El concepto de círculo y la noción de distancia en la Geometría Euclidiana y la Geometría del Taxista: Un análisis desde la Teoría APOE

Proyecto de grado modalidad: Trabajo de Investigación

Juan David Serrano Duarte

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Codirectora

Astrid Carolina Archila Prada

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2025

Agradecimientos

Primero que todo le doy gracias a Dios y a la vida por poner en mi vida a personas tan maravillosas, personas que siempre estuvieron conmigo en los peores y mejores momentos, que siempre me ayudaron y han estado acompañándome en este largo y arduo proceso.

Mis padres que son mi adoración, gracias por todo, no me alcanzarán los años ni la vida para poder devolverles todo lo bueno que han hecho por mí, los amo infinitamente. A mis padrinos, mis segundos padres, los que hicieron que esto fuera posible, gracias por todo lo que han hecho por mí. Espero que estén orgullosos.

Mi tutora de tesis, una mujer encantadora y que me ha enseñado mucho, con una paciencia increíble y una forma de explicar y de decir las cosas de una manera muy amable. Gracias por ser parte de este proceso.

Mis amigos, los aprecio y me han visto en los peores momentos, ellos saben quienes son, mis hermanos de otras madres. Los quiero mucho.

Tabla de contenido

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

.

Lista de Apéndices

Pág.

Glosario

Círculo: Según Clemens, Clemens, O´Daffer, Cooney (1998) definen círculo como el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado del plano. Según C, Lehmann (1980) una circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

Distancia: Clemens, et al., (1998) La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento trazado desde el punto perpendicular a la recta. Según C, Lehmann (1980) La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ donde:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Teoría APOE: La teoría APOE acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema, se sustenta en la teoríaconstructivista de Piaget (Dubinsky, 1984); principalmente en el concepto de Abstracción reflexiva. Esta teoría fue planteada en principio por Ed Dubinsky y miembros de *Research under graduate Mathematics Education Comuninity* (RUMEC, por sus siglas en inglés). La descripción de las estructuras y mecanismos mentales es el fundamento sobre el cual se desarrolla la teoría APOE. Las estructuras y los mecanismos son pensados en términosde la Abstracción reflexiva desarrollado por Piaget.

Medida: Según Clemens, et al., (1998) A cada par de puntos corresponde un número positivo único denominado distancia entre los puntos. Los puntos de una recta pueden hacerse coincidir biunívocamente con los números reales de modo que la distancia entre dos puntos cualquiera sea el valor absoluto de la diferencia entre sus números asociados.

Resumen

Título: El concepto de círculo y la noción de distancia en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista: Un análisis desde la Teoría APOE.

Autor: Juan David Serrano Duarte.

Palabras Clave: APOE, distancia, círculo, métrica.

Descripción:

Este proyecto busca analizar la comprensión que pueden desarrollar del concepto de círculo estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública de Colombia. En particular, cuando exploran la construcción de dicho concepto en la geometría Euclidiana y en la geometría del Taxista fundamentados en el concepto de distancia. Para esto se formula el diseño y desarrollo de la primera y tercera componente del Ciclo de Investigación de la Teoría APOE realizando una descomposición genética hipotética e implementando un taller y entrevista con las cuales se busca conocer las estructuras desarrolladas por parte de los estudiantes sobre los conceptos de distancia y círculo. Este trabajo se centra en el concepto de círculo como elemento importante de la geometría Euclidiana, se busca analizar la comprensión que desarrollan estudiantes de último semestre sobre este objeto matemático, al abordarlo desde dos geometrías. Por tanto, se busca dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales construyen estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre el concepto de círculo al estudiarlo desde la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista? Por tanto, en este trabajo se aborda el siguiente objetivo: Analizar las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre el concepto de círculo en la geometría del taxista.

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Codirector: Astrid Carolina Archila Prada. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: The concept of circle and the notion of distance in Euclidean geometry and Taxicab geometry: An analysis from APOS Theory.

Author: Juan David Serrano Duarte.

Key Words: APOS, distance, circle, metric.

Description:

This project seeks to analyze the understanding that students studying a degree in Mathematics at a public university in Colombia can develop of the concept of a circle. In particular, when they explore the construction of said concept in Euclidean geometry and in the geometry of the Taxicab based on the concept of distance. For this, the design and development of the first and third components of the APOS Theory Research Cycle is formulated, carrying out a hypothetical genetic decomposition and implementing a workshop and interview with which we seek to know the structures developed by the students on the concepts of distance and circle. This work focuses on the concept of a circle as an important element of Euclidean geometry; it seeks to analyze the understanding that final semester students develop about this mathematical object, by approaching it from two geometries. Therefore, we seek to answer the following questions: What mental structures and mechanisms do Bachelor of Mathematics students build on the concept of a circle when studying it from Euclidean geometry and Taxicab geometry? Therefore, this work addresses the following objective: Analyze the mental structures and mechanisms that undergraduate mathematics students build on the concept of circle in Taxicab geometry.

---

[*] Degree Work

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Codirector: Astrid Carolina Archila Prada. Magister en Educación Matemática.

Introducción

Las investigaciones respecto al aprendizaje de las matemáticas, en particular relacionadas con la geometría, presentan herramientas que ayudan a potenciar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos en estudiantes de diferentes niveles educativos. En particular, el Ministerio de Educación Nacional (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998) define el pensamiento espacial como "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (p. 56). En este orden de ideas, el pensamiento espacial no puede potenciarse si los profesores en formación no han construido de manera adecuada las estructuras mentales y los conceptos que hacen parte de este pensamiento matemático. Como señalan Kemp y Vidakovik (2022), "muchos docentes en formación y en práctica docente enfrentan obstáculos para comprender las definiciones matemáticas". Estos autores apoyan esta afirmación en diversas investigaciones asociadas a la formación de profesores (Chesler, 2012; Moore-Russo, 2008; Leikin y Winicki-Landman, 2001; Zazkis y Leikin, 2008).

La geometría del Taxista o Taxicab "es una de esas geometrías que se adapta más fielmente a ciertas situaciones de la vida cotidiana, como sería el ámbito urbano" (Cortada, 2022, p. 2). Diversos estudios muestran que el estudio de los objetos en la geometría Taxicab, así como el estudio de otras geometrías no euclidianas, puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos de la geometría Euclidiana (Dreiling, 2012; Hollebrands et al., 2010; Jenkins, 1968, como se cita en Kemp y Vidakovic, 2022, p. 568).

Bajo este contexto este proyecto busca analizar la comprensión que pueden desarrollar del concepto de círculo estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública de Colombia. En particular, cuando exploran la construcción de dicho concepto en la Geometría Euclidiana y en la Geometría del Taxista fundamentados en el concepto de distancia. Para esto se formula el diseño y desarrollo de la primera y tercera componente del Ciclo de Investigación de la Teoría APOE con base en la descomposición genética presentada por Kemp y Vidakovic (2022).

1. Antecedentes

La tesis doctoral de Kemp (2018) es la investigación que da inicio a la problemática desarrollada en Kemp y Vidakovic (2022). Kemp define tres dimensiones de la geometría: definiciones, representaciones de estas definiciones y, sus propiedades. También presenta la geometría del Taxista y cómo esta contribuye a la comprensión de los conceptos geométricospor parte de los estudiantes. La población que hace parte de dicha investigación sonestudiantes de pregrado y posgrado de un curso de geometría Euclidiana. En el curso se trabaja de forma bastante amplia sobre algunos conceptos geométricos como: *distancia, punto medio, círculo* y *bisectriz perpendicular*. A partir de esto se realiza una descomposición genética de cada concepto, que incluye la descripción de un Esquema Inter,Intra y Trans de cada definición desde la Geometría del Taxista como de la Geometría Euclidiana.

El artículo realizado por Kemp y Vidakovic (2022), presenta un estudio en el que participan siete estudiantes de pregrado y once estudiantes de posgrado, la mayoría profesores de matemáticas. Como se mencionó anteriormente la finalidad de este estudio es conocer las percepciones y la comprensión de los estudiantes sobre la definición de círculo, qué conexiones realizan para profundizar su comprensión de esta definición y el tipo de representaciones, algebraicas y geométricas, que son posibles de usar en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista. La situación problemática del artículo es la dificultad que tienen los profesores en formación para comprender las definiciones en matemáticas, porende, los autores mencionan que el uso de otras geometrías no Euclidianas como la Geometría del Taxista puede ayudar a los estudiantes a comprender de mejor manera conceptos de Geometría Euclidiana.

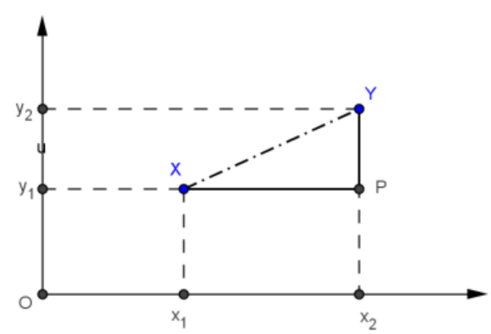
Otro documento de gran importancia es el de Bonilla, Parraguez y Solanilla (2013) llamado *Al fin de cuentas ¿qué es una recta en la geometría del Taxista?* en donde se presentan definiciones de rectas teniendo la restricción métrica de la geometría del Taxista, de este trabajo se fundamentan algunas definiciones utilizadas a lo largo del documento, también en este documento habla sobre la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, donde se divide el aprendizaje en tres modos de pensar. El sintético-geométrico donde los objetos matemáticos son presentados mediante una representación geométrica; analítico-aritmético donde los objetos matemáticos son presentados a través de relaciones numéricas; y analítico-estructural en donde se recurre más bien a las propiedades de los objetos matemáticos o a su caracterización a través de axiomas.

Es posible encontrar otras investigaciones que contemplan el estudio de Geometrías no Euclidianas para potenciar el desarrollo de pensamiento espacial. Por ejemplo, Bonilla et al. (2014), plantean una propuesta didáctica para la enseñanza de las secciones cónicas, específicamente la elipse teniendo como base la Geometría del Taxista. A pesar de que, esta investigación no se realiza con una población universitaria, enfatiza la definición de distancia entre dos puntos; además, toman en cuenta que la elipse al igual que el círculo comparten similitudes en sus representaciones geométricas y algebraicas.

En el 2015 José Carlos Pinto Leivas realizó su tesis de maestría en enseñanza de la Matemática realizando una investigación con estudiantes de una escuela de básica secundaria (para ser más claros los estudiantes tienen entre quince y dieciocho años) y en esta investigación se busca demostrar cómo el uso de geometrías no Euclidianas ayuda a los estudiantes a comprender conceptos de geometría Analítica utilizando el software de Geogebra. De manera similar a esta investigación, se define la métrica de la geometría del Taxista y se realiza un taller en el cual los estudiantes a partir de herramientas Euclidianas deben resolver problemas de la geometría del Taxista. El autor define la métrica del taxista como "Dessa forma, define-se métrica dos catetos como sendo a função definida por onde $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (X_2, y_2)$ são pontos do R². Essa, é representada como na figura 1, pela soma das medidas dos segmentos XP e PY e não por XY como na Geometria Euclidiana" (Pinto, 2015, p. 3).

Figura 1

Representación geométrica de la distancia entre dos puntos



Nota: Representación algebraica entre dos puntos utilizando la geometría del Taxista. Tomada de *Geometria do Taxi – uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil* (p. 3), por Pinto, J, 2015, CIAEM.

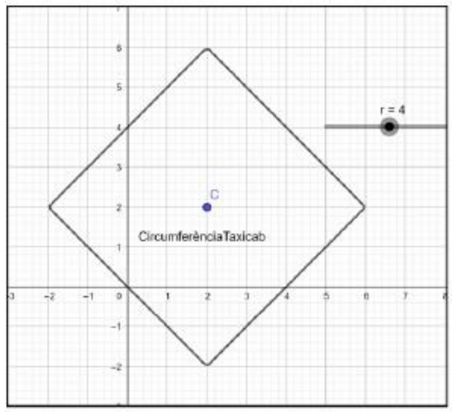
La investigación se hizo con un grupo de 26 estudiantes los cuales realizaron actividades de localización de puntos, en donde se explora la vida cotidiana de los estudiantes utilizando ejemplificaciones en el software de Geogebra. Los resultados de los estudiantes se dividieron en categorías, como "*Categoria A: Un alumno no puede diferenciar entre geometría del Taxista y geometría analítica*" otra de las categorías es la categoría B llamada "*el alumno contó los cuadros*" en términos de APOE, los estudiantes solo realizaron Acciones en las actividades. La investigación concluyo que, la geometría del Taxista contribuyó al refuerzo de conceptos de la geometría Analítica, gracias al uso del software dinámico y también a las actividades relacionadas con lo cotidiano.

En este orden de ideas, se trae a colación las definiciones de distancia y círculo en la Geometría del Taxista presentadas por Cortada (2022) teniendo como base las ideas de Minkowski.

Definición de círculo: Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante se conoce como radio de la circunferencia. Ecuación: $|x-h|+|y-k|=r$. Donde $C(h,k)$ y el radio r.

Figura 2

Circunferencia usando la métrica de Manhattan

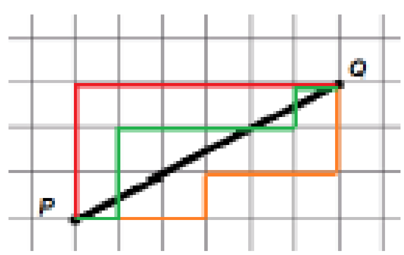


Nota: Tomado de *La Geometría Taxicab; Un Mundo Donde Los Círculos son Cuadrados* (p.7), por A, Cortada, 2022, TEMat.

Definición de distancia: sean los puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ donde la ecuación de la distancia se define como: $d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$.

Figura 3

Métrica de Manhattan



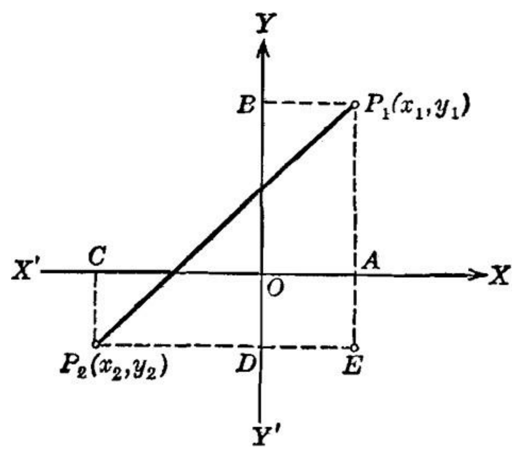
Nota: Tomado de *La Geometría Taxicab; Un Mundo Donde Los Círculos son Cuadrados* (p.5), por A, Cortada, 2022, TEMat.

A continuación, se presenta la definición de círculo y distancia de la Geometría Euclidiana presentada por Lehmann (1985) en su libro *Geometría Analítica.* En este propone el concepto de distancia en el capítulo I y el concepto de círculo en el capítulo IV; allí presentan distintos pre saberes para la construcción del concepto de distancia y círculo, entreellos aparecen: segmento rectilíneo dirigido; sistema coordenado lineal; sistema coordenadoen el plano; carácter de la geometría analítica; distancia entre dos puntos dados, ecuación dela circunferencia; forma ordinaria; forma general de la ecuación de la circunferencia, entre otros.

"Capítulo I: Teorema 2. La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$" (Lehmann, 1980, p. 12).

Figura 4

Representación geométrica de la distancia entre dos puntos dados



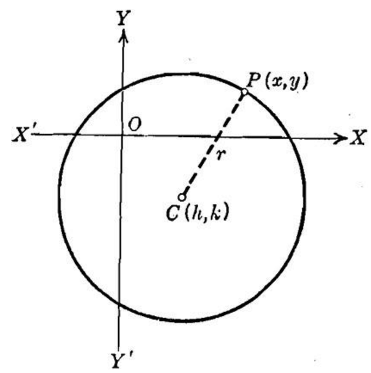
Nota: Tomado de *Geometría Analítica* (p.12) por C, Lehmann, 1980, Editorial Limusa, S.A. México.

"Capítulo IV: Definición. circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano" (Lehmann, 1980, p. 99).

"Teorema 1. La circunferencia cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación: $(x - h)^2 + (x - k)^2 = r^2$" (Lehmann, 1980, p. 100).

Figura 5

Representación de circunferencia como lugar geométrico



Nota: Tomado de *Geometría Analítica* (p.100) por C, Lehmann, 1980, Editorial Limusa, S.A. México.

Con base en los elementos presentados entre otros que se están recopilando y analizando, se da paso al planteamiento del problema.

2. Planteamiento del problema

La Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander ofrece dos programas de pregrado: Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas, además, tres programasde posgrados: Especialización en Estadística; Maestría en Matemáticas y Maestría enEducación Matemática. Los cursos que se relacionan con la Geometría en cada uno de estosprogramas son: Geometría Euclidiana; Introducción a la Geometría Fractal; Geometría Diferencial; Pensamiento matemático II: Espacio y forma y Geometría Riemanniana. De loscuales un estudiante de Licenciatura en Matemáticas tiene contacto con: Geometría Euclidiana, posiblemente con la

Geometría Fractal (curso electivo) y Geometría Riemanniana (curso electivo de la Maestría en Matemáticas). Este trabajo centra la atenciónen el curso de Geometría Euclidiana. Esta ciencia de carácter axiomático y demostrativo puede ser difícil para los estudiantes de pregrado puesto que, lleva al estudiante a construir conceptos que pueden ser complejos de entender; en este sentido: “La geometría universitariaes difícil para los estudiantes porque están acostumbrados a razonar a partir de comprensionesy experiencias intuitivas en lugar de sistemas axiomáticos” (Hollebrands, Conner, & Smith,2010 como se cita en Kemp, 2018).

A mediados del siglo XVI René Descartes expresó algunas curvas de la geometría Euclidiana de forma algebraica en su libro “Géometrie”. Según Kindle (2007), “Descartes quiso mostrar la manera en que el Álgebra -según estaba desarrollada en su época- podría ser usada para expresar las propiedades de las curvas conocidas por la geometría de los antiguos griegos” (p. 3). Viendo a la Geometría Euclidiana desde la perspectiva de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), las representaciones geométricas y algebraicas de los objetos geométricos están estrechamente relacionados. Teniendo en cuenta esto y que enlos programas no se ofrecen cursos de geometrías no Euclidianas, es importante resaltar quelos estudiantes y maestros pueden tener complicaciones al utilizar la lógica para resolver problemas geométricos. Según Kemp (2018) los conceptos geométricos pueden construirse de mejor manera desde otros tipos de geometría, por ejemplo, desde la geometría del Taxista. Según dicho autor: “… aprender conceptos en la Geometría del Taxista no solo puede ayudara facilitar el razonamiento geométrico, sino que también puede ser aplicable a muchas personas y sus futuras carreras” (p. 18). En este sentido Kemp (2018), citando a Krause (1973)afirma que “tener una comprensión de la geometría no euclidiana puede mejorar la comprensión del estudiante sobre la geometría euclidiana” (Krause, 1973, como se cita en Kemp, 2018, p. 16).

Con base en lo expuesto, este trabajo se centra en el concepto de círculo como elemento importante de la geometría euclidiana, se busca analizar la comprensión que desarrollan estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) sobre este objeto matemático, al abordarlo desde dos geometrías. Por tanto, se busca dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales construyen estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre el concepto de círculo al estudiarlo desde la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista? Por tanto, en este trabajo se aborda el siguiente objetivo: Analizar las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre el concepto de círculo en la geometría del taxista.

3. La Teoría APOE y su Ciclo de Investigación

La teoría APOE acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema, se sustenta en la teoría constructivista de Piaget (Dubinsky, 1984); principalmente en el concepto de Abstracción reflexiva. Esta teoría fue planteada en principio por Ed Dubinsky y miembros de *Research under graduate Mathematics Education Comuninity* (RUMEC, por sus siglas en inglés). La Figura 5 muestra las relaciones entre las estructuras y mecanismos mentales que permiten desde la perspectiva de APOE describir la comprensión que un individuo puede lograr de una noción o un concepto matemático. Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic (2008) definen las estructuras y los mecanismos mentales de la siguiente manera:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para

> dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (Stenger et al., 2008, p. 98).

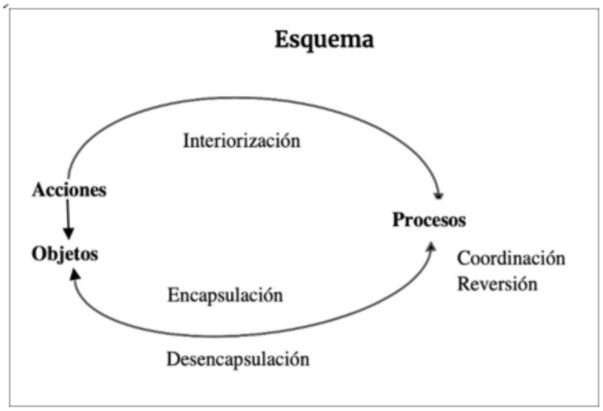
La descripción de las estructuras y mecanismos mentales es el fundamento sobre el cual se desarrolla la teoría APOE. Las estructuras y los mecanismos son pensados en términosde la Abstracción reflexiva desarrollado por Piaget. Dubinsky (1991) plantea dos características que importa destacar de la abstracción reflexiva: "… la abstracción reflexiva no tiene un principio absoluto, pero aparece desde edades muy tempranas en la coordinaciónde estructuras sensorio-motrices y continúa hasta el desarrollo de cualidades matemáticas elevadas" (p. 95). En consecuencia, es posible encontrar la definición que desde APOE se establece para el conocimiento matemático:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas en matemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos, objetos y esquemas, organizándolos en esquemas con el fin de manejar dichas situaciones. (Asiala et a., 1996, p.7).

Dado que no es posible acceder a los objetos matemáticos directamente, es necesarioque los individuos realicen interpretaciones de sus diferentes representaciones de tal manera que puedan establecer estructuras mentales que les den sentido (Piaget y García, 1983). Por tanto, la teoría APOE postula que los conceptos o nociones matemáticas pueden ser construidos por la aplicación de Acciones sobre Objetos construidos previamente, para iniciar con la construcción de un nuevo Objeto que da paso a la construcción de un nuevo Esquema o que puede ser asimilado por un Esquema pre existente. Por tanto, el principio de aprendizaje de esta teoría se basa en que todo concepto o noción matemática puede ser construida por un individuo, siempre y cuando cuente con los conocimientos previossuficientes. Dubinsky (1991) propone entonces, la meta de todo profesor de matemáticas debe ser ayudar a sus estudiantes a construir las estructuras mentales apropiadas para cada concepto mediante el establecimiento de conexiones entre las diferentes estructuras asociadascon un concepto o noción matemática.

Figura 6

Estructuras y mecanismos mentales



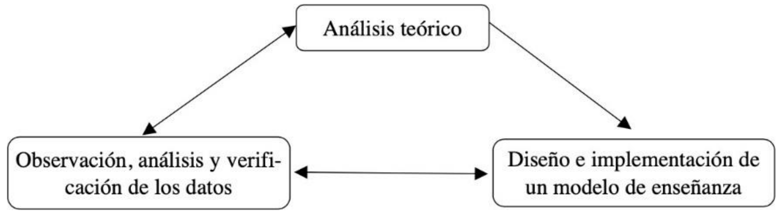
Nota: Representación gráfica de los mecanismos mentales en la teoría APOE. Tomado de *APOS theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.10), por Arnon et al., 2014, Springer.

La Figura 6, muestra una relación básica entre las estructuras: Acción, Proceso, Objeto, Esquema y los mecanismos que dan lugar a cada una, estos son: interiorización, coordinación, encapsulación. Aunque la construcción de conocimiento no es lineal, este diagrama sirve para explicar una ruta de construcción posible de un Esquema mental asociadoa un concepto o noción matemática.

Las Acciones se definen como aquellas transformaciones que un individuo puede realizar sobre Objetos construidos previamente. Estas estructuras están condicionadas por un estímulo externo, una indicación que requiere desarrollarse paso a paso y no implica una reflexión. La interiorización de las Acciones en Procesos requiere de la experiencia de los individuos con situaciones matemáticas que sugieran algún tipo de reflexión; por ejemplo, relacionada con condiciones de existencia o unicidad. Los Procesos al igual que las Acciones son estructuras dinámicas. Un proceso puede ser encapsulado en un Objeto a través del mecanismo de encapsulación. Este mecanismo pone juntas todas las características del Proceso y permite que el individuo realice nuevas transformaciones sobre él. Por ejemplo, una concepción Objeto de transformación lineal, permite que un estudiante conciba bajo ciertas condiciones, una transformación lineal f como un vector del espacio vectorial. El mecanismo de encapsulación requiere de la preexistencia de un único Proceso, por tanto, se define el mecanismo de coordinación que permite poner dos o más procesos juntos. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, es posible tener por un lado un Proceso asociado a la suma vectorial y por otro uno relacionado con el producto por un escalar. Es através del mecanismo de coordinación que un individuo puede poner juntos estos dos Procesos en un único Proceso de combinación lineal. Así la transformación lineal puede definirse de manera dinámica como una función definida entre espacios vectoriales de dimensión finita que preserva combinaciones lineales.

Figura 7

Ciclo de Investigación



Nota: Representación gráfica de los mecanismos mentales en la teoría APOE. Tomado de *APOS* *theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.94), por Arnon et al., 2014, Springer.

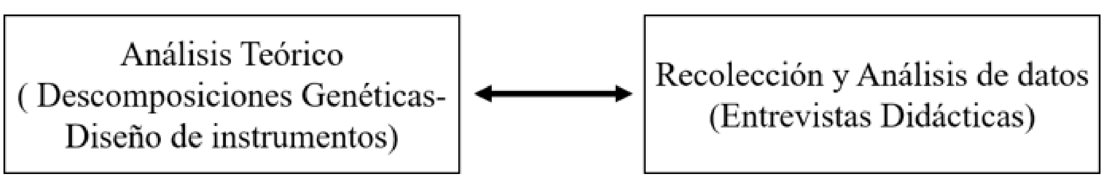
La Figura 7, muestra las tres componentes del ciclo de investigación que propone APOE, estas forman un ciclo que puede repetirse tantas veces como sea necesario para entender la epistemología del concepto y obtener estrategias pedagógicas efectivas para ayudar a los alumnos en el aprendizaje. Partiendo en el análisis teórico, intenta predecir las construccionesmentales que los alumnos deben hacer para entender un concepto. Con este análisis se diseñan estrategias pedagógicas: actividades y ejercicios que se dan en clase y sirven para ayudar a los estudiantes a construir las estructuras mentales necesarias para el aprendizaje. Después se analizan los datos para refinar el análisis teórico; todo esto con la finalidad de ayudar a los estudiantes a construir las estructuras necesarias y enseñarles cómo relacionarlascon los conceptos matemáticos.

3.1 Método de investigación: Interpretación y adaptación del ciclo APOE

En este trabajo se utiliza como método, una adaptación del Ciclo de investigación que propone la Teoría APOE, reestructurando dos de las tres etapas del ciclo: *el Análisis Teórico* y *la Recolecccióny Análisis de datos*. Mediante la doble implicación (ver Figura 7), se señala una interacción entre la primera y tercera componente del Ciclo.

Figura 8

Interacción entre la primera y tercera etapa del Ciclo de investigación de APOE



Nota: Interacción entre la primera y tercera etapa del Ciclo de investigación de APOE. Tomado de *Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: Procesos continuos y sus totalidades* (p.183), por Villabona et al., 2022. Enseñanza de las Ciencias.

El principal elemento que se obtiene de la primera componente es una Descomposición Genética Hipotética que se valida a la luz de la Recolección y Análisis de datos. Este análisis está fundamentado en el estudio de la Geometría del Taxista y la Geometría Euclidiana a través de la revisión de libros de texto, la identificación de aspectos epistemológicos y resultados de investigación en Didáctica de las matemáticas.

Con el fin de validar el modelo cognitivo propuesto en el Análisis Teórico, en esta componente se diseña un taller y una entrevista didáctica que son aplicados a un grupo de estudiantes de último año del programa de Licenciatura en Matemáticas. Las entrevistas serán videograbadas, además, se tomarán los trabajos realizados por los estudiantes con el fin de analizarlos a la luz de la Descomposición Genética Hipotética. Esto permite validar la Descomposición Genética propuesta como un modelo para generar la comprensión del concepto de círculo y la noción de distancia en la Geometría del Taxista y la Geometría Euclidiana.

4. Análisis Teórico

El siguiente análisis está compuesto de tres partes, en la primera se explican los conceptos de geometría Euclidiana y la geometría del Taxista en donde se definen objetos geométricos que se utilizan a lo largo de este documento. La segunda parte presenta los elementos cognitivos para comprender la noción de círculo, estos se plantean con base al esquema propuesto por Kemp y Vidakovid (2022) los cuales presentan un esquema APOE del círculo y la distancia en ambas geometrías tomando como fundamento las representaciones algebraicas y graficas de cada definición. En la tercera parte se presenta la descomposición genética planteada por dichos autores.

4.1 La geometría Euclidiana y la geometría del Taxista

Para conocer los objetos geométricos de la geometría del Taxista, es necesario conocer las definiciones de la geometría Euclidiana, para ello se tendrán en cuenta las definiciones presentadas en el libro Clemens, O´Daffer, Cooney (1998) *GEOMETRÍA con aplicaciones y solución de problemas*. Se toma como referencia este libro puesto que, los estudiantes suelen utilizarlo en los cursos de geometría Euclidiana en el primer semestre. A continuación, se presentan las definiciones necesarias y pertinentes en el estudio de este trabajo.

> Punto: "Ubicación, sin longitud, anchura ni altura. Un punto es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p. 10).
>
> Recta: "Longitud ilimitada, derecha, sin grosor ni extremos. Una recta es una idea o abstracción. Como no puede definirse con términos más sencillos, es un término indefinido" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.10).
>
> Plano: "Ilimitado, continuo en todas direcciones, llano, sin grosor. Un plano es una idea o abstracción. Debido a que no puede definirse con términos más sencillos" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.11).
>
> Puntos colineales: "Definición 1.2. Los puntos colineales son puntos que están en la misma recta" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.13).
>
> Rectas intersecantes: "Las rectas intersecantes son dos rectas con un punto en común" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.13).

Segmento: "Un segmento, $\overline{AB}$. es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.16).

Figura 9

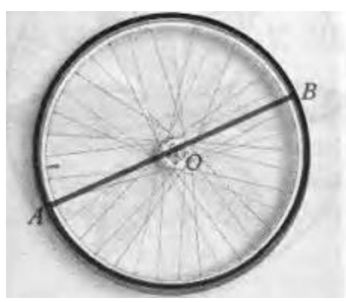
Representación gráfica de un segmento AB

Nota: Representación gráfica de un segmento AB y de círculo. Tomada de *Geometría con aplicaciones y solución de problemas* (p.16), por Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998.

Circulo: "Un círculo es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado del plano" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.17).

Figura 10

Representación gráfica de un círculo



Nota: Los puntos A y B están en el círculo. El punto O es el centro del círculo. AB es un diámetro del círculo y OB es el radio del círculo. Tomada de *Geometría con aplicaciones y solución de problemas* (p.17), por Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998.

Distancia entre un punto y una recta: "La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento trazado desde el punto perpendicular a la recta" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.29).

Postulado de la regla: El postulado de la regla se divide en dos partes: A cada par de puntos corresponde un número positivo único denominado distancia entre los puntos. Los puntos de una recta pueden hacerse coincidir biunívocamente con los números reales de modo que la distancia entre dos puntos cualquiera sea el valor absoluto de la diferencia entre sus números asociados (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.72).

Teorema de Pitágoras: "Si un triángulo ABC es rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos" (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998, p.226).

Teniendo en cuenta las definiciones y postulados de la geometría Euclidiana, ahora se describirán cada uno de los conceptos utilizados en la geometría del Taxista. La Geometría del Taxista nace a inicios del siglo XX en la cual se utilizan los números enteros $\mathbb{Z}$ en el plano, en lugar de los números reales $\mathbb{R}$. Además de ser generalmente utilizada en la teoría de grafos y en la geometría discreta, en el ámbito cotidiano es explicada por Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014) como: "la forma cómo un taxi recorre una ciudad, el automóvil sólo puede recorrer tramos en dirección norte-sur o este-oeste, es decir, no puede pasar diagonalmente a través de los edificios" (p. 56). En un plano cartesiano, los movimientos de norte-sur y de este-oeste, se pueden ver como movimientos horizontales y verticales. Se debe saber que una de las dificultades de la geometría del taxista es que las representaciones algebraicas y geométricas no suelen ser equivalentes. Según Bonilla et al., (2014) afirma:

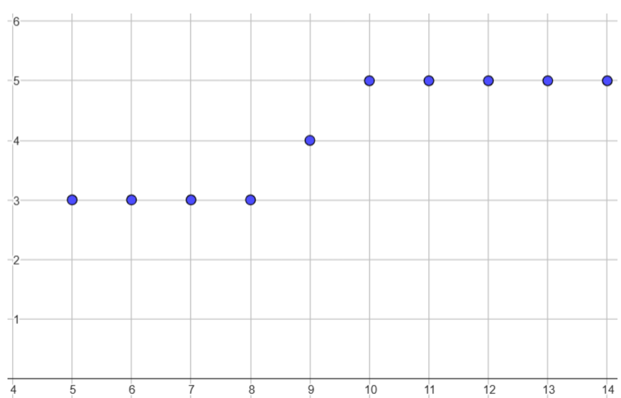
La mayor dificultad de la GDT o la GT, en comparación con la Geometría Euclidiana (GE), es la fragilidad de la compatibilidad entre las estructuras algebraica y métrica. En efecto, las figuras geométricas de la GE se pueden definir métrica o algebraicamente y las dos definiciones resultan ser equivalentes. Esto no sucede con las geometrías del taxista, al punto de que una definición métrica produce, en general, figuras distintas a aquellas de la definición algebraica (p.56).

Véase (GDT) como la Geometría Discreta del Taxista y (GT) Geometría del Taxista. Un ejemplo de lo expuesto por (Bonilla et al., 2014) es la definición de círculo en la geometría del taxista. Otro ejemplo son las no equivalencias entre las representaciones geométricas y algebraicas en la geometría del taxista de la definición de recta, estas se pueden representar ya sea de manera algebraica o métrica. Según Bonilla, Parraguez y Solanilla (2013) las rectas se definen como:

El lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano P tales que la distancia de uno de ellos a un punto dado (x_1, y_1) es igual a la distancia de él mismo a otro punto dado (x_2, y_2). Es decir, una recta es un subconjunto de $\mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}$ de la forma $L = \{(x, y) \in P|\, d\big((x, y), (x_1, y_1)\big) = d\big((x, y), (x_2, y_2)\big)\}$" (p.#).

Figura 11

Representación de una recta en la geometría del Taxista

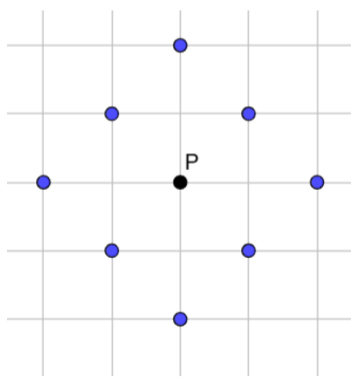


La definición de circulo presentada por (Bonilla et al., 2013) tiene tres representaciones en la geometría del Taxista estas se definen de manera Sintética-Geométrica, Analítico-aritmético y

Analítico-estructural, como se muestra a continuación. Analítico-aritmético como: “conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación: $|x-h|+|y-k|=r$ donde (h,k) es el centro de la circunferencia y r es el radio”; Analítico-Estructural como: “La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante se conoce como radio de la circunferencia” y Sintética-Geométrica (ver figura 12).

Figura 12

Representación de círculo en la geometría del Taxista



Es importante aclarar que nos fijamos en la representación geométrica y algebraica; se relacionan con las representaciones sintético-geométrica y analítico-aritmética. Teniendo en cuenta la definición de distancia propuesta por (Bonilla et al., 2014) la distancia entre dos puntos $P(p_1,p_2)$ y $Q(q_1,q_2)$ se define como $d(P,Q)=|p_1-q_1|+|p_2-q_2|$.

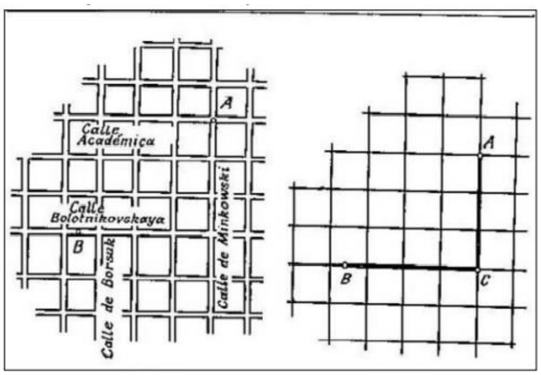
Ahora, se estudia la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista, se puede decir que hay diferentes maneras de llegar de un punto a otro. Al hablar de distancia y tomar la medida más corta, tomamos la perspectiva de Barbosa, R y Queiroz, J (2020) plantean que

> La ruta más corta entre A y B viene dada por la suma de las longitudes, $AC+CB$, entonces la longitud ACB debe considerarse como la distancia real entre los puntos A y B, mostrado

en la figura. Así, la ruta más corta entre A y B viene dada por la suma de las longitudes, $AC + CB$, entonces la longitud ACB debe considerarse como la distancia real entre los puntos A y B. (p.6).

Figura 13

Rutas hipotéticas de Minkowski



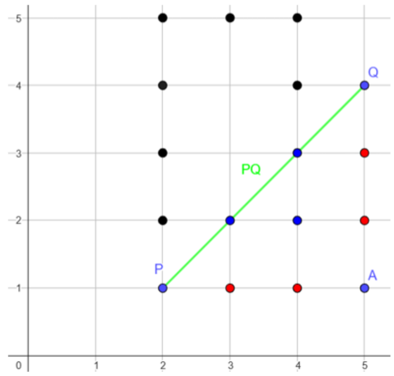
Nota: Rutas hipotéticas de Minkowski. Tomado de *Construindo o círculo na Geometria do taxi: uma proposta de insubordinação criativa. Building the circle in taxicab Geometry: a creative insubordination proposal* (p.43). por, Boltianski e Gojberg, 1973, Tomado de Barbosa y Queiroz, 2020. REnCiMa.

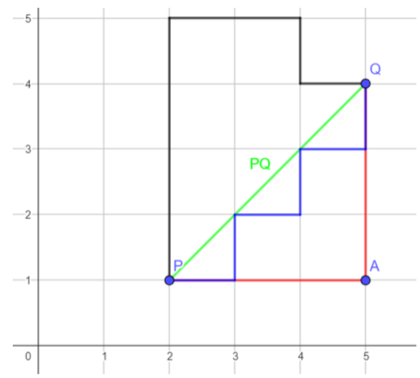
En ese orden de ideas, se puede decir que la distancia más corta entre los puntos P y Q está dada por la suma de los segmentos PA y AQ como se muestra en la figura 14, además, se presentan diferentes medidas o caminos para llegar de P hasta Q la que se muestra, la distancia más corta de P a Q y también diferentes medidas o caminos.

Figura 14

Representación de la distancia entre dos puntos desde la perspectiva de la geometría del

Taxista.





En la figura 14, el segmento verde representa la distancia entre los puntos P y Q según la métrica de la geometría euclidiana, los segmentos en rojo la distancia entre P y Q según la métrica del Taxista y el segmento negro una forma de llegar de P a Q. En la figura se reconoce que el segmento PQ define la distancia entre los puntos P y Q en la geometría Euclidiana, basta con calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los segmentos PA y QA. En el caso de la imagen 2, $PA = 5u - 2u = 3u$ y $QA = 4u - 1u = 3u$, por ende, $PQ = \sqrt{(3u)^2 + (3u)^2} = 3\sqrt{2}u$. En la geometría del taxista la distancia entre los puntos P y Q, teniendo representada por los segmentos rojos de la imagen 2 sería: $PA = |5 - 2| = 3$ y $QA = |4 - 1| = 3$ entonces $PA + QA = 3 + 3 = 6u$.

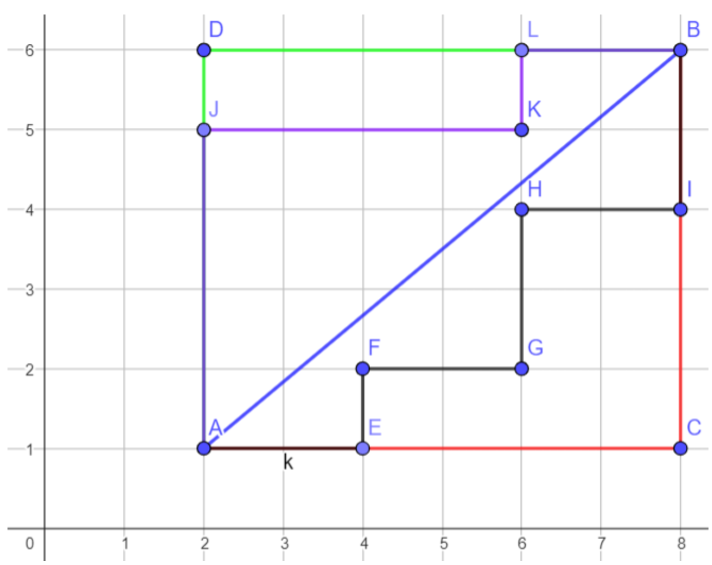
Al estudiar la geometría del Taxista y la geometría Euclidiana es posible afirmar que la distancia entre dos puntos es la longitud más corta diferencia de la geometría Euclidiana, la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista no es única, es decir, hay más de un método o forma de trazar segmentos de un punto a otro. Sin embargo, en la geometría del Taxista hay algunos casos donde la longitud no es única, puesto que existe más de una distancia diferente a la primera que cumpla esa condición “además, ACB no sólo es el único camino más corto en comparación a la inicial, consideramos que la distancia más corta es la longitud de la recta AB con otros caminos reales de A a B con la misma longitud que ACB" Barbosa, R y Queiroz, J (2020, p.456 o p.7).

Teniendo en cuenta esto, es importante saber que esas distancias deben cumplir la siguiente condición: La distancia que se tome debe estar dentro de la región del plano, esa región es un rectángulo (ver figura 15). Según Barbosa, R y Queiroz, J (2020):

> Se puede deducir que la distancia, antes dada por la longitud de un segmento, ahora puede ser dado por una región del plano usando la suma de las longitudes de segmentos verticales y horizontales contenidos en esta región. entonces tenemos más de una posibilidad para encontrar la distancia dAB. Por ejemplo, si $A(2\,,1), B(8\,,6), C(8\,,1)$ y $D(2\,,6)$, entonces cada punto P del rectángulo $ABCD$ satisface $dAB = dAP + dPB$. Veamos la siguiente figura, en ella se puede decir que $ACB = ADB = AEFGHIB = AJKLB$. (p. 7).

Figura 15

Representación de varias distancias entre dos puntos en la geometría del Taxista

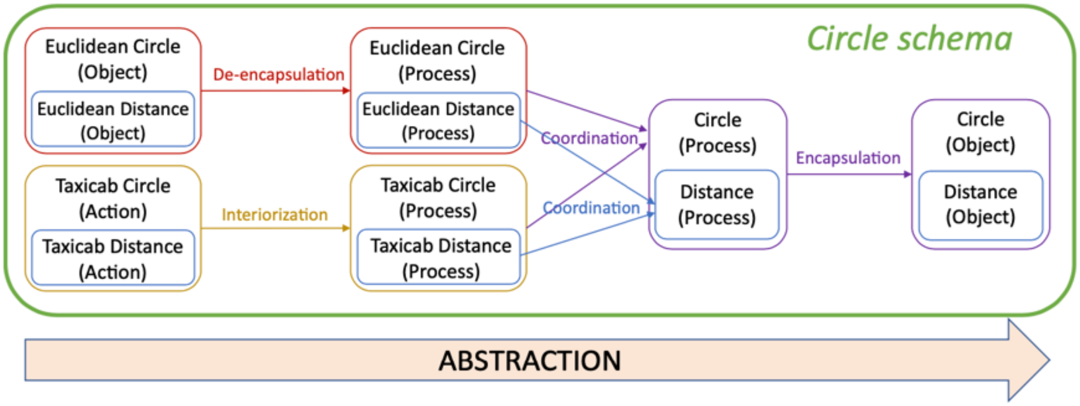


4.2 Elementos cognitivos para la comprensión del concepto de círculo

Kemp y Vidakovid (2022) proponen el desarrollo del Esquema de Círculo a partir de su construcción en la geometría del Taxista y la geometría Euclidiana. Como se muestra en la figura 16, el Esquema de círculo incluye Objetos, Procesos y Acciones relacionados a través de los mecanismos de interiorización, coordinación y encapsulación; el Esquema pre existente puede asociarse a toda experiencia de los individuos con la geometría euclidiana, aspecto que se ilustra con los recuadros rojos. Según la evidencia analizada por los autores (Kemp & Vidakovic, 2019), el Esquema pre existente se acomoda para asimilar el subconcepto de distancia en la geometría del taxista, en particular al analizar el concepto de círculo en dicha geometría, esto se ilustra con los recuadros amarillos. Estas interacciones dan paso a la coordinación de los Procesos de círculo y distancia en cada geometría que permiten estructurar un único Proceso, ilustrado en el primer recuadro morado, un Proceso de círculo; más robusto al primero, dado que enfatiza en características más generales que promueven la encapsulación de una estructura Objeto de círculo más robusta a la primera. Así es posible dar cuenta del desarrollo de un proceso de abstracción determinado por las conexiones entre dos geometrías a partir del estudio de la noción de distancia.

Figura 16

Esquema de círculo



Nota: Un posible camino donde los estudiantes pueden acomodar su Esquema de círculo para asimilar la distancia del Taxista. Tomado de *Students´ understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction* (p.571), por Kemp & Vidakovic, 2022. Springer.

La descripción de los estados del desarrollo del Esquema involucra otros Esquemas de subconceptos relevantes como: distancia, radio, centro y lugar geométrico, asociados en particular con el concepto de círculo. A continuación, se presenta la descripción de Kemp y Vidakovid (2022), para definir el desarrollo del Esquema inicial de círculo, en la gE. En este análisis juega un rol fundamental las representaciones geométricas y algebraicas de los subconceptos relacionados con el concepto de círculo.

Tabla 1

Estados de desarrollo del Esquema de círculo en la geometría Euclidiana

Table 1 Stages of schema development of the circle in Euclidean geometry schema

Stage of schema development	Description	Necessary mental structures
Intra-cEg	• The components of the circle schema are isolated structures • A circle is analyzed in terms of its properties geometrically or algebraically (e.g., it is round) • Explanations of properties are local and particular	At least an action conception of the concepts of *Euclidean distance*, *radius*, *center*, and *locus of points*
Inter-cEg	• Forms relationships among the isolated ideas from the Intra-*cEg* stage • Makes connections between geometric and algebraic properties of a circle in Euclidean geometry	At least a process conception of some of the concepts of *Euclidean distance*, *radius*, *center*, and *locus of points* (and evidence of coordinating at least two of them)
Trans-cEg	• Constructs an awareness of the completeness of the *cEg schema* and can "perceive new global properties that were inaccessible at the other levels" (Baker et al., 2000, p. 559) • Coherently understands and can describe the construction of a circle and the structure of the equation for a circle in Euclidean geometry and how these are connected to the definition of a circle	At least a process conception of *all Euclidean distance*, *radius*, *center*, and *locus of points* concepts (and evidence of coordinating all combinations of these processes)

Nota: Un posible camino donde los estudiantes pueden acomodar su Esquema de círculo para asimilar la distancia del Taxista. Tomado de *Students´ understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction* (p.571), por Kemp & Vidakovic (2022). Springer.

La coordinación de los Procesos involucrados se relaciona directamente con las representaciones geométricas y algebraicas del círculo en la gT (geometría del Taxista) y la gE (geometría Euclidiana). A continuación, se expone una interpretación de la propuesta de Kemp y Vidakovid (2022), adaptada a las condiciones de este trabajo.

Tabla 2

Adaptación de los caminos de coordinar Procesos en relación con el concepto de distancia

Coordinación de Procesos	Relación con el Esquema de distancia
Concepción de Procesos representaciones geométricas de conceptos a través de las geometrías.	El estudiante realiza conexiones entre la representación geométrica de distancia en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista. Por ejemplo, puede hablar sobre cómo la representación geométrica de la distancia en la geometría del Taxista es como los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la representación geométrica de la distancia en la geometría Euclidiana.
Concepción Proceso de representaciones algebraicas de conceptos a través de geometrías.	El estudiante estructura relaciones entre la fórmula de distancia en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista. Un estudiante puede hablar sobre cómo las representaciones algebraicas de la distancia en las geometrías euclidiana y Taxicab están sumando términos similares (por ejemplo, $x_2 - x_1$y $y_2 - y_1$); pero en la geometría Euclidiana, los términos se elevan al cuadrado (y luego se toma la raíz cuadrada de la suma), y en geometría Taxicab solo se toman los valores absolutos de los términos.
Concepciones proceso de las representaciones geométrica y algebraica de un concepto particular dentro del Esquema cEg.	El estudiante puede describir conexiones entre la representación geométrica y algebraica de la distancia en la geometría Euclidiana. Un estudiante puede hablar sobre cómo se suman las representaciones algebraicas de la distancia en las geometrías Euclidiana y Taxista. Además, puede hablar sobre las formas en que la representación geométrica del teorema de Pitágoras se relaciona con la fórmula para la distancia en la geometría euclidiana (por ejemplo, el término $x_2 - x_1$ calcula la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo que se utilizará en el teorema de Pitágoras).
Concepciones proceso	

de las representaciones geométrica y algebraica de un concepto particular dentro del Esquema cTg.	El estudiante puede describir conexiones entre la representación geométrica y algebraica de la distancia en la geometría Taxista. Un estudiante puede hablar sobre formas en las que la suma de las diferencias absolutas en coordenadas es la suma de las longitudes de los segmentos horizontal y vertical que los conectan (por ejemplo, el término $\|x_2 - x_1\|$ mide la longitud del segmento horizontal y el Se toma el valor absoluto de este término porque es una distancia/magnitud)

Nota: Un posible camino donde los estudiantes pueden acomodar su Esquema de círculo para asimilar la distancia del Taxista. Tomado de *Students´ understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction* (p.573), por Kemp & Vidakovic (2022). Springer.

Como puede verse en la tabla, la coordinación de los Procesos está determinada por la definición de Distancia en gT y gE.

Los elementos presentados sobre el desarrollo del Esquema se basan en una descomposición genética que describe las estructuras y los mecanismos asociados al concepto de círculo. Para esto se inicia con un análisis que contempla el concepto de distancia. Dicha descomposición genética está adaptada de la descomposición genética preliminar presentado por Kemp, A (2018).

Acción: A partir de la memorización de conceptos y o algoritmos matemáticos ya establecidos, el estudiante realiza Acciones cuando puede transformar dichos elementos matemáticos, gracias a un estímulo externo. En esta instancia se describen las estructuras mentales teniendo en cuenta la representación geométrica y algebraica del concepto de Distancia y Círculo.

Respecto a la representación geométrica (a) y representación algebraica (b) de Distancia se propone que:

a. El estudiante realiza la acción de trazar en un plano un segmento que une dos puntos. Traza un punto A y un punto B en el plano y los une realizando un trazo recto.
b. Encuentra la distancia entre dos puntos utilizando la fórmula de la distancia.

Respecto a la representación geométrica (a) y representación algebraica (b) de Círculo:

a. Realiza círculos con diferentes radios y los compara entre ellos.
b. Encuentra el área de un círculo utilizando la fórmula del área.

Proceso: cuando el estudiante logra reflexionar sobre las Acciones que realiza y llega a resultados y conclusiones sin la necesidad de estímulos externos o recurrir a realizar cada paso de la Acción en un orden determinado. Este mecanismo se conoce como *Interiorización*, ya que el estudiante no mecaniza, sino que es consciente de la conclusión a la que quiere llegar y puede reflexionar sore el tipo de transformaciones a realizar sin hacerlas de manera específica.

Respecto a la representación geométrica (a) y representación algebraica (b) de Distancia

a. El estudiante con un factor de medida puede ilustrar la distancia de dos puntos cualquiera. Puede imaginar la distancia entre dos puntos cualesquiera.
b. El estudiante se sitúa en el eje x y reconoce por ejemplo que, la distancia que hay desde el punto (2,0) hasta el punto (5,0) es de tres unidades al contar la cantidad de unidades que hay entre 2 y 5. De manera similar, puede calcular la distancia de dos puntos cualesquiera sin necesidad de que se sean puntos específicos.

Ejemplos respecto a la representación geométrica (a) y representación algebraica (b) de círculo:

a. Puede dibujar o representar un círculo con cualquier centro y radio.
b. Puede escribir la ecuación con cualquier punto llamado centro y un radio dado.

Objeto: El estudiante puede *encapsular* los nuevos conocimientos, comprendiendo las propiedades de los objetos geométricos en ambas geometrías, relacionando las propiedades y representaciones en las diferentes métricas.

Ejemplos respecto a la representación geométrica (a) y representación algebraica (b) de distancia:

a. Puede plantear la ecuación de distancia con cualquier par de puntos.
b. Reconoce que la distancia más corta es única pero que puede tener diferentes representaciones, dichas representaciones son limitadas ya que pertenecen a una región del plano.

5. Recolección y análisis de datos

En esta sección se presenta el diseño e implementación de un Taller compuesto por cuatro tareas que buscan desarrollar la construcción del concepto de círculo en la geometría del Taxista. En este taller participaron cuatro estudiantes de último semestre de un programa de licenciatura en matemáticas; este grupo de estudiantes tomó y aprobó un curso de Geometría Euclidiana con base en el libro de Texto Geometría Euclidiana (Clemens, O´Daffer, Cooney, 1998).

El taller se desarrolló de manera individual bajo la plataforma Zoom, cada estudiante contó con el constante acompañamiento del autor de este trabajo; las dudas se resolvían a través de las herramientas que ofrece Zoom: video, sonido, chat, en el momento en que cada estudiante abordaba las tareas.

5.1 Análisis a Priori (taller y entrevista)

A continuación, se presenta un análisis a Priori del taller y entrevista que se aplicó en este trabajo, éste tiene como finalidad introducir a los estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas en los elementos básicos de la geometría del Taxista. El taller consta de cuatro tareas, para cada una se presenta una solución normativa y un análisis teórico, que busca potenciar de manera progresiva la comprensión de los estudiantes sobre dicha geometría. De manera similar, la entrevista consta de cuatro tareas, cada una tiene una solución normativa y un análisis teórico. El taller se centra en presentar la métrica del Taxista y las concepciones que tienen los estudiantes sobre lo que es distancia. La entrevista se centra en la definición de círculo buscando que los estudiantes relacionen diferentes conocimientos de ambas geometrías para conocer las concepciones que tienen sobre círculo y las estructuras que desarrollan.

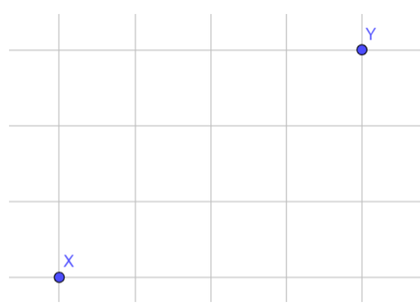
Taller sobre la métrica del Taxista y la noción de distancia.

Tarea 1. Dada la siguiente cuadricula y los puntos X y Y (ver imagen 1).

a. Traza la forma en que llegarías del punto X al punto Y .
b. ¿Hay otras formas de llegar del punto X al punto Y? ¿cuáles? represéntalas en la cuadricula.

Figura 17

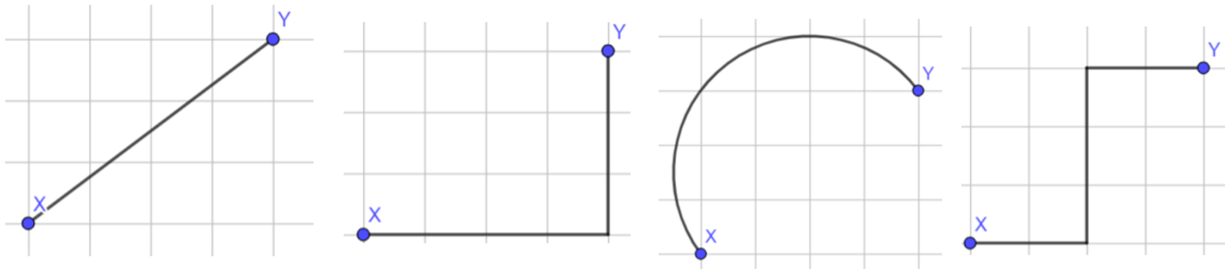
Cuadricula de la Tarea 1



Solución normativa: Hay varias maneras de trazar segmentos desde el punto X hasta el punto Y, a continuación, en la Figura 18 se presentan algunas de ellas.

Figura 18

Posibles soluciones a la Tarea 1



Análisis teórico: Esta tarea corresponde a una estructura Acción del concepto de distancia, donde los estudiantes pueden determinar de manera específica diferentes maneras de llegar del punto X al punto Y. Estas acciones son libres, no están condicionadas bajo una métrica.

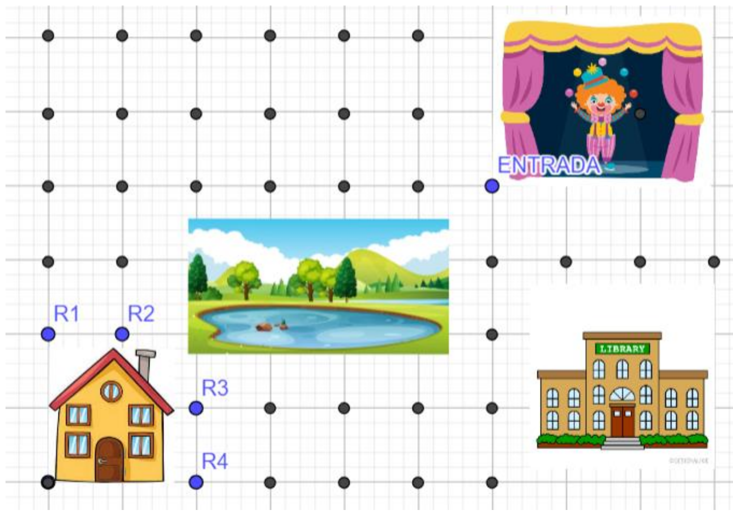
Una vez que los estudiantes abordan la primera tarea, el entrevistador presenta la siguiente definición:

La *Geometría del Taxista* nace de la necesidad de solucionar problemas cotidianos de desplazamiento en una ciudad o lugar en el cual no es posible establecer la distancia directa entre dos puntos. Un ejemplo de esto es llegar de un punto a otro en una ciudad. No es posible desplazarse sobre los diferentes elementos que componen una calle, necesariamente el desplazamiento debe realizarse sobre aquellos espacios disponibles para realizar la movilidad. Ejemplo: Para trasladarse de la vivienda personal (punto X) a la universidad (punto Y), es posible definir diferentes rutas que pueden estar determinadas por el tipo de desplazamiento: caminando, carro, particular, transporte público o bicicleta. Con base a la información anterior, se plantea la siguiente Tarea.

Tarea 2. Considera la siguiente situación. Vas tarde para la función del circo más importante del país y tienes que optar por algún punto de partida: $R1, R2, R3, R4$; tal como se muestra a continuación en la Figura 19. Ten en cuenta que la distancia que hay entre los puntos que aparecen en la imagen es de 100 m.

Figura 19

Plano de la Tarea 2



¿Cuál es la ruta más corta para llegar a la entrada del circo? Traza el recorrido en la imagen.

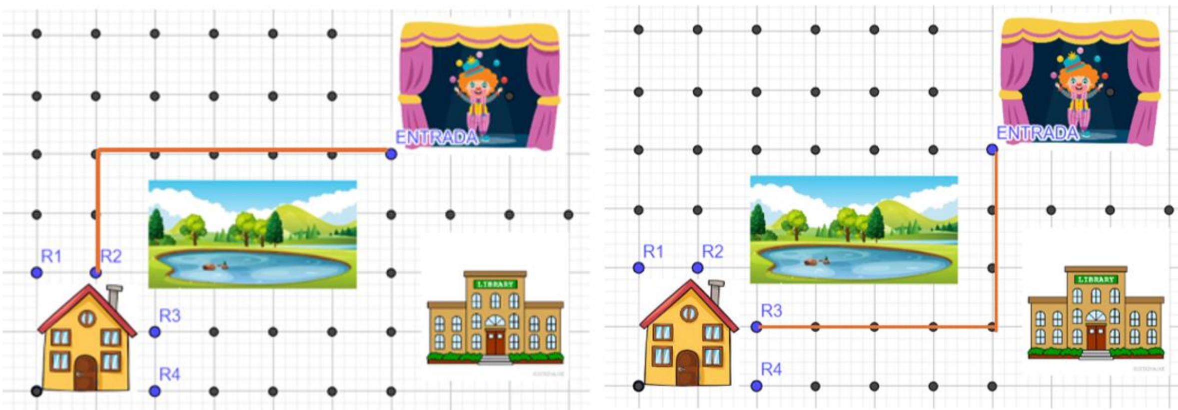
¿Cuántas rutas puedes definir si partes de $R1$?

La cantidad de rutas que encontraste iniciando en $R1$ es igual para alguna de las otras tres $R2, R3, R4$?

Solución normativa: Es posible trazar diferentes rutas desde los puntos de partida hasta la entrada del Circo. Pero, al especificar que la medida que hay entre cada punto es de 100 metros y que el enunciado plantea que debe ser la ruta más corta, se presentan dos formas de resolver la situación, tal como se muestra en la Figura 20.

Figura 20

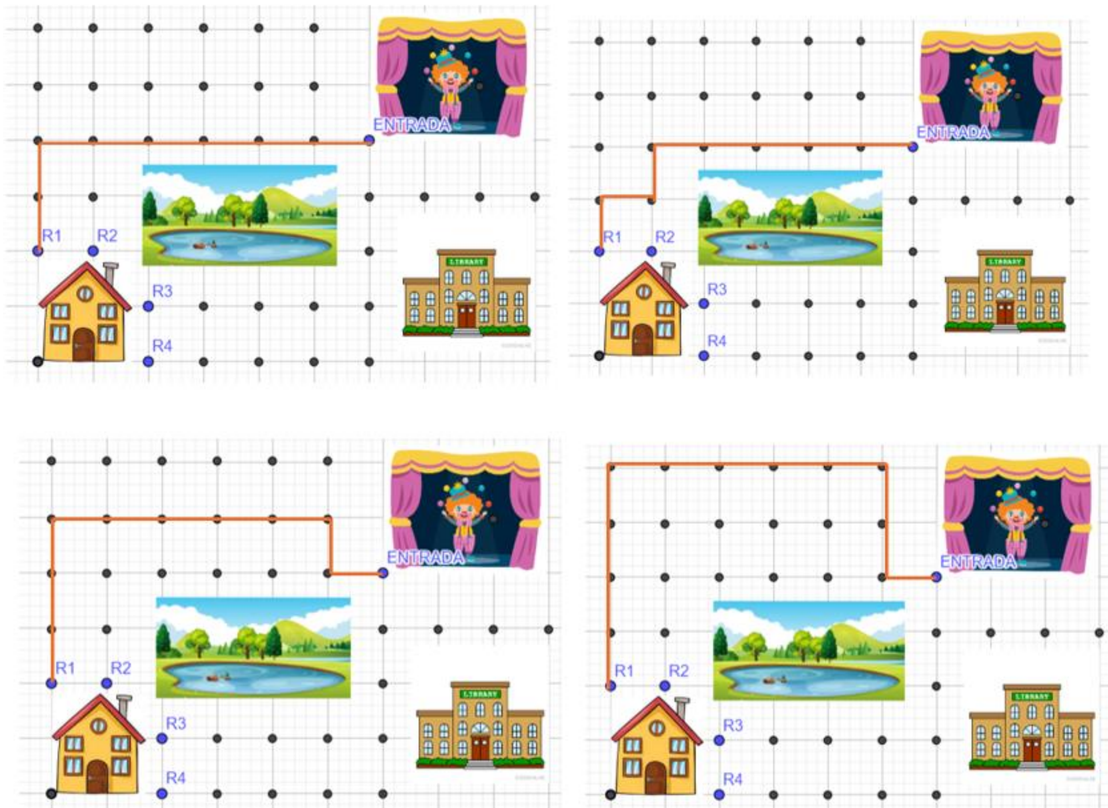
Solución de la primera pregunta de la Tarea 2



En el segundo enunciado se abre una gran cantidad de posibilidades y formas de partir desde $R1$ hasta la entrada del circo. Una de las posibles respuestas puede ser de manera gráfica, otra puede ser de forma analítica, pero con la condición de que los segmentos o trazos que se realizan solo pueden ser horizontales o verticales.

Figura 21

Posibles soluciones de la segunda pregunta de la Tarea 2



La solución analítica, es aquella en que los estudiantes pueden utilizar otros conceptos, como el de combinatoria. Analizando la Figura 21, es posible desplazar seis espacios a la derecha y cuatro hacía arriba, teniendo un total de diez movimientos; así es posible definir una combinatoria con el total de movimientos $4 + 6 = 10$. Ahora, si tomamos el número de movimientos que se deben realizar hacía arriba el cual es 4, tendríamos la siguiente expresión:

$$10C4 = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = 210$$

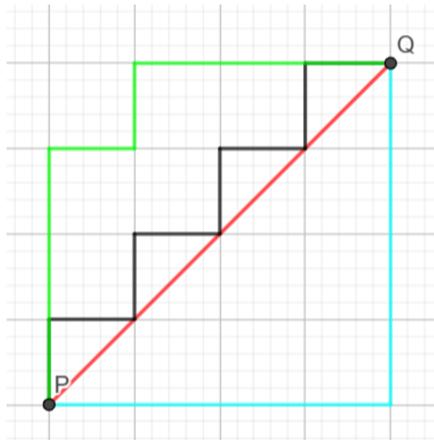
Es decir, hay 210 formas diferentes de partir de $R1$ hasta llegar a la entrada del circo. En el tercer enunciado, es posible que el estudiante realice alguna de las dos soluciones presentadas anteriormente y haga una comparación entre las rutas que parten de $R1$, con las otras que parten de $R2, R3$ y $R4$.

Análisis teórico: Esta tarea corresponde a una estructura Proceso de distancia, donde los estudiantes además de determinar de manera específica diferentes formas de llegar desde el punto $R1, R2, R3$ o $R4$ a la entrada del circo generar maneras de contar todas las rutas para llegar de un punto de partida al circo. Tal Acción repetitiva de realizar trazos entre un punto inicial a un punto final, se interioriza dicha Acción y se busca encontrar una solución exacta sin tener que realizar los diferentes trazos y las diferentes opciones que permiten llegar al punto final. Estas Acciones que son interiorizadas en el Proceso están condicionadas bajo una métrica, la métrica del taxista. En este caso el estudiante deja de trazar una a una las posibles rutas y se centra en encontrar el total de rutas que es posible generar según las condiciones de la tarea.

Tarea 3. Una vez los estudiantes abordan la segunda tarea, el entrevistador presenta el siguiente párrafo acompañado de la tarea número tres. Como se mencionaba anteriormente, la Geometría del Taxista nace de la necesidad de solucionar problemas cotidianos de desplazamiento en una ciudad o lugar en el cual no es posible establecer un trazo directo entre dos puntos.

Figura 22

Explicación sobre la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista



El segmento rojo representa la distancia entre los puntos P y Q en la Geometría Euclidiana. Los segmentos azules representan la distancia entre los puntos P y Q en la Geometría del Taxista. En el mismo orden de ideas, los segmentos verdes y azules representan la misma distancia de los segmentos azules en la Geometría del Taxista.

Teniendo en cuenta lo anterior, para cada imagen que aparece a continuación ¿cuál es la distancia entre los puntos que aparecen en cada plano utilizando el razonamiento de medición de la Geometría del Taxista?

Figura 23

Actividad 1 de la Tarea 3

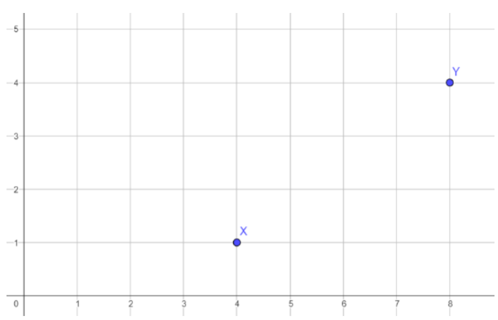


Figura 24

Actividad 2 de la Tarea 3

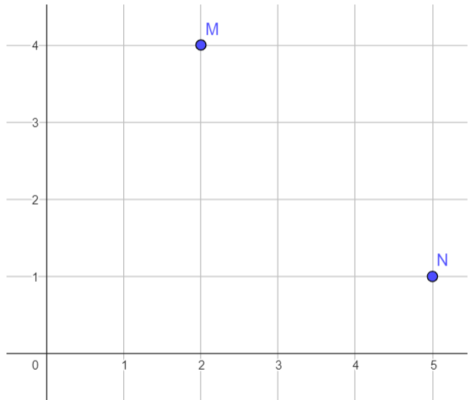
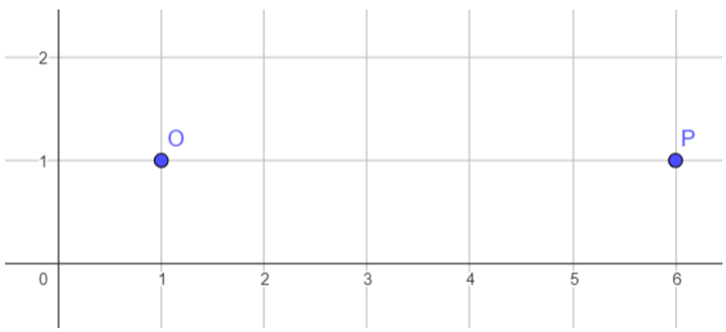


Figura 25

Actividad 3 de la Tarea 3



¿Qué puedes resaltar de cada uno de los anteriores ejercicios?

Solución normativa: En este punto, se espera que el estudiante realice trazos entre los diferentes puntos, pero teniendo en cuenta que hay una medida mínima entre ellos. A continuación, se presenta las posibles respuestas de manera geométrica de las figuras 23, 24 y 25.

Figura 26

Respuestas de la actividad 1 de la Tarea 3

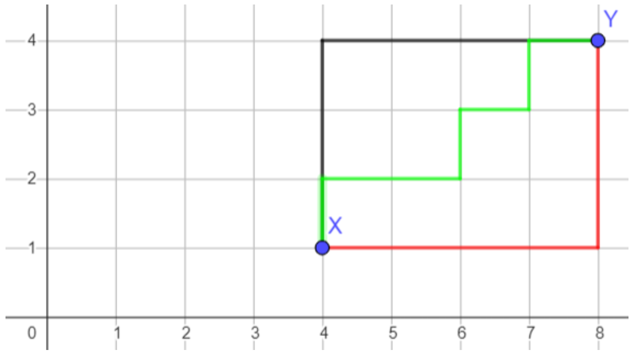


Figura 27

Respuestas de la Actividad 2 de la Tarea 3

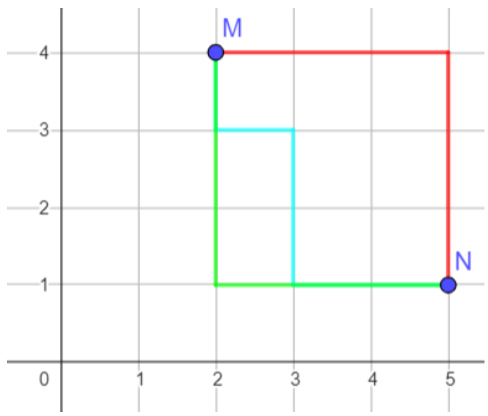
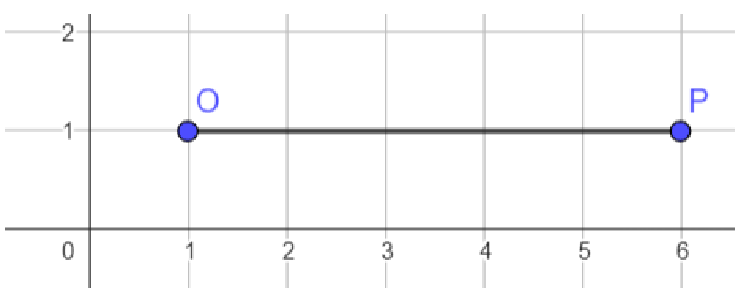


Figura 28

Respuestas de la Actividad 3 de la Tarea 3



En la última actividad de la tarea 3 se espera que el estudiante concluya que, la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista es única, pero que hay diferentes representaciones geométricas de la misma. A demás que es posible definir otros casos en los que solo hay una representación geométrica como se muestra en el enunciado c.

Las respuestas numéricas de los ítems de la tarea tres consiste en contar la cantidad de unidades que hay entre los puntos señalados. Es decir, la distancia entre X y Y es de $7u$; la distancia entre M y N es de $6u$; y la distancia entre O y P es de $5u$.

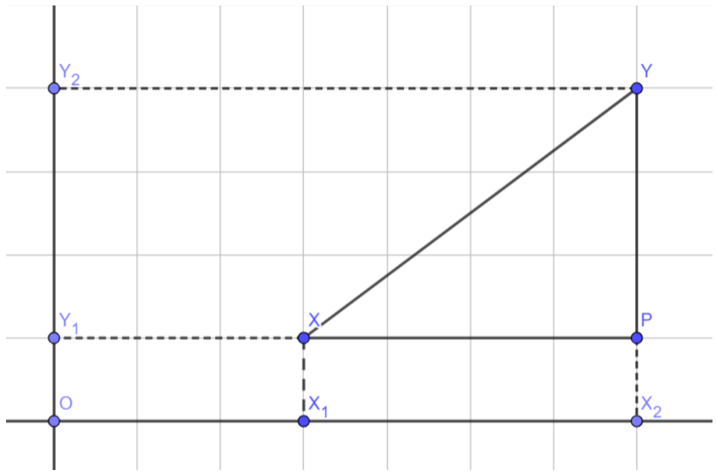
Análisis teórico: Esta tarea corresponde a una estructura Proceso de distancia, donde los estudiantes pueden tener diversas maneras de llegar de un punto a otro, pero al especificar que deben seguir el camino más corto entre los puntos, saben que es posible definir diferentes trazos en una región del en el plano, donde todas representaciones tienen la misma longitud; esto corresponde a la distancia definida en la métrica del taxista. Además, los estudiantes pueden reflexionar sobre la relación que hay entre la distancia entre dos puntos en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista es fundamental para determinar que ambas métricas tienen elementos matemáticos en común.

Una vez que los estudiantes abordan la tercera tarea, el entrevistador presenta la tarea 4.

Tarea 4. Dada la siguiente representación (Figura 29), generaliza y encuentra una fórmula para determinar la distancia entre dos puntos utilizando la Geometría del Taxista.

Figura 29

Representación geométrica de la Tarea 4



Solución normativa: El estudiante que ha comprendido que la métrica o medición entre diferentes puntos en la geometría del Taxista solo puede hacerse con trazos horizontales o verticales. Es decir, debe tener en cuenta la longitud de los segmentos XP y PY, en este caso X tiene coordenadas (x_1, y_1) y P tiene coordenadas (x_2, y_1). Al hacer la diferencia entre estos pares ordenados tenemos como resultado se tiene que: $XP = (x_2, y_1) - (x_1, y_1) = |x_2 - x_1|$. De igual manera si comparamos el punto P que tiene como coordenadas (x_2, y_1) con Y el cual representa el punto (x_2, y_2) al hacer la diferencia entre ambos pares ordenados se tiene como resultado $PY = (x_2, y_2) - (x_2, y_1) = |\, y_2 - y_1|$. Sabiendo que la distancia entre los puntos X y Y está dad por $XP + PY$. Se concluye que la distancia de X a Y, es el resultado de $XP + PY = |x_2 - x_1| + |\, y_2 - y_1|$.

Análisis teórico: Esta tarea corresponde a una estructura Objeto, donde los estudiantes al encapsular el Proceso de reflexionar sobre la noción de distancia en la geometría del Taxista, pueden realizar una nueva transformación sobre el concepto de distancia. En este caso, a partir de ejemplos particulares, puede llegar a una generalización de distancia en la nueva métrica utilizando patrones y conocimientos de la geometría Euclidiana.

Entrevista sobre la concepción de círculo

Tarea 1. Dadas las fórmulas para la distancia en ambas geometrías, ilustre cada una de estas dos distancias. Sea lo más detallado posible al etiquetar cada uno de ellos. Dados los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se tienen las siguientes fórmulas

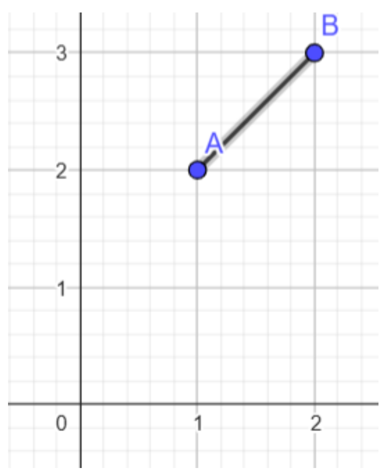
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Solución normativa: El estudiante puede realizar un plano cartesiano en el que le sea mejor para él ejemplificar cada una de las distancias. Supongamos que toma como referencia los puntos $(1,2)$ y $(2,3)$ Se tendría que $d = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2}$ dando como resultado $d = \sqrt{2}$. Su representación geométrica sería la siguiente:

Figura 30

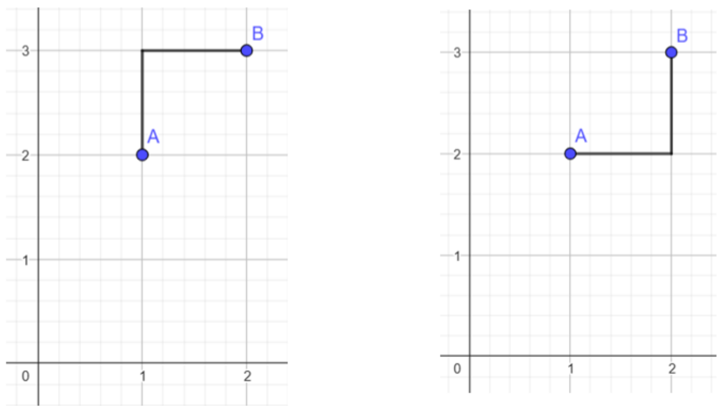
Representación geométrica de distancia entre dos puntos utilizando la métrica Euclidiana



Teniendo en cuenta la ecuación de distancia en la geometría del Taxista y suponiendo que el estudiante utilice los mismos puntos se tendría que $d = |2-1| + |3-2|$ dando como resultado que $d = 2$. Las posibles representaciones geométricas que puede realizar el estudiante son las siguientes:

Figura 31

Representación geométrica de distancia entre dos puntos utilizando la métrica del Taxista



Análisis teórico: Esta tarea pertenece a una estructura Acción, en la que a partir de una fórmula el estudiante realiza una tarea repetitiva la cual es reemplazar valores en una ecuación y con esto, realizar su representación geométrica. En este caso, el estudiante representa la distancia entre dos puntos utilizando diferentes métricas. No llega a ser una estructura Proceso puesto que, el estudiante ya ha tenido un acercamiento a la geometría del Taxista y tiene una noción o percepción sobre esta métrica.

Una vez que los estudiantes abordan la tercera tarea, el entrevistador presenta la tarea 2

Tarea 2. ¿Es verdadera la siguiente definición en ambas geometrías? "El círculo es un conjunto de puntos en el plano equidistantes de un punto fijo”. Explica tu respuesta.

Solución normativa: En este caso se dan dos opciones, que el estudiante responda que sí o que el estudiante responda que no. Dado el caso que el estudiante responda que sí, el estudiante explicará que a pesar de que la representación geométrica es completamente diferente o inusual, pueda inferir que dicha definición se cumple en diferentes geometrías. En el caso de que responda que no, puede ser a partir de la representación, es decir, que el estudiante de una respuesta teniendo en cuenta solamente lo visual.

Análisis teórico: Esta tarea pertenece a una estructura Proceso, en la que el estudiante a partir de la noción que tiene de ambas geometrías realiza una reflexión sobre la definición de círculo, esta reflexión se realiza al comparar ambas definiciones de distancia y de ambas métricas. Al inferir que, a pesar de que las representaciones algebraicas y geométricas pueden ser diferentes en cada métrica, la definición no cambia, esto pasa con la definición de distancia y también con la definición de círculo.

Tarea 3. Dibuje el siguiente círculo en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista: Un círculo con centro en $C(3{,}2)$ y radio $r = 2$.

Solución normativa: El estudiante puede realizar un plano cartesiano en el que le sea mejor para él ejemplificar cada una de las distancias en ambas geometrías. Acá se pueden dar varías opciones: que realicen la representación geométrica de círculo utilizando la métrica del Taxista de manera correcta o incorrecta. Dado el caso de que realice la representación de manera correcta puede que haga la representación en el mismo plano en el que esté el círculo Euclidiano o en otro diferente como se ve en las siguientes imágenes.

Figura 32

Ejemplo de la representación geométrica de círculo utilizando la métrica Euclidiana

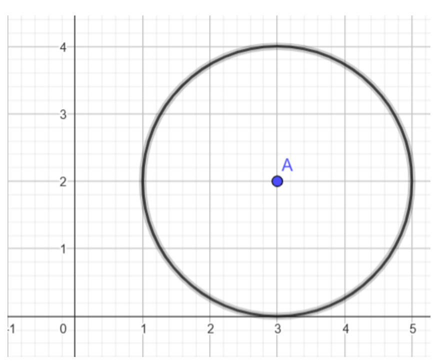


Figura 33

Representación geométrica de círculo utilizando la métrica del Taxista

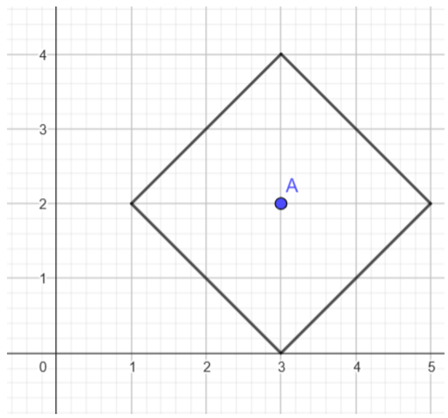
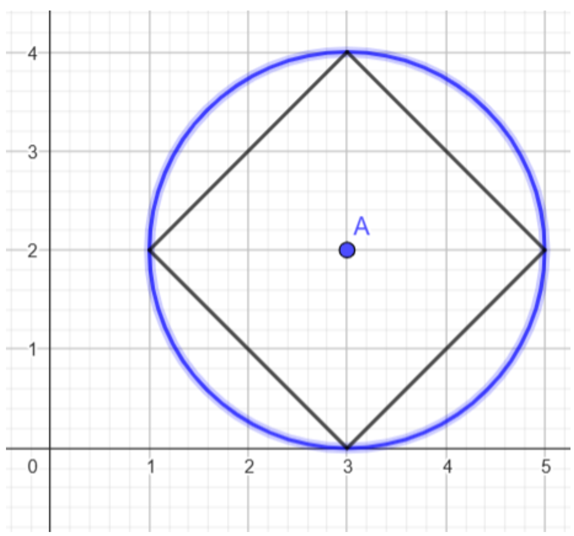


Figura 34

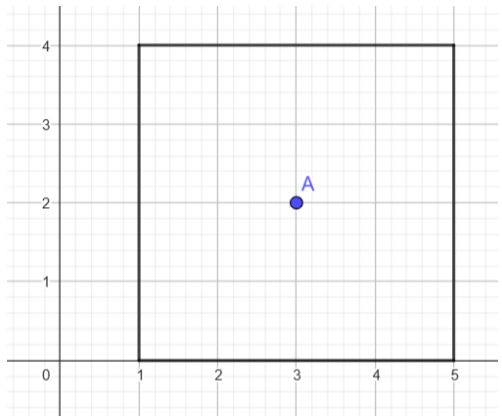
Representación geométrica de círculo utilizando ambas métricas



Otro caso es que realice la representación de manera incorrecta utilizando las precepciones de representaciones Euclidianas, es decir, puede que realice un cuadrado pensando que es la representación correcta de un círculo en la métrica del Taxista

Figura 35

Posible representación geométrica errónea de círculo utilizando la métrica del Taxista



Análisis teórico: Esta tarea pertenece a una estructura Proceso, puesto que el estudiante a partir de conceptos de la geometría Euclidiana y nociones o percepciones de la geometría del Taxista, debe realizar un círculo en una nueva métrica. Todo esto hace que el estudiante este en una reflexión y análisis constante de realizar una representación geométrica de círculo a partir de herramientas y conocimientos pre establecidos.

Tarea 4. ¿Podrías escribir la ecuación de este círculo en cada uno de estas geometrías?

Solución normativa: El estudiante debe reconocer que la fórmula de la ecuación del círculo proviene de la fórmula de distancia, ya que la distancia entre el centro y cualquier punto en un círculo es igual al largo del radio, es decir que al tener que la ecuación de distancia en la geometría Euclidiana es de $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Esto es lo mismo que tener $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ es decir, un círculo de radio d que tiene como centro el punto (x_2, y_2). Si el estudiante hace esta misma inferencia, pero con la fórmula de la distancia de la geometría del Taxista se tendría que $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ es la ecuación de un círculo que tiene como radio d y centro en (x_2, y_2). El estudiante puede concluir que la ecuación de círculo en la geometría del Taxista es semejante a la ecuación de distancia de dicha métrica.

Análisis teórico: Esta tarea pertenece a una estructura Proceso, en la que el estudiante puede concluir que la ecuación de círculo es la misma que la ecuación de distancia teniendo en cuenta conceptos y nociones de la geometría Euclidiana, puesto que, en la geometría Euclidiana también se cumple que la ecuación de distancia de la geometría Euclidiana es similar a la ecuación de círculo.

5.2 Análisis de datos

Análisis posteriori del taller: A continuación, se presentan evidencias de las estructuras que los estudiantes evidenciaron sobre el concepto de distancia en la geometría del Taxista, con base a los procedimientos realizados en el Taller 1. La realización del taller se hizo por medio de la plataforma Zoom, en ella ingresaron dos estudiantes (Jaime y Carlos), en la segunda intervención ingresaron los estudiantes (Camilo y Diana) en las dos ocasiones los estudiantes tuvieron entre 45 y 55 minutos para realizar el taller, todos lo completaron en el tiempo dado. Cabe resaltar que los nombres que se utilizaron para mencionar a cada estudiante son ficticios.

Evidencias de una concepción Acción: Jaime es estudiante de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de octavo nivel, actualmente está realizando las prácticas y el trabajo de grado. Este estudiante resolvió todas las preguntas del taller y tuvo tiempo de sobra ya que duró alrededor de 40 minutos en la realización, no tuvo inconvenientes para desarrollar las tareas. En la Tarea 1 los procedimientos de Jaime evidencian estructura Acción, puesto que determina de manera específica diferentes formas de trazar segmentos desde el punto X hasta el punto Y (Ver figura 36 y figura 37).

Figura 36

Respuesta de la Tarea 1 presentada por Jaime

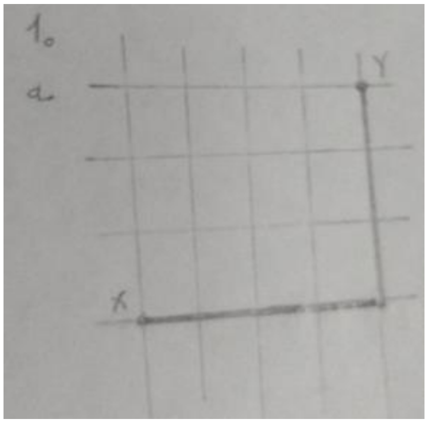
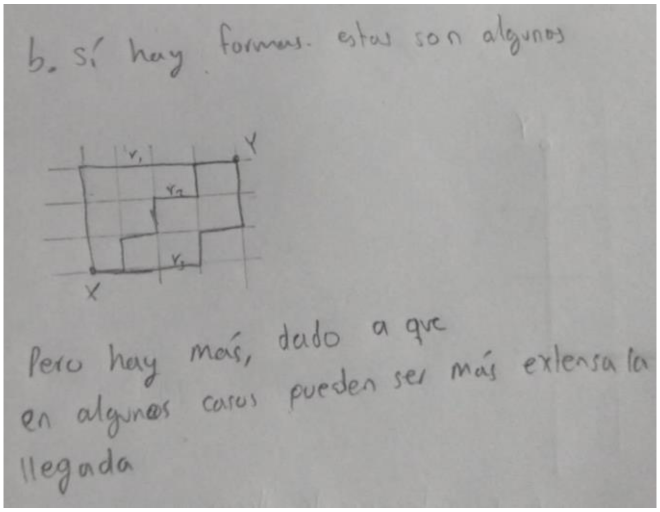


Figura 37

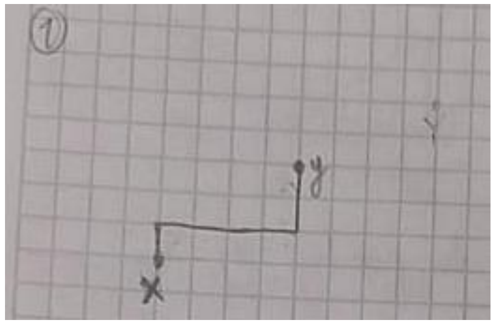
Respuesta de la Tarea 1, segundo enunciado por parte de Jaime



Al igual que Jaime, Carlos realizó solo un trazó y no fue la distancia más corta desde la perspectiva de la geometría Euclidiana, sino que también realiza los trazos teniendo en cuenta la cuadricula de las hojas.

Figura 38

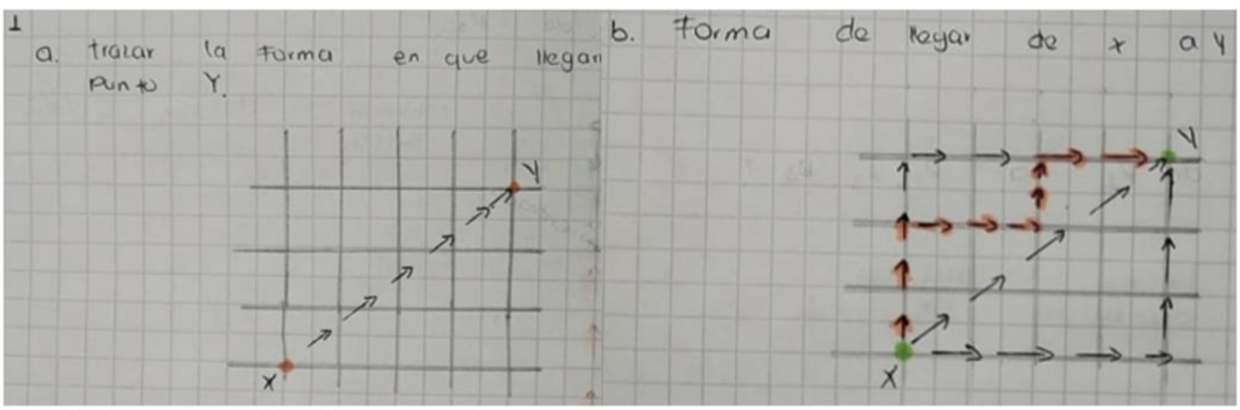
Respuesta de la Tarea 1 realizada por Carlos



En el caso de María la respuesta que dio en el enunciado 1 en el apartado a., fue desde la perspectiva de la geometría Euclidiana, en donde traza la distancia más corta entre los puntos X y Y.

Figura 39

Respuestas de la Tarea 1 de ambas actividades por parte de María



Evidencias de una estructura Proceso: para esta estructura se resaltan las respuestas dadas por los estudiantes Jaime y Carlos puesto que, realizan una reflexión sobre la cantidad de trazos o recorridos que pueden realizarse en la tarea dos. Jaime para dar solución del inciso a de la tarea 2, realiza una representación gráfica de las rutas que parten desde $R1, R2, R3$ y $R4$.

Figura 40

Solución de la pregunta 1 de la Tarea 2 por Jaime

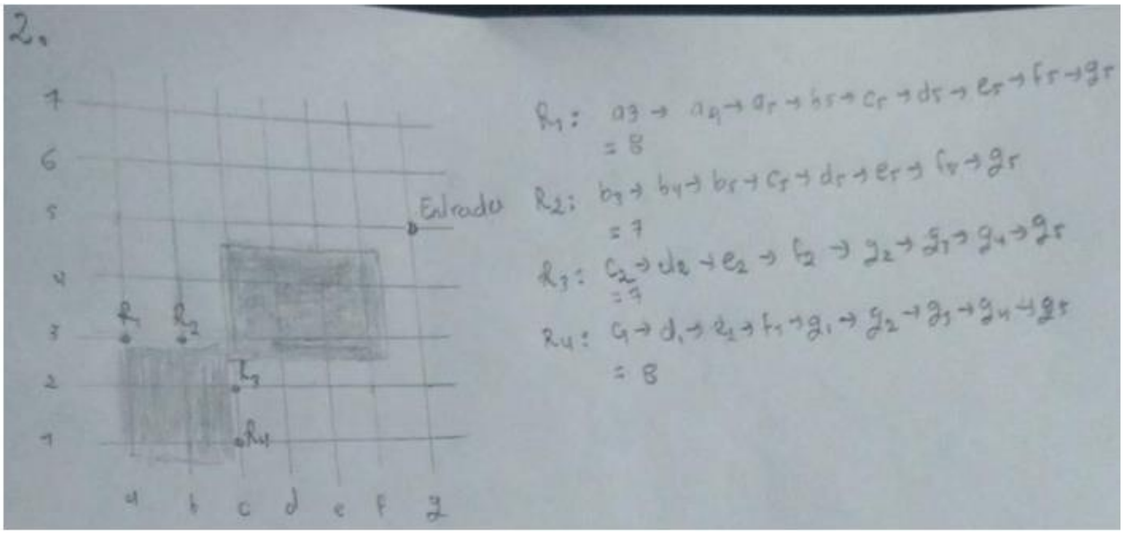
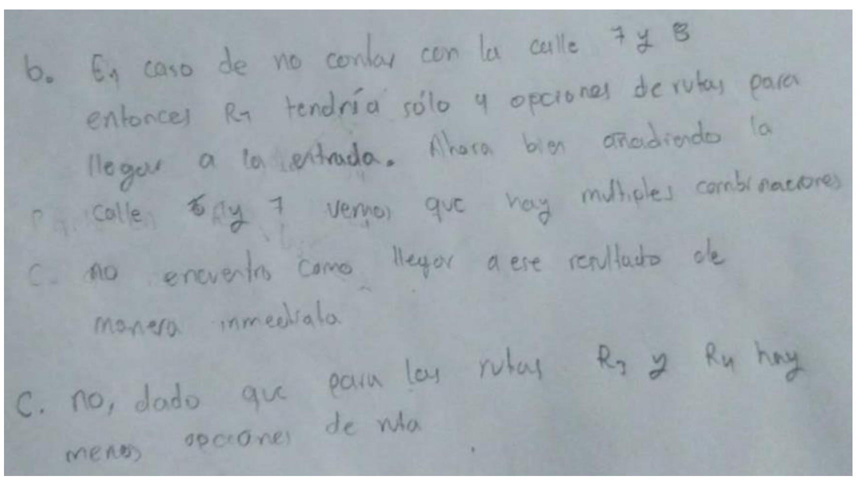


Figura 41

Solución de las demás actividades de la Tarea 2 por parte de Jaime



Como puede verse en las Figuras 34 Jaime les da un nombre a las calles horizontales con números y a las verticales con letras, utilizando un lenguaje propio, representa el recorrido $R1$ y cada punto como $a3, a4, a5, b5, c5, d5, e5, f5\ y\ g5$. En términos más formales sería una relación entre pares ordenados:

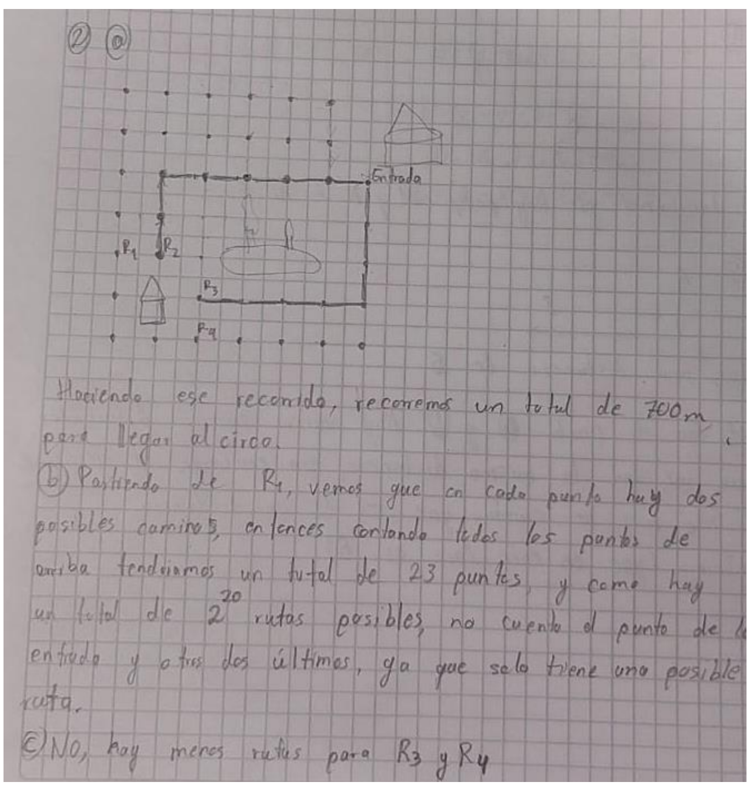
$$R1 = (a,3),(a,4),(a,5),(b,5),(c,5),(d,5),(e,5),(f,5),(g,5).$$

Esto lo realiza de igual manera con los puntos de partida $R2, R3$ y $R4$.

En la figura 35, Jaime plantea una solución descartando las calles 6 y 7, encontrando 4 posibles alternativas de partir de $R1$; después expresa que si se tomaran las calles descartadas se podrían encontrar múltiples combinaciones. En este caso se dice que evidencia una Proceso de distancia, a pesar de que no contaba con las herramientas necesarias para hacer dichas combinaciones, sabía que una de las soluciones podría ser utilizando la combinatoria. Al igual que Jaime, Carlos trata de buscar una manera de encontrar todos los posibles caminos sin tener que trazarlos uno por uno, realizando la siguiente deducción:

Figura 42

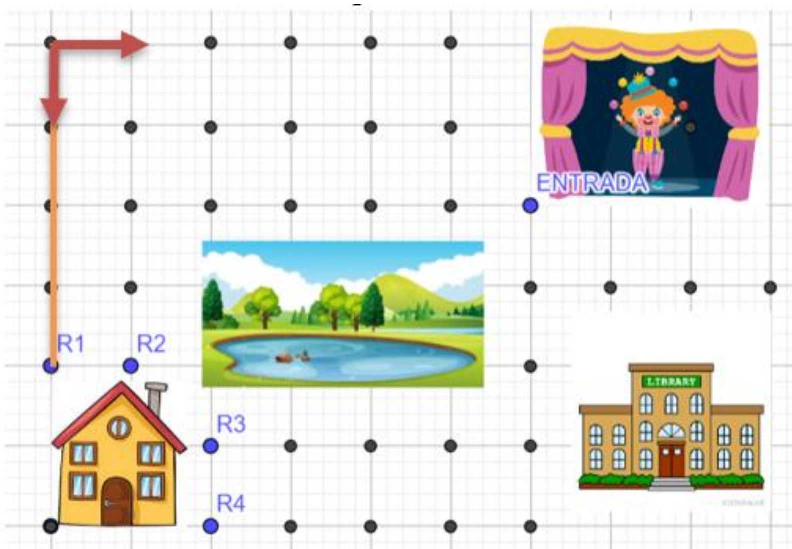
Respuesta de la pregunta 2 de la Tarea 2 por parte de Carlos



A pesar de que Carlos reflexiona sobre las posibles rutas que puede tener partiendo de $R1$, hace una deducción errónea puesto que, asegura que en cada punto hay dos posibles caminos posibles, uno de manera horizontal y otro de manera vertical. Si esto es cierto, entonces en cada uno de los caminos puede haber la posibilidad de devolverse por donde ya se había realizado el recorrido. (ver la figura 43).

Figura 43

Representación de la deducción realizada por Carlos



En el desarrollo de la tarea tres, se identificó que Carlos evidenciaba una estructura Proceso de distancia. Puesto que, los estudiantes pueden llegar de diversas maneras de un punto a otro, pero deben tener en cuenta que dichas maneras deben ser la más corta.

Figura 44

Respuestas de la Tarea 3 por parte de Carlos

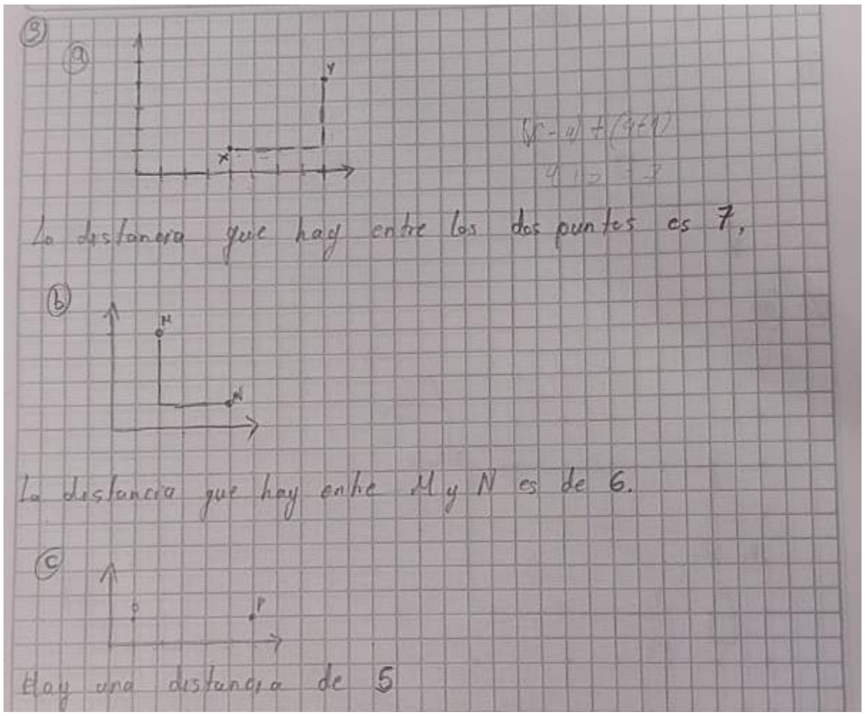
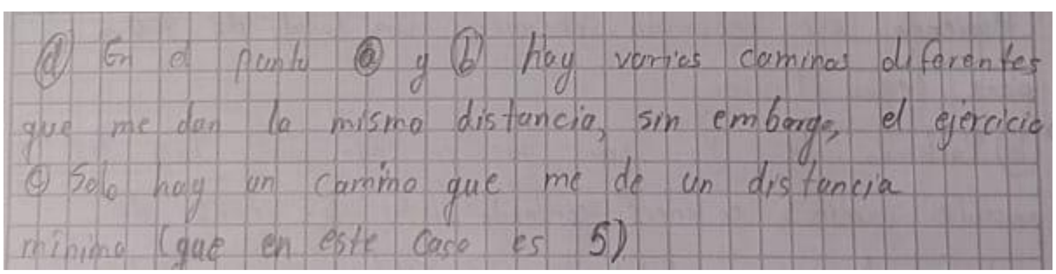


Figura 45

Respuesta de la última actividad de la Tarea 3 por parte de Carlos

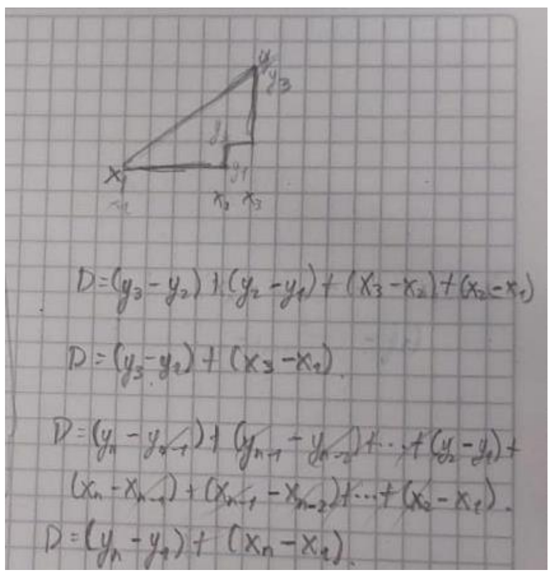


Carlos definió una representación gráfica para cada uno de los enunciados y en el enunciado y en el último enunciado de la Tarea 3 especifica que hay otras maneras o caminos que se pueden realizar, exceptuando el de la figura 25. Esto implica que reconoce que diferentes representaciones tienen la misma longitud; esto corresponde a la distancia definida en la métrica del taxista. En el caso de María no se encontró estructura alguna puesto que, resolvió los enunciados de las figuras 23, 24 y 25 utilizando el teorema de Pitágoras.

En la tarea 4 se destacan tres estudiantes que a pesar de que no llegaron a la respuesta exacta pudieron encapsular los procesos presentando una demostración general de encontrar la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista. Carlos demuestra una estructura Objeto de distancia, puesto que, logra dar una respuesta analítica.

Figura 46

Respuesta de la Tarea 4 realizada por Carlos



Representando de manera general la situación Carlos puede concluir que la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista está dada por la ecuación $(y_n - y_1) + (x_n - y_1)$ es una ecuación en la que toma todas las posibles representaciones geométricas de distancia entre dos puntos.

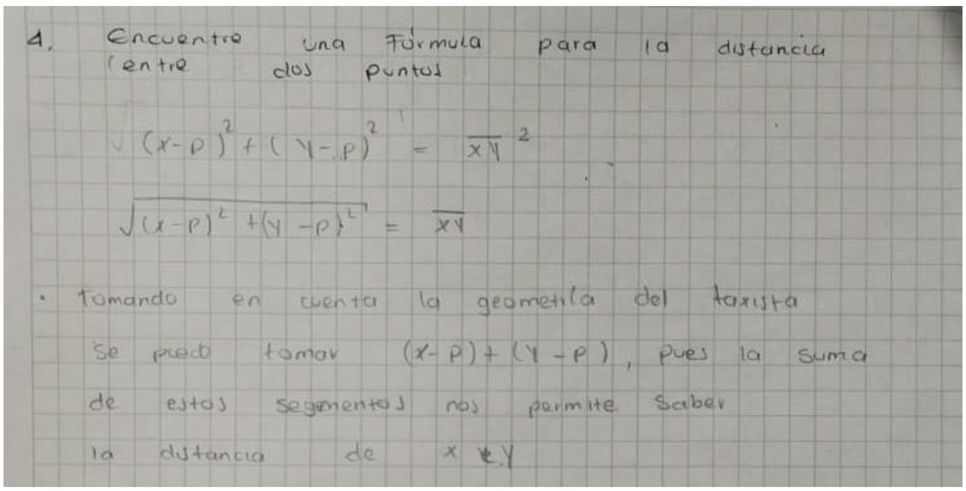
María llega a una respuesta cercana, logra respuestas parecidas a la respuesta normativa presentada en el análisis a priori. María concluye que la distancia entre los puntos X y Y está dada por la expresión $(X - P) + (Y - P)$, tendríamos que $X = (x_1, y_1)$, $P = (x_2, y_1)$ y $Y = (x_2, y_2)$, es decir:

$$(X-P)+(Y-P) = (x_1, y_1) - (x_2, y_1) + (x_2, y_2) - (x_2, y_1) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2).$$

Deducción correcta puesto que dicho resultado de esta operación de pares ordenados se tiene como resultado $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$ representación similar a la definición de distancia utilizada en la geometría del Taxista.

Figura 47

Respuestas de la Tarea 4 por parte de María



Análisis Posteriori a la entrevista: A continuación, se presentan evidencias de las estructuras que los estudiantes evidenciaron sobre el concepto de círculo en la geometría del Taxista, con base a los resultados presentados en el Taller y con una concepción sobre la distancia en ambas geometrías. La realización de la entrevista se hizo por medio de la plataforma Zoom, en ella ingresó primero Carlos, en la segunda sesión ingresó Jaime y en la tercera sesión ingresaron Camilo y Diana. Carlos duró en la realización de la entrevista alrededor de dos horas, en las que se hicieron tres reuniones entre 35 y 40 minutos para realizar la entrevista. Jaime realizó la entrevista alrededor de una hora, solo con una reunión y parte de una segunda. Camilo y Diana solo necesitaron una sesión para realizar la Entrevista.

Evidencias de una concepción Acción: Carlos al igual que Jaime, con la guía del entrevistador, realizaron la representación geométrica utilizando ambas métricas. Como se presentó en el Análisis a priori, Carlos utilizó los mismos puntos para representar las distancias en ambas geometrías.

Figura 48

Respuesta de la Tarea 1 por parte de Carlos

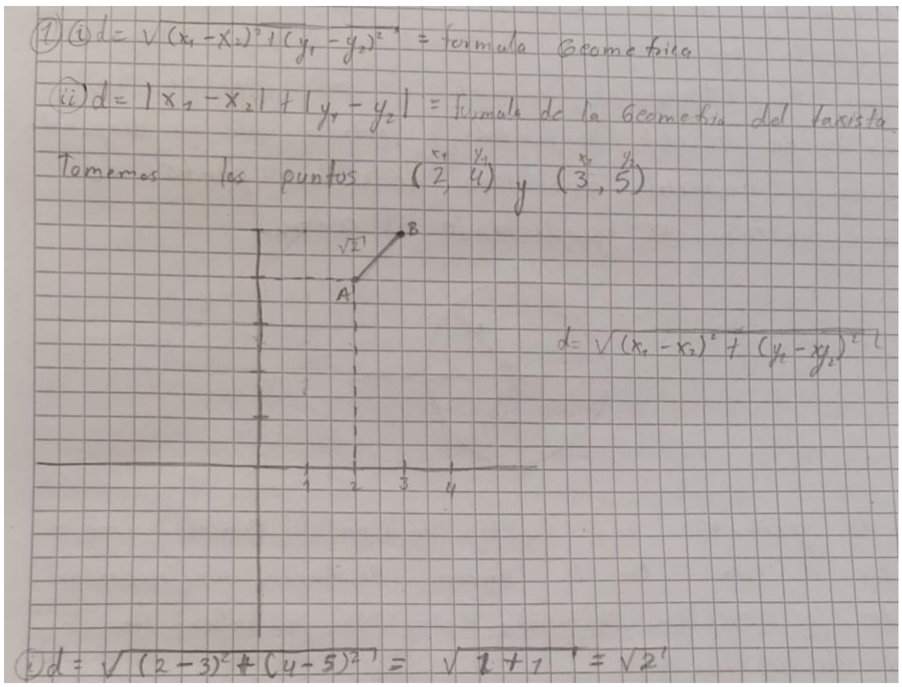
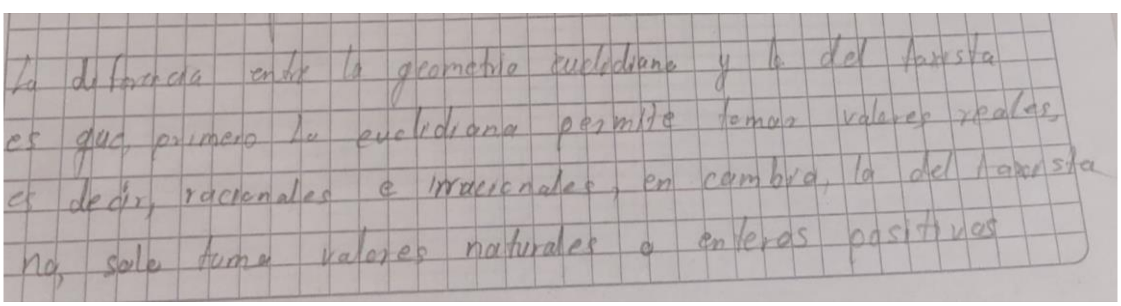


Figura 49

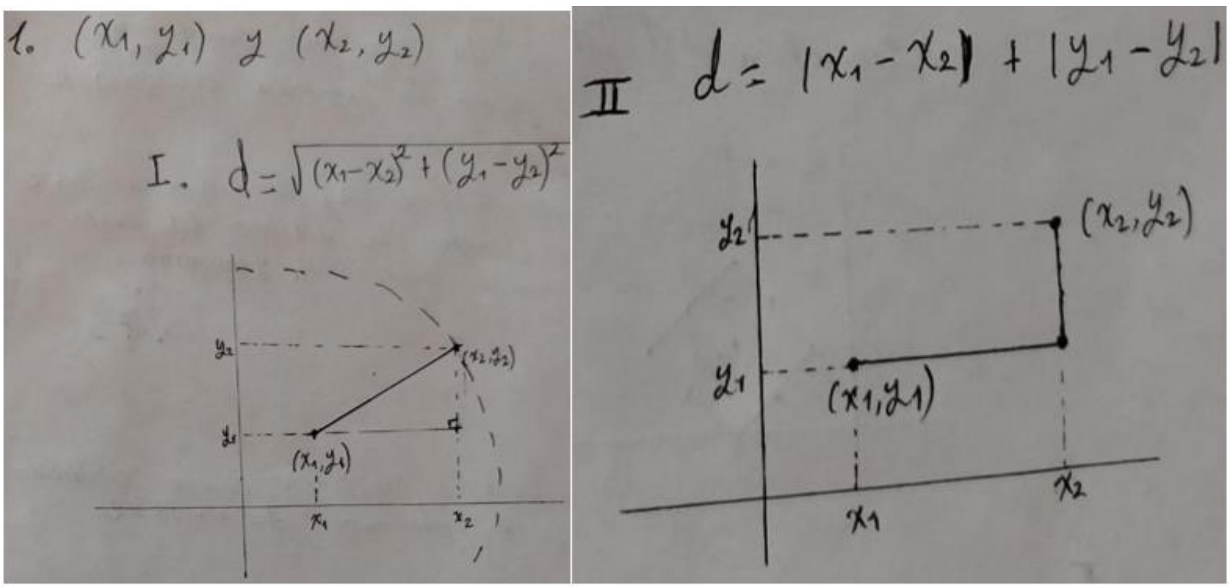
Respuestas de la tarea 1 por parte de Carlos



Hay dos cosas por resaltar que no se esperaban, Jaime realizó las representaciones sin valores arbitrarios, sino que tomó valores generales, en ambos casos utilizó los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Figura 50

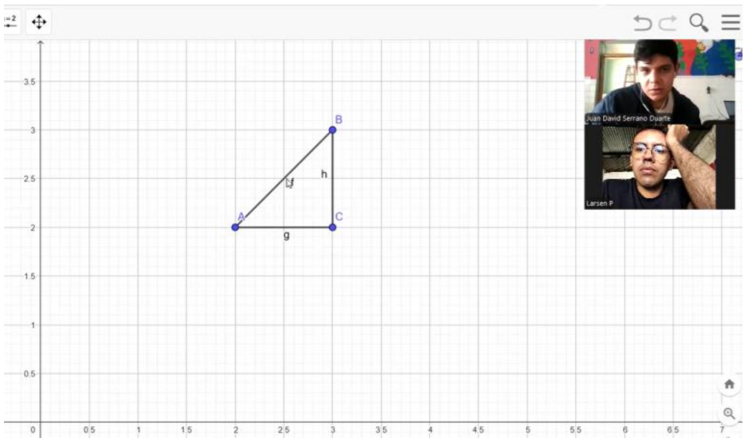
Respuestas de la Tarea 1 realizadas por Jaime



Esto puede haberse dado debido a que en la entrevista el estudiante tenía algunas dudas sobre cómo funcionaba la métrica del Taxista, se utilizó Geogebra como recurso para dar las explicaciones o ejemplos para cada uno de los estudiantes. En esa explicación, el estudiante recordó cómo se media la distancia entre dos puntos en la geometría del Taxista.

Figura 51

Explicación de cómo se relacionan ambas métricas



La segunda cosa a resaltar es la siguiente conversación que se tienen cuando Jaime realiza la primera tarea.

Jaime: "esa ecuación que está ahí, se puede utilizar también para encontrar la ecuación del círculo",

Entrevistador: "Puede ser, pero ¿por qué lo dice?

Jaime: Porque lo único que falta es elevar a ambos lados de la igualdad a una potencia de dos y tener como radio d"

Entrevistador: "y el centro del círculo sería el punto (x_2, y_2)*"*

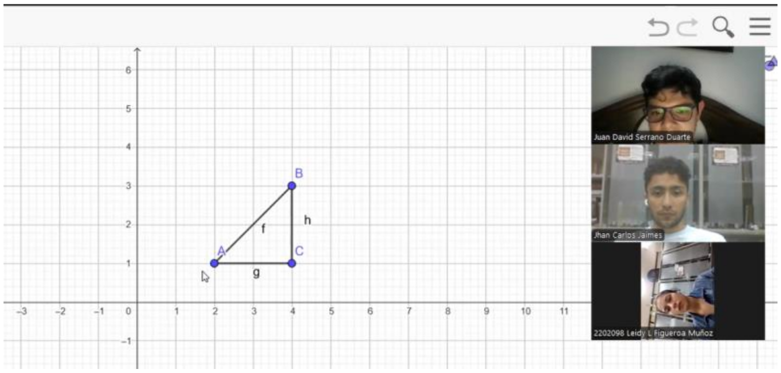
Jaime: "Si, teniendo en cuenta la definición de distancia que nos dan"

Esta afirmación da explicación al círculo que realizó en la primera tarea, en este caso, se sigue considerando que el estudiante está en una estructura Acción puesto que, realizó la representación geométrica y utilizó un conocimiento previo para representar la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).}

De manera similar, Camilo y Diana necesitaron un repaso sobre la métrica del Taxista, nuevamente se realizó una explicación con el recurso de GeoGebra.

Figura 52

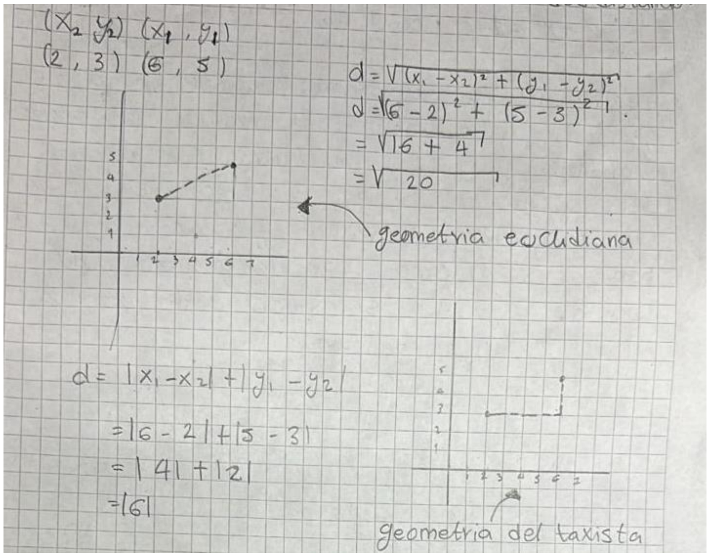
Explicación de la métrica del Taxista utilizando GeoGebra como recurso



Al igual que con Carlos y Jaime, Camilo llegó a una concepción Acción en la tarea 1, puesto que realizó la representación geométrica de ambas distancias teniendo en cuenta la ecuación de distancia utilizada con diferente métrica.

Figura 53

Respuestas de la Tarea 1 realizada por Camilo



En el caso de María, también se ve una concepción Acción y además se puede resaltar que, en cada medida, realiza una parte de la definición de distancia en la geometría del Taxista. Es decir, cada segmento lo representa con la expresión $|y_1 - y_2|$ y la expresión $|x_1 - x_2|$. Respecto a la métrica Euclidiana hizo lo que se esperaba, dada la ecuación y dos puntos encontrar el valor de la distancia y lo representa geométricamente en el plano cartesiano.

Figura 54

Representación geométrica de distancia, Tarea 1 realizada por María

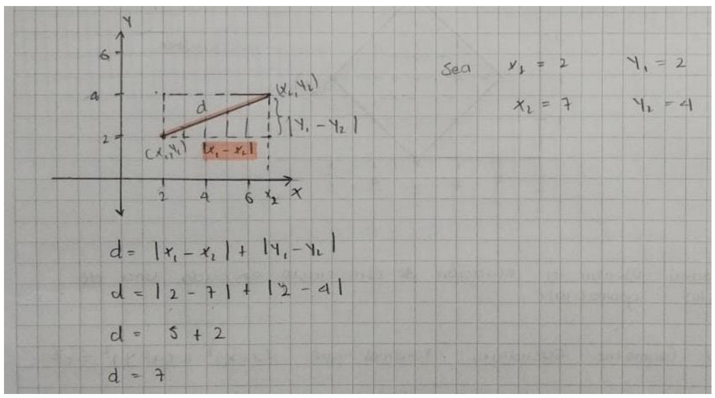
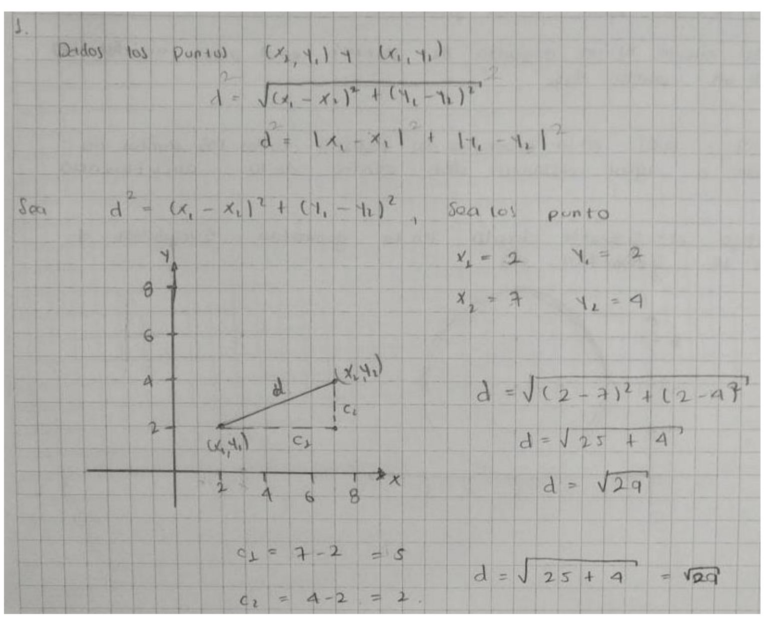


Figura 55

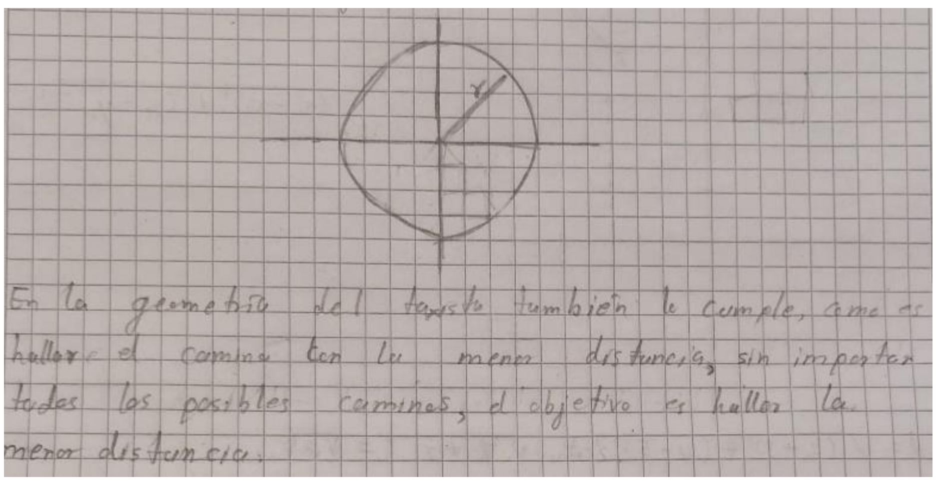
Representación desde la métrica Euclidiana, respuesta de la Tarea 1 por parte de María



Evidencias de una concepción Proceso: En la tarea 2, Carlos demostró una concepción Proceso al afirmar que en ambas geometrías se cumple la misma definición. Argumenta su afirmación representando de manera geométrica un círculo cualquiera en la geometría Euclidiana y afirmando que los puntos equidistan de otro llamado centro, esto se confirma por la definición de radio de círculo. En la geometría del Taxista, con un poco de desconocimiento del uso de la palabra "distancia" da a entender que si se tiene un punto en el plano y se encuentran otros que equidisten de este, se cumple que es un círculo. Sin importar como sea su representación.

Figura 56

Respuestas de la Tarea 2 presentadas por Carlos



Carlos: En ambas definiciones se cumple la definición

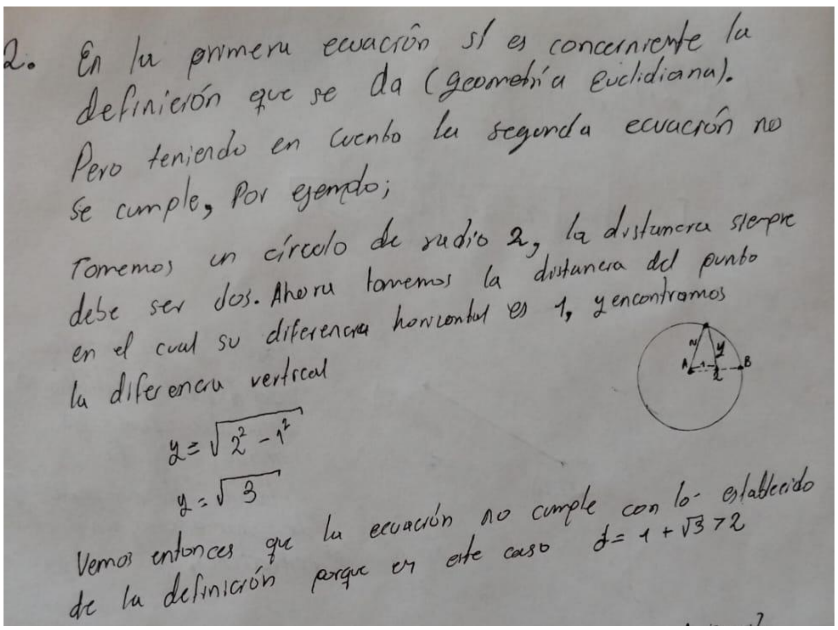
Entrevistador: ¿por qué?

Carlos: "Porque en ambas geometrías la definición de distancia es la medida más corta entre dos puntos, y como la definición de distancia está relacionada con la definición de círculo, se puede decir que en ambas geometrías se cumple la definición"

Respecto a Jaime, no se refleja una concepción Proceso puesto que, el estudiante al saber que ambas métricas eran diferentes, donde el plano utilizado en la geometría del Taxista es de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, además relaciona ambas ecuaciones, lo cual no va dar un valor que se represente en esta métrica. Al seguir con la entrevista, el estudiante recapacitó sobre su decisión y razonamiento, esto se hizo nuevamente utilizando la herramienta Geogebra para representar geométricamente la definición dada.

Figura 57

Respuesta de la Tarea 2 realizada por Jaime



2. En la primera ecuación sí es concerniente la definición que se da (geometría Euclidiana). Pero teniendo en cuenta la segunda ecuación no se cumple, por ejemplo;

Tomemos un círculo de radio 2, la distancia siempre debe ser dos. Ahora tomemos la distancia del punto en el cual su diferencia horizontal es 1, y encontramos la diferencia vertical

$y = \sqrt{2^2 - 1^2}$

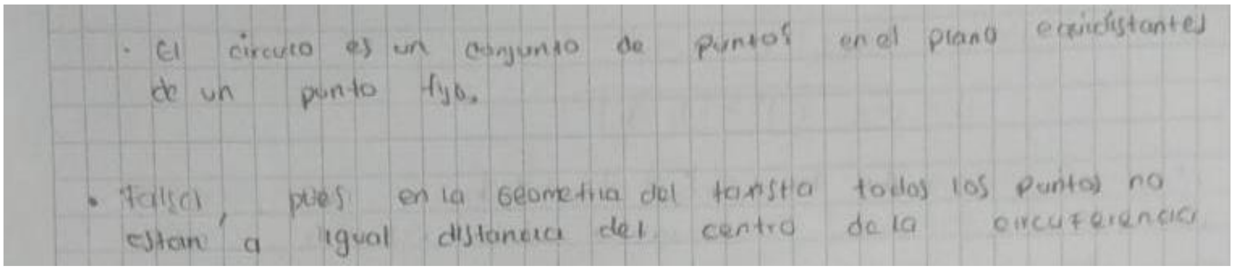
$y = \sqrt{3}$

Vemos entonces que la ecuación no cumple con lo establecido de la definición porque en este caso $d = 1 + \sqrt{3} > 2$

En la tarea 2 realizada por Camilo no se nota una concepción Proceso puesto que, solamente repite la definición de círculo, pero no justifica el por qué esta afirmación puede ser verdadera en la geometría del Taxista. Al igual que con Jaime, en primera instancia Diana afirmó que la definición de círculo no se aplica en la métrica del Taxista, pero a lo largo de la entrevista cambia de parecer, llegando a una concepción Proceso en la tarea 3.

Figura 58

Solución de la Tarea 2 por parte de María


· El circulo es un conjunto de puntos en el plano equidistantes de un punto fijo.

· Falsa, pues en la Geometria del taxista todos los puntos no estan a igual distancia del centro de la circunferencia

En la tarea 3, Carlos por sí mismo representó de manera geométrica ambos círculos utilizando las diferentes métricas. Caso diferente al de Jaime puesto que, necesitó ayuda para poder representar el círculo con la métrica del Taxista.

Figura 59

Respuestas de la Tarea 3 realizadas por Carlos

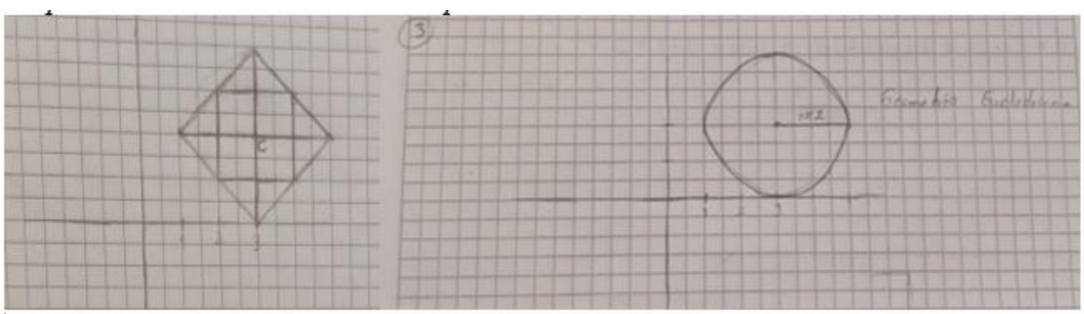
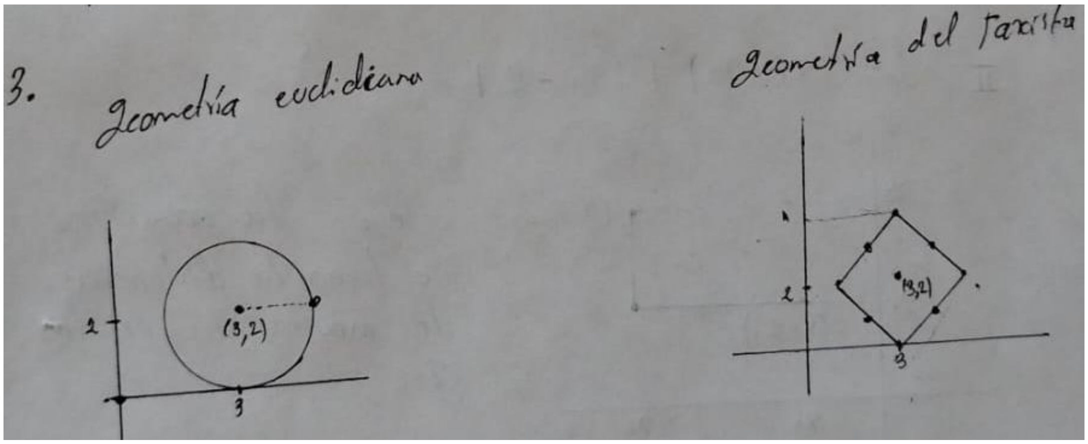


Figura 60

Respuestas de la Tarea 3 realizadas por Jaime



Ambos estudiantes realizaron lo que se esperaba teniendo en cuenta el Análisis a priori, Jaime y Carlos utilizaron diferentes puntos y los unieron con diferentes segmentos. Diana de manera similar realiza ambas representaciones, utilizando diferentes puntos en el plano llegando a las dos representaciones esperadas. Respecto a Camilo, no se llega a comprender la representación geométrica que realiza puesto que además de realizar el círculo, dentro de él realiza un círculo Euclidiano, a comparación de los otros tres participantes, en este caso no se ve una estructura proceso, porque el estudiante no sabía cómo iba a quedar la representación de círculo en la geometría del Taxista.

Figura 61

Solución de la Tarea 3 por María

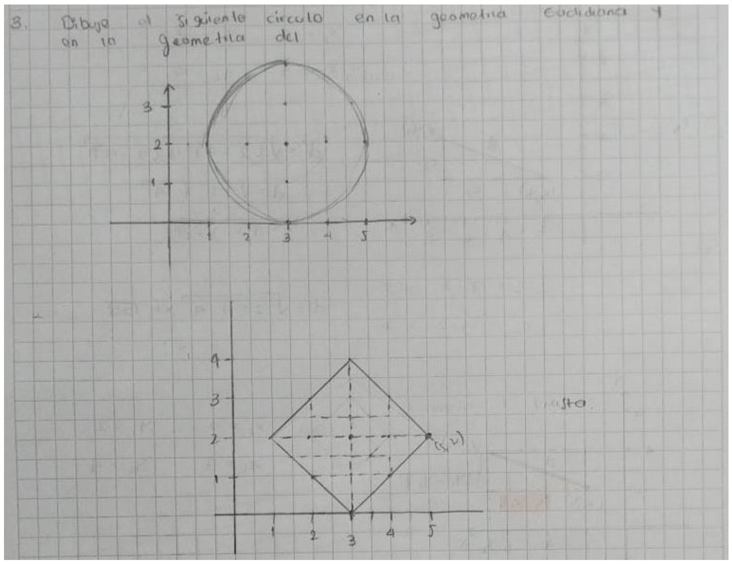
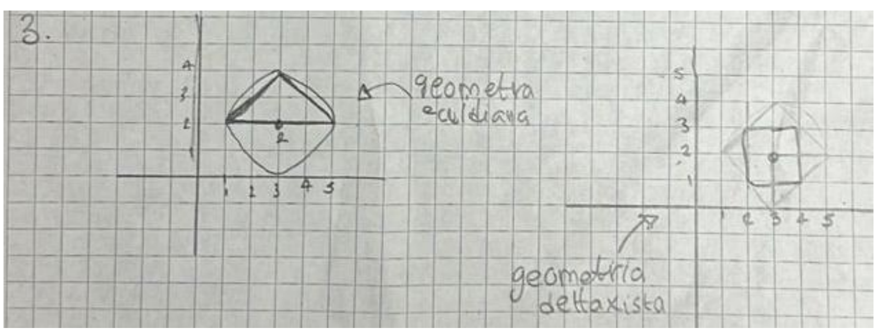


Figura 62

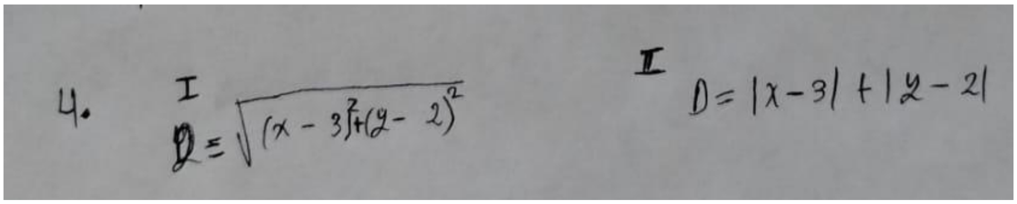
Solución de la Tarea 3 realizada por Camilo



En la tarea 4, se logra evidenciar que hay una concepción Proceso. Respecto a Jaime, reconoció que la ecuación de distancia es la misma que la ecuación de un círculo, relacionando el concepto de distancia con el radio y utilizando el punto $(3,2)$ como centro de cualquier circulo de radio D. Al reconocer que la definición de circulo es la misma en ambas geometrías, concluye que la ecuación de distancia en la geometría del Taxista, es la misma ecuación de círculo.

Figura 63

Respuesta de la Tarea 4 por parte de Jaime

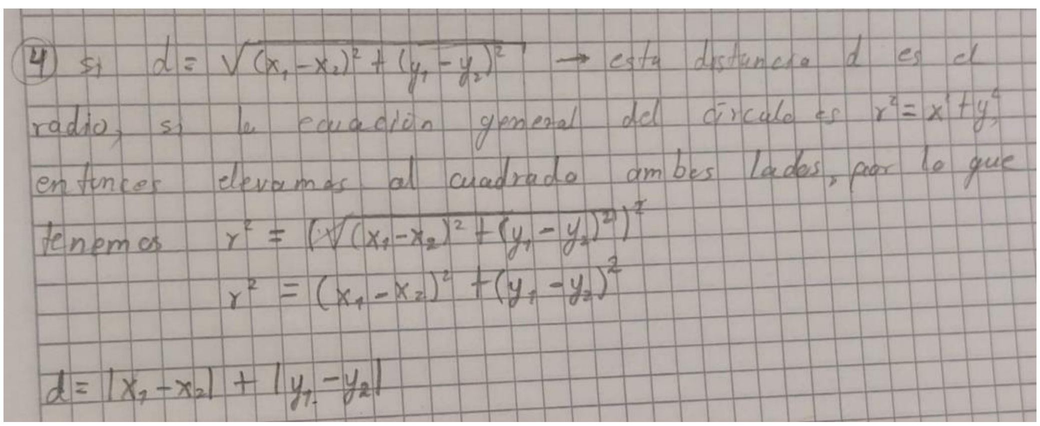


4. I $D=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$ II $D=|x-3|+|y-2|$

De manera similar, Carlos reconoció que la ecuación de distancia es la misma ecuación de círculo en ambas geometrías.

Figura 64

Respuesta de la Tarea 4 por parte de Carlos



4) si $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ → esta distancia d es el radio, si la ecuación general del círculo es $r^2=x^2+y^2$, entonces elevamos al cuadrado ambos lados, por lo que tenemos $r^2=\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)^2$

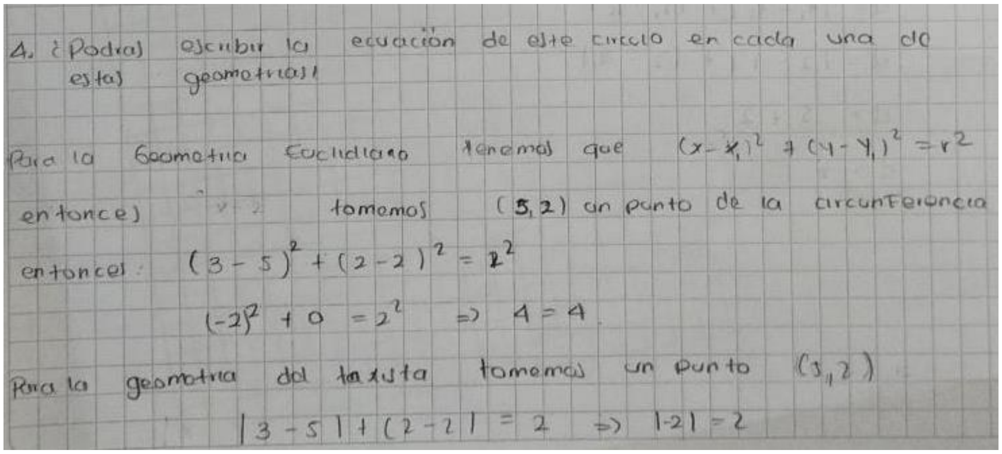
$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$d=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

En el caso de María se ve una concepción Proceso, a pesar de que realiza un reemplazo en ambas ecuaciones, ella explica que las ecuaciones de la distancia en ambas geometrías son las mismas ecuaciones de círculo, por ende, utiliza otros dos puntos y los reemplaza en las ecuaciones.

Figura 65

Respuesta de la Tarea 4 por parte de María



4. ¿Podrías escribir la ecuación de este círculo en cada una de estas geometrías?

Para la Geometría Euclidiana tenemos que $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$

entonces tomemos $(5,2)$ un punto de la circunferencia

entonces: $(3-5)^2 + (2-2)^2 = 2^2$

$(-2)^2 + 0 = 2^2 \Rightarrow 4 = 4$

Para la geometría del taxista tomemos un punto $(5,2)$

$|3-5| + |2-2| = 2 \Rightarrow |-2| = 2$

Respecto a Camilo, de manera verbal expresa que la ecuación de Distancia es la misma que de Círculo en ambas geometrías, pero en el momento de expresarlo de manera escrita no se entiende lo que está manifestando oralmente.

Camilo: "si no estoy mal, es lo mismo"

Entrevistador: "¿qué cosa?"

Camilo: "La fórmula de arriba con la ecuación de círculo"

Entrevistador: "en la geometría Euclidiana es cierto, ¿será que en la geometría del Taxista también?"

Camilo: "Sí, porque es la fórmula de la distancia y la distancia de un círculo se relaciona con el radio"

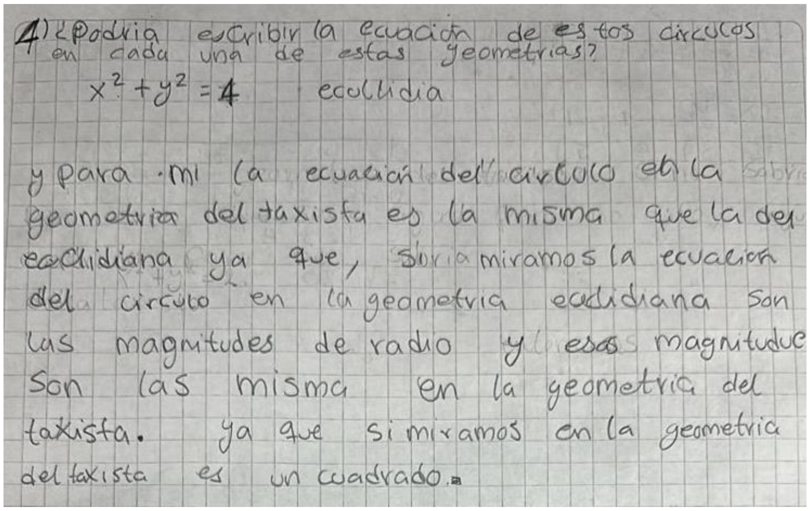
Entrevistador: "muy bien, ahora trate de escribir eso"

Camilo: "Es que no sé cómo…"

Lo que se interpreta o lo que quería decir Camilo es que, la ecuación de distancia es la misma que la ecuación del círculo puesto que, el radio funciona como la distancia entre los puntos que están en el círculo y que equidistan del centro y que esto, funciona en ambas métricas.

Figura 66

Respuesta de la Tarea 4 por parte de Camilo



4) ¿Podria escribir la ecuación de estos circulos en cada una de estas geometrias?

$x^2+y^2=4$ ecullidia

y para mi la ecuación del circulo en la geometria del taxista es la misma que la de euclidiana ya que, si miramos la ecuación del circulo en la geometria euclidiana son las magnitudes de radio y esas magnitudes son las misma en la geometria del taxista. ya que si miramos en la geometria del taxista es un cuadrado.

6. Conclusiones

El objetivo del presente trabajo es analizar la comprensión que pueden desarrollar del concepto de círculo estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública de Colombia. En particular, cuando exploran la construcción de dicho concepto en la geometría Euclidiana y en la geometría del Taxista fundamentados en el concepto de distancia. Por tal motivo se realiza un taller en el que se presenta la métrica del Taxista y el concepto de distancia en ambas geometrías y una entrevista donde se busca conocer las concepciones que tienen los estudiantes sobre el círculo. A continuación, se presenta un análisis de la información suministrada en los instrumentos de recolección de datos, clasificando cada una de las concepciones que los estudiantes demostraron al trabajar métricas distintas.

Concepción Acción de distancia: En el Taller y en la Entrevista, se destaca que todos los estudiantes presentan una concepción Acción al tener una ecuación y realizar su representación numérica y geométrica, ya sea en la geometría Euclidiana o en la geometría del Taxista. Dada la ecuación de distancia en ambas geometrías los estudiantes toman datos arbitrarios y realizan la representación geométrica de cada resultado. De igual manera, al tener que realizar trazos y encontrar distancias entre dos puntos, tres de los cuatro estudiantes realizan esta tarea a pesar de que las métricas eran diferentes.

Concepción Proceso de distancia: Al conocer la nueva métrica y al realizar nuevos trazos o encontrar la distancia entre dos puntos geométricamente, los estudiantes tuvieron dificultades como por ejemplo en la tarea 2 del Taller, encontrar todas las posibles rutas desde $R1$. Dos estudiantes tenían una idea u opción para encontrar todos los posibles caminos a pesar de que no tenían conocimiento de las herramientas matemáticas que podrían ayudar a realizar dicho conteo. En cambio, los otros dos se limitaron a realizar trazos en la cuadricula, es decir no reflexionaron sobre lo que realizaron seguían en una *concepción Acción.*

Concepción Objeto de distancia: En este caso los estudiantes mostraron una fuerte relación con las variables puesto que, dada la gráfica y los datos, pudieron llegar a una ecuación general, escrita o expresada de diferentes maneras pero que llegaba a lo mismo.

Concepción Acción de círculo: Todos los estudiantes presentan una concepción Acción al tener una ecuación y realizar su representación numérica y geométrica, ya sea en la geometría Euclidiana o en la geometría del Taxista. Dada la ecuación de distancia en ambas geometrías los estudiantes tomaron datos arbitrarios y realizaron la representación geométrica de cada resultado. De igual manera, al tener la ecuación de círculo, dado un punto y un radio, los estudiantes pudieron realizar la representación geométrica.

Concepción Proceso de círculo: Los estudiantes no demostraron una concepción clara de círculo, puesto que en la tarea 2, a dos de los estudiantes les costó decidir si la definición de círculo se cumplía en ambas geometrías. También a uno de ellos se le hizo difícil realizar la tarea 3, no tenía claridad sobre la representación que estaba realizando. Al final, tres de ellos concluyen que la ecuación de distancia es la misma ecuación de círculo y que esto se aplica a ambas geometrías.

Por ende, se puede decir que los estudiantes al utilizar representaciones algebraicas llegaron a una *concepción Objeto* al realizar el Taller, en cambio al utilizar representaciones geométricas solo una parte logró demostrar una *concepción Proceso* tanto en el Taller como en la Entrevista.

Los estudiantes a pesar de tener una concepción de distancia y de círculo, no la comprenden a profundidad, puesto que se les hace difícil realizar diferentes representaciones geométricas o ver algo más allá de una representación, también al dudar de que la definición de círculo no se pueda cumplir en otro tipo de métrica da a entender la falta de conocimiento que tienen los estudiantes en otras áreas donde se utilizan geometrías no Euclidianas. La geometría del Taxista, la geometría Fractal, geometría Diferencial, geometría Riemanniana y la geometría Elíptica son campos en los que se puede potenciar y desarrollar por completo conceptos Euclidianos. Por ende, deberían ser cursos que estén relacionados con la carrera de Licenciatura en Matemáticas desde los primeros semestres. Al tener el mismo objeto matemático visto desde diferentes ángulos, la concepción de dicho objeto será más fuerte y tendrá un desarrollo positivo en las estructuras mentales que construyen los estudiantes.

Los principales resultados de esta investigación pueden señalar cómo el estudio de otra geometría diferente a la Euclidiana, fomenta la comprensión y por tanto la reflexión sobre objetos fundamentales de la geometría. Es importante seguir por esta línea, no solo con los conceptos de distancia y de círculo, también conceptos como lo son la recta; triangulo; congruencia; cuadrado y como estos pueden ser estudiados desde la geometría del Taxista. Por ende, es importante seguir desarrollando descomposiciones genéticas de todos los objetos geométricos teniendo en cuenta su representación algebraica y geométrica y si es posible, llegar a un *Esquema* de dichos objetos geométricos y como estos se relacionan desde el axioma más sencillo hasta el teorema más complejo.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II* 6, 1–32. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1–32).

Barbosa, R y Queiroz, J (2020). Construindo o círculo na Geometria do taxi: uma proposta de insubordinação criativa. Building the circle in taxicab Geometry: a creative insubordination proposal. *REnCiMa*, 11(3), 450-464.

Bonilla, Parraguez y Solanilla (2013). Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. 7, 666-673. ISSN 2301-0797.

Bonilla, Parraguez & Solanilla (2014). Al fin de cuentas, ¿qué es una recta en la Geometría del Taxista? *Revista Tumbaga*, 2(10), 53-68. ISSN 1909-4841.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking (*pp. 95–123). Kluwer.

Clemens, O´Daffer & Cooney. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* México. ISBN 968 444 306 4.

Cortada, A. (2022). La geometría taxicab: un mundo donde los círculos son cuadrados. *TEMat*, 6, 1-15. ISSN: 2530-9633. https://temat.es/articulo/2022-p1.

Kemp, A (2018). *Generalizing and Transferring Mathematical Definitions from Euclidean to Taxicab Geometry* (Tesis de doctorado). Georgia State University doi: https://doi.org/10.57709/12521263.

Kemp, A., & Vidakovic, D. (2022). Students´ understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 112(3), 567–588. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-022- 10180-2.

Kindle, J. (2007). *Geometría Analítica*. Editorial EUNED. https://books.google.es/books?id=pIMxSZN3fskC.

Lehmann, C. (1985). *Geometría Analítica.* Editorial Limusa. ISBN: 68-18-1176-3.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Enlace Editores Ltda.

Piaget, J. & García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. & Vidakovic, D. (2008). A search for constructivist approach for understanding the uncountable set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93–125.

Pinto, J. (2015). *Geometria do Taxi – uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil.* XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.

Villabona, D., Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: Procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias,* 40(1), 179 –197.

https://doi.org/10.5565/rev/enscienciasmann

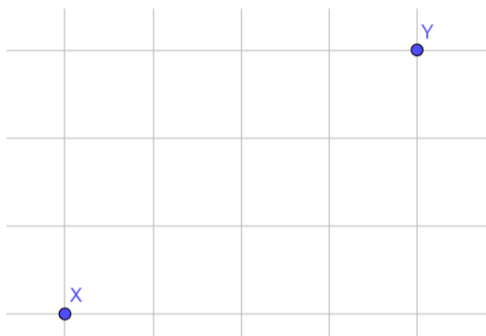
Apéndices

Apéndice A. Taller sobre la distancia y la métrica del Taxista

1. Dada la siguiente cuadricula y los puntos X y Y (ver imagen 1).

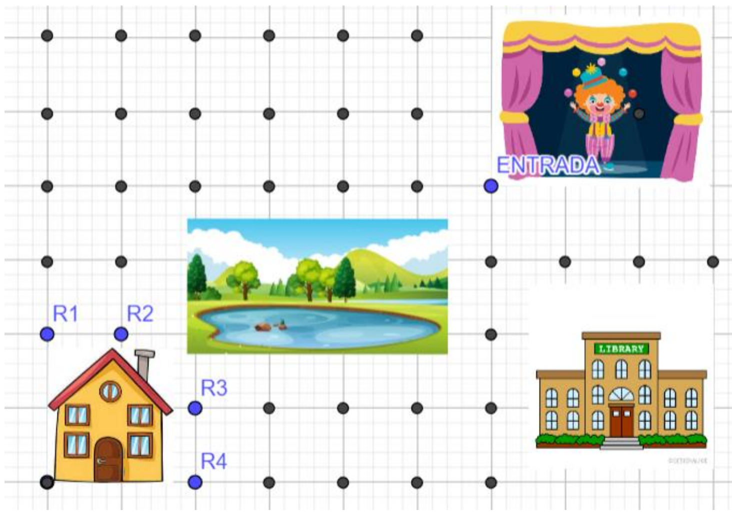
   c. Traza la forma en que llegarías del punto X al punto Y .

   d. ¿Hay otras formas de llegar del punto X al punto Y? ¿cuáles? represéntalas en la cuadricula.



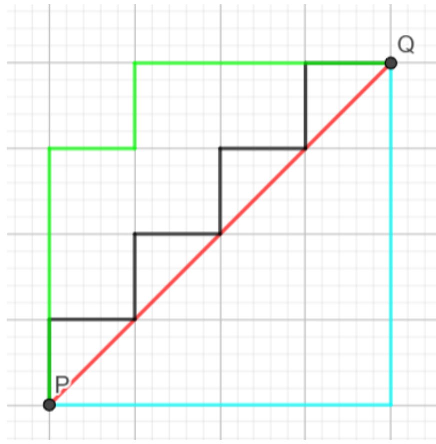
La Geometría del Taxista nace de la necesidad de solucionar problemas cotidianos de desplazamiento en una ciudad o lugar en el cual no es posible establecer la distancia directa entre dos puntos. Un ejemplo de esto es llegar de un punto a otro en una ciudad. No es posible desplazarse sobre los diferentes elementos que componen una calle, necesariamente el desplazamiento debe realizarse sobre aquellos espacios disponibles para realizar la movilidad. Ejemplo: Para trasladarse de la vivienda personal (punto X) universidad (punto Y), es posible definir diferentes rutas que pueden estar determinadas por el tipo de desplazamiento: caminando, carro, particular, transporte público o bicicleta.

2. Considere la siguiente situación. Vas tarde para la función del circo más importante del país y tienes que optar por algún punto de partida: $(R1, R2, R3, R4)$; tal como se muestra a continuación (imagen 2). Suponiendo que la distancia que hay entre los puntos negros y azules que aparecen en la imagen es de 100 m.



   a. ¿Cuál es la ruta más corta para llegar a la entrada del circo? Traza el recorrido en la imagen.
   b. ¿Cuántas rutas puedes definir si partes de $R1$?
   c. La cantidad de rutas que encontraste para $R1$ puede ser igual para alguna de las otras tres $R2, R3, R4$?

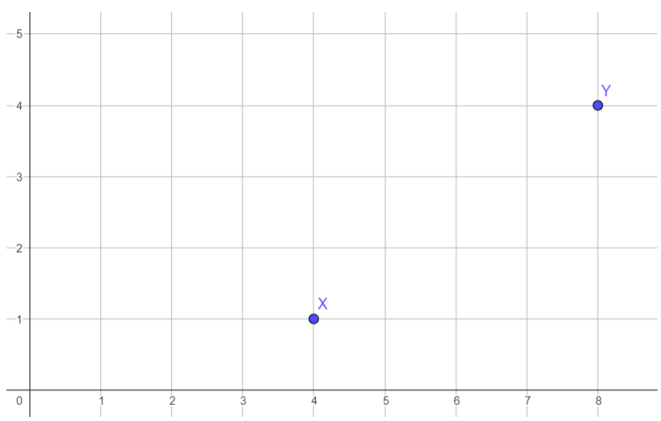
Como se mencionaba anteriormente, la Geometría del Taxista nace de la necesidad de solucionar problemas cotidianos de desplazamiento en una ciudad o lugar en el cual no es posible establecer la distancia directa entre dos puntos.



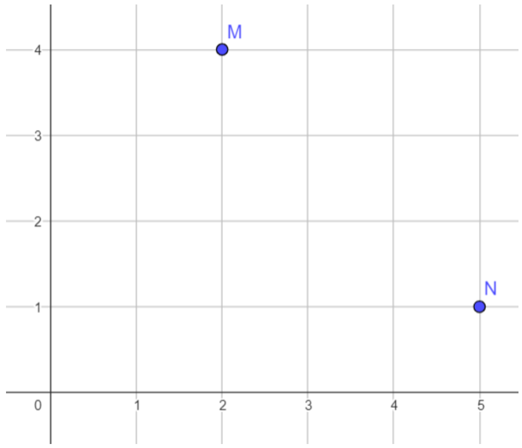
El segmento rojo representa la distancia entre los puntos P y Q en la Geometría Euclidiana. Los segmentos azules representan la distancia entre los puntos P y Q en la Geometría del Taxista. En el mismo orden de ideas, los segmentos verdes y azules representan la misma distancia de los segmentos azules en la Geometría del Taxista.

3. Teniendo en cuenta lo anterior ¿cuánto mide la distancia que hay entre los diferentes puntos utilizando el razonamiento de medición de la Geometría del Taxista?

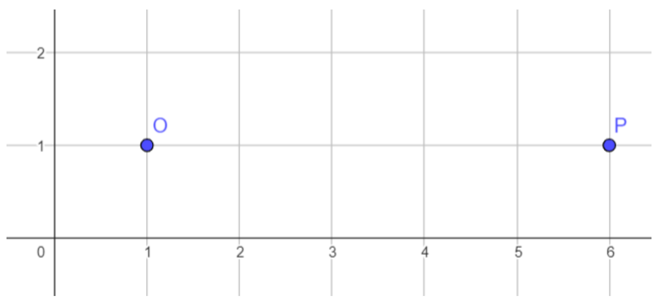
   a.



   b.

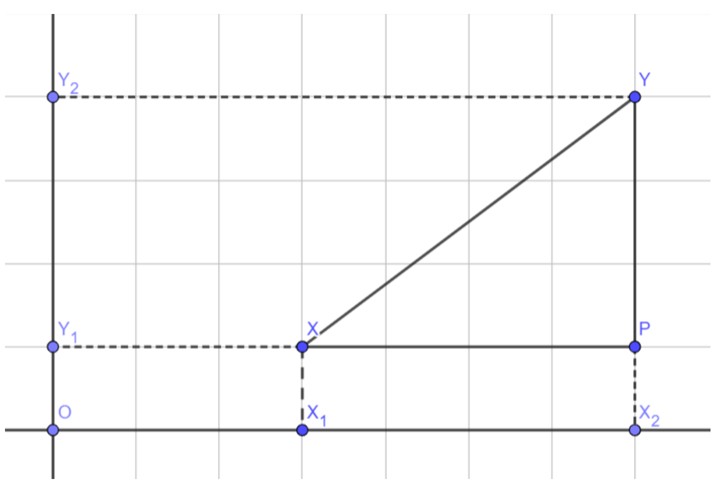


c.



d. ¿Qué puedes resaltar de cada uno de los anteriores ejercicios?

4. Dada la siguiente representación, generaliza y encuentra una fórmula para la distancia entre dos puntos utilizando la Geometría del Taxista



Apéndice B. Entrevista sobre círculo en la métrica del Taxista

1. Dadas las fórmulas para la distancia en ambas geometrías, ilustre cada una de estas dos distancias. Sea lo más detallado posible al etiquetar cada uno de ellos.

Dados los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se tienen las siguientes fórmulas

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

2. ¿Es verdadera la siguiente definición en ambas geometrías? "El círculo es un conjunto de puntos en el plano equidistantes de un punto fijo”. Explica tu respuesta
3. Dibuje el siguiente círculo en la geometría Euclidiana y la geometría del Taxista: Un círculo con centro en $C(3,2)$ y radio $r = 2$.
4. ¿Podrías escribir la ecuación de este círculo en cada uno de estas geometrías?