LOS NÚMEROS DE STIRLING Y EL OPERADOR zD

SEBASTIÁN CABAS AVENDAÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

LOS NÚMEROS DE STIRLING Y EL OPERADOR zD

SEBASTIÁN CABAS AVENDAÑO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Michael Rincón Villamizar
Doctorado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primordialmente a mis padres Loren y Samuel, y a mi hermana Salomé, por su apoyo y fé en mí desde el momento en que ingresé a la universidad. También quisiera expresarle mi gratitud a mi orientador Michael por su paciencia, esfuerzo y orientación para este trabajo. Por último, a mis compañeros y amigos con los que he estado aprendiendo durante toda la carrera, y compartí momentos inolvidables.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

TÍTULO: LOS NÚMEROS DE STIRLING Y EL OPERADOR zD [*]

AUTOR: SEBASTIÁN CABAS AVENDAÑO [**]

PALABRAS CLAVE: NÚMEROS DE STIRLING, POLINOMIOS EXPONENCIALES & EL OPERADOR zD .

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo abarca los números de Stirling y su aparición en los polinomios exponenciales, tambien conocidos como polinomios de Bell. Dichos números fueron introducidos por el Matemático escocés James Stirling en el siglo XVIII, y presentan un papel fundamental en Combinatoria.

Los números de Stirling de primera clase (comunmente denotados por $\left[{n \atop k}\right]$) representan el número de permutaciones de S_n que se pueden descomponer como producto de k ciclos disjuntos, y aparacen como coeficientes del $n-$ésimo polinomio factorial ascendente $z^{\overline{n}}$. Por otro lado, los números de Stirling de segunda clase ($\left\{{n \atop k}\right\}$) abarcan el número de particiones de un conjunto de n elementos en k conjuntos, y aparecen como coeficientes en los llamados polinomios exponenciales, que son estudiados en el actual trabajo, inducidos por el operador zD.

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero abarcamos los conceptos necesarios para el desarrollo teórico del tema presente. Para el segundo capítulo, definimos los números de Stirling de primera y segunda clase, y mostramos algunas de sus propiedades, haciendo énfasis en su relación con los números de Bernoulli. De igual manera, introducimos los polinomios de Bell. En el tercer y último capítulo mostramos las propiedades del operador zD y su relación con los números de Stirling. Análogamente, introducimos el operador $z^{\alpha}D$ generalizando los resultados del operador anterior.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Rincón Villamizar, Doctorado en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: STIRLING NUMBERS AND THE OPERATOR zD *

AUTHOR: SEBASTIÁN CABAS AVENDAÑO **

KEYWORDS: STIRLING NUMBERS, EXPONENTIAL POLYNOMIALS & THE OPERATOR zD .

DESCRIPTION:

This work encompasses the Stirling numbers and their appearance on the exponential polynomials, also known as Bell polynomials. These numbers were introduced by the Scottish mathematician James Stirling in the 18th century, and they play an important role in Combinatorial Analysis.

Stirling numbers of the first kind (frequently denoted by $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$) represent the number of permutations in S_n that can be decomposed as product of k disjoint cycles. On the other hand, Stirling numbers of the second kind ($\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$) count the number of ways to partition a set of n objects into k non-empty subsets and appear as coefficients in the named exponential polynomials, which they are studied in the current document, induced by the operator zD.

The document consists of three chapters. In the first one, we include the required concepts for the theoretical development of the present topic. For the second chapter, we define the Stirling numbers of the first and second kind, and we show some properties about them,emphasizing on their relation with the Bernoulli numbers. In the same way, we introduce the Bell polynomials. In the third and last chapter, we show show the properties of the operator zD and its relation with the Stirling numbers. Similarly, we introduce the operator $z^\alpha D$ generalizing the results of the previous operator.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Rincón Villamizar, Doctorado en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Los números de Stirling fueron introducidos y popularizados por el matemático escocés James Stirling en el siglo XVIII. Estos números aparecen en diversos problemas de la Matemática: en Combinatoria, al igual que el coeficiente binomial, permiten hacer un conteo particular, en este caso de ciclos (números de Stirling de primera clase) y particiones (números de Stirling de segunda clase) [1]. Aunque estos números no tienen una notación estándar, aquí usaremos las notaciones

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix},$$

para designar a los números de Stirling de primera y segunda clase, respectivamente.

En Análisis, los números de Stirling tienen conexión con los **números de Bernoulli** B_n, introducidos por el matemático Jacob Bernoulli [2]. Una detallada lista de propiedades de los números de Stirlging puede ser encontrada en [3].

En [4], L. Carlitz estudió una sucesión de polinomios llamados eventualmente **polinomios de Bell** o **polinomios exponenciales**. Los polinomios de Bell fueron estudiados

---

[1] J. RIORDAN. *Combinatorial Indentities*. John Wiley & Sons, 1969.

[2] IBUKIYAMA T. & KANEKO M. ARAKAWA T. *Bernoulli numbers and zeta functions*. Springer Monographs in Mathematics, 2014.

[3] KNUTH D.E. & PATASHNIK O. GRAHAM R. L. *Concrete mathematics. A foundatiin for computer science*. 2.ª ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[4] L. CARLITZ. *Single variable Bell polynomials*. Vol. 14. Collectanea Mathematic, 1970.

más sistemáticamente por S. Ramanujan en sus notas no publicadas (ver [5]). El trabajo de Ramanujan fue presentado y discutido por algunos matemáticos en el siglo XX, entre ellos E. T. Bell [6], por el cual se les bautizó con dicho nombre. Estos polinomios aparecen de manera natural en el estudio de las iteraciones del operador $x\dfrac{d}{dx}$ conocido como el operador **derivada de Mellin** [7]. En [8], Grunert estableció el siguiente resultado el cual da una relación entre la n-ésima iteración del operador $x\dfrac{d}{dx}$ y los números de Stirling de segunda clase:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n (f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k f^{(k)}(x),$$

donde f es una función con derivadas hasta de orden n. En particular si $f(x) = \exp(x)$, entonces

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n (\exp(x)) = P_n(x)\exp(x),$$

donde $P_n(x)$ denota el $n-$ésimo polinomio de Bell:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k.$$

El número $P_n(1)$ es conocido como el **número de Bell** y se denota por b_n. Este nú-

---

[5] B.C. BERNDT. *Ramanoujan’s Notebooks*. Springer, 1985.

[6] E.T. BELL. “Exponential polynomials”. En: *Annals of Mathematics* 35 (1934).

[7] KILBANS A.A. & TRUJILLO J.J. BUTZER P.L. “Fractional calcucus i the Mellin setting and Hadamard type fractional integrals”. En: 270 (2002).

[8] J.A. GRUNERT. *Uber die Summerung der Reihen ...* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1843.

mero cuenta el número de partiones (relaciones de equivalencia) de un conjunto de n elementos. Por otra parte, en [2] se demuestra que el $n-$ésimo número de Bernoulli viene dado por

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

En 2009, Khristo Boyadzhiev en [9] estableció un resultado que relaciona los polinomios del Bell y los números de Bernoulli:

$$\int_0^\infty P_n(-x) P_m(-x) \exp(-2x) \frac{dx}{x} = (-1)^{n-1} \frac{2^{n+m}-1}{n+m} B_{n+m}.$$

El objetivo de este trabajo es estudiar los números de Stirling (de primera y segunda clase) y algunas de sus propiedades. Daremos pruebas de los resultados enunciados aquí y estudiaremos las consecuencias de estos. El trabajo será basado en el artículo del profesor Boyadzhiev (ver [9]). Adicionalmente, con base en el trabajo del profesor Boyadzhiev, abordaremos el problema de encontrar propiedades del operador $z^\alpha \dfrac{d}{dz}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Resaltando que el trabajo consta de tres capítulos, en el primero abarcamos los conceptos necesarios para el desarrollo teórico del tema presente, es decir, definiciones y teoremas indispensables para el estudio de los números de Stirling y los polinomios exponenciales.

Para el segundo capítulo, definimos los números de Stirling de primera y segunda clase, y mostramos algunas de sus propiedades, haciendo énfasis en su relación con los

---

[9] K.N. BOYADZHIEV. “Exponential polynomials, Stirling numbers and evaluation of some gamma integrals”. En: (2009).

números de Bernoulli. De igual manera, introducimos los polinomios de Bell. Para finalizar, en el tercer capítulo mostramos las propiedades del operador $z\frac{d}{dz}$ y su relación con los números de Stirling. Análogamente, introducimos el operador $z^{\alpha}\frac{d}{dz}$ generalizando los resultados del operador anterior.

1. OBJETIVOS

Objetivo general

- Estudiar los números de Stirling y el operador zd/dz.

Objetivos específicos

- Estudiar algunas propiedades de los números de Stirling de primera y segunda clase; dar pruebas de los resultados enunciados;
- Estudiar algunas propiedades de los operadores zd/dz y $z^{\alpha}d/dz$;
- Estudiar propiedades de los números $s(n, k; \alpha)$.

2. PRELIMINARES

En este capítulo enunciaremos definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo, lo cuales hemos tomado de [10][11][12][13].

2.1. SERIES

Definición 2.1. Una sucesión doble de números complejos es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$. Si f es una sucesión doble, la sucesión doble definida por medio de la ecuación

$$s(p,q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m,n), \quad p,q \in \mathbb{N},$$

es llamada serie doble y se designa por medio del símbolo $\sum_{m,n} f(m,n)$. Diremos que la serie doble $\sum_{m,n} f(m,n)$ es convergente al valor a si

$$\lim_{p,q\to\infty} s(p,q) = a.$$

Finalmente, diremos que $\sum_{m,n} f(m,n)$ converge absolutamente si $\sum_{m,n} |f(m,n)|$ converge.

El siguiente resultado nos da un criterio para la convergencia absoluta de una serie

[10] T.M. APOSTOL. *Mathematical Analhysis*. 2.ª ed. Adisson-Wesley Publishing Company, 1974.

[11] J.B. CONWAY. *Functiond of comple variable*. 2.ª ed. Springer-Verlag, 1978.

[12] A. LINS NETO. *Funções de uma variável complexa*. 2.ª ed. Projeto Euclides, 2016.

[13] R. REMMERT. *Theory of complex functions*. 2.ª ed. Springer-Verlag, 1991.

doble.

Proposición 2.2. *Sea* $\sum_{m,n} f(m,n)$ *una serie doble. Si* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|f(m,n)|$ *es convergente, entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(m,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m,n) = \sum_{m,n} f(m,n).$$

Demostración. Ver [10]. □

Como consecuencia de este resultado obtenemos:

Corolario 2.3. *Sean* $\sum a_m$ *y* $\sum b_n$ *dos series absolutamente convergentes de sumas* A *y* B, *respectivamente. Sea* f *la sucesión doble definida por la ecuación*

$$f(m,n) = a_m b_n, \quad \textit{si } m,n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\sum_{m,n} f(m,n)$ *converge absolutamente y tiene suma* $AB.$

Definición 2.4. Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{C}$. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

se llama una serie de potencias centrada en z_0.

El siguiente resultado caracteriza el conjunto de puntos del plano complejo donde una serie de potencias es convergente. Para una prueba de este, ver Teoremas 4 y 6, capítulo 2 [12].

Teorema 2.5 (Teorema de Abel)**.** *Dada una serie de potencias* $\sum c_n(z-a)^n$, *existe* $R \in [0,\infty]$ *tal que:*

(a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *es absolutamente convergente si* $|z-a| < R$. *Más aún, la convergencia es uniforme en cada bola cerrada* $B[a,r]$, *con* $0 < r < R$.

(b) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *es divergente si* $|z-a| > R$.

Definición 2.6. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f\colon U \to \mathbb{C}$. Diremos que f es holomorfa en U si dado $a \in U$, el límite

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

existe. En tal caso, tal límite es llamado derivada de f en a y se denota por $f'(a)$. El conjunto de funciones holomorfas en U se denota por $\mathcal{H}(U)$.

Teorema 2.7. *Supongamos que la serie* $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ *converge para cada* $z \in B(z_0,R)$. *Entonces la función* f *definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \textit{para } z \in B(z_0,R),$$

es holomorfa en $B(z_0,R)$ *y su derivada* $f'(z)$ *esta dada por*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \textit{para todo } z \in B(z_0,R).$$

Demostración. Ver Teorema 9.23 [10]. □

Observación 2.8. Un resultado clásico del análisis complejo establece que una función f es holomorfa en un abierto U si, y solo si, f admite desarrollo en serie de potencias en U, esto es, dado $a \in U$ existen una sucesión (c_n) en $\mathbb{C}$ y $R > 0$ tales que $B(a,R) \subset U$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ para cada $z \in B(a,R)$.

A continuación enunciamos dos consecuencias del teorema anterior las cuales serán clave en muchas de las pruebas de este trabajo.

Corolario 2.9. *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *para cada* $z \in B(z_0, R)$*, entonces*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Corolario 2.10 (Principio de identidad)**.** *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*,* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *dos series de potencias de respectivos radios de convergencia* $R_1, R_2 > 0$*. Supongamos que existe* $0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$ *tal que* $f(z) = g(z)$ *para cada* $z \in B(z_0, \delta)$*. Entonces* $a_n = b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definición 2.11. Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, el coeficiente binomial es definido por

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}.$$

Por convención, $\binom{\lambda}{0} := 1.$

Proposición 2.12. *Si* $z, \lambda \in \mathbb{C}$ *y* $|z| < 1$*, entonces*

$$(1+z)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n.$$

Demostración. Vease página 122 [12]. □

Teorema 2.13. *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*,* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *dos series de potencias de respectivos radios de convergencia* $R_1, R_2 > 0$*. Entonces*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad \textit{para cada } z \in B(z_0, r),$$

donde $r < \min\{R_1, R_2\}$ *y* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$*, para todo* $n \geq 0.$

Demostración. Ver Teorema 9.24 [10]. $\square$

Para finalizar esta sección enunciamos dos resultados sobre convergencia uniforme de series de funciones. Una prueba de estos puede ser consultada en Teorema 9.9 [10] y página 249 [13], respectivamente.

Proposición 2.14. *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones reales y complejas Riemann-integrables en* $[a, b]$*. Supongamos que* $\sum f_n = f$ *uniformemente en* $[a, b]$*. Entonces:*

1. f *es Riemann-integrable en* $[a, b]$;
2. $\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$ *uniformemente en* $[a, b]$*.*

Teorema 2.15 (Teorema de Weierstrass para series de funciones holomorfas)**.** *Sean* $U \subset \mathbb{C}$ *abierto y* (f_n) *una sucesión de funciones en* $\mathcal{H}(U)$ *tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{uniformemente sobre los subconjuntos compactos de } U.$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(U)$ *y para cada* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \quad \text{uniformemente sobre los subconjuntos compactos de } U.$$

2.2. NÚMEROS DE BERNOULLI B_k^* Y B_k

Los números de Bernoulli son ciertos números racionales que aparecen en varios contextos de la Teoría de números, Combinatoria y Análisis. En su obra *Ars Conjectandi*

[14] publicada en 1713, Jacob Bernoulli introdujo estos números en conexión con el estudio de las sumas de potencias de enteros consecutivos $1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Después de observar las fórmulas para las sumas de potencias

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \; \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \ldots$$

hasta $k = 10$, Bernoulli da una fórmula general introduciendo la sucesión que actualmente se conoce como números de Bernoulli y explica cómo tales números son determinados inductivamente; también enfatiza en cómo su fórmula es usada para calcular suma de potencias.

Para poder definir los números de Bernoulli, primero debemos definir ciertos polinomios que nos ayudarán a comprender mejor de dónde se obtienen dichos números. Denotamos por $S_k(n)$ la suma de las $k-$ésimas potencias de los números naturales hasta n, esto es,

$$S_k(n) := \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k. \tag{1}$$

Note que $S_0(n) = n$, $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, y $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

A continuación mostramos una fórmula recurrencia para calcular $S_k(n)$. Por el Teorema del Binomio tenemos que

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} m^i.$$

[14] J. BERNOULLI. *Ars Conjectandi, in Werke*. Vol. 4. Birkhauser, 1975, págs. 107-286.

Sumando desde $m = 1, 2, \ldots, n$ en la ecuación anterior se obtiene:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} S_i(n).$$

De esta manera vemos que la sucesión $(S_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la fórmula de recurrencia:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i(n)\right).$$

Expresado de esta forma, por inducción sobre k se puede mostrar que $S_k(n)$ es un polinomio de variable n de grado $k+1$. La ecuación previa permite definir la sucesión de polinomios $(S_k(z))_{k\in\mathbb{N}}$ de forma recursiva como sigue: $S_0(z) = z$ y si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$S_k(z) = \frac{1}{k+1}\left((z+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i(z)\right). \tag{2}$$

A partir de esta definición recursiva encontramos que:

$$\begin{aligned}
S_0(z) &= z;\\
S_1(z) &= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z;\\
S_2(z) &= \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z;\\
S_3(z) &= \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2.
\end{aligned}$$

Por inducción puede mostrarse que $S_k(0) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definición 2.16. El **k-ésimo número de Bernoulli** B_k^* es el coeficiente de z en el polinomio $S_k(z)$ si $k \geq 1$. En otras palabras, $B_k^* = S_k'(0)$. Por convención $B_0 = 1$.

A continuación mostramos los valores de B_k^* cuando $k = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} B_1^* &= \frac{1}{2}, & B_2^* &= \frac{1}{6}, & B_3^* &= 0, \\ B_4^* &= -\frac{1}{30}, & B_5^* &= 0, & B_6^* &= \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Probaremos algunas propiedades de estos números.

Proposición 2.17. *Para todo entero $k \geq 0$ se tiene que*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i^* = k+1.$$

Demostración. Derivando en la ecuación (2) obtenemos

$$S_k'(z) = \frac{1}{k+1}\left((k+1)(z+1)^k - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i'(z)\right).$$

Luego si $z = 0$, entonces

$$B_k^* = S_k'(0) = 1 - \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} B_i^*.$$

De lo anterior se deduce el resultado. □

Para la prueba del próximo teorema necesitaremos el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en página 218 [13]. Recordemos que si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $h \in \mathcal{H}(U)$, el conjunto zero de h, denotado por $Z(h)$, es por definición el conjunto $\{z \in U\ : h(z) = 0\}$.

Proposición 2.18. *Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $Z(f) \cap Z(g) \setminus \{0\} = \emptyset$. Sea $c \in Z(g) \setminus \{0\}$ tal que si $w \in Z(g) \setminus \{0\}$, entonces $|c| \leq |w|$. Si la función $h\colon B(0, |c|) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada* *por* $h(z) = f(z)/g(z)$, $z \in B(0,|c|) \setminus \{0\}$*, admite una extensión holomorfa al abierto* $B(0,|c|)$*, entonces el desarrollo en serie de potencias alrededor de 0 de la función* h *tiene radio de convergencia* $|c|$.

Teorema 2.19. *Si* $|z| < 2\pi$*, entonces*

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^* \frac{z^k}{k!}. \tag{3}$$

Demostración. Sean $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f(z) = ze^z$ y $g(z) = e^z - 1$. Claramente $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Note que $g(2\pi i) = 0$ y $g(z) \neq 0$ para cada $z \in B(0, 2\pi) \setminus \{0\}$. Ahora, la función $h\colon B(0,2\pi) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $h(z) = f(z)/g(z)$, $z \in B(0, 2\pi) \setminus \{0\}$, admite una extensión holomorfa al abierto $B(0, 2\pi)$. En efecto, tal extensión viene por $G(z) = \dfrac{ze^z}{e^z - 1}$, si $z \in B(0, 2\pi) \setminus \{0\}$ y $G(0) = 1$. Por la Proposición 2.18, el desarrollo en serie de potencias de la función G alrededor de 0 tiene radio de convergencia 2π. Así, por el Corolario 2.9 tenemos

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!}, \tag{4}$$

si $|z| < 2\pi$, donde $c_k = G^{(k)}(0)$. Observe que $(e^z - 1)G(z) = ze^z$ para cada $|z| < 2\pi$. Por otra parte, $e^z - 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}$, donde $a_0 = 0$ y $a_k = 1$ si $k \geq 1$. Sigue de la ecuación (4) y del Teorema 2.13 que

$$\begin{aligned}
ze^z &= (e^z - 1)G(z) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} c_m a_{k-m} \right) \frac{z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} c_m a_{k-m} \right) \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

siempre que $|z| < 2\pi$. La última suma en la ecuación anterior empieza en $k = 1$ puesto que $a_0 = 0$. Así

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} c_m a_{k+1-m} \right) \frac{z^k}{k!},$$

si $|z| < 2\pi$. Por el Corolario 2.10 concluimos que

$$\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} c_m a_{k+1-m} = 1 \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Por tanto,

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} c_m = k+1 \quad \text{siempre que } k \geq 0.$$

Como $c_0 = G(0) = 1 = B_0^*$, usando inducción y la Proposición 2.17 concluimos que $c_k = B_k^*$ para cada $k \geq 1$. Esto prueba el resultado. □

Definición 2.20. El k**-ésimo número de Bernoulli** B_k es por definición la k-ésima derivada de la función $\hat{G}(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, $z \in B(0, 2\pi) \setminus \{0\}$, y $\hat{G}(0) = 1$.

Observación 2.21. El teorema anterior implica que

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 2\pi.$$

Observe que como la función $g(z) = \hat{G}(z) + z/2$, $z \in B(0, 2\pi)$, es par, sigue que $B_1 = -1/2$ y $B_n = 0$ si $n \geq 3$ es impar.

Proposición 2.22. *Para* $k \geq 2$ *sea* $L_k = (2^k - 1)B_k/k$*. Si* $|z| < \pi/2$*, entonces*

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_k \frac{z^k}{k!} = \ln\Big(\cosh \frac{z}{2}\Big).$$

Demostración. Primero note que si $f(z) = \ln\big(\cosh \frac{z}{2}\big)$, entonces $f'(z) = \dfrac{1}{2}\tanh\dfrac{z}{2} = \coth z - \dfrac{1}{2}\coth\dfrac{z}{2}$ cuando $z \neq 0$, de modo que vamos a calcular inicialmente el desarrollo en serie de potencias de las función $\coth z$. Por la Observación 2.21 tenemos

$$\begin{aligned}
\coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} &= \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} \\
&= 1 + \frac{1}{z}\frac{2z}{e^{2z}-1} \\
&= 1 + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (2z)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n (2z)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (2z)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n} z^{2n-1}}{(2n)!},
\end{aligned} \tag{5}$$

siempre que $0 < |z| < \pi$. Ahora, teniendo en cuenta la identidad $\tanh z = 2\coth 2z - \coth z$, encontraremos el desarrollo en serie de potencias de la función $\tanh z$. Si $0 <$

$|z| < \frac{\pi}{2}$, por la ecuación (5) tenemos

$$\begin{aligned}\tanh z &= 2\coth 2z - \coth z\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}(2z)^{2n-1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Definamos $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} L_n \frac{z^n}{n!}$ para $|z| < \frac{\pi}{2}$. De la ecuación anterior y teniendo en cuenta la Observación 2.21 obtenemos

$$\begin{aligned}g'(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} L_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} L_{n+1} \frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{n+1}-1)B_{n+1}z^n}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!}\\ &= \frac{1}{2}\tanh\frac{z}{2}\\ &= f'(z).\end{aligned}$$

Como $f(0) = g(0) = 0$, concluimos que $f(z) = g(z)$ para todo $|z| < \frac{\pi}{2}$. $\square$

3. NÚMEROS DE STIRLING Y EL OPERADOR zd/dz

En este capítulo estudiamos los números de Stirling (de primera y segunda clase) y el operador zd/dz. También estudiaremos los polinomios exponenciales, una clase de polinomios que aparece de manera natural a partir de las iteraciones del operador zd/dz. Mostraremos propiedades de estos polinomios y su relación con los números de Stirling. Como resultado final del capítulo, daremos una prueba de una relación de ortogonalidad para los polinomios exponenciales la cual involucra los números de Bernoulli.

3.1. NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMERA CLASE

Si A es un conjunto, una biyección de A en A es llamada permutación. Si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto S_n denota el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Es bien conocido que S_n es un grupo junto con la operación de composición.

Definición 3.1. Supongamos que $n \geq 2$ y $2 \leq r \leq n$. Diremos que $\sigma \in S_n$ es un ciclo de longitud r si existe $J = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tales que

1. $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ si $1 \leq i \leq r-1$ y $\sigma(a_r) = a_1$;
2. $\sigma(m) = m$ para cada $m \in \{1, \ldots, n\} \setminus J.$

En tal caso, el ciclo σ se denotará por $\sigma = (a_1 \ldots a_r).$

Observación 3.2. Por convención, un ciclo de longitud 1 en una permutación $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un elemento $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(j) = j$.

Definición 3.3. Diremos que dos ciclos $\sigma = (\sigma_1 \ldots \sigma_r)$ y $w = (w_1 \ldots w_m)$ son disjuntos si para cada $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq m$ tenemos $\sigma_i \neq w_j.$

Proposición 3.4. *Sean $\sigma, \tau \in S_n$ dos ciclos disjuntos de longitud r y m respectivamente. Entonces ellos conmutan.*

Demostración. Debemos ver que $\sigma\tau(j) = \tau\sigma(j)$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si j no está en ninguno de los dos ciclos, entonces $\sigma(j) = \tau(j) = j$ y por tanto $\sigma\tau(j) = \tau\sigma(j) = j$. En caso de que j se encuentre en uno de los ciclos, supongamos que en σ, entonces j no puede estar en τ, por lo tanto $\tau(j) = j$. Note que para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $\sigma^i(j)$ no está en τ, pues en el caso contrario, $\sigma^{i+1}(j)$ también está, y como σ tiene longitud r, $\sigma^{i+l}(j) = j$ para algún $1 \leq l \leq r$, que afirmaría que j está en τ lo cual es absurdo. De este modo, $\sigma\tau(j) = \tau\sigma(j) = \sigma(j)$ y así σ y τ conmutan.

□

Teorema 3.5 (Descomposición en ciclos disjuntos)**.** *Toda permutación de S_n se puede descomponer en un producto de ciclos disjuntos. Esta descomposición es única, salvo el orden de los factores.*

Demostración. Sea $\sigma \in S_n$. Si σ es la función identidad, entonces σ puede ser escrita como producto de ciclos de longitud 1, a saber, $\sigma = (1)(2)\ldots(n)$. En el caso contrario, existe $k_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(k_1) \neq k_1$. Sea

$$i_1 = \min\{1 \leq j \leq n \,:\, \sigma^j(k_1) = k_1\}.$$

Entonces el ciclo $\rho_1 = (k_1 \; \sigma(k_1) \ldots \sigma^{i_1}(k_1))$ describe parte de la permutación σ, es decir $\rho_1(j) = \sigma(j)$ para todo $j \in \{k_1, \sigma(k_1), \ldots, \sigma^{i_1}(k_1)\}$. Si existe $k_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que k_2 no se encuentra dentro del ciclo ρ_1 y además $\sigma(k_2) \neq k_2$, entonces repetimos el argumento anterior definiendo un $\rho_2 = (k_2 \; \sigma(k_2) \ldots \sigma^{i_2}(k_2))$. Note que ρ_1 y ρ_2 son ciclos disjuntos. No es difícil ver que este proceso se puede realizar un número finito de veces, digamos p veces, y que $\sigma = \rho_1\rho_2\ldots\rho_p$.

Para probar la unicidad, supongamos que

$$\sigma = \rho_1\rho_2 \dots \rho_p = \tau_1\tau_2 \dots \tau_q$$

son dos descomposiciones de σ en producto de ciclos disjuntos. Sea a_1 un número que no permanece invariante por σ (es decir, $\sigma(a_1) \neq a_1$). Claramente a_1 debe estar en un y solo un ciclo ρ_i, y análogamente en un y solo un ciclo τ_j. Sin perdida de generalidad, por la conmutatividad se puede suponer que a_1 está en los ciclos ρ_1 y τ_1. Por la disjunción de los ciclos en cada descomposición, necesariamente el elemento a_1 se transforma en un elemento a_2 mediante ρ_1 y τ_1. Por la misma razón, a_2 debe transformarse en un mismo elemento a_3 mediante ρ_1 y τ_1. Este proceso se hace un número finito de veces y se concluye que $\rho_1 = \tau_1$. Repitiendo de manera conveniente este razonamiento, se deduce que $p = q$ y que los ciclos σ_i son iguales a los ρ_i. □

El resultado anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.6. Sean $n, k \in \mathbb{N}$. El **número de Stirling de primera clase** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ representa el número de elementos de S_n que se pueden descomponer como producto de k ciclos disjuntos.

Ejemplo 3.7. En $S_3 = \{(1)(2)(3), (1)(23), (12)(3), (132), (13)(2), (123)\}$ tenemos:

1. Permutaciones que se pueden escribir como producto de un ciclo: $(132), (123)$.

2. Permutaciones que se pueden escribir como producto de dos ciclos: $(1)(23), (12)(3), (13)(2)$.

3. Permutaciones que se pueden escribir como producto de tres ciclos: (1)(2)(3).

De lo anterior, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$, y $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$.

Como consecuencia de la definición de los números de Stirling de primera clase tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Para cada* $n, k \in \mathbb{N}$ *tenemos:*

1. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ *si* $k > n$*;*

2. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$*;*

3. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$*;*

4. $\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!.$

Demostración.

1. Claramente si $k > n$, es imposible encontrar una permutación de S_n que se pueda descomponer como producto de k ciclos disjuntos. Por lo tanto $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$.

2. La única permutación de S_n que se puede descomponer en n ciclos disjuntos es la identidad. Así, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1.$

3. Sea $\sigma \in S_n$ tal que σ se puede escribir como un solo ciclo, entonces es de la forma

$$\sigma = (a_1\ a_2 \ldots a_n).$$

   Sin perdida de generalidad, podemos supones que $a_1 = 1$, luego tenemos $n-1$ posiciones que podemos llenar con $n-1$ valores sin repetir y teniendo en cuenta el orden, esto es $(n-1)!$ posibles maneras. De este modo, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$.

4. Sea $X_k = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ se descompone en } k \text{ ciclos disjuntos}\}$, para cada $1 \leq k \leq n$. Por el Teorema 3.5 tenemos que $X_i \cap X_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y $S_n = \bigcup X_k$. Luego

$$n! = |X| = \left|\bigcup X_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |X_k| = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Proposición 3.9 (Fórmula de recurrencia I). *Los números de Stirling de primera clase satisfacen la fórmula de recurrencia*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

para cada $n, k \in \mathbb{N}$*, con* $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$*.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina el conjunto $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y consideremos todas las posibles permutaciones del conjunto A_{n+1}. Observemos que

$$S_{n+1} = \{\sigma \in S_n \,:\, \sigma(n+1) = n+1\} \cup \{\sigma \in S_n \,:\, \sigma(n+1) \neq n+1\}.$$

Sea $\sigma \in S_{n+1}$ una permutación que se descompone como producto k ciclos disjuntos y $\sigma(n+1) = n+1$. Note que $(n+1)$ es un ciclo de longitud 1. Luego si consideramos todas las $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ permutaciones en A_n, y a cada una le agregamos el ciclo unitario $(n+1)$, obtendremos todas las permutaciones σ de A_{n+1} que se descomponen como producto de k ciclos disjuntos y tales que $\sigma(n+1) = n+1$.

Sea ahora $\sigma \in S_{n+1}$ tal que $\sigma(n+1) \neq n+1$. En este caso el elemento $n+1$ pertenece a algún ciclo de σ. Representemos las $m := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutaciones de A_n que se pueden escribir como producto de k ciclos disyuntos en el arreglo matricial

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mk} \end{bmatrix}$$

donde la fila i-ésima representa la permutación $\sigma_i \in S_n$ escrita como el producto k ciclos disjuntos $\rho_{i1}\rho_{i2}\dots\rho_{ik}$, para cada $1 \leq i \leq m$. Note que cada ρ_{ij}, con $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, es de la forma $(a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{im_{ij}})$, entonces la longitud de ρ_{ij} es m_{ij} y por lo tanto hay m_{ij} maneras de agregar $n+1$ al ciclo ρ_{ij}. Como $\sigma_i = \rho_{i1}\rho_{i2}\cdots\rho_{ik}$ y estos son k ciclos disyuntos, entonces podemos contar $\sum_{j=1}^{k} m_{ij}$ maneras de agregar $n+1$ a σ_i. Observe que $\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = n$, ya que $\sigma_i \in S_n$. Así, hay $n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutaciones de A_{n+1} tales que $\sigma(n+1) \neq n+1$, para un total de $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutaciones.

□

Ejemplo 3.10. Consideremos las permutaciones contadas en $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, es decir los elementos de S_5 que se pueden descomponer como producto de 4 ciclos disjuntos, y clasifiquémoslos de la siguiente manera:

$(1)(2)(3\ 4)(\mathbf{5})$	$(1)(2)(3)(4\ \mathbf{5})$
$(1)(3)(2\ 4)(\mathbf{5})$	$(1)(2)(4)(3\ \mathbf{5})$
$(1)(4)(2\ 3)(\mathbf{5})$	$(1)(3)(4)(2\ \mathbf{5})$
$(2)(4)(1\ 4)(\mathbf{5})$	$(2)(3)(4)(1\ \mathbf{5})$
$(2)(4)(1\ 3)(\mathbf{5})$	
$(3)(4)(1\ 2)(\mathbf{5})$	

En la columna izquierda tenemos las permutaciones que mantienen fijo al número 5, y en la derecha el caso contrario. Ahora note que en la izquierda tenemos a todos los elementos contados en $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ quitando en cada una de ellas el factor (5). Por otro lado, note que solo hay un elemento contado en $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, que es $(1)(2)(3)(4)$, y 4 maneras de agregar al número 5 a esta descomposición, como se puede evidenciar en la columna derecha. Así, observamos que $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 10.$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Tabla 1. Números $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

Definición 3.11. Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, los n-ésimos factoriales ascendente y descendente de z, denotados por $z^{\overline{n}}$ y $z^{\underline{n}}$ respectivamente, son definidos por

$$z^{\overline{n}} = z(z+1)\cdots(z+n-1), \quad \text{y} \quad z^{\underline{n}} = z(z-1)\cdots(z-n+1).$$

Si $n = 0$, definimos $z^{\overline{0}} = z^{\underline{0}} = 1$.

El próximo resultado establece una relación entre los números de Stirling de primera clase y los polinomios de la forma $z^{\overline{n}}$.

Proposición 3.12. *Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$z^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k.$$

Demostración. Usaremos inducción sobre n. Para el caso $n = 1$ tenemos $z = z^{\overline{1}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} z$. Supongamos que la afirmación es valida para n, entonces

$$\begin{aligned}
z^{\overline{n+1}} = z^{\overline{n}}(z+n) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} z^k (z+n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix} z^{k} + \sum_{k=1}^{n} n \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix} + n \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} \right) z^k + \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} z^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix} z^k + z^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix} z^k.
\end{aligned}$$

Esto prueba que el resultado vale para $n+1$, y por lo tanto vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Como aplicación del resultado anterior, estableceremos la función generadora de los numeros de Stirling de primera clase. Empezamos con un lema.

Lema 3.13. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$\binom{\lambda}{n} = (-1)^n \frac{(-\lambda)^{\overline{n}}}{n!}.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de las definiciones. □

Proposición 3.14. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\frac{(-\ln(1-z))^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1.$$

Demostración. Por la Proposición 2.12 y el Lema 3.13, para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(1-z)^{\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\lambda}{n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{\overline{n}}}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \lambda^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \lambda^k,
\end{aligned}$$

ya que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ siempre que $k > n$. Observe que esta serie doble es absolutamente convergente pues $|z| < 1$. Sigue de la Proposición 2.2 que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \lambda^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \lambda^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora bien, tenemos

$$(1-z)^{\lambda} = e^{\lambda \ln(1-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{\ln^k(1-z)}{k!}. \tag{7}$$

Comparando las ecuaciones (6) y (7) y usando el Corolario 2.10 concluimos el resultado. $\square$

3.2. NÚMEROS DE STIRLING DE SEGUNDA CLASE

Definición 3.15. Sean n y k números enteros positivos. El **número de Stirling de segunda clase** $\left\{ n \atop k \right\}$ representa el número de formas de escribir un conjunto de n elementos como una unión disjunta de k conjuntos, esto es, el número de particiones de un conjunto de n elementos en k conjuntos.

Ejemplo 3.16. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Tenemos:

1. Particiones de A en un conjunto: A.
2. Particiones de A en dos conjuntos: $\{1\}, \{2, 3\}$; $\{2\}, \{1, 3\}$; $\{3\}, \{1, 2\}$.
3. Particiones de A en tres conjuntos: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Por lo tanto, $\left\{ 3 \atop 1 \right\} = 1$, $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$ y $\left\{ 3 \atop 3 \right\} = 1$.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de esta família de números.

Proposición 3.17. *Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos:*

1. $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ *si* $k > n$;
2. $\left\{ n \atop n \right\} = 1$;
3. $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$.

Demostración.

1. La unión disjunta de k conjuntos no vacíos es un conjunto de cardinalidad a lo menos k.
2. La única forma de escribir a un conjunto A de n elementos, como la unión disjunta de n conjuntos no vacíos es $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$. Así $\left\{ n \atop n \right\} = 1$.

3. Es claro. $\square$

Proposición 3.18 (Fórmula de recurrencia II)**.** *Los números de Stirling de segunda clase satisfacen la fórmula de recurrencia*

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}, \tag{8}$$

para cada $n, k \in \mathbb{N}$*, con* $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ *y* $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$*.*

Demostración. Consideremos un conjunto X de $n+1$ elementos, y $a \in X$. Debemos contar todas las posibles particiones de X en k conjuntos, por lo cual vamos primeramente a considerar las particiones que contienen al conjunto unitario $\{a\}$. Note que contar dichas particiones es exactamente contar todas las posibles de un conjunto de n elementos descompuesto en $k-1$ conjuntos, por lo que hay $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ posibles. Ahora consideremos las particiones que no contienen al conjunto $\{a\}$. Para estas particiones, $\{a\}$ está estrictamente contenido en algún conjunto de la partición. Para contar las particiones faltantes, resultará muy útil analizar la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mk} \end{bmatrix}.$$

Cada fila representa una partición del conjunto $X \setminus \{a\}$ en k subconjuntos, donde $m = \left\{ {n \atop k} \right\}$. Observe que en cada fila, hay k formas de agregar el elemento a para obtener una partición de X, puesto que $\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}\}$, $1 \leq i \leq m$, es una colección de conjuntos disyuntos dos a dos. Así tendremos un total de mk particiones.

Note que el argumento anterior cuenta todas las posibles particiones de X en k subconjuntos. Esto nos dice que hay un total de $\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}$ particiones y así finaliza la demostración. $\square$

Ejemplo 3.19. Consideremos las particiones contadas para el caso $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$ y dividamos en las particiones que contienen a $\{4\}$ y las que no:

$$
\begin{array}{ll}
\{1\} \cup \{2\} \cup \{3, \mathbf{4}\} & \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{\mathbf{4}\} \\
\{1\} \cup \{3\} \cup \{2, \mathbf{4}\} & \{2\} \cup \{1, 3\} \cup \{\mathbf{4}\} \\
\{2\} \cup \{3\} \cup \{1, \mathbf{4}\} & \{3\} \cup \{1, 2\} \cup \{\mathbf{4}\}.
\end{array}
$$

Note que a la derecha se encuentran las particiones contadas en $\left\{ {3 \atop 2} \right\}$ unidas con $\{4\}$. Las restantes son simplemente las tres posibles maneras de añadir el elemento 4 a uno de los conjuntos de la partición obtenida de $\left\{ {3 \atop 3} \right\}$, para un total de $6 = \left\{ {4 \atop 3} \right\}$ particiones.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Tabla 2. Números $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Observación 3.20. La suma $\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$ representa el número de particiones de un conjunto de n elementos. Este número es conocido como el número de Bell y se denota por b_n. En la siguiente tabla mostramos los valores b_n para $0 \leq n \leq 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115976

Tabla 3. Números b_n

A continuación probaremos una identidad de los números de Stirling de segunda clase.

Proposición 3.21. *Para cada* $n \geq 2$, *tenemos*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)! \left\{ {n \atop k} \right\} = 0.$$

Demostración. Usaremos inducción sobre n. Para el caso $n = 2$ es claro ya que,

$\left\{ {2 \atop 1} \right\} = \left\{ {2 \atop 2} \right\} = 1$. Supongamos que vale para n. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k(k-1)!\left\{ {n+1 \atop k} \right\} &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k(k-1)!\left(\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k} \right\} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k} \right\} \\
&= -0!\left\{ {n \atop 0} \right\} + (-1)^{n+1}(n+1)!\left\{ {n \atop n+1} \right\} \\
&= 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nuestro próximo objetivo es establecer una relación entre los números de Bernoulli y los números de Stirling de segunda clase. Empezamos con un lema.

Lema 3.22. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\frac{(e^z-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{z^n}{n!}.$$

Demostración. Note que para $k=0$ el resultado es trivial, y para $k=1$ el resultado se verifica, ya que $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Para verificar el resultado de manera general, por el Corolario 2.9 es suficiente mostrar que

$$A_{n,k} := \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{(e^z-1)^k}{k!}\right)(0) = \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Probaremos que la sucesión $(A_{n,k})$ cumple la fórmula recurrencia $A_{n+1,k} = A_{n,k-1} +$

$kA_{n,k}$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
A_{n+1,k} = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\frac{(e^z-1)^k}{k!}\right)(0) &= \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{(e^z-1)^{k-1}e^z}{(k-1)!}\right)(0) \\
&= \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{(e^z-1)^{k-1}(1+e^z-1)}{(k-1)!}\right)(0) \\
&= \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{(e^z-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(e^z-1)^k}{(k-1)!}\right)(0) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{(e^z-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)(0) + k\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{(e^z-1)^k}{k!}\right)(0) \\
&= A_{n,k-1} + kA_{n,k}.
\end{aligned}$$

Usando inducción y teniendo en cuenta que $A_{n,0} = \left\{ {n \atop 0} \right\}$ y $A_{n,1} = \left\{ {n \atop 1} \right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se concluye que $A_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\}$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$. □

El siguiente resultado establece una relación entre los números de Bernoulli B_n y los números de Stirling de segunda clase.

Teorema 3.23. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{k!}{k+1}\left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 2\pi$ y $|e^{|z|}-1| < 1$. Observe que $\ln(1+(e^z-1)) = z$. Por la Observación 2.21 tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z-1} = \frac{\ln(1+(e^z-1))}{e^z-1}.$$

Luego, como $\ln(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}$ para $|w| < 1$, por el Lema 3.22 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+(e^z-1))}{e^z-1} &= \frac{1}{e^z-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(e^z-1)^k}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(e^z-1)^k}{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{|z|^n}{n!} = -\frac{\ln(2-e^{|z|})}{e^{|z|}-1},$$

ya que $|e^{|z|}-1| < 1$. Por la Proposición 2.2 podemos intercambiar los índices de la sumatoria, y así obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{z}{e^z-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}\right)\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

puesto que $\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ si $k > n$. El resultado se obtiene igualando coeficientes (ver Corolario 2.10). □

3.3. POLINOMIOS EXPONENCIALES

En 1868, en la revista rusa *Matematicheskii Sbornik* es propuesto el problema de encontrar el valor de la serie

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!},$$

para cada $n \geq 0$ [15]. En [16] se demuestra que la sucesión (S_n) satisface la fórmula de recurrencia

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} S_k,$$

con $S_0 = e$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $S_n = eb_n$, donde recordemos que los b_n representan los números de Bell (ver [17]). A continuación describiremos un método para obtener el valor explicito de S_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la función exponencial

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Entonces

$$z \exp(z) = z \frac{d}{dz}(\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

---

[15] K.N. BOYADZHIEV. *A series transformation formula and related polynomials*. Vol. 2005. International Journal of Mathematics y Mathematical Sciences, 2005, págs. 3849-3866.

[16] W. LIGOWSKI. *Zur summerung der Reihe ...* Archiv der Mathematik und Physik, 1878, págs. 334-335.

[17] QUAINTANCE J. GOULD H.W. *A linear binomial recurrence and the Bell numbers and polynomials*. Vol. 1. Applicable Analysis y Discrete Mathematics, 2007.

Si hacemos $z = 1$ en la ecuación anterior encontramos que $S_1 = e$. Ahora bien,

$$(z^2 + z)\exp(z) = z\frac{d}{dz}(z\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Así $S_2 = 2e$. Por inducción, vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

De la ecuación anterior sigue que

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z))|_{z=1} = S_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Por otro lado, las ecuaciones (9) y (10) evidencian el siguiente resultado, obtenido por Grunert [8].

Proposición 3.24. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe un polinomio* $P_n(z)$ *de grado* n *tal que*

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = P_n(z)\exp(z).$$

Demostración. Realizaremos la prueb a por inducción sobre n. Para el caso $n = 1$, la ecuación (9) demuestra que $P_1(z) = z$. Ahora, suponiendo que $\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = P_n(z)\exp(z)$ donde $P_n(z)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$\begin{aligned}
\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1} (\exp(z)) &= z\frac{d}{dz}\left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z))\right] \\
&= z\frac{d}{dz}P_n(z)\exp(z) = (zP_n(z) + zP_n'(z))\exp(z) \\
&= P_{n+1}(z)\exp(z).
\end{aligned}$$

Esto demuestra el resultado con $P_{n+1}(z) = zP_n(z) + zP_n'(z)$. $\square$

Definición 3.25. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el **polinomio exponencial** $P_n(z)$ es definido como

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = P_n(z)\exp(z).$$

La prueba de la Proposición 3.24 muestra que la sucesión de polinomios exponenciales satisface la fórmula de recurrencia

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + zP_n'(z),$$

con $P_1(z) = z$. Por convención, $P_0(z) := 1$. Note que la ecuación (12) junto con la Proposición 3.24 implican que

$$S_n = P_n(1)e, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como consecuencia de la Proposición 3.24 y la ecuación (11) obtenemos:

Proposición 3.26. *Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$P_n(z)\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n z^k}{k!}.$$

El próximo resultado da una conexión entre los polinomios exponenciales y los números de Stirling de segunda clase.

Teorema 3.27. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k.$$

Demostración. Primeramente note que $P_1(z) = z = \left\{ {1 \atop 0} \right\} + \left\{ {1 \atop 1} \right\} z$. Luego, basta mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k$ satisface la relación de recurrencia $Q_{n+1}(z) = zQ_n(z) + zQ'_n(z)$. Usando la fórmula de recurrencia de los números de Stirling de segunda clase (Proposición 3.18) tenemos que

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} z^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\} \right] z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} z^k + \sum_{k=1}^{n+1} k \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} z^k \\
&= z \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k + z \sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} z^{k-1} \\
&= zQ_n(z) + zQ'_n(z).
\end{aligned}$$

Sigue que $P_n(z) = Q_n(z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

A continuación daremos una fórmula explícita para los números de Stirling de segunda clase.

Proposición 3.28. *Para cualesquiera* $n, k \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Demostración. De la Proposición 3.26 encontramos que

$$\begin{aligned}
P_n(z) &= \exp(-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}z^k \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}z^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.
\end{aligned}$$

Como $P_n(z)$ es un polinomio de grado $n,$ vemos que la suma anterior es finita. La conclusión sigue del Teorema 3.27 y el Corolario 2.10. □

Finalizamos esta sección estableciendo una relación entre los números de Stirling de primera clase y los polinomios exponenciales.

Proposición 3.29. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$z^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}P_k(z).$$

Demostración. El resultado es valido para $n = 1$. Supongamos que el resultado vale para n y veamos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}P_k(z) &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\left(\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\right)P_k(z)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}P_k(z)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}P_k(z)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}P_{k+1}(z)-n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}P_k(z)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\left(zP_k(z)+zP_k'(z)\right)-nz^n\\
&= z\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}P_k(z)+z\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}P_k'(z)\ -nz^n\\
&= z^{n+1}+z(z^n)'-nz^n\\
&= z^{n+1}+nz^n-nz^n\\
&= z^{n+1}.
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado para $n+1$. Esto completa la prueba. □

3.4. EL OPERADOR zd/dz

En esta sección establecemos algunas propiedades del operador zd/dz. Como aplicación de estos resultados, mostraremos propiedades de los números de Stirling de segunda clase y los polinomios exponenciales.

Como se vio en la sección anterior, el operador zd/dz satisface la relación

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n(\exp(z)) = P_n(z)\exp(z), \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N} \text{ y } z\in\mathbb{C}.$$

El resultado anterior motiva el siguiente problema: dada $f\in\mathcal{H}(U)$, describir el conjunto

$\left\{\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^n (f(z)) :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ en términos de f. El próximo resultado nos da una solución para este problema.

Proposición 3.30. *Sea* $f \in \mathcal{H}(U)$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, tenemos*

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z).$$

Demostración. Usaremos inducción sobre n. Para el caso $n = 1$ tenemos que

$$z\frac{d}{dz} f(z) = z(f'(z)) = \left\{ 1 \atop 0 \right\} f(z) + \left\{ 1 \atop 1 \right\} z f'(z).$$

Supongamos que la afirmación es valida para n. Entonces

$$\begin{aligned}
\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1} (f(z)) &= z\frac{d}{dz}\left(\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (f(z))\right) \\
&= z\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\left\{ n \atop k \right\} k z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z) + \left\{ n \atop k \right\} z^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} k z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z) + \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} z^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ n \atop k \right\} k z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z) + \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ n \atop k-1 \right\} z^{k} \frac{d^{k}}{dz^{k}} f(z) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(k\left\{ n \atop k \right\} + \left\{ n \atop k-1 \right\}\right) z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ n+1 \atop k \right\} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z).
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado para $n + 1$ y, por lo tanto vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 3.31. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^{\underline{k}}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ dado. Observemos que

$$\left(w \frac{d}{dw} \right)^n w^z = z^n w^z, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Aplicando la Proposición 3.30 obtenemos

$$\begin{aligned} z^n w^z &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} w^k \frac{d^k}{dz^k} w^z \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} w^k z(z-1)\cdots(z-k+1) w^{z-k} \\ &= w^z \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

Puesto que $w \in \mathbb{C}$ fue arbitrario, se concluye el resultado. $\square$

Observación 3.32. La Proposición 3.21 es consecuencia del resultado anterior. En efecto, por el Corolario 3.31 tenemos

$$\frac{z^n - 1}{z} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (z-1)\cdots(z-k+1),$$

si $z \neq 0$. Haciendo $z \to 0$ se obtiene el resultado afirmado.

Ahora podemos establecer algunas fórmulas operacionales. Dada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Definamos el operador diferencial

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z\frac{d}{dz}\right)^n$$

donde la acción sobre funciones $g \in \mathcal{H}(B(0,r))$ es dada por

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right) g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z\frac{d}{dz}\right)^n g(z).$$

Observe que si $g \in \mathcal{H}(B(0,r))$, entonces $\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^n g \in \mathcal{H}(B(0,r))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.15 sigue que $f\left(z\dfrac{d}{dz}\right) g \in \mathcal{H}(B(0,r))$ siempre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z\frac{d}{dz}\right)^n g(z)$ sea uniformemente convergente sobre los subconjuntos compactos de $B(0,r)$. El siguiente teorema nos da una condición para que la afirmación anterior se satisfaga. Empezamos con una observación.

Observación 3.33. Si $g(w) = w^z$, deducimos de la ecuación (13) que

$$f\left(w\frac{d}{dw}\right) w^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n w^z = f(z) w^z.$$

Teorema 3.34. *Sean $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $g \in \mathcal{H}(B(0,r))$. Supongamos que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y que la sucesión de coeficientes (a_n) satisface la condición $|a_n| \leq Mt^n/n!$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $t, M > 0$ son constantes. Si $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge* *absolutamente en* $B(0,r)$ *entonces*

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nf(n)z^n \quad \textit{para cada } z\in B(0,r/e^t).$$

Demostración. Por la Observación 3.33 tenemos que $\left(z\frac{d}{dz}\right)^m z^n = n^m z^n$ para todo $m\geq 0$. Sigue del Teorema 2.7 que

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^m g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nn^mz^n, \quad \text{si } |z|<r \text{ y } m\geq 0. \tag{14}$$

Por otra parte, si $|z|<r/e^t$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_m||c_n|n^m|z|^n &\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n}{m!}|c_n|n^m|z|^n\\ &= M\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z|^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^mn^m}{m!}\\ &= M\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||e^tz|^n.\end{aligned}$$

La última serie de la ecuación anterior es convergente puesto que por hipótesis, $\sum_n|c_n||w|^n$ es convergente en si $|w|<r$. Así, del Teorema 2.2, de la definición del

operador $f\left(z\dfrac{d}{dz}\right)$ y de la ecuación (14), obtenemos

$$\begin{aligned}
f\left(z\frac{d}{dz}\right)g(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(z\frac{d}{dz}\right)^m g(z)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n n^m z^n\right)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_m c_n n^m z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_m c_n n^m z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n f(n) z^n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.35. Si $g(z) = e^z$, el teorema anterior implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\frac{z^k}{k!} = e^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Este resultado es obtenido en [15].

Proposición 3.36 (Regla de Leibniz)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f, g \in \mathcal{H}(U)$, entonces*

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (f(z)g(z)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-k} (f(z)) \left(z\frac{d}{dz}\right)^k (g(z)).$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)(f(z)g(z)) = zf'(z)g(z) + zf(z)g'(z) = \binom{1}{0}\left(z\frac{d}{dz}\right)f(z) + \binom{1}{1}\left(z\frac{d}{dz}\right)g(z).$$

Luego, suponiendo que el resultado vale para n, podemos calcular el término $n+1$ de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1}(f(z)g(z)) &= \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n}(f(z)g(z)) \\
&= \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-k}(f(z))\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}(g(z))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1-k}f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}g(z)+\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-k}f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k+1}g(z)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1-k}f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}g(z)+ \\
&\quad \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1-k}f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}g(z) \\
&= g(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1}f(z)+f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1}g(z)+ \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1-k}f(z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}g(z) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1-k}(f(z))\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}(g(z)).
\end{aligned}
$$

Esto demuestra el resultado para $n+1$, y por tanto se concluye para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposición 3.37. *Para todo* $m, n \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$
P_{n+m}(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{m}\left\{ m \atop j \right\} j^{n-k}\right) z^k P_k(z).
$$

Demostración. Denotando $D = \dfrac{d}{dz}$, por la Proposición 3.24 tenemos que

$$
P_{n+m}(z)\exp(z) = (zD)^{n+m}(\exp(z)) = (zD)^{n}(zD)^{m}(\exp(z)) = (zD)^{n}(P_m(z)\exp(z)). \tag{15}
$$

Ahora, de la regla de Leibniz deducimos que

$$(zD)^n \left(P_m(z)\exp(z)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(zD)^{n-k} P_m(z)\right] \left[(zD)^k \left(\exp(z)\right)\right]. \tag{16}$$

Usando el Teorema 3.27, la Proposición 3.30 y la ecuación (13) podemos escribir

$$\begin{aligned} (zD)^{n-k} P_m(z) &= (zD)^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} z^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} j^{n-k} z^j. \end{aligned} \tag{17}$$

Reemplazando (16) y (17) en (15) y usando la Proposición 3.24 obtenemos el resultado. □

Observación 3.38. Escogiendo $z = 1$ en la proposición anterior obtenemos una identidad para los números de Bell:

$$b_{n+m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} j^{n-k} \right) b_k.$$

Teorema 3.39. *Para cada $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que*

$$e^{w(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) \frac{z^n}{n!}.$$

Demostración. Se tiene que

$$e^{we^z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(we^z)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n m^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^m z^n m^n}{m! n!}.$$

Observe que $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{w^m z^n m^n}{m!n!}\right|$ es convergente puesto que

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{w^m z^n m^n}{m!n!}\right| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|w|^m|z|^n m^n}{m!n!} = e^{|w|e^{|z|}}$$

Aplicando las Proposiciones 2.2 y 3.26 sigue que

$$\begin{aligned} e^{we^z} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^m z^n m^n}{m!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m z^n m^n}{m!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m m^n}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}P_n(w)e^w\frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$ □

Con el teorema anterior, podemos deducir algunas propiedades interesantes como la que enunciaremos a continuación.

Proposición 3.40. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $z, w \in \mathbb{C}$*, se cumple la siguiente propiedad:*

$$P_n(z+w) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(z)P_{n-k}(w).$$

Demostración. Por el Teorema 3.39, sabemos que

$$e^{(z+w)e^u} = e^{z+w}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z+w)\frac{u^n}{n!},$$

si $u \in \mathbb{C}$. Por otro lado, del Teorema 2.13 encontramos que

$$\begin{aligned} e^{(z+w)e^u} = e^{ze^u} e^{we^u} &= \left[e^z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{u^n}{n!} \right] \left[e^w \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) \frac{u^n}{n!} \right] \\ &= e^{z+w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(z) P_{n-k}(w) \right) \frac{u^n}{n!}. \end{aligned}$$

El resultado se obtiene comparando las ecuaciones anteriores y aplicando el Corolario 2.10. $\square$

Escogiendo $w = -z$ en el teorema anterior obtenemos una interesante relación de "ortogonalidad"para cada $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(z) P_{n-k}(-z) = 0, \quad \text{si } z \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Usando la regla de Leibniz (Proposición 3.36) podemos probar la siguiente extensión de la propiedad 18.

Proposición 3.41. *Para cualquier m, n enteros no negativos y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\left(z \frac{d}{dz} \right)^n P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} k^n z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{m+k}(z) P_{n-k}(-z).$$

Demostración. La primera igualdad es consecuencia inmediata del Teorema 3.27 y la ecuación (13). Ahora por la regla de Leibniz y la Proposición 3.24 tenemos

$$\begin{aligned}\left(z\frac{d}{dz}\right)^n P_m(z) &= \left(z\frac{d}{dz}\right)^n [(e^{-z})(P_m(z)e^z)] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-k} e^{-z}\right]\left[\left(z\frac{d}{dz}\right)^{k}(P_m(z)e^z)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} P_{m+k}(z)P_{n-k}(-z).\end{aligned}$$ □

Proposición 3.42. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}(e^{w(e^z-1)})(0) = P_n(w).$$

Demostración. El resultado sigue del Teorema 3.39 y el Corolario 2.9. □

Para finalizar, mostramos una fórmula integral que relaciona los polinomios exponenciales y los números de Bernoulli.

Proposición 3.43. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \geq 0$ *tenemos*

$$\int_0^x P_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} B_{n+1-k}P_k(x).$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 2\pi$. Puesto que los coeficientes de los polinomios exponenciales son negativos tenemos que $P_n(0) \leq P_n(t) \leq P_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora por el Teorema 3.39 se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{|z|^n}{n!} = e^{x(e^{|z|}-1)}.$$

Sigue del test M de Weierstrass que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\frac{z^n}{n!}$ es uniformemente convergente en $[0, x]$. De la Proposición 2.14 y la Observación 2.21 obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^x P_n(t)\, dt &= \int_0^x e^{t(e^{|z|}-1)}\, dt \\
&= \frac{1}{e^z - 1} \left(e^{x(e^z-1)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \frac{z^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k} P_k(x) \right) \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

La última igualdad es obtenida realizando el producto de Cauchy de las series, teniendo en cuenta que el término inicial del segundo factor es cero. Puesto que $z \in B(0, 2\pi)$ fue elegido arbitrariamente, vemos que esta igualdad es valida para todo $|z| < 2\pi$. La conclusión sigue del Corolario 2.10. $\square$

3.5. SEMIORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS EXPONENCIALES

El objetivo de esta sección es probar la siguiente fórmula integral:

$$\int_0^{\infty} P_n(-u) P_m(-u) e^{-2u} \frac{du}{u} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+m} - 1}{n+m} B_{n+m}. \tag{19}$$

Este resultado se puede pensar como una relación de ortogonalidad puesto que por la Observación 2.21, $B_{n+m} = 0$ si $n + m$ es un número impar mayor o igual a 3. Primero probaremos un lema (ver [18]).

---

[18] R.P. AGNEW. *Mean values and Frullani integrals*. Vol. 2. 1951, págs. 237-241.

Teorema 3.44. *Sean* $a, b > 0$ *y* $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L$*. Entonces*

$$\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = (f(0) - L) \ln \frac{b}{a}.$$

Demostración. Podemos suponer que $a < b$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= \int_x^y \frac{f(at)}{t} dt - \int_x^y \frac{f(bt)}{t} dt \\
&= \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{f(u)}{u} du \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du + \int_{bx}^{ay} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{ay} \frac{f(u)}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du.
\end{aligned} \tag{20}$$

Por definición de integral impropia tenemos

$$\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \lim_{(x,y)\to(0,+\infty)} \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du - \lim_{y\to\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du.$$

siempre que los últimos límites existan. Por la ecuación (20) basta mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad \text{y} \quad \lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du = L \ln \frac{b}{a}.$$

Para el primer límite, sean $m(x) := \min\limits_{ax\le t\le bx} f(t)$ y $M(x) := \max\limits_{ax\le t\le bx} f(t)$. Luego

$$m(x) \ln \frac{b}{a} \le \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du \le M(x) \ln \frac{b}{a},$$

De la continuidad de f deducimos que $\lim\limits_{x\to 0} m(x) = \lim\limits_{x\to 0} M(x) = f(0)$, y esto prueba que

$\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}du = f(0)\ln\frac{b}{a}.$
Para el segundo límite, sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces existe $A > 0$ tal que si $u > A$ entonces $|f(u) - L| < \varepsilon$. Así, para $y > \frac{A}{a}$ vemos que:

$$\begin{aligned}\left|\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}du - L\ln\frac{b}{a}\right| &= \left|\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}du - L\int_{ay}^{by}\frac{du}{u}\right| \\ &= \left|\int_{ay}^{by}\frac{f(u)-L}{u}du\right| \\ &< \varepsilon\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{y\to+\infty}\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}du = L\ln\frac{b}{a}$. Esto prueba el resultado. □

Finalmente, estableceremos la relación de ortogonalidad. Este resultado es probado en Proposición 4.1 [9] usando técnicas de Análisis Complejo. Presentamos aquí una prueba distinta.

Proposición 3.45. *Para cada* $n, m \in \mathbb{N}$*, tenemos*

$$\int_{-\infty}^{0} P_n(x)P_m(x)e^{2x}\frac{dx}{x} = (-1)^n\frac{2^{n+m}-1}{n+m}B_{n+m}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.39 tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)} - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)\frac{w^m}{m!} = e^{x(e^w-1)} - 1.$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ y $z, w \in \mathbb{C}$. Por otra parte, usando la definición del polinomio exponencial se deduce que si $t > 0$ y $|x| \le t$ entonces

$$\frac{|P_n(x)P_m(x)|}{|x|} \le \frac{P_n(t)P_m(t)}{t}.$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|P_n(x)P_m(x)e^{2x}|}{|x|}\frac{|z|^n|w|^m}{n!m!}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_n(t)P_m(t)e^{2t}}{t}\frac{|z|^n|w|^m}{n!m!}$$
$$=(e^{t(e^{|z|}-1)}-1)(e^{t(e^{|w|}-1)}-1).$$

Esto prueba que la serie doble $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_n(x)P_m(x)e^{2x}}{x}\frac{y^n}{n!}\frac{z^m}{m!}$ converge uniforme y absolutamente en el intervalo $[-t,0]$. Sigue de las Proposiciones 2.2 y 2.14 que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{z^m}{m!}\int_{-t}^{0}P_n(x)P_m(x)\frac{e^{2x}}{x}dx=\int_{-t}^{0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{z^m}{m!}P_n(x)P_m(x)\frac{e^{2x}}{x}dx$$
$$=\int_{-t}^{0}\frac{(e^{xe^y}-e^x)(e^{xe^z}-e^x)}{x}dx.$$

Haciendo $t\to\infty$ teniendo en cuenta la convergencia uniforme, encontramos que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\frac{z^m}{m!}\int_{-\infty}^{0}P_n(x)P_m(x)\frac{e^{2x}}{x}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{(e^{xe^y}-e^x)(e^{xe^z}-e^x)}{x}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{x(e^y+e^z)}-e^{x(e^y+1)}}{x}dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{x(e^z+1)}-e^{2x}}{x}dx$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-u(e^y+e^z)}-e^{-u(e^y+1)}}{u}du-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-u(e^z+1)}-e^{-2u}}{u}du.$$

Note que las dos ultimas integrales cumplen con las condiciones del Teorema 3.44, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-u(e^y+e^z)}-e^{-u(e^y+1)}}{u}du-\int_0^\infty \frac{e^{-u(e^z+1)}-e^{-2u}}{u}du &= \ln\frac{e^y+1}{e^y+e^z}-\ln\frac{2}{e^z+1}\\ &= \ln\frac{(e^y+1)(e^z+1)}{2(e^y+e^z)}\\ &= \ln\frac{\cosh\frac{y}{2}\cosh\frac{z}{2}}{\cosh\frac{z-y}{2}}.\end{aligned}$$

Note que la igualdad anterior es valida para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Ahora, si $\max\{|z|, |w|\} < \pi/2$ y $|z-w| < \pi/2$, de la Proposición 2.22 obtenemos

$$\begin{aligned}\ln\frac{\cosh\frac{y}{2}\cosh\frac{z}{2}}{\cosh\frac{z-y}{2}} &= \sum_{k=2}^\infty L_k\frac{y^k+z^k-(z-y)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^\infty \frac{L_k}{k!}\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^m\binom{k}{m}y^m z^{k-m}\\ &= \sum_{k=2}^\infty\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^m L_k\frac{y^m}{m!}\frac{z^{k-m}}{(k-m)!}\\ &= \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty(-1)^n L_{n+m}\frac{y^n}{n!}\frac{z^m}{m!},\end{aligned}$$

en donde en la última usamos el Teorema 2.2 teniendo en cuenta la convergencia absoluta de las series. Comparando los coeficientes se logra completar la prueba. □

Note que (19) se deduce de la proposición anterior haciendo el cambio de variable $u = -x$.

Finalmente, usando el resultado anterior y el Teorema 3.27, al integrar cada termino obtenemos la identidad

$$\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^m(-1)^{k+j}\left\{{n \atop k}\right\}\left\{{m \atop j}\right\}\frac{(k+j-1)!}{2^{k+j}} = (-1)^{n-1}\frac{2^{n+m}-1}{m+1}B_{n+m}.$$

4. POLINOMIOS α-EXPONENCIALES Y EL OPERADOR $z^{\alpha}\dfrac{d}{dz}$

El objetivo de este capítulo es generalizar y extender algunos resultados del operador $z\dfrac{d}{dz}$, que fueron probados en el Capítulo 2, para el operador $z^{\alpha}\dfrac{d}{dz}$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Introduciremos la familia de polinomios α-exponenciales, y estableceremos propiedades de estos. Finalmente, mostraremos una relación entre los polinomios exponenciales, los polinomios α-exponenciales y los números de Stirling. Como aplicación de estos resultados, veremos una extensión de la relación de semiortogonalidad, obtenida en el Capítulo 2, para los polinomios α-exponenciales.

4.1. EL OPERADOR $z^{\alpha}d/dz$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Discutiremos propiedades del operador $z^{\alpha}\dfrac{d}{dz}$. Este operador generaliza de manera natural el operador $z\dfrac{d}{dz}$. Observemos que

$$\left(z^{\alpha}\frac{d}{dz}\right)(\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{z^{\alpha-1+k}}{k!}, \quad \text{y}$$
$$\left(z^{\alpha}\frac{d}{dz}\right)^2(\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+\alpha-1)\frac{z^{2\alpha-2+k}}{k!}.$$

Usando inducción, puede probarse que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left(z^{\alpha}\frac{d}{dz}\right)^n(\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+(\alpha-1))\dots(k+(n-1)(\alpha-1))\frac{z^{n(\alpha-1)+k}}{k!}. \tag{21}$$

Esta serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$. Si $t \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos el símbolo

$$(t,\alpha)_n = t(t+(\alpha-1))\cdots(t+(n-1)(\alpha-1)).$$

Por convención $(t,\alpha)_0 = 1$. Usando esta notación, la ecuación (21) se escribe en forma compacta como

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k,\alpha)_n \frac{z^{n(\alpha-1)+k}}{k!}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

El siguiente resultado es una extensión de la Proposición 3.24.

Proposición 4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función $H_n^\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (\exp(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k,\alpha)_n \frac{z^{n(\alpha-1)+k}}{k!} = H_n^\alpha(z) \exp(z), \tag{23}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Más aún, la sucesión de funciones $\{H_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ satisface la fórmula de recurrencia

$$H_{n+1}^\alpha(z) = z^\alpha H_n^\alpha(z) + z^\alpha \frac{d}{dz} H_n^\alpha(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

con $H_0^\alpha(z) = 1$ y $n \geq 0$.

Demostración. Basta usar inducción sobre n. $\square$

Proposición 4.2. *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ dado y*

$$\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \frac{H_n^\alpha(z)}{z^{n(\alpha-1)}}, \quad \text{para cada } z \neq 0 \text{ y } n \geq 0.$$

Entonces la sucesión $\{\mathcal{P}_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ satisface la fórmula de recurrencia

$$\mathcal{P}_{n+1}^\alpha(z) = (z + n(\alpha-1))\mathcal{P}_n^\alpha(z) + z\frac{d}{dz}\mathcal{P}_n^\alpha(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \tag{24}$$

con $\mathcal{P}_0^\alpha(z) = 1$ y $n \geq 0$.

Demostración. Sea $n \geq 0$ y $z \neq 0$. Por la Proposición 4.1 y la definición de $\mathcal{P}_{n+1}^{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{n+1}^{\alpha}(z) = \frac{H_{n+1}^{\alpha}(z)}{z^{(n+1)(\alpha-1)}} &= z\frac{H_{n}^{\alpha}(z)}{z^{n(\alpha-1)}} + \frac{z}{z^{n(\alpha-1)}}\frac{d}{dz}H_{n}^{\alpha}(z) \\ &= z\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z) + \frac{z}{z^{n(\alpha-1)}}\frac{d}{dz}H_{n}^{\alpha}(z). \qquad (25)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}H_{n}^{\alpha}(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{H_{n}^{\alpha}(z)}{z^{n(\alpha-1)}}z^{n(\alpha-1)}\right) \\ &= n(\alpha-1)z^{n(\alpha-1)-1}\frac{H_{n}^{\alpha}(z)}{z^{n(\alpha-1)}} + z^{n(\alpha-1)}\frac{d}{dz}\left(\frac{H_{n}^{\alpha}(z)}{z^{n(\alpha-1)}}\right) \\ &= n(\alpha-1))z^{n(\alpha-1)-1}\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z) + z^{n(\alpha-1)}\frac{d}{dz}\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z).\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (25) obtenemos (24) para $z \neq 0$. Note que la ecuación (24) implica que $\mathcal{P}_{n}^{\alpha}$ es un polinomio de grado n en la variable $z \neq 0$. Por continuidad, concluimos que (24) vale para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Corolario 4.3. *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z)\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k,\alpha)_{n}\frac{z^{k}}{k!}.$$

Demostración. Esto es consecuencia de la ecuación (23) y la definición de $\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z)$. □

Observación 4.4. En este trabajo, los polinomios $\{\mathcal{P}_{n}^{\alpha} : n \in \mathbb{N}\}$ serán llamados *polinomios α-exponenciales.* Observe que si $\alpha = 1$, esta sucesión coincide con los polinomios exponenciales ya estudiados en el Capítulo 2.

El próximo resultado nos da una expresión explícita para el n-ésimo polinomio $\mathcal{P}_{n}^{\alpha}(z)$.

Proposición 4.5. *Para todo $n \geq 0$ y $z \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!},$$

donde

$$s(n,k;\alpha) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}(m,\alpha)_n.$$

Demostración. Por el Corolario 4.3 tenemos

$$\mathcal{P}_n^\alpha(z)\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k,\alpha)_n\frac{z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Así, por el Teorema 2.13 tenemos para $n \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n^\alpha(z) &= e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}(k,\alpha)_n\frac{z^k}{k!} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k,\alpha)_n\frac{z^k}{k!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}(m,\alpha)_n\right)\frac{z^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Esta última suma es finita puesto que $\mathcal{P}_n^\alpha(z)$ es un polinomio de grado n y así finaliza la demostración. □

Observación 4.6. Si $\alpha = 1$, los números $\dfrac{s(n,k;1)}{k!}$ coinciden con los números de Stirling de segunda clase. Por otra parte, la ecuación (24) implica la siguiente fórmula de recurrencia para los números $s(n,k;\alpha)$:

$$s(n+1,k;\alpha) = ks(n,k-1;\alpha) + (k+n(\alpha-1))s(n,k;\alpha), \tag{26}$$

para $k, n \in \mathbb{N}$. Para demostrar (26) observe que

$$(z + n(\alpha - 1))\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n} n(\alpha-1)s(n,k,\alpha)\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1} ks(n,k-1,\alpha)\frac{z^k}{k!}, \quad \text{y}$$

$$z\frac{d}{dz}\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n} ks(n,k,\alpha)\frac{z^k}{k!}.$$

Sumando estas expresiones y teniendo en cuenta que $s(n,k;\alpha) = 0$ si $k > n$ y $s(n,0;\alpha) = 0$, encontramos que

$$(z + n(\alpha - 1))\mathcal{P}_n^\alpha(z) + z\frac{d}{dz}\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n+1} \left[ks(n,k-1,\alpha) + (k + n(\alpha-1))s(n,k,\alpha)\right]\frac{z^k}{k!}.$$

Igualando el coeficiente de $z^k/k!$ en $\mathcal{P}_{n+1}^\alpha(z)$ obtenemos el resultado.

Proposición 4.7. *Para cada* $m, n \in \mathbb{N}$*, tenemos que*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} s(n,k;\alpha) = (m,\alpha)_n.$$

Demostración. Por la Proposición 4.5 podemos escribir

$$\mathcal{P}_n^\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C},$$

ya que $s(n,k;\alpha) = 0$ siempre que $k > n$. Multiplicando por e^z en ambos lados de esta igualdad y usando el Teorema 2.13 obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n^\alpha(z)e^z &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}s(n,k;\alpha)\right)\frac{z^m}{m!}.\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos del Corolario 4.3 que

$$\mathcal{P}_n^\alpha(z)e^z = \sum_{m=0}^{\infty}(m,\alpha)_n \frac{z^m}{m!}, \quad \text{si } z \in \mathbb{C}.$$

El resultado sigue entonces del Corolario 2.10. □

La siguiente proposición, la cual usaremos en la prueba de los próximos resultados, establece una relación entre el símbolo $(y,\alpha)_n$ y los números de Stirling de primer orden.

Proposición 4.8. *Para todo $y, \alpha \in \mathbb{C}$ y $n \geq 0$, tenemos*

$$(y,\alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} y^k.$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 3.12 para la variable $\dfrac{y}{\alpha-1}$, con $\alpha \neq 1$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(y,\alpha)_n &= y(y+(\alpha-1))\cdots(y+(n-1)(\alpha-1)) \\
&= (\alpha-1)^n \frac{y}{\alpha-1}\left(\frac{y}{\alpha-1}+1\right)\cdots\left(\frac{y}{\alpha-1}+n-1\right) \\
&= (\alpha-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{y}{\alpha-1}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} y^k.
\end{aligned}$$

La igualdad también es valida para $\alpha = 1$ como se verifica fácilmente por sustitución.

□

Nuestro próximo resultado nos da una expresión que relaciona los números de Stirling (de primera y segunda clase) con los números $s(n,k;\alpha)$.

Proposición 4.9. *Para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *se tiene que*

$$\frac{s(n,k;\alpha)}{k!} = \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} (\alpha - 1)^{n-j}.$$

Demostración. Por las Proposiciones 4.8 y 3.28 y la definición de $s(n,k;\alpha)$ (ver Proposición 4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} s(n,k;\alpha) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} (m,\alpha)_n &= \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-j} m^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-j} m^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-j} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} m^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-j} k! \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \\ &= k! \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} (\alpha-1)^{n-j}. \end{aligned}$$ □

A continuación extendemos la Proposición 3.30 al operador $z^\alpha \dfrac{d}{dz}$.

Proposición 4.10. *Sean* $f \in \mathcal{H}(U)$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz} \right)^n (f(z)) = z^{n(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} s(n,k;\alpha) \frac{z^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} f(z).$$

Demostración. La prueba se hará usando inducción sobre n. Para el caso $n = 1$, tenemos

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz} \right) (f(z)) = z^\alpha f'(z) = z^{\alpha-1}(0 f(z) + z f(z)).$$

Como $s(1,0;\alpha)=0$ y $s(1,1;\alpha)=1,$ se cumple el resultado. Suponga que el resultado vale para n. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(z^{\alpha}\frac{d}{dz}\right)^{n+1}(f(z))=\left(z^{\alpha}\frac{d}{dz}\right)\left[z^{n(\alpha-1)}\sum_{k=0}^{n}s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\right]\\
&=z^{\alpha}\left\{n(\alpha-1)z^{n(\alpha-1)-1}\sum_{k=0}^{n}\left[s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\right]\right\}\\
&\quad+z^{\alpha}\left\{z^{n(\alpha-1)}\sum_{k=0}^{n}s(n,k;\alpha)\left[\frac{kz^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)+\frac{z^k}{k!}f^{k+1}(z)\right]\right\}\\
&=z^{(n+1)(\alpha-1)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[n(\alpha-1)s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)+s(n,k;\alpha)\left[\frac{kz^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)+\frac{z^{k+1}}{k!}f^{k+1}(z)\right]\right]\right\}\\
&=z^{(n+1)(\alpha-1)}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+n(\alpha-1))s(n,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)+\sum_{k=1}^{n+1}s(n,k-1;\alpha)\frac{z^k}{(k-1)!}f^k(z)\right\}\\
&=z^{(n+1)(\alpha-1)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[(k+n(\alpha-1))s(n,k;\alpha)+ks(n,k-1;\alpha)\right]\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\ +s(n,n;\alpha)\frac{z^{n+1}}{n!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}f(z)\right\}\\
&=z^{(n+1)(\alpha-1)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(s(n+1,k;\alpha)\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\right)+s(n,n;\alpha)\frac{z^{n+1}}{n!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}f(z)\right\}.
\end{aligned}$$

Note que de la ecuación (26) se deduce que $s(n+1,n+1;\alpha)=(n+1)s(n,n;\alpha)$. De este modo se concluye el resultado. $\square$

El objetivo ahora es mostrar una función generadora para los polinomios α-exponenciales. Primero probamos un lema.

Lema 4.11. *Sean $z,\alpha\in\mathbb{C}$ con $\alpha\neq 1$ tales que $|z(\alpha-1)|<1$. Entonces para cada $y\in\mathbb{C}$ tenemos*

$$(1-(\alpha-1)z)^{-\frac{y}{\alpha-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(y,\alpha)_n\frac{z^n}{n!}.$$

Demostración. Por definición del coeficiente binomial tenemos

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{y}{\alpha-1}}{n} &= \frac{1}{n!}\left(-\frac{y}{\alpha-1}\right)\left(-\frac{y}{\alpha-1}-1\right)\cdots\left(-\frac{y}{\alpha-1}-n+1\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!(\alpha-1)^n} y(y+(\alpha-1))\cdots(y+(n-1)(\alpha-1)) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!(\alpha-1)^n}(y,\alpha)_n.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.12 y la igualdad anterior sigue que

$$\begin{aligned}
(1-z(\alpha-1))^{-\frac{y}{\alpha-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{y}{\alpha-1}}{n}(-1)^n(\alpha-1)^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\alpha-1)^n}(y,\alpha)_n(-1)^n(\alpha-1)^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(y,\alpha)_n\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

Ahora estamos listos para probar el siguiente teorema, el cual es una extensión del Teorema 3.39.

Teorema 4.12. *Sean* $z, w, \alpha \in \mathbb{C}$ *tales que* $|z(\alpha-1)| < 1$ *y* $\alpha \neq 1$*. Entonces*

$$\exp\left(w\left((1-(\alpha-1)z)^{-\frac{1}{\alpha-1}}-1\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n^{\alpha}(w)\frac{z^n}{n!}.$$

Demostración. Por el Lema 4.11 tenemos

$$\begin{aligned}
\exp\left(w(1-(\alpha-1)z)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-(\alpha-1)z)^{-\frac{n}{\alpha-1}}\frac{w^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(n,\alpha)_k\frac{w^n z^k}{n!k!}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $\beta = |\alpha - 1|$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |(n,\alpha)_k| \frac{|w|^n |z|^k}{n!k!} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (n,\beta+1)_k \frac{|w|^n |z|^k}{n!k!} = \exp\left(|w|(1-|z|\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\right)$$

Esto demuestra que la serie doble $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(n,\alpha)_k \frac{w^n z^k}{n!k!}$ es absolutamente convergente. Sigue de la Proposición 2.2 y el Corolario 4.3 que

$$\begin{aligned}
\exp\left(w(1-(\alpha-1)z)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(n,\alpha)_k \frac{w^n z^k}{n!k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n,\alpha)_k \frac{w^n z^k}{n!k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k^{\alpha}(w) \exp(w) \frac{z^k}{k!}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.13. *Para cada* $z, w \in \mathbb{C}$ *y* $n \geq 0$ *tenemos*

$$\mathcal{P}_n^{\alpha}(z+w) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{P}_k^{\alpha}(z) \mathcal{P}_{n-k}^{\alpha}(w).$$

Demostración. Sea $u \in \mathbb{C}$ tal que $|u(\alpha-1)| < 1$. Por el Teorema 4.12 tenemos

$$\exp\left(z\left((1-(\alpha-1)u)^{-\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n^{\alpha}(z) \frac{u^n}{n!} \quad \text{y}$$

$$\exp\left(w\left((1-(\alpha-1)u)^{-\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n^{\alpha}(w) \frac{u^n}{n!}.$$

Puesto que

$$\exp\left(z\left((1-(\alpha-1)u)^{-\frac{1}{\alpha-1}}-1\right)\right)\exp\left(w\left((1-(\alpha-1)u)^{-\frac{1}{\alpha-1}}-1\right)\right)$$
$$=\exp\left((z+w)\left((1-(\alpha-1)u)^{-\frac{1}{\alpha-1}}-1\right)\right),$$

la conclusión sigue del Teorema 2.13 y el Corolario 2.10. □

Como se mostrará en el resultado próximo, los polinomios α-exponenciales pueden ser expresados en términos de los polinomios exponenciales. Tal expresión permitirá generalizar la Proposición 3.45. Para este resultado es conveniente recordar que si $(a_{i,j})$ es una sucesión doble en $\mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}. \tag{27}$$

Proposición 4.14. *Para cada* $n \geq 0$ *y* $z, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{P}_n^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} P_k(z).$$

Demostración. En efecto, por la Proposición 4.9 y la ecuación (27) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n^{\alpha}(z) &= \sum_{j=0}^{n} s(n,j;\alpha)\frac{z^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} z^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} z^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{n-k} P_k(z).
\end{aligned}$$

□

Combinando el resultado anterior y la Proposición 3.43 obtenemos una fórmula integral para los polinomios α-exponenciales:

Corolario 4.15. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \geq 0$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$\int_0^x \mathcal{P}_n^\alpha(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(\alpha-1)^{n-k}}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_{k+1-j} P_j(x).$$

El siguiente resultado es una extensión de la relación de ortogonalidad probada para los polinomios exponenciales en la Proposición 3.45.

Proposición 4.16. *Para cada* $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$\int_{-\infty}^{0} \mathcal{P}_n^\alpha(t)\mathcal{P}_m^\alpha(t)\frac{e^{2t}}{t}\,dt = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{2^{j+k}-1}{j+k} B_{j+k}(\alpha-1)^{m+n-j-k}.$$

Demostración. Por la Proposición 4.14 tenemos

$$\mathcal{P}_m^\alpha(t)\mathcal{P}_n^\alpha(t) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{m+n-j-k} P_j(t) P_k(t).$$

Luego, usando la Proposición 3.45 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \mathcal{P}_m^\alpha(t)\mathcal{P}_n^\alpha(t)e^{2t}\frac{dt}{t} &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\alpha-1)^{m+n-j-k} \int_{-\infty}^{0} P_j(t)P_k(t)\frac{e^{2t}}{t}\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{2^{j+k}-1}{j+k} B_{j+k}(\alpha-1)^{m+n-j-k}. \end{aligned}$$ □

Observe que cuando $\alpha = 1$, el resultado es exactamente la Proposición 3.45. +q

BIBLIOGRAFÍA

AGNEW, R.P. *Mean values and Frullani integrals*. Vol. 2. 1951, págs. 237-241 (vid. pág. 57).

APOSTOL, T.M. *Mathematical Analhysis*. 2.ª ed. Adisson-Wesley Publishing Company, 1974 (vid. págs. 13-15, 17).

ARAKAWA T., IBUKIYAMA T. & KANEKO M. *Bernoulli numbers and zeta functions*. Springer Monographs in Mathematics, 2014 (vid. págs. 8, 10, 13).

BELL, E.T. "Exponential polynomials". En: *Annals of Mathematics* 35 (1934) (vid. pág. 9).

BERNDT, B.C. *Ramanoujan's Notebooks*. Springer, 1985 (vid. pág. 9).

BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi, in Werke*. Vol. 4. Birkhauser, 1975, págs. 107-286 (vid. pág. 18).

BOYADZHIEV, K.N. *A series transformation formula and related polynomials*. Vol. 2005. International Journal of Mathematics y Mathematical Sciences, 2005, págs. 3849-3866 (vid. págs. 41, 51).

— "Exponential polynomials, Stirling numbers and evaluation of some gamma integrals". En: (2009) (vid. págs. 10, 59).

BUTZER P.L., KILBANS A.A. & TRUJILLO J.J. "Fractional calcucus i the Mellin setting and Hadamard type fractional integrals". En: 270 (2002) (vid. pág. 9).

CARLITZ, L. *Single variable Bell polynomials*. Vol. 14. Collectanea Mathematic, 1970 (vid. pág. 8).

CONWAY, J.B. *Functiond of comple variable*. 2.ª ed. Springer-Verlag, 1978 (vid. pág. 13).

GOULD H.W., QUAINTANCE J. *A linear binomial recurrence and the Bell numbers and polynomials*. Vol. 1. Applicable Analysis y Discrete Mathematics, 2007 (vid. pág. 41).

GRAHAM R. L., KNUTH D.E. & PATASHNIK O. *Concrete mathematics. A foundatiin for computer science*. 2.ª ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1994 (vid. págs. 8, 13).

GRUNERT, J.A. *Uber die Summerung der Reihen ...* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1843 (vid. págs. 9, 42).

LIGOWSKI, W. *Zur summerung der Reihe ...* Archiv der Mathematik und Physik, 1878, págs. 334-335 (vid. pág. 41).

LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. 2.ª ed. Projeto Euclides, 2016 (vid. págs. 13, 14, 16).

REMMERT, R. *Theory of complex functions*. 2.ª ed. Springer-Verlag, 1991 (vid. págs. 13, 17, 20).

RIORDAN, J. *Combinatorial Indentities*. John Wiley & Sons, 1969 (vid. pág. 8).