}$$

$$\left[\widetilde{-B}\right]^{\alpha} = [-4 + \ln\alpha, -2 - \ln\alpha],$$

$$\widetilde{A - B} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A - B}\right]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 25 se tiene}$$

$$\left[\widetilde{A - B}\right]^{\alpha} = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4\alpha} + \ln\alpha}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - \alpha - \ln\alpha}{2}\right],$$

$$\widetilde{A \cdot B} = \bigcup_{\alpha} [A \cdot B]^{\alpha}, \text{ por definición 2.1, ecuación 26 primer renglón se tiene}$$

$$[A \cdot B]^{\alpha} = \left[\frac{3}{2}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + 2(2 + \ln\alpha), \frac{3}{2}(6 - \alpha) + 2(4 - \ln\alpha)\right],$$

$$\widetilde{B^{-1}} = \bigcup \left[\widetilde{B^{-1}} \right]^\alpha, \text{ por definici3n 2.1, ecuaci3n 27 se tiene}$$

$$\left[\widetilde{B^{-1}} \right]^\alpha = \left[\frac{2+\ln\alpha}{9}, \frac{4-\ln\alpha}{9} \right],$$

$$\widetilde{A \cdot B^{-1}} = \bigcup \left[\widetilde{A \cdot B^{-1}} \right]^\alpha, \text{ por definici3n 2.1, ecuaci3n 28 primer rengl3n se tiene}$$

$$\left[\widetilde{A \cdot B^{-1}} \right]^\alpha = \left[\frac{1}{6}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{2}{9}(2 + \ln\alpha), \frac{1}{6}(6 - \alpha) + \frac{2}{9}(4 - \ln\alpha) \right].$$

El siguiente Teorema expresa una diferencia entre el uso del principio de extensi3n (PE) y la traslaci3n (TPN).

Teorema 2.8. *El soporte del resultado de operaciones aritm3ticas difusas basadas en TPN esta contenido en el soporte del resultado usando operaciones aritm3ticas difusas basadas en el PE.*

Demostraci3n. Consideramos los n3meros pseudo - triangulares

$$\widetilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a}, l_{\widetilde{A}}(x), r_{\widetilde{A}}(x)), \text{ y } \widetilde{B} = (\underline{b}, b, \bar{b}, l_{\widetilde{B}}(x), r_{\widetilde{B}}(x)), \text{ positivos, esto es, } \underline{a} > 0, \underline{b} > 0.$$

La suma usando el principio de extensi3n (PE) es:

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} = (\underline{a} + \underline{b}, a + b, \bar{a} + \bar{b}, l_{\widetilde{A} + \widetilde{B}}(x), r_{\widetilde{A} + \widetilde{B}}(x)).$$

La clausura del soporte de $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ es:

$$[\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]. \quad (29)$$

La suma $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ basada en TPN aqu3: $\phi = a, \psi = b$

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{A + B} \right]^\alpha &= \left[\frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{A_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{\phi + \psi}{2} + \left(\frac{\bar{A}_\alpha + \bar{B}_\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{a + b}{2} + \left(\frac{A_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{a + b}{2} + \left(\frac{\bar{A}_\alpha + \bar{B}_\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A+B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A+B}]^{\alpha} \\ &= \left[\frac{a+b}{2} + \left(\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} \right), \frac{a+b}{2} + \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \right) \right].\end{aligned}$$

La clausura del soporte de $\widetilde{A+B}$ es:

$$\left[\frac{a+b}{2} + \left(\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} \right), \frac{a+b}{2} + \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \right) \right], \quad (30)$$

A continuación comparamos los extremos de los soportes 29 y 30.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} + \left(\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} \right) &\geq \frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2} \right) = \underline{a} + \underline{b}. \\ \frac{a+b}{2} + \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \right) &\leq \frac{a+b}{2} + \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \right) = \bar{a} + \bar{b}.\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\text{Soporte}(\widetilde{A+B}) \subseteq \text{Soporte}(\widetilde{A} + \widetilde{B}).$$

Usando el principio de extensión (PE), la clausura del soporte de $\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$ es

$$[\min \{ \underline{a} \underline{b}, \underline{a} \bar{b}, \bar{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b} \}, ab, \max \{ \underline{a} \underline{b}, \underline{a} \bar{b}, \bar{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b} \}] = [\underline{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b}] \quad (31)$$

Usando (TPN), en este caso usamos el primer de la ecuación del producto, $\phi = a > 0$,

$\psi = b > 0$.

$$\begin{aligned}[\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} &= \left[\frac{\psi}{2} \underline{A}_{\alpha} + \frac{\phi}{2} \underline{B}_{\alpha}, \quad \frac{\psi}{2} \bar{A}_{\alpha} + \frac{\phi}{2} \bar{B}_{\alpha} \right] \\ &= \left[\frac{b}{2} \underline{A}_{\alpha} + \frac{a}{2} \underline{B}_{\alpha}, \quad \frac{b}{2} \bar{A}_{\alpha} + \frac{a}{2} \bar{B}_{\alpha} \right] \\ \widetilde{A \cdot B} &= \bigcup_{\alpha} [\widetilde{A \cdot B}]^{\alpha} = \left[\frac{\underline{ab} + \underline{ab}}{2}, \quad \frac{\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} \right].\end{aligned}$$

la clausura del soporte de $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ es

$$\left[\frac{\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}}{2}, \frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} \right] \quad (32)$$

A continuación comparamos los extremos de los soportes dados en 31 y 32. En primer lugar comparamos

$\min \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}$ y $\frac{\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}}{2}$, tenemos que

$\min \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \} = \underline{a}\underline{b}$. Ahora $2\underline{a}\underline{b} = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{b} \leq \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}$,

luego

$$\underline{a}\underline{b} \leq \frac{\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}}{2}.$$

Por lo tanto

$$\min \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \} \leq \frac{\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}}{2}.$$

A continuación comparamos $\max \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}$ con $\frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2}$.

En primer lugar se tiene

$$\max \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \} = \bar{a}\bar{b}.$$

Por otro lado se tiene que

$$\frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} \leq \frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} = \bar{a}\bar{b}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} \leq \max \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}.$$

Luego

$$\left[\frac{\underline{a}\underline{b} + \underline{a}\bar{b}}{2}, \frac{\bar{a}\underline{b} + \bar{a}\bar{b}}{2} \right] \subseteq \left[\min \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}, \max \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \} \right]$$

De lo anterior se obtiene.²¹

$$\text{Soporte}(\widetilde{A * B}) \subseteq \text{Soporte}(\tilde{A} * \tilde{B}). \quad \square$$

Afirmación 2.9. La operación $\widetilde{A * B}$ esta basada en TPN mientras que $\tilde{A} * \tilde{B}$ es la operación basada en PE.

Teorema 2.10. (Elementos neutros difusos)

En el conjunto $\mathbb{F}_C(\mathbb{R})$ de los números difusos pseudo-geométricos definido en el conjunto de números reales. Se tiene:

(i) $\forall \tilde{A}$, existe un único $\widetilde{0}_{\tilde{A}}$ tal que $\widetilde{A + 0_A} = \widetilde{0_A + A} = \tilde{A}$ y $\widetilde{A - A} = \widetilde{0_{\tilde{A}}}$

(ii) $\forall \tilde{A}$ existe un único $\widetilde{1}_{\tilde{A}}$ tal que $\widetilde{A \cdot 1_A} = \widetilde{1_A \cdot A} = \tilde{A}$ y $\widetilde{A \cdot A^{-1}} = \widetilde{1_{\tilde{A}}}$, si $\phi = ac(\tilde{A}) \neq 0$.

Aquí

$$\widetilde{0}_{\tilde{A}} = \left(\underline{a} - \phi, \frac{a_1 - a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2}, \bar{a} - \phi, l_A(x + \phi), r_A(x + \phi) \right) \quad (33)$$

y

$$\widetilde{1}_{\tilde{A}} = \begin{cases} \left(\frac{a}{\phi}, \frac{a_1}{\phi}, \frac{a_2}{\phi}, \frac{\bar{a}}{\phi}, l_{\tilde{A}}(x\phi), r_{\tilde{A}}(x\phi) \right) & \text{si } \phi > 0 \\ \left(\frac{\bar{a}}{\phi}, \frac{a_1}{\phi}, \frac{a_2}{\phi}, \frac{a}{\phi}, l_{\tilde{A}}(x\phi), r_{\tilde{A}}(x\phi) \right) & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (34)$$

Demostración. (i)

A continuación mostramos que $\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^{\alpha}$

A partir de

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_A(x), r_A(x)) \\ \widetilde{0}_{\tilde{A}} &= \left(\underline{a} - \phi, \frac{a_1 - a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2}, \bar{a} - \phi, l_A(x + \phi), r_A(x + \phi) \right) \end{aligned}$$

En primer lugar.

Sean $\phi = ac(\tilde{A}) = \frac{a_1 + a_2}{2}$, y

$$\psi = ac(\widetilde{0}_{\tilde{A}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 - a_2}{2} \right) = \tilde{0}.$$

Porque $\psi = 0$.

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^\alpha &= \left[\frac{\phi + \tilde{0}}{2} + \frac{A_\alpha + \tilde{0}_\alpha}{2}, \frac{\phi + \tilde{0}}{2} + \frac{\bar{A}_\alpha + \tilde{0}_\alpha}{2} \right] \\ \widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} &= \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^\alpha = \left[\frac{\phi}{2} + \frac{a_\alpha + \underline{a}_\alpha - \phi}{2}, \frac{\phi}{2} + \frac{\bar{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha - \phi}{2} \right] \\ &= \left[\frac{\phi}{2} + \underline{a} - \frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} + \bar{a} - \frac{\phi}{2} \right] = [\underline{a}, \bar{a}]. \end{aligned}$$

Note que $[\underline{a}, \bar{a}] = \left[\widetilde{A} \right]^0$, la clausura del soporte de \tilde{A}

Por definición 2.1, ecuación 23 se tiene.

$$\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^\alpha.$$

Por la conmutatividad se tiene.

$$0_{\tilde{A}} + A = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^\alpha.$$

Por la definición de $0_{\tilde{A}}$ se tiene.

$$\left[\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} \right]^\alpha = [A]^\alpha.$$

Entonces

$$\widetilde{A + 0_{\tilde{A}}} = 0_{\tilde{A}} + A = \tilde{A}.$$

Veamos que $\widetilde{A - A} = \widetilde{0_{\tilde{A}}}$

$$\tilde{A} = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_A(x), r_A(x))$$

Sea $\phi = a.c(\tilde{A}) = \frac{a_1 + a_2}{2} > 0$.

Usando 25 de la definición 2.1 se tiene.

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{A - A} \right]^\alpha &= \left[\frac{\phi - 3\phi}{2} + \frac{A_\alpha + \underline{A}_\alpha}{2}, \frac{\phi - 3\phi}{2} + \frac{\bar{A}_\alpha + \bar{A}_\alpha}{2} \right] \\
\widetilde{A - A} &= \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \left[\widetilde{A + A} \right]^\alpha = \left[\frac{-2\phi}{2} + \frac{a_\alpha + \underline{a}_\alpha}{2}, \frac{-\phi}{2} + \frac{\bar{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha}{2} \right] \\
&= \left[-\phi + \frac{2a}{2}, -\phi + \frac{2\bar{a}}{2} \right] \\
\left[\widetilde{A - A} \right]^\alpha &= [-\phi + \underline{a}, -\phi + \bar{a}]. \\
&= [\underline{a} - \phi, \bar{a} - \phi]. \\
&= \left[\widetilde{0_{\widetilde{A}}} \right]^0
\end{aligned}$$

por la definición de $\widetilde{0_{\widetilde{A}}}$ y por ecuación 25 de la definición 2.1.

Por lo tanto por ²¹

$$\widetilde{0_{\widetilde{A}}} = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{0_{\widetilde{A}}} \right]^\alpha = \left[\widetilde{0_{\widetilde{A}}} \right]^0 = \bigcup_{\alpha} \left[\widetilde{A - A} \right]^\alpha = \widetilde{A - A}.$$

□

Observación 2.11. El núcleo de $\widetilde{0_{\widetilde{A}}} = \left[\frac{a_1 - a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2} \right]$ se obtiene restando ϕ ;

$$\begin{aligned}
a_1 - \phi &= a_1 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) = a_1 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \\
&= \frac{1}{2}a_1 - \frac{a_2}{2} = \frac{a_1 - a_2}{2} \\
a_2 - \phi &= a_2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) = a_2 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \\
&= \frac{1}{2}a_2 - \frac{a_1}{2} = \frac{a_2 - a_1}{2}.
\end{aligned}$$

(ii) Como: $\widetilde{A} = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_{\widetilde{A}}(x), r_{\widetilde{A}}(x))$,

y supongamos que

$$\begin{aligned}\phi = a.c(\tilde{A}) &= \frac{a_1 + a_2}{2} > 0, \text{ entonces} \\ \widetilde{1_{\tilde{A}}} &= \left(\frac{a}{\phi}, \frac{a_1}{\phi}, \frac{a_2}{\phi}, \frac{\bar{a}}{\phi}, l_{\tilde{A}}(x\phi), r_{\tilde{A}}(x\phi) \right) \\ \psi = a.c(1_{\tilde{A}}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_1}{\phi} + \frac{a_2}{\phi} \right] = \frac{1}{\phi} \left[\frac{a_1 + a_2}{2} \right] \\ &= \frac{\phi}{\phi} = 1\end{aligned}$$

Sea $B = \widetilde{1_{\tilde{A}}}$, con esta notación se tiene

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{A \cdot 1_{\tilde{A}}} \right]^\alpha &= \left[\frac{1}{2} A_\alpha + \frac{\phi}{2} B_\alpha, \frac{1}{2} \overline{A}_\alpha + \frac{\phi}{2} \overline{B}_\alpha \right] \\ \widetilde{A \cdot 1_{\tilde{A}}} &= \bigcup_\alpha \left[\widetilde{A \cdot 1_{\tilde{A}}} \right]^\alpha = \left[\frac{1}{2} a + \frac{\phi}{2} \frac{a}{\phi}, \frac{1}{2} \bar{a} + \frac{\phi}{2} \frac{\bar{a}}{\phi} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a, \frac{1}{2} \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{a} \right] \\ &= [a, \bar{a}] = [A]^0,\end{aligned}$$

la clausura del soporte de \tilde{A} es $[A]^0$. Por lo tanto.

$$\widetilde{A \cdot 1_{\tilde{A}}} = \bigcup_\alpha \left[\widetilde{A \cdot 1_{\tilde{A}}} \right]^\alpha = \tilde{A}.$$

Analogamente se demuestra que.

$$\widetilde{1_{\tilde{A}} \cdot A} = \tilde{A}.$$

Finalmente demostramos que : $\left[\widetilde{A \cdot A^{-1}} \right] = \widetilde{1_{\tilde{A}}}$.

Sea

$$\tilde{A} = (a, \underline{a_1}, \underline{a_2}, \bar{a}, l_{\tilde{A}}(x), r_{\tilde{A}}(x))$$

y supongamos que $\phi = a.c(\tilde{A}) = \frac{a_1+a_2}{2} > 0$

de ecuación 27 definición 2.1 se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi = a.c(\tilde{A}^{-1}) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\phi^2} \right) a_1 + \left(\frac{1}{\phi^2} \right) a_2 \right] \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left[\frac{a_1 + a_2}{2} \right] \\ &= \frac{\phi}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}\end{aligned}$$

$\psi = \frac{1}{\phi}$, y $\psi > 0$.

Ahora usando el primer renglón en 28

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{A \cdot A^{-1}} \right]^\alpha &= \left[\frac{1}{2\phi} A_\alpha + \left(\frac{\phi}{2\phi^2} \right) A_\alpha, \quad \frac{1}{2\phi} \bar{A}_\alpha + \left(\frac{\phi}{2\phi^2} \right) \bar{A}_\alpha \right] \\ &= \left[\frac{1}{\phi} A_\alpha, \quad \frac{1}{\phi} \bar{A}_\alpha \right] \\ \bigcup_\alpha \left[\widetilde{A \cdot A^{-1}} \right]^\alpha &= \bigcup_\alpha \left[\frac{1}{\phi} A_\alpha, \quad \frac{1}{\phi} \bar{A}_\alpha \right] \\ &= \left[\frac{1}{\phi} a, \quad \frac{1}{\phi} \bar{a} \right].\end{aligned}$$

Este último intervalo es la clausura del soporte de $\widetilde{1_{\tilde{A}}} = \left(\frac{1}{\phi} a, \frac{1}{\phi} a_1, \frac{1}{\phi} a_2, \frac{1}{\phi} \bar{a}, l_{\tilde{A}}(x\phi), r_{\tilde{A}}(x\phi) \right)$.

Por lo tanto.

$$\widetilde{A \cdot A^{-1}} = \bigcup_\alpha \left[\widetilde{A \cdot A^{-1}} \right]^\alpha = \widetilde{1_{\tilde{A}}}.$$

Análogamente se tiene que.

$$\widetilde{A^{-1} \cdot A} = \bigcup_\alpha \left[\widetilde{A^{-1} \cdot A} \right]^\alpha = \widetilde{1_{\tilde{A}}}.$$

3. Números difusos aproximados

En este Capítulo mostramos que las operaciones basadas en TPN en general proporcionan soluciones aproximadas y cuando los coeficientes involucrados en las ecuaciones tienen un cierto tipo de relación se obtienen soluciones exactas.

3.1. Relaciones tipo 1 y tipo 2

La siguiente definición introduce una clase de equivalencia.

Definición 3.1. ²¹

Los números difusos \tilde{A} y \tilde{B} están relacionados tipo 1, si y solo si para todo $\alpha \in [0, 1)$ existen expresiones que dependen de α , notadas $t_{1\alpha}$, y $t_{2\alpha}$ tales que;

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) &= a + t_{1\alpha}, & \underline{\mu}_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) &= b + t_{1\alpha}, \\ \overline{\mu}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) &= a + t_{2\alpha}, & \overline{\mu}_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) &= b + t_{2\alpha},\end{aligned}$$

donde $a = ac(A)$ y $b = ac(B)$.

Si \tilde{A} y \tilde{B} están relacionados tipo 1 escribimos $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$

Ejemplo 3.2. Considere los seis números difusos.

$$A_1 = (1, 5, 7, -, -),$$

$$A_2 = (1, 4, 8, -, -),$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{4}, 1, 2, -, -\right),$$

$$A_4 = (3, 4, 5, -, -),$$

$$A_5 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{7}{5}, -, -\right),$$

$$A_6 = (1, 2, 3, -, -).$$

Determine

(i) $A_4 \sim_1 A_6$,

(ii) $A_2 \approx_1 A_1$, (A_2 no esta relacionado tipo 1 con A_1)

(iii) $A_3 \approx_1 A_5$ (A_3 no esta relacionado tipo 1 con A_5)

Demostración. Veamos (i): $A_4 \sim_1 A_6$

$$A_4 = (3, 4, 5, -, -),$$

$$A_6 = (1, 2, 3, -, -).$$

Para A_4 determinemos $\underline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

La recta que une los puntos $(3, 0)$ y $(4, 1)$ es $y = x - 3$. Sea $\alpha = x - 3$, entonces

$$\alpha + 3 = x = \underline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha).$$

Para A_6 determinemos $\underline{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(2, 1)$ es $y = x - 1$.

Sea $\alpha = x - 1$, entonces $\alpha + 1 = x = \underline{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha)$.

Determinemos $\overline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(5, 0)$ es $y = (5 - x)$.

Sea $\alpha = 5 - x$, entonces $5 - \alpha = x = \overline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

Ahora determinemos $\overline{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(3, 0)$ es $y = 3 - x$.

Sea $\alpha = 3 - x$, entonces $3 - \alpha = x = \overline{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha)$

Como $a.c(A_4) = 4$ y $a.c(A_6) = 2$, se tiene,

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha) = \alpha + 3 = 4 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \alpha - 1 \\ \underline{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha) = \alpha + 1 = 2 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \alpha - 1, \end{cases}$$

Ahora.

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha) = 5 - \alpha = 4 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 1 - \alpha \\ \bar{\mu}_{A_6}^{-1}(\alpha) = 3 - \alpha = 2 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 1 - \alpha \end{cases}$$

Luego $A_4 \sim_1 A_6$.

veamos (ii): A_2 no está relacionado tipo 1 con A_1 .

$$A_2 = (1, 4, 8, -, -),$$

$$A_1 = (1, 5, 7, -, -),$$

Para A_2 determinemos $\underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(4, 1)$ es $y = \frac{1}{3}(x - 1)$.

Sea $\alpha = \frac{x-1}{3}$, entonces $3\alpha + 1 = x = \underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

Para A_1 determinemos $\underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(5, 1)$ es $y = \frac{1}{4}(x - 1)$

Sea $\alpha = \frac{x-1}{4}$, entonces $4\alpha - 1 = x = \underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

Para A_2 determinemos $\bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(8, 0)$ es $y = \frac{1}{4}(8 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{4}(8 - x)$ entonces $8 - 4\alpha = x = \bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

Para A_1 determinemos $\bar{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(5, 1)$ y $(7, 0)$ es $y = \frac{1}{2}(7 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(7 - x)$ entonces $7 - 2\alpha = x = \bar{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

Como $a.c(A_2) = 4$ y $ac(A_1) = 5$, se tiene,

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha) = 3\alpha + 1 = 4 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = 3\alpha - 3 \\ \underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha) = 4\alpha + 1 = 5 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = 4\alpha - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha) = 8 - 4\alpha = 4 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 4 - 4\alpha \\ \underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha) = 7 - 2\alpha = 5 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 2 - 2\alpha \end{cases}$$

como $3\alpha - 3 = 4\alpha - 3$, solo para $\alpha = 0$, entonces A_2 no esta relacionado tipo 1 con A_1 .

Veamos (iii): A_3 no está relacionado tipo 1 con A_5 .

$$A_3 = \left(\frac{1}{4}, 1, 2, -, -\right),$$

$$A_5 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{7}{5}, -, -\right),$$

Para A_3 determinemos $\underline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{4}, 0)$ y $(1, 1)$ es $y = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{4})$.

Sea $\alpha = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ entonces $\frac{3\alpha+1}{4} = x = \underline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

Para A_5 determinemos $\underline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{5}, 0)$ y $(1, 1)$ es $y = \frac{5}{4}(x - \frac{1}{5})$

Sea $\alpha = \frac{5}{4}(x - \frac{1}{5})$ entonces $\frac{4\alpha+1}{5} = x = \underline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha)$.

Para A_3 determinemos $\overline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 0)$ es $y = 2 - x$

Sea $\alpha = 2 - x$ entonces $2 - \alpha = x = \overline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

Para A_5 determinemos $\overline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(\frac{7}{5}, 0)$ es $y = \frac{5}{2}(\frac{7}{5} - x)$

Luego $\alpha = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}x$ entonces $\frac{7-2\alpha}{5} = x = \overline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha)$.

Como $a.c(A_3) = 1$ y $a.c(A_5) = 1$, se tiene,

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4} = 1 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{3\alpha}{4} - \frac{3}{4} \\ \underline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha) = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5} = 1 + t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{4\alpha}{5} - \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha) = 2 - \alpha = 1 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 1 - \alpha \\ \overline{\mu}_{A_5}^{-1}(\alpha) = \frac{7}{5} - \frac{2\alpha}{5} = 1 + t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Como $\frac{3\alpha}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4\alpha}{5} + \frac{4}{5}$ solo para cuando $\alpha = 1$, entonces A_3 no esta relacionado tipo 1 con A_5 . □

Definición 3.3. Los números difusos \tilde{A} y \tilde{B} estan relacionados tipo 2, si y solo si $\forall \alpha \in [0, 1]$ existen dos expresiones que dependen de α , notadas $t_{1\alpha}$, y $t_{2\alpha}$ tales que;

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) &= a \cdot t_{1\alpha}, & \underline{\mu}_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) &= b \cdot t_{1\alpha}, \\ \overline{\mu}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) &= a \cdot t_{2\alpha}, & \overline{\mu}_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) &= b \cdot t_{2\alpha},\end{aligned}$$

donde $a.c(\tilde{A}) = a$ y $ac(\tilde{B}) = b$

Ejemplo 3.4. Considere los cuatro números difusos.

$$A_1 = (1, 5, 7, -, -),$$

$$A_2 = (1, 4, 8, -, -),$$

$$A_3 = (\frac{1}{4}, 1, 2, -, -),$$

$$A_4 = (\frac{1}{5}, 1, \frac{7}{5}, -, -),$$

determine

(i) $A_2 \sim_2 A_3$,

(ii) $A_1 \sim_2 A_4$,

Demostración. veamos (i): $A_2 \sim_2 A_3$.

$$A_2 = (1, 4, 8, -, -),$$

$$A_3 = (\frac{1}{4}, 1, 2, -, -),$$

Para A_3 determinemos $\underline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{4}, 0)$ y $(1, 1)$ es $y = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{4})$.

Sea $\alpha = \frac{4}{3}x - \frac{1}{4}$ entonces $\frac{3\alpha+1}{4} = x = \underline{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

Para A_2 determinemos $\underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(4, 1)$ es $y = \frac{1}{3}(x - 1)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{3}(x - 1)$ entonces $3\alpha + 1 = x = \underline{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

Para A_3 determinemos $\bar{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 0)$ es $y = 2 - x$.

Sea $\alpha = 2 - x$ entonces $2 - \alpha = x = \bar{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha)$.

Para A_2 determinemos $\bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(8, 0)$ es $y = \frac{1}{4}(8 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{4}(8 - x)$ entonces $8 - 4\alpha = x = \bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha)$.

Como $ac(A_2) = 4$ y $ac(A_3) = 1$, se tiene,

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4} = 1 \cdot t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4} \\ \bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha) = 3\alpha + 1 = 4 \cdot t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4} \end{cases} \quad (35)$$

Ahora.

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{A_3}^{-1}(\alpha) = 2 - \alpha = 1 \cdot t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 2 - \alpha \\ \bar{\mu}_{A_2}^{-1}(\alpha) = 8 - 4\alpha = 4 \cdot t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = 2 - \alpha \end{cases} \quad (36)$$

Luego $A_2 \sim_2 A_3$.

La ecuación 35 significa que los puntos a la izquierda del núcleo A_3 y del núcleo de A_2 tienen el mismo factor, $t_{1\alpha} = \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4}$ y la ecuación 36 significa que los puntos a la derecha del núcleo de A_3 y del núcleo de A_2 tienen el mismo factor, $t_{2\alpha} = 2 - \alpha$

Veamos (ii):

$$A_1 = (1, 5, 7, -, -),$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{7}{5}, -, -\right),$$

Para A_4 determinemos $\bar{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{5}, 0)$ y $(1, 1)$ es $y = \frac{5}{4}(x - \frac{1}{5})$.

Sea $\alpha = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$ entonces $\frac{4\alpha+1}{5} = x = \bar{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

Para A_1 determinemos $\bar{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(5, 1)$ es $y = \frac{1}{4}(x - 1)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{4}(x - 1)$ entonces $4\alpha + 1 = x = \underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

Para A_4 determinemos $\overline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(\frac{7}{5}, 0)$ es $\frac{5}{2}(\frac{7}{5} - x)$.

Sea $\alpha = \frac{5}{2}(\frac{7}{5} - x)$ entonces $\frac{7-2\alpha}{5} = x = \overline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha)$.

Para A_1 determinemos $\overline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

La recta que pasa por los puntos $(5, 1)$ y $(7, 0)$ es $y = \frac{1}{2}(7 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(7 - x)$ entonces $7 - 2\alpha = x = \overline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha)$.

Ahora, como $a.c(A_1) = 5$ y $a.c(A_4) = 1$, se tiene,

$$\begin{cases} \underline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha) = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5} = 1 \cdot t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5} \\ \underline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha) = 4\alpha + 1 = 5 \cdot t_{1\alpha}, & t_{1\alpha} = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5} \end{cases} \quad (37)$$

Por lo tanto $t_{1\alpha} = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5}$.

Ahora.

$$\begin{cases} \overline{\mu}_{A_4}^{-1}(\alpha) = \frac{-2\alpha}{5} + \frac{7}{5} = 1 \cdot t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = \frac{-2\alpha}{5} + \frac{7}{5} \\ \overline{\mu}_{A_1}^{-1}(\alpha) = -2\alpha + 7 = 5 \cdot t_{2\alpha}, & t_{2\alpha} = \frac{-2\alpha}{5} + \frac{7}{5} \end{cases} \quad (38)$$

luego $A_1 \sim_2 A_4$.

La ecuación 37 significa que los puntos a la izquierda del núcleo A_4 y del núcleo de A_1 tienen el mismo factor $t_{1\alpha} = \frac{4\alpha}{5} + \frac{1}{5}$ y la ecuación 38 significa que los puntos a la derecha del núcleo de A_4 y del núcleo de A_1 tienen el mismo factor $t_{2\alpha} = \frac{-2\alpha}{5} + \frac{7}{5}$. \square

Definición 3.5. (par difuso)²¹.

Los números difusos \tilde{A} , y \tilde{B} , están relacionados $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ si y solo si $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$ o $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$

3.2. Números difusos aproximados

Definición 3.6. (aproximación difusa)²¹.

Sean \tilde{A}, \tilde{B} dos números difusos, entonces, $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ si y solo si $a.c(\tilde{A}) = a.c(\tilde{B})$.

Ejemplo 3.7. Considerando los números difusos

$$A_1 = (1, 5, 7, -, -),$$

$$A_2 = (1, 4, 8, -, -),$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{4}, 1, 2, -, -\right),$$

$$A_4 = (3, 4, 5, -, -),$$

$$A_5 = \left(0, 4, 6, \frac{1}{4}x, 1, \left(1 - \frac{1}{4}(x - 4)^2\right)^2\right),$$

$$A_6 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{7}{5}, -, -\right).$$

Por la definición 3.6 se obtiene.

$$A_3 \cong A_6, A_4 \cong A_2, A_4 \cong A_5, A_2 \cong A_5, A_4 \not\cong A_1.$$

3.3. Álgebra de las operaciones basadas en TPN

En esta Sección presentamos algunas propiedades relevantes de las operaciones basadas en TPN. ²¹ .

Proposición 3.8. Si $\tilde{A} = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, -, -)$, $\tilde{0}_{\tilde{A}} = (\underline{a} - \phi, \frac{a_1 - a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2}, \bar{a} - \phi, -, -)$. donde $\phi = ac(\tilde{A}) = \frac{a_1 + a_2}{2}$ y $\tilde{1}_{\tilde{A}} = \left(\frac{a}{\phi}, \frac{a_1}{\phi}, \frac{a_2}{\phi}, \frac{\bar{a}}{\phi}, -, -\right)$ en este caso $\phi > 0$, entonces.

$$(i) \tilde{A} \sim_1 \tilde{0}_{\tilde{A}}$$

$$(ii) \tilde{A} \sim_2 \tilde{1}_{\tilde{A}}$$

Demostración. Veamos (i) $\tilde{A} \sim_1 \tilde{0}_{\tilde{A}}$

Determinemos $\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)$.

La recta que une a los puntos $(\underline{a}, 0)$ y $(a_1, 1)$ es $y = \frac{x - \underline{a}}{a_1 - \underline{a}}$.

Sea $\alpha = \frac{x - \underline{a}}{a_1 - \underline{a}}$, entonces $\alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a} = x = \phi + \alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a} - \phi = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)$

Determinemos $\underline{\mu}_{0_A}^{-1}(\alpha)$.

La recta que une a los puntos $(\underline{a} - \phi, 0)$ y $(\frac{a_1 - a_2}{2}, 1)$ es $y = \frac{x - \underline{a} + \phi}{a_1 - \underline{a}}$.

Sea $\alpha = \frac{x - \underline{a} + \phi}{a_1 - \underline{a}}$, entonces $\alpha(a_1 - \underline{a}) = x - \underline{a} + \phi$, por lo tanto $\alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a} - \phi = x = \underline{\mu}_{0_A}^{-1}(\alpha)$.

Ya que

$$\begin{aligned} ac(\tilde{0}_{\tilde{A}}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 + a_2}{2} - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

entonces $x = ac(\tilde{0}_{\tilde{A}}) + \alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a} - \phi = \underline{\mu}_{0_A}$. Por lo tanto $t_{1\alpha} = \alpha(\underline{a} - \underline{a}) + \underline{a} - \phi$.

Determinemos $\bar{\mu}_A^{-1}(\alpha)$.

La recta que une a los \hat{A} puntos $(a_2, 1)$ y $(\bar{a}, 0)$ es $y = \frac{1(\bar{a}-x)}{\bar{a}-a_2}$. Sea $\frac{\bar{a}-x}{\bar{a}-a_2} = \alpha$

luego $\bar{a} - x = \alpha(\bar{a} - a_2)$ por lo tanto $\bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2) = x = \bar{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \phi + \bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2) - \phi = \bar{\mu}_A^{-1}(\alpha)$.

Determinemos $\bar{\mu}_{0_A}^{-1}(\alpha)$.

La recta que une a los \hat{A} puntos $(\frac{a_2-a_1}{2}, 1)$ y $(\bar{a} - \phi, 0)$ es $y = \frac{1(\bar{a}-\phi-x)}{\bar{a}-a_2}$. Sea $\frac{\bar{a}-\phi-x}{\bar{a}-a_2} = \alpha$, entonces $\bar{a} - \phi - \alpha(\bar{a} - a_2) = x = ac(\tilde{0}_{\tilde{A}}) + \bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2) - \phi = \bar{\mu}_{0_A}^{-1}(\alpha)$.

Por lo tanto $t_{2\alpha} = \bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2) - \phi$.

De lo anterior $\tilde{A} \sim_1 \tilde{0}_{\tilde{A}}$.

veamos(ii) $\tilde{A} \sim_2 \tilde{1}_{\tilde{A}}$

Determinemos $\underline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha)$.

La recta que une a los puntos $(\frac{a}{\phi}, 0)$ y $(\frac{a_1}{\phi}, 1)$ es $y = \frac{\phi x - a}{a_1 - a}$. Sea $\alpha = \frac{\phi x - a}{a_1 - a}$, entonces

$$x = \frac{\alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a}}{\phi} = \underline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha).$$

$$ac(\tilde{1}_{\tilde{A}}) = \frac{1}{2} \left[\frac{a_1}{\phi} + \frac{a_2}{\phi} \right]$$

$$= \frac{1}{\phi} = 1$$

Así que $\underline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha) = 1 \cdot \frac{\alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a}}{\phi}$. Ahora tenemos que

$$\underline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha) = \alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a} = \phi \left[\frac{\alpha(a_1 - \underline{a}) + \underline{a}}{\phi} \right].$$

Determinemos $\overline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha)$

la recta que une a los puntos $(\frac{a_2}{\phi}, 1)$ y $(\frac{\bar{a}}{\phi}, 0)$ es $y = \frac{\phi(\frac{\bar{a}}{\phi} - x)}{\bar{a} - a_2}$. Sea $\alpha = \frac{\bar{a} - \phi x}{\bar{a} - a_2}$ entonces

$x = \frac{\bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2)}{\phi} = \overline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha)$ Del caso (i) $\overline{\mu}_{1_A}^{-1}(\alpha) = \phi \left(\frac{\bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2)}{\phi} \right)$, luego $t_{2\alpha} = \frac{\bar{a} - \alpha(\bar{a} - a_2)}{\phi}$. De lo

anterior se concluye que $\tilde{A} \sim_2 \tilde{1}_{\tilde{A}}$. □

Lema 3.9. Sea $F_c(\mathbb{R})$ el conjunto de los numeros difusos pseudo-geometricos, entonces. $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in F_c(\mathbb{R});$

$$(1) \widetilde{0_D + A} \cong \tilde{A}, \widetilde{0_D} + A \cong \tilde{A}, \leftrightarrow \widetilde{0_D + A} \cong \tilde{A},$$

$$(2) \widetilde{1 \cdot A} \cong \tilde{A}, \widetilde{1_D \cdot A} \cong \tilde{A},$$

$$(3) \widetilde{A + A} = \widetilde{2A},$$

$$(4) \widetilde{A + \widetilde{A} + A} \cong \widetilde{3A},$$

$$(5) \widetilde{-(-A)} = \tilde{A},$$

$$(6) \widetilde{-(A + B)} = \widetilde{-A - B},$$

$$(7) \widetilde{A^n} = \tilde{A} \cdot \tilde{A} \cdots \tilde{A},$$

$$(10) \widetilde{A + B} = \widetilde{B + A},$$

$$(11) \widetilde{A \cdot B} = \widetilde{B \cdot A},$$

$$(12) A + \widetilde{(B + C)} \cong \widetilde{(A + B)} + C,$$

$$(13) A \cdot \widetilde{(B \cdot C)} \cong \widetilde{(A \cdot B)} \cdot C,$$

$$(14) A \cdot (\widetilde{B + C}) \cong (A \cdot \widetilde{B}) + (A \cdot \widetilde{C}),$$

$$(15) (\widetilde{B + C}) \cdot A \cong (\widetilde{B \cdot A}) + (\widetilde{C \cdot A}).$$

$$= \begin{cases} (\underline{a}a^{n-1}, a^n, \bar{a}a^{n-1}, l_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}}), r_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}})), & a > 0 \\ \begin{cases} (\bar{a}a^{n-1}, a^n, \underline{a}a^{n-1}, l_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}}), r_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}})), & n \text{ par } a < 0 \\ (\underline{a}a^{n-1}, a^n, \bar{a}a^{n-1}, l_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}}), r_{\tilde{A}}(\frac{x}{a^{n-1}})), & n \text{ impar } a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Lema 3.10. Sean \tilde{A}, \tilde{B} dos numeros difusos pseudo - triangulares definidos por 1.5

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} l_{\tilde{A}}(x) & \underline{a} \leq x \leq a \\ 1 & x = a \\ r_{\tilde{A}}(x) & a \leq x \leq \bar{a} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (39)$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} l_{\tilde{B}}(x) & \underline{b} \leq x \leq b \\ 1 & x = b \\ r_{\tilde{B}}(x) & b \leq x \leq \bar{b} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (40)$$

entonces $\tilde{A} = \tilde{B}$ si y solo si $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$

Demostración. \Rightarrow) Si $\tilde{A} = \tilde{B}$ entonces $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$.

$$\text{Si } \tilde{A} = \tilde{B} \text{ entonces } \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \forall x \in \mathbb{R} \quad (41)$$

si $a < b$, $l_{\tilde{B}}(a) < l_{\tilde{B}}(b) = 1$, entonces $l_{\tilde{B}}(a) < l_{\tilde{A}}(a) = 1$ luego $l_{\tilde{B}}(a) \neq l_{\tilde{A}}(a)$, lo que contradice 41

si $a > b$ y $l_{\tilde{A}}(a) = 1 > l_{\tilde{A}}(b)$, como $l_{\tilde{B}}(b) = 1$ se tiene que $l_{\tilde{A}}(b) \neq l_{\tilde{B}}(b)$, lo cual contradice 41, por lo tanto $a = b$, entonces $ac(\tilde{A}) = ac(\tilde{B})$, esto es $\tilde{A} \cong \tilde{B}$.

Por otro lado $l_{\tilde{A}}(x) = l_{\tilde{B}}(x) = \alpha$, $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Sea $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a + t_{1\alpha}$, entonces $l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = a + t_{1\alpha} = b + t_{1\alpha}$.

También tenemos $r_{\tilde{A}}(x) = r_{\tilde{B}}(x) = \alpha$, entonces $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Sea $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a + t_{2\alpha} = r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$ entonces $r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b + t_{2\alpha}$. Esto es $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$.

\Leftrightarrow Si $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$ entonces $\tilde{A} = \tilde{B}$. si $\tilde{A} \cong \tilde{B}$, entonces $ac(\tilde{A}) = a = ac(\tilde{B}) = b$, esto es $a = b$. Sea $l_{\tilde{A}}(x) = \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Usando $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$, $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a + t_{1\alpha}$, y $l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b + t_{1\alpha}$. Como $a = b$, $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = x$, luego $l_{\tilde{A}}(x) = \alpha = l_{\tilde{B}}(x)$. Sea $r_{\tilde{A}}(x) = \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, ya que $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$, se tiene $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a + t_{1\alpha}$ y $r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b + t_{2\alpha}$. Por ser $a = b$, $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$, entonces $r_{\tilde{A}}(x) = \alpha = r_{\tilde{B}}(x)$. De lo anterior se concluye que $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; esto es, $\tilde{A} = \tilde{B}$. \square

Lema 3.11. Sean \tilde{A}, \tilde{B} dos números difusos pseudo - triangulares definidos lema 3.10 entonces $\tilde{A} = \tilde{B}$ si y solo si $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$.

Demostración. \Rightarrow Si $\tilde{A} = \tilde{B}$ entonces $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$. Si $\tilde{A} = \tilde{B}$ entonces como en el lema 3.9. Se tiene que $a = b$ y de aquí $\tilde{A} \cong \tilde{B}$. Además tenemos que $l_{\tilde{A}}(x) = l_{\tilde{B}}(x) = \alpha$, entonces $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Ahora sea $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a \cdot t_{1\alpha} = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b \cdot t_{1\alpha}$.

Por otro lado $r_{\tilde{A}}(x) = r_{\tilde{B}}(x) = \alpha$, entonces $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Sea $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a \cdot t_{2\alpha} = b \cdot t_{2\alpha} = r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Esto es $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$.

\Leftrightarrow Si $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$ entonces $\tilde{A} = \tilde{B}$. Como $\tilde{A} \cong \tilde{B}$, entonces $ac(\tilde{A}) = a = ac(\tilde{B}) = b$, esto es $a = b$, y $l_{\tilde{A}}(a) = l_{\tilde{B}}(a) = 1$. Como $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$ entonces $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a \cdot t_{1\alpha}$, y $l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b \cdot t_{1\alpha} = a \cdot t_{1\alpha}$, entonces $l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = l_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Sea $x = l_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$, entonces $l_{\tilde{A}}(x) = \alpha = l_{\tilde{B}}(x)$, esto es $l_{\tilde{A}}(x) = l_{\tilde{B}}(x)$. Pero también tenemos $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = a \cdot t_{2\alpha}$ y $r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha) = b \cdot t_{2\alpha}$. Como $a = b$, entonces $r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = r_{\tilde{B}}^{-1}(\alpha)$. Sea $x = r_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$ para algun x , entonces $r_{\tilde{A}}(x) = \alpha = r_{\tilde{B}}(x)$, por lo tanto $r_{\tilde{A}}(x) = r_{\tilde{B}}(x)$. Por lo anterior se concluye que $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, esto es, $\tilde{A} = \tilde{B}$. \square

4. Solución de las ecuaciones algebraicas difusas

En este Capítulo mostramos la solución de las ecuaciones difusas

4.1. Solución de la ecuación difusa $A + X = B$

Definición 4.1. Si \tilde{A}, \tilde{B} son dos números difusos pseudo-trianguulares y \tilde{X} es la incognita. Usando las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN (traslación por medio del promedio del soporte). Obtenemos una solución aproximada.

$$A + X = B$$

$$-A + (A + X) = -A + B$$

$$(-A + A) + X \cong -A + B$$

$$0_A + X \cong B - A$$

$$X \cong B - A \tag{42}$$

$B - A$ es la solución aproximada

Ejemplo 4.2. Resolver $A + X = B$ donde;

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \underline{A}_{\alpha} = 2 + \ln \alpha, \overline{A}_{\alpha} = 4 - \ln \alpha,$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \quad \overline{B}_{\alpha} = 6 - \alpha,$$

Usando la ecuación 24 en la definición 2.1 para determinar ϕ hacemos

$$-A = \bigcup_{\alpha} [-A]^{\alpha}$$

$$[-A]^{\alpha} = [-2\phi + \underline{A}_{\alpha}, -2\phi + \overline{A}_{\alpha}]$$

$$\phi = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Si $\alpha = 1$ entonces $\underline{A}_1 = 2 + \ln 1 = 2 = a_1$, y $\overline{A}_1 = 4 - \ln 1 = 4 = a_2$.

$$\phi = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3. \text{ Luego } 2\phi = 6$$

$$[-A]^{\alpha} = [-6 + \underline{A}_{\alpha}, -6 + \overline{A}_{\alpha}]$$

$$= [-6 + 2 + \ln \alpha, -6 + 4 - \ln \alpha]$$

$$= [-4 + \ln \alpha, -2 - \ln \alpha]$$

$$[-A]^{\alpha} = [-4 + \ln \alpha, -2 - \ln \alpha]$$

Así $X \cong \bigcup_{\alpha} [B - A]^{\alpha}$, donde $[B - A]^{\alpha}$ se determina usando la ecuación 25 en la defi-

nición 2.1 se tiene.

$$[B - A]^\alpha = \left[\frac{\psi - 3\phi}{2} + \frac{B_\alpha + A_\alpha}{2}, \frac{\psi - 3\phi}{2} + \frac{\overline{B}_\alpha + \overline{A}_\alpha}{2} \right].$$

A continuación determinemos $\psi = \frac{b_1 + b_2}{2}$

Si $\alpha = 1$ entonces $\underline{B}_1 = 3 - \sqrt{4 - 4} = 3 = b_1$ y

$\overline{B}_1 = 6 - 1 = 5 = b_2$, por lo tanto.

$$\psi = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\begin{aligned} [B - A]^\alpha &= \left[\frac{4-9}{2} + \frac{1}{2}[3 - \sqrt{4 - 4\alpha} + 2 + \ln\alpha], \frac{4-9}{2} + \frac{1}{2}[6 - \alpha + 4 - \ln\alpha] \right] \\ &= \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4\alpha} + \ln\alpha}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - \alpha - \ln\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

El siguiente teorema establece que $\tilde{B} - \tilde{A}$ es la solución exacta de $\tilde{A} + X = \tilde{B}$, si \tilde{A} y \tilde{B} están relacionados tipo 1

Lema 4.3. *Si en la ecuación $\tilde{A} + X = \tilde{B}$, $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$, entonces $X = \tilde{B} - \tilde{A}$ es solución exacta.*

Demostración. Se tiene que $X \cong \tilde{B} - \tilde{A}$, luego solo falta probar que $X \sim_1 \tilde{B} - \tilde{A}$.

Si $\tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$, entonces $\tilde{0}_{\tilde{A}} \sim_1 \tilde{A} \sim_1 \tilde{B}$. Además $\tilde{A} \sim_1 \tilde{A}$. Por lo tanto $\tilde{B} \sim_1 \tilde{A}$ y de aquí $\tilde{B} - \tilde{A} \sim_1 \tilde{A}$. Veamos que $X \sim_1 \tilde{A}$.

$\tilde{A} + X = \tilde{B} \sim_1 \tilde{A}$, entonces $-\tilde{A} + (\tilde{A} + X)$ es tal que.

$-\tilde{A} + (\tilde{A} + X) \sim_1 \tilde{A}$ o $-\tilde{A} + (\tilde{A} + X) \sim_1 \tilde{A} + X \sim_1 \tilde{A}$, luego $(-\tilde{A} + \tilde{A}) + X \sim_1 \tilde{A}$. Por otro

lado $(-\tilde{A} + \tilde{A}) + X = \tilde{0}_{\tilde{A}} + X = X$. Por lo tanto $X \sim_1 \tilde{A} \sim_1 \tilde{B} - \tilde{A}$, luego $X \sim_1 \tilde{B} - \tilde{A}$

□

Volviendo al ejemplo 4.2, \tilde{A} y \tilde{B} no están relacionados tipo 1, por lo tanto la solución $\tilde{B} - \tilde{A}$ es aproximada. A continuación determinamos algunos α -niveles.

$$[B - A]^\alpha = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4\alpha} + \ln\alpha}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - \alpha - \ln\alpha}{2} \right]$$

si $\alpha = 0.2$

$$[B - A]^{0.2} = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4(0.2)} + \ln(0.2)}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - 0.2 - \ln(0.2)}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - 3.21 - 1.60}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{11.40}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + 0.80, \frac{-5}{2} + 5.7 \right]$$

$$= [-1.7, 3.2]$$

si $\alpha = 0.4$

$$[B - A]^{0.4} = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4(0.4)} + \ln(0.4)}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - 0.4 - \ln(0.4)}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + \frac{2.55}{2}, \frac{5.41}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-2.45}{2}, \frac{5.51}{2} \right]$$

$$= [-1.22, 2.75]$$

si $\alpha = 0.6$

$$[B - A]^{0.6} = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4(0.6)} + \ln(0.6)}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - 0.6 - \ln(0.6)}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + \frac{3.23}{2}, \frac{4.91}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-1.77}{2}, \frac{4.91}{2} \right]$$

$$= [-0.88, 2.45]$$

si $\alpha = 0.8$

$$[B - A]^{0.8} = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4(0.8)} + \ln(0.8)}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - 0.8 - \ln(0.8)}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - 0.89 - 0.22}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{9.42}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-1.11}{2}, \frac{4.42}{2} \right]$$

$$= [-0.55, 2.21]$$

si $\alpha = 1$

$$[B - A]^1 = \left[\frac{-5}{2} + \frac{5 - \sqrt{4 - 4(1)} + \ln(1)}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{10 - 1 - \ln(1)}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-5}{2} + \frac{5}{2}, \frac{-5}{2} + \frac{9}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{-1.11}{2}, \frac{4.42}{2} \right]$$

$$= [0, 2]$$

Ejemplo 4.4. Sean \tilde{A} , \tilde{B} los números difusos dados

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \quad \overline{A}_{\alpha} = 6 - \alpha,$$

$$\tilde{B} = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 5 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \quad \overline{B}_{\alpha} = 8 - \alpha,$$

Usando la ecuación 25 en la definición 2.1.

$$[B - A]^{\alpha} = \left[\frac{\psi - 3\phi}{2} + \frac{\underline{B}_{\alpha} + \underline{A}_{\alpha}}{2}, \frac{\psi - 3\phi}{2} + \frac{\overline{B}_{\alpha} + \overline{A}_{\alpha}}{2} \right]$$

determinemos $\psi = \frac{b_1+b_2}{2}$

$$\text{si } \alpha = 1, \underline{B}_1 = 5 - \sqrt{4-4} = 5 - 0 = 5 = b_1,$$

$$\overline{B}_1 = 8 - 1 = 7 = b_2$$

$$\text{Por lo tanto } \psi = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{Si } \alpha = 1, \underline{A}_1 = 3 - \sqrt{4-4} = 3 - 0 = 3 = a_1$$

$$\overline{A}_1 = 6 - \alpha = 6 - 1 = 5 = a_2$$

$$\text{Por lo tanto } \phi = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 3 - \sqrt{4-4\alpha} = 4 + t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = -1 - \sqrt{4-4\alpha}$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 5 - \sqrt{4-4\alpha} = 6 + t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = -1 - \sqrt{4-4\alpha}$$

$$\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 6 - \alpha = 4 + t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = 2 - \alpha$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 8 - \alpha = 6 + t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = 2 - \alpha.$$

Por lo tanto $A \sim_1 B$ y por el lema 4.3 la solución $X = B - A$ es una solución exacta

de la ecuación $A + X = B$.

$$\begin{aligned}[B - A]^\alpha &= \left[\frac{6 - 3(4)}{2} + \frac{1}{2}[5 - \sqrt{4 - 4\alpha} + 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}], \frac{6 - 3(4)}{2} + \frac{1}{2}[5 - \alpha + 6 - \alpha] \right] \\ &= \left[\frac{-6}{2} + \frac{1}{2}[8 - 2\sqrt{4 - 4\alpha}], \frac{-6}{2} + \frac{1}{2}[14 - 2\alpha] \right] \\ &= [-3 + [4 - \sqrt{4 - 4\alpha}], -3 + [7 - \alpha]] \\ &= [1 - \sqrt{4 - 4\alpha}, 4 - \alpha] \\ &= [1 - \sqrt{4 - 4\alpha}, 4 - \alpha].\end{aligned}$$

A continuación mostramos algunos puntos de la gráfica de la solución $B - A$, o α - niveles.

si $\alpha = 0.2$

$$\begin{aligned}&= [1 - \sqrt{4 - 4(0.2)}, 4 - 0.2] \\ &= [1 - \sqrt{4 - 0.8}, 3.8] \\ &= [1 - \sqrt{3.2}, 3.8]\end{aligned}$$

$$= [1 - 1.78, 3.8]$$

$$= [-0.78, 3.8]$$

si $\alpha = 0.4$

$$= [1 - \sqrt{4 - 4(0.4)}, 4 - 0.4]$$

$$= [1 - \sqrt{4 - 1.6}, 3.6]$$

$$= [1 - \sqrt{2.4}, 3.6]$$

$$= [1 - 1.55, 3.6]$$

$$= [-0.55, 3.6]$$

si $\alpha = 0.6$

$$= [1 - \sqrt{4 - 4(0.6)}, 4 - 0.6]$$

$$= [1 - \sqrt{4 - 2.4}, 3.4]$$

$$= [1 - \sqrt{1.6}, 3.4]$$

$$= [1 - 1.26, 3.4]$$

$$= [-0.26, 3.4]$$

si $\alpha = 0.8$

$$= [1 - \sqrt{4 - 4(0.8)}, 4 - 0.8]$$

$$= [1 - \sqrt{4 - 3.2}, 3.2]$$

$$= [1 - \sqrt{0.8}, 3.2]$$

$$= [1 - 0.89, 3.2]$$

$$= [0.11, 3.2]$$

si $\alpha = 1$

$$= [1 - \sqrt{4 - 4(1)}, 4 - 1]$$

$$= [1 - \sqrt{4 - 4}, 3]$$

$$= [1 - \sqrt{0}, 3]$$

$$= [1 - 0, 3]$$

$$= [1, 3]$$

4.2. Solución de la ecuación difusa $AX = B$

Sean $\mathbb{F}'_c(\mathbb{R}) = \{\tilde{A} \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}) \mid a.c(\tilde{A}) \neq 0\}$, $\tilde{A} \in \mathbb{F}'_c(\mathbb{R})$ y $\tilde{B} \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R})$.

Por las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN (en el dominio del promedio de translación de soporte) y sus propiedades, se tiene.

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (43)$$

$$(A^{-1}A)X \cong A^{-1}B, \quad (44)$$

$$1_A X \cong A^{-1}B, \quad (45)$$

$$X \cong A^{-1}B, \quad (46)$$

Ejemplo 4.5. Resolver $AX = B$ donde,

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 3\alpha + 1, \quad \overline{A}_{\alpha} = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right),$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}, \quad \overline{B}_{\alpha} = 5 + \sqrt{4 - 4\alpha}.$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, se tiene:

A continuación determinamos $[A^{-1}B]^{\alpha}$

Determinamos $[A^{-1}]^\alpha$ usando 27 en la definición 2.1

$$\underline{A}_1 = 3\alpha + 1 = 3(1) + 1 = 4 = a_1$$

$$\overline{A}_1 = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 4 + 3\left(\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2}\right) = 4 = a_2$$

$$\phi = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4.$$

$$[A^{-1}]^\alpha = \left[\frac{1}{\phi^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{\phi^2} \overline{A}_\alpha \right]$$

$$[A^{-1}]^\alpha = \left[\frac{1}{16}(3\alpha + 1), \frac{1}{16}\left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

Ahora aplicando, el primer renglón de la ecuación 28 en la definición 2.1

$$\phi = 4 = a.c(A)$$

Calculamos $\psi = a.c(B)$

$$\underline{B}_1 = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{1} - 1} = 5 = b_1$$

$$\overline{B}_1 = 5 + \sqrt{4 - 4} = 5 = b_2$$

$$\psi = \frac{b_1 + b_2}{2} = 5$$

$$[A^{-1}B]^\alpha = \left[\frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha + \frac{1}{2\phi} \underline{B}_\alpha, \frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha + \frac{1}{2\phi} \overline{B}_\alpha \right].$$

$$= \left[\frac{5}{2(4)^2} \underline{A}_\alpha + \frac{1}{2(4)} \underline{B}_\alpha, \frac{5}{2(4)^2} \overline{A}_\alpha + \frac{1}{2(4)} \overline{B}_\alpha \right].$$

$$= \left[\frac{5}{32}A_\alpha + \frac{1}{8}B_\alpha, \frac{5}{32}\overline{A_\alpha} + \frac{1}{8}\overline{B_\alpha} \right].$$

$$= \left[\frac{5}{32}(3\alpha + 1) + \frac{1}{8} \left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \right), \frac{5}{32} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{8} (5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) \right].$$

La nueva solución de la ecuación $AX = B$ es más general y sencilla.

El lema a continuación muestra una solución exacta de la ecuación difusa, si sus coeficientes constantes tienen una relación tipo 2.

Lema 4.6. Si $A \sim_2 B$ en la ecuación $AX = B$, entonces $X = A^{-1}B$,

Demostración. Se tiene que $X \cong A^{-1}B$, luego falta probar que $X \sim_2 A^{-1}B$.

Si $A \sim_2 B$ entonces $1 \sim_2 A \sim_2 B$. Además $A \sim_2 A^{-1}$, de aquí $A^{-1} \sim_2 B$. Entonces.

$$A^{-1}B \sim_2 A.$$

De la ecuación se tiene que $AX = B \sim_2 A^{-1}$ entonces $A^{-1}AX \sim_2 A^{-1} \sim_2 A$, dado en ²¹. Por otro lado $A^{-1}AX = 1_A X = X$, luego.

$$X \sim_2 A.$$

De lo anterior se obtiene que

$$X \sim_2 A^{-1}B.$$

De lo anterior se tiene la igualdad.

$$X = A^{-1}B.$$

□

Ejemplo 4.7. Sean \tilde{A}, \tilde{B}

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \quad \underline{A}_{\alpha} = 3\alpha + 1, \quad \overline{A}_{\alpha} = 4 + 3 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right),$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \quad \underline{B}_{\alpha} = 12\alpha + 4, \quad \overline{B}_{\alpha} = 16 + 12 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right),$$

A continuación determinamos $X \cong \bigcup_{\alpha} [A^{-1}B]^{\alpha}$

Determinamos $[A^{-1}]^{\alpha}$. Entonces debemos hallar.

$$a.c(A) = \phi$$

$$\underline{A}_1 = 3\alpha + 1 = 3(1) + 1 = 4 = a_1$$

$$\overline{A}_1 = 4 + 3 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) = 4 + 3 \left(\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2} \right) = 4 = a_2$$

$$\phi = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{4+4}{2} = 4.$$

Determinamos $a.c(B) = \psi$

$$\underline{B}_1 = 12\alpha + 4 = 12(1) + 4 = 16 = b_1$$

$$\overline{B}_1 = 16 + 12 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) = 16 + 12 \left(\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2} \right) = 16 = b_2$$

$$\text{entonces } \psi = \frac{b_1 + b_2}{2} = 16,$$

Ahora usando el primer renglón de 28 en la definición 2.1

$$\begin{aligned}
 [A^{-1}B]^\alpha &= \left[\frac{1}{2\phi} \underline{B}_\alpha + \frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{2\phi} \overline{B}_\alpha + \frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right]. \\
 &= \left[\frac{1}{2(4)} \underline{B}_\alpha + \frac{16}{2(4)^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{2(4)} \overline{B}_\alpha + \frac{16}{2(4)^2} \overline{A}_\alpha \right]. \\
 &= \left[\frac{1}{8} \underline{B}_\alpha + \frac{16}{2(16)} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{8} \overline{B}_\alpha + \frac{16}{2(16)} \overline{A}_\alpha \right]. \\
 &= \left[\frac{1}{8} (12\alpha + 4) + \frac{16}{2(16)} (3\alpha + 1), \frac{1}{8} 16 + 12 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) + \frac{16}{2(16)} 4 + 3 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$[A^{-1}B]^\alpha = \left[3\alpha + 1, 4 + 3 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

A continuación mostramos que $A \sim_2 B$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) &= \underline{A}_\alpha = 3\alpha + 1 \\
 &= 4 \left(\frac{3\alpha + 1}{4} \right) = 4 \cdot t_{1\alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } t_{1\alpha} = \frac{3\alpha + 1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) &= \underline{B}_\alpha = 12\alpha + 4 \\ &= 4(3\alpha + 1) = (16)\frac{3\alpha + 1}{4} \\ &= 16 \cdot t_{1\alpha}.\end{aligned}$$

Entonces $t_{1\alpha} = \frac{3\alpha + 1}{4}$.

A continuación hallamos $t_{2\alpha}$.

$$\begin{aligned}\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) &= \overline{A}_\alpha = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 4\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)\right] = 4 \cdot t_{2\alpha}.\end{aligned}$$

Entonces $t_{2\alpha} = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu_B}^{-1}(\alpha) &= \underline{B}_\alpha = 16 + 12 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \\
&= 16 \left[1 + \frac{12}{16} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right] = 16 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= 4 \cdot t_{2\alpha} = 16 \cdot t_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\text{Entonces } t_{2\alpha} = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right).$$

Por lo tanto $A \sim_2 B$ y

$$X = \bigcup_\alpha [A^{-1}B]^\alpha = \bigcup_\alpha \left[3\alpha + 1, 4 + 3 \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Es una solución exacta. En el ejemplo anterior, A no está relacionado tipo 2 con B , por lo que la solución es aproximada.

4.3. Solución de la ecuación difusa $AX + B = C$

Sean $A \in \mathbb{F}'_c(\mathbb{R})$ y $B, C \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R})$

Por las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN y sus propiedades, se tiene.

$$AX + B = C \quad (47)$$

$$(AX + B) - B = C - B \quad (48)$$

$$AX + (B - B) \cong C - B \quad 3.9 \quad (49)$$

$$AX + 0_B \cong C - B \quad 2.10 \quad (50)$$

$$AX \cong C - B \quad (51)$$

$$A^{-1}(AX) \cong A^{-1}(C - B) \quad (52)$$

$$(A^{-1}A)X \cong A^{-1}(C - B) \quad 2.10 \quad (53)$$

$$1_A X \cong A^{-1}(C - B) \quad (54)$$

$$X \cong A^{-1}(C - B) \quad (55)$$

Ejemplo 4.8. Resuelva $AX + B = C$, donde.

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \underline{A}_{\alpha} = 2 - \sqrt{-\ln \alpha}, \overline{A}_{\alpha} = 2 - \ln \alpha,$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \underline{B}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{B}_{\alpha} = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha},$$

$$C = \bigcup_{\alpha} [\underline{C}_{\alpha}, \overline{C}_{\alpha}], \underline{C}_{\alpha} = 6 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{C}_{\alpha} = 6 + \sqrt{16 - 16\alpha},$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, calculamos

$$C - B = \bigcup_{\alpha} [C - B]^{\alpha}.$$

Calculamos $a.c(C)$

$$\underline{C}_1 = 6 - \sqrt{4 - 4(1)} = 6 = c_1$$

$$\overline{C}_1 = 6 - \sqrt{16 - 16(1)} = 6 = c_2$$

$$a.c(C) = \frac{c_1 + c_2}{2} = 6 = \varphi$$

Calculamos $a.c(B)$

$$\underline{B}_1 = 3 - \sqrt{4 - 4(1)} = 3 = b_1$$

$$\overline{B}_1 = 3 + \sqrt{16 - 16(1)} = 3 = b_2$$

$$a.c(B) = \frac{b_1 + b_2}{2} = 3 = \psi.$$

Utilizando 25 en la definición 2.1 se obtiene.

$$\begin{aligned} [C - B]^\alpha &= \left[\frac{\varphi - 3\psi}{2} + \left(\frac{C_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{\varphi - 3\psi}{2} + \left(\frac{\overline{C}_\alpha + \overline{B}_\alpha}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{6 - 3(3)}{2} + \left(\frac{C_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{6 - 3(3)}{2} + \left(\frac{\overline{C}_\alpha + \overline{B}_\alpha}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{C_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{\overline{C}_\alpha + \overline{B}_\alpha}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{6 - \sqrt{4 - 4(\alpha)} + 3 - \sqrt{4 - 4(\alpha)}}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{6 + \sqrt{16 - 16(\alpha)} + 3 + \sqrt{16 - 16(\alpha)}}{2} \right) \right], \\
&= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{9 - 2\sqrt{4 - 4(\alpha)}}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{9 + 2\sqrt{16 - 16(\alpha)}}{2} \right) \right], \\
&= \left[\frac{-3}{2} + \frac{9}{2} - \sqrt{4 - 4(\alpha)}, \frac{-3}{2} + \frac{9}{2} - \sqrt{16 - 16(\alpha)} \right], \\
&= \left[3 - \sqrt{4 - 4(\alpha)}, 3 + \sqrt{16 - 16(\alpha)} \right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$[C - B]^\alpha = [3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{B}_\alpha = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha}].$$

Ahora calculamos.

$$[\widetilde{A^{-1}}]^\alpha = \bigcup_{\alpha} [A^{-1}]^\alpha.$$

Calculamos $a.c(A)$

$$\underline{A}_1 = 2 - \sqrt{-\ln 1} = 2 = a_1$$

$$\overline{A}_1 = 2 - \ln 1 = 2 = a_2$$

$$a.c(A) = \frac{a_1 + a_2}{2} = 2 = \phi.$$

Ahora se tiene.

$$\begin{aligned}
 [A^{-1}]^\alpha &= \left[\frac{1}{\phi^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{\phi^2} \overline{A}_\alpha \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2^2} (2 - \sqrt{-\ln \alpha}), \frac{1}{2^2} (2 - \ln \alpha) \right] \\
 &= \left[\frac{2 - \sqrt{-\ln \alpha}}{4}, \frac{2 - \ln \alpha}{4} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{4} (2 - \sqrt{-\ln \alpha}), \frac{1}{4} (2 - \ln \alpha) \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X \cong \bigcup_{\alpha} [A^{-1}(C - B)]^\alpha,$$

$$[A^{-1}(C - B)]^\alpha = \left[\frac{1}{2\phi} \underline{(C - B)}_\alpha + \frac{\delta}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{2\phi} \overline{(C - B)}_\alpha + \frac{\delta}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right].$$

Nos proponemos determinar.

$[A^{-1}(C - B)]^\alpha$ para ello tenemos $\phi = 2$ y sea δ el promedio del núcleo de $\tilde{C} - \tilde{B}$.

Donde.

$$\begin{aligned}
 \delta &= a.c(C - B) \\
 &= \frac{(C - B)_1 + \overline{(C - B)}_1}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{4 - 4(1)} + 3 + \sqrt{16 - 16(1)}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

Ahora se tiene la fórmula

$$[A^{-1}(C - B)]^\alpha = \left[\frac{1}{4}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - \sqrt{-\ln\alpha}), \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16 - 16\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - \ln\alpha) \right].$$

Se observa que el procedimiento es general y directo (en el sentido de que se opera con los promedios de los núcleos). El siguiente teorema muestra que se tiene una solución exacta de la ecuación difusa, si sus coeficientes constantes tienen una cierta relación.

Teorema 4.9. *Si en la ecuación $AX + B = C$ se tiene que $A \sim_2 C - B$ y $B \sim_1 C$ entonces $X = A^{-1}(C - B)$*

Demostración. Se tiene que hipótesis se tiene $X \cong A^{-1}(C - B)$. Demostramos a continuación que $X \sim_2 A^{-1}(C - B)$.

$AX + B = C \sim_1 B$ entonces $AX \sim_1 C - B$ y por $AX \cong C - B$. Por el 3.10 se tiene $AX = C - B$. Ahora $A \sim_2 C - B$,

$$X = A^{-1}(C - B)$$

□

El siguiente ejemplo muestra la solución de una ecuación en la cual los coeficientes están dados en términos de los α -niveles.

Ejemplo 4.10. Resolver $AX + B = C$ donde.

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \underline{A}_{\alpha} = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{A}_{\alpha} = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{16 - 16\alpha},$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \underline{B}_{\alpha} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{B}_{\alpha} = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha},$$

$$C = \bigcup_{\alpha} [\underline{C}_{\alpha}, \overline{C}_{\alpha}], \underline{C}_{\alpha} = 6 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{C}_{\alpha} = 6 + \sqrt{16 - 16\alpha}.$$

Veamos que $C \sim_1 B$

Calculamos $a.c(C)$

$$\underline{C}_1 = 6 - \sqrt{4 - 4(1)} = 6 = c_1$$

$$\overline{C}_1 = 6 + \sqrt{16 - 16(1)} = 6 = c_2$$

$$a.c(C) = \frac{c_1 + c_2}{2} = 6 = \varphi$$

Calculamos $a.c(B)$

$$\underline{B}_1 = 3 - \sqrt{4 - 4(1)} = 3 = b_1$$

$$\overline{B}_1 = 3 + \sqrt{16 - 16(1)} = 3 = b_2$$

$$a.c(B) = \frac{b_1 + b_2}{2} = 3 = \psi.$$

$$\underline{\mu}_C^{-1}(\alpha) = 6 - \sqrt{4 - 4\alpha} = 6 + t_{1\alpha},$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha} = 3 + t_{1\alpha},$$

De las dos igualdades anteriores se deduce que.

$$t_{1\alpha} = -\sqrt{4 - 4\alpha}.$$

Ahora.

$$\overline{\mu}_C^{-1}(\alpha) = 6 + \sqrt{16 - 16\alpha} = 6 + t_{2\alpha}$$

$$\overline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha} = 3 + t_{2\alpha}$$

De las dos últimas desigualdades se deduce que.

$$t_{2\alpha} = \sqrt{16 - 16\alpha}.$$

Por lo tanto $C \sim_1 B$.

Ahora demostramos que $A \sim_2 C - B$.

Calculamos $a.c(A)$

$$\underline{A}_1 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{4 - 4(1)} = 4 = a_1$$

$$\overline{A}_1 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{16 - 16(1)} = 4 = a_2$$

$$a.c(A) = \frac{a_1 + a_2}{2} = 4 = \phi$$

$$C - B = \bigcup_{\alpha} [C - B]^{\alpha}$$

donde $[C - B]^{\alpha}$ es:

$$\begin{aligned} [C - B]^{\alpha} &= \left[\frac{\varphi - 3\psi}{2} + \left(\frac{C_{\alpha} + B_{\alpha}}{2} \right), \frac{\varphi - 3\psi}{2} + \left(\frac{\overline{C}_{\alpha} + \overline{B}_{\alpha}}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{6 - 3(3)}{2} + \left(\frac{C_{\alpha} + B_{\alpha}}{2} \right), \frac{6 - 3(3)}{2} + \left(\frac{\overline{C}_{\alpha} + \overline{B}_{\alpha}}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{C_{\alpha} + B_{\alpha}}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{\overline{C}_{\alpha} + \overline{B}_{\alpha}}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{6 - \sqrt{4 - 4(\alpha)} + 3 - \sqrt{4 - 4(\alpha)}}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{6 + \sqrt{16 - 16(\alpha)} + 3 + \sqrt{16 - 16(\alpha)}}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{9 - 2\sqrt{4 - 4(\alpha)}}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{9 + 2\sqrt{16 - 16(\alpha)}}{2} \right) \right], \\ &= \left[\frac{-3}{2} + \frac{9}{2} - \sqrt{4 - 4(\alpha)}, \frac{-3}{2} + \frac{9}{2} - \sqrt{16 - 16(\alpha)} \right], \\ &= \left[3 - \sqrt{4 - 4(\alpha)}, 3 + \sqrt{16 - 16(\alpha)} \right], \\ [C - B]^{\alpha} &= \left[3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, 3 + \sqrt{16 - 16\alpha} \right] = \left[(C - B)_{\alpha}, \overline{(C - B)}_{\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } \delta = a.c(C - B) &= \frac{(C - B)_1 + \overline{(C - B)}_1}{2} \\ &= \frac{3 - \sqrt{4 - 4(1)} + 3 + \sqrt{16 - 16(1)}}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

Ahora

$$\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{4 - 4\alpha} = 4 \cdot t_{1\alpha}$$

$$\underline{\mu}_{C-B}^{-1}(\alpha) = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha} = 3 \cdot t_{1\alpha}$$

De las dos igualdades anteriores se deduce que.

$$t_{1\alpha} = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{4 - 4\alpha}.$$

Ahora.

$$\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{16 - 16\alpha} = 6 \cdot t_{2\alpha}$$

$$\overline{\mu}_{C-B}^{-1}(\alpha) = 3 + \sqrt{16 - 16\alpha} = 3 \cdot t_{2\alpha}$$

De las dos últimas desigualdades se deduce que.

$$t_{2\alpha} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{16 - 16\alpha}.$$

Por lo tanto

$$C \sim_2 C - B.$$

Ahora

$$[A^{-1}]^\alpha = \bigcup_\alpha [A^{-1}]^\alpha,$$

donde

$$\begin{aligned} [A^{-1}]^\alpha &= \left[\frac{1}{\phi^2} A_\alpha, \frac{1}{\phi^2} \overline{A_\alpha} \right] \\ &= \left[\frac{1}{4^2} \left(4 - \frac{4}{3} \sqrt{4 - 4\alpha} \right), \frac{1}{4^2} \left(4 + \frac{4}{3} \sqrt{16 - 16\alpha} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{4^2} 4 \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{4 - 4\alpha} \right), \frac{1}{4^2} 4 \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{16 - 16\alpha} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{4 - 4\alpha} \right), \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{16 - 16\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X \cong \bigcup_\alpha [A^{-1}(C - B)]^\alpha,$$

$$[A^{-1}(C - B)]^\alpha = \left[\frac{1}{2\phi} (C - B)_\alpha + \frac{\delta}{2\phi^2} A_\alpha, \frac{1}{2\phi} \overline{(C - B)_\alpha} + \frac{\delta}{2\phi^2} \overline{A_\alpha} \right].$$

Ahora determinamos $[A^{-1}(C - B)]^\alpha$

Ahora se tiene la fórmula

$$\begin{aligned}
[A^{-1}(C - B)]^\alpha &= \left[\frac{1}{2(4)} \overline{(C - B)}_\alpha + \frac{\delta}{2(4)^2} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{2(4)} \overline{(C - B)}_\alpha + \frac{\delta}{2(4)^2} \overline{A}_\alpha \right]. \\
&= \left[\frac{1}{8} \overline{(C - B)}_\alpha + \frac{3}{32} \underline{A}_\alpha, \frac{1}{8} \overline{(C - B)}_\alpha + \frac{3}{32} \overline{A}_\alpha \right].
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{8}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{3}{32} \left(4 - \frac{4}{3}\sqrt{4 - 4\alpha}\right), \frac{1}{8}(3 + \sqrt{16 - 16\alpha}) + \frac{3}{32} \left(4 + \frac{4}{3}\sqrt{16 - 16\alpha}\right) \right].$$

$$= \left[\frac{1}{8}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{3*4}{32} - \frac{4*3}{32*3}\sqrt{4 - 4\alpha}, \frac{1*3}{8} \frac{1*\sqrt{16-16\alpha}}{8} + \frac{3*4}{32} + \frac{3*4}{32*3}\sqrt{16 - 16\alpha} \right].$$

$$= \left[\frac{1}{8}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{12}{32} - \frac{12}{96}\sqrt{4 - 4\alpha}, \frac{3}{8} \frac{\sqrt{16-16\alpha}}{8} + \frac{12}{32} + \frac{12}{96}\sqrt{16 - 16\alpha} \right].$$

$$= \left[\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{4-4\alpha}}{8} + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{4-4\alpha}}{8}, \frac{3}{8} \frac{\sqrt{16-16\alpha}}{8} + \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{16-16\alpha}}{8} \right].$$

$$= \left[\frac{6}{8} - \frac{2\sqrt{4-4\alpha}}{8}, \frac{6}{8} + \frac{2\sqrt{16-16\alpha}}{8} \right].$$

$$[A^{-1}(C - B)]^\alpha = \left[\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{4-4\alpha}}{4}, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{16-16\alpha}}{4} \right]$$

Así $[A^{-1}(C - B)]^\alpha$ se tiene:

$$[A^{-1}(C - B)]^\alpha = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{4 - 4\alpha}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16 - 16\alpha} \right].$$

Como hemos mostrado que $\tilde{C} \sim_1 \tilde{B}$ y $\tilde{A} \sim_2 (\tilde{C} - \tilde{B})$. Entonces,

$$\begin{aligned}
X &= \bigcup [A^{-1}(C - B)]^\alpha. \\
[A^{-1}(C - B)]^\alpha &= \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{4 - 4\alpha}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16 - 16\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Definición 4.11. (Potencias:) Sea $u \in \mathbb{F}$ un número real difuso. Entonces se define u^2 . Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Esta función es continua, por lo que por Teorema su extensión F :

$$F : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

tal que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[F(u)]^\alpha = [u^2]^\alpha = f([u]^\alpha).$$

Proposición 4.12. Sea un número difuso $u \in \mathbb{F}$. Sea $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -niveles, entonces el número difuso u^2 está definido en término de sus α -niveles de la siguiente forma:

$$[u^2]^\alpha = \begin{cases} [(u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2] & \text{si } u_\alpha^- > 0, \\ [(u_\alpha^+)^2, (u_\alpha^-)^2] & \text{si } u_\alpha^+ < 0, \\ [0, \max\{(u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2\}] & \text{si } 0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]. \end{cases}$$

Demostración. Se realiza de diferentes casos:

- supongamos que $u_\alpha^- > 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o lo que es lo mismo, u es positivo.

Sea $f(x) = x^2$ y sea F su función extendida por el Teorema 5. Entonces, como

$$0 < u_\alpha^- < u_\alpha^+ \text{ para } \alpha \in [0, 1],$$

y la función f es inyectiva en el intervalo $[0, +\infty)$, tenemos que

$$[F(u)]^\alpha = [u^2]^\alpha = f([u]^\alpha) = [(u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2].$$

- Si $u_\alpha^+ < 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o lo que es lo mismo, u es negativo, entonces como

$$u_\alpha^- < u_\alpha^+ < 0 \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

Esto implica:

$$(u_\alpha^+)^2 < (u_\alpha^-)^2 \text{ para } \alpha \in [0, 1],$$

y como f es inyectiva en $(-\infty, 0]$ se tiene que.

$$[F(u)]^\alpha = [u^2]^\alpha = f([u]^\alpha) = \left[(u_\alpha^+)^2, (u_\alpha^-)^2 \right].$$

- Si $0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ para un $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$u_\alpha^- < 0 < u_\alpha^+ < 0 \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

Ahora elevar al cuadrado es más complejo, ya que f ya no es inyectiva en el dominio. Aún así, la función $f(x) = x^2$ es sencilla de utilizar.

$$[F(u)]^\alpha = [u^2]^\alpha = f([u]^\alpha) = \left[0, \max \left\{ (u_\alpha^-)^2, (u_\alpha^+)^2 \right\} \right].$$

La obtención de u^2 se complica cuando $0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ para algún $\alpha \in [0, 1]$. Esto es porque la función $f(x) = x^2$ no es una función inyectiva, y por lo tanto $f([u]^\alpha)$ es más complicado de calcular. De hecho, vamos a ver que en general ni siquiera es lo mismo u^2 y $u \cdot u$. □

Ejemplo 4.13. Sea el número triangular $u = (1, 2, 3, -, -)$ determinemos los α -niveles del número difuso u^2 .

La recta que une los puntos $(1, 0)$ con $(2, 1)$ es $y = x - 1$, entonces

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_u(x) &= x - 1 = \alpha, \\ \underline{\mu}_u^{-1}(\alpha) &= 1 + \alpha = x.\end{aligned}$$

La recta que une a los puntos $(2, 1)$ con $(3, 0)$ es $y = x - 3$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_u(x) &= 3 - x = \alpha \\ \bar{\mu}_u^{-1}(\alpha) &= 3 - \alpha = x\end{aligned}$$

$$[u]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Sea la función $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x \cdot y$. Esta función es continua, por lo que por el Teorema su extensión. Sea

$$G : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}.$$

de forma que para todo $\alpha \in [0, 1]$.

$$[G(u, v)]^\alpha = [u \cdot v]^\alpha = g([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Ejemplo 4.14. Sea el número triangular $u = (-1, 0, 1, -, -)$. Veamos que no es lo mismo u^2 que $u \cdot u$. Los α -niveles de u son.

$$[u]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$$

Es decir, el cero pertenece a cada uno de los α -niveles.

- u^2 : Sea la función F definida en el ejemplo anterior. El número difuso u^2 tiene por α -niveles.

$$[u^2]^\alpha = f([-1 + \alpha, 1 - \alpha]) = [0, (1 - \alpha)^2]$$

- $u \cdot u$: Sean las funciones G y g definidas en el párrafo anterior. El número difuso $u \cdot u$ tiene por α -niveles

$$[u \cdot v]^\alpha = g([-1 + \alpha, 1 - \alpha], [-1 + \alpha, 1 - \alpha]) = [-(1 - \alpha)^2, (1 - \alpha)^2]$$

Se observa que $[u^2]^\alpha \neq [u \cdot u]^\alpha$.

Teorema 4.15. Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Sea también $F : F(U) \rightarrow F(\mathbb{R})$ su función extendida por el Teorema 5. Entonces, para todo $u \in F(U)$ con α -nivel $[u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ se obtiene que para todo $\alpha \in [0, 1]$ lo siguiente:

- si f es creciente:

$$[F(u)]^\alpha = [f(u_\alpha^-), (u_\alpha^+)]$$

- si f es decreciente:

$$[F(u)]^\alpha = [f(u_\alpha^+), (u_\alpha^-)]$$

Demostración. La demostración se hará con f creciente, el caso decreciente es análogo. Por el 5, los α -niveles de la imagen de u son:

$$[F(u)]^\alpha = f([u])^\alpha = f([u_\alpha^-, u_\alpha^+]) \text{ para cada } \alpha \in [0, 1]$$

como f es inyectiva, y $u_\alpha^- \leq u_\alpha^+$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces se deduce que $f(u_\alpha^-) \leq f(u_\alpha^+)$ y por lo tanto.

$$[F(u)]^\alpha = [f(u_\alpha^-), (u_\alpha^+)]$$

□

Corolario 4.16. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{F}$. Sea $\alpha \in [0, 1]$ y $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ sus α -niveles, entonces el número difuso u^n está definido en término de sus α -niveles de la siguiente forma:

- Si n es impar:

$$[u^n]^\alpha = [(u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n]$$

- Si n es par:

$$[u^n]^\alpha = \begin{cases} [(u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n] & \text{si } u_\alpha^- > 0, \\ [(u_\alpha^+)^n, (u_\alpha^-)^n] & \text{si } u_\alpha^+ < 0, \\ [0, \max\{(u_\alpha^-)^n, (u_\alpha^+)^n\}] & 0 \in [u_\alpha^-, u_\alpha^+] \end{cases}$$

Demostración. En los casos donde $u_\alpha^- > 0$ y $u_\alpha^+ < 0$, la función es inyectiva en el dominio, por lo que se aplica el 4.15. El caso que queda se resuelve de forma análoga a la demostración de la proposición 4.12. \square

4.4. Solución de la ecuación difusa $AX^2 = B$

A continuación presentamos la definición de la raíz de un número difuso basada en TPN.

Sea.

$$F_c^+(\mathbb{R}) = \{A \in F_c(\mathbb{R}) | a.c(A) > 0\},$$

$$F_c^0 = \{A \in F_c(\mathbb{R}) | a.c(A) = 0\},$$

$$F_c^- = \{A \in F_c(\mathbb{R}) | a.c(A) < 0\},$$

Definición 4.17. (Raíz cuadrada difusa) Sean.

$$A = (\underline{a}, a_1, a_2, \bar{a}, l_A(x), r_A(x)),$$

$\phi = \frac{a_1+a_2}{2} = a.c(A)$, Luego.

i)

$$\sqrt{A} = \left(\frac{a}{\sqrt{\phi}}, \frac{a_1}{\sqrt{\phi}}, \frac{a_2}{\sqrt{\phi}}, \frac{\bar{a}}{\sqrt{\phi}}, l_A((\sqrt{\phi})x), r_A((\sqrt{\phi})x) \right) \quad (56)$$

(ii) para $A \in F_c^0(\mathbb{R})$,

$$\sqrt{A} \cong A \quad (57)$$

En este caso tenemos que $\phi = \frac{a_1+a_2}{2} = 0$.

iii) $A \in F_c^-(\mathbb{R})$,

$$\sqrt{A} \text{ no esta definido} \quad (58)$$

Si $A \in F_c'(\mathbb{R})$ y $B \in F_c(\mathbb{R})$. Por las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN y sus propiedades se tienen:

$$AX^2 = B,$$

$$A^{-1}(AX^2) = A^{-1}B, \quad (59)$$

$$(A^{-1}A)X^2 \cong A^{-1}B, \quad (60)$$

$$1_A X^2 \cong A^{-1}B, \quad (61)$$

$$X^2 \cong A^{-1}B, \quad (62)$$

$$X \pm \sqrt{(A^{-1}B)}. \quad (63)$$

Ejemplo 4.18. Resuelve: $AX^2 = B$ donde;

$$A = \bigcup_{\alpha} [A_{\alpha}, \overline{A_{\alpha}}], \underline{A_{\alpha}} = 2 + \ln \alpha, \overline{A_{\alpha}} = 4 - \ln \alpha,$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [B_{\alpha}, \overline{B_{\alpha}}], \underline{B_{\alpha}} = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha}, \overline{B_{\alpha}} = 6 - \alpha,$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, donde:

$$A^{-1} = \bigcup_{\alpha} [A^{-1}]^{\alpha} =$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{\phi^2} \right) \underline{A}_{\alpha}, \left(\frac{1}{\phi^2} \right) \overline{A}_{\alpha} \right].$$

Si $\alpha = 1, \underline{A}_1 = 2 + \ln 1 = 2 = a_1$,

$$\overline{A}_1 = 4 - \ln 1 = 4 = a_2$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 > 0.$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\frac{1}{3^2}(2 + \ln \alpha), \frac{1}{3^2}(4 - \ln \alpha) \right].$$

$$= \left[\frac{1}{9}(2 + \ln \alpha), \frac{1}{9}(4 - \ln \alpha) \right].$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\frac{2 + \ln \alpha}{9}, \frac{4 - \ln \alpha}{9} \right],$$

si $\alpha = 1, \underline{B}_1 = 3 - \sqrt{4 - 4\alpha} = 3 = b_1$,

$$\overline{B}_1 = 6 - \alpha = 5 = b_2$$

$$\psi = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 > 0.$$

$$[A^{-1}]B = \bigcup_{\alpha} \left[\frac{1}{2\phi} \underline{B}_{\alpha} + \frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_{\alpha}, \frac{1}{2\phi} \overline{B}_{\alpha} + \frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_{\alpha} \right].$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2*3} (3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{4}{2*3^2} (2 + \ln\alpha), \frac{1}{2*3} (6 - \alpha) + \frac{4}{2*3^2} (4 - \ln\alpha) \right]. \\
&= \left[\frac{1}{6} (3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{4}{18} (2 + \ln\alpha), \frac{1}{6} (6 - \alpha) + \frac{4}{18} (4 - \ln\alpha) \right]. \\
&= \left[\frac{1}{6} (3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{2}{9} (2 + \ln\alpha), \frac{1}{6} (6 - \alpha) + \frac{2}{9} (4 - \ln\alpha) \right].
\end{aligned}$$

Como $X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B}$, se tiene.

$$\sqrt{A} = \left(\frac{a}{\sqrt{\phi}}, \frac{\bar{a}}{\sqrt{\phi}} \right)$$

$$\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right)$$

$$X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\frac{4}{3}}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \right),$$

donde,

$$\text{si } \alpha = 1, \underline{(A^{-1}B)_1} = \frac{1}{6} (3 - \sqrt{4 - 4(1)}) + \frac{2}{9} (2 + \ln(1)) = \frac{51}{54} = \delta_1,$$

$$\overline{(A^{-1}B)_1} = \frac{1}{6} (6 - 1) + \frac{2}{9} (4 - \ln(1)) = \frac{93}{52} = \delta_2$$

$$\delta = a.c(A^{-1}B) = \frac{\frac{51+93}{54} + \frac{93}{54}}{2} = \frac{24}{2} = \frac{4}{3}.$$

$$X_1 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)}_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right)$$

$$X_1 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{\frac{1}{6}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{2}{9}(2 + \ln\alpha)}{\sqrt{\frac{4}{3}}}, \frac{\frac{1}{6}(6 - \alpha) + \frac{2}{9}(4 - \ln\alpha)}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$X_2 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta}, \frac{\overline{(A^{-1}B)}_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta} \right)$$

$$X_2 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{\frac{1}{6}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{2}{9}(2 + \ln\alpha)}{\sqrt{\frac{4}{3}}} - 2\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{1}{6}(6 - \alpha) + \frac{2}{9}(4 - \ln\alpha)}{\sqrt{\frac{4}{3}}} - 2\sqrt{\frac{4}{3}} \right)$$

Ejemplo 4.19. Resuelva $AX^2 = B$ donde;

$$A = \bigcup_{\alpha} [A_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], A_{\alpha} = 3\alpha + 1, \overline{A}_{\alpha} = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right),$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [B_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], B_{\alpha} = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}, \overline{B}_{\alpha} = 5 + \sqrt{4 - 4\alpha},$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, donde:

$$A^{-1} = \bigcup_{\alpha} [A^{-1}]^{\alpha} =$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{\phi^2}\right) A_{\alpha}, \left(\frac{1}{\phi^2}\right) \overline{A}_{\alpha} \right].$$

$$\text{Si } \alpha = 1, \underline{A}_1 = 3(1) + 1 = 4 = a_1,$$

$$\overline{A_1} = 4 + 3\left(\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2}\right) = 4 = a_2.$$

$$\phi = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 > 0.$$

$$\begin{aligned} [A^{-1}]^\alpha &= \left[\frac{1}{4^2}(3\alpha + 1), \frac{1}{4^2} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right]. \\ &= \left[\frac{1}{16}(3\alpha + 1), \frac{1}{16} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

$$[A^{-1}]^\alpha = \left[\frac{3\alpha + 1}{16}, \frac{4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)}{16} \right].$$

Si $\alpha = 1, \underline{B_1} = 5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} = 5 = b_1,$

$$\overline{B_1} = 5 + \sqrt{4 - 4\alpha} = 5 = b_2$$

$$\psi = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{5+5}{2} = 5 > 0.$$

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \bigcup_{\alpha} \left[\frac{1}{2\phi} \underline{B_\alpha} + \frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A_\alpha}, \frac{1}{2\phi} \overline{B_\alpha} + \frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A_\alpha} \right]. \\ &= \left[\frac{1}{2*4} \left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \right) + \frac{5}{2*4^2}(3\alpha + 1), \frac{1}{2*4} (5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{2*4^2} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right]. \\ &= \left[\frac{1}{8} \left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \right) + \frac{5}{32}(3\alpha + 1), \frac{1}{8} (5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{32} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

De $X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B}$, tenemos

$$\sqrt{A} = \left(\frac{a}{\sqrt{\phi}}, \frac{\bar{a}}{\sqrt{\phi}} \right),$$

$$\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right),$$

$$X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \right),$$

donde,

$$\text{si } \alpha = 1, \underline{(A^{-1}B)_1} = \frac{1}{8}5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} + \frac{5}{32}(3\alpha + 1) = \frac{5}{4} = \delta_1,$$

$$\overline{(A^{-1}B)_1} = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{32}(4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})) = \frac{5}{4} = \delta_2$$

$$\delta = a.c(A^{-1}B) = \frac{\frac{5}{4} + \frac{5}{4}}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$X_1 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right)$$

$$X_1 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{\left(\frac{1}{8}5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} + \frac{5}{32}(3\alpha + 1), \frac{1}{2*4}(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{2*4^2}(4 + 3(\frac{1}{2(\alpha)} - \frac{1}{2})) \right)}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \right)$$

$$X_1 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{\frac{1}{8} \left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \right) + \frac{5}{32}(3\alpha + 1)}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, \frac{\frac{1}{8}(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{32}(4 + 3(\frac{1}{2(\alpha)} - \frac{1}{2}))}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \right)$$

$$X_2 \cong \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta}, \frac{\overline{(A^{-1}B)}_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta} \right)$$

$$X_2 \cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\frac{1}{8} \left(5 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \right) + \frac{5}{32}(3\alpha + 1)}{\sqrt{\frac{5}{4}}} - 2\sqrt{\frac{5}{4}}, \frac{\frac{1}{8}(5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{32}(4 + 3(\frac{1}{2(\alpha)} - \frac{1}{2}))}{\sqrt{\frac{5}{4}}} - 2\sqrt{\frac{5}{4}} \right]$$

El siguiente lema muestra una solución exacta de la ecuación difusa si sus coeficientes constantes tienen una relación tipo 2

Lema 4.20. Si $\tilde{A} \sim_2 \tilde{B}$ en la ecuación $AX^2 = B$, entonces $X = \pm\sqrt{A^{-1}B}$.

Demostración. Por 63 se tiene $X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B}$, luego falta demostrar que.

$X \sim_2 \pm\sqrt{A^{-1}B}$ para lograr esto tenemos: $A \sim_2 B$ y también se tiene que $1 \sim_2 A \sim_2 B$.

Por otro lado $(F'_c(\mathbb{R}, \cdot))$ es un grupo tipo 2. (ver ¹⁹)

$A^{-1} \sim_2 A$ y $A \sim_2 B$ entonces $A^{-1} \sim_2 B$ entonces $A^{-1}B \sim_2 A$ o $A^{-1}B \sim_2 B$ pero $B \sim_2 A$ luego $A^{-1}B \sim_2 A$. Entonces $X^2 = A^{-1}B$ o equivalentemente $X = \pm\sqrt{A^{-1}B}$.

Así

$$\begin{aligned} AX^2 &= A(A^{-1}B) \\ &= (AA^{-1})B \\ &= 1_A B \\ &= B \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.21. Resuelva $AX^2 = B$ tal que;

$$A = \bigcup_{\alpha} [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}], \underline{A}_{\alpha} = 3\alpha + 1, \overline{A}_{\alpha} = 4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right),$$

$$B = \bigcup_{\alpha} [\underline{B}_{\alpha}, \overline{B}_{\alpha}], \underline{B}_{\alpha} = 12\alpha + 4, \overline{B}_{\alpha} = 16 + 12\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right),$$

Usando las operaciones aritméticas difusas elementales basadas en el TPN, donde:

$$A^{-1} = \bigcup_{\alpha} [A^{-1}]^{\alpha} =$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{\phi^2}\right) \underline{A}_{\alpha}, \left(\frac{1}{\phi^2}\right) \overline{A}_{\alpha} \right].$$

$$\text{Si } \alpha = 1, \underline{A}_1 = 3(1) + 1 = 4 = a_1,$$

$$\overline{A}_1 = 4 + 3\left(\frac{1}{2(1)} - \frac{1}{2}\right) = 4 = a_2$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 > 0.$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\frac{1}{4^2}(3\alpha + 1), \frac{1}{4^2} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right].$$

$$= \left[\frac{1}{16}(3\alpha + 1), \frac{1}{16} \left(4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \right) \right].$$

$$[A^{-1}]^{\alpha} = \left[\frac{3\alpha + 1}{16}, \frac{4 + 3\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)}{16} \right],$$

$$\text{Si } \alpha = 1, \underline{B}_1 = 12\alpha + 4 = 16 = b_1,$$

$$\overline{B}_1 = 16 + 12\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 16 = b_2$$

$$\psi = \frac{b_1+b_2}{2} = \frac{16+16}{2} = 16 > 0.$$

$$\begin{aligned} [A^{-1}B]^\alpha &= \bigcup_\alpha \left[\frac{1}{2\phi} B_\alpha + \frac{\psi}{2\phi^2} A_\alpha, \frac{1}{2\phi} \overline{B}_\alpha + \frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right]. \\ &= \left[\frac{1}{2*4} (12\alpha + 4) + \frac{16}{2*4^2} (3\alpha + 1), \frac{1}{2*4} (5 + \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{5}{2*4^2} (4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})) \right]. \\ &= \left[\frac{1}{8} (12\alpha + 4) + \frac{16}{32} (3\alpha + 1), \frac{1}{8} 16 + 12(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) + \frac{16}{2*4^2} (4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})) \right]. \\ &= \left[\frac{1}{8} (12\alpha + 4) + \frac{16}{32} (3\alpha + 1), \frac{1}{8} 16 + 12(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) + \frac{16}{32} (4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})) \right]. \\ [A^{-1}B]^\alpha &= \left[\frac{1}{8} (12\alpha + 4) + \frac{16}{32} (3\alpha + 1), \frac{1}{8} 16 + 12(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) + \frac{16}{32} (4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})) \right]. \end{aligned}$$

$$[A^{-1}B]^\alpha = \left[3\alpha + 1, 4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) \right].$$

De $X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B}$, se obtiene.

$$\sqrt{A} = \left(\frac{a}{\sqrt{\phi}}, \frac{\bar{a}}{\sqrt{\phi}} \right),$$

$$\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right),$$

$$X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B} = \left(\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_\alpha}}{\sqrt{\delta}} \right)$$

donde,

$$\text{si } \alpha = 1, \underline{(A^{-1}B)_1} = 3\alpha + 1 = 4 = \delta_1,$$

$$\overline{(A^{-1}B)_1} = 4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}) = 4 = \delta_2$$

$$\delta = a.c(A^{-1}B) = \frac{4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$X_1 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{\delta}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_{\alpha}}}{\sqrt{\delta}} \right)$$

$$X_1 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{3\alpha + 1}{\sqrt{4}}, \frac{4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})}{\sqrt{4}} \right)$$

$$X_1 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{3\alpha + 1}{2}, \frac{4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})}{2} \right)$$

$$X_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_{\alpha}}}{\sqrt{\delta}} - 2\sqrt{\delta} \right)$$

$$X_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{3\alpha + 1}{2} - 2\sqrt{4}, \frac{4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})}{2} - 2\sqrt{4} \right)$$

$$X_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{3\alpha + 1}{2} - 2(2), \frac{4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})}{2} - 2(2) \right)$$

$$X_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\frac{3\alpha + 1}{2} - 4, \frac{4 + 3(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2})}{2} - 4 \right).$$

4.5. Solución de la ecuación difusa $AX^2 + B = C$

Sea $A \in F'_c(\mathbb{R})$ y $B, C \in F_c(\mathbb{R})$,

Usando las operaciones aritméticas difusas basadas en TPN y sus propiedades, se

tiene.

$$AX^2 + B = C$$

$$AX^2 + B - B = C - B \quad (64)$$

$$AX^2 + 0_B = C - B \quad (65)$$

$$AX^2 \cong C - B \quad (66)$$

$$A^{-1}(AX^2) \cong A^{-1}(C - B) \quad (67)$$

$$(A^{-1}A)X^2 \cong A^{-1}(C - B) \quad (68)$$

$$1_A X^2 \cong A^{-1}(C - B) \quad (69)$$

$$X^2 \cong A^{-1}(C - B) \quad (70)$$

$$X \cong \pm \sqrt{A^{-1}(C - B)} \quad (71)$$

La nueva solución es más sencilla que usando el principio de extensión. En el siguiente lema se muestra una solución exacta de la ecuación difusa, si sus coeficientes constantes tienen ciertas relaciones.

Lema 4.22. *Si $A \sim_2 C - B$ y $B \sim_1 C$ está en la ecuación $AX^2 + B = C$, entonces $X = \pm \sqrt{A^{-1}(C - B)}$.*

Demostración. Por 71 se tiene.

$$X \cong \pm \sqrt{A^{-1}(C - B)}.$$

Luego falta demostrar que

$$X \sim_2 \pm \sqrt{A^{-1}(C - B)}.$$

Para lograr esto tenemos que $A \sim_2 C - B$ y también que $1_A \sim_2 A \sim_2 C - B$, Por otro lado $(F'_c(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un grupo difuso tipo 2, luego $A^{-1} \sim_2 A$ y $A \sim_2 C - B$ entonces $A^{-1} \sim_2 C - B$ entonces $A^{-1}(C - B) \sim_2 A^{-1}$ ó $A^{-1}(C - B) \sim_2 C - B$ pero $C - B \sim_2 A$ luego $A^{-1}(C - B) \sim_2 A$ entonces $\pm\sqrt{A^{-1}(C - B)} \sim_2 \pm\sqrt{A}$.

Ahora

$$\begin{aligned} AX^2 &= C - B \sim_2 A \sim_2 A^{-1} \\ A^{-1}AX^2 &\sim_2 A^{-1} \sim_2 A \\ A^{-1}AX^2 &\sim_2 A \\ 1_A X^2 &\sim_2 A \\ X^2 &\sim_2 A \\ X^2 &\sim_2 A^{-1}(C - B) \end{aligned}$$

podemos decir que $D \sim_2 \pm\sqrt{D} \Rightarrow X^2 \sim_2 \pm\sqrt{X^2}$ y $A^{-1}(C - B) \sim_2 \pm\sqrt{A^{-1}(C - B)} \Rightarrow \pm\sqrt{X^2} \sim_2 \pm\sqrt{A^{-1}(C - B)}$ por lo tanto $X \sim_2 \pm\sqrt{A^{-1}(C - B)}$ Entonces,

$$\begin{aligned} AX^2 + B &= A(A^{-1}(C - B)) + B, \\ &= (AA^{-1})(C - B) + B, \\ &= 1_A(C - B) + B, \\ &= (C - B) + B, \\ &= C + (-B + B), \\ &= C + 0_B, \\ &= C. \end{aligned}$$

□

4.6. Comparación de ejemplos numéricos.

En esta sección se presentan varios ejemplos para comparar el método de la traslación TPN con el método de la aritmética difusa basada en el principio de extensión de Zadeh. Se mostrara que algunas ecuaciones difusas no tienen respuesta con el principio de extensión y con el método de la traslación se da una respuesta.

Ejemplo 4.23. Resolver $(-3, 2, 3, -, -) + X = (1, 3, 5, -, -)$

Solución:

Aplicando el método TPN, se tiene.

Sean

$$A = (-3, 2, 3, -, -) \text{ y } B = (1, 3, 5, -, -)$$

$$\phi = 2 = a.c(A) \text{ y } \psi = 3 = a.c(B)$$

$$[B - A]^\alpha = \left[\frac{\psi - 3\phi}{2} + \left(\frac{A_\alpha + B_\alpha}{2} \right), \frac{\psi - 3\phi}{2} + \left(\frac{\overline{A}_\alpha + \overline{B}_\alpha}{2} \right) \right].$$

A continuación determinamos $[A]^\alpha = \left[\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha), \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) \right]$ es $y = \frac{1}{5}(x+3)$. Sea $\alpha = \frac{1}{5}(x+3)$

La inversa es $x + 3 = 5\alpha$,

$$x = 5\alpha - 3 = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha).$$

La recta que une $(2, 1)$ con $(3, 0)$ es $y = 3 - x$, sea $\alpha = 3 - x$, luego

$$x = 3 - \alpha = \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)$$

Por lo tanto $[A]^\alpha = [5\alpha - 3, 3 - \alpha]$.

Ahora determinemos $[B]^\alpha = [\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha), \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha)]$

La recta que une $(1, 0)$ con $(3, 1)$ es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(x - 1)$, despejando $x = 2\alpha + 1 = \underline{\mu}_B^{-1}(\alpha)$

La recta que une $(3, 1)$ con $(5, 0)$ es $y = \frac{1}{2}(5 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(5 - x)$.

Luego, $x = 5 - 2\alpha = \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha)$

Por lo tanto se tiene

$$[B]^\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

$$[B - A]^\alpha = \left[\frac{3-3(2)}{2} + \left(\frac{5\alpha-3+2\alpha+1}{2} \right), \frac{3-3(2)}{2} + \left(\frac{3-\alpha+5-2\alpha}{2} \right) \right]$$

$$= \left[\frac{3-6}{2} + \left(\frac{5\alpha-3+2\alpha+1}{2} \right), \frac{3-6}{2} + \left(\frac{3-\alpha+5-2\alpha}{2} \right) \right]$$

$$= \left[\frac{-3}{2} + \left(\frac{7\alpha-2}{2} \right), \frac{-3}{2} + \left(\frac{8-3\alpha}{2} \right) \right] = \left[\underline{(B - A)_\alpha}, \overline{(B - A)_\alpha} \right]$$

$$\alpha = 0, \quad x_1 = \frac{-3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$\alpha = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{-3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{5}{2}$$

De lo anterior se obtiene la solución.

$$X \cong \left(\frac{-5}{2}, 1, \frac{5}{2}, -, - \right)$$

Veamos si A y B tienen o no tienen relación tipo 1. Recordando que $a.c(A) = 2$, $a.c(B) = 3$

$$\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 5\alpha - 3 = 2 + t_{1\alpha} \quad (72)$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 2\alpha + 1 = 3 + t_{1\alpha} \quad (73)$$

De 72 y 73 se obtiene $t_{1\alpha} = 5\alpha - 5 = 2\alpha - 2$ entonces $3\alpha = 3$, de donde $\alpha = 1$. La igualdad no se verifica para todo $\alpha \in [0, 1]$, luego A no está relacionada tipo 1 con B , por esta razón la solución $\left(\frac{-5}{2}, 1, \frac{5}{2}, -, - \right)$ es aproximada.

Usando 14 en el capítulo 1 (aritmética difusa basada en el principio de extensión de Zadeh), se tiene.

$$\begin{aligned} [B - A]^\alpha &= [2\alpha + 1 - (3 - \alpha), 5 - 2\alpha - (5\alpha - 3)] \\ &= [3\alpha - 2, 8 - 7\alpha] \end{aligned}$$

que corresponde a la solución $(-2, 1, 8, -, -)$.

Ejemplo 4.24. Resuelva $(1, 3, 6, -, -) + X = (6, 8, 11, -, -)$ Sean

$A = (1, 3, 6, -, -)$ y $B = (6, 8, 11, -, -)$

Aplicando el método TPN, se tiene.

$$A = (1, 3, 6, -, -), \phi = 3$$

$$B = (6, 8, 11, -, -), \psi = 8$$

La recta que une $(1, 0)$ con $(3, 1)$ es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$. Sea $\alpha = \frac{1}{2}(x - 1)$, entonces $x = 2\alpha + 1 = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)$.

La recta que une $(3, 1)$ con $(6, 0)$ es $y = \frac{1}{3}(6 - x)$. sea $\alpha = \frac{1}{3}(6 - x)$,

$$\text{Luego, } x = 6 - 3\alpha = \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)$$

Finalmente obtenemos.

$$[A]_\alpha = [2\alpha + 1, 6 - 3\alpha]$$

$$\text{De } B = (6, 8, 11, -, -)$$

La recta que une $(6, 0)$ con $(8, 1)$ es

$$\text{De aquí } x = 2\alpha + 6 = \underline{\mu}_B^{-1}(\alpha).$$

La recta que une $(8, 1)$ con $(11, 0)$ es $y = \frac{1}{3}(11 - x)$. Sea $\alpha = \frac{1}{3}(11 - x)$.

$$\text{Luego, } x = 11 - 3\alpha = \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha)$$

Por lo tanto $[B]_\alpha = [2\alpha + 6, 11 - 3\alpha]$

Usando la ecuación 25 de la definición 2.1 se tiene.

$$\begin{aligned} [B - A]^\alpha &= \left[\frac{8-3(2)}{2} + \left(\frac{2\alpha+1+2\alpha+6}{2} \right), \frac{8-3(2)}{2} + \left(\frac{6-3\alpha+11-3\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{8-9}{2} + \left(\frac{4\alpha+7}{2} \right), \frac{8-9}{2} + \left(\frac{17-6\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{-1}{2} + \left(\frac{4\alpha+7}{2} \right), \frac{-1}{2} + \left(\frac{17-6\alpha}{2} \right) \right] = \left[\underline{(B - A)}_\alpha, \overline{(B - A)}_\alpha \right] \end{aligned}$$

$$\alpha = 0, \quad x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\alpha = 1, \quad x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{4+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\alpha = 0, \quad x_3 = \frac{-1}{2} + \frac{17}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$X = (3, 5, 8, -, -)$$

$A \sim_1 B = ?$

$$\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 2\alpha + 1 = 3 + t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = 2\alpha - 2 \quad (74)$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 2\alpha + 6 = 8 + t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = 2\alpha - 2 \quad (75)$$

$$\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = -3\alpha + 6 = 3 + t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = -3\alpha + 3 \quad (76)$$

$$\bar{\mu}_B^{-1}(\alpha) = -3\alpha + 11 = 8 + t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = -3\alpha + 3 \quad (77)$$

Por lo tanto $A \sim_1 B$ y $X = (3, 5, 8, -, -)$ es una solución exacta.

Usando 14 en el capítulo 1 (aritmética difusa basada en el principio de extensión de Zadeh), se tiene, se tiene.

$$\begin{aligned} [B - A]^\alpha &= [2\alpha + 6 - (6 - 3\alpha), 11 - 3\alpha - (2\alpha + 1)] \\ &= [5\alpha, 10 - 5\alpha] \end{aligned}$$

$$\text{si } \alpha = 0, \quad x_1 = 5(0) = 0$$

$$\text{si } \alpha = 1, \quad x_2 = 5(1) = 5$$

$$\text{si } \alpha = 1, \quad x_3 = 10 - 5(1) = 5$$

$$\text{si } \alpha = 1, \quad x_4 = 10 - 5(0) = 10$$

$X = B - A = (0, 5, 10, -, -)$ es una solución.

Ejemplo 4.25. Resuelva $(1, 2, 7, -, -) X = (-3, -2, -1, -, -)$

Solución:

$$A = (1, 2, 7, -, -), \quad a.c(A) = 2 = \phi$$

$$B = (-3, -2, -1, -, -), \quad a.c(B) = -2 = \psi.$$

Usando el cuarto renglón en 28 en la definición 2.1 se tiene.

$$\left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \left[\left(\frac{1}{2\phi} \right) \underline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right), \left(\frac{1}{2\phi} \right) \overline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha \right) \right].$$

Comenzamos con determinar $[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha]$.

La recta que une $(1, 0)$ con $(2, 1)$ es $y = x - 1$.

Sea $x - 1 = \alpha$, despejando x , $x = \alpha + 1 = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \underline{A}_\alpha$.

La recta que une $(2, 1)$ con $(7, 0)$ es $y = \frac{1}{5}(7 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{5}(7 - x)$, despejando x , se obtiene $x = 7 - 5\alpha = \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \overline{A}_\alpha$. Por lo tanto

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 7 - 5\alpha]. \quad (78)$$

Ahora determinemos $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha]$.

La recta que une $(-3, 0)$ con $(-2, 1)$ es $y = x + 3$.

Sea $x + 3 = \alpha$, despejando x , $x = \alpha - 3 = \underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = \underline{B}_\alpha$.

La recta que une $(-2, 1)$ con $(-1, 0)$ es $y = -1 - x$.

Sea $\alpha = -1 - x$, despejando x , se obtiene $x = -1 - \alpha = \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = \overline{B}_\alpha$. Por lo tanto

$$[B]^\alpha = [\alpha - 3, -1 - \alpha]. \quad (79)$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \left[\frac{1}{4}(\alpha - 3) - \frac{2}{2(4)}(7 - 5\alpha), \frac{1}{4}(-1 - \alpha) - \frac{2}{2(4)}(\alpha + 1) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}(6\alpha - 10), \frac{1}{4}(-2 - 2\alpha) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}(3\alpha - 5), \frac{1}{2}(-1 - \alpha) \right] = \left[\underline{(A^{-1}B)}_\alpha, \overline{(A^{-1}B)}_\alpha \right]$$

$$X \cong \frac{B}{A} \cong \bigcup_\alpha \left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \bigcup_\alpha \left[\frac{1}{2}(3\alpha - 5), \frac{1}{2}(-1 - \alpha) \right] \quad (80)$$

Esto es

$$\left[\frac{B}{A}\right]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(3\alpha - 5), \frac{1}{2}(-1 - \alpha)\right].$$

Algunos α - niveles son

$$\left[\frac{B}{A}\right]^0 = \left[\frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}\right]$$

$$\left[\frac{B}{A}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{-7}{4}, \frac{-3}{4}\right]$$

$$\left[\frac{B}{A}\right]^1 = [-1, -1]$$

$$X \cong \left(\frac{-5}{2}, -1, \frac{-1}{2}, -, -\right)$$

A continuación mostramos que A y B no tienen relación tipo 2.

$$\underline{A}_\alpha = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \alpha + 1 = 2t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{\alpha + 1}{2}$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = \alpha - 3 = -2t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{\alpha - 3}{-2} = \frac{3 - \alpha}{2}.$$

Como $\frac{\alpha+1}{2}$ y $\frac{3-\alpha}{2}$ no son iguales para todo $\alpha \in [0, 1]$ A y B no tiene relación tipo 2, así la solución es aproximada.

Ahora usando la formula de la división 18 en la definición 12

$$X = [A^{-1}B]^\alpha = \left[\frac{B}{A} \right]^\alpha$$

$$X_\alpha = \left\{ \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}, \frac{\alpha - 3}{7 - 5\alpha}, \frac{-1 - \alpha}{\alpha + 1}, \frac{-1 - \alpha}{7 - 5\alpha} \right\}$$

$$\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} \geq \frac{-1 - \alpha}{\alpha + 1}$$

$$\frac{\alpha - 3}{7 - 5\alpha} \geq \frac{-1 - \alpha}{7 - 5\alpha}$$

$$1 \leq 1 + \alpha \leq 7 - 5\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{entonces } \frac{1}{\alpha + 1} \geq \frac{1}{7 - 5\alpha}$$

$$\text{como } -1 - \alpha \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{entonces } \frac{-1 - \alpha}{\alpha + 1} \leq \frac{-1 - \alpha}{7 - 5\alpha},$$

$$\text{por lo tanto } \min X_\alpha = \frac{-1 - \alpha}{\alpha + 1}.$$

Como $\alpha - 3 < 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$, entonces.

$$\left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \left[\frac{-1 - \alpha}{\alpha + 1}, \frac{\alpha - 3}{7 - 5\alpha} \right].$$

En particular se tiene, el $\frac{1}{2}$ - nivel es.

$$\left[\frac{B}{A} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2} - 3}{7 - \frac{5}{2}} \right] = \left[-1, \frac{-5}{9} \right].$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^0 = \left[-1, \frac{-3}{7} \right]$$

no es un intervalo en la recta real por lo tanto la ecuación $AX = B$ no tiene solución.

Ejemplo 4.26. Resuelva $(4, 6, 8, -, -) X = (1, 3, 5, -, -)$

Solución:

$$A = (4, 6, 8, -, -), \phi = 6 = a.c(A)$$

$$B = (1, 3, 5, -, -), \psi = 3 = a.c(B).$$

Usando el primer renglón en 28 de la definición 2.1.

$$\left[\frac{B}{A} \right]^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{2\phi} \right) \underline{B}_{\alpha} + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_{\alpha} \right), \left(\frac{1}{2\phi} \right) \overline{B}_{\alpha} + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_{\alpha} \right) \right].$$

Comenzamos con determinar $[A]^{\alpha} = [\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}]$.

La recta que une $(4, 0)$ con $(6, 1)$ es $y = \frac{1}{2}(x - 4)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(x - 4)$, despejando x , $x = 2\alpha + 4 = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \underline{A}_{\alpha}$.

La recta que une $(6, 1)$ con $(8, 0)$ es $y = \frac{1}{2}(8 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(8 - x)$, despejando x , se obtiene $x = 8 - 2\alpha = \overline{\mu_A^{-1}}(\alpha) = \overline{A}_\alpha$. Por lo tanto

$$[A]^\alpha = [2\alpha + 4, 8 - 2\alpha]. \quad (81)$$

En segundo lugar determinemos $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha]$.

La recta que une $(1, 0)$ con $(3, 1)$ es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{2}(x - 1)$, despejando x , $x = 2\alpha + 1 = \underline{\mu_b^{-1}}(\alpha) = \underline{B}_\alpha$.

La recta que une $(3, 1)$ con $(5, 0)$ es $y = \frac{5}{2} - x$.

Sea $\alpha = \frac{5}{2} - x$, despejando x , se obtiene $x = 5 - 2\alpha = \overline{\mu_B^{-1}}(\alpha) = \overline{B}_\alpha$ y tenemos

$$[B]^\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

$$\left[\frac{B}{A}\right]^\alpha = \left[\frac{1}{16}(2\alpha + 1) + \frac{3}{2(36)}(2\alpha + 4), \frac{1}{12}(5 - 2\alpha) + \frac{2}{2(36)}(8 - 2\alpha)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{12}(2\alpha + 1) + \frac{1}{12}(\alpha + 2), \frac{1}{12}(5 - 2\alpha) + \frac{1}{12}(4 - \alpha)\right]$$

$$= \left[\frac{3\alpha + 3}{12}, \frac{9 - 3\alpha}{12}\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha + 1}{4}, \frac{3 - \alpha}{4}\right] = \left[\underline{(A^{-1}B)}_\alpha, \overline{(A^{-1}B)}_\alpha\right]$$

$$X \cong \frac{B}{A} \cong \bigcup_\alpha \left[\frac{B}{A}\right]^\alpha = \bigcup_\alpha \left[\frac{\alpha + 1}{4}, \frac{3 - \alpha}{4}\right]. \quad (82)$$

Por lo tanto.

$$\left[\frac{B}{A}\right]^\alpha = \left[\frac{\alpha + 1}{4}, \frac{3 - \alpha}{4}\right]$$

Algunos α -niveles son:

$$\left[\frac{B}{A} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right]$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$$

$$X \cong \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, - \right).$$

A continuación mostramos que A no está relacionado tipo 2 con B , luego es una solución aproximada.

$$\underline{A}_\alpha = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 2\alpha + 4 = 6t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{2\alpha + 4}{6} = \frac{\alpha + 2}{3}.$$

$$\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 2\alpha + 1 = 3t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{2\alpha + 1}{3}.$$

Como $\frac{\alpha+2}{3} \neq \frac{2\alpha+1}{3}$ para todo $\alpha \in [0, 1)$, entonces A no está relacionada tipo 2 con B .

Ahora usando la definición de la multiplicación en la definición 12.

$$X_\alpha = \left\{ \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 4}, \frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}, \frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4}, \frac{5 - 2\alpha}{8 - 2\alpha} \right\}$$

Ya que $5 - 2\alpha \geq 2\alpha + 1 \geq 1$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ entonces

$$\frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4} \geq \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 4} \text{ y}$$

$$\frac{5 - 2\alpha}{8 - 2\alpha} \geq \frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}.$$

Como $8 - 2\alpha \geq 2\alpha + 4 \geq 1$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

$$\frac{1}{8 - 2\alpha} \leq \frac{1}{2\alpha + 4} \text{ y } 5 - 2\alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\frac{5 - 2\alpha}{8 - 2\alpha} \leq \frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4}$$

$$\text{máx}X_\alpha = \frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4}.$$

Usando nuevamente la desigualdad.

$$\frac{1}{8 - 2\alpha} \leq \frac{1}{2\alpha + 4} \text{ y } 2\alpha + 1 \geq 1, \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha} \leq \frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}$$

$$\text{min}X_\alpha = \frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}.$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \left[\frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}, \frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4} \right]$$

$$X = \frac{B}{A} \cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{B}{A} \right]^\alpha \cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{2\alpha + 1}{8 - 2\alpha}, \frac{5 - 2\alpha}{2\alpha + 4} \right]$$

Algunos α -niveles son:

$$\left[\frac{B}{A} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{7}, \frac{4}{5} \right]$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[\frac{B}{A} \right]^1 = \left[\frac{1}{8}, \frac{5}{4} \right].$$

Entonces

$$X \cong \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -, - \right)$$

Ejemplo 4.27. Resuelva $(1, 2, 7, -, -) X^2 = (1, 2, 3, -, -)$ Solución:

$$A = (1, 2, 7, -, -), \phi = 2 = a.c(A)$$

$$B = (1, 2, 3, -, -), \psi = 2 = a.c(B).$$

Usando el primer renglón en 28 de la definición 2.1.

$$\left[\frac{B}{A} \right]^\alpha = \left[\left(\frac{1}{2\phi} \right) \underline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha \right), \left(\frac{1}{2\phi} \right) \overline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right) \right].$$

A continuación determinamos $[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha]$.

La recta que une $(1, 0)$ con $(2, 1)$ es $y = x - 1$.

Sea $\alpha = x - 1$, despejando x , $x = \alpha + 1 = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \underline{A}_\alpha$.

La recta que une $(2, 1)$ con $(7, 0)$ es $y = \frac{1}{5}(7 - x)$.

Sea $\alpha = \frac{1}{5}(7 - x)$, despejando x , se obtiene $x = 7 - 5\alpha = \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \overline{A}_\alpha$. Luego

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 7 - 5\alpha]. \quad (83)$$

Ahora determinemos $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha]$.

La recta que une $(1, 0)$ con $(2, 1)$ es $y = x - 1$.

Sea $\alpha = x - 1$, despejando x , $x = \alpha + 1 = \underline{\mu}_b^{-1}(\alpha) = \underline{B}_\alpha$.

La recta que une $(2, 1)$ con $(3, 0)$ es $y = 3 - x$.

Sea $\alpha = 3 - x$, despejando x , se obtiene $x = 3 - \alpha = \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = \overline{B}_\alpha$. Por lo tanto

$$[B]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha].$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{B}{A}\right]^\alpha &= \left[\frac{1}{4}(\alpha+1) + \frac{2}{2(4)}(\alpha+1), \frac{1}{4}(3-\alpha) + \frac{2}{2(4)}(7-5\alpha)\right] \\
&= \left[\frac{1}{4}(\alpha+1) + \frac{1}{4}(\alpha+1), \frac{1}{4}(3-\alpha) + \frac{1}{4}(7-5\alpha)\right] \\
&= \left[\frac{2}{4}(\alpha+1), \frac{1}{4}(10-6\alpha)\right] \\
&= \left[\frac{\alpha+1}{2}, \frac{5-3\alpha}{2}\right] = \left[\underline{(A^{-1}B)}_\alpha, \overline{(A^{-1}B)}_\alpha\right].
\end{aligned}$$

Usando el primer renglón en 27 de la definición 2.1.

$$X^2 \cong \bigcup_\alpha [A^{-1}B]^\alpha = \bigcup_\alpha \left[\frac{\alpha+1}{2}, \frac{5-3\alpha}{2}\right] = A^{-1}B$$

$$X \cong \pm\sqrt{A^{-1}B}$$

$$x_1 \cong \bigcup_\alpha \left[\frac{(A^{-1}B)_\alpha}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)}_\alpha}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}}\right] = \sqrt{A^{-1}B}$$

$$\underline{(A^{-1}B)}_1 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\overline{(A^{-1}B)}_1 = \frac{5-3(1)}{2} = 1$$

$$a.c(A^{-1}B) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$x_1 \cong \bigcup_\alpha \left[\frac{\alpha+1}{\sqrt{1}}, \frac{5-3\alpha}{\sqrt{1}}\right] = \bigcup_\alpha \left[\frac{\alpha+1}{2}, \frac{5-3\alpha}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
x_2 &\cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}} - 2\sqrt{a.c(A^{-1}B)}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_{\alpha}}}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}} - 2\sqrt{a.c(A^{-1}B)} \right] = -\sqrt{A^{-1}B} \\
&\cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\alpha+1}{\sqrt{1}} - 2\sqrt{1}, \frac{5-3\alpha}{\sqrt{1}} - 2\sqrt{1} \right] \\
&\cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\alpha+1}{2} - 2, \frac{5-3\alpha}{2} - 2 \right] \\
&\cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\alpha-3}{2}, \frac{1-3\alpha}{2} \right],
\end{aligned}$$

entonces $x_2 \cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\alpha-3}{2}, \frac{1-3\alpha}{2} \right]$.

Veamos si A y B estan o no lo estan relacionados tipo 2.

$$A_{\alpha} = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \alpha + 1 = 2t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{\alpha + 1}{2},$$

$$B_{\alpha} = \underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = \alpha + 1 = 2t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{\alpha + 1}{2},$$

$$\overline{A}_{\alpha} = \overline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 7 - 5\alpha = 2t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = \frac{7 - 5\alpha}{2},$$

$$\overline{B}_{\alpha} = \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 3 - \alpha = 2t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = \frac{3 - 5\alpha}{2},$$

Si $7 - 5\alpha = 3 - \alpha$, entonces $4 = 4\alpha$, $\alpha = 1$, la igualdad no se tiene para todo $\alpha \in [0, 1]$

luego A no esta relacionado tipo 2 con B y x_1, x_2 son soluciones aproximados.

Por otro lado de acuerdo con 18

$$x_1^{\alpha} = \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\alpha}}, \sqrt{\frac{3-\alpha}{7-5\alpha}} \right]$$

si $\alpha = 0$ $x_1^0 = \left[1, \sqrt{\frac{3}{7}}\right] = [1, 0.65]$, no es un intervalo cerrado de la recta real por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 4.28. Resuelva

$$(1, 2, 4, -, -) X^2 = (4, 8, 16, -, -) \quad (84)$$

Solución:

Sean.

$$A = (1, 2, 4, -, -), \phi = 2 = a.c(A)$$

$$B = (4, 8, 16, -, -), \psi = 8 = a.c(B).$$

Determinamos los α - niveles en forma análoga a los ejemplos anteriores.

$$[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha] = [\alpha + 1, 4 - 2\alpha],$$

$$[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha] = [4\alpha + 4, 16 - 8\alpha],$$

A continuación determinamos $X^2 \cong A^{-1}B$ como ϕ y ψ son positivos, usamos la primera

formula en 28 de la definición 2.1

$$\begin{aligned} \left[\frac{B}{A} \right]^\alpha &= \left[\left(\frac{1}{2\phi} \right) \underline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \underline{A}_\alpha \right), \left(\frac{1}{2\phi} \right) \overline{B}_\alpha + \left(\frac{\psi}{2\phi^2} \overline{A}_\alpha \right) \right]. \\ &= \left[\frac{1}{4}(4\alpha + 4) - \frac{8}{2(4)}(\alpha + 1), \frac{1}{4}(16 - 8\alpha) + \frac{8}{2(4)}(4 - 2\alpha) \right] \\ &= [2\alpha + 2, 8 - 4\alpha] = \left[\underline{(A^{-1}B)}_\alpha, \overline{(A^{-1}B)}_\alpha \right]. \end{aligned}$$

$$X^2 \cong \bigcup_{\alpha} [A^{-1}B]^\alpha = \bigcup_{\alpha} [2\alpha + 2, 8 - 4\alpha]$$

$$X \cong \pm \sqrt{A^{-1}B}$$

Ahora calculamos el promedio del núcleo de $A^{-1}B$.

$$\underline{(A^{-1}B)}_1 = 2(1) + 2 = 4$$

$$\overline{(A^{-1}B)}_1 = 8 - 4(1) = 4$$

$$a.c(A^{-1}B) = \frac{4+4}{2} = 4$$

Una solución es.

$$\begin{aligned} x_1 \cong \sqrt{A^{-1}B} &= \bigcup_{\alpha} \left[\frac{\underline{(A^{-1}B)}_\alpha}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}}, \frac{\overline{(A^{-1}B)}_\alpha}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}} \right]^2 \\ &= \bigcup_{\alpha} \left[\frac{2\alpha + 2}{2}, \frac{8 - 4\alpha}{2} \right] \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{\alpha} [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$$

$$x_1 \cong \bigcup_{\alpha} [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$$

Otra solución es

$$x_2 \cong -\sqrt{A^{-1}B}$$

$$= \bigcup_{\alpha} \left[\frac{(A^{-1}B)_{\alpha}}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}} - 2\sqrt{a.c(A^{-1}B)}, \frac{\overline{(A^{-1}B)_{\alpha}}}{\sqrt{a.c(A^{-1}B)}} - 2\sqrt{a.c(A^{-1}B)} \right]$$

$$\cong \bigcup_{\alpha} \left[\frac{2 + 2\alpha}{\sqrt{4}} - 2\sqrt{4}, \frac{8 - 4\alpha}{\sqrt{4}} - 2\sqrt{4} \right]$$

$$\cong \bigcup_{\alpha} [\alpha - 3, -2\alpha]$$

$$x_2 \cong \bigcup_{\alpha} [\alpha - 3, -2\alpha].$$

A continuación mostramos que $A \sim_2 B$.

$$\underline{A}_{\alpha} = \underline{\mu}_A^{-1}(\alpha) = \alpha + 1 = 2t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{\alpha + 1}{2},$$

$$\underline{B}_{\alpha} = \underline{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 4\alpha + 4 = 8t_{1\alpha}, \quad t_{1\alpha} = \frac{4\alpha + 4}{8} = \frac{\alpha + 1}{2},$$

$$\bar{A}_\alpha = \bar{\mu}_A^{-1}(\alpha) = 4 - 2\alpha = 2t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = 2 - \alpha,$$

$$\bar{B}_\alpha = \bar{\mu}_B^{-1}(\alpha) = 16 - 8\alpha = 8t_{2\alpha}, \quad t_{2\alpha} = 2 - \alpha.$$

Por tanto $A \sim_2 B$ y se tiene que las soluciones son exactas.

$$x_1 = \bigcup [\alpha + 1, 4 - 2\alpha]$$

$$x_2 = \bigcup_{\alpha} [\alpha - 3, -2\alpha]$$

Por otro lado de acuerdo con 17

$$x_1^\alpha = \left[\sqrt{\frac{4\alpha + 4}{\alpha + 1}}, \sqrt{\frac{16 - 8\alpha}{4 - 2\alpha}} \right]$$

$$= [2, 2] = 2 \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como se puede comprobar directamente.

$$(1, 2, 4, -.-) 2^2 = (4, 8, 16, -, -).$$

$$x_2^\alpha = \left[-\sqrt{\frac{16 - 8\alpha}{4 - 2\alpha}}, -\sqrt{\frac{4\alpha + 4}{\alpha + 1}} \right]$$

$$= [-2, -2] = -2 \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad \text{como se puede comprobar}$$

$$(1, 2, 4, -.-) (-2)^2 = (4, 8, 16, -, -).$$

Las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son soluciones pero no son números difusos triangulares.

5. Conclusiones

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar las siguientes conclusiones generales:

- Es bien conocido por Mizumoto y Tanaka (1982) que no existen números difusos inversos aditivos y multiplicativos. La falta de inversos se vuelve significativo cuando se intenta resolver ecuaciones algebraicas difusas. El método TPN propuesto por Abbasi y otros. (2015), proporcionan una respuesta aproximada, una solución es exacta si los coeficientes tienen un tipo de relación.
- El objetivo principal de este trabajo es teórico y a lo largo de el se han introducido restricciones para trabajar con conjuntos difusos sobre el conjunto de los números reales.

Para un trabajo futuro seria bueno seguir el estudio de las ecuaciones algebraicas sobre el conjunto de los números complejos. Ya que este es extenso y complicado.

BIBLIOGRAFÍA

Abbasi, Fazlollah, Tofigh Allahviranloo y Saeid Abbasbandy. "A new attitude coupled with fuzzy thinking to fuzzy rings and fields". En: *Journal of intelligent & fuzzy systems* 29.2 (2015), págs. 851-861 (vid. págs. 26, 42, 45, 48, 54, 55, 72).

AbuAarqob, Omar A, Nabil T Shawagfeh y Omar A AbuGhneim. "Functions defined on fuzzy real numbers according to zadehs extension". En: *International Mathematical Forum*. Vol. 3. 16. 2008, págs. 763-776 (vid. pág. 16).

Allahviranloo, Tofigh, Irina Perfilieva y Fazlollah Abbasi. "A new attitude coupled with fuzzy thinking for solving fuzzy equations". En: *Soft computing* 22.9 (2018), págs. 3077-3095 (vid. págs. 20, 21, 99).

Buckley, James J, Esfandiar Eslami y Yoichi Hayashi. "Solving fuzzy equations using neural nets". En: *Fuzzy Sets and Systems* 86.3 (1997), págs. 271-278 (vid. pág. 9).

Buckley, JJ y Yunxia Qu. "Solving linear and quadratic fuzzy equations". En: *Fuzzy sets and systems* 38.1 (1990), págs. 43-59 (vid. pág. 9).

Dubois, DIDIER y HENRI Prade. "Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations". En: *Control and Cybernetics* 13.3 (1984), págs. 129-146 (vid. pág. 9).

Jain, Ramesh. "A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets". En: *International Journal of systems science* 8.1 (1977), págs. 1-7 (vid. pág. 10).

- Jain, Ramesh. "Outline of an approach for the analysis of fuzzy systems". En: *International Journal of Control* 23.5 (1976), págs. 627-640 (vid. pág. 10).
- "Tolerance analysis using fuzzy sets". En: *International Journal of Systems Science* 7.12 (1976), págs. 1393-1401 (vid. pág. 10).
- Jiang, Hua-biao. "The approach to solving simultaneous linear equations that coefficients are fuzzy numbers". En: *Journal of National University of Defence Technology (Chinese)* 3 (1986), págs. 96-102 (vid. pág. 9).
- Kawaguchi, Mayuka F y Tsutomu Da-Te. "A calculation method for solving fuzzy arithmetic equations with triangular norms". En: *[Proceedings 1993] Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. IEEE. 1993, págs. 470-476 (vid. pág. 9).
- Klir, George y Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995 (vid. págs. 9, 19, 20).
- Mazarbhuiya, Fokrul Alom, Anjana Kakoti Mahanta, Hemanta K Baruah et al. "Solution of the fuzzy equation $A + X = B$ using the method of superimposition". En: *Applied Mathematics* 2.8 (2011), págs. 1039-1045 (vid. pág. 9).
- Nguyen, Hung T. "A note on the extension principle for fuzzy sets". En: *Journal of mathematical analysis and applications* 64.2 (1978), págs. 369-380 (vid. pág. 20).
- Sanchez, Elie. "Solution of fuzzy equations with extended operations". En: *Fuzzy sets and Systems* 12.3 (1984), págs. 237-248 (vid. pág. 9).

Sanchez, Elie. "Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in Brouwerian logic". En: *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Elsevier, 1993, págs. 159-165 (vid. pág. 10).

Stefanini, Luciano. "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy sets and systems* 161.11 (2010), págs. 1564-1584 (vid. pág. 14).

Wang, X y M Ha. *Solving a system of fuzzy linear equations*. 1994 (vid. pág. 9).

Yager, Ronald R. "Building fuzzy systems models". En: *Applied general systems research*. Springer, 1978, págs. 313-320 (vid. pág. 10).

— "On the lack of inverses in fuzzy arithmetic". En: *Fuzzy Sets and Systems* 4.1 (1980), págs. 73-82 (vid. pág. 25).

Zhao, Renhong y Rakesh Govind. "Solutions of algebraic equations involving generalized fuzzy numbers". En: *Information sciences* 56.1-3 (1991), págs. 199-243 (vid. pág. 9).