

---

UTILIZACIÓN DEL CONCEPTO DE  
FRACTURA PARA EL ANÁLISIS DE LA  
ESTABILIDAD DE CONFIGURACIONES  
ESFÉRICAS DE MATERIA NEUTRA O  
CARGADA EN RELATIVIDAD GENERAL

---

ANAMARÍA NAVARRO NOGUERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
MAESTRÍA EN FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2015

---

**UTILIZACIÓN DEL CONCEPTO DE  
FRACTURA PARA EL ANÁLISIS DE LA  
ESTABILIDAD DE CONFIGURACIONES  
ESFÉRICAS DE MATERIA NEUTRA O  
CARGADA EN RELATIVIDAD GENERAL**

---

ANAMARÍA NAVARRO NOGUERA

TRABAJO DE GRADO  
PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN FÍSICA

DIRECTOR: GUILLERMO A. GONZÁLEZ  
CO-DIRECTOR: LUIS A. NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
MAESTRÍA EN FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2015

# Tabla de Contenidos

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Fracturas en Esferas anisótropas</b>	<b>13</b>
1.1. Perturbaciones locales de la densidad . . . . .	14
1.2. Análisis de algunas soluciones exactas de esferas isotropas y anisótropas	19
1.2.1. Modelo 1: Esfera isotropa . . . . .	19
1.2.2. Modelo 2: Esfera anisótropa I . . . . .	20
1.2.3. Modelo 3: Esfera anisótropa II . . . . .	21
<b>2. Fracturas en esferas anisótropas cargadas</b>	<b>26</b>
2.1. Perturbaciones locales de la densidad . . . . .	28
2.2. Análisis de algunas soluciones exactas de esferas isotropas y anisótropas	32
2.2.1. Modelo 1: Esfera de polvo cargada . . . . .	32
2.2.2. Modelo 2: Esfera cargada isotropa . . . . .	33
2.2.3. Modelo 3: Esfera anisótropa cargada . . . . .	34
2.2.4. Modelo 4: Esfera cargada isotropa . . . . .	34
2.2.5. Modelo 5: Esfera anisótropa cargada II . . . . .	36
<b>3. CONCLUSIONES</b>	<b>42</b>
<b>Referencias</b>	<b>44</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

1.1.	Densidad y presión para el modelo descrito por las ecuaciones (1.41) y (1.41), tomando $\mu = 0.1$ y $\mu = 0.2$ . . . . .	21
1.2.	Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35) para el modelo descrito por las ecuaciones (1.41) y (1.41), tomando $\mu = 0,1$ y $\mu = 0,2$ . . . . .	23
1.3.	Densidad y presiones para el modelo descrito por las ecuaciones (1.48) a (1.50), tomando $K = 3/56\pi$ . . . . .	24
1.4.	Gráfica de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1,30) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35), para el modelo descrito por las ecuaciones (1.48) a (1.50). . . . .	24
1.5.	Densidad y presiones para el modelo descrito por las ecuaciones (1.51) a (1.50) con los parámetros $K = 3/56\pi$ y $\gamma = K/4$ . . . . .	25
1.6.	Gráfica de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1,30) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35), para el modelo descrito por las ecuaciones (1.51) a (1.53). . . . .	25
2.1.	Densidad y carga para el modelo descrito por las ecuaciones (2.53) y (2.54) . . . . .	37
2.2.	Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.53) y (2.54). . . . .	37
2.3.	Densidad, presiones y carga del modelo descrito por las ecuaciones (2.57) a (2.60) con $C_1 = 0.3$ . . . . .	38
2.4.	Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.57) y (2.60) con $C_1 = 0.3$ . . . . .	38
2.5.	Densidad, presiones y carga eléctrica del modelo descrito por las ecuaciones (2.61) a (2.64) con $C_1 = 0.4$ y $\alpha = 1$ . . . . .	39
2.6.	Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.61) y (2.64) con $C_1 = 0.4$ y $\alpha = 1$ . . . . .	39
2.7.	Densidad, presiones y carga eléctrica del modelo descrito por las ecuaciones (2.65) a (2.68) con $\mu = 0.1$ y $q = 0.1$ . . . . .	40

---

2.8. Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.65) y (2.68) con $\mu = 0.1$ y $q = 0.1$ . . . . .	40
2.9. Densidad, presiones y carga eléctrica para el modelo descrito por las ecuaciones (2.73) a (2.76) con $C = (n - 1)/2 - 0.1$ y $n = 2$ . . . . .	41
2.10. Gráficas de $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.73) y (2.76) con $C = (n - 1)/2 - 0.1$ y $n = 2$ . . . . .	41

# RESUMEN

**TÍTULO:** UTILIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACTURA PARA EL ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE CONFIGURACIONES ESFÉRICAS DE MATERIA NEUTRA O CARGADA EN RELATIVIDAD GENERAL <sup>1</sup>

**AUTOR:** Anamaría Navarro Noguera <sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Relatividad General, estabilidad, fracturas, soluciones exactas, simetría esférica, anisotropía.

**DESCRIPCIÓN:** En este trabajo de grado se revisó y extendió la metodología de fracturas (o compresiones), desarrollada por Luis Herrera et al, para determinar posibles inestabilidades en configuraciones esféricas de materia neutra o cargada en Relatividad General. La metodología consiste en evaluar la aparición de fuerzas de signo contrario, denominadas “fracturas” y “compresiones”, las cuales indican la existencia de inestabilidades del sistema. En la primera parte se consideraron configuraciones esféricas neutras isótropas y anisótropas, gobernadas por ecuaciones de estado barótropas, y se realizó una perturbación general de la densidad definida mediante una función de soporte compacto, de tal manera que la perturbación tiene lugar en una región finita y pequeña de la configuración. En la segunda parte se estudió configuraciones en las cuales, además de las características anteriormente mencionadas, existe una distribución de carga eléctrica con una dependencia funcional con la densidad, de tal manera que las perturbaciones en la densidad también afectan la carga del sistema. Se encontraron las expresiones generales de la distribución de fuerzas radiales que aparecen debido a la perturbación y que dependen en cada caso de la la densidad, las presiones y la carga del sistema analizado. Con las expresiones obtenidas, se evaluaron distintos modelos relativistas de sistemas esféricos neutros y cargados, isótropos y anisótropos, reportados en la literatura. Se encontraron algunos modelos inestables debido a la aparición de fracturas y compresiones del fluido, y bajo nuestra generalización del criterio para configuraciones neutras se mostró que es posible encontrar fracturas en sistemas isótropos. Por otra parte, encontramos un ejemplo de inestabilidad por fractura en un modelo cargado isótropo y un ejemplo de compresión en un modelo cargado anisótropo.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D, Co-director: Luis A. Núñez de Villavicencio

# Abstract

**TITLE:** USE OF THE CONCEPT OF CRACKING IN THE ANALYSIS OF THE STABILITY IN NEUTRAL AND CHARGED SPHERICAL CONFIGURATIONS IN GENERAL RELATIVITY. <sup>3</sup>

**AUTHOR:** Anamaría Navarro Noguera <sup>4</sup>

**KEYWORDS:** General Relativity, stability, cracking, exact solutions, spherical symmetry, anisotropy.

**DESCRIPTION:** We revisit and extend the cracking (or overturning) methodology, -developed by Herrera et al- to determine instabilities in spherical configurations of neutral and charged matter in General Relativity, we first consider isotropic and anisotropic spherical configurations governed by barotropic equations of state, and study a general radial perturbation of the density, which has a dependency on the radial coordinate and affects the pressures and the gradient of the radial pressure. The perturbation may be defined by a compact support function, so the perturbation occurs in a finite and small region of the configuration where the function is defined. In the second part, we have an anisotropic spherical fluid with electric charge, governed by barotropic equations of state and where the charge has a dependency with the density, thereafter the perturbation in the density has an effect in the charge as well as in the other variables. In both cases, general expressions of the distribution of radial forces that appear in the system, due to the perturbation of the density, were found. In both cases the term of the perturbation is factorized so the appearance of cracking and overturning can be studied in a independent way from the form of the perturbation. Some models of neutral and charged, isotropic and anisotropic relativistic spheres proposed in the literature are studied and some instabilities due to cracking are found, our extension of the cracking framework has shown that even isotropic configurations can exhibit cracking instabilities. A case of cracking is found in an isotropic charged model and an example of overturning is found in an anisotropic charged model.

---

<sup>3</sup>Degree Project

<sup>4</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D, Co-director: Luis A. Núñez de Villavicencio

# Introducción

Las configuraciones de materia autogravitante con simetría esférica han sido ampliamente estudiadas debido a su relevancia como una primera aproximación para el estudio de objetos astrofísicos tales como planetas, estrellas y agujeros negros. Las primeras descripciones de sistemas esféricos de materia autogravitante fueron desarrolladas en el marco de la Teoría Newtoniana de la Gravitación; sin embargo, para poder describir sistemas altamente densos, como lo son las estrellas de neutrones y los agujeros negros, es necesario utilizar la Teoría de la Relatividad General. De acuerdo con esto, existe un gran número de trabajos dedicados al estudio de soluciones a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica. Ahora bien, para describir apropiadamente objetos astrofísicos con base en una solución dada, ésta debe cumplir como mínimo ciertas condiciones de aceptabilidad, tales como las condiciones de energía, la ausencia de singularidades y el satisfacer ecuaciones de estado plausibles.

Podemos dividir el estudio de las soluciones con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en dos grupos, los que consideran sistemas isótropos, esto es, que tienen esfuerzos principales iguales, y los que se refieren a sistemas anisótropos, es decir, en los que la presión tangencial es distinta a la presión radial. En el primer grupo se encuentran la mayoría de los casos estudiados; sin embargo el estudio de los sistemas anisótropos ha presentado un gran interés recientemente debido a diversas evidencias teóricas que sugieren que ciertos fenómenos físicos pueden dar lugar a la aparición de anisotropía local. Esta clase de fenómenos pueden ocurrir en configuraciones de materia altamente densa en las transiciones de fase exóticas de procesos de colapso gravitacional, o en escenarios de baja densidad en la formación de estrellas, entre otros.

Ahora bien, pese a que existe un consenso sobre la neutralidad de la carga eléctrica en objetos astrofísicos, las configuraciones de materia cargada han sido ampliamente estudiadas en la Relatividad General de tal manera que existe una extensa cantidad de trabajos dedicados a la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con simetría esférica. Las primeras contribuciones fueron realizadas por Rosseland y Eddington [17, 49] las cuales están seguidas de un gran número de publicaciones dedicadas al estudio de carga en objetos compactos en los últimos años. Por ejemplo, este tipo de configuraciones ha despertado interés en relación a la evi-

---

dencia teórica que sugiere que puede crearse carga eléctrica en estrellas exóticas de quarks [37, 39, 42, 44, 45, 55, 56], así como también en relación a las consecuencias de la estructura de los objetos compactos debido a distribuciones particulares de carga [4, 47, 50, 51].

Por otro lado, un aspecto fundamental en la formulación de modelos de configuraciones de materia autogravitante es el análisis de su estabilidad. Es por esto que la aplicabilidad de un modelo para la descripción de un objeto astrofísico radica en su estabilidad, de manera que una solución toma importancia cuando representa un sistema estable bajo diferentes tipos de perturbaciones de sus variables. Por lo anteriormente expuesto, es muy importante determinar el tipo de fluctuaciones que puede soportar uno de estos sistemas para poder determinar la viabilidad de la solución como modelo de un sistema astrofísico. Igualmente, las inestabilidades se estudian por la relación que presentan con ciertos fenómenos físicos en los cuales son esenciales, como sucede en los colapsos cataclísmicos, coalescencia de estrellas de neutrones y erupciones de rayos gamma entre otros [33].

La estrategia mas común para el estudio de estabilidades de fluidos autogravitantes consiste en estudiar la evolución en el tiempo de las perturbaciones en las variables físicas. En Relatividad General esta metodología fue desarrollada en 1964 por Chandrasekhar para fluidos pascalianos [7–9] y después fue extendida a fluidos no-pascalianos (fluidos anisótropos) por Hillebrandt y Steinmetz en 1976 [30] y, mas recientemente, por Dev y Gleiser [12]. Sin embargo, existen otros enfoques para estudiar la estabilidad, mediante las cuales se ha obtenido diferentes criterios de estabilidad; por ejemplo, Bondi [5] propone un criterio de estabilidad adiabática para sistemas esféricos, en el cual de manera intuitiva se estudia la situación en la que una región del material se comprime rápidamente, analizando los escenarios en los que la densidad de la región comprimida es mayor o menor que la de su alrededor, obteniendo ciertos rangos de la relación masa-radio de la esfera para los cuales la esfera es estable.

Un método para el análisis de inestabilidades fue desarrollado por Herrera et al [13, 14, 27], para el cual emplearon el concepto de “fracturas” o “compresiones” en fluidos relativistas anisótropos, en el momento en que salen del equilibrio. En estos trabajos se analizan las fuerzas radiales que aparecen en el fluido debido a la perturbación de sus variables y plantean que existe una fractura o una compresión del sistema cuando aparecen fuerzas de signo contrario dentro de la configuración. En esta primera serie de trabajos los autores consideraron perturbaciones independientes y simultáneas de la densidad y la anisotropía, que además ocurren en toda la configuración. Un tiempo después, aparecen las contribuciones de Abreu et al [1], los cuales retomando estas

---

ideas consideran perturbaciones solamente en la densidad de sistemas gobernados por ecuaciones de estado barótropas, de manera que la anisotropía no se perturba de manera independiente como ocurría en los trabajos originales, sino que se modificaba de acuerdo a las ecuaciones de estado. Sin embargo, las perturbaciones de la densidad eran constantes y también ocurrían en toda la configuración. Relacionado con esta contribución está la de Manjarrés et al [38], en donde se plantea estudiar las consecuencias de la aparición de carga en un sistema neutro.

En este trabajo extendemos la metodología de fracturas para determinar posibles inestabilidades en configuraciones esféricas de materia neutra y cargada en Relatividad General, estudiando perturbaciones en la densidad de sistemas gobernados por ecuaciones de estado barótropas, y considerando que las perturbaciones tienen una dependencia funcional con la coordenada radial y están definidas en una región finita y pequeña de la esfera asumiendo que las perturbaciones están definidas por una función de soporte compacto.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2, se obtiene una expresión para las fuerzas radiales que surgen en una configuración esférica anisótropa general, gobernada por ecuaciones de estado barótropas, en la cual ocurre una perturbación en la densidad que afecta a todas las variables a través de las ecuaciones de estado. En esta expresión de las fuerzas radiales hemos podido distinguir dos factores, uno que depende de las variables de la configuración como la densidad y las presiones, y un segundo término que depende solamente de la perturbación. En el capítulo 3, se repite el mismo procedimiento anterior agregando los efectos de la presencia de carga en un sistema en el que la carga depende funcionalmente de la densidad, así que las perturbaciones en la densidad afectan la carga. En el capítulo 4 se analiza la aparición de fracturas en algunas soluciones exactas neutras isótropas y anisótropas, empleando la expresión obtenida en el capítulo 3, mientras que en el capítulo 5 se analiza la aparición de fracturas en algunas soluciones exactas de esferas cargadas isótropas y anisótropas mediante la expresión obtenida en el capítulo 4. Finalmente, se presentan las conclusiones generales del trabajo realizado.

# Fracturas en Esferas anisótropas

Consideremos un espacio tiempo con simetría esférica, cuyo elemento de línea está dado por la siguiente ecuación

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (1.1)$$

y un fluido anisótropo, cuyo tensor de momentum energía puede escribirse de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P - P_{\perp})v_{\mu}v_{\nu} , \quad (1.2)$$

donde  $u_{\mu}$  es el 4-vector velocidad,  $v_{\nu}$  un 4-vector normal los cuales están dados por

$$u_{\mu} = (e^{\nu(r)}, 0, 0, 0) , \quad v_{\mu} = (0, -e^{\lambda(r)}, 0, 0) , \quad (1.3)$$

$\rho$  representa la densidad,  $P$  la presión radial, y  $P_{\perp}$  la presión tangencial del fluido. La ecuación de continuidad del sistema está dada por

$$T^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0 , \quad (1.4)$$

y su componente radial  $T^{\alpha}{}_{r;\alpha} = 0$  puede escribirse como

$$\frac{dP}{dr} + (\rho + P)\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} - \frac{2(P_{\perp} - P)}{r} = 0. \quad (1.5)$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático y representa la sumatoria de fuerzas en la dirección radial del sistema, la cual es nula en el caso del equilibrio. En este trabajo, denotaremos este término con la letra  $\mathcal{R}$ , y nos referiremos

---

a ella como la distribución de fuerzas radiales en el sistema; esto es,

$$\mathcal{R} = \frac{dP}{dr} + (\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} - \frac{2(P_\perp - P)}{r}. \quad (1.6)$$

De acuerdo con lo anterior, en los trabajos de Herrera et al [13, 14, 27], se planteó la siguiente idea: si ocurre una perturbación que saque del equilibrio hidrostático al sistema, es posible que inmediatamente después de dicha perturbación la ecuación de equilibrio no se cumpla. Lo anterior implicaría que surgirían fuerzas radiales en el sistema debido a la perturbación, de tal manera que  $\mathcal{R} \neq 0$ . Así, los autores plantean que es posible encontrar un punto en la configuración en el cual las fuerzas tuvieran signos contrarios, denominando ésto como “fractura” o “compresión”. Un evento de estos se identifica en un cambio de signo en la distribución de fuerzas radiales que surge en el sistema. Entonces, se dice que ocurre una “fractura” del sistema en el caso de que en la parte inferior de la configuración la fuerza se dirija hacia el centro y cambie su dirección para dirigirse hacia afuera. En el caso contrario, ocurre una “compresión” del sistema, cuando en la parte interior la fuerza se dirija hacia afuera y cambia su dirección para dirigirse hacia adentro. Si una perturbación del sistema crea una fractura, encontramos que dicha configuración podría ser inestable pues podría colapsar o separarse la capa superior del fluido, por lo tanto decimos que se estaría detectando una posible inestabilidad del sistema. Por otro lado, el hecho de que un sistema no se fracture debido a una perturbación, no implica que el sistema sea estable, ya que para determinar esto habría que analizarlo con el formalismo de perturbaciones radiales [30].

## 1.1. Perturbaciones locales de la densidad

Consideremos un sistema termodinámicamente bien definido, descrito por ecuaciones de estado barótropas, esto es, cuando las presiones tienen una dependencia funcional con la densidad

$$P = P(\rho), \quad P_\perp = P_\perp(\rho), \quad (1.7)$$

y en el que la masa está definida por la siguiente expresión

$$m(\rho, r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (1.8)$$

---

Ahora, consideremos que ocurre una perturbación local de la densidad,

$$\delta\rho = \delta\rho(r) , \quad (1.9)$$

descrita por una función de soporte compacto; esto es, que es distinta de cero sólo en un conjunto cerrado y acotado. Podemos escribir entonces el cambio en la densidad como

$$\rho(r) \rightarrow \rho(r) + \delta\rho(r) . \quad (1.10)$$

Dicha perturbación en la densidad  $\delta\rho(r)$  de manera general produce fluctuaciones en todas las variables del sistema, ya que debido al tipo de ecuación de estado, estas están relacionadas. Así, representaremos la fluctuación en la función de masa como  $\delta m$ , en la presión radial como  $\delta P$ , en la presión tangencial como  $\delta P_\perp$  y en el gradiente de presión radial como  $\delta P'$ . De esta manera, estas variables presentarán cambios después de la perturbación, los cuales pueden denotarse como

$$P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P , \quad (1.11)$$

$$P_\perp(\rho + \delta\rho) \approx P_\perp(\rho) + \delta P_\perp , \quad (1.12)$$

$$P'(\rho + \delta\rho) \approx P'(\rho) + \delta P' , \quad (1.13)$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m . \quad (1.14)$$

Las perturbaciones de las variables,  $\delta P$ ,  $\delta P'$ ,  $\delta P_\perp$  y  $\delta m$  pueden ser calculadas realizando una expansión de Taylor a primer orden en las ecuaciones que definen las variables,

$$\delta P = \frac{dP}{d\rho} \delta\rho = v^2 \delta\rho , \quad (1.15)$$

$$\delta P_\perp = \frac{dP_\perp}{d\rho} \delta\rho = v_\perp^2 \delta\rho , \quad (1.16)$$

$$\delta P' = \frac{dP'}{d\rho} \delta\rho = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d\rho}{dr} \frac{dP}{d\rho} \right] \delta\rho = \frac{d}{d\rho} [\rho' v^2] \delta\rho$$

---


$$= \frac{dr}{d\rho} \frac{d}{dr} [\rho' v^2] \delta\rho = \frac{1}{\rho'} \frac{d}{dr} [\rho' v^2] \delta\rho = \left[ (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] \delta\rho, \quad (1.17)$$

$$\delta m = \frac{dm}{d\rho} \delta\rho = \frac{dr}{d\rho} \frac{dm}{dr} \delta\rho = \frac{m'}{\rho'} \delta\rho = \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \delta\rho, \quad (1.18)$$

en donde

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho}, \quad v_{\perp}^2 = \frac{dP_{\perp}}{d\rho}, \quad (1.19)$$

denotan respectivamente la velocidad del sonido en dirección radial y tangencial. Para obtener la expresión (1.18) usamos la definición de la masa (1.8), la cual hemos derivado respecto al radio para obtener

$$m' = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.20)$$

En estas ecuaciones hemos empleado la definición de la velocidad del sonido en dirección radial y tangencial para comparar estos cálculos con los del trabajo [1].

Examinemos cuáles son los efectos de los cambios de las variables del sistema en la distribución de fuerzas radiales del sistema  $\mathcal{R}$  dada por la ecuación (1.6), representándola como

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0(\rho, P, P_{\perp}, P', m) + \delta\mathcal{R}, \quad (1.21)$$

donde

$$\mathcal{R}_0(\rho, P, P_{\perp}, P', m) = 0, \quad (1.22)$$

dado que la configuración está inicialmente en equilibrio. Calculamos  $\delta\mathcal{R}$  expandiendo en series de Taylor hasta primer orden la ecuación (1.6) respecto a todas sus variables, obteniendo

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P} \delta P + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_{\perp}} \delta P_{\perp} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'} \delta P' + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} \delta m, \quad (1.23)$$

Ahora, reemplazamos las expresiones obtenidas para  $\delta P$ ,  $\delta P_{\perp}$ ,  $\delta P'$ ,  $\delta m$  y tenemos

$$\mathcal{R} = \delta\rho \left\{ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P} v^2 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_{\perp}} v_{\perp}^2 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} \left[ \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right] + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'} \left( (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right) \right\}. \quad (1.24)$$

Notemos que en esta expresión fue posible factorizar la perturbación en la densidad  $\delta\rho$ .

---

Ahora, las derivadas parciales de  $\mathcal{R}$  las calculamos de la ecuación (1.6), obteniendo

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} = \frac{4\pi r^3 P + m}{r(r - 2m)}, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} = \frac{(\rho + P)(1 + 8\pi r^2 P)}{(2m - r)^2}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} = \frac{m + 4\pi r^3(\rho + 2P)}{r(r - 2m)} + \frac{2}{r}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_{\perp}} = -\frac{2}{r}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} = 1. \quad (1.29)$$

La ecuación (1.24) representa la distribución de fuerzas radiales que se producen en una configuración anisótropa cuando ocurre una perturbación de la densidad  $\delta\rho$ . Podemos identificar dos factores en esta expresión, el primero que dependerá exclusivamente del tipo de perturbación, y el segundo que dependerá de las propiedades del sistema, es decir, de la forma funcional que tenga la densidad y las presiones, y este término será el responsable de cualquier cambio de signo de la distribución. Así que para identificar una “fractura” o “compresión” del sistema, se tendrá que evaluar si este segundo factor presenta cambios de signo, denotado como

$$\tilde{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{R}}{\delta\rho} = \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_1 + \tilde{\mathcal{R}}_2 + \tilde{\mathcal{R}}_3 + \tilde{\mathcal{R}}_4 + \tilde{\mathcal{R}}_5 \right\}, \quad (1.30)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho}, \quad (1.31)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} v^2, \quad (1.32)$$

---


$$\tilde{\mathcal{R}}_3 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_\perp} v_\perp^2, \quad (1.33)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_4 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \left[ \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right], \quad (1.34)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_5 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} \left( (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right), \quad (1.35)$$

Le hemos dado un nombre a cada uno de estos términos ( $\tilde{\mathcal{R}}_i$ ) con el fin de evaluar la contribución que hace cada uno cuando evaluemos algunos modelos propuestos en la literatura.

Por otra parte, para un sistema isótropo, tenemos que las fuerzas radiales están dadas por la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff,

$$\mathcal{R} = \frac{dP}{dr} + (\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}, \quad (1.36)$$

y después de la perturbación,

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0(\rho, P, P', m) + \delta \mathcal{R}, \quad (1.37)$$

se elimina el término de la anisotropía, obteniendo,

$$\mathcal{R} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} \delta P' + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \delta m, \quad (1.38)$$

$$\delta \mathcal{R} = \delta \rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} v^2 + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \left[ \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right] + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} \left( (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right) \right\}. \quad (1.39)$$

y en donde el único término distinto está dado por

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} = \frac{m + 4\pi r^3 (\rho + 2P)}{r(r - 2m)}. \quad (1.40)$$

Así podemos ver que también en las configuraciones isótropas en principio es posible encontrar una fractura, pues la expresión podría presentar cambios de signo dependiendo de la forma de las funciones. Este resultado difiere con los encontrados en los trabajos de los demás autores, pues en ellos se concluía que las fracturas se presentaban sólo en

---

sistemas con anisotropía.

## 1.2. Análisis de algunas soluciones exactas de esferas isótropas y anisótropas

En esta sección, analizamos la aparición de fracturas en algunos modelos de esferas isótropas y anisótropas [2, 6, 10, 15, 16, 19, 21, 22, 26, 27, 29, 31, 32, 34–36, 40, 41, 43, 48, 54, 57]. Para cada uno de estos modelos calculamos la distribución de fuerzas radiales que surge a partir de una perturbación general, dado por la ecuación (1.30), y examinamos gráficamente el cambio de signo de la distribución de fuerzas. Igualmente, analizamos gráficamente los componentes  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  de la ecuación (1.30), dados por las ecuaciones (1.31) hasta (1.35), con el fin de estudiar el comportamiento de cada uno de ellos por separado.

### 1.2.1. Modelo 1: Esfera isótropa

Empezamos estudiando los efectos de una perturbación de la densidad en la estabilidad de un modelo de esfera isótropa propuesto por Mehra en [41] y considerada físicamente viable por Delgaty y Lake [11]. Las densidades y presiones del modelo están definidas por las siguientes ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(1 - \tilde{r}^2)(\sqrt{\alpha_1} + 2\sqrt{\alpha_2})^2}{\left[\alpha_1 + 4\sqrt{\alpha_1}\alpha_2 + \frac{75\mu}{2} - \frac{75\mu}{2} \cos\left(\frac{z-z_1}{2}\right)^2\right]}, \quad (1.41)$$

$$\tilde{P} = \frac{P}{\rho_0} = \frac{1}{3}(1 - \tilde{r}^2), \quad (1.42)$$

con

$$\alpha_1 = 225 - 225\mu \cos\left(\frac{z - z_1}{2}\right), \quad (1.43)$$

$$\alpha_2 = 5\sqrt{6\mu} \sin\left(\frac{z - z_1}{2}\right), \quad (1.44)$$

---


$$z = \ln \left( \tilde{r}^2 - \frac{5}{6} + \sqrt{\tilde{r}^4 - \frac{5\tilde{r}^2}{3} + \frac{10}{15\mu}} \right), \quad (1.45)$$

$$z_1 = \ln \left( \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{19}{15\mu} - \frac{2}{3}} \right), \quad (1.46)$$

donde  $r_0^2 < 9/10\pi\rho_0$ . Si  $M = m(r_0)$  la densidad central,  $\rho_0$ , está dada por

$$\rho_0 = \frac{15M}{8\pi r_0^3} = \frac{15\mu}{16\pi r_0^2}, \quad (1.47)$$

con  $\mu = 2M/r_0$  siendo la relación masa-radio, y  $\tilde{r} = r/r_0$  la coordenada radial adimensional. En la figura 1.1 graficamos las densidades y las presiones para dos valores distintos de la relación masa-radio  $\mu$ , y en la figura 1.2 graficamos  $\tilde{\mathcal{R}}$  de la ecuación (1.30) y los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  ecuaciones (1.31) hasta (1.35), tomando dos valores distintos para la relación masa-radio  $\mu$ . Podemos observar que para la curva en la cual  $\mu = 0.2$  ocurre un cambio de signo alrededor de  $r \approx 0.35$ , lo cual indica que la configuración es inestable para perturbaciones de la densidad alrededor de ese punto, ya que una perturbación de la densidad en esa región ocasionaría una fractura.

### 1.2.2. Modelo 2: Esfera anisótropa I

Ahora presentamos el análisis de dos modelos anisótropos que fueron considerados inestables en trabajos anteriores. Primero, examinemos el modelo estudiado en [27]. Las densidades y presiones del modelo están definidas por las siguientes ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{K}{\tilde{r}^2}, \quad (1.48)$$

$$\tilde{P} = \frac{P}{r_0^2} = \frac{K}{3\tilde{r}^2} \left( \frac{7 - 9\tilde{r}^{-1/2}}{1 - 3\tilde{r}^{-1/2}} \right), \quad (1.49)$$

$$\tilde{P}_\perp = \tilde{P} - \frac{\gamma}{\tilde{r}^2}, \quad (1.50)$$

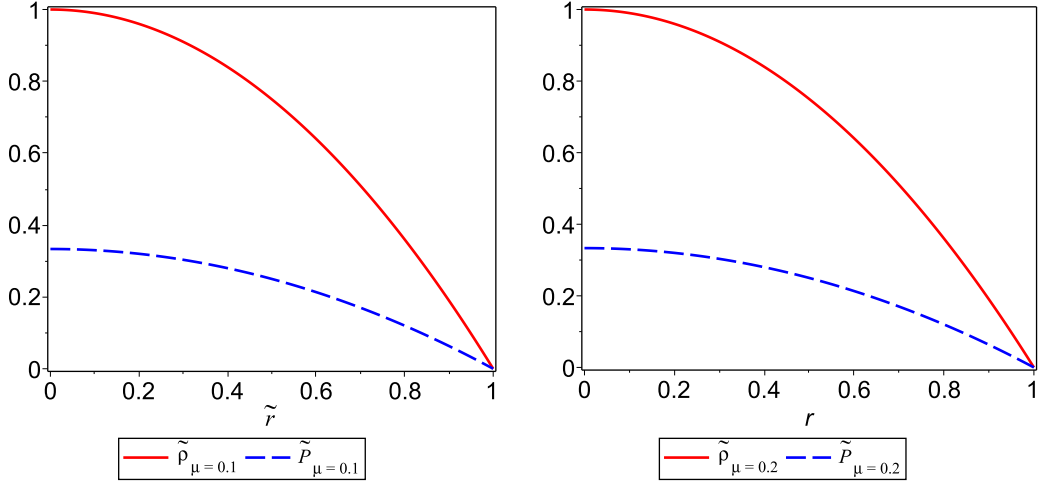


Figura 1.1: Densidad y presión para el modelo descrito por las ecuaciones (1.41) y (1.41), tomando  $\mu = 0.1$  y  $\mu = 0.2$ .

el cual fue encontrado inestable bajo perturbaciones simultáneas de la densidad y la anisotropía. En la figura 1.3 graficamos la densidad y las presiones con el parámetro  $K = 3/56\pi$ , con el cual la configuración tiene una relación masa-radio  $\mu = 0.42$  con el cual fue estudiado en el mencionado artículo. En la figura 1.4 graficamos la distribución de fuerzas radiales  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y vemos que esta curva no presenta ningún cambio de signo, así que bajo nuestro criterio encontramos que la configuración es potencialmente estable, lo cual discrepa con los resultados obtenidos anteriormente, incluso también contradice al resultado obtenido en la referencia [1], en la cual fue también encontrado inestable. También presentamos la gráfica de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  dados por las ecuaciones (1.31) hasta (1.35). Respecto al caso isótropo de este modelo, debemos mencionar que recuperamos el resultado de Herrera en [27] ya que en nuestro caso tampoco encontramos fractura cuando  $\gamma = 0$ .

### 1.2.3. Modelo 3: Esfera anisótropa II

El segundo modelo que presentamos está basado en la solución obtenida por Gokhroo and Mehra [21], la cual fue originalmente encontrada por Florides [20] y después por Stewart [53]. La densidad y presiones de este modelo están descritas por las ecuaciones

---

adimensionales:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = (1 - K\tilde{r}^2), \quad (1.51)$$

$$\tilde{P} = \frac{P}{\rho_0} = \gamma \left(1 - \frac{2m}{\tilde{r}}\right) (1 - \tilde{r}^2), \quad (1.52)$$

$$\tilde{P}_\perp = \tilde{P} + \frac{1}{2}\tilde{r}\tilde{P}' + \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{P})(\tilde{m} + 4\pi\tilde{r}^3\tilde{P})}{2(\tilde{r} - 2\tilde{m})}, \quad (1.53)$$

donde hemos escrito la densidad central  $\rho_0$  como

$$\rho_0 = \frac{15}{4\pi} \frac{M}{r_0^3(5 - 3K)} = \frac{15}{8\pi} \frac{\mu}{r_0^2(5 - 3K)}. \quad (1.54)$$

Este modelo fue estudiado en [1] en donde los autores determinaron que era un modelo potencialmente inestable pues presentaba fracturas bajo su esquema de perturbaciones. En la figura (1.5) graficamos la densidad y las presiones para este modelo, usando como parámetros  $K = 3/56\pi$  y  $\gamma = K/4$ , con los cuales la relación masa-radio es  $\mu = 0.42$ . En la figura 1.6 graficamos la distribución de fuerzas radiales  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y vemos que esta curva no presenta ningún cambio de signo, así que bajo nuestro criterio encontramos que la configuración es potencialmente estable, lo cual discrepa nuevamente con los resultados obtenidos por [1]. También presentamos la gráfica de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  dados por las ecuaciones (1.31) hasta (1.35).

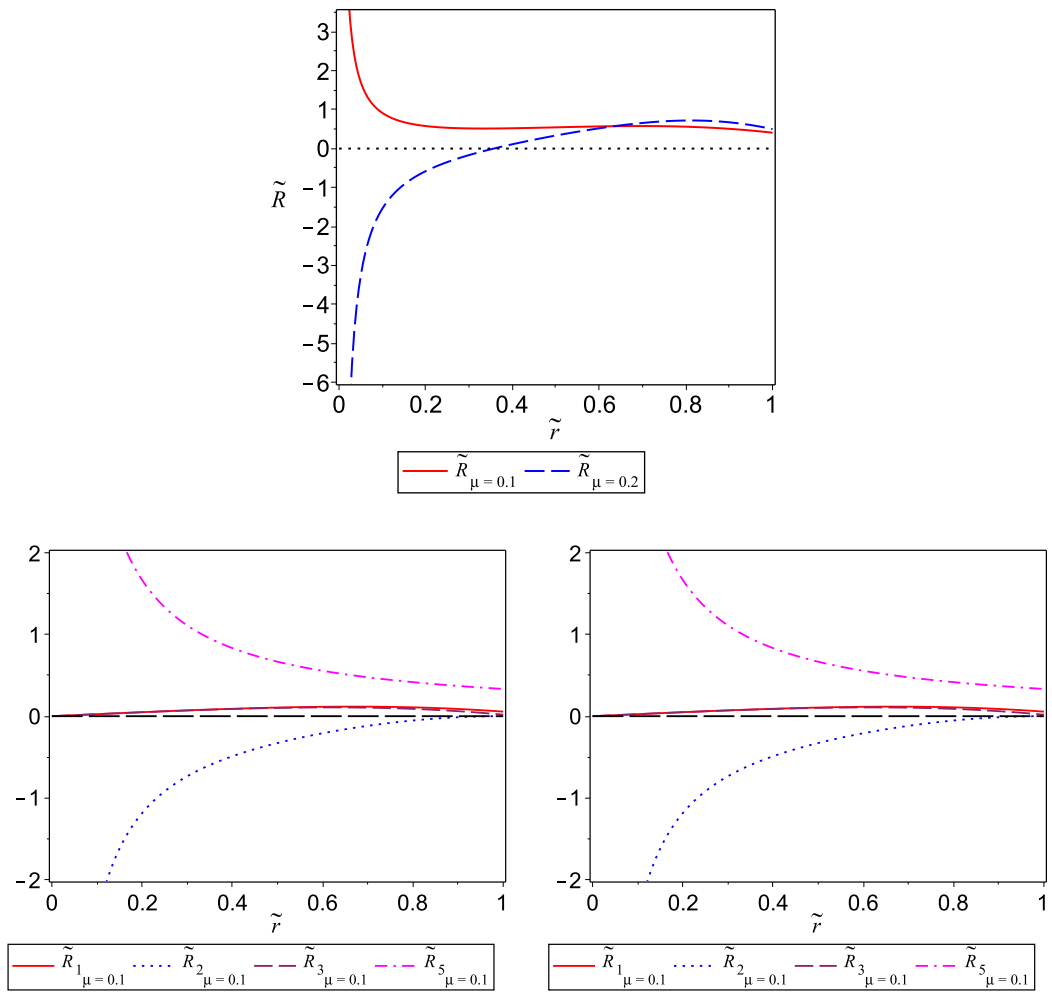


Figura 1.2: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35) para el modelo descrito por las ecuaciones (1.41) y (1.41), tomando  $\mu = 0,1$  y  $\mu = 0,2$ .

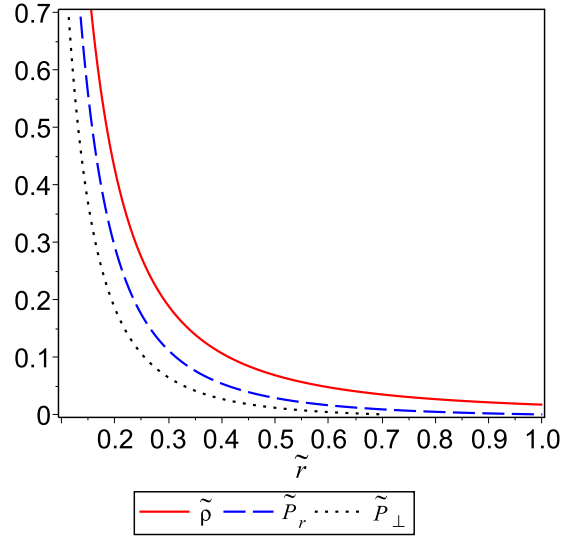


Figura 1.3: Densidad y presiones para el modelo descrito por las ecuaciones (1.48) a (1.50), tomando  $K = 3/56\pi$ .

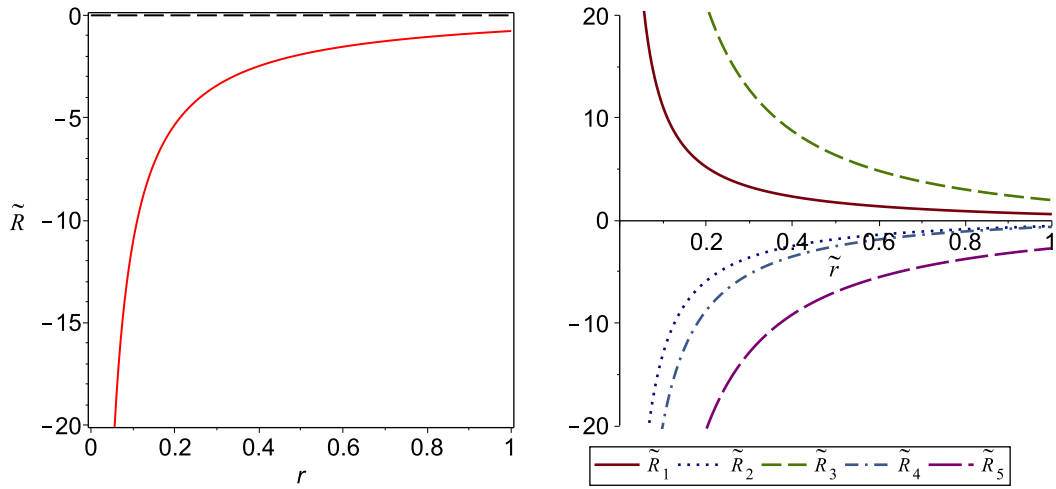


Figura 1.4: Gráfica de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35), para el modelo descrito por las ecuaciones (1.48) a (1.50).

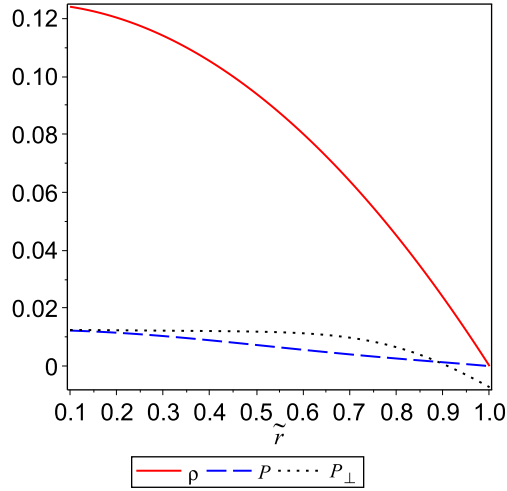


Figura 1.5: Densidad y presiones para el modelo descrito por las ecuaciones (1.51) a (1.50) con los parámetros  $K = 3/56\pi$  y  $\gamma = K/4$ .

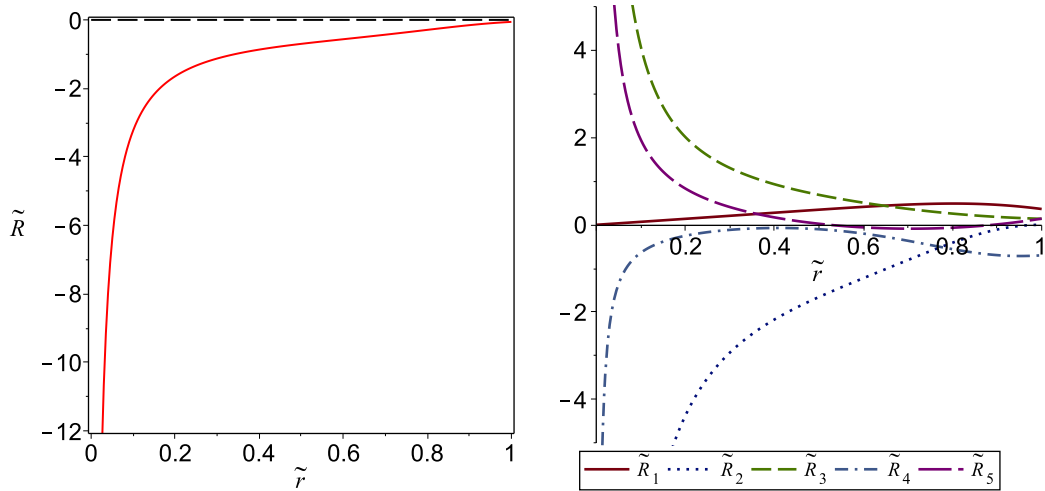


Figura 1.6: Gráfica de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (1.30) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (1.31) a (1.35), para el modelo descrito por las ecuaciones (1.51) a (1.53).

# Fracturas en esferas anisótropas cargadas

En este capítulo analizamos la aparición de fracturas (o compresiones) en configuraciones autogravitantes cargadas con simetría esférica, isotrópicas y anisótropas. Consideremos una métrica con simetría esférica como la del capítulo anterior, descrita por la ecuación (1.1), y un tensor de momentum energía compuesto por dos partes, una que se debe a la materia  $T_{\mu\nu}^{(m)}$  y otro que se debe a la carga eléctrica  $T_{\mu\nu}^{(em)}$ , de modo que lo podemos escribir como

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(em)}, \quad (2.1)$$

donde cada componente está dada por

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P - P_{\perp})v_{\mu}v_{\nu}, \quad (2.2)$$

$$T_{\mu\nu}^{(em)} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.3)$$

El tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  puede escribirse en términos del potencial electromagnético  $A_{\mu}$  como

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}, \quad (2.4)$$

por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético son

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu} = 4\pi\sqrt{-g}J^{\mu}, \quad (2.5)$$

donde  $J^{\mu} = \sigma u^{\mu}$  es el 4-vector densidad de corriente y  $\sigma$  es la densidad de carga.

---

Debido a que estamos considerando un sistema con carga eléctrica, el vector potencial solamente tiene la primera componente, esto es,

$$A_\mu = (A_0, 0, 0, 0) , \quad (2.6)$$

de esta manera, las únicas componentes del tensor electromagnético son  $F_{01}$  y  $-F_{10}$ , y las ecuaciones de campo de Maxwell (2.5) pueden escribirse de la siguiente manera

$$- (e^{-(\nu+\lambda)} r^2 F_{01})_{,r} = 4\pi r^2 e^\lambda \sigma . \quad (2.7)$$

Ahora bien, definiendo la carga  $Q(r)$  como

$$Q(r) = \int_0^r 4\pi \tau^2 \sigma e^\lambda d\tau , \quad (2.8)$$

podemos expresar la componente del tensor electromagnético  $F_{01}$  en términos de la carga,

$$F_{01} = -\frac{Q(r)}{r^2} e^{\lambda+\nu} , \quad (2.9)$$

y las componentes no-nulas del tensor de momentum energía  $T_{\mu\nu}$  pueden escribirse como

$$T_0^0 = \rho + \frac{F_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)} , \quad (2.10)$$

$$T_1^1 = -P + \frac{F_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)} , \quad (2.11)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_\perp - \frac{F_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)} . \quad (2.12)$$

Siguiendo a [3], calculamos la componente radial de la ecuación de continuidad,

$$T_{1;\mu}^\mu = 0 , \quad (2.13)$$

y obtenemos la generalización de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [46] para el equilibrio hidrostático de una esfera cargada con anisotropía dada por

$$\frac{dP}{dr} - \frac{1}{4} \frac{Q}{\pi r^4} \frac{dQ}{dr} + \frac{(\rho + P) \left( 4\pi r P + \frac{m}{r^2} - \frac{Q}{r^3} \right)}{\left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} - \frac{2(P_\perp - P)}{r} = 0 . \quad (2.14)$$

Por condiciones de continuidad en la superficie de la esfera, la solución interior debe coincidir en la frontera con la solución exterior descrita por la métrica de Reissner-

---

Norsdstrom

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_0^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_0^2}{r^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (2.15)$$

donde  $Q_0$  es la carga total y  $M$  es la masa total de la esfera, y además en la superficie de radio  $r_0$  la presión radial deberá ser nula.

Analicemos ahora la aparición de fracturas en este tipo de configuraciones siguiendo el mismo esquema del capítulo anterior. En este caso, la distribución de las fuerzas radiales del sistema está dado por

$$\mathcal{R} = \frac{dP}{dr} - \frac{1}{4} \frac{Q}{\pi r^4} \frac{dQ}{dr} + \frac{(\rho + P) \left( 4\pi r P + \frac{m}{r^2} - \frac{Q}{r^3} \right)}{\left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} - \frac{2(P_\perp - P)}{r} , \quad (2.16)$$

donde podemos ver que aparecen términos dependientes de la carga, su gradiente y de las demás variables del sistema.

## 2.1. Perturbaciones locales de la densidad

En esta sección consideraremos una esfera anisótropa cargada en equilibrio hidrostático, descrita por ecuaciones de estado barótropas,

$$P = P(\rho) , \quad P_\perp = P_\perp(\rho) , \quad (2.17)$$

y en la cual la carga tenga una dependencia con la densidad, por lo tanto podemos escribir

$$Q = Q(\rho) . \quad (2.18)$$

Bajo estas características, analizaremos ahora los efectos de una perturbación local de la densidad

$$\delta\rho = \delta\rho(r) , \quad (2.19)$$

descrita por una función de soporte compacto la cual genera fluctuaciones en la masa  $\delta m$ , la presión radial  $\delta P$ , la presión tangencial  $\delta P_\perp$ , el gradiente de presión radial  $\delta P'$ , la carga  $\delta Q$  y en el gradiente de carga  $\delta Q'$ , así que

$$P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P , \quad (2.20)$$

---


$$P_{\perp}(\rho + \delta\rho) \approx P_{\perp}(\rho) + \delta P_{\perp}, \quad (2.21)$$

$$P'(\rho + \delta\rho) \approx P'(\rho) + \delta P', \quad (2.22)$$

$$Q(\rho + \delta\rho) \approx Q(\rho) + \delta Q, \quad (2.23)$$

$$Q'(\rho + \delta\rho) \approx Q'(\rho) + \delta Q', \quad (2.24)$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m. \quad (2.25)$$

Estas perturbaciones las calculamos expandiendo en series de Taylor hasta primer orden cada una de las ecuaciones de las variables,

$$\delta P = \frac{dP}{d\rho} \delta\rho = v^2 \delta\rho, \quad (2.26)$$

$$\delta P_{\perp} = \frac{dP_{\perp}}{d\rho} \delta\rho = v_{\perp}^2 \delta\rho, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \delta P' &= \frac{dP'}{d\rho} \delta\rho = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d\rho}{dr} \frac{dP}{d\rho} \right] \delta\rho = \frac{d}{d\rho} [\rho' v^2] \delta\rho \\ &= \frac{dr}{d\rho} \frac{d}{dr} [\rho' v^2] \delta\rho = \frac{1}{\rho'} \frac{d}{dr} [\rho' v^2] \delta\rho = \left[ (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] \delta\rho, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\delta m = \frac{dm}{d\rho} \delta\rho = \frac{dr}{d\rho} \frac{dm}{dr} \delta\rho = \frac{m'}{\rho'} \delta\rho = \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \delta\rho, \quad (2.29)$$

$$\delta Q = \frac{dQ}{d\rho} \delta\rho = \frac{dQ}{dr} \frac{dr}{d\rho} \delta\rho = \frac{Q'}{\rho'} \delta\rho, \quad (2.30)$$

$$\delta Q' = \frac{dQ'}{d\rho} \delta\rho = \frac{dr}{d\rho} \frac{dQ'}{dr} \delta\rho = \frac{Q''}{\rho'} \delta\rho. \quad (2.31)$$

en donde

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho}, \quad v_{\perp}^2 = \frac{dP_{\perp}}{d\rho}, \quad (2.32)$$

denotan respectivamente la velocidad del sonido en dirección radial y tangencial. Para obtener la expresión (2.29) hemos partido de la definición de la masa (1.8), la cual hemos derivado respecto al radio para obtener

$$m' = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.33)$$

Ahora, expandimos la ecuación (2.16) en series de Taylor hasta primer orden y obtenemos la fuerza radial que surge a partir de la perturbación de la densidad

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0(\rho, m, P, P', P_{\perp}, Q, Q') + \delta\mathcal{R}, \quad (2.34)$$

donde

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P}\delta P + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'}\delta P' + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_{\perp}}\delta P_{\perp} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial Q}\delta Q + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial Q'}\delta Q', \quad (2.35)$$

y

$$\mathcal{R}_0(\rho, m, P, P', P_{\perp}, Q, Q') = 0, \quad (2.36)$$

debido a que el sistema está en equilibrio inicialmente. Reemplazado las fluctuaciones de cada una de las variables, podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} = \delta\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} \left( \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right) + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P} v^2 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'} \left( (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P_{\perp}} v_{\perp}^2 + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial Q} \left( \frac{Q'}{\rho'} \right) + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial Q'} \left( \frac{Q''}{\rho'} \right) \right], \quad (2.37) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} = \frac{4\pi r^4 P + mr - Q^2}{r(r^2 - 2mr + Q^2)}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} = \frac{(\rho + P)(r^2 - Q^2 + 8\pi r^4 P)}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2}, \quad (2.39)$$

---


$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Q} = -\frac{1}{4\pi r^4} \frac{dQ}{dr} - \frac{2(\rho + P)(4\pi r^4 P + mr - Q^2 + 1)Q}{r(r^2 - 2mr + Q^2)}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} = 1, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} = \frac{8\pi r^4 P - 3mr + Q^2 + 4\pi r^4 \rho + 2r^2}{r(r^2 - 2mr + Q^2)}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Q'} = -\frac{1}{4\pi r^4} Q, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_\perp} = -\frac{2}{r}. \quad (2.44)$$

De esta manera hemos encontrado la expresión para las fuerzas radiales que surgen a partir de una perturbación de la densidad para el caso de una esfera anisótropa cargada, y esta vez también hemos podido factorizar la función perturbación  $\delta\rho$ , así que el término en llaves es el que determina los lugares donde podría ocurrir una fractura debido a una perturbación sin importar su forma funcional. Es por eso que a continuación analizaremos este término, el cuál está dado por

$$\tilde{\mathcal{R}} = \frac{\delta R}{\delta\rho} = \tilde{\mathcal{R}}_1 + \tilde{\mathcal{R}}_2 + \tilde{\mathcal{R}}_3 + \tilde{\mathcal{R}}_4 + \tilde{\mathcal{R}}_5 + \tilde{\mathcal{R}}_7, \quad (2.45)$$

con

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho}, \quad (2.46)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_3 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} v^2, \quad (2.48)$$

---


$$\tilde{\mathcal{R}}_4 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} \left[ (v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right], \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_5 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_\perp} v_\perp^2, \quad (2.50)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_6 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Q} \frac{Q'}{\rho'}, \quad (2.51)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_7 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Q'} \frac{Q''}{\rho'}. \quad (2.52)$$

Hemos enumerado cada uno de sus componentes, con el fin de analizar la contribución de cada uno de ellos en cada uno de los modelos que estudiaremos en la sección siguiente.

## 2.2. Análisis de algunas soluciones exactas de esferas isótropas y anisótropas

En esta sección evaluaremos algunos modelos de esferas isótropas y anisótropas con carga eléctrica que han sido propuestas en la literatura, esto lo hacemos con el fin de examinar la aparición de fracturas en este tipo de configuraciones. Para ello calculamos la distribución de fuerzas radiales (2.45) examinando gráficamente si tienen cambio de signo. También graficaremos los componentes  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , dados por las ecuaciones (2.49) hasta (2.52) para observar el comportamiento de cada uno de ellos por separado.

### 2.2.1. Modelo 1: Esfera de polvo cargada

Consideremos un modelo de esfera de polvo cargada propuesto por Herrera et al en [28]. La densidad, las presiones y la carga de este modelo están descritos por las siguientes ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{1}{16\pi \tilde{r}^2}, \quad (2.53)$$

---


$$\tilde{Q} = \frac{Q}{r_0} = \frac{1}{2}\tilde{r}, \quad (2.54)$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}_\perp = 0, \quad (2.55)$$

donde hemos empleado una coordenada radial adimensional dada por

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0}. \quad (2.56)$$

En la figura 2.1 presentamos la gráfica de la densidad y la carga para este modelo, y al sustituir las expresiones para la densidad, la carga y las presiones en la ecuación 2.45, presentamos en la figura 2.2 su grafica y los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  que lo componen por separado, ecuaciones (2.49) hasta (2.52). Puede verse que este modelo es estable bajo nuestro esquema de perturbaciones ya que no hay un cambio de signo en la curva de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

### 2.2.2. Modelo 2: Esfera cargada isótropa

En esta sección consideramos una solución de una esfera isótropa cargada propuesta también en [28], descrita por las ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{4\tilde{r}^2 C_1 - \tilde{r}^2 + 1}{\tilde{r}^2} \right), \quad (2.57)$$

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{r_0} = \frac{(2C_1 - 1)\tilde{r}}{\sqrt{2 - 4C_1}}, \quad (2.58)$$

$$\tilde{P} = P r_0^2 = -\frac{1}{16\pi} \frac{-4C_1 + 4C_1\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 + 1}{\tilde{r}^2}, \quad (2.59)$$

$$\tilde{P}_\perp = P_\perp r_0^2 = \tilde{P}. \quad (2.60)$$

Ahora, sustituyendo las expresiones de la densidad, la carga y las presiones en la ecuación (2.45), presentamos en la figura (2.4) su gráfica y la de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  que la componen de manera separada, ecuaciones (2.49) hasta (2.52), tomando  $C_1 = 0.3$ . De-

---

bido a que no encontramos un cambio de signo en la primera curva, determinamos que el modelo es estable ya que no hay aparición de fracturas.

### 2.2.3. Modelo 3: Esfera anisótropa cargada

Ahora consideremos un modelo anisótropo cargado propuesto en [28], descrito por las ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{(3C_1 - 1)}{8\pi\tilde{r}^2} \left[ \frac{(1 - C_1)}{\tilde{r}^2(3C_1 - 1)} + 1 + \alpha^2 \left( 1 - \frac{3\tilde{r}^2}{2} \right) \right], \quad (2.61)$$

$$\tilde{P} = P r_0^2 = \frac{(3C_1 - 1)}{8\pi\tilde{r}^2} (1 - \tilde{r}^2) (1 - \alpha^2\tilde{r}^2), \quad (2.62)$$

$$\tilde{P}_\perp = P_\perp r_0^2 = \frac{(1 - 2C_1)}{8\pi\tilde{r}^2} + \tilde{P}, \quad (2.63)$$

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{r_0} = \frac{\sqrt{3\alpha C_1 - \alpha\tilde{r}^3}}{2}. \quad (2.64)$$

En la figura 2.5 presentamos la gráfica de la densidad, las presiones y la carga usando como parámetros  $C_1 = 0.4$  y  $\alpha = 1$ , en la figura 2.6 graficamos  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45), y los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) hasta (2.52). De nuevo, determinamos que el sistema es potencialmente estable pues no encontramos que se fracture.

### 2.2.4. Modelo 4: Esfera cargada isótropa

Analizamos ahora una esfera isótropa cargada propuesta en [52], descrito por las siguientes ecuaciones adimensionales

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{5\tilde{r}^2 - 3 - 3\alpha_4 q^2 + 3\mu\alpha_4^4 - 3\alpha_4^2 q^2}{8\pi\alpha_4^2} + \frac{q^2}{4\pi\tilde{r}^2}, \quad (2.65)$$

$$P = \tilde{P} r_0^2 = \frac{2\sqrt{\alpha_4^2 + (1 + \alpha_4 q^2 - \mu\alpha_4^2 + \alpha_4^2 q^2)\tilde{r}^2 - \tilde{r}^4 - \alpha_4^2 q^2}}{8\pi\alpha_4^2},$$

---


$$+ \frac{1 + \alpha_4 q^2 (q^2 - \mu) \alpha_4^2 - \tilde{r}^2}{8\pi \alpha_4^2} + \frac{q^2}{8\pi \tilde{r}^2}, \quad (2.66)$$

$$\tilde{Q} = Q r_0^2 = q \tilde{r}, \quad (2.67)$$

$$\tilde{P}_\perp = \tilde{P}, \quad (2.68)$$

con

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \frac{1}{3} \frac{(12\mu - 12 - q^4)(\mu^2 - 4q^2\mu + 4q^4)}{(\mu - 2q^2)(\alpha_2(\mu - 2q^2)^2(\mu^2 - 4q^2\mu + 4q^4)^2)^{1/3}} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{(\mu - 2q^2)}, \quad (2.69)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} \frac{(\alpha_2(\mu - 2q^2)^2(\mu^2 - 4q^2\mu + 4q^4)^2)^{1/3}}{(\mu - 2q^2)(\mu^2 - 4q^2\mu + 4q^4)}, \quad (2.70)$$

$$\alpha_2 = 18q^2\mu + 36q^2 - q^6 - 108q^4 + 6\sqrt{3}\alpha_1, \quad (2.71)$$

$$\alpha_1 = [16\mu^3(-48 - q^4)\mu^2 + (48 + 20q^4 - 36q^6)\mu - 16 + 2q^{10} + 8q^4 + 107q^8 - 72q^6]^{1/2}. \quad (2.72)$$

En la figura 2.7, graficamos la densidad, las presiones y la carga para este modelo usando los parámetros  $\mu = 0.1$  y  $q = 0.1$ . En la figura 2.8 graficamos  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45), y los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  ecuaciones (2.49) hasta (2.52). Ahora, en contraste con los casos anteriores, encontramos un cambio de signo alrededor de  $\tilde{r} = 0.7$ , es decir, encontramos que en el sistema aparecería una fractura si ocurriera una perturbación de la densidad alrededor de ese punto. Así, determinamos que este modelo es inestable bajo perturbaciones de la densidad.

---

### 2.2.5. Modelo 5: Esfera anisótropa cargada II

Ahora analizamos un modelo anisótropo cargado propuesto en [18], descrito por las ecuaciones

$$\tilde{\rho} = \rho r_0^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{n + \tilde{r}^2}{(1 + 2n - C) \tilde{r}^2}, \quad (2.73)$$

$$\tilde{P} = P r_0^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{1 + \tilde{r}^2}{(1 + 2n - C) \tilde{r}^2}, \quad (2.74)$$

$$\tilde{P}_\perp = P_\perp r_0^2 = C \tilde{P}, \quad (2.75)$$

$$\tilde{Q} = Q r_0 = \sqrt{\frac{\tilde{r}^2 (1 + n - 2C - \tilde{r}^2(1 - C))}{2 + 4n - 2C}}. \quad (2.76)$$

En la figura 2.9 graficamos la densidad, las presiones y la carga para este modelo usando los parámetros  $C = (n - 1)/2 - 0.1$  y  $n = 2$ . En la figura 2.10 graficamos  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45), y los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$  ecuaciones (2.49) hasta (2.52). Ahora, al igual que en el ejemplo anterior, encontramos un caso en el cual el modelo se fractura debido a una perturbación en la densidad, esto ocurre alrededor de  $\tilde{r} = 0.6$ , y así, determinamos que la configuración es inestable bajo perturbaciones de la densidad.

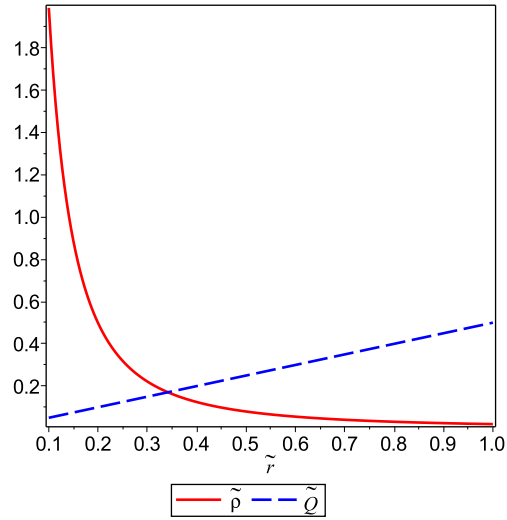


Figura 2.1: Densidad y carga para el modelo descrito por las ecuaciones (2.53) y (2.54)

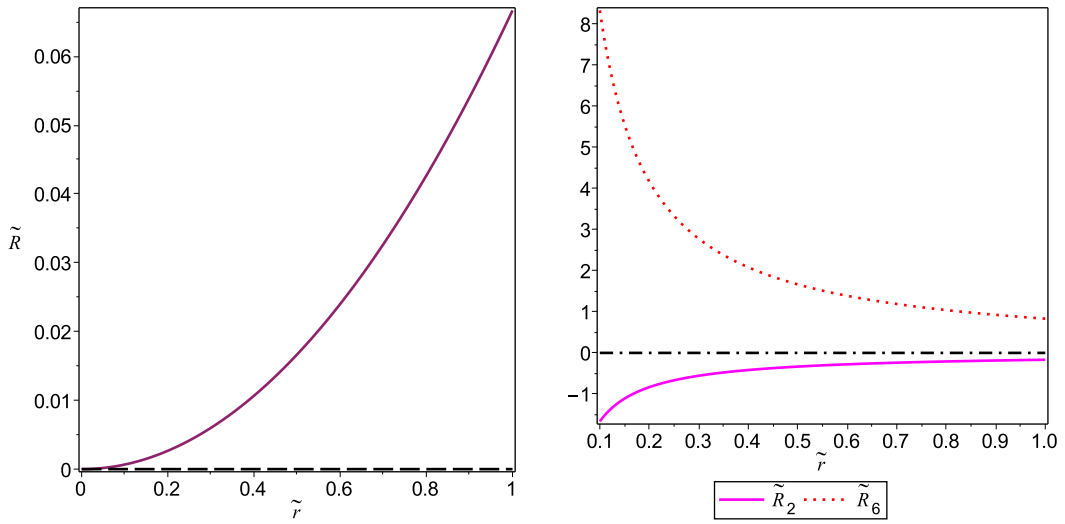


Figura 2.2: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.53) y (2.54).

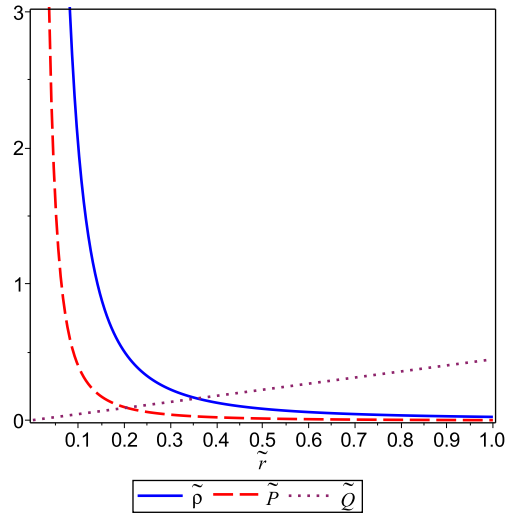


Figura 2.3: Densidad, presiones y carga del modelo descrito por las ecuaciones (2.57) a (2.60) con  $C_1 = 0.3$ .

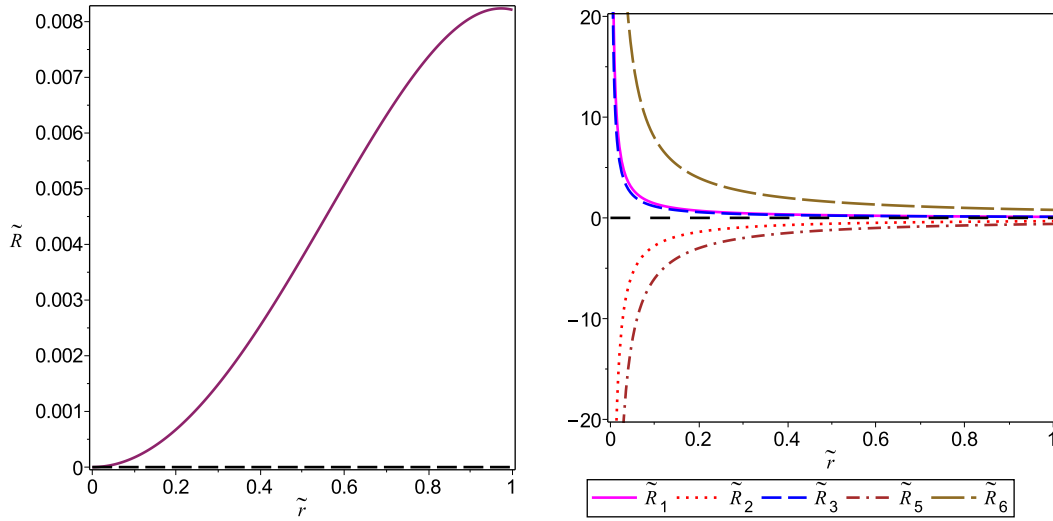


Figura 2.4: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.57) y (2.60) con  $C_1 = 0.3$ .

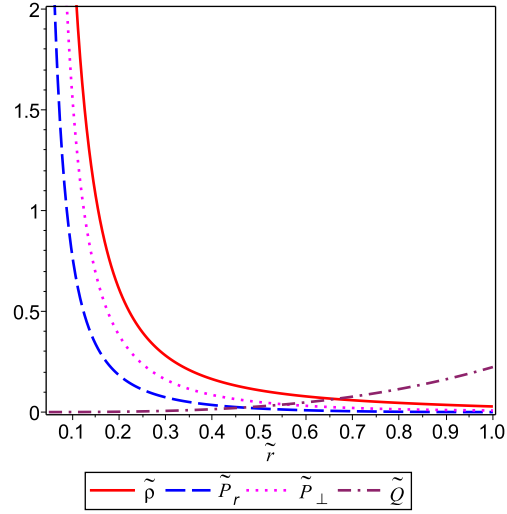


Figura 2.5: Densidad, presiones y carga eléctrica del modelo descrito por las ecuaciones (2.61) a (2.64) con  $C_1 = 0.4$  y  $\alpha = 1$ .

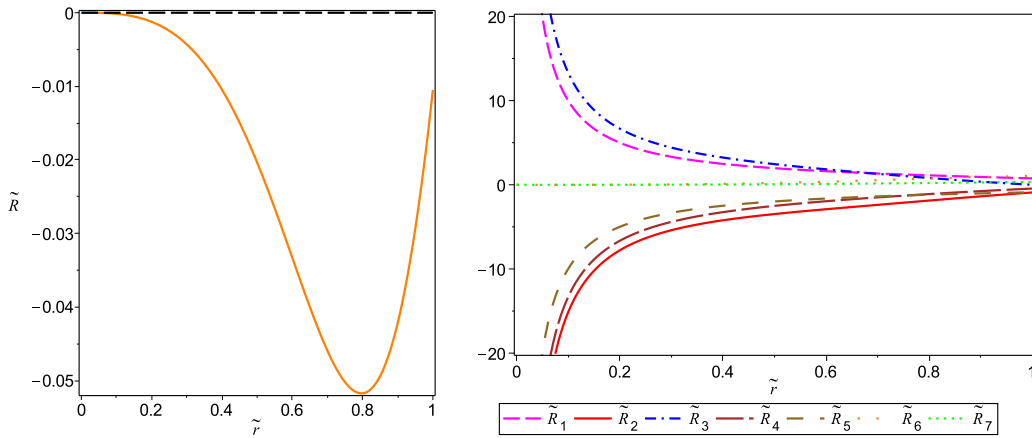


Figura 2.6: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.61) y (2.64) con  $C_1 = 0.4$  y  $\alpha = 1$ .

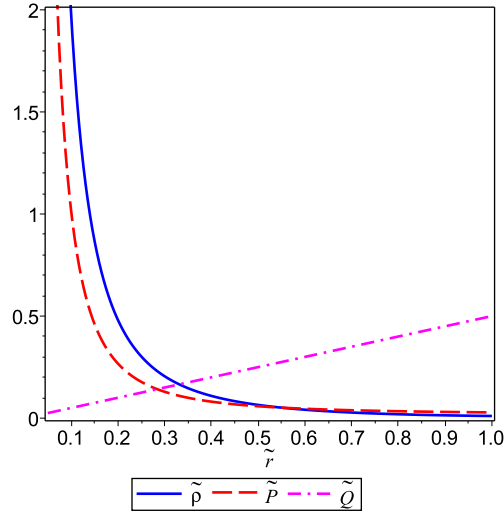


Figura 2.7: Densidad, presiones y carga eléctrica del modelo descrito por las ecuaciones (2.65) a (2.68) con  $\mu = 0.1$  y  $q = 0.1$ .

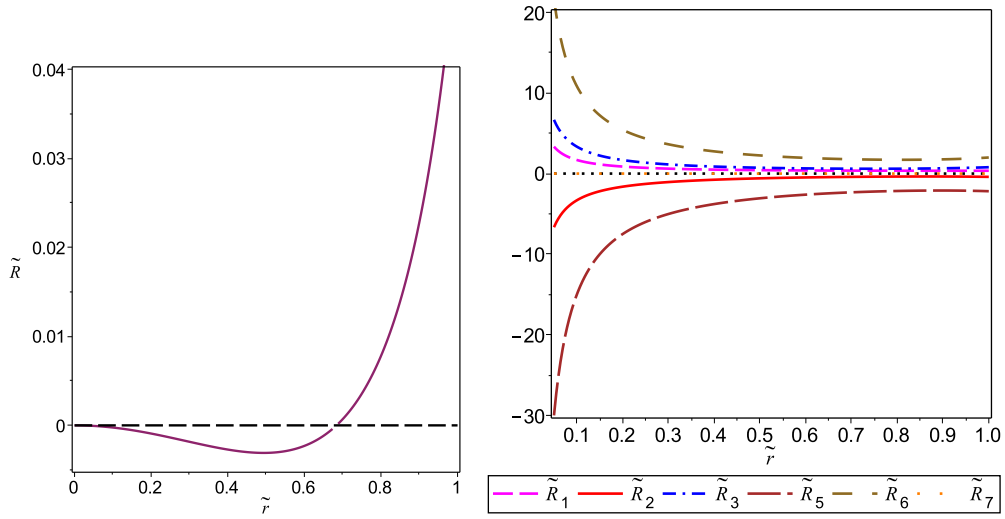


Figura 2.8: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.65) y (2.68) con  $\mu = 0.1$  y  $q = 0.1$ .

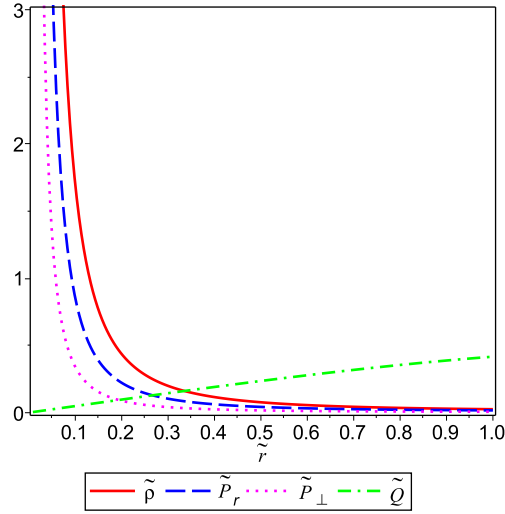


Figura 2.9: Densidad, presiones y carga eléctrica para el modelo descrito por las ecuaciones (2.73) a (2.76) con  $C = (n - 1)/2 - 0.1$  y  $n = 2$ .

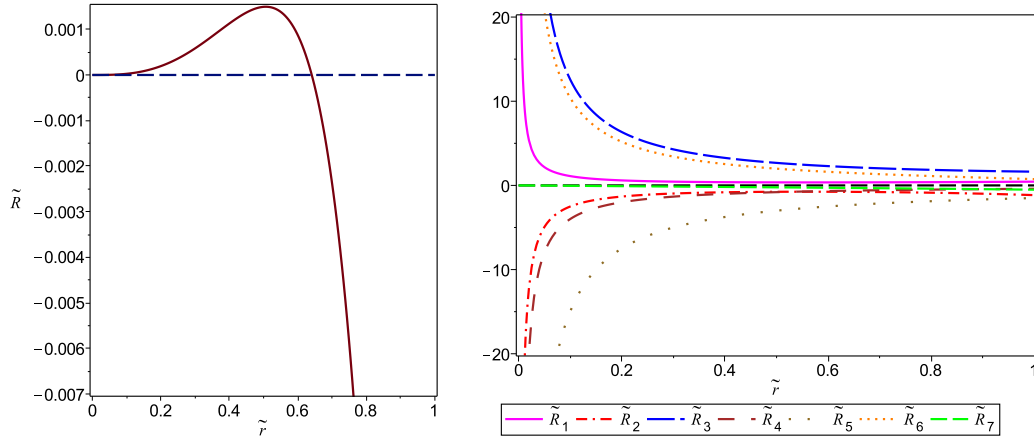


Figura 2.10: Gráficas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ , ecuación (2.45) y de los términos  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ , ecuaciones (2.49) a (2.52) para el modelo descrito por las ecuaciones (2.73) y (2.76) con  $C = (n - 1)/2 - 0.1$  y  $n = 2$ .

# CONCLUSIONES

Extendimos la metodología de fracturas desarrollada por Herrera et al con el fin de determinar posibles inestabilidades en configuraciones autogravitantes de materia cargada y neutra con simetría esférica en Relatividad General, representadas por soluciones analíticas a las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell. La metodología consiste en determinar los cambios de signo en la distribución de fuerzas radiales que surge por una perturbación en la densidad del sistema, considerando que existen ecuaciones de estado barótropas que relacionan las presiones radial y tangencial con la densidad, de manera que una perturbación local de la densidad afecte todas las variables de la configuración.

La motivación principal de nuestro trabajo fue investigar las consecuencias de considerar perturbaciones en la densidad que afectara las demás variables del sistema a través de ecuaciones de estado barótropas y no de manera independiente como ocurría en los trabajos originales. Para poder considerar perturbaciones independientes en la densidad y anisotropía, se tendría un sistema en el cual no están definidas las ecuaciones de estado. Sin embargo, las ecuaciones de estado permiten que un sistema esté termodinámicamente bien definido, y son muy útiles para poder describir las propiedades de la materia. Es por esto que decidimos investigar las consecuencias de considerar un sistema con ecuaciones de estado a través de las cuales la perturbación de la densidad afecte todas las variables del sistema.

Por otra parte, las perturbaciones sobre el gradiente de presión no se consideraron en los anteriores trabajos argumentando que éste no alcanzaba a modificarse en el momento inmediatamente posterior a la perturbación. Nosotros no vimos este argumento lo suficientemente convincente para no incluir los efectos sobre el gradiente de presión, ya que después de todo, es funcionalmente dependiente de la densidad y estaría afectado por sus fluctuaciones.

---

Las expresiones para la fuerza radial obtenida, en los casos neutro y cargado, a partir de una perturbación local de la densidad de dependencia funcional general, consta de dos factores, uno es la perturbación de la densidad y otro que depende de la densidad, las presiones y la masa. Esto nos permitió evaluar la aparición de fracturas en distintas soluciones bajo una perturbación general de forma funcional desconocida, lo cual implica conocer si el fluido tiene tendencia a presentar fracturas o compresiones bajo cualquier tipo de perturbación. El carácter general de la perturbación considerada permite que ésta esté definida por una función de soporte compacto, es decir, que sólo ocurra en pequeño cascarón de la configuración, de esta manera la distribución de fuerzas resultante solamente estaría presente en esa región, con lo cual podemos asumir una delimitación en la perturbación.

Como resultados, encontramos una solución esférica isótropa que presentaba fractura, lo cual contrasta con las conclusiones obtenidas en los trabajos anteriores, pues en todos ellos se había concluido que las fracturas sólo podrían ocurrir en soluciones anisótropas. Por otra parte, al analizar modelos estudiados bajo los enfoques de los trabajos anteriores, al no encontrar fracturas que se detectaban en dichos trabajos, vemos que se introducen grandes diferencias al haber considerado perturbaciones locales, cambios en el gradiente de presión y la dependencia a través de las ecuaciones de estado. Para el caso cargado, encontramos un ejemplo de fractura para una solución anisótropa y uno de compresión para un modelo isótropo, como también encontramos soluciones que no presentaban fracturas o compresiones.

Por medio del análisis implementado en este trabajo, concluimos que hemos encontrado un novedoso y sencillo método de detección de fracturas, las cuales indican posibles inestabilidades, y para el cual sólo se necesita conocer la definición de la densidad, las presiones y la carga eléctrica (en el caso cargado) de la solución bajo estudio.

Los resultados de este trabajo fueron presentados en el evento *The Spanish Relativity Meeting, 1-5 september 2014* [23], y serán presentados en *The 14th Marcel Grossman Meeting, 12-18 july 2015*. Las versiones para publicación están disponibles en la página [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) [24, 25].

# Referencias

- [1] H. ABREU, H. HERNÁNDEZ, AND L. A. NÚÑEZ, *Sound speeds, cracking and stability of self-gravitating anisotropic compact objects*, *Class. Quant. Grav.*, 24 (2007), pp. 4631–4646.
- [2] S. S. BAYIN, *Anisotropic fluid spheres in general relativity*, *Phys. Rev. D*, 26 (1982), pp. 1262–1274.
- [3] J. D. BEKENSTEIN, *Hydrostatic equilibrium and gravitational collapse of relativistic charged fluid balls*, *Phys. Rev. D*, 4 (1971), pp. 2185–2190.
- [4] R. BELVEDERE, K. BOSHKAYEV, J. A. RUEDA, AND R. RUFFINI, *Uniformly rotating neutron stars in the global and local charge neutrality cases*, *Nuclear Physics A*, 921 (2014), pp. 33–59.
- [5] H. BONDI, *Massive Spheres in General Relativity*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 282 (1964), pp. 303–317.
- [6] H. A. BUCHDAHL, *General relativistic fluid spheres*, *Phys. Rev.*, 116 (1959), pp. 1027–1034.
- [7] S. CHANDRASEKHAR, *Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity*, *Physical Review Letters*, 12 (1964), pp. 114–116.
- [8] S. CHANDRASEKHAR, *A general variational principle governing the radial and the non-radial oscillations of gaseous masses.*, *The Astrophysical Journal*, 139 (1964), p. 664.
- [9] S. CHANDRASEKHAR, *The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity.*, *Astrophys. J.*, 140 (1964), p. 417.
- [10] M. COSENZA, L. HERRERA, M. ESCULPI, AND L. WITTEN, *Some models of anisotropic spheres in general relativity*, *Journal of Mathematical Physics*, 22 (1981), pp. 118–125.

- 
- [11] M. DELGATY AND K. LAKE, *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations*, Comput. Phys. Commun, 115 (1998), p. 395.
- [12] K. DEV AND M. GLEISER, *Anisotropic stars ii: Stability*, Gen. Relativ. Gravitation, 35 (2003), pp. 1435–1457.
- [13] A. DI PRISCO, E. FUENMAYOR, L. HERRERA, AND V. VARELA, *Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects*, Phys. Lett. A, 195 (1994), pp. 23 – 26.
- [14] A. DI PRISCO, L. HERRERA, AND V. VARELA, *Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy*, Gen. Relativ. Gravitation, 29 (1997), pp. 1239–1256.
- [15] M. C. DURGAPAL, *A class of new exact solutions in general relativity*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 15 (1982), p. 2637.
- [16] M. C. DURGAPAL AND R. BANNERJI, *New analytical stellar model in general relativity*, Phys. Rev. D, 27 (1983), pp. 328–331.
- [17] A. EDDINGTON, *The Internal Constitution of Star*, Cambridge University Press, 1926.
- [18] M. ESCULPI AND E. ALOMÁ, *Conformal anisotropic relativistic charged fluid spheres with a linear equation of state*, Eur. Phys. J. C, 67 (2010), pp. 521–532.
- [19] M. R. FINCH AND J. E. F. SKEA, *A realistic stellar model based on an ansatz of Duorah and Ray*, Classical and Quantum Gravity, 6 (1989), pp. 467–476.
- [20] P. S. FLORIDES, *A new interior schwarzschild solution*, Proc. Roy. Soc. Lond, A337 (1974), pp. 529 – 535.
- [21] M. K. GOKHROO AND A. L. MEHRA, *Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity*, Gen. Rel. Grav., 26 (1994), pp. 75 – 84.
- [22] S. P. GOLDMAN, *Physical solutions to general-relativistic fluid spheres*, ApJ, 226 (1978), pp. 1079–1086.
- [23] G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking of Anisotropic Spheres in General Relativity Revisited*, J. Phys.: Conf. Ser., 600 (2015), p. 012014.

- 
- [24] G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking and instability of isotropic and anisotropic relativistic spheres*, (Preprint *arXiv:1410.7733* 2014).
- [25] G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking in charged relativistic spheres*, (Preprint *arXiv:1505.05550* 2015).
- [26] H. HEINTZMANN, *New exact static solutions of einsteins field equations*, *Zeitschrift für Physik*, 228 (1969), pp. 489–493.
- [27] L. HERRERA, *Cracking of self-gravitating compact objects*, *Phys. Lett. A*, 165 (1992).
- [28] L. HERRERA AND J. PONCE DE LEÓN, *Isotropic and anisotropic charged spheres admitting a one-parameter group of conformal motions*, *J. Math. Phys.*, 26 (1985), pp. 2302–2307.
- [29] L. HERRERA, A. D. PRISCO, J. OSPINO, AND E. FUENMAYOR, *Conformally flat anisotropic spheres in general relativity*, *Journal of Mathematical Physics*, 42 (2001), pp. 2129–2143.
- [30] W. HILLEBRANDT AND K. O. STEINMETZ, *Anisotropic neutron star models-Stability against radial and nonradial pulsations*, *Astronomy and Astrophysics*, 53 (1976).
- [31] S. M. HOSSEIN, F. RAHAMAN, J. NASKAR, M. KALAM, AND S. RAY, *Anisotropic Compact Stars with Variable Cosmological Constant*, *International Journal of Modern Physics D*, 21 (2012), p. 50088.
- [32] M. KALAM, F. RAHAMAN, S. MONOWAR HOSSEIN, AND S. RAY, *Central density dependent anisotropic compact stars*, *The European Physical Journal C*, 73 (2013).
- [33] O. KOROBKIN, E. B. ABDIKAMALOV, E. SCHNETTER, N. STERGIIOULAS, AND B. ZINK, *Stability of general-relativistic accretion disks*, *Phys. Rev. D*, 83 (2011), p. 043007.
- [34] B. KUCHOWICZ, *General relativistic fluid spheres. IV. Differential equations for non-charged spheres of perfect fluid.*, *Acta Physica Polonica*, 2 (1971), pp. 657–667.
- [35] K. LAKE, *All static spherically symmetric perfect-fluid solutions of einstein’s equations*, *Phys. Rev. D*, 67 (2003), p. 104015.

- 
- [36] K. LAKE, *Generating static spherically symmetric anisotropic solutions of Einstein's equations from isotropic Newtonian solutions*, Phys. Rev. D, 80 (2009), p. 064039.
- [37] M. K. MAK AND T. HARKO, *Quark stars admitting a one-parameter group of conformal motions*, Int. J. Mod. Phys., D13 (2004), pp. 149–156.
- [38] J. MANJARRÉS, L. NÚÑEZ, AND U. PERCOCO, *Perturbaciones de carga en objetos compactos*, Revista Integración, 25 (2008), pp. 147–152.
- [39] M. MANNARELLI, G. PAGLIAROLI, A. PARISI, AND L. PILO, *Electromagnetic signals from bare strange stars*, Physical Review D, 89 (2014), p. 103014.
- [40] J. J. MATESE AND P. G. WHITMAN, *New method for extracting static equilibrium configurations in general relativity*, Phys. Rev. D, 22 (1980), pp. 1270–1275.
- [41] A. L. MEHRA, *Radially symmetric distribution of matter*, Journal of the Australian Mathematical Society, 6 (1966), pp. 153–156.
- [42] H. J. MOSQUERA-CUESTA, A. PENNA-FIRME, AND A. PÉREZ-LORENZANA, *Charge asymmetry in the brane world and formation of charged black holes.*, Phys. Rev. D, 67 (2003), p. 087702.
- [43] H. NARIAI, *On some static solutions of Einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case*, Sci. Rep. Tohoku Univ. Eighth Ser., 34 (1950), p. 160.
- [44] R. P. NEGREIROS, I. N. MISHUSTIN, S. SCHRAMM, AND F. WEBER, *Properties of bare strange stars associated with surface electric fields*, Physical Review D, 82 (2010), p. 103010.
- [45] R. P. NEGREIROS, F. WEBER, M. MALHEIRO, AND V. USOV, *Electrically charged strange quark stars*, Physical Review D, 80 (2009), p. 083006.
- [46] J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF, *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev., 55 (1939), pp. 374–381.
- [47] L. PACHÓN, J. RUEDA, AND J. SANABRIA-GÓMEZ, *Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star*, Physical Review D, 73 (2006), p. 104038.
- [48] L. PATEL AND S. VAIDYA, *Anisotropic fluid spheres in general relativity*, Acta

---

Physica Hungarica New Series Heavy Ion Physics, 3 (1996), pp. 177–188.

- [49] S. ROSSELAND, *Electrical state of a star*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 84 (1924), pp. 720–728.
- [50] M. ROTONDO, J. A. RUEDA, R. RUFFINI, AND S.-S. XUE, *Relativistic thomas-fermi treatment of compressed atoms and compressed nuclear matter cores of stellar dimensions*, Physical Review C, 83 (2011), p. 045805.
- [51] J. A. RUEDA, M. ROTONDO, R. RUFFINI, AND S.-S. XUE, *A New Family of Neutron Star Models: Global Neutrality versus Local Neutrality*, in Twelfth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, 2012, p. 1039.
- [52] T. SINGH, G. SINGH, AND A. HELMI, *Solutions of Einstein’s field equations for charged static fluid spheres*, Astrophys Space Sci, 199 (1993), pp. 113–123.
- [53] B. W. STEWART, *Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity*, J. Phys. A: Math. Gen., 15 (1982), pp. 2419–2427.
- [54] R. C. TOLMAN, *Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid*, Physical Review, 55 (1939), pp. 364–373.
- [55] V. USOV, T. HARKO, AND K. CHENG, *Structure of the electrospheres of bare strange stars*, The Astrophysical Journal, 620 (2005), p. 915.
- [56] V. V. USOV, *Electric fields at the quark surface of strange stars in the color-flavor locked phase*, Phys. Rev., D70 (2004), p. 067301.
- [57] M. WYMAN, *Radially Symmetric Distributions of Matter*, Physical Review, 75 (1949), pp. 1930–1936.

# Bibliografía

- H. ABREU, H. HERNÁNDEZ, AND L. A. NÚÑEZ, *Sound speeds, cracking and stability of self-gravitating anisotropic compact objects*, *Class. Quant. Grav.*, 24 (2007), pp. 4631–4646.
- S. S. BAYIN, *Anisotropic fluid spheres in general relativity*, *Phys. Rev. D*, 26 (1982), pp. 1262–1274.
- J. D. BEKENSTEIN, *Hydrostatic equilibrium and gravitational collapse of relativistic charged fluid balls*, *Phys. Rev. D*, 4 (1971), pp. 2185–2190.
- R. BELVEDERE, K. BOSHKAYEV, J. A. RUEDA, AND R. RUFFINI, *Uniformly rotating neutron stars in the global and local charge neutrality cases*, *Nuclear Physics A*, 921 (2014), pp. 33–59.
- H. BONDI, *Massive Spheres in General Relativity*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 282 (1964), pp. 303–317.
- H. A. BUCHDAHL, *General relativistic fluid spheres*, *Phys. Rev.*, 116 (1959), pp. 1027–1034.
- S. CHANDRASEKHAR, *Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity*, *Physical Review Letters*, 12 (1964), pp. 114–116.
- S. CHANDRASEKHAR, *A general variational principle governing the radial and the non-radial oscillations of gaseous masses.*, *The Astrophysical Journal*, 139 (1964), p. 664.
- S. CHANDRASEKHAR, *The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity.*, *Astrophys. J.*, 140 (1964), p. 417.
- M. COSENZA, L. HERRERA, M. ESCULPI, AND L. WITTEN, *Some models of anisotropic spheres in general relativity*, *Journal of Mathematical Physics*, 22 (1981), pp. 118–125.

- 
- M. DELGATY AND K. LAKE, *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations*, Comput. Phys. Commun, 115 (1998), p. 395.
- K. DEV AND M. GLEISER, *Anisotropic stars ii: Stability*, Gen. Relativ. Gravitation, 35 (2003), pp. 1435–1457.
- A. DI PRISCO, E. FUENMAYOR, L. HERRERA, AND V. VARELA, *Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects*, Phys. Lett. A, 195 (1994), pp. 23 – 26.
- A. DI PRISCO, L. HERRERA, AND V. VARELA, *Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy*, Gen. Relativ. Gravitation, 29 (1997), pp. 1239–1256.
- M. C. DURGAPAL, *A class of new exact solutions in general relativity*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 15 (1982), p. 2637.
- M. C. DURGAPAL AND R. BANNERJI, *New analytical stellar model in general relativity*, Phys. Rev. D, 27 (1983), pp. 328–331.
- A. EDDINGTON, *The Internal Constitution of Star*, Cambridge University Press, 1926.
- M. ESCULPI AND E. ALOMÁ, *Conformal anisotropic relativistic charged fluid spheres with a linear equation of state*, Eur. Phys. J. C, 67 (2010), pp. 521–532.
- M. R. FINCH AND J. E. F. SKEA, *A realistic stellar model based on an ansatz of Duorah and Ray*, Classical and Quantum Gravity, 6 (1989), pp. 467–476.
- P. S. FLORIDES, *A new interior schwarzschild solution*, Proc. Roy. Soc. Lond, A337 (1974), pp. 529 – 535.
- M. K. GOKHROO AND A. L. MEHRA, *Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity*, Gen. Rel. Grav., 26 (1994), pp. 75 – 84.
- S. P. GOLDMAN, *Physical solutions to general-relativistic fluid spheres*, ApJ, 226 (1978), pp. 1079–1086.
- G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking of Anisotropic Spheres in General Relativity Revisited*, J. Phys.: Conf. Ser., 600 (2015), p. 012014.

- 
- G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking and instability of isotropic and anisotropic relativistic spheres*, (Preprint *arXiv:1410.7733* 2014).
- G. A. GONZÁLEZ, A. NAVARRO, AND L. A. NÚÑEZ, *Cracking in charged relativistic spheres*, (Preprint *arXiv:1505.05550* 2015).
- H. HEINTZMANN, *New exact static solutions of einsteins field equations*, *Zeitschrift fur Physik*, 228 (1969), pp. 489–493.
- L. HERRERA, *Cracking of self-gravitating compact objects*, *Phys. Lett. A*, 165 (1992).
- L. HERRERA AND J. PONCE DE LEÓN, *Isotropic and anisotropic charged spheres admitting a one-parameter group of conformal motions*, *J. Math. Phys.*, 26 (1985), pp. 2302–2307.
- L. HERRERA, A. D. PRISCO, J. OSPINO, AND E. FUENMAYOR, *Conformally flat anisotropic spheres in general relativity*, *Journal of Mathematical Physics*, 42 (2001), pp. 2129–2143.
- W. HILLEBRANDT AND K. O. STEINMETZ, *Anisotropic neutron star models-Stability against radial and nonradial pulsations*, *Astronomy and Astrophysics*, 53 (1976).
- S. M. HOSSEIN, F. RAHAMAN, J. NASKAR, M. KALAM, AND S. RAY, *Anisotropic Compact Stars with Variable Cosmological Constant*, *International Journal of Modern Physics D*, 21 (2012), p. 50088.
- M. KALAM, F. RAHAMAN, S. MONOWAR HOSSEIN, AND S. RAY, *Central density dependent anisotropic compact stars*, *The European Physical Journal C*, 73 (2013).
- O. KOROBKIN, E. B. ABDIKAMALOV, E. SCHNETTER, N. STERGIIOULAS, AND B. ZINK, *Stability of general-relativistic accretion disks*, *Phys. Rev. D*, 83 (2011), p. 043007.
- B. KUCHOWICZ, *General relativistic fluid spheres. IV. Differential equations for non-charged spheres of perfect fluid.*, *Acta Physica Polonica*, 2 (1971), pp. 657–667.
- K. LAKE, *All static spherically symmetric perfect-fluid solutions of einstein's equations*, *Phys. Rev. D*, 67 (2003), p. 104015.
- K. LAKE, *Generating static spherically symmetric anisotropic solutions of Einstein's equations from isotropic Newtonian solutions*, *Phys. Rev. D*, 80 (2009), p. 064039.

- 
- M. K. MAK AND T. HARKO, *Quark stars admitting a one-parameter group of conformal motions*, Int. J. Mod. Phys., D13 (2004), pp. 149–156.
- J. MANJARRÉS, L. NÚÑEZ, AND U. PERCOCO, *Perturbaciones de carga en objetos compactos*, Revista Integración, 25 (2008), pp. 147–152.
- M. MANNARELLI, G. PAGLIAROLI, A. PARISI, AND L. PILO, *Electromagnetic signals from bare strange stars*, Physical Review D, 89 (2014), p. 103014.
- J. J. MATESE AND P. G. WHITMAN, *New method for extracting static equilibrium configurations in general relativity*, Phys. Rev. D, 22 (1980), pp. 1270–1275.
- A. L. MEHRA, *Radially symmetric distribution of matter*, Journal of the Australian Mathematical Society, 6 (1966), pp. 153–156.
- H. J. MOSQUERA-CUESTA, A. PENNA-FIRME, AND A. PÉREZ-LORENZANA, *Charge asymmetry in the brane world and formation of charged black holes.*, Phys. Rev. D, 67 (2003), p. 087702.
- H. NARIAI, *On some static solutions of Einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case*, Sci. Rep. Tohoku Univ. Eighth Ser., 34 (1950), p. 160.
- R. P. NEGREIROS, I. N. MISHUSTIN, S. SCHRAMM, AND F. WEBER, *Properties of bare strange stars associated with surface electric fields*, Physical Review D, 82 (2010), p. 103010.
- R. P. NEGREIROS, F. WEBER, M. MALHEIRO, AND V. USOV, *Electrically charged strange quark stars*, Physical Review D, 80 (2009), p. 083006.
- J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF, *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev., 55 (1939), pp. 374–381.
- L. PACHÓN, J. RUEDA, AND J. SANABRIA-GÓMEZ, *Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star*, Physical Review D, 73 (2006), p. 104038.
- L. PATEL AND S. VAIDYA, *Anisotropic fluid spheres in general relativity*, Acta Physica Hungarica New Series Heavy Ion Physics, 3 (1996), pp. 177–188.
- S. ROSSELAND, *Electrical state of a star*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 84 (1924), pp. 720–728.

---

M. ROTONDO, J. A. RUEDA, R. RUFFINI, AND S.-S. XUE, *Relativistic thomas-fermi treatment of compressed atoms and compressed nuclear matter cores of stellar dimensions*, Physical Review C, 83 (2011), p. 045805.

J. A. RUEDA, M. ROTONDO, R. RUFFINI, AND S.-S. XUE, *A New Family of Neutron Star Models: Global Neutrality versus Local Neutrality*, in Twelfth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, 2012, p. 1039.

T. SINGH, G. SINGH, AND A. HELMI, *Solutions of Einstein's field equations for charged static fluid spheres*, Astrophys Space Sci, 199 (1993), pp. 113–123.

B. W. STEWART, *Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity*, J. Phys. A: Math. Gen., 15 (1982), pp. 2419–2427.

R. C. TOLMAN, *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Physical Review, 55 (1939), pp. 364–373.

V. USOV, T. HARKO, AND K. CHENG, *Structure of the electrospheres of bare strange stars*, The Astrophysical Journal, 620 (2005), p. 915.

V. V. USOV, *Electric fields at the quark surface of strange stars in the color-flavor locked phase*, Phys. Rev., D70 (2004), p. 067301.

M. WYMAN, *Radially Symmetric Distributions of Matter*, Physical Review, 75 (1949), pp. 1930–1936.