

Inflación y Energía oscura en la Teoría Generalizada de Proca  $SU(2) - \mathcal{L}_4^1$

Carlos Andrés Bautista Torres

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

**Tabla de Contenido**

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Inflación - Energía oscura</b>	<b>14</b>
1.1. Era inflacionaria	15
1.1.1. Problema de Planitud	16
1.1.2. Problema de Horizonte	17
1.2. Era dominada por la energía oscura	17
<b>2. Galileones</b>	<b>19</b>
2.1. Galileones escalares	19
2.2. Galileones vectoriales	22
<b>3. Sistemas dinámicos</b>	<b>26</b>
3.1. Sistema dinámico autónomo	26
3.1.1. Dependencia de $x(t)$ con respecto al tiempo transcurrido	27
3.1.2. Propiedad del valor inicial	27
3.1.3. Concatenación de las soluciones	27
3.1.4. Continuidad de las soluciones con respecto a los valores iniciales.	28
3.2. Puntos críticos y estabilidad	28

INFLACIÓN Y ENERGÍA OSCURA	5
3.2.1. Definición y clasificación de un punto crítico	28
3.2.2. Análisis de la estabilidad de un punto crítico	30
<b>4. Expansión acelerada en el Lagrangiano de Proca Generalizado <math>SU(2) - \mathcal{L}_4^1</math></b>	<b>34</b>
4.1. Ecuaciones de ligadura y sistema dinámico final	34
4.2. Comportamiento asintótico de las variables y auto-ajuste fino	38
4.3. Punto crítico inflacionario	44
4.4. Diagramas de fase - Expansión acelerada tardía y primordial	48
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>52</b>
<b>Apéndices</b>	<b>60</b>

**Lista de Figuras**

Figura 3.1.	Diferentes tipos de estabilidad para puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ .	34
Figura 4.0.	Energía oscura - Comportamiento asintótico	42
Figura 4.1.	Energía oscura - Comportamiento asintótico, diferentes condiciones iniciales	44
Figura 4.2.	Inflación - Análisis del punto crítico	47
Figura 4.3.	Diagrama de fase - Comportamiento asintótico	48
Figura 4.4.	Diagrama de fase - Punto de silla	49
Figura 5.1.	Código en Maple de las ecuaciones de campo	103
Figura 5.2.	Código en Maple de las ecuaciones de movimiento	107

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Convenios utilizados en el desarrollo de la teoría	60
Apéndice B. Variaciones respecto a la métrica de tensores con información geométrica	66
Apéndice C. Variación respecto a la métrica del Lagrangiano $\mathcal{L}_4^1$	72
Apéndice D. Variación respecto a la métrica de la acción de Einstein-Hilbert	81
Apéndice E. Variación respecto a la métrica de la acción de Yang-Mills	82
Apéndice F. Variación respecto al campo del Lagrangiano $\mathcal{L}_4^1$	84
Apéndice G. Variación respecto al campo de la acción de Yang-Mills	87
Apéndice H. Variación de la acción total	89
Apéndice I. Ecuaciones de campo y de movimiento con tríada cósmica	93

## Resumen

**Título:** Inflación y Energía oscura en la Teoría Generalizada de Proca  $SU(2) - \mathcal{L}_4^1$  \*

**Autor:** Carlos Andrés Bautista Torres \*\*

**Palabras Clave:** Inflación, Energía Oscura, Galileones,  
Sistemas Dinámicos.

**Descripción:** Uno de los más grandes misterios que han intrigado a la Humanidad ha sido el conocer el origen del universo, y no con menor importancia predecir cómo será su final. Para dar respuesta a ello, en este trabajo se estudió un modelo cosmológico que caracteriza los periodos de inflación primordial y expansión acelerada tardía, dos etapas que se presume son el inicio y final en la línea de tiempo del universo; por lo tanto, son de gran importancia en la evolución del mismo y ameritan un estudio de su comportamiento a partir de los diferentes modelos cosmológicos disponibles. Lo anterior incluye estudiar la teoría generalizada de Proca  $SU(2)$ , dado que la acción que rige la Física de tales periodos mencionados no puede exhibir patologías de ningún tipo, debiendo estar contenida en la acción de los Galileones vectoriales. Para lograrlo se procedió a estudiar las ecuaciones de Friedmann y de continuidad para el modelo obtenido, y se analizaron todos los puntos críticos hallados para luego, mediante un proceso de filtrado determinar aquellos puntos que corresponden a comportamientos inflacionarios. Se encontró que solo un punto crítico, tipo silla, es capaz de describir un período inflacionario primordial lo suficientemente prolongado; sin embargo, la duración de este período es sumamente sensible a la escogencia de condiciones iniciales y de constantes de acoplamiento. También se encontró un mecanismo muy interesante de auto ajuste fino que puede dar cuenta, exitosamente, de la expansión acelerada tardía para un amplio conjunto de condiciones iniciales.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.  
Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física.

## Abstract

**Title:** Inflation and Dark Energy in the SU(2) Generalized Proca Theory -  $\mathcal{L}_4^1$  \*

**Author:** Carlos Andrés Bautista Torres \*\*

**Keywords:** Inflation, Dark Energy, Galileons, Dynamic Systems.

**Description:** One of the biggest mysteries that has intrigued humanity, has been to know the origin of the universe, and not less important, to predict how its end will be like. To respond this question, in this work we studied a cosmological model that characterize the periods of primordial inflation and late accelerated expansion, two epochs we think are the beginning and the end in the time line of the universe, therefore, they are very important in its evolution, and deserve an analysis of their behavior from the different available cosmological models. The analysis includes a study of the SU(2) generalized Proca theory, because the action describing both periods can not exhibit any kind of pathologies, then it has to be contained in the vectorial Galileons action. To achieve that, we studied the Friedmann and the continuity equations of the obtained model and analyzed every critical point we found, then, through a filtering process, we determined the points that correspond to an inflationary behavior. We found just one critical point, a settle point which is able to describe a long enough primordial inflationary period; nevertheless, the duration of this period is highly sensitive to the initial condition choice and the value of the coupling constants. We also found a very interesting self-tuning mechanism that successfully depict the late accelerated expansion for a large set of initial conditions.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física.  
Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física.

## Introducción

Como cualquier rama de la física, la cosmología se dedica a estudiar las interacciones entre la energía y el espacio-tiempo, pero las estudia a escalas tan grandes que no hay lugar para un estudio estadístico de múltiples experimentos, es decir, solo se cuenta con un universo observable y a partir de él y su comportamiento se intenta modelar su evolución en el tiempo (Mukhanov (2005); Peter and Uzan (2013)). El modelo estándar cosmológico nos habla de cuatro etapas en la evolución del universo: una era inflacionaria, una dominada por energía de tipo radiación, otra dominada por materia y la última dominada por la energía oscura, en la que se encuentra actualmente (Amendola and Tsujikawa (2010); Ellis et al. (2012); Weinberg (2008)). En el desarrollo de este trabajo se modelaron tanto el periodo inflacionario como el dominado por la energía oscura, siendo ambos periodos de expansión acelerada (Ellis et al. (2012); Weinberg (2008)).

Para explicar la expansión del universo, muchas personas incluso integrantes de la comunidad científica han dado por hecho que la teoría del Big Bang es la más acertada propuesta hasta ahora. Sin embargo, el modelo presenta algunos problemas, como el de las reliquias no deseadas, el problema de planitud y el problema de horizontes (Mukhanov (2005); Weinberg (2008); Guth (1981); Lyth and Liddle (2009)). Esto conllevó al desarrollo de otros modelos como la teoría inflacionaria (la nueva inflación) propuesta por Andréi Linde (Guth (1981); Linde (2008)). Tal explicación del origen del universo soluciona satisfactoriamente los problemas clásicos de la cosmología enunciados anteriormente, aunque a cambio de ello, el concepto de Big Bang se ve alterado noto-

riamente pues la inflación borra satisfactoriamente las condiciones previas. Esto implica considerar el Big Bang como un evento posterior a la inflación en donde hay un recalentamiento en las partículas del modelo estándar.

Desde la primera propuesta de la nueva inflación, se han desarrollado una gran cantidad de modelos inflacionarios basados en campos escalares (Martin et al. (2014)), ya que el hecho de que sean escalares permite reproducir perfectamente un universo que tiende a ser isótropo y homogéneo a escalas de  $100 Mpc$  o más (Penzias and Wilson (1965)). Uno de los trabajos pioneros en el uso adecuado de estos campos escalares fue el propuesto por G. W. Horndeski en 1974 (Horndeski (1974)). El modelo consiste en formular la acción más general para un campo escalar más gravedad, cuyas ecuaciones de campo sean de orden menor o igual a dos. Esto define los denominados Galileones, denotando como Galileones a aquellos campos escalares cuya acción conlleva a ecuaciones de movimiento de estrictamente segundo orden, y Galileones generalizados a aquellos cuya acción conlleva a ecuaciones de movimiento que incluyen también dependencia del campo y su primera derivada. Los términos de orden tres o mayores se evitan en este modelo pues implicarían que si el Lagrangiano es no degenerado (Ostrogradsky (1850); Woodard (2015, 2007)), presentaría inestabilidades de Ostrogradski (Ostrogradsky (1850)), es decir, que el Hamiltoniano de la teoría presentaría un comportamiento lineal con respecto a una de sus variables canónicas. Un Hamiltoniano que se represente por una función lineal no posee un punto crítico estable que se asocie al mínimo de energía, por tanto, el sistema podría decaer a energías negativas y de magnitud infinita, algo físicamente imposible.

A partir del 2006, gracias a la curiosidad innata de la comunidad científica, se expandió el área de investigación y se produjeron un buen número de trabajos en aras de describir la inflación usando campos vectoriales (Watanabe et al. (2009); Dimopoulos (2006, 2007); Dimopoulos et al. (2010); Beltrán Jiménez et al. (2017); Davydov and Galtsov (2016); Dimopoulos et al. (2009); Golovnev et al. (2008); Maleknejad and Sheikh-Jabbari (2011, 2013); Yokoyama and Soda (2008); Maleknejad et al. (2013)). Tiempo después, a pesar de su consistencia teórica, los modelos escalares como  $k$ -esencia (Malquarti et al. (2003); Chimento and Feinstein (2004)) e incluso los basados en la teoría de Horndeski (Horndeski (1974)), se vieron descartados para modelar el universo a gran escala debido a recientes investigaciones. Aunque los resultados de WMAP (Bennett et al. (2013)) y Planck (Ade et al. (2014)) en los años 2013 y 2014 mostraron anomalías, que estadísticamente, no comprometían la idealización de un universo a gran escala isótropo y homogéneo; los modelos contruidos a partir de campos escalares únicamente, se volvieron obsoletos al ser incompatibles con la rapidez de las ondas gravitacionales (Abbott et al. (2017); Baker et al. (2017); Creminelli and Vernizzi (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Sakstein and Jain (2017); Wang et al. (2017)). Tales observaciones motivaron más el uso de campos vectoriales en teorías inflacionarias; pero el uso inapropiado de los mismos generaría una sobrecarga de anisotropía. Para contrarrestar tal efecto hay varias opciones: se puede añadir un campo escalar cuya densidad de energía predomine a la del campo vectorial (Watanabe et al. (2009)); se puede proponer un campo vectorial oscilante cuya frecuencia sea tan alta que su efecto sea en promedio isótropo (Dimopoulos (2006, 2007); Dimopoulos et al. (2010)); o se puede elegir una configuración especial de campos vecto-

riales de tal manera que entre ellos cancelen su anisotropía, un claro ejemplo de ello es la tríada cósmica (Armendariz-Picon (2004); Rodríguez and Navarro (2017); Zhang et al. (2010, 2011)).

En el año 2009, Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi y Enrico Trincherini propusieron una fórmula genérica para determinar todos los Lagrangianos posibles con ecuaciones de segundo orden (Nicolis et al. (2009)); sin embargo, esto fue realizado para el caso escalar, y una extrapolación al caso vectorial no era trivial. Aún así, en el año 2014 Lavinia Heisenberg intentó tal generalización, obteniendo determinada cantidad de Lagrangianos, con ecuaciones de segundo orden en un espacio-tiempo curvo (Heisenberg (2014)). Años después, Erwan Allys, Patrick Peter, Juan Pablo Beltrán y Yeinzon Rodríguez publicaron los dos primeros artículos que construían paso a paso, sin el uso de ninguna fórmula genérica, todos los términos invariantes de Lorentz y de Gauge basados en Galileones vectoriales (Allys et al. (2016b,a)). Al realizar una rápida comparación de las dos metodologías, se concluyó que la fórmula genérica para Galileones escalares no se puede extrapolar por analogía al caso vectorial, pues de ella no resultan términos que violan paridad y que en cambio, sí se obtienen a partir de un desarrollo sistemático de cada Lagrangiano.

Con base en el artículo final de Allys et. al., “*Generalized SU(2) Proca theory*”(Allys et al. (2016c)), se pudo compactar todo el desarrollo de los Galileones, desde los escalares, hasta los vectoriales con simetría SU(2), en un trabajo denominado “*Scalar and vector Galileons*”(Rodríguez and Navarro (2017)). A partir de ello se realizó un análisis cosmológico de varios Lagrangianos, teniendo en cuenta que la inflación y la era dominada por la energía oscura son dos periodos del

universo, y la acción que los define debe ser libre de cualquier tipo de inestabilidades; por lo tanto, debe estar incluida en la acción para los Galileones. Bajo esa idea, se propuso estudiar los Lagrangianos que prometían un resultado acorde con las observaciones, siendo uno de ellos el analizado en la referencia (Rodríguez and Navarro (2018)).

Considerando lo previamente mencionado, el presente trabajo busca reproducir y ratificar el análisis dinámico realizado a la acción generalizada de Proca (Rodríguez and Navarro (2018)), exponiendo paso a paso el desarrollo de los cálculos, y dando el suficiente contexto teórico para una apropiada comprensión del proceso. Para ello se plantearán los siguientes capítulos: el primero corresponde a una introducción a la cosmología, allí se podrá encontrar una breve explicación tanto de la inflación como de la expansión acelerada tardía. El segundo capítulo explica apropiadamente el significado de los Galileones escalares y vectoriales y su utilidad al momento de evitar inestabilidades de Ostrogradski. El tercer capítulo es una introducción a los sistemas dinámicos como método eficaz para el buen análisis de las ecuaciones de campo y de movimiento. El cuarto y quinto capítulo muestran el resultado y las conclusiones a las cuales se llegaron, después de realizar el análisis dinámico del sistema autónomo de ecuaciones. Por último, antes de las referencias se encontrará la sección de anexos, donde se muestran los desarrollos analíticos y numéricos.

## **1. Inflación - Energía oscura**

La era inflacionaria primordial y la dominada por la energía oscura marcan el inicio y el presente de la línea de tiempo del universo. Si bien ambas épocas son de expansión acelerada, la propuesta de un periodo inflacionario primordial surge como solución a algunos problemas de origen conceptual

de la teoría del Big Bang (Weinberg (2008)), en cambio la era dominada por la energía oscura o inflación tardía se conoce debido a las observaciones del corrimiento al rojo de los cuerpos celestes (Riess et al. (1998); Perlmutter et al. (1999)). A continuación se profundizará en la definición de ambos periodos inflacionarios, así como también se abordarán los conceptos claves para la comprensión de los mismos, no sin antes recordar que la métrica espacio-temporal que define un universo en expansión, y que por lo tanto, es apropiada para el estudio de los periodos de la inflación y la expansión acelerada tardía, es la métrica de Friedmann- Lemaitre- Robertson-Walker

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1)$$

en donde las coordenadas empleadas son las esféricas,  $k$  indica la curvatura espacial y  $a(t)$  es el parámetro de expansión. Cuando se considera una época inflacionaria, la expansión es acelerada, es decir,  $\ddot{a}(t) > 0$ . A partir del parámetro de expansión se define el famoso parámetro de Hubble,  $H = \dot{a}/a$ , el cual se mide mediante el corrimiento al rojo de las galaxias y es de bastante utilidad en la cosmología, incluso es fundamental en el cálculo aproximado de la edad del universo (Calabrese et al. (2013); Cai (2007); Winget et al. (1987)).

### 1.1. Era inflacionaria

Desde su comienzo el universo ha pasado por diferentes etapas de expansión, siendo la inflación una de estas etapas en la cual el universo se expande de forma acelerada. La primer versión de la inflación fue propuesta por Alan Guth, en la cual se dice que ocurrió una expansión acelerada en el universo temprano poco tiempo después del Big Bang, cuando la energía de vacío era dominan-

te (Guth (1981)); sin embargo, tal y como se mencionó previamente, años después debido a las observaciones, Andréi Linde propone la nueva inflación, que es la teoría aceptada actualmente, en donde la expansión acelerada es previa al Big Bang, siendo este último identificado como el período de recalentamiento (decaimiento del inflatón) en las partículas del modelo estándar generando así un baño térmico (de aquí el término recalentamiento) que da cuenta de la historia posterior del universo. Lo que haya ocurrido antes de la inflación cae en los dominios de la metafísica ya que la inflación borra eficientemente la memoria de las condiciones previas. Cuando se considera la etapa inflacionaria (la nueva inflación), varios problemas físicos se pueden resolver de forma natural, tales como la planitud del universo o la homogeneidad del universo que se observa mediante la radiación cósmica de fondo (Guth (1981)). La inflación también es capaz de generar estructura a gran escala, mediante la amplificación de fluctuaciones o perturbaciones en la densidad de materia, inducidas por el principio de incertidumbre de Heisenberg (Mukhanov (2005); Lyth and Liddle (2009)). A continuación se explicarán los dos problemas mencionados anteriormente, ya que juegan un rol importante en la buena interpretación de la era inflacionaria. Cabe mencionar que existen además otros problemas resueltos al imponer un periodo inflacionario, tales como el de las reliquias no deseadas (ver capítulo 4.1 en la Ref. Peter and Uzan (2013)).

**1.1.1. Problema de Planitud.** El problema de planitud comienza con la teoría del Big Bang, cuando para obtener un universo acorde con el observado, se tienen que escoger las condiciones iniciales de manera extraordinariamente precisa. La suposición de un universo plano se puede ver representada matemáticamente mediante la constante adimensional  $\Omega \equiv 1 + \frac{k}{a^2 H^2} = 1$  (Mukhanov (2005); Peter and Uzan (2013); Lyth and Liddle (2009)), en donde  $H = \dot{a}/a$ ,  $a$  es el

parámetro de expansión y  $k$  es la curvatura espacial. El problema radica en que este valor de  $\Omega$  es inestable, y para reproducir los resultados experimentales,  $\Omega$  debía ser igual a 1 con una precisión de mínimo 18 órdenes de magnitud, lo cual corresponde a un ajuste fino (Brawer (1995)). Sin embargo, es aquí donde el concepto de la inflación resuelve el problema de una forma sencilla, debido a que si se da un período de expansión acelerada, esto causa que el universo se torne plano sin importar cual haya sido el valor inicial de  $\Omega$  (Weinberg (2008); Brawer (1995)).

**1.1.2. Problema de Horizonte.** Cuando se analizan las observaciones de radiación cósmica de fondo, se observa un universo extremadamente isótropo y homogéneo, pero, ¿por qué dos zonas del espacio que aparentemente no están conectadas causalmente tienen casi la misma temperatura? La respuesta está en que al haber un periodo inflacionario, el horizonte del universo observable se redujo drásticamente, de tal manera de que la zona visible en realidad sí está conectada causalmente (Weinberg (2008)), y lo más seguro, es que esto se siga observando hasta que el horizonte de lo observable supere la zona causal.

## **1.2. Era dominada por la energía oscura**

Al igual que la era inflacionaria, ésta es una época en la cual el universo está expandiéndose de forma acelerada, y la energía que predomina en el universo y causa tal expansión es la energía oscura (Riess et al. (1998); Perlmutter et al. (1999); Jassal et al. (2010)). Toda la materia que se observa en el universo, la que compone los planetas y estrellas, es poca en comparación con el contenido energético restante, y generan una presión positiva que aunque sea despreciable, hace que se aglomeren en presencia de la gravedad. Se esperaría que un universo en expansión el cual solo contenga este tipo de energía debería eventualmente detenerse (Amendola and Tsujikawa

(2010)), pero desde la primera observación del corrimiento al rojo de las supernovas tipo IA en 1998 (Riess et al. (1998); Perlmutter et al. (1999)), la mejor explicación a esta expansión acelerada, es la presencia de un nuevo tipo de energía, una energía de vacío que se denominó energía oscura. La mejor forma de ver matemáticamente la relación entre expansión acelerada y energía oscura es considerando la ecuación de aceleración o ecuación de Friedmann,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2)$$

siendo,  $\rho$  y  $P$  la densidad y presión absoluta de todo tipo de energía existente en el espacio. Tanto la densidad como la presión total se pueden expresar como una sumatoria de densidades y presiones respectivamente, donde cada sumando está asociado a un tipo diferente de fluido; es decir, la densidad total se define como  $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_{de}$  y la presión total como  $P = P_r + P_m + P_{de}$ , en donde las variables  $\rho_r$  y  $P_r$  son densidad y presión de radiación respectivamente, las variables  $\rho_m$  y  $P_m$  son densidad y presión de materia y las variables  $\rho_{de}$  y  $P_{de}$  son densidad y presión de la energía oscura. Luego, si se desprecian aquellos términos que se sabe no contribuyen de manera significativa a la ecuación, se tiene que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{de} + 3P_{de}). \quad (3)$$

Ahora si se considera expansión acelerada  $\ddot{a} > 0$  no queda otra opción más que  $P_{de}$  sea el término dominante y además, que sea negativo.

A lo largo del tiempo se ha intentado compilar más datos y pruebas de la existencia de la

energía oscura, desde el estudio de galaxias y radiación cósmica de fondo, hasta la observación de ráfagas de rayos gamma (Amendola and Tsujikawa (2010)). Aún así hay otras pruebas de la existencia de la energía oscura que si bien no son concluyentes, suman valor a esta idea (ver capítulo 6 en la Ref. Huterer and Shafer (2017)).

## 2. Galileones

### 2.1. Galileones escalares

Un Galileon escalar es un campo escalar cuya acción posee simetría Galileana de la forma  $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$ , siendo  $b_\mu$  un cuadrivector constante y  $c$  un escalar constante. La acción de los Galileones además conduce a ecuaciones de campo de estrictamente segundo orden (Nicolis et al. (2009)). Cuando se consideran ecuaciones de campo y de movimiento que dependen tanto de  $\pi$  como de su primera derivada, la acción pierde la simetría Galileana y los Galileones se denominan “Galileones escalares generalizados”(Deffayet et al. (2011)). Tales Galileones generalizados son los que se utilizaron en este modelo, sin embargo por comodidad, a partir de ahora se hará referencia a ellos simplemente como Galileones.

El primer paso para construir un modelo basado en Galileones escalares es definir una acción que sea invariante de Lorentz de la forma  $S = \int \mathcal{L}(\pi, \partial_\mu \pi, \partial_\mu \partial_\nu \pi) d^4x$ , donde se tiene en cuenta que la ecuación de Euler-Lagrange debe poseer términos de orden dos o menores. Aunque la dependencia del Lagrangiano con respecto a segundas derivadas puede ser un inconveniente, es posible ajustar los coeficientes de cada término de la acción para evitar los términos de mayor orden en la ecuación de movimiento, lo que implica que la acción satisface la condición necesaria

más no suficiente para evitar la inestabilidad de Ostrogradski (Ostrogradsky (1850)).

Para plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange de un campo escalar  $\pi = \pi(\vec{x}, t)$ , se propone una fórmula análoga a la definida en mecánica clásica, pero realizando los siguientes cambios:  $x \rightarrow \pi$  y  $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_\mu$ , de tal forma que la ecuación tiene la siguiente estructura,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} = 0. \quad (4)$$

Mediante la definición anterior se plantean los requisitos para la construcción de una teoría lo más general posible a partir de los Galileones escalares (Rodríguez and Navarro (2017)), para ello se deben tener en cuenta tres pautas importantes:

1. Se reconocen todos los términos invariantes de Lorentz para derivadas de segundo orden del Galileon contraídos con la métrica y el tensor de Levi-Civita.
2. Se agrupan todos los términos invariantes en combinaciones lineales generales.
3. Se establecen relaciones entre los coeficientes de las combinaciones lineales, de tal forma que los términos de orden tres o mayor se anulen.

Una vez se cumplan estas tres condiciones, se multiplican los Lagrangianos obtenidos por una función arbitraria que dependa tanto del campo como de su primera derivada,  $f_N = f_N(\pi, X)$ , siendo  $X \equiv -\frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi$ , lo que implica que los Galileones ahora se consideran generalizados.

La acción que representa lo previamente mencionado tiene la siguiente forma:

$$S = \int \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{Gal} d^4x, \quad (5)$$

donde

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{Gal} \equiv f_2(\pi, X), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{Gal} \equiv f_3(\pi, X) \square \pi, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal} \equiv f_4(\pi, X) [(\square \pi)^2 - (\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi)], \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal} \equiv f_5(\pi, X) [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi) + 2(\partial_\mu \partial^\nu \pi)(\partial_\nu \partial^\rho \pi)(\partial_\rho \partial^\mu \pi)]. \quad (9)$$

Cuando se considera un espacio-tiempo curvo, se debe realizar el proceso de “covariantización”, lo que se ve reflejado principalmente en tres cambios:  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ ,  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  y  $\mathcal{L} \rightarrow \sqrt{-g}\mathcal{L}$ . La covariantización también modifica la forma explícita de los Lagrangianos, ya que la métrica entra a ser otra variable a considerar junto con el Galileon. Esto implica que las ecuaciones de campo deben ser de hasta segundo orden, tanto para  $\pi$  como para  $g_{\mu\nu}$ , y si existen términos de mayor orden, entonces se deben añadir contra-términos. Con base en lo anterior, la acción en espacio-tiempo curvo y sus respectivos Lagrangianos se definen como

$$S = \int \left[ \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{Gal} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (10)$$

y

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{Gal} \equiv G_2(\pi, X), \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{Gal} \equiv G_3(\pi, X)\square\pi, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal} \equiv G_4(\pi, X)R + G_{4,X} [(\square\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi)], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal} \equiv & G_5(\pi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) \\ & - \frac{1}{6}G_{5,X} [(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) + 2(\nabla_\mu\nabla^\nu\pi\nabla_\nu\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\mu\pi)], \end{aligned} \quad (14)$$

siendo,  $g$  el determinante de la métrica y  $G_N(\pi, X)$  una función arbitraria que depende tanto del campo escalar  $\pi$ , como de su primera derivada, a través de  $X \equiv -\frac{1}{2}\partial_\lambda\pi\partial^\lambda\pi$ . Los primeros términos en los Lagrangianos  $\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal}$  y  $\mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal}$ , son contra-términos que aparecen debido a la covariantización, donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $G_{N,X} \equiv \partial G_N/\partial X$ .

## 2.2. Galileones vectoriales

Los Galileones vectoriales son campos tensoriales de primer orden a los cuales se les aplica la descomposición de Helmholtz,  $A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\pi$  (Jackson (1999); Stewart (2011)). La acción respectiva, al igual que en el caso escalar, debe proveer ecuaciones de campo de orden dos o menor en derivadas espacio-temporales. Si se analiza la descomposición de Helmholtz, el campo  $\pi$  se denomina el modo longitudinal del Galileon vectorial (debido a que  $\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu\partial^\mu\pi$ ) y, por lo tanto, se debe comportar como un Galileon escalar. Lo anterior significa que si se permitieran segundas derivadas del campo vectorial en la acción, aparecerían terceras derivadas de  $\pi$  en la acción para Galileones escalares, lo cual es inconsistente e indica que solo se permiten derivadas primeras de  $A_\mu$ .

Para construir la acción de Proca generalizada (acción de Proca más acción de los Galileones vectoriales) incluyendo la simetría SU(2), se requiere añadir dos lineamientos más a los presentados para el caso de los Galileones escalares; los lineamientos son:

1. Reconocer todos los términos invariantes de Lorentz mediante contracciones de  $A_\mu$  y de su primera derivada, con la métrica  $g_{\mu\nu}$  y el tensor Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ .
2. Debido a la exigencia de simetría bajo transformaciones SU(2), se deben añadir los índices de grupo a la teoría, y por lo tanto al igual que en el grupo de Lorentz, se deben buscar todos los invariantes posibles ahora usando una métrica y un tensor Levi-Civita referentes al grupo interno de simetrías,  $g_{ab}$  y  $\epsilon_{abc}$  (Allys et al. (2016c)).
3. Asociar todos los términos invariantes en combinaciones lineales generales.
4. Establecer relaciones entre los coeficientes de las combinaciones lineales de tal forma que se propaguen solo tres grados de libertad.
5. Por último, debe considerarse un importante quinto lineamiento y tiene que ver con el grado de libertad longitudinal  $\pi$ , que al ser un Galileon escalar, la aproximación  $A_\mu^a \rightarrow \partial_\mu \pi^a$  debe generar términos cuya acción haya sido obtenida en el caso escalar, de lo contrario, deben ser eliminados.

El cuarto lineamiento se puede expresar imponiendo una condición sobre el Hessiano, asegurando la propagación de tres grados de libertad espaciales (Heisenberg (2014)),  $\mathcal{H}^{0vab} = 0$  donde

$$\mathcal{H}^{\mu\nu ab} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu a}) \partial(\partial_0 A_{\nu b})}. \quad (15)$$

A partir de los lineamientos propuestos anteriormente se deduce una acción en espacio-tiempo plano de la forma

$$S = \int \left[ \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_a^\mu A_\mu^a}_{Proca} + \underbrace{\sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_{N,A}^{Gal}}_{Galileones} \right] d^4 x, \quad (16)$$

en donde

$$\mathcal{L}_{2,A}^{Gal} \equiv f_2(A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a, \tilde{F}_{\mu\nu}^a), \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{Gal} \equiv 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,A}^{Gal} \equiv & \frac{\alpha}{4} \left\{ (A_b \cdot A^b) \left[ S_\mu^{\mu a} S_{\nu a}^\nu - S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu \right] + 2(A_a \cdot A_b) \left[ S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} \right] \right\} \\ & + \frac{\kappa}{4} \left\{ (A_a \cdot A_b) \left[ S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} \right] + 2(A^{\mu a} A^{\nu b}) \left[ S_{\mu a}^\rho S_{\nu \rho b} - S_{\nu a}^\rho S_{\mu \rho b} \right] \right. \\ & \left. - (\partial^\rho A_{\mu a})(\partial_\rho A_{\nu b}) + (\partial^\rho A_{\nu a})(\partial_\rho A_{\mu b}) \right\} + \lambda \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^\mu A_{\nu b} S^{\nu\sigma a}, \end{aligned} \quad (19)$$

siendo,  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \tilde{g} \varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$ ,  $S_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu A_\nu^a + \nabla_\nu A_\mu^a$ ,  $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$  y  $\tilde{G}_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\rho\sigma a}$ , en donde  $\tilde{g}$  es la constante de acople del grupo SU(2) y  $\varepsilon_{bc}^a$  (símbolo de Levi-Civita), define las constantes de estructura para el mismo. Mediante la covariantización de

las ecuaciones obtenidas en espacio-tiempo plano se tiene que la acción en espacio-tiempo curvo es de la forma

$$S = \int \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_a^\mu A_\mu^a + \sum_{m=1}^4 \mathcal{L}_{Curv,m,A}^{Gal} + \sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_{N,A}^{Gal} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (20)$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Curv,1,A}^{Gal} &\equiv f_1^{Curv} G_{\mu\nu} A^{\mu a} A_a^\nu, \\ \mathcal{L}_{Curv,2,A}^{Gal} &\equiv f_2^{Curv} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu a} F_a^{\rho\sigma}, \\ \mathcal{L}_{Curv,3,A}^{Gal} &\equiv f_3^{Curv} \epsilon_{abc} L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu a} A^{\rho b} A^{\sigma c}, \\ \mathcal{L}_{Curv,4,A}^{Gal} &\equiv f_4^{Curv} L_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu a} A_a^\nu A^{\rho b} A_b^\sigma, \end{aligned} \quad (21)$$

son los Lagrangianos de Galileones vectoriales asociados con la curvatura del espacio-tiempo (estos términos se anulan en la aproximación  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ), y los Lagrangianos obtenidos a partir de la covariantización de los Galileones vectoriales en espacio-tiempo plano son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,A}^{Gal} &\equiv f_2(A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a, \tilde{F}_{\mu\nu}^a), \\ \mathcal{L}_{3,A}^{Gal} &\equiv 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4,A}^{Gal} \equiv & \frac{\alpha}{4} \left\{ (A_b \cdot A^b) \left[ S_{\mu}^{\mu a} S_{va}^v - S_v^{\mu a} S_{\mu a}^v + A_a \cdot A^a R \right] \right. \\
& \left. + 2(A_a \cdot A_b) \left[ S_{\mu}^{\mu a} S_v^{vb} - S_v^{\mu a} S_{\mu}^{vb} + 2A^a \cdot A^b R \right] \right\} \\
& + \frac{\kappa}{4} \left\{ (A_a \cdot A_b) \left[ S_{\mu}^{\mu a} S_v^{vb} - S_v^{\mu a} S_{\mu}^{vb} + A^a \cdot A^b R \right] \right. \\
& \left. + 2(A^{\mu a} A^{vb}) \left[ S_{\mu a}^{\rho} S_{\nu \rho b} - S_{va}^{\rho} S_{\mu \rho b} - A_a^{\rho} A_b^{\sigma} R_{\mu \nu \rho \sigma} \right. \right. \\
& \left. \left. - (\nabla^{\rho} A_{\mu a})(\nabla_{\rho} A_{vb}) + (\nabla^{\rho} A_{va})(\nabla_{\rho} A_{\mu b}) \right] \right\} \\
& + \lambda \tilde{G}_{\mu\sigma}^b A_a^{\mu} A_{vb} S^{v\sigma a}, \tag{22}
\end{aligned}$$

siendo,  $L^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\rho\sigma\gamma\delta}$ , donde  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  es el tensor de Riemann,  $R$  es el escalar de Ricci y todas las cantidades tensoriales tildadas indican el dual de Hodge de dicho tensor, i.e  $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ . Por facilidad en la interpretación física de cada uno de los términos descritos anteriormente, es conveniente realizar un análisis separado de cada uno de ellos. Este trabajo se basará en el estudio del término

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^1 \equiv & \frac{1}{4} (A_b \cdot A^b) \left[ S_{\mu}^{\mu a} S_{va}^v - S_v^{\mu a} S_{\mu a}^v + A_a \cdot A^a R \right] \\
& + \frac{1}{2} (A_a \cdot A_b) \left[ S_{\mu}^{\mu a} S_v^{vb} - S_v^{\mu a} S_{\mu}^{vb} + 2A^a \cdot A^b R \right]. \tag{23}
\end{aligned}$$

### 3. Sistemas dinámicos

#### 3.1. Sistema dinámico autónomo

A groso modo, un sistema dinámico es aquél cuya posición o estado varía con respecto a un parámetro independiente, que por lo general resulta ser el tiempo. Dicho sistema es autónomo, cuando las ecuaciones que lo definen no presentan una dependencia explícita respecto al parámetro inde-

pendiente (Caraballo and Han (2016)), es decir, se tienen ecuaciones de la forma

$$\frac{d}{dt}[x^v] = f^v(x^1, x^2, \dots, x^n), \text{ donde } v = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (24)$$

y las funciones  $x^v$  son dependientes del parámetro  $t$ . Para reconocer un sistema dinámico autónomo existen algunas propiedades básicas que se describirán a continuación.

**3.1.1. Dependencia de  $x(t)$  con respecto al tiempo transcurrido.** Cuando se considera un problema de valor inicial (también conocido como problema de Cauchy) para el sistema dinámico, de forma que  $x_0 = x(t_0)$ , y luego se realiza el cambio de variable  $t \rightarrow s = t - t_0$  donde  $t_0 \leq t$  (lo que básicamente es una traslación en el tiempo), se puede observar que las ecuaciones del sistema dinámico no se van a ver alteradas, pues la función  $f$  depende estrictamente de  $x$ ,

$$x(t; t_0, x_0) = x(t - t_0; 0, x_0). \quad (25)$$

Esto indica que se puede considerar a  $s = t - t_0 \equiv \Delta t$  como el nuevo parámetro independiente, evidenciando la idea de que la función  $x$  depende del tiempo transcurrido  $\Delta t$ .

**3.1.2. Propiedad del valor inicial.** Lo que indica esta propiedad es simplemente que la función solución  $x(t)$  debe inevitablemente contener el punto  $(x_0, t_0)$  una vez dado el problema de valores iniciales. Esto se describe matemáticamente como

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0 \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}^d \wedge t_0 \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

**3.1.3. Concatenación de las soluciones.** Cuando se considera que la solución  $x(t)$  parte de la condición inicial  $x_0$  en  $t_0 = 0$ , se puede denotar  $x_1 = x(t_1; 0, x_0)$  una vez transcurrido

un tiempo  $t = t_1$ . La nueva pareja coordenada  $(x_1, t_1)$ , al ser parte de la solución  $x(t)$ , puede interpretarse en un nuevo problema como una condición inicial, en donde se avanza en un tiempo  $t = t_2$ , de tal forma que  $x_2 = x(t_2; 0, x_1)$ . La concatenación de las soluciones implica que en el caso anterior,  $x_2$  es equivalente a un  $x_3$  fijado por un tiempo  $t_1 + t_2$  que parte de la condición inicial  $(x_0, t_0)$ , matemáticamente lo anterior se expresa como

$$x(t_2; 0, x(t_1; 0, x_0)) = x(t_1 + t_2; 0, x_0). \quad (27)$$

**3.1.4. Continuidad de las soluciones con respecto a los valores iniciales..** Para cada sistema dinámico existe una gran cantidad de soluciones exactas “ $x(t)$ ”, las cuales se van a determinar a partir de las condiciones iniciales. La propiedad de continuidad de las soluciones, con respecto a los valores iniciales indica que dos soluciones tienden a acercarse, a medida que el valor inicial de ambas soluciones tienda a ser el mismo en  $t = t_0$ , es decir,

$$x(t; t_0, x_0^*) \rightarrow x(t; t_0, x_0) \text{ a medida que } x_0^* \rightarrow x_0. \quad (28)$$

Esta propiedad no es aplicable a sistemas caóticos como el atractor de Rössler (ver capítulo 14.3 en la Ref. Lynch (2004)), pues implica que cualquier perturbación en las condiciones iniciales no conlleva a una desviación abrupta de la solución.

## 3.2. Puntos críticos y estabilidad

**3.2.1. Definición y clasificación de un punto crítico .** Un punto crítico  $x_c$ , también llamado punto de equilibrio, es aquel punto perteneciente a la solución  $x(t)$  que satisface la condición  $f(x_c) = 0$  en la ecuación (24); en otras palabras es aquel punto el cual si se considera como

estado inicial, la solución permanecerá en dicho estado a través del tiempo,  $x(t) = x_c$  (Chiang et al. (1988)). En un sistema dinámico puede haber un número considerable de puntos críticos, pero no todos ellos poseen las mismas características, es por eso que los puntos de equilibrio se clasifican en cuatro tipos (Jose and Saletan (1998)):

- **Se denomina equilibrio estable o estabilidad de Lyapunov** cuando la solución se mantiene cerca al punto crítico (ver figura 3.1a), matemáticamente se expresa de la siguiente forma: dado un  $\varepsilon > 0$  sin importar su magnitud, siempre existirá un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $|x_c - x_0| < \delta$ , entonces para  $t \geq 0$  se debe cumplir que  $|x_c - x(t)| < \varepsilon$ .
- **Se denomina equilibrio asintóticamente estable** cuando se cumple el item anterior y además, todas las soluciones que inician cerca del punto crítico eventualmente convergen a él, es decir, existe un  $\gamma > 0$  tal que si  $|x_c - x_0| < \gamma$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_c - x(t)| = 0$ . Los diagramas de fase que representan este tipo de equilibrio se muestran en las figuras 3.1b y 3.1c.
- **Se denomina equilibrio ligeramente estable** cuando se cumple la estabilidad de Lyapunov, pero la solución no tiende asintóticamente al punto crítico; por lo general, para determinar a fondo el comportamiento de la solución en estos casos, hay que realizar un análisis diferente al usual que se mostrará más adelante.
- **Se denomina equilibrio inestable** cuando no se cumple ninguno de los casos anteriores, en otras palabras, cualquier solución con condiciones iniciales cercanas a un punto crítico de este tipo, se alejará de él a medida que el sistema evoluciona en el tiempo. Algunos ejemplos

de puntos críticos que poseen este tipo de estabilidad se pueden observar en los diagramas 3.1d, 3.1e y 3.1f.

**3.2.2. Análisis de la estabilidad de un punto crítico .** Las propiedades de estabilidad caracterizan el comportamiento de un sistema cuyo estado inicial está muy cerca al punto crítico (Burton (1994)), así que para realizar un análisis matemático es conveniente hacer un cambio de coordenadas que permita centrar la función en el punto crítico a estudiar. Al formular una nueva función,

$$\zeta(t) = x(t; x_0) - x_c, \quad (29)$$

la ecuación (24) se puede reescribir como

$$\frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta + x_c) \equiv g(\zeta), \quad (30)$$

y si se analiza detalladamente, la forma de la expresión anterior es exactamente igual a la del sistema autónomo inicial de la cual se desarrolló; sin embargo, tiene la ventaja de que la función está centrada en el punto crítico,  $\zeta = 0$ . Para continuar con el análisis de estabilidad, es conveniente expandir la ecuación (30) a primer orden en series de Taylor . Si  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\frac{d\zeta^i}{dt} = \left. \frac{dg^i}{d\zeta^j} \right|_{x_c} \zeta^j(t) + \mathcal{O}(\zeta^2) \text{ donde } i, j = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (31)$$

y  $\mathbf{A} \equiv \left. \frac{dg^i}{d\zeta^j} \right|_{x_c}$  se interpreta como las componentes de una matriz (Jose and Saletan (1998);

Wiggins (2003)). Otro modo de interpretar esta expansión a primer orden es de forma matricial,  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ , lo que permite comprender con facilidad que la solución a la ecuación (31) es de forma exponencial (Perko (2013)),

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_0. \quad (32)$$

Es posible obtener pautas importantes, de lo que puede llegar a ser el comportamiento de la solución alrededor del punto crítico, analizando la expresión (32) y suponiendo que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable sobre los reales con autovalores  $\lambda^i$ . Para una buena comprensión es conveniente comenzar con el caso más sencillo, en  $\mathbb{R}^1$ .

Si  $\lambda < 0$ , la exponencial decrece permitiendo que la solución se aproxime al punto crítico a medida que  $t \rightarrow \infty$ , esto se conoce como equilibrio estable.

Si  $\lambda > 0$ , la exponencial crece rápidamente alejando la solución del punto crítico, este equilibrio se denomina inestable.

Si  $\lambda = 0$ , se obtiene una solución constante en el tiempo, esto se conoce como equilibrio levemente estable. Si se quiere obtener más información de este punto de equilibrio es necesario expandir la serie de Taylor a mayor orden.

Así mismo, se puede generalizar el caso anterior a un sistema dinámico autónomo en  $\mathbb{R}^2$  :

$$\dot{x} = f(x,y) \quad (33)$$

$$\dot{y} = g(x,y), \quad (34)$$

donde  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y tanto  $f$  como  $g$  son funciones que transforman de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si la matriz es diagonalizable sobre los reales al igual que el primer caso, se obtienen las siguientes situaciones:

Si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , la solución descrita en la ecuación (32) para ambas dimensiones es una exponencial negativa, dando como resultado un punto crítico asintóticamente estable, como se puede observar en la figura 3.1b.

Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , la solución descrita en la ecuación (32) para ambas dimensiones es una exponencial positiva, por lo tanto, el punto crítico es inestable como el que se muestra en la figura 3.1e.

Si  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , se obtiene un caso especial pues en la dirección asociada a  $\lambda_1$  la solución es atraída hacia el punto crítico, pero en la dirección relacionada con  $\lambda_2$  la solución se aleja de él. Los puntos de equilibrio que poseen esta propiedad se conocen como puntos de silla (ver figura 3.1d).

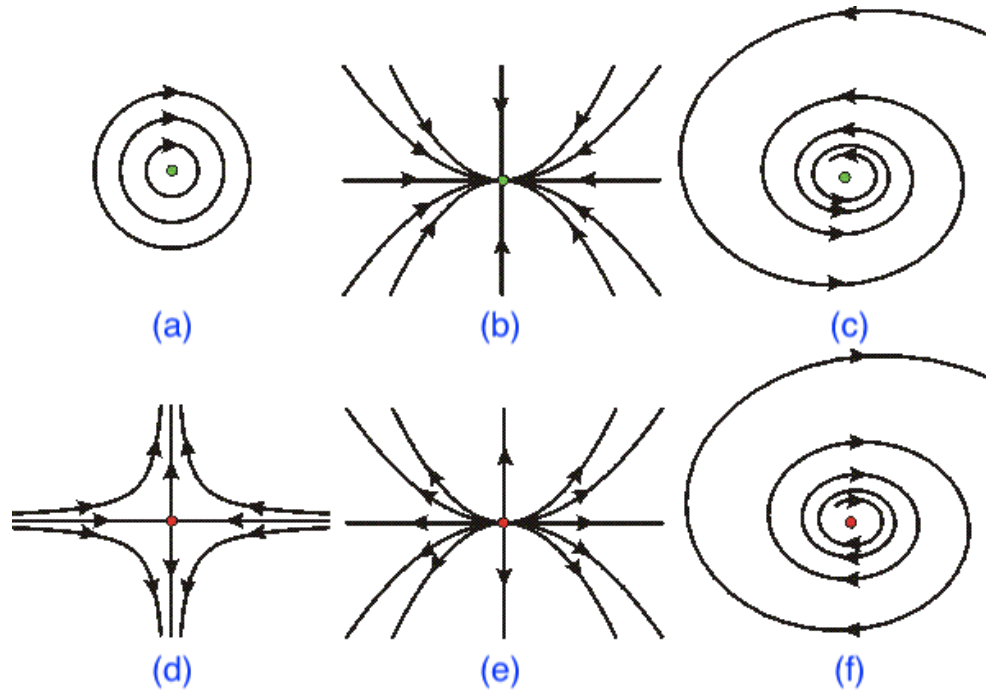
Cuando la matriz  $\mathbf{A}$  no es diagonalizable sobre los reales, se tiene un conjunto de autova-

lores complejos los cuales se analizan de forma similar a los casos anteriores. Si  $\lambda \equiv \alpha + i\beta$ , el comportamiento de la solución alrededor de dicho punto de equilibrio será circular o en espiral, donde la estabilidad se define por el signo de la parte real " $\alpha$ ", y el sentido de rotación se define por el signo de la componente imaginaria " $\beta$ ".

Si  $\alpha < 0$ , entonces el punto crítico es estable y la solución se aproxima a dicho punto como se aprecia en la figura 3.1c.

Si  $\alpha > 0$ , entonces el punto crítico es inestable y la solución se aleja de dicho punto como se observa en la figura 3.1f.

Si  $\alpha = 0$ , entonces el punto crítico es estable más no asintóticamente, entonces la solución técnicamente gira alrededor del punto de equilibrio, tal y como se muestra en la figura 3.1a.



*Figura 3.1.* Diferentes tipos de estabilidad para puntos críticos en  $\mathbb{R}^2$ . (a) Este punto de equilibrio presenta una estabilidad de Lyapunov, la cual se da por autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  netamente imaginarios. (b) El punto crítico de esta imagen posee autovalores reales y además negativos, dando como resultado un punto asintóticamente estable. (c) Este punto de equilibrio posee autovalores de la forma  $\lambda = \alpha + i\beta$ , donde  $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ . (d) Se evidencia un caso similar al de la figura b con la diferencia que los autovalores son de signo contrario. (e) Caso análogo al observado en las figuras b y d con la variación de que ambos autovalores son positivos. (f) Esta figura posee las mismas características de la figura c, pero con signos invertidos, es decir,  $\alpha > 0$  y  $\beta < 0$ . (Modificado de Lars, E. (2006). Classification of critical points. New York, EU.: larserikpersson - A basic course in applied mathematics. [www.larserikpersson.se/webcourse/](http://www.larserikpersson.se/webcourse/)).

#### 4. Expansión acelerada en el Lagrangiano de Proca Generalizado $SU(2)$ - $\mathcal{L}_4^1$

##### 4.1. Ecuaciones de ligadura y sistema dinámico final

Si bien el propósito fundamental de este trabajo es estudiar la acción de Proca generalizada por el factor  $\mathcal{L}_4^1$  descrito en la ecuación (23), hay que tener en cuenta un término geométrico que permita relacionar la materia con la curvatura del espacio-tiempo, es por eso que a la acción de

Proca generalizada se le adiciona la acción de Einstein-Hilbert, dando como resultado una acción total de la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{M_p^2 R}{2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \alpha \mathcal{L}_4^1 \right). \quad (35)$$

Teniendo en cuenta los diferentes convenios descritos en el anexo 1, se realiza el análisis variacional tanto respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  (ver Anexos 2, 3, 4 y 5), como respecto al campo  $A_\mu^a$  (ver anexos 6 y 7), y se obtienen las ecuaciones de campo y de movimiento presentadas en el anexo 8. En este punto, ambos conjuntos de ecuaciones aún no se han evaluado en la configuración de tríada cósmica,  $A_\mu^c = a\psi\delta_\mu^c$ . Para realizar ese proceso fue necesario el uso del paquete GRTensor de Maple (ver Anexo 9), luego se procedió a adimensionalizar todas las ecuaciones mediante la definición de las variables

$$x \equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H}, \quad y \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2}M_p}, \quad z \equiv \psi \sqrt{\frac{\tilde{g}}{2M_p H}}, \quad (36)$$

y los parámetros adimensionales que complementan la simplificación y adimensionalización de las ecuaciones,

$$P \equiv \frac{\ddot{\psi}}{M_p H^2}, \quad \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (37)$$

donde  $\varepsilon$  es bien conocido como uno de los parámetros de rodadura lenta. Como resultado se obtuvieron tres ecuaciones altamente no lineales: primero se tiene la expresión

$$y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4 + \alpha [-32y^4 - 188xy^3 + 10x^2y^2] = 1 \quad (38)$$

en la componente temporal de las ecuaciones de campo, la cual ahora funciona como una ligadura entre las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ ; luego se obtiene

$$y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4 + \alpha \left[ -340y^4 + 124y^4 \varepsilon + 316xy^3 + 614x^2y^2 + 104\sqrt{2}y^3P \right] = 2\varepsilon - 3 \quad (39)$$

en cada componente espacial de las ecuaciones de campo; y por último

$$\frac{P}{\sqrt{2}} + 2y + 3x - \varepsilon y + 4\frac{z^4}{y} + \alpha \left[ -218y^3 + 30xy^2 + 94y^3 \varepsilon + 10x^2y + 5\sqrt{2}y^2P \right] = 0 \quad (40)$$

en las ecuaciones de movimiento. Para ello se tuvo en cuenta la normalización del parámetro  $\alpha \rightarrow \alpha/M_p^2$ , el cual ahora es adimensional debido a que  $M_p$  (masa de Planck) se encarga de aportar las unidades previas. Por otra parte, las ecuaciones de evolución para las variables que rigen el sistema son:

$$x' = \frac{P}{\sqrt{2}} + \varepsilon x, \quad y' = x; \quad (41)$$

teniendo en cuenta que las variables primadas implican derivadas con respecto al número de e-folds,  $N = \int H dt$ , y que la dinámica de la variable adimensional  $z(t)$  se deduce mediante el uso de la ligadura (38).

Las ecuaciones previamente expresadas son el resultado final del principio variacional. Lo

que viene a continuación, será el análisis del sistema de ecuaciones obtenido y su interpretación física. Primero, cabe recordar que cuando se tiene un universo isótropo y homogéneo, como el que se describe en este trabajo, el tensor momentum-energía es de fluido perfecto, es decir,

$$T_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}[-\rho_{tot}, P_{tot}, P_{tot}, P_{tot}]. \quad (42)$$

A partir de la ecuación anterior, y considerando la adimensionalización de las ecuaciones de campo en las expresiones (38), es evidente que

$$\begin{aligned} \Omega_{YM} &= y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4, \\ \Omega_{Gal} &= \alpha [-32y^4 - 188xy^3 + 10x^2y^2], \end{aligned} \quad (43)$$

siendo  $\Omega_i = \rho_i/\rho_{tot}$  y  $\Omega_{tot} = \Omega_{Gal} + \Omega_{YM} = 1$ , en donde el subíndice “Gal” significa que se está refiriendo a la contribución de  $\mathcal{L}_4^1$ . Con un análisis similar para la componente espacial de las ecuaciones de campo, y teniendo en cuenta que la ecuación de estado para un fluido tipo radiación es  $P_{YM} = \rho_{YM}/3$ , se deduce que

$$\begin{aligned} P_{YM} &= \frac{\rho_{tot}}{3} (y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4), \\ P_{Gal} &= \frac{\rho_{tot}}{3} \alpha (-340y^4 + 124y^4\epsilon + 316xy^3 \\ &\quad + 614x^2y^2 + 104\sqrt{2}y^3P). \end{aligned} \quad (44)$$

La separación artificial del fluido total en dos partes,  $\rho_{Gal}$  y  $\rho_{YM}$ , permite comprender mejor, cuál es la contribución a la teoría, de los dos términos de la acción asociados al contenido material. Se pueden considerar a ambos fluidos de tipo radiación, uno es el típico fluido de Yang-Mills con densidad y presión positiva, y el otro se denomina el fluido de los "Galileones", el cual posee densidad y presión negativa (ver figuras 4.1d y 4.1f), y es el principal causante de la generación de un universo en expansión acelerada.

#### 4.2. Comportamiento asintótico de las variables y auto-ajuste fino

Las variables definidas en las ecuaciones (43) y (44) están asociadas a las componentes del tensor momentum-energía, y por lo tanto, se podría concluir erróneamente que tales cantidades deben ser finitas para conseguir una teoría acorde con la naturaleza, pero no es así. A continuación se presentará cómo el tensor  $T_{\mu\nu}$  se mantiene finito a pesar del comportamiento asintótico de las variables  $P_{Gal}$ ,  $P_{YM}$ ,  $\rho_{Gal}$  y  $\rho_{YM}$ . También se mostrará el comportamiento de otros parámetros cruciales en la teoría y que caracterizan una era de energía oscura. Al analizar la evolución del sistema (41) en el programa "Mathematica", mediante el método de Runge-Kutta, se obtiene el siguiente comportamiento asintótico:

si  $N \rightarrow \infty$ , entonces

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \infty, \\ y &\rightarrow \beta x, \end{aligned} \tag{45}$$

donde  $\beta = \frac{29}{11}$ . El valor de la constante de proporcionalidad  $\beta$ , es consistente con las ecua-

ciones de evolución descritas en la expresión (41), ya que si se evalúa la ecuación  $y' = x$  en el límite de tiempo infinito, donde  $y \rightarrow \beta x$ , se obtiene la ecuación diferencial  $x' - \beta^{-1}x = 0$ , que al resolver da como resultado una exponencial positiva,  $x \propto e^{N/\beta}$ .

El comportamiento asintótico visto en las gráficas 4.1a y 4.1b genera a su vez, un comportamiento similar en la densidad y presión de los dos fluidos artificiales (ver gráfica 4.1c). Sin embargo, el sistema de evolución posee un mecanismo de auto-ajuste fino, es decir,  $\Omega_{Gal} \rightarrow -\Omega_{YM}$  como se aprecia en la gráfica 4.1d. El hecho de que ambos fluidos artificiales tiendan a ser de igual magnitud y de signos opuestos, sugeriría que la densidad total de energía es cero; sin embargo, analizando detalladamente el mecanismo de auto-ajuste fino se puede refutar tal afirmación. Supóngase que la suma de las dos densidades de energía en mención es

$$\rho_{Gal} + \rho_{YM} = \delta, \quad (46)$$

siendo  $\delta$  cualquier valor real finito. Luego se reformula la ecuación de tal forma que

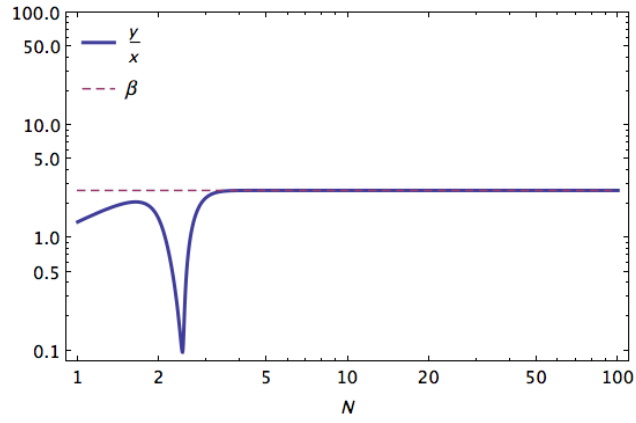
$$1 = \frac{\delta}{\rho_{Gal}} - \frac{\rho_{YM}}{\rho_{Gal}}, \quad (47)$$

y por último se evalúa en el límite  $\rho_{Gal} \rightarrow \infty$ , dando como resultado la relación entre densidades que se planteó inicialmente,

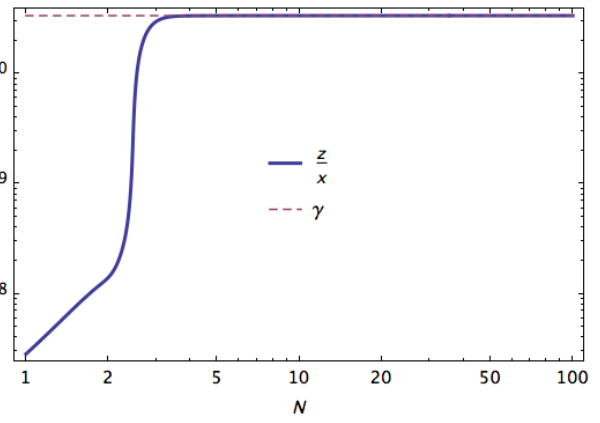
$$\lim_{\rho_{Gal} \rightarrow \infty} \frac{\rho_{YM}}{\rho_{Gal}} = -1; \quad (48)$$

de esta manera se obtiene la relación  $\Omega_{Gal} \rightarrow -\Omega_{YM}$ , y la suma de ambas densidades es un

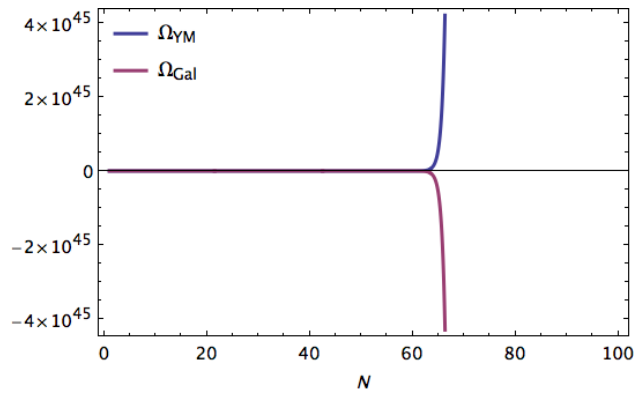
valor finito diferente de cero. En el conjunto de gráficas también se observa que, con las condiciones apropiadas para la constante de acople del grupo ( $\tilde{g}$ ), el valor del parámetro de Hubble,  $H/m_p \propto y^2/z^2$ , se aproxima asintóticamente a su valor observacional hoy en día,  $H_0 = 9.03h \times 10^{-61}$ , siendo  $h = 0.678 \pm 0.009$  (Ade et al. (2016)). Al mismo tiempo,  $\omega_{tot} \rightarrow -1$ , indicando un periodo eterno de expansión acelerada tardía (ver figuras 4.1e y 4.0g).



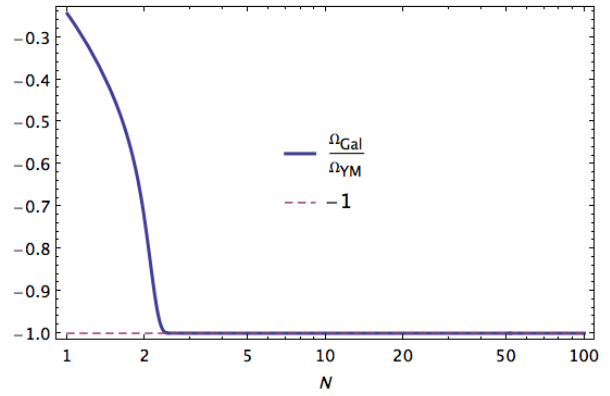
(a)



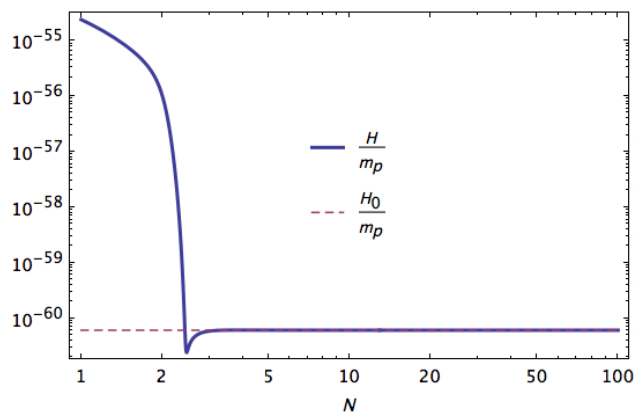
(b)



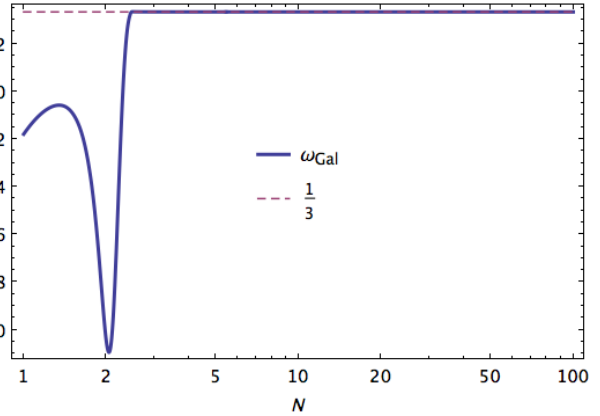
(c)



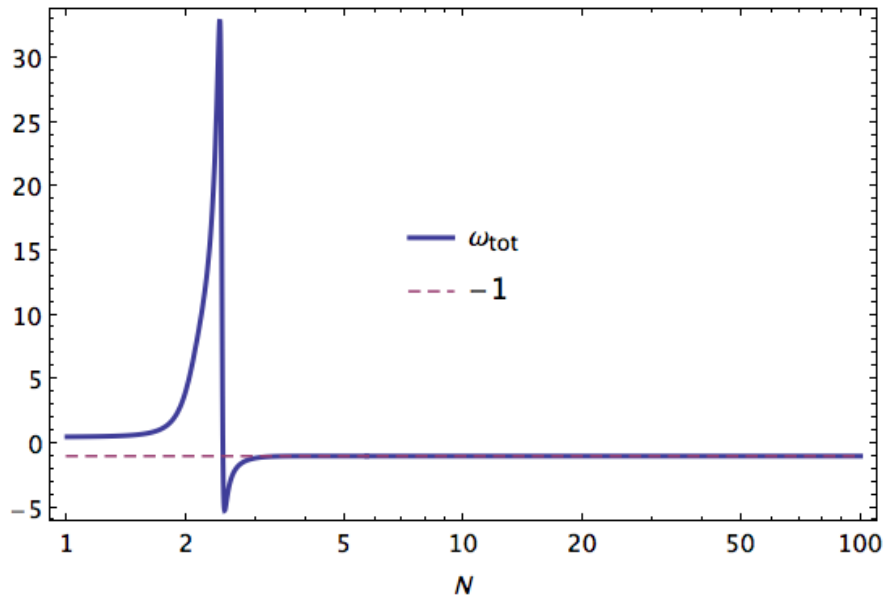
(d)



(e)

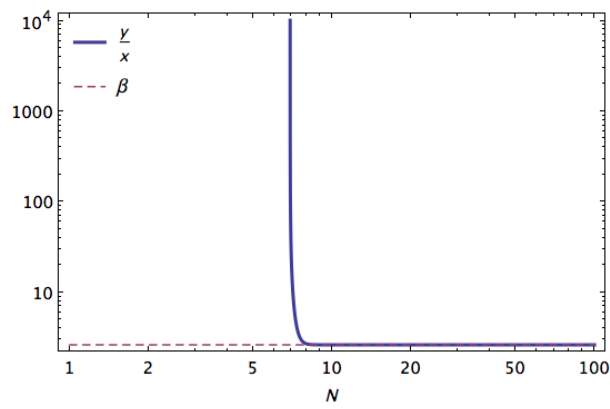


(f)

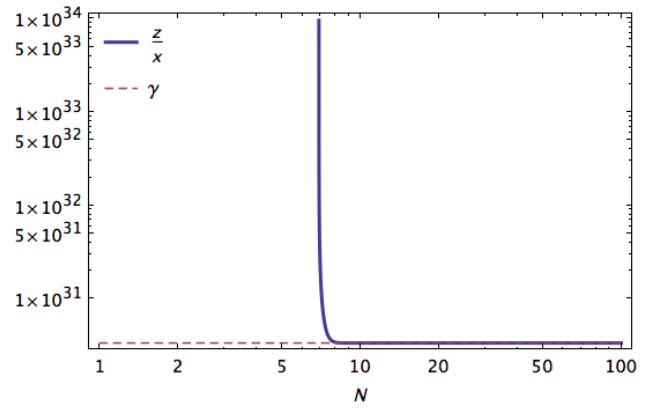


(g)

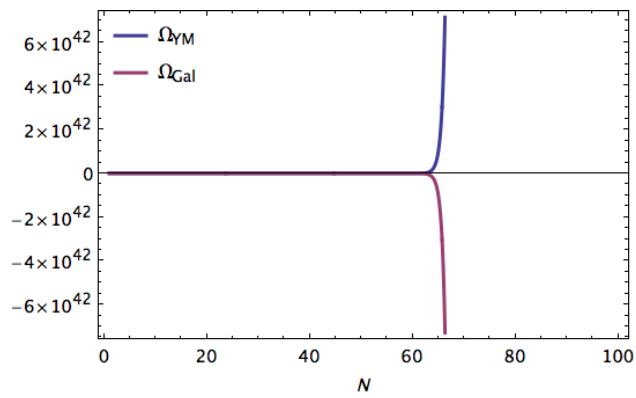
*Figura 4.0.* Solución numérica para la obtención de una era del universo dominada por la energía oscura. Las condiciones iniciales son:  $x_0 = -1,0099$ ;  $y_0 = 0.01$ , con los parámetros  $\alpha = 0.01$  y  $\tilde{g} = -4.37 \times 10^{-61}$ . (a) Gráfica de  $y/x$  vs número de e-folds y su valor límite  $\beta$  (línea discontinua). (b) Figura que muestra el mismo análisis de la gráfica anterior, pero con la variable  $z/x$  y su límite  $\gamma$ . (c) Gráfica de la densidad de los fluidos artificiales  $\rho_{YM}$  y  $\rho_{Gal}$  tendiendo a  $\infty$  y  $-\infty$ . (d) Esta gráfica comprueba el auto-ajuste fino  $\Omega_{Gal} \rightarrow -\Omega_{YM}$ , manteniendo estable el tensor  $T_{\mu\nu}$ . (e) Gráfica del parámetro de Hubble tendiendo a su valor actual  $H_0$ . (f) Esta gráfica demuestra que el fluido  $\Omega_{Gal}$  tiende a comportarse como un fluido tipo radiación,  $\omega = 1/3$ . (g) Gráfica del parámetro de estado del fluido total indicando un periodo eterno de expansión acelerada tardía.



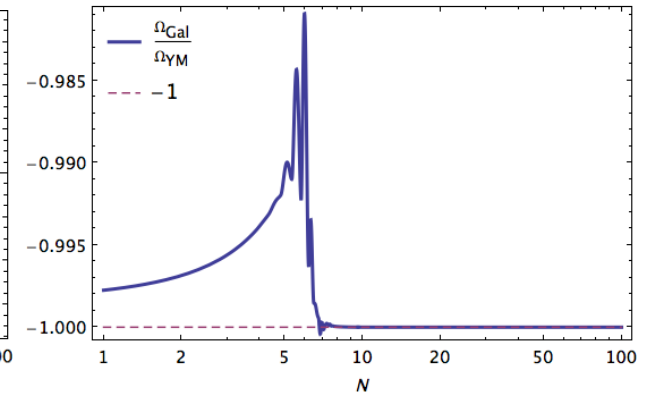
(h)



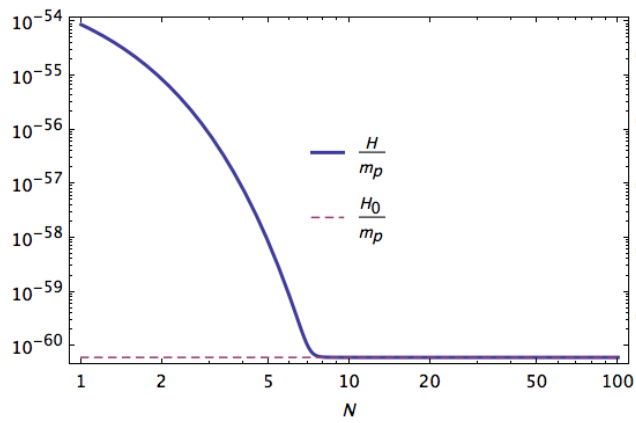
(i)



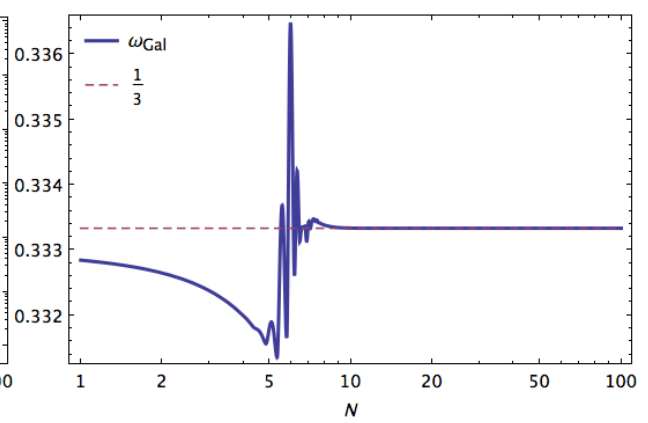
(j)



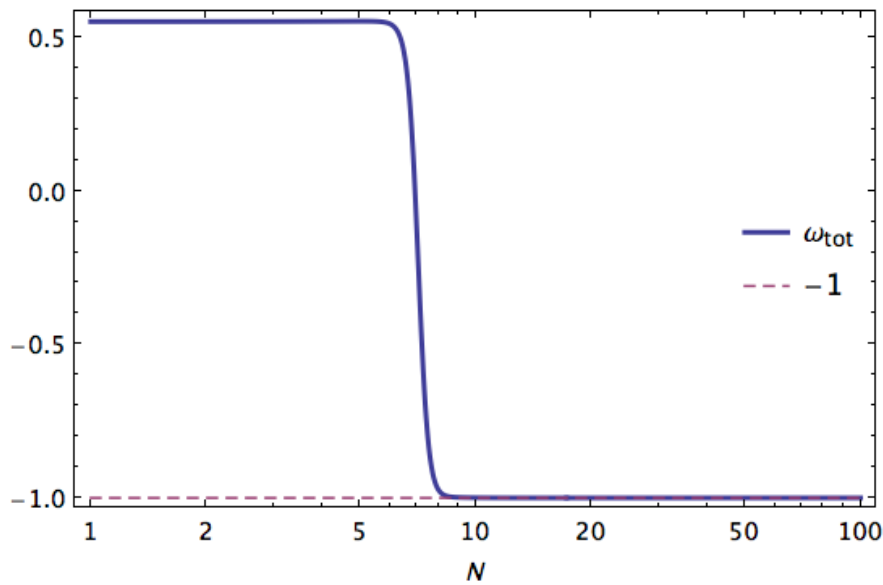
(k)



(l)



(m)



(n)

*Figura 4.1.* Solución numérica para la obtención de una era del universo dominada por la energía oscura, con un conjunto de condiciones iniciales diferente al planteado en la figura 5-0:

$x_0 = -5.0489$  y  $y_0 = 30$ .

### 4.3. Punto crítico inflacionario

El auto-ajuste fino generado por las variables que rigen el sistema, no es el único aspecto a analizar, pues aunque expresa el comportamiento general de la solución, hay que tener en cuenta que el sistema dinámico posee puntos de estabilidad, que permiten observar una fenomenología diferente de la solución, dependiendo en mayor parte, de las condiciones iniciales.

Haciendo uso del procedimiento indicado en la sección ??, se encontraron un total de 8 puntos críticos; sin embargo, 2 de ellos son inmediatamente descartados pues son puntos que pertenecen al plano complejo, es decir, estos puntos poseen al menos una variable adimensio-

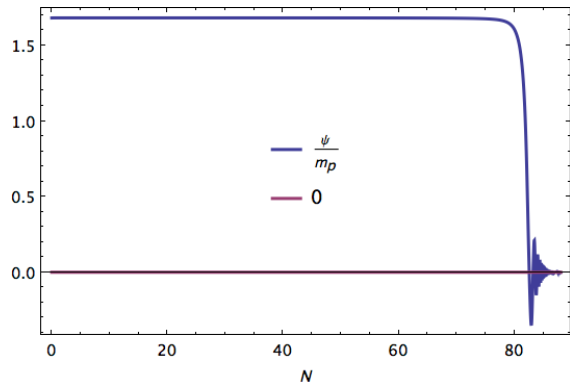
nal que dispone de una componente imaginaria. De los 6 puntos críticos restantes, 4 son de la forma,  $\vec{x}_c = (x_c, y_c, z_c) = (0, c, 0)$ . Recordando la definición de las variables adimensionales (36), si  $y = cte$  y  $z = 0$ , entonces  $H \rightarrow \infty$ , lo cual es inconsistente pues se requeriría una cantidad de energía infinita para ello. Finalmente, sólo dos de todos los puntos críticos cumplen con los requerimientos necesarios, para describir un periodo inflacionario de tipo rodadura lenta, incluyendo las condiciones

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad \text{y} \quad |\eta| = \left| \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dN} \right| \ll 1; \quad (49)$$

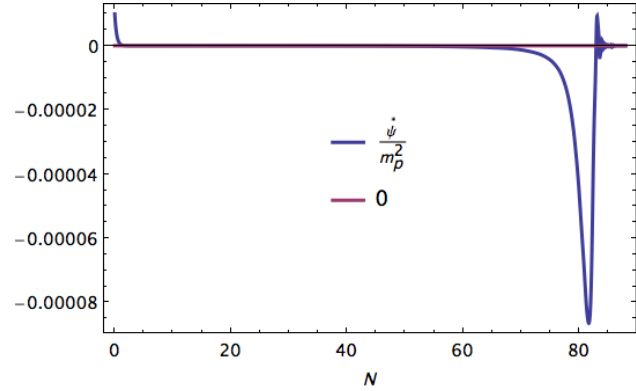
no obstante, para resolver los problemas de la cosmología (principal objetivo de una teoría inflacionaria) es necesario que la inflación dure al menos 68 e-folds. Lamentablemente para el modelo, la duración de la era inflacionaria es altamente dependiente de las condiciones iniciales. Es de anotar que el sistema es simétrico ante la transformación  $y \rightarrow -y$ , por lo que los dos puntos críticos en mención son, en realidad, uno el reflejo del otro.

A continuación se mostrarán las gráficas que evidencian el buen comportamiento de las variables y parámetros, que caracterizan el periodo de inflación. En ellas se observa un comportamiento casi constante de  $\psi$  y  $\dot{\psi}$ , lo cual es consistente con las gráficas de  $\varepsilon$  y  $\eta$  (ver figuras 4.2a, 4.2b y 4.2c). También se aprecia en la gráfica 4.2d, un parámetro de Hubble cuya magnitud se ajusta con el régimen clásico en el cual está soportada la teoría, ya que la magnitud de  $H(N)$  es mucho menor en comparación con la masa de Planck, la cual se considera como un límite entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica. Por último, se muestran un conjunto de gráficas, en las

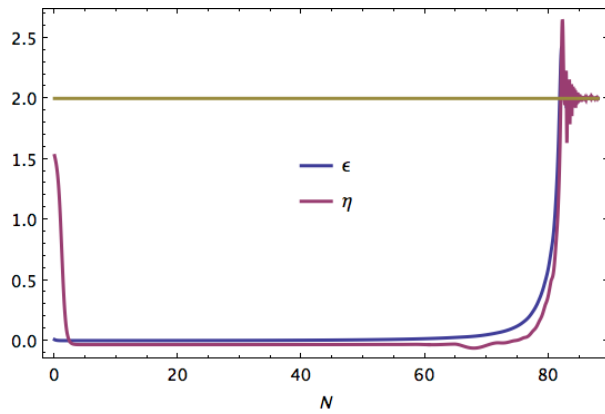
que se observa tanto la densidad de energía total positiva, como la presión negativa propia de un periodo de expansión acelerada, además de la presencia de una era dominada por la radiación al final del periodo inflacionario.



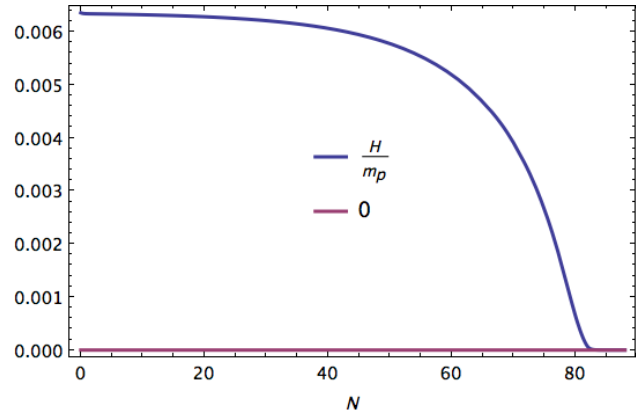
(a)



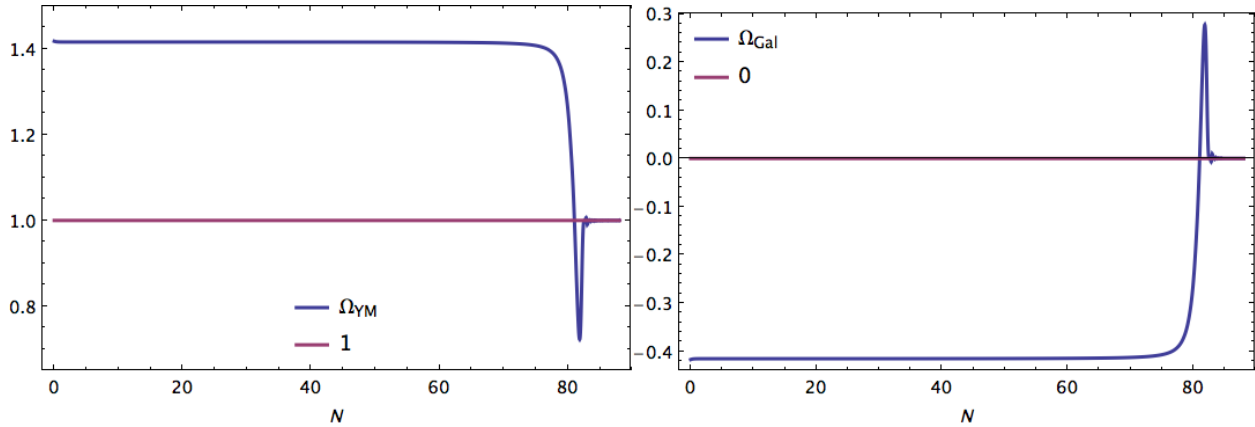
(b)



(c)

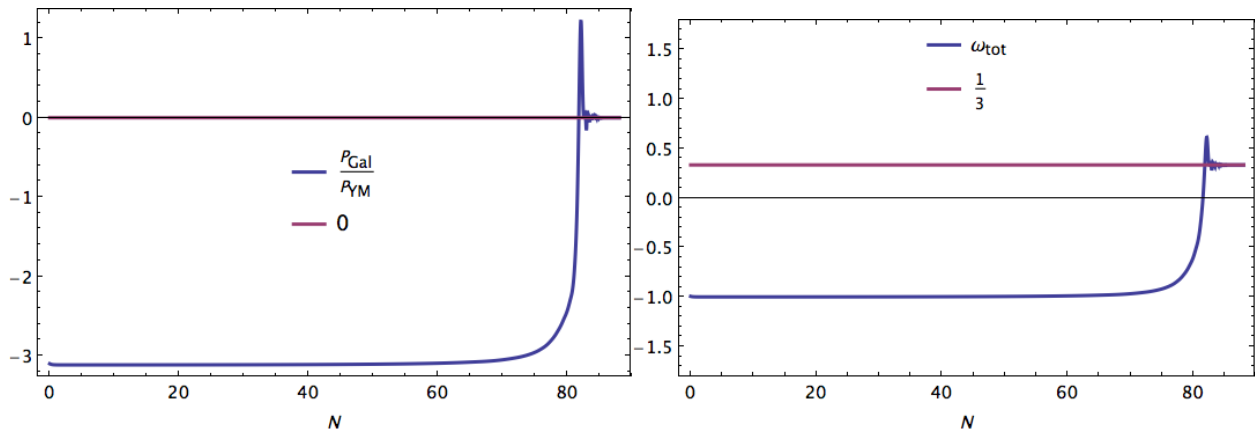


(d)



(e)

(f)



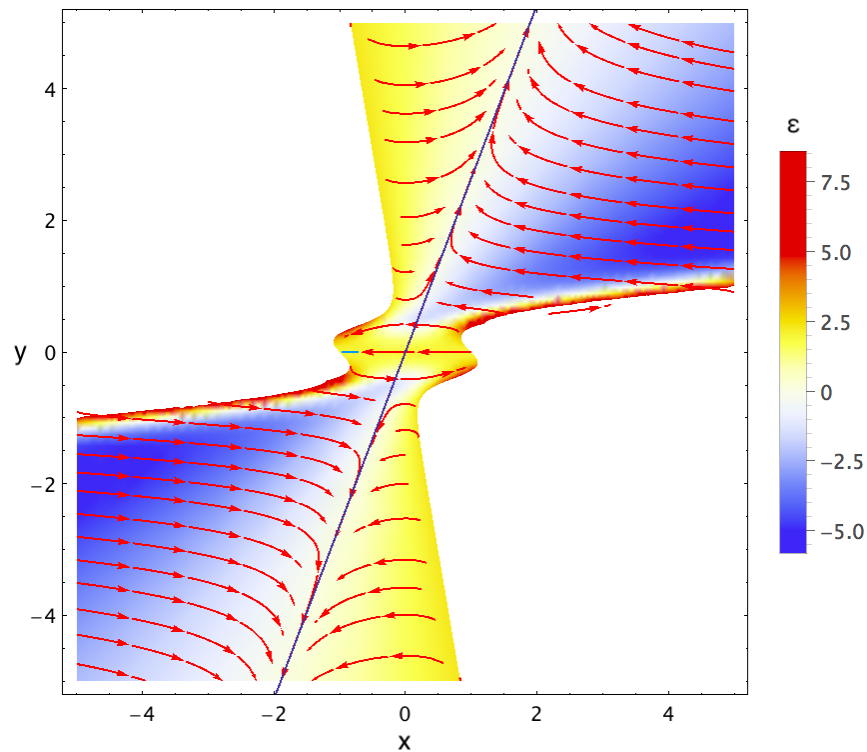
(g)

(h)

Figura 4.2. Solución numérica para modelar una época inflacionaria. Las condiciones iniciales son:  $x_0 = 0.0011$ ;  $y_0 = 1.189$ ;  $\alpha = 0.00649$ ; y  $\tilde{g} = -0.0001$ . (a) Esta primera gráfica muestra cómo el módulo del campo vectorial  $\psi$  se mantiene casi constante hasta los 80 e-folds, condición necesaria para una inflación de tipo rodadura lenta. (b) Esta gráfica muestra un comportamiento similar para  $\psi$  y prácticamente con la misma duración de e-folds. (c) En esta gráfica se muestran las funciones  $\varepsilon(N)$  y  $\eta(N)$ , ratificando el cumplimiento de la condición (49). (d) Esta figura muestra el parámetro de Hubble en función de  $N$ . (e) Gráfica de la densidad del fluido de Yang-Mills la cual, al final de la inflación, es la totalidad de la densidad de energía,  $\Omega_{YM} = 1$ . (f) Gráfica de la densidad del fluido Galileon. (g) Relación entre presiones generadas por los dos fluidos artificiales. Se observa que la presión negativa de  $\Omega_{Gal}$  es dominante a pesar de que la densidad del fluido de Yang-Mills es mayor. (h) Parámetro de estado del fluido total. Se aprecia que al final del periodo inflacionario  $\omega_{tot} = 1/3$ , ecuación de estado propia de un periodo dominado por la radiación.

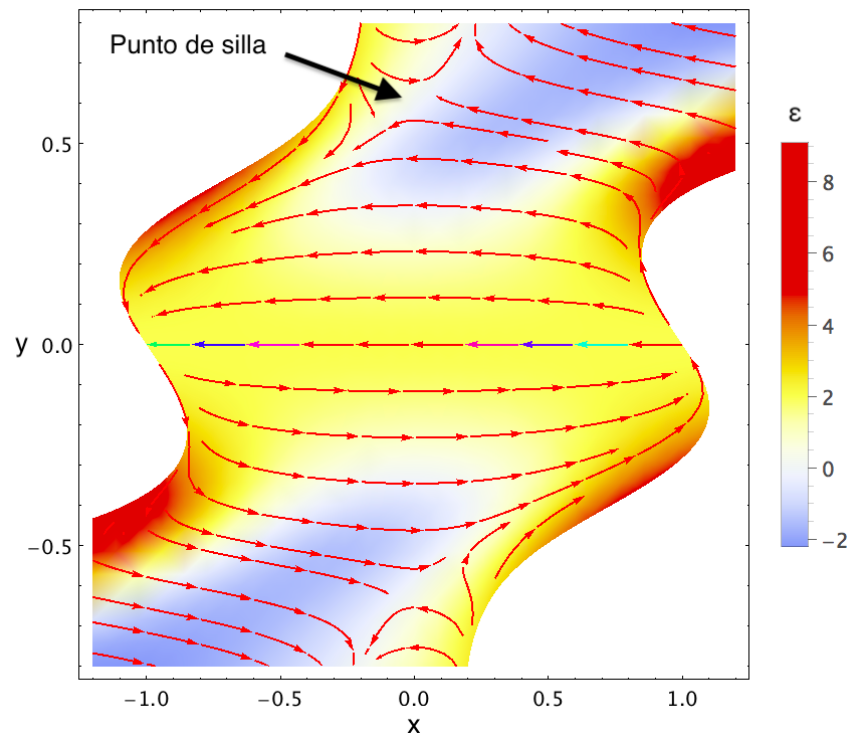
#### 4.4. Diagramas de fase - Expansión acelerada tardía y primordial

Al desarrollar un sistema de ecuaciones como el que se muestra en este modelo, es conveniente realizar diagramas de fase que permitan comprender de manera más clara, la dinámica de las ecuaciones con las que se está tratando. Al ser un soporte visual, los diagramas presentados a continuación permiten analizar de una forma distinta, tanto el comportamiento asintótico mencionado en el capítulo 4.2, como el comportamiento del periodo inflacionario descrito en la sección 4.3, mediante la identificación de un punto crítico tipo silla.



*Figura 4.3.* Diagrama de fase en donde el campo vectorial (flechas rojas) refleja la dinámica de la solución para las variables adimensionales  $x$  y  $y$ . También se observa la recta  $y = \beta x$  (línea negra), y el valor del parámetro  $\epsilon$  en las diferentes regiones mediante una barra de colores. Nótese que, con excepción de la pequeña región central, la recta  $y = \beta x$  concuerda con  $\epsilon = 0$ .

En la figura 4.3 se observa claramente cómo el campo vectorial,  $\vec{V}(x,y) = (x',y')$ , descrito por las flechas rojas, converge a la recta  $y = \beta x$  al mismo tiempo que el valor del parámetro  $\varepsilon$ , tiende a cero; un claro indicio de expansión acelerada. Por otra parte, en el diagrama 4.4, el acercamiento al punto  $(x = 0, y = 0)$  permite ver un punto de silla en la parte superior, esta región también presenta valores de  $\varepsilon$  cercanos a cero, y si se plantean las condiciones iniciales adecuadas para el sistema dinámico, la solución se mantendrá cerca al punto crítico, lo suficiente para describir un periodo inflacionario de más de 68 e-folds, luego se alejará debido a que es un punto de equilibrio inestable (ver figura 3.1d), dando cabida a un periodo de expansión dominado por la radiación, que corresponde a las oscilaciones en el espacio de fase que se observan alrededor de la línea  $y = 0$ .



*Figura 4.4.* Diagrama de fase enfocado en la región central de la gráfica anterior. En esta figura se aprecia mejor el punto crítico tipo silla que da lugar a la descripción de un periodo inflacionario.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se determinaron, de forma satisfactoria, las consecuencias cosmológicas que brindan los Galileones vectoriales en la teoría generalizada de Proca con simetría  $SU(2)$  global. Para ello se usó el concepto de triada cósmica, una configuración de campos vectoriales que mantiene el universo isótropo y homogéneo, como lo indican las recientes observaciones de radiación cósmica de fondo (Bennett et al. (2013); Ade et al. (2014)), de tal forma que se puede modelar el universo a gran escala en dos periodos de gran interés, inflación y expansión acelerada tardía.

Durante el desarrollo del trabajo, se logró realizar un análisis profundo y muy provechoso del cálculo variacional en relatividad general, dando como resultado expresiones que son trascendentales para teorías de gravedad modificada que tengan acoples no mínimos a la gravedad, ya sea con el tensor o el escalar de Ricci, o el tensor de Riemann. Un aspecto importante de la variación de tensores con información geométrica del espacio tiempo, es que se tuvo en cuenta una convención de signos arbitraria, dejando a disposición de cada quien la signatura que quiera usar en su modelo, algo difícil de encontrar en algún libro o documento.

Después del cálculo variacional, y de la transformación a sistema autónomo de las ecuaciones de campo y de movimiento, se obtuvo el comportamiento asintótico afirmado en el artículo "Non-Abelian S-term dark energy and inflation"(Rodríguez and Navarro (2018)), tal disposición de las variables adimensionales, y su auto-ajuste fino, permitieron la caracterización de un periodo

de expansión acelerada tardía bastante realista, y poco dependiente de las condiciones iniciales, ya que siempre y cuando las condiciones iniciales no estén lo suficientemente cerca a un punto crítico, el comportamiento del sistema termina siendo prácticamente el mismo, como se observa en las gráficas de la sección 4.2. Sin embargo, cuando las condiciones iniciales se establecen lo suficientemente cerca a algún punto crítico, la solución cambia notoriamente, incluso en unos casos la solución puede ser inconsistente con la física del problema. Solo un punto crítico logró el comportamiento deseado, en el cual se reproduce perfectamente un periodo inflacionario, que dura la suficiente cantidad de e-folds para resolver los problemas de la cosmología y además, al terminar, da inicio a una era dominada por la radiación, como se predice actualmente que ocurrió. El único defecto que posee este modelo en cuanto a inflación se refiere, es que la duración del periodo inflacionario está fuertemente ligada a las condiciones iniciales, y un cambio mínimo en ellas podría hacer que la inflación no fuera lo suficientemente prolongada como para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar.

A pesar de que el modelo presentado ya posee una buena capacidad de reproducir los periodos de inflación y expansión acelerada tardía, es necesario repetir el análisis teniendo en cuenta el término completo,  $\mathcal{L}_4 = \alpha \mathcal{L}_4^1 + \kappa \mathcal{L}_4^2 + \lambda \mathcal{L}_4^3$ , descrito en la ecuación (22), y observar el comportamiento del sistema dinámico. También es necesario comprobar que el Hamiltoniano que define el sistema, realmente tenga una cota inferior; pues cabe recordar que los Lagrangianos basados en Galileones cumplen una condición necesaria más no suficiente para evitar tal inestabilidad. Una vez verificado esto, se puede corroborar que no presente otro tipo de inestabilidades, tales como la

inestabilidad Laplaciana. También es interesante calcular la rapidez de propagación de las ondas gravitacionales una vez adicionados los términos restantes del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4$ , la cual debe ser consistente con las últimas observaciones (Abbott et al. (2017)).

### Referencias Bibliográficas

- Abbott, B. P. et al. (2017). Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101.
- Ade, P. A. R. et al. (2014). Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 571:A23.
- Ade, P. A. R. et al. (2016). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13.
- Allys, E., Beltrán Almeida, J. P., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016a). On the 4d generalized proca action for an abelian vector field. *JCAP*, 1609:026.
- Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016b). Generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1602:004.
- Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016c). Generalized su (2) proca theory. *Phys. Rev. D*, 94:084041.
- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010). *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press.
- Armendariz-Picon, C. (2004). Could dark energy be vector-like? *JCAP*, 0407:007.
- Baker, T. et al. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251301.

- Beltrán Jiménez, J. et al. (2017). Instabilities in Horndeski Yang-Mills inflation. *Phys. Rev.*, D95(6):063533.
- Bennett, C. L. et al. (2013). Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 208:20.
- Brawer, R. (1995). *Inflationary cosmology and horizon and flatness problems: the mutual constitution of explanation and questions*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Burton, T. D. (1994). *Introduction to dynamic systems analysis*. McGraw-Hill.
- Cai, R.-G. (2007). A dark energy model characterized by the age of the universe. *Phys. Lett. B*, 657:228–231.
- Calabrese, E. et al. (2013). Cosmological parameters from pre-planck cosmic microwave background measurements. *Phys. Rev. D*, 87:103012.
- Caraballo, T. and Han, X. (2016). Autonomous dynamical systems. In *Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*. Springer.
- Chiang, H.-D., Hirsch, M. W., and Wu, F. F. (1988). Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE - TAC*, 33:16–27.
- Chimento, L. P. and Feinstein, A. (2004). Power - law expansion in k-essence cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, A19:761–768.

- Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark Energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251302.
- Davydov, E. and Galtsov, D. (2016). HYM-flation: Yang-Mills cosmology with Horndeski coupling. *Phys. Lett.*, B753:622–628.
- Deffayet, C., Gao, X., Steer, D. A., and Zahariade, G. (2011). From k-essence to generalised Galileons. *Phys. Rev.*, D84:064039.
- Dimopoulos, K. (2006). Can a vector field be responsible for the curvature perturbation in the Universe? *Phys. Rev.*, D74:083502.
- Dimopoulos, K. (2007). Supergravity inspired Vector Curvaton. *Phys. Rev.*, D76:063506.
- Dimopoulos, K., Karčiauskas, M., Lyth, D. H., and Rodríguez, Y. (2009). Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations. *JCAP*, 0905:013.
- Dimopoulos, K., Karčiauskas, M., and Wagstaff, J. M. (2010). Vector Curvaton with varying Kinetic Function. *Phys. Rev.*, D81:023522.
- Ellis, G. F., Maartens, R., and MacCallum, M. A. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251304.
- Golovnev, A., Mukhanov, V., and Vanchurin, V. (2008). Vector Inflation. *JCAP*, 0806:009.

- Guth, A. H. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356.
- Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca Action. *JCAP*, 1405:015.
- Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384.
- Huterer, D. and Shafer, D. L. (2017). Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests. *Rep. Prog. Phys.*, 81:016901.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- Jassal, H. K., Bagla, J. S., and Padmanabhan, T. (2010). Understanding the origin of CMB constraints on Dark Energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 405:2639–2650.
- Jose, J. V. and Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics : a contemporary approach*. Cambridge University Press.
- Linde, A. D. (2008). Inflationary Cosmology. *Lect. Notes Phys.*, 738:1–54.
- Lynch, S. (2004). *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Springer.
- Lyth, D. H. and Liddle, A. R. (2009). *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press.
- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. M. (2011). Non-Abelian Gauge Field Inflation. *Phys. Rev.*, D84:043515.

- Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. M. (2013). Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields. *Phys. Lett.*, B723:224–228.
- Maleknejad, A., Sheikh-Jabbari, M. M., and Soda, J. (2013). Gauge Fields and Inflation. *Phys. Rept.*, 528:161–261.
- Malquarti, M., Copeland, E. J., Liddle, A. R., and Trodden, M. (2003). A New view of k-essence. *Phys. Rev.*, D67:123503.
- Martin, J., Ringeval, C., and Vennin, V. (2014). Encyclopædia Inflationaris. *Phys. Dark Univ.*, 5-6:75–235.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.
- Mukhanov, V. (2005). *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79:064036.
- Ostrogradsky, M. (1850). Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, 6:385–517.
- Penzias, A. A. and Wilson, R. W. (1965). A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, 142:419–421.
- Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media.

- Perlmutter, S. et al. (1999). Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565.
- Peter, P. and Uzan, J.-P. (2013). *Primordial cosmology*. Oxford University Press.
- Riess, A. G. et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009.
- Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2017). Scalar and vector Galileons. *J. Phys. Conf. Ser.*, 831:012004.
- Rodríguez, Y. and Navarro, A. A. (2018). Non-Abelian S-term dark energy and inflation. *Phys. Dark Univ.*, 19:129–136.
- Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251303.
- Stewart, A. (2011). Longitudinal and transverse components of a vector field. *Sri Lankan J. Phys.*, 12:33–42.
- Wang, H. et al. (2017). The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics. *Astrophys. J.*, 851:L18.
- Watanabe, M.-a., Kanno, S., and Soda, J. (2009). Inflationary Universe with Anisotropic Hair. *Phys. Rev. Lett.*, 102:191302.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.

- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media.
- Winget, D. E. et al. (1987). An independent method for determining the age of the universe. *Astrophys. J.*, 315:L77–L81.
- Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403–433.
- Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10:32243.
- Yokoyama, S. and Soda, J. (2008). Primordial statistical anisotropy generated at the end of inflation. *JCAP*, 0808:005.
- Zhang, Y., Gong, Y., and Zhu, Z.-H. (2010). The Noether symmetry approach in a ‘cosmic triad’ vector field scenario. *Class. Quantum Grav.*, 27:135019.
- Zhang, Y., Gong, Y., and Zhu, Z.-H. (2011). The unified first law in ‘cosmic triad’ vector field scenario. *Phys. Lett. B*, 700:254–260.

## Apéndices

### Apéndice A. Convenios utilizados en el desarrollo de la teoría

#### Sistema natural de unidades

Uno de los aspectos más importantes en el desarrollo de una teoría es la elección del sistema de unidades apropiado. En cosmología conviene trabajar con el sistema natural de unidades, es decir,  $c = \hbar = k_B = 1$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $\hbar$  es la constante de Planck reducida y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Estas definiciones conllevan a una serie de relaciones entre las unidades de diferentes magnitudes físicas, por ejemplo:

$$E = mc^2 \Rightarrow [m] = [E] \quad (50)$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow [x] = \frac{1}{[E]}, \quad (51)$$

$$E = \hbar\omega \Rightarrow [t] = \frac{1}{[E]}, \quad (52)$$

siendo  $E$  la energía y  $[E]$  sus respectivas unidades,  $\lambda$  la longitud de onda medida en unidades de longitud  $[x]$ , y  $\omega$  la frecuencia angular expresada en unidades de tiempo a la inversa, es decir,  $[t]^{-1}$ . Ahora, si se tiene en cuenta que los Lagrangianos en la reformulación de la mecánica clásica tienen unidades de energía, es fácil deducir a partir de (51) que

$$\mathcal{L} = L/dx^3 \Rightarrow [\mathcal{L}] = \frac{[L]}{[x^3]} = [E]^4, \quad (53)$$

recordando que  $\mathcal{L}$  es la densidad Lagrangiana que se trabaja en cosmología. Algo intere-

sante de este sistema de unidades es que si se considera la acción

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \Rightarrow [S] = [\mathcal{L}] \times [x]^3 \times [t] = 1, \quad (54)$$

se aprecia que es adimensional. Todo lo anterior permite hallar las unidades de elementos más específicos en esta teoría tales como  $F_{\mu\nu}^a$ . Se sabe que

$$\mathcal{L} \supset F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \Rightarrow [F_{\mu\nu}^a] = [\mathcal{L}]^{\frac{1}{2}} = [E]^2, \quad (55)$$

lo cual implica que  $[\partial_\mu A_\nu^a] = [E]^2$ , pues  $F_{\mu\nu}^a \supset \partial_\mu A_\nu^a$ . Aquí cabe recordar que  $\partial_\mu$  es en realidad una abreviación del operador  $\partial/\partial x^\mu$  el cual en concordancia con lo escrito anteriormente tiene unidades de energía. Esto permite hallar las unidades de varios elementos en la definición del tensor de esfuerzo de campo de Gauge.

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \tilde{g}\epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \Rightarrow [A_\mu^a] = [E] \wedge [\tilde{g}] = [\epsilon_{bc}^a] = 1. \quad (56)$$

Tener conocimiento de las unidades de las variables expuestas anteriormente sirve como un criterio de verificación y consistencia de cada una de las ecuaciones obtenidas, además brindan una luz acerca de cómo se deben definir las nuevas variables adimensionales para trabajar el problema numéricamente.

### Simetría y antisimetría de un tensor

Si se considera  $T_{\mu\nu}$  un tensor de segundo orden, dicho tensor puede ser descompuesto en una parte simétrica y otra antisimétrica de la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}, \quad (57)$$

donde

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad \text{y} \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (58)$$

### Derivadas covariantes y derivadas parciales

En algunas ocasiones se cambiará la notación tanto de derivadas covariantes como de derivadas parciales con el fin de que la expresión final se simplifique. Para ello se definen

$$T_{\mu\nu;\rho} \equiv \nabla_{\rho} T_{\mu\nu}, \quad (59)$$

$$T_{\mu\nu,\rho} \equiv \partial_{\rho} T_{\mu\nu}, \quad (60)$$

y cuando se aplican dobles derivadas, en el caso de las derivadas covariantes que generalmente no conmutan, es importante tener en cuenta el orden de los índices; para ese caso se utilizará la siguiente convención:

$$T_{\mu\nu;\rho\sigma} \equiv \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} T_{\mu\nu}. \quad (61)$$

### Convenio de signos

$$[S_1] = \begin{cases} +1 & \text{si la signatura es } (-+++), \\ -1 & \text{si la signatura es } (+---). \end{cases} \quad (62)$$

$$[S_2] = \begin{cases} +1 & \text{si } [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\rho = R^\epsilon_{\rho\mu\nu} A_\epsilon, \\ -1 & \text{si } [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\rho = R^\epsilon_{\rho\ \mu\nu} A_\epsilon. \end{cases} \quad (63)$$

$$[S_3] = \begin{cases} +1 & \text{si } G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \\ -1 & \text{si } G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \end{cases} \quad (64)$$

A partir de las dos últimas se puede deducir un cuarto criterio que si bien es redundante, es de gran ayuda para determinar la signatura usada en una teoría.

$$[S_2][S_3] = \begin{cases} +1 & \text{si } R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \\ -1 & \text{si } R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}. \end{cases} \quad (65)$$

La anterior convención de signos fue propuesta por Misner, Thorne, y Wheeler (Misner et al. (2017)) con el fin de clasificar las diferentes teorías y facilitar las comparaciones entre las mismas, en este caso se utiliza el convenio (+++).

### Variación de la acción con extremos fijos

Es de vital importancia tener en cuenta este aspecto en el principio variacional, pues juega un papel crucial en el cálculo de las ecuaciones de campo, ya que permite que algunos términos se anulen en la frontera al hacer uso del teorema de la divergencia. A lo largo del desarrollo de las variaciones respecto a la métrica se encontraran términos de la forma

$$\delta S_i = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{M}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{M} = B^{\mu\nu\rho} \nabla_\mu (A_{\nu\rho}). \quad (66)$$

Haciendo uso de la regla de la cadena en el escalar  $\mathcal{M}$  se tiene que

$$\mathcal{M} = B^{\mu\nu\rho} \nabla_\mu (A_{\nu\rho}) = \nabla_\mu (B^{\mu\nu\rho} A_{\nu\rho}) - A_{\nu\rho} \nabla_\mu (B^{\mu\nu\rho}), \quad (67)$$

donde  $B^{\mu\nu\rho} A_{\nu\rho}$  es un cuadrivector con superíndice  $\mu$ ; por lo tanto,

$$\nabla_\mu (B^{\mu\nu\rho} A_{\nu\rho}) = \partial_\mu (B^{\mu\nu\rho} A_{\nu\rho}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu (B^{\lambda\nu\rho} A_{\nu\rho}), \quad (68)$$

siendo  $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g})$ .

Reemplazando (68) en (67) y a su vez implementando este resultado en (66) se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta S_i = \int d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} B^{\mu\nu\rho} A_{\nu\rho}) - \int d^4x A_{\nu\rho} \nabla_\mu (B^{\mu\nu\rho}). \quad (69)$$

Aquí es donde juega un papel importante el hecho de variar la acción con extremos fijos, pues la primera integral es una integral de volumen de la divergencia de un cuádrivector, la cual se puede reescribir como una integral de superficie del mismo. Teniendo en cuenta que la superficie de integración define los extremos y la variación es con extremos fijos, el integrando se hace cero. Esto quiere decir que para efectos prácticos cuando se realiza la variación de la acción con extremos fijos se da que

$$B^{\mu\nu\rho}\nabla_{\mu}(A_{\nu\rho}) = -A_{\nu\rho}\nabla_{\mu}(B^{\mu\nu\rho}). \quad (70)$$

Esto también ocurre cuando se tienen dos o más derivadas covariantes; sin embargo, la analogía no es directa, se debe tener cuidado con los signos y el orden de las derivadas. Para entender mejor es conveniente analizar el caso cuando se tienen dos derivadas covariantes, es decir,

$$\mathcal{M} = B^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A_{\rho\sigma} = \nabla_{\mu}(B^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_{\nu}A_{\rho\sigma}) - \nabla_{\nu}A_{\rho\sigma}(\nabla_{\mu}B^{\mu\nu\rho\sigma}); \quad (71)$$

el primer término es una derivada covariante de un vector que al evaluarlo en la integral se anularía; por lo tanto, dicho término se puede reescribir como

$$\mathcal{M} = -\nabla_{\nu}(A_{\rho\sigma}\nabla_{\mu}B^{\mu\nu\rho\sigma}) + A_{\rho\sigma}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}B^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (72)$$

donde nuevamente el primer término se anula y finalmente se obtiene que para este caso,

$$B^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A_{\rho\sigma} = A_{\rho\sigma}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}B^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (73)$$

Se puede demostrar que lo anterior es válido para  $n$  derivadas covariantes, donde hay un cambio de signo si  $n$  es impar y el orden de los índices en las derivadas siempre se invierte al realizar el cambio.

### **Apéndice B. Variaciones respecto a la métrica de tensores con información geométrica**

En esta sección se exhibirá paso a paso el cálculo de las variaciones con respecto a la métrica de algunos tensores con información geométrica tales como los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Cada resultado obtenido a continuación será fundamental para obtener las ecuaciones de campo de cualquier teoría con acoples no mínimos a la gravedad.

#### **Variación de la métrica contravariante**

Para conocer la relación entre la variación de la métrica covariante y la contravariante, es necesario partir del hecho de que la variación del tensor delta de Kronecker es cero.

$$\delta(\delta_v^\mu) = \delta(g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}) = g_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\lambda} + g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = 0. \quad (74)$$

Esto permite despejar fácilmente la variación  $\delta g^{\mu\lambda}$ , dando como resultado final

$$\boxed{\delta g^{\mu\alpha} = -g^{\alpha\nu} g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu}} \quad (75)$$

#### **Variación de $\sqrt{-g}$**

Para comenzar hay que suponer una métrica diagonal tipo FLRW con una signatura  $[S_1] = +1$ , es

decir,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (76)$$

En ese caso el determinante de la métrica es  $g = -g_{00} g_{11} g_{22} g_{33}$ , donde  $\{g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}\}$  son reales positivos. Siendo así se puede decir que

$$(-g) = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33}, \quad (77)$$

$$(-g) = e^{Ln(g_{00})+Ln(g_{11})+Ln(g_{22})+Ln(g_{33})}, \quad (78)$$

$$(-g) = e^{Ln|g_{\mu\nu}|}. \quad (79)$$

Con base en lo anterior y teniendo en cuenta que el inverso de la métrica  $g_{\mu\nu}$  es  $g^{\mu\nu}$ , se tiene que

$$\delta(-g) = e^{Ln|g_{\mu\nu}|} [g_{\mu\nu}]^{-1} \delta g_{\mu\nu}, \quad (80)$$

$$\delta(-g) = (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (81)$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (82)$$

Usando la expresión (82), se deduce fácilmente que la variación de  $\sqrt{-g}$  es

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g, \quad (83)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (84)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (85)$$

y si se quiere, realizando el cambio a  $\delta g^{\mu\nu}$  utilizando la ecuación (75) se tiene que

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (86)$$

### Variación de la conexión

Partiendo de la definición  $\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$ , se puede llegar a la siguiente expresión,

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 2\Gamma^{\lambda}_{\rho(\mu} g_{\nu)\lambda}. \quad (87)$$

Esto permitirá más adelante encontrar la definición apropiada para la derivada covariante de la variación,

$$\nabla_{\rho}(\delta g_{\mu\nu}) = \partial_{\rho} \delta g_{\mu\nu} - 2\Gamma^{\lambda}_{\rho(\mu} \delta g_{\nu)\lambda}, \quad (88)$$

en donde si se tiene en cuenta la ecuación (87) y que la derivada parcial conmuta con la variación, se llega a que

$$\partial_{\rho} \delta g_{\mu\nu} = \delta \partial_{\rho} g_{\mu\nu} = 2\delta \Gamma^{\lambda}_{\rho(\mu} g_{\nu)\lambda} + 2\Gamma^{\lambda}_{\rho(\mu} \delta g_{\nu)\lambda}, \quad (89)$$

y por lo tanto, la ecuación (88) se ve reducida a

$$\nabla_{\rho}(\delta g_{\mu\nu}) = 2\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho(\mu} g_{\nu)\lambda}. \quad (90)$$

Para lograr despejar la variación de la conexión en la ecuación previa es conveniente utilizar un truco que aprovecha la simetría del tensor métrico y del símbolo de Christoffel. La idea es plantear tres veces la definición (90), en la segunda definición realizando el cambio  $\mu \rightleftharpoons \rho$  y en la tercera intercambiando  $\nu \rightleftharpoons \rho$ . Si a la suma de la primera con la segunda definición se le resta la tercera, se obtiene

$$2\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\nu\lambda} = \delta g_{\mu\nu;\rho} + \delta g_{\rho\nu;\mu} - \delta g_{\rho\mu;\nu}, \quad (91)$$

lo que al multiplicar por  $g^{\nu\alpha}$  da como resultado final

$$\boxed{\delta\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha} (\delta g_{\mu\nu;\rho} + \delta g_{\rho\nu;\mu} - \delta g_{\rho\mu;\nu})}. \quad (92)$$

### Variación del tensor de Riemann

Teniendo en cuenta la libertad del signo  $[S_2]$ , la definición del tensor de Riemann es

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 2[S_2] \left( \Gamma^{\mu}_{\nu[\sigma,\rho]} + \Gamma^{\mu}_{\alpha[\rho} \Gamma^{\alpha}_{\sigma]\nu} \right). \quad (93)$$

Variando la expresión (93) se obtiene que

$$\delta R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 2[S_2] \left( \delta\Gamma^{\mu}_{\nu[\sigma,\rho]} + \delta\Gamma^{\mu}_{\alpha[\rho} \Gamma^{\alpha}_{\sigma]\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha[\rho} \delta\Gamma^{\alpha}_{\sigma]\nu} \right), \quad (94)$$

donde en el primer término de la derecha se tuvo en cuenta que la variación conmuta con la derivada parcial. Ahora es conveniente calcular la derivada covariante de la variación de la conexión,

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma;\rho} = \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}; \quad (95)$$

considerando la ecuación anterior, y que el término  $\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$  está bien definido en la ecuación (92), la expresión para la variación de tensor de Riemann se reduce a

$$\delta R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 2[S_2]\delta\Gamma^{\mu}_{\nu[\sigma;\rho]} = [S_2]g^{\mu\lambda} (\delta g_{\lambda\nu;[\sigma\rho]} + \delta g_{\lambda[\sigma;\nu|\rho]} - \delta g_{\nu[\sigma;\lambda|\rho]}), \quad (96)$$

siendo  $\delta g_{\lambda\nu;[\sigma\rho]} = \frac{1}{2} [\nabla_{\rho}, \nabla_{\sigma}] \delta g_{\lambda\nu} = [S_2]R^{\epsilon}_{(\lambda|\rho\sigma} \delta g_{|\nu)\epsilon}$ , dando como resultado

$$\delta R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = [S_2] \left( [S_2]g^{\mu\lambda} R^{\epsilon}_{(\lambda|\rho\sigma} \delta g_{|\nu)\epsilon} + g^{\mu\eta} \delta g^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla_{\nu} - \delta g^{\eta}_{\nu} \delta g^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla^{\mu} \right) \delta g_{\eta\epsilon}. \quad (97)$$

### Variación del tensor de Ricci

Cabe recordar que el tensor de Ricci se puede definir como  $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$  o como  $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$ , donde el tensor de Riemann tiene también su libertad de signo aparte. Entonces la definición del Ricci para cualquier signatura es

$$R_{\nu\sigma} = [S_2][S_3]R^{\alpha}_{\nu\alpha\sigma}. \quad (98)$$

En este punto es importante tener presente que las variaciones son tensores, incluso la variación de la conexión (la conexión no es un tensor), se comporta como uno. Una vez hecha esta

aclaración, es fácil notar que para obtener la variación del tensor de Ricci simplemente hay que contraer el primer y tercer índice en la variación del Riemann sin olvidar la libertad de signo.

$$\delta R_{\nu\sigma} = [S_2][S_3]\delta R^{\alpha}_{\nu\alpha\sigma}, \quad (99)$$

$$\delta R_{\nu\sigma} = [S_2][S_3] \left[ R^{\epsilon}_{(\mu|\sigma} \delta^{\eta}_{|\nu)} + [S_2] \left( g^{\rho\eta} \delta^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla_{\nu} - \delta^{\eta}_{\nu} \delta^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla^{\rho} \right) \right] \delta g_{\eta\epsilon}. \quad (100)$$

### Variación del escalar de Ricci

El escalar de Ricci se define como la traza del tensor de Ricci, es decir,  $R = R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma}$ ; por lo tanto, la variación de dicho escalar se expresa como

$$\delta R = \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} + R_{\nu\sigma} \delta g^{\nu\sigma}, \quad (101)$$

$$= \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} g^{\nu\eta} g^{\sigma\epsilon} \delta g_{\eta\epsilon}, \quad (102)$$

$$= \delta R_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} - R^{\eta\epsilon} \delta g_{\eta\epsilon}, \quad (103)$$

donde la variación  $\delta R_{\nu\sigma}$  viene dada por la ecuación (100), dando como resultado

$$\delta R = [S_2][S_3] \left[ g^{\nu\sigma} R^{\epsilon}_{(\mu|\sigma} \delta^{\eta}_{|\nu)} + [S_2] g^{\nu\sigma} \left( g^{\rho\eta} \delta^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla_{\nu} - \delta^{\eta}_{\nu} \delta^{\epsilon}_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla^{\rho} \right) - R^{\eta\epsilon} \right] \delta g_{\eta\epsilon}. \quad (104)$$

Para llegar a una expresión más sencilla es conveniente desarrollar cada parte simétrica y antisimétrica en la ecuación (104); el primer término se reduce a

$$g^{\nu\sigma} R_{(\mu|\sigma}^{\epsilon\mu} \delta_{|\nu)}^{\eta} = \frac{1}{2} [R_{\mu\sigma}^{\epsilon\mu} \delta_{\nu}^{\eta} g^{\nu\sigma} + R_{\nu\sigma}^{\epsilon\mu} \delta_{\mu}^{\eta} g^{\nu\sigma}] , \quad (105)$$

$$= \frac{1}{2} [R_{\mu}^{\epsilon\mu\eta} + R_{\nu}^{\epsilon\eta\nu}] , \quad (106)$$

$$= \frac{1}{2} [R_{\mu}^{\epsilon\mu\eta} - R_{\nu}^{\epsilon\nu\eta}] , \quad (107)$$

$$= 0 , \quad (108)$$

lo cual simplifica la expresión (104), que ahora rompiendo los brackets de antisimetría queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta R &= [S_2][S_3] \left\{ \frac{1}{2} [S_2] g^{\nu\sigma} \left[ g^{\eta\rho} (\delta_{\sigma}^{\epsilon} \nabla_{\rho} \nabla_{\nu} - \delta_{\rho}^{\epsilon} \nabla_{\sigma} \nabla_{\nu}) - \delta_{\nu}^{\eta} (\delta_{\sigma}^{\epsilon} \nabla_{\rho} \nabla^{\rho} - \delta_{\rho}^{\epsilon} \nabla_{\sigma} \nabla^{\rho}) \right] - R^{\eta\epsilon} \right\} \delta g_{\eta\epsilon} \\ &= [S_3] \left[ \frac{1}{2} (\nabla^{\eta} \nabla^{\epsilon} - g^{\eta\epsilon} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma}) - \frac{1}{2} (g^{\eta\epsilon} \nabla_{\rho} \nabla^{\rho} - \nabla^{\eta} \nabla^{\epsilon}) - [S_2] R^{\eta\epsilon} \right] \delta g_{\eta\epsilon} , \end{aligned} \quad (109)$$

$$\boxed{\delta R = [S_3] [\nabla^{\eta} \nabla^{\epsilon} - g^{\eta\epsilon} \nabla_{\sigma} \nabla^{\sigma} - [S_2] R^{\eta\epsilon}] \delta g_{\eta\epsilon} .} \quad (110)$$

### Apéndice C. Variación respecto a la métrica del Lagrangiano $\mathcal{L}_4^1$

Teniendo en cuenta los anexos anteriores, ya están a la mano todas las herramientas necesarias para realizar la variación de la acción respecto a la métrica y obtener las ecuaciones de campo. Para ello se separará la acción en tres términos, la acción de Einstein-Hilbert, la acción de Yang-Mills y la acción de los Galileones. En este anexo se mostrará la variación con respecto a la métrica de la acción de los Galileones.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \boxed{\alpha \mathcal{L}_4^1} \right) ,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^1 = & \frac{1}{4}(A_b \cdot A^b) \left[ S_{\mu}^{\mu c} S_{\nu c}^{\nu} - S_{\nu}^{\mu c} S_{\mu c}^{\nu} + A_c \cdot A^c R \right] \\ & + \frac{1}{2}(A_c \cdot A_b) \left[ S_{\mu}^{\mu c} S_{\nu}^{\nu b} - S_{\nu}^{\mu c} S_{\mu}^{\nu b} + 2A^c \cdot A^b R \right], \end{aligned} \quad (111)$$

que por facilidad y orden en el desarrollo se desglosará en seis términos:

$$\mathcal{L}_4^{1(1)} = \frac{1}{4}(A_{\alpha}^b A_b^{\alpha}) S_{\pi}^{\pi c} S_{\eta c}^{\eta}, \quad (112)$$

$$\mathcal{L}_4^{1(2)} = -\frac{1}{4}(A_{\alpha}^b A_b^{\alpha}) S_{\eta \pi}^c S_c^{\eta \pi}, \quad (113)$$

$$\mathcal{L}_4^{1(3)} = \frac{1}{4}(A_{\alpha}^b A_b^{\alpha})(A_{\eta}^c A_c^{\eta}) R, \quad (114)$$

$$\mathcal{L}_4^{1(4)} = \frac{1}{2} A_c^{\alpha} A_{\alpha}^b S_{\pi}^{\pi c} S_{\eta b}^{\eta}, \quad (115)$$

$$\mathcal{L}_4^{1(5)} = -\frac{1}{2} A_c^{\alpha} A_{\alpha}^b S_{\eta \pi}^c S_b^{\eta \pi}, \quad (116)$$

$$\mathcal{L}_4^{1(6)} = A_c^{\alpha} A_{\alpha}^b A_{\beta}^c A_b^{\beta} R. \quad (117)$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(1)}$

Hay que recordar que  $\mathcal{L}_4^{1(1)}$  se puede escribir como

$$\mathcal{L}_4^{1(1)} = \frac{1}{4}(A_\alpha^b A_b^\alpha)[A_{;\pi}^{\pi c} + A_\pi^c{}_{;\pi}][A_{c;\eta}^\eta + A_\eta{}^{;\eta}{}_c], \quad (118)$$

$$= (A_\alpha^b A_b^\alpha)A_{;\pi}^{\pi c} A_\eta{}^{;\eta}{}_c, \quad (119)$$

$$= g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} g^{\eta\nu} \nabla_\eta A_{\nu c} g^{\pi\rho} \nabla_\pi A_\rho^c, \quad (120)$$

lo cual facilita identificar los términos dependientes de la métrica para realizar la variación a cada uno de ellos, en este caso son  $g^{\chi\varepsilon}$  y  $\nabla_\chi A_\varepsilon^c$ , este último debido a que se puede escribir como  $\partial_\chi A_\varepsilon^c - \Gamma_{\chi\varepsilon}^\lambda A_\lambda^c$  donde  $\Gamma_{\chi\varepsilon}^\lambda$  evidentemente depende de la métrica. Los términos como  $A_\chi^c$  y  $\partial_\chi A_\varepsilon^c$  no poseen variación con respecto a  $g^{\mu\nu}$ ; por lo tanto, actúan como constantes. Es por eso que la variación de este término es

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_4^{1(1)} &= \delta g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} g^{\eta\nu} \nabla_\eta A_{\nu c} g^{\pi\rho} \nabla_\pi A_\rho^c \\ &+ g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} \delta g^{\eta\nu} \nabla_\eta A_{\nu c} g^{\pi\rho} \nabla_\pi A_\rho^c \\ &+ g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} g^{\eta\nu} \delta(\nabla_\eta A_{\nu c}) g^{\pi\rho} \nabla_\pi A_\rho^c \\ &+ g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} g^{\eta\nu} \nabla_\eta A_{\nu c} \delta g^{\pi\rho} \nabla_\pi A_\rho^c \\ &+ g^{\mu\alpha} A_\alpha^b A_{\mu b} g^{\eta\nu} \nabla_\eta A_{\nu c} g^{\pi\rho} \delta(\nabla_\pi A_\rho^c), \end{aligned} \quad (121)$$

y para completar el desarrollo es necesario usar lo obtenido en el anexo 2, en este caso, más precisamente la ecuación (92), puesto que

$$\delta(\nabla_{\pi} A_{\rho}^c) = \delta\left(\partial_{\pi} A_{\rho}^c - \Gamma_{\pi\rho}^{\lambda} A_{\lambda}^c\right) = -(\delta\Gamma_{\pi\rho}^{\lambda}) A_{\lambda}^c, \quad (122)$$

$$= -\frac{1}{2} A_{\lambda}^c g^{\lambda\gamma} (\nabla_{\rho} \delta g_{\gamma\pi} + \nabla_{\pi} \delta g_{\gamma\rho} - \nabla_{\gamma} \delta g_{\pi\rho}). \quad (123)$$

Aunque en la ecuación (123) se tiene la variación de la derivada covariante en términos de la métrica y sus variaciones, se observa que dichas variaciones de la métrica están dentro de derivadas covariantes, y para proceder con el cálculo es necesario tener explícitos los términos  $\delta g^{\chi\varepsilon}$ . Lo anterior se resuelve fácilmente recordando que la variación de la acción se realiza con extremos fijos (ver Anexo 1), lo que implica que si se utiliza la regla de la cadena y se hace uso del teorema de la divergencia, se puede sacar de factor común el término  $\delta g^{\chi\varepsilon}$ , dando como resultado,

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\beta} A_c^{\beta} \nabla_{\pi} A^{\pi c} A_{\chi}^b A_{\varepsilon b} - 2A_{\chi}^c \nabla_{\varepsilon} (A_{\alpha}^b A_b^{\alpha} \nabla_{\beta} A_c^{\beta}) \\ + g_{\chi\varepsilon} \nabla_{\gamma} (A_{\alpha}^b A_b^{\alpha} \nabla_{\beta} A_c^{\beta} A^{\gamma c}) \end{array} \right\} \delta g^{\chi\varepsilon}. \quad (124)$$

Para finalizar el cálculo se especifica que la variación será con respecto al tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ , es decir,  $\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu\nu}}$ , donde se tiene en cuenta que

$$\frac{\delta g^{\chi\varepsilon}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\chi} \delta_{\nu}^{\varepsilon} + \delta_{\mu}^{\varepsilon} \delta_{\nu}^{\chi}). \quad (125)$$

Para este caso, el resultado de la variación respecto a la métrica es

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} = A_{c;\eta}^\eta A_{;\pi}^{\pi c} A_\mu^b A_{\nu b} - A_\mu^c [A_\alpha^b A_b^\alpha A_{c;\eta}^\eta]_{;\nu} - A_\nu^c [A_\alpha^b A_b^\alpha A_{c;\eta}^\eta]_{;\mu} + g_{\mu\nu} [A_\alpha^b A_b^\alpha A^{\gamma c} A_{c;\eta}^\eta]_{;\gamma}. \quad (126)$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(2)}$

Realizando un proceso análogo al realizado previamente, la variación para el  $\mathcal{L}_4^{1(2)}$  expresado en términos del tensor  $S_{\mu\nu}^c$  es

$$\begin{aligned} -4\delta \mathcal{L}_4^{1(2)} &= A_\alpha^b A_{\mu b} S_\eta^{\pi c} S_{\pi c}^\eta \delta g^{\alpha\mu} + A_\alpha^b A_b^\alpha g^{\pi\rho} S_{\eta\rho}^c S_{\nu\pi c} \delta g^{\eta\nu} \\ &+ A_\alpha^b A_b^\alpha g^{\eta\nu} S_{\eta\rho}^c S_{\nu\pi c} \delta g^{\pi\rho} + A_\alpha^b A_b^\alpha g^{\nu\eta} g^{\pi\rho} S_{\nu\pi c} \delta S_{\eta\rho}^c \\ &+ A_\alpha^b A_b^\alpha g^{\nu\eta} g^{\pi\rho} S_{\eta\rho}^c \delta S_{\nu\pi c}. \end{aligned} \quad (127)$$

Usando nuevamente lo desarrollado en el anexo 1 para los términos  $\delta S_{\mu\nu}^c$ , se tiene que

$$-4\delta \mathcal{L}_4^{1(2)} = \left\{ \begin{array}{l} A_\chi^b A_{\varepsilon b} S_\eta^{\pi c} S_{\pi c}^\eta - 4\nabla_\eta (A_\alpha^b A_b^\alpha S_{\chi c}^\eta A_\varepsilon^c) \\ + 2A_\alpha^b A_b^\alpha S_{\chi\rho}^c S_{\varepsilon c}^\rho + 2\nabla_\gamma (A_\alpha^b A_b^\alpha S_{\chi\varepsilon c} A^{\gamma c}) \end{array} \right\} \delta g^{\chi\varepsilon}, \quad (128)$$

por lo tanto,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4} A_\mu^b A_{\nu b} S_\eta^{\pi c} S_{\pi c}^\eta - \frac{1}{2} A_\alpha^b A_b^\alpha S_{\mu\rho}^c S_{\nu c}^\rho + [A_\alpha^b A_b^\alpha S_{c(\mu}^\eta A_{\nu)}^c]_{;\eta} + \frac{1}{2} [A_\alpha^b A_b^\alpha S_{\mu\nu}^c A_{c;\gamma}^\eta]_{;\gamma}. \quad (129)$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(3)}$

En este caso hay que hacer uso de la ecuación (110), pues la variación de este término es

$$4\delta\mathcal{L}_4^{1(3)} = 2A_\alpha^b A_b^\alpha A_\chi^c A_{\varepsilon c} R \delta g^{\chi\varepsilon} + A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta \delta R, \quad (130)$$

y hay que expresar la variación del escalar de Ricci en términos de la variación de la métrica.

Al realizar dicho cambio y lo expuesto en el anexo 1, se obtiene eventualmente que

$$4\delta\mathcal{L}_4^{1(3)} = \left\{ \begin{array}{l} 2A_\alpha^b A_b^\alpha A_\chi^c A_{\varepsilon c} R + R_{\chi\varepsilon} A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta \\ + g_{\chi\varepsilon} [A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta]_{;\sigma} - [A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta]_{;\chi\varepsilon} \end{array} \right\} \delta g^{\chi\varepsilon}, \quad (131)$$

dando como resultado final

$$\boxed{\frac{\delta\mathcal{L}_4^{1(3)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} A_\alpha^b A_b^\alpha A_\mu^c A_{\nu c} R + \frac{1}{4} R_{\mu\nu} A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} [A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta]_{;\sigma} - \frac{1}{4} [A_\alpha^b A_b^\alpha A_\eta^c A_c^\eta]_{;\mu\nu}.} \quad (132)$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(4)}$

Este término es similar al  $\mathcal{L}_4^1$  pues solo cambian las contracciones en los índices de la simetría interna, entonces el proceso de variación respecto a la métrica para este término es idéntico al expuesto en el anexo 3.

$$\begin{aligned}
2\delta\mathcal{L}_4^{1(4)} &= A_{\alpha c}A_{\mu b}S_{\eta}^{\eta c}S_{\pi}^{\pi b}\delta g^{\alpha\mu} + A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}S_{\eta\nu}^c\delta g^{\eta\nu} \\
&+ A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\eta}^{\eta c}S_{\pi\rho}^b\delta g^{\pi\rho} + A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}g^{\eta\nu}\delta S_{\eta\nu}^c \\
&+ A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\eta}^{\eta c}g^{\pi\rho}\delta S_{\pi\rho}^b,
\end{aligned} \tag{133}$$

donde  $\delta S_{\mu\nu}^c = -2\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda}^c$  y se repite el proceso realizado en el caso 3. Una vez hecho el respectivo proceso para definir la variación del tensor  $S_{\mu\nu}^c$  en términos de la variación de la métrica, se obtiene que

$$2\delta\mathcal{L}_4^{1(4)} = \left\{ \begin{array}{l} A_{\chi c}A_{\varepsilon b}S_{\eta}^{\eta c}S_{\pi}^{\pi b} + 2g_{\chi\varepsilon}[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}A^{\gamma c}]_{;\gamma} \\ + 2A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}S_{\chi\varepsilon}^c - 4[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}A_{\varepsilon}^c]_{;\chi} \end{array} \right\} \delta g^{\chi\varepsilon}, \tag{134}$$

y por lo tanto, el resultado final es

$$\boxed{\frac{\delta\mathcal{L}_4^{1(4)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}A_{\mu c}A_{\nu b}S_{\eta}^{\eta c}S_{\pi}^{\pi b} - A_{\nu}^c[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}]_{;\mu} - A_{\mu}^c[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}]_{;\nu} + g_{\mu\nu}[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\pi b}A^{\gamma c}]_{;\gamma}.} \tag{135}$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(5)}$

Este término es similar al  $\mathcal{L}_4^2$  pues solo cambian las contracciones en los índices de la simetría interna, entonces el proceso de variación respecto a la métrica para este término es idéntico al expuesto en el anexo 3. Comenzando de forma similar a los casos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned}
-2\delta\mathcal{L}_4^{1(5)} &= A_{\alpha c}A_{\mu b}S_{\eta}^{\pi c}S_{\pi}^{\eta b}\delta g^{\alpha\mu} + A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\eta}^{\pi c}S_{\pi\nu}^b\delta g^{\eta\nu} \\
&+ A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\eta\rho}^cS_{\pi}^{\eta b}\delta g^{\pi\rho} + A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S^{\rho\eta b}\delta S_{\rho\eta}^c \\
&+ A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S^{\nu\pi c}\delta S_{\pi\nu}^b,
\end{aligned} \tag{136}$$

donde  $\delta S_{\mu\nu}^c = -2\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda}^c$  y se repite el proceso realizado en las secciones 3 y 3. Una vez hecho el respectivo proceso para definir la variación del tensor  $S_{\mu\nu}^c$  en términos de la variación de la métrica, se obtiene que

$$2\delta\mathcal{L}_4^{1(4)} = \left\{ \begin{array}{l} A_{\chi c}A_{\varepsilon b}S_{\eta}^{\pi c}S_{\pi}^{\eta b} + 2g_{\chi\varepsilon}[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\eta b}A^{\gamma c}]_{;\gamma} \\ + 2A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\eta b}S_{\chi\varepsilon}^c - 4[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\pi}^{\eta b}A_{\varepsilon}^c]_{;\chi} \end{array} \right\} \delta g^{\chi\varepsilon}, \tag{137}$$

y por lo tanto, el resultado final es

$$\boxed{\frac{\delta\mathcal{L}_4^{1(5)}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}A_{\mu c}A_{\nu b}S_{\eta}^{\pi c}S_{\pi}^{\eta b} - A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\mu\rho}^cS_{\nu}^{\rho b} + 2[A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{(\mu}^{\eta b}A_{\nu)}^c]_{;\eta} - [A_{\alpha c}A_b^{\alpha}S_{\mu\nu}^bA^{\gamma c}]_{;\gamma}.} \tag{138}$$

### Variación del $\mathcal{L}_4^{1(6)}$

Este caso es similar al del  $\mathcal{L}_4^{1(3)}$  pues ambos términos difieren solo en la contracción de los índices de la simetría interna.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_4^{1(6)} &= A_{\alpha c}A_{\mu b}A_{\eta}^cA^{\eta b}R\delta g^{\alpha\mu} + A_{\eta}^cA_{\nu}^bA_{\alpha c}A_b^{\alpha}R\delta g^{\eta\nu} \\
&+ A_{\alpha c}A_b^{\alpha}A_{\eta}^cA^{\eta b}\delta R,
\end{aligned} \tag{139}$$

donde la variación del escalar de Ricci está dada por la ecuación (110). Una vez realizado el desarrollo del anexo 1 para  $\delta R$ , se llega a la siguiente expresión:

$$\delta \mathcal{L}_4^{1(6)} = \left\{ \begin{array}{l} 2A_{\chi c} A_{\varepsilon b} A_{\eta}^c A^{\eta b} R + g_{\chi \varepsilon} [A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b}]_{;\sigma} \\ + R_{\chi \varepsilon} A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b} - [A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b}]_{;\chi \varepsilon} \end{array} \right\} \delta g^{\chi \varepsilon}, \quad (140)$$

dando como resultado final,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\delta g^{\mu \nu}} = 2A_{\mu c} A_{\nu b} A_{\eta}^c A^{\eta b} R + R_{\mu \nu} A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b} + g_{\mu \nu} [A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b}]_{;\sigma} - [A_{\alpha c} A_b^{\alpha} A_{\eta}^c A^{\eta b}]_{;\mu \nu}. \quad (141)$$

Uniendo cada uno de los seis resultados anteriores y considerando en la acción total que la contribución de los Galileones es

$$S_4^1 = \int d^4 x \sqrt{-g} (\alpha \mathcal{L}_4^1), \quad (142)$$

se concluye que

$$\frac{\delta S_4^1}{\delta g^{\mu \nu}} = \int d^4 x \left[ \alpha \mathcal{L}_4^1 \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu \nu}} + \alpha \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_4^1}{\delta g^{\mu \nu}} \right], \quad (143)$$

en donde

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4^1}{\delta g^{\mu \nu}} = \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\delta g^{\mu \nu}} + \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\delta g^{\mu \nu}} + \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\delta g^{\mu \nu}} + \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\delta g^{\mu \nu}} + \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\delta g^{\mu \nu}} + \frac{\delta \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\delta g^{\mu \nu}}, \quad (144)$$

y la variación de  $\sqrt{-g}$  se muestra en la subsección 2.

#### Apéndice D. Variación respecto a la métrica de la acción de Einstein-Hilbert

En este anexo se mostrará paso a paso la variación con respecto a la métrica del único término con información netamente geométrica de la acción total, es decir de  $S_{EH}$ ,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \boxed{\mathcal{L}_{EH}} + \mathcal{L}_{YM} + \alpha \mathcal{L}_4^1 \right),$$

siendo

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{M_p^2 R}{2}, \quad (145)$$

donde  $M_p$  es la masa de Planck reducida y  $R$  es el escalar de Ricci. A partir de esta definición se procede a calcular la variación de la siguiente manera:

$$\delta S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \left[ \sqrt{-g} g^{\alpha\eta} \delta R_{\alpha\eta} + \sqrt{-g} R_{\alpha\eta} \delta g^{\alpha\eta} + R \delta \sqrt{-g} \right]. \quad (146)$$

Para desarrollar el primer término de la derecha es conveniente hacer uso del principio de equivalencia. Considerando el convenio de signos (+ + +) se tiene que el tensor de Ricci es

$$R_{\nu\sigma} = 2 \left[ \Gamma_{\nu[\sigma,\mu]}^\mu + \Gamma_{\alpha[\mu}^\mu \Gamma_{\sigma]\nu}^\alpha \right], \quad (147)$$

pero si  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ , entonces  $\partial_\gamma g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$ . Esto no implica que las derivadas de la conexión sean nulas y por lo tanto el primer término en la definición del tensor de Ricci sobrevive.

Regresando al espacio-tiempo curvo, donde  $\partial_\gamma \rightarrow \nabla_\gamma$ , el primer término en la definición (146) es

$$\delta S_{EH}^{(1)} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x [\sqrt{-g} g^{\alpha\eta} (\delta\Gamma_{\alpha\eta}^\mu{}_{;\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\mu{}_{;\eta})], \quad (148)$$

el cual se puede reescribir como

$$\delta S_{EH}^{(1)} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x [(\sqrt{-g} g^{\alpha\eta} \delta\Gamma_{\alpha\eta}^\mu{}_{;\mu}) - (\sqrt{-g} g^{\alpha\eta} \Gamma_{\mu\alpha}^\mu{}_{;\eta})], \quad (149)$$

lo que permite caer en cuenta que debido al teorema de la divergencia, dicho primer término en la variación de la acción de Einstein-Hilbert es igual a cero. Analizando los términos restantes en la definición (146),

$$\delta S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\eta} \delta g^{\alpha\eta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\eta} \delta g^{\alpha\eta} \right), \quad (150)$$

dan como resultado final

$$\boxed{\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu}}. \quad (151)$$

## Apéndice E. Variación respecto a la métrica de la acción de Yang-Mills

En este anexo se mostrará la variación con respecto a la métrica de  $S_{YM}$ , conocido por ser el término cinético del contenido material.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{EH} + \boxed{\mathcal{L}_{YM}} + \alpha \mathcal{L}_4^1 \right),$$

donde

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^c F_c^{\mu\nu}, \quad (152)$$

siendo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \tilde{g}\epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (153)$$

donde  $\tilde{g}$  es la constante de acople del grupo y  $\epsilon_{bc}^a$  es el símbolo de Levi-Civita que define las constantes de estructura del grupo. A partir de las definiciones anteriores se tiene que

$$\delta S_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \left[ F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \delta(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) \right], \quad (154)$$

en donde  $\delta(\sqrt{-g})$  ya se calculó previamente y

$$\delta(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}) = \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\eta} F_{\mu\nu a} F_{\alpha\eta}^a), \quad (155)$$

$$= 2[F_{\chi\nu}^a F_{\epsilon a}^\nu \delta g^{\chi\epsilon} + F_a^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}^a]. \quad (156)$$

Si se observa la definición (153) se deduce que  $\delta F_{\mu\nu}^a = 0$ , pues hay que recordar que la variación conmuta con la derivada parcial, entonces

$$\frac{\delta(F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu})}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\mu\lambda}^a F_{\nu a}^\lambda. \quad (157)$$

Reemplazando la expresión (157) en la variación de  $S_{YM}$  se obtiene finalmente que

$$\boxed{\frac{\delta S_{YM}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \int d^4x \left[ \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} - F_{\mu\lambda}^a F_{\nu a}^\lambda \right]}. \quad (158)$$

**Apéndice F. Variación respecto al campo del Lagrangiano  $\mathcal{L}_4^1$** 

Para obtener las ecuaciones de movimiento del  $\mathcal{L}_4^1$  primero hay que determinar la variación con respecto al campo de algunos términos recurrentes en la expresión del Lagrangiano.

$$\frac{\partial(A_\mu^a A_a^\mu)}{\partial A_{\alpha c}} = \frac{g^{\mu\nu} g_{ab} \partial(A_\mu^a A_\nu^b)}{\partial A_{\alpha c}} = 2A^{\alpha c}, \quad (159)$$

$$\frac{\partial(A_\mu^a A^{\mu b})}{\partial A_{\alpha c}} = \frac{g^{\mu\nu} \partial(A_\mu^a A_\nu^b)}{\partial A_{\alpha c}} = 2A^{\alpha(a} g^{b)c}, \quad (160)$$

$$\frac{\partial S_{\mu\nu}^a}{\partial A_{\alpha c}} = \frac{\partial(-2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda^a)}{\partial A_{\alpha c}} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g^{ac}, \quad (161)$$

$$\frac{\partial S_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a)}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = 2g^{ac} \delta_{(\mu}^\beta \delta_{\nu)}^\alpha. \quad (162)$$

Considerando que a partir de la variación con respecto al campo  $A_\mu^a$  y a su cuadriderivada  $\partial_\nu A_\mu^a$  se llega a la típica ecuación de Euler-Lagrange para campos vectoriales, la idea ahora es aplicar la ecuación de movimiento

$$\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha c}} - \partial_\beta \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} \right] = 0, \quad (163)$$

para cada uno de los seis términos del  $\mathcal{L}_4^1$  expuestos en el anexo 3.

**Ecuación de movimiento del  $\mathcal{L}_4^{1(1)}$**

Los términos de la variación del  $\mathcal{L}_4^{1(1)}$  con respecto al campo que se deben reemplazar en la expresión (163) son

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial A_{\alpha c}} = 2A^{\alpha c} A_{;\mu}^{\mu a} A_{;va}^v - 2(A_b^\eta A_\eta^b) A_{;\gamma}^{\gamma c} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}, \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(1)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = (A_b^\eta A_\eta^b) g^{\alpha\beta} S_\mu^{\mu c}.} \quad (164)$$

### Ecuación de movimiento del $\mathcal{L}_4^{1(2)}$

Los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para el  $\mathcal{L}_4^{1(2)}$  son

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\partial A_{\alpha c}} = -\frac{1}{2} \left[ A^{\alpha c} S_{\mu\nu}^a S_a^{\mu\nu} - 2(A_b^\eta A_\eta^b) \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^{\mu\nu c} \right]}, \quad (165)$$

y

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(2)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = -(A_b^\eta A_\eta^b) S^{\alpha\beta c}.} \quad (166)$$

### Ecuación de movimiento del $\mathcal{L}_4^{1(3)}$

Los términos de la variación del  $\mathcal{L}_4^{1(3)}$  con respecto al campo que se deben reemplazar en la expresión (163) son

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\partial A_{\alpha c}} = (A_b^\eta A_\eta^b) A^{\alpha c} R}, \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(3)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = 0.} \quad (167)$$

**Ecuación de movimiento del  $\mathcal{L}_4^{1(4)}$** 

Los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para el  $\mathcal{L}_4^{1(4)}$  son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\partial A_{\alpha c}} = \left[ A_b^\alpha S_\mu^{\mu b} S_\nu^{v c} + \frac{2}{\sqrt{-g}} g^{\lambda \alpha} (A_\mu^c A_b^\mu) S_\nu^{v b} \partial_\lambda (\sqrt{-g}) \right], \quad (168)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(4)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = 2(A_\mu^c A_b^\mu) g^{\alpha \beta} S_\mu^{\mu b}. \quad (169)$$

**Ecuación de movimiento del  $\mathcal{L}_4^{1(5)}$** 

Los términos de la variación del  $\mathcal{L}_4^{1(5)}$  con respecto al campo que se deben reemplazar en la expresión (163) son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\partial A_{\alpha c}} = \left[ 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha (A_\eta^c A_b^\eta) S^{\mu\nu b} - A_b^\alpha S_{\mu\nu}^b S^{\mu\nu c} \right], \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(5)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = -2(A_\mu^c A_b^\mu) S^{\alpha\beta b}. \quad (170)$$

**Ecuación de movimiento del  $\mathcal{L}_4^{1(6)}$** 

Los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para el  $\mathcal{L}_4^{1(6)}$  son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\partial A_{\alpha c}} = 4(A_\mu^b A^{\mu c}) A_b^\alpha R, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_4^{1(6)}}{\partial (\partial_\beta A_{\alpha c})} = 0. \quad (171)$$

La ecuación de movimiento para el  $\mathcal{L}_4^1$  es igual a la suma de las ecuaciones de movimiento de cada uno de sus términos. Hay que tener en cuenta que si bien la ecuación (163) está igualada a cero, esto solamente es válido cuando se trata del Lagrangiano TOTAL, lo que implica en este caso tener en cuenta el Lagrangiano de Yang-Mills. Mientras tanto hay que ser cuidadoso si se quiere hacer un cambio de signo o multiplicar la ecuación por algún factor.

### Apéndice G. Variación respecto al campo de la acción de Yang-Mills

Recordando la definición del tensor de esfuerzo de campo de Gauge (153), se procede a calcular su variación respecto al campo y su cuadriderivada. Es conveniente realizar el proceso tanto para el tensor dos veces covariante como para su versión dos veces contravariante, pues por definición,

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}.$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial A_{\alpha c}} = \frac{\partial(\tilde{g}\epsilon_{bf}^a A_\mu^b A_\nu^f)}{\partial A_{\alpha c}} = \tilde{g}\epsilon_{bf}^a \left[ A_\nu^f \delta_\mu^\alpha g^{bc} + A_\mu^b \delta_\nu^\alpha g^{fc} \right], \quad (172)$$

$$\frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial A_{\alpha c}} = \frac{\partial(\tilde{g}\epsilon_{abf} A^{\mu b} A^{\nu f})}{\partial A_{\alpha c}} = \tilde{g}\epsilon_{abf} \left[ A^{\nu f} g^{\alpha\mu} g^{bc} + A^{\mu b} g^{\alpha\nu} g^{fc} \right], \quad (173)$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = g^{ac} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta), \quad (174)$$

$$\frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = \frac{\partial(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = \delta_a^c (g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}). \quad (175)$$

Ahora sí, con base en las expresiones anteriores se puede determinar fácilmente la ecuación de movimiento para el Lagrangiano de Yang-Mills.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial A_{\alpha c}} = -\frac{1}{4} \left[ F_d^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^d}{\partial A_{\alpha c}} + F_{\mu\nu}^d \frac{\partial F_d^{\mu\nu}}{\partial A_{\alpha c}} \right], \quad (176)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{g} F^{\mu\nu d} \varepsilon_{dbf} \left[ A_\nu^f \delta_\mu^\alpha g^{bc} + A_\mu^b \delta_\nu^\alpha g^{fc} \right], \quad (177)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{g} \left[ F^{\alpha\nu d} \varepsilon_{df}^c A_\nu^f + F^{\alpha\mu d} \varepsilon_{db}^c A_\mu^b \right], \quad (178)$$

$$= \tilde{g} \varepsilon_{bd}^c A_\nu^b F^{\nu\alpha d}. \quad (179)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} = -\frac{1}{4} \left[ F_a^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} + F_{\mu\nu}^a \frac{\partial F_a^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_{\alpha c})} \right], \quad (180)$$

$$= -\frac{1}{4} \left[ \begin{array}{l} F_a^{\mu\nu} g^{ac} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta) + \\ F_{\mu\nu}^a \delta_a^c (g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \end{array} \right], \quad (181)$$

$$= -\frac{1}{4} \left[ (F^{\beta\alpha c} - F^{\alpha\beta c}) + (F^{\beta\alpha c} - F^{\alpha\beta c}) \right], \quad (182)$$

$$= -F^{\beta\alpha c}. \quad (183)$$

Introduciendo en (163) las expresiones (179) y (183), se tiene que la contribución del Lagrangiano de Yang-Mills a las ecuaciones de movimiento es

$$\boxed{\sqrt{-g} \tilde{g} \varepsilon^c{}_{bd} A^b{}_{\nu} F^{\nu\alpha d} + \partial_{\beta} \left( \sqrt{-g} F^{\beta\alpha c} \right)}. \quad (184)$$

## Apéndice H. Variación de la acción total

Previamente se calcularon las variaciones de los diferentes términos que componen la acción total, la cual está definida por la siguiente expresión,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{M_p^2 R}{2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a{}^{\mu\nu} + \alpha \mathcal{L}_4^1 \right). \quad (185)$$

Teniendo en cuenta que depende tanto del campo  $A_{\mu}^a$  como de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , a partir del principio variacional se pueden obtener dos ecuaciones, comúnmente llamadas ecuaciones de campo y de movimiento.

### Ecuaciones de campo y de movimiento

- **Ecuaciones de campo:**

Partiendo del principio de acción estacionaria con respecto a la métrica se tiene que

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left( \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{EH})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{YM})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\alpha\sqrt{-g}\mathcal{L}_4^1)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) = 0, \quad (186)$$

en donde los términos dentro de la integral se calcularon en los anexos 3, 4, 5 y son

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{EH})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{M_p^2\sqrt{-g}}{2} G_{\mu\nu}, \quad (187)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{YM})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[ \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} - F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\lambda}^a \right], \quad (188)$$

$$\frac{\delta(\alpha\sqrt{-g}\mathcal{L}_4^1)}{\delta g^{\mu\nu}} = \alpha\sqrt{-g} \left[ \frac{\delta\mathcal{L}_4^1}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_4^1 \right], \quad (189)$$

respectivamente. Como se trata de una integral de volumen arbitraria lo mejor es enfocarse en el integrando y llegar a una expresión tipo ecuaciones de campo de Einstein, en donde se intenta correlacionar la geometría del espacio-tiempo con el contenido energético que lo ocupa, es decir, una expresión tipo  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ . Para ello es conveniente despejar el tensor de Einstein obtenido de la variación de la acción de Einstein-Hilbert,

$$\sqrt{-g} \left\{ \frac{M_p^2}{2} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} - F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\lambda}^a \right] + \alpha \left[ \frac{\delta\mathcal{L}_4^1}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{L}_4^1 \right] \right\} = 0, \quad (190)$$

dando como resultado

$$-\frac{M_p^2}{2} G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_a^{\rho\sigma} - F_{\mu\lambda}^a F_{\nu a}^\lambda \right] + \alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{L}_4^1}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_4^1 \right]. \quad (191)$$

Si bien la parte derecha de la igualdad no es un término netamente material debido al acople no mínimo a la gravedad que contiene el  $\mathcal{L}_4^1$ , es conveniente considerar tales términos geométricos en el tensor energía momentum para un análisis más eficaz de las ecuaciones.

■ **Ecuaciones de movimiento:**

Es un proceso similar al expuesto en la sección anterior con la diferencia que ahora el principio de acción estacionaria se aplicará usando la variación respecto al campo y sus derivadas.

En el anexo 6 se mencionó que variar la acción con respecto al campo y aplicar la ecuación de movimiento son procesos equivalentes; a continuación se mostrará la deducción.

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \delta (A_{\mu,\beta}^a) \right], \quad (192)$$

considerando la conmutación entre la variación y la derivada parcial, la ecuación previa es equivalente a

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} (\delta A_\mu^a)_{,\beta} \right]. \quad (193)$$

Ahora se trabajará el segundo término de tal manera que se pueda agrupar la variación del campo  $A_\mu^a$ , para ello hay que partir de la siguiente definición:

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \delta A_{\mu}^a \right]_{;\beta} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \delta A_{\mu}^a \right]_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\lambda}^a)} \delta A_{\mu}^a \right], \quad (194)$$

donde al aplicar la regla de la cadena al primer término de la derecha se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\beta}^a} (\delta A_{\mu}^a)_{,\beta} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \delta A_{\mu}^a \right]_{;\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\lambda}^a)} \delta A_{\mu}^a \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right]_{,\beta} \delta A_{\mu}^a \quad (195)$$

Reemplazando la expresión anterior en la definición (192) y considerando que la variación es con extremos fijos (ver anexo 1), lo que anula el primer término de la ecuación (195), la variación de la acción ahora es

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}^a} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\lambda}^a)} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right]_{,\beta} \right) \delta A_{\mu}^a, \quad (196)$$

lo que permite simplificar la expresión al realizar el cambio  $\Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} = \partial_{\lambda} (\ln(\sqrt{-g}))$ , dando como resultado

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}^a} - (\sqrt{-g})_{,\lambda} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\lambda}^a)} \right] - \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right]_{,\beta} \right) \delta A_{\mu}^a, \\ &= \int d^4x \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}^a} - \partial_{\beta} \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right] \right) \delta A_{\mu}^a. \end{aligned} \quad (197)$$

Recordando que el principio de mínima acción implica  $\frac{\delta S}{\delta A_{\mu}^a} = 0$ , entonces

$$\boxed{\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}^a} - \partial_{\beta} \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right] = 0.} \quad (198)$$

La expresión (198) es equivalente a la usada para calcular la variación de la acción con respecto al campo en los anexos 6 y 7, en donde se aplicaron las ecuaciones de Euler-Lagrange para el  $\mathcal{L}_4^1$  y el  $\mathcal{L}_{YM}$  respectivamente. Debido a que la acción de Einstein-Hilbert es independiente del campo  $A_\mu^a$ , la variación de la acción total con respecto al campo es la suma de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}_4^1$  y  $\mathcal{L}_{YM}$ , es decir,

$$\sqrt{-g} \frac{\partial(\alpha \mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_{YM})}{\partial A_\mu^a} - \partial_\beta \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial(\alpha \mathcal{L}_4^1 + \mathcal{L}_{YM})}{\partial (A_{\mu,\beta}^a)} \right] = 0, \quad (199)$$

donde cada término de la ecuación (199) está calculado en los anexos 6 y 7 para un campo vectorial con ambos índices covariantes  $A_{\alpha c}$ .

### **Apéndice I. Ecuaciones de campo y de movimiento con tríada cósmica**

Una de las principales asunciones de esta teoría es considerar el universo observable como un universo isótropo y homogéneo. Esto se puede apreciar al considerar la métrica de FLRW; sin embargo, tal concepto debe ser consistente con el hecho de que el tensor de momentum-energía sea el de un fluido perfecto. Para ello se usa la configuración de tríada cósmica, la cual respeta dichas idealizaciones del modelo.

### **Maple y GRTensor para la incorporación de la tríada cósmica**

Para imponer tal configuración de campos, en esta etapa del trabajo se hizo uso del programa Maple, el cual con ayuda de un paquete llamado GRTensor, permite al usuario realizar cálculos propios de relatividad general de una manera rápida y sencilla. El primer paso para comenzar el

cálculo computacional es definir el tensor métrico, ya después se definen los principales tensores de la teoría tales como  $A_{\mu}^a$ ,  $S_{\mu\nu}^a$  y  $F_{\mu\nu}^a$ . Sin embargo, hay que tener en cuenta que el programa se especializa en relatividad general y por lo tanto, no comprende los índices de la simetría interna, razón por la cual al redactar las ecuaciones en Maple se deben romper todas las contracciones de los índices de Gauge, así como también se deben definir  $A_{\mu}^1$ ,  $A_{\mu}^2$  y  $A_{\mu}^3$  por separado, al igual que cualquier tensor que posea índices de Gauge.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de las líneas de código escritas en Maple, donde se tuvieron que realizar varios cambios en la notación por comodidad.

$$a(t) \equiv r(t) \quad \wedge \quad \dot{a} \equiv r_t \quad \wedge \quad \ddot{a} \equiv r_{t,t}, \quad (200)$$

$$\sqrt{-g} \equiv rg := \text{sqrt}(-\text{det}g), \quad (201)$$

$$A_{\mu}^1 \equiv A\_1\{a\} := [0, \phi(t), 0, 0], \quad (202)$$

$$A_{\mu}^2 \equiv A\_2\{a\} := [0, 0, \phi(t), 0], \quad (203)$$

$$A_{\mu}^3 \equiv A\_3\{a\} := [0, 0, 0, \phi(t)], \quad (204)$$

$$S_1^{\alpha\beta} \equiv A_{-1}\{\wedge b; \wedge a\} + A_{-1}\{\wedge a; \wedge b\}, \quad (205)$$

$$F_{\alpha\beta}^1 \equiv A_{-1}\{b, a\} - A_{-1}\{a, b\} + g * (A_{-2}\{a\} * A_{-3}\{b\} - A_{-3}\{a\} * A_{-2}\{b\}), \quad (206)$$

donde en la definición de  $F_{\mu\nu}^a$  se tiene en cuenta que  $g$  es la constante de acople del grupo y el símbolo de Levi-Civita,  $\varepsilon_{abc}$ , es  $+1$  para permutaciones pares de  $(1,2,3)$  y  $-1$  para las impares, en los casos restantes es cero.

Si se observan las ecuaciones (202) e (205) se puede apreciar que la notación en Maple para un índice de Gauge covariante es igual que la de un índice contravariante. Para comprender el porqué de estas definiciones hay que analizar primero la métrica de la simetría interna.

Cuando se considera el producto interno entre dos campos vectoriales  $A_\mu^a A_a^\mu$ , tal producto se puede expresar de otras dos formas,  $g_{ab} A_\mu^a A^{\mu b}$  o  $g^{ab} A_{\mu a} A_b^\mu$ , donde

$$g_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad , \quad g^{ab} = 2 \delta^{ab} \quad \text{y} \quad \delta_{ab} = \delta^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (207)$$

Lo anterior es muy conveniente pues indica que un vector contravariante de Gauge es igual a su versión covariante salvo por un factor de 2, esto a nivel del principio variacional es irrelevante ya que las ecuaciones están igualadas a cero. Así pues, el producto interno entre dos campos

vectoriales escrito en Maple se ve de la siguiente forma:

$$A_{\mu}^a A_a^{\mu} = A_{\mu}^1 A_1^{\mu} + A_{\mu}^2 A_2^{\mu} + A_{\mu}^3 A_3^{\mu}, \quad \text{entonces,} \quad (208)$$

$$A_{\mu}^a A_a^{\mu} \equiv A_{-1}\{\wedge u\} * A_{-1}\{u\} + A_{-2}\{\wedge u\} * A_{-2}\{u\} + A_{-3}\{\wedge u\} * A_{-3}\{u\}. \quad (209)$$

Ahora que se ha aclarado la notación usada en las líneas de código, se puede proceder a mostrar el desarrollo escrito en Maple.

```

> restart;
with (grtensor);
qload (flrwcart);
grdef( A_1{a} := [0,phi(t),0,0] );
grdef( A_2{a} := [0,0,phi(t),0] );
grdef( A_3{a} := [0,0,0,phi(t)] );
grdef( S_1{a b} := A_1{a;b} + A_1{b;a} );
grdef( S_2{a b} := A_2{a;b} + A_2{b;a} );
grdef( S_3{a b} := A_3{a;b} + A_3{b;a} );
grdef( Acuadrado := A_1^{a}*A_1{a} + A_2^{a}*A_2{a} + A_3^{a}*A_3{a} );
grdef( F_1{a b} := A_1{b ;a} - A_1{a ;b} + g*(A_2{a}*A_3{b} - A_3{a}*A_2{b}) );
grdef( F_2{a b} := A_2{b ;a} - A_2{a ;b} + g*(A_3{a}*A_1{b} - A_1{a}*A_3{b}) );
grdef( F_3{a b} := A_3{b ;a} - A_3{a ;b} + g*(A_1{a}*A_2{b} - A_2{a}*A_1{b}) );

```

## #L41

```

grdef( L411a :=
A_1^{a}*A_1{a}*(S_1{b ^b}*S_1^{c c} + S_2{b ^b}*S_2^{c c} + S_3{b ^b}*S_3^{c c})
+
A_2^{a}*A_2{a}*(S_1{b ^b}*S_1^{c c} + S_2{b ^b}*S_2^{c c} + S_3{b ^b}*S_3^{c c})
+
A_3^{a}*A_3{a}*(S_1{b ^b}*S_1^{c c} + S_2{b ^b}*S_2^{c c} + S_3{b ^b}*S_3^{c c})
);
grdef( L411 := 1/4*L411a );
grdef( L412a :=
A_1^{a}*A_1{a}*(S_1{c ^b}*S_1^{c b} + S_2{c ^b}*S_2^{c b} + S_3{c ^b}*S_3^{c b})
+
A_2^{a}*A_2{a}*(S_1{c ^b}*S_1^{c b} + S_2{c ^b}*S_2^{c b} + S_3{c ^b}*S_3^{c b})
+
A_3^{a}*A_3{a}*(S_1{c ^b}*S_1^{c b} + S_2{c ^b}*S_2^{c b} + S_3{c ^b}*S_3^{c b})
);
grdef( L412 := -1/4*L412a );
grdef( L413a :=
A_1^{a}*A_1{a}*(A_1^{b}*A_1{b} + A_2^{b}*A_2{b} + A_3^{b}*A_3{b}) +
A_2^{a}*A_2{a}*(A_1^{b}*A_1{b} + A_2^{b}*A_2{b} + A_3^{b}*A_3{b}) +
A_3^{a}*A_3{a}*(A_1^{b}*A_1{b} + A_2^{b}*A_2{b} + A_3^{b}*A_3{b})
);
grdef( R := Ricciscalar );
grdef( L413 := 1/4*L413a*R );
grdef( L414a :=
A_1^{a}*S_1^{b b}*(A_1{a}*S_1^{c c} + A_2{a}*S_2^{c c} + A_3{a}*S_3^{c c}) +
A_2^{a}*S_2^{b b}*(A_1{a}*S_1^{c c} + A_2{a}*S_2^{c c} + A_3{a}*S_3^{c c}) +
A_3^{a}*S_3^{b b}*(A_1{a}*S_1^{c c} + A_2{a}*S_2^{c c} + A_3{a}*S_3^{c c})
);
grdef( L414 := 1/2*L414a );
grdef( L415a :=

```

```

A_1{^a}*S_1{^b ^c}*(A_1{a}*S_1{b c} + A_2{a}*S_2{b c} + A_3{a}*S_3{b c}) +
A_2{^a}*S_2{^b ^c}*(A_1{a}*S_1{b c} + A_2{a}*S_2{b c} + A_3{a}*S_3{b c}) +
A_3{^a}*S_3{^b ^c}*(A_1{a}*S_1{b c} + A_2{a}*S_2{b c} + A_3{a}*S_3{b c})
`);
grdef(`L415` := -1/2*L415a`);
grdef(`L416a` :=
A_1{^a}*A_1{^b}*(A_1{a}*A_1{b} + A_2{a}*A_2{b} + A_3{a}*A_3{b}) +
A_2{^a}*A_2{^b}*(A_1{a}*A_1{b} + A_2{a}*A_2{b} + A_3{a}*A_3{b}) +
A_3{^a}*A_3{^b}*(A_1{a}*A_1{b} + A_2{a}*A_2{b} + A_3{a}*A_3{b})
`);
grdef(`L416` := R*L416a`);
grdef(`L41` := L411 + L412 + L413 + L414 + L415 + L416`);

```

## #Variación L41

### #Variación L41\_1

```

grdef(`VARL411a{a b}` :=
A_1{a}*A_1{b}*(A_1{^c;c}*A_1{^d;d} + A_2{^c;c}*A_2{^d;d} + A_3{^c;c}*A_3{^d;d}) +
A_2{a}*A_2{b}*(A_1{^c;c}*A_1{^d;d} + A_2{^c;c}*A_2{^d;d} + A_3{^c;c}*A_3{^d;d}) +
A_3{a}*A_3{b}*(A_1{^c;c}*A_1{^d;d} + A_2{^c;c}*A_2{^d;d} + A_3{^c;c}*A_3{^d;d})
`);
grdef(`DAporA2_1 := Acuadrado*A_1{^b;b}`);
grdef(`DAporA2_2 := Acuadrado*A_2{^b;b}`);
grdef(`DAporA2_3 := Acuadrado*A_3{^b;b}`);

grdef(`VARL411b{a b}` := -A_1{a}*DAporA2_1{;b} - A_2{a}*DAporA2_2{;b} - A_3{a}*DAporA2_3{;b}`);

grdef(`VARL411c{a b}` := -A_1{b}*DAporA2_1{;a} - A_2{b}*DAporA2_2{;a} - A_3{b}*DAporA2_3{;a}`);

grdef(`AporDAporA2{^d}` := Acuadrado*(A_1{^d}*A_1{^c;c} + A_2{^d}*A_2{^c;c} + A_3{^d}*A_3{^c;c})`);
grdef(`VARL411d{a b}` := g{a b}*AporDAporA2{^d;d}`);

grdef(`VARL411{a b}` := VARL411a{a b} + VARL411b{a b} + VARL411c{a b} +
VARL411d{a b}`);

```

**#Variación L41\_2**

```

grdef(`VARL412a{a b} := -1/4*(
A_1{a}*A_1{b}*(S_1{c d}*S_1{^c ^d} + S_2{c d}*S_2{^c ^d} + S_3{c d}*S_3{^c ^d} )
+
A_2{a}*A_2{b}*(S_1{c d}*S_1{^c ^d} + S_2{c d}*S_2{^c ^d} + S_3{c d}*S_3{^c ^d} )
+
A_3{a}*A_3{b}*(S_1{c d}*S_1{^c ^d} + S_2{c d}*S_2{^c ^d} + S_3{c d}*S_3{^c ^d} )
)
`);

```

```

grdef(`VARL412b{a b} := -1/2*Acuadrado*(
S_1{a c}*S_1{b ^c} + S_2{a c}*S_2{b ^c} + S_3{a c}*S_3{b ^c}
)
`);

```

```

grdef(`SporA{^c a b} := S_1{^c a}*A_1{b} + S_2{^c a}*A_2{b} + S_3{^c a}*A_3{b}`);
grdef(`SporAporA2{^c a b} := Acuadrado*SporA{^c a b}`);
grdef(`VARL412c{a b} := 1/2*SporAporA2{^c a b ;c}`);

```

```

grdef(`VARL412d{a b} := 1/2*SporAporA2{^c b a ;c}`);

```

```

grdef(`A2porSporA{^c a b} := Acuadrado*(S_1{a b}*A_1{^c} + S_2{a b}*A_2{^c}
+ S_3{a b}*A_3{^c})`);
grdef(`VARL412e{a b} := -1/2*A2porSporA{^c a b ;c}`);

```

```

grdef(`VARL412{a b} := VARL412a{a b} + VARL412b{a b} + VARL412c{a b} +
VARL412d{a b} + VARL412e{a b}`);

```

**#Variación L41\_3**

```

grdef(`VARL413a{a b} := 1/2*Acuadrado*Ricciscalar*(A_1{a}*A_1{b} + A_2{a}*
A_2{b} + A_3{a}*A_3{b})`);

```

```

grdef(`VARL413b{a b} := 1/4*Acuadrado*Acuadrado*R{^c a c b}`);

```

```

grdef(`dosA2 := Acuadrado*Acuadrado`);

```

```

grdef(`contrav2A2{^c} := dosA2{ ;^c}`);

```

```

grdef(`VARL413c{a b} := 1/4*g{a b}*contrav2A2{^c ;c}`);

```

```
grdef(`cov2A2{a} := dosA2{ ;a}`);
grdef(`VARL413d{a b} := -1/4*cov2A2{a ;b}`);
```

```
grdef(`VARL413{a b} := VARL413a{a b} + VARL413b{a b} + VARL413c{a b} +
VARL413d{a b}`);
```

### #Variación L41\_4

```
grdef(`VARL414a{a b} := 1/2*(
A_1{a}*S_1{^c c}*(A_1{b}*S_1{^d d} + A_2{b}*S_2{^d d} + A_3{b}*S_3{^d d}) +
A_2{a}*S_2{^c c}*(A_1{b}*S_1{^d d} + A_2{b}*S_2{^d d} + A_3{b}*S_3{^d d}) +
A_3{a}*S_3{^c c}*(A_1{b}*S_1{^d d} + A_2{b}*S_2{^d d} + A_3{b}*S_3{^d d})
`);

grdef(`SporAporA_1 := A_1{c}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3
{^c}*S_3{^d d})`);
grdef(`SporAporA_2 := A_2{c}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3
{^c}*S_3{^d d})`);
grdef(`SporAporA_3 := A_3{c}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3
{^c}*S_3{^d d})`);
grdef(`VARL414b{a b} := -1*(
A_1{b}*SporAporA_1{ ;a} + A_2{b}*SporAporA_2{ ;a} + A_3{b}*SporAporA_3{ ;a}
`);

grdef(`VARL414c{a b} := -1*(
A_1{a}*SporAporA_1{ ;b} + A_2{a}*SporAporA_2{ ;b} + A_3{a}*SporAporA_3{ ;b}
`);

grdef(`AAporS{^e} :=
A_1{c}*A_1{^e}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3{^c}*S_3{^d d}) +
A_2{c}*A_2{^e}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3{^c}*S_3{^d d}) +
A_3{c}*A_3{^e}*(A_1{^c}*S_1{^d d} + A_2{^c}*S_2{^d d} + A_3{^c}*S_3{^d d})
`);
grdef(`VARL414d{a b} := g{a b}*AAporS{^e ;e}`);

grdef(`VARL414{a b} := VARL414a{a b} + VARL414b{a b} + VARL414c{a b} +
VARL414d{a b}`);
```

### #Variación L41\_5

```

grdef( VARL415a{a b} := -1/2*(
A_1{a}*S_1{c d}*(A_1{b}*S_1{c ^d} + A_2{b}*S_2{c ^d} + A_3{b}*S_3{c ^d}) +
A_2{a}*S_2{c d}*(A_1{b}*S_1{c ^d} + A_2{b}*S_2{c ^d} + A_3{b}*S_3{c ^d}) +
A_3{a}*S_3{c d}*(A_1{b}*S_1{c ^d} + A_2{b}*S_2{c ^d} + A_3{b}*S_3{c ^d})
)
`);

```

```

grdef( VARL415b{a b} := -1*(
A_1{c}*S_1{a ^d}*(A_1{d}*S_1{d b} + A_2{c}*S_2{d b} + A_3{c}*S_3{d b}) +
A_2{c}*S_2{a ^d}*(A_1{d}*S_1{d b} + A_2{d}*S_2{d b} + A_3{c}*S_3{d b}) +
A_3{c}*S_3{a ^d}*(A_1{d}*S_1{d b} + A_2{d}*S_2{d b} + A_3{c}*S_3{d b})
)
`);

```

```

grdef( tresAporS{a b ^c} :=
A_1{d}*A_1{b}*(A_1{d}*S_1{c a} + A_2{d}*S_2{c a} + A_3{d}*S_3{c a}) +
A_2{d}*A_2{b}*(A_1{d}*S_1{c a} + A_2{d}*S_2{c a} + A_3{d}*S_3{c a}) +
A_3{d}*A_3{b}*(A_1{d}*S_1{c a} + A_2{d}*S_2{c a} + A_3{d}*S_3{c a})
`);

```

```

grdef( VARL415c{a b} := tresAporS{a b ^c;c`);

```

```

grdef( VARL415d{a b} := tresAporS{b a ^c;c`);

```

```

grdef( Spor3A{a b ^c} :=
A_1{d}*A_1{c}*(A_1{d}*S_1{a b} + A_2{d}*S_2{a b} + A_3{d}*S_3{a b}) +
A_2{d}*A_2{c}*(A_1{d}*S_1{a b} + A_2{d}*S_2{a b} + A_3{d}*S_3{a b}) +
A_3{d}*A_3{c}*(A_1{d}*S_1{a b} + A_2{d}*S_2{a b} + A_3{d}*S_3{a b})
`);
grdef( VARL415e{a b} := -1*Spor3A{a b ^c;c`);

```

```

grdef( VARL415{a b} := VARL415a{a b} + VARL415b{a b} + VARL415c{a b} +
VARL415d{a b} + VARL415e{a b}`);

```

## #Variación L41\_6

```

grdef( VARL416a{a b} := 2*Ricciscalar*(
A_1{a}*A_1{c}*(A_1{b}*A_1{c} + A_2{b}*A_2{c} + A_3{b}*A_3{c}) +
A_2{a}*A_2{c}*(A_1{b}*A_1{c} + A_2{b}*A_2{c} + A_3{b}*A_3{c}) +
A_3{a}*A_3{c}*(A_1{b}*A_1{c} + A_2{b}*A_2{c} + A_3{b}*A_3{c})
)
`);

```

```

grdef( V{a b} := 2*Ricciscalar*(A_1{a}*A_1{c} + A_2{a}*A_2{c} + A_3{a}*A_3{c})*
(A_1{b}*A_1{c} + A_2{b}*A_2{c} + A_3{b}*A_3{c})`);
grdef( Prueba{a b} := VARL416a{a b} - V{a b}`);

```

```

grdef(`VARL416b{a b} := R^{c a c b}*(A_1{e}*A_1{d} + A_2{e}*A_2{d} + A_3{e}*
A_3{d})*(A_1{e}*A_1{d} + A_2{e}*A_2{d} + A_3{e}*A_3{d})`);

grdef(`AAAA := (A_1{c}*A_1{d} + A_2{c}*A_2{d} + A_3{c}*A_3{d})*(A_1{c}*
A_1{d} + A_2{c}*A_2{d} + A_3{c}*A_3{d})`);
grdef(`contravAAAA{^c} := AAAA{^c}`);
grdef(`VARL416c{a b} := contravAAAA{^c}*g{a b}`);

grdef(`covAAAA{a} := AAAA{a}`);
grdef(`VARL416d{a b} := -1*covAAAA{a ;b}`);

grdef(`VARL416{a b} := VARL416a{a b} + VARL416b{a b} + VARL416c{a b} +
VARL416d{a b}`);

grdef(`VARL41{a b} := VARL411{a b} + VARL412{a b} + VARL413{a
b} + VARL414{a b} + VARL415{a b} + VARL416{a b}`);

```

## #Ecuaciones de campo

```

grdef(`neg1_2Mp2Gmunu{a b} := 1/8*g{a b}*(F_1{c d}*F_1{^c ^d} + F_2{c d}*F_2{^c
^d} + F_3{c d}*F_3{^c ^d}) -
1/2*(F_1{a c}*F_1{b ^c} + F_2{a c}*F_2{b ^c} + F_3{a c}*F_3{b ^c}) +
alpha*(VARL41{a b} - 1/2*g{a b}*L41)
`);

```

```

grcalc(neg1_2Mp2Gmunu(dn, dn));
gralter(neg1_2Mp2Gmunu(dn, dn), autoAlias);
gralter(_, expand);
grdisplay(_);

```

```

grcalcd(G(dn, dn));

```

$$\begin{aligned}
 \text{neg1\_2Mp2Gmunu}_{tt} &= -\frac{3g^2\phi^4}{4r^4} - \frac{249\phi^4 r_t^2 \alpha}{4r^6} + \frac{78\phi^3 \phi_t r_t \alpha}{r^5} - \frac{15\phi^2 \phi_t^2 \alpha}{4r^4} - \frac{3\phi_t^2}{4r^2} \\
 \text{neg1\_2Mp2Gmunu}_{xx} &= -\frac{g^2\phi^4}{4r^2} + \frac{83r_{t,t}\phi^4\alpha}{2r^3} - \frac{26\phi_{t,t}\phi^3\alpha}{r^2} - \frac{249\phi^4 r_t^2 \alpha}{4r^4} + \frac{166\phi^3 \phi_t r_t \alpha}{r^3} - \frac{307\phi^2 \phi_t^2 \alpha}{4r^2} - \frac{\phi_t^2}{4} \\
 \text{neg1\_2Mp2Gmunu}_{yy} &= -\frac{g^2\phi^4}{4r^2} + \frac{83r_{t,t}\phi^4\alpha}{2r^3} - \frac{26\phi_{t,t}\phi^3\alpha}{r^2} - \frac{249\phi^4 r_t^2 \alpha}{4r^4} + \frac{166\phi^3 \phi_t r_t \alpha}{r^3} - \frac{307\phi^2 \phi_t^2 \alpha}{4r^2} - \frac{\phi_t^2}{4} \\
 \text{neg1\_2Mp2Gmunu}_{zz} &= -\frac{g^2\phi^4}{4r^2} + \frac{83r_{t,t}\phi^4\alpha}{2r^3} - \frac{26\phi_{t,t}\phi^3\alpha}{r^2} - \frac{249\phi^4 r_t^2 \alpha}{4r^4} + \frac{166\phi^3 \phi_t r_t \alpha}{r^3} - \frac{307\phi^2 \phi_t^2 \alpha}{4r^2} - \frac{\phi_t^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$G_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{3r_t^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2rr_{t,t} - r_t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2rr_{t,t} - r_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2rr_{t,t} - r_t^2 \end{bmatrix}$$

Figura 5.1. Líneas de código escritas en Maple de las ecuaciones de campo aplicando la configuración de tríada cósmica. En azul se encuentra el resultado arrojado por el programa, el cual está relacionado directamente con la expresión (191).

Comparando lo obtenido en Maple con la ecuación (191), se puede evidenciar que las componentes del tensor momentum-energía están calculadas con el nombre de “neg1\_2Mp2Gmunu” y el tensor de Einstein está dado por la matriz al final de la imagen. Ahora es posible deducir que las ecuaciones de campo se reducen en la configuración de tríada cósmica a las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{3\dot{\phi}^2}{2a^2} + \frac{3\tilde{g}^2\phi^4}{2a^4} + \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ \frac{15\dot{\phi}^2\phi^2}{2a^4} + \frac{249\phi^4H^2}{2a^4} - 156\frac{\dot{\phi}\phi^3H}{a^4} \right] = 3M_p^2H^2, \quad (210)$$

$$\frac{1\dot{\phi}^2}{2a^2} + \frac{1\tilde{g}^2\phi^4}{2a^4} + \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ \frac{83\phi^4H^2}{2a^4} - 83\frac{\phi^4\dot{H}}{a^4} + 52\frac{\ddot{\phi}\phi^3}{a^4} + \frac{307\dot{\phi}^2\phi^2}{2a^4} - 332\frac{\dot{\phi}\phi^3H}{a^4} \right] = -M_p^2(3H^2 + 2\dot{H}), \quad (211)$$

donde se tuvo en cuenta que  $\ddot{a}/a = H^2 + \dot{H}$  y se normalizó el parámetro  $\alpha \rightarrow \alpha/M_p^2$  para que fuese adimensional. El procedimiento para la ecuación de movimiento es completamente análogo.

```

> restart;
with (grtensor);
pload (flwcart);
grdef('A_1{a} := [0,phi(t),0,0]');
grdef('A_2{a} := [0,0,phi(t),0]');
grdef('A_3{a} := [0,0,0,phi(t)]');
grdef('S_1{a b} := A_1{a;b} + A_1{b;a}')';
grdef('S_2{a b} := A_2{a;b} + A_2{b;a}')';
grdef('S_3{a b} := A_3{a;b} + A_3{b;a}')';
grdef('Acuadrado := A_1^{a}*A_1{a} + A_2^{a}*A_2{a} + A_3^{a}*A_3{a}')';
grdef('F_1{a b} := A_1{b ;a} - A_1{a ;b} + g*(A_2{a}*A_3{b} - A_3{a}*A_2{b}')');
grdef('F_2{a b} := A_2{b ;a} - A_2{a ;b} + g*(A_3{a}*A_1{b} - A_1{a}*A_3{b}')');
grdef('F_3{a b} := A_3{b ;a} - A_3{a ;b} + g*(A_1{a}*A_2{b} - A_2{a}*A_1{b}')');
grdef('rg := sqrt(-detg)');
grdef('partrg{a} := rg{ ,a}')';

```

### #Variación L41 respecto a A

```

grdef('VarAL41a_1{^a} := 1/2*A_1^{a}*(S_1^{b} b}*S_1^{c} c} + S_2^{^b} b}*S_2^{^c} c}
+ S_3^{^b} b}*S_3^{^c} c}
-1/2*A_1^{a}*(S_1^{^b} ^c}*S_1{b c} + S_2^{^b} ^c}*S_2{b c} + S_3^{^b} ^c}*S_3{b c}
+ A_1^{a}*Acuadrado*Ricciscalar `');
grdef('VarAL41b_1{^a} := S_1^{^c} c}*(A_1^{a}*S_1^{^b} b} + A_2^{a}*S_2^{^b} b} +
A_3^{a}*S_3^{^b} b}
- S_1^{^b} ^c}*(A_1^{a}*S_1{b c} + A_2^{a}*S_2{b c} + A_3^{a}*S_3{b c}
+ 4*Ricciscalar*A_1^{^b} b}*(A_1{b}*A_1^{a} + A_2{b}*A_2^{a} + A_3{b}*A_3^{a}
)');
grdef('VarAL41c_1{^a} := 2/rg*partrg{d}*g{^d} ^a}*(Acuadrado*A_1^{^c} c} + 2*A_1
^{^b} b}*(A_1{b}*A_1^{^c} c} + A_2{b}*A_2^{^c} c} + A_3{b}*A_3^{^c} c}));
grdef('VarAL41d_1{^a} := Chr{b c} ^a}*(Acuadrado*S_1^{^b} ^c} + 2*A_1^{^d} d}*(A_1{d}
*S_1^{^b} ^c} + A_2{d}*S_2^{^b} ^c} + A_3{d}*S_3^{^b} ^c}));

```

*# importante tener en cuenta que el christoffel se escribe Chr{b c} ^a} (contravariante al final), si lo colocas Chr{^a b c} da cero.*

### #Variación L41 respecto a DA

```
grdef(`VarDAL41a_1^{a ^b}` := rg*( Acuadrado*( g^{a ^b}*S_1^{c c} - S_1^{a ^b}) +
2*g^{a ^b}*A_1^{c}*( A_1^{c}*S_1^{d d} + A_2^{c}*S_2^{d d} + A_3^{c}*S_3^{d d} ) -
2*A_1^{c}*( A_1^{c}*S_1^{a ^b} + A_2^{c}*S_2^{a ^b} + A_3^{c}*S_3^{a ^b} )
`);
```

```
grdef(`VarDAL41_1^{a}` := -1/rg*VarDAL41a_1^{a ^b ,b}`);
```

### #Variación LYM respecto a A

```
grdef(`VarAYM_1^{a}` := g*( A_2^{b}*F_3^{b ^a} - A_3^{b}*F_2^{b ^a} `);
```

### #Variación LYM respecto a DA

```
grdef(`VarDAYMa_1^{b ^a}` := rg*F_1^{b ^a}`);
```

```
grdef(`VarDAYM_1^{a}` := 1/rg*VarDAYMa_1^{b ^a ,b}`);
```

### #Ecuación de movimiento

```
grdef(`VarAtotal_1^{a}` := alpha*(VarAL41a_1^{a} + VarAL41b_1^{a} + VarAL41c_1
^{a} + VarAL41d_1^{a} + VarDAL41_1^{a}) + VarAYM_1^{a} + VarDAYM_1
^{a}`);
```

```
grcalc(VarAtotal_1(dn));
gralter(VarAtotal_1(dn), autoAlias);
gralter(_, expand);
```

```
grdisplay(_)
```

"GRTensor III v2.1.11 Apr 26, 2018"

"Copyright 2018, Peter Musgrave, Denis Pollney, Kayll Lake"

$$Var.Atotal_{1_x} = -\frac{2g^2\phi^3}{r^2} - \frac{5\dot{\phi}_{t,t}\phi^2\alpha}{r^2} - \frac{5\dot{\phi}_i^2\phi\alpha}{r^2} + \frac{5\dot{\phi}_i r_i \phi^2\alpha}{r^3} + \frac{52r_{t,t}\phi^3\alpha}{r^3} + \frac{62r_i^2\phi^3\alpha}{r^4} - \dot{\phi}_{t,t} - \frac{\dot{\phi}_i r_i}{r}$$

Figura 5.2. Líneas de código escritas en Maple de las ecuaciones de movimiento aplicando la configuración de tríada cósmica. En azul se encuentra el resultado arrojado por el programa, el cual está relacionado directamente con la expresión (199).

La ecuación “ $VarAtotal_{1_x}$ ” representa la componente  $x$  de las ecuaciones de movimiento.

Para las dos componentes espaciales restantes se tiene exactamente la misma ecuación debido a la isotropía impuesta por la configuración de tríada cósmica. Sabiendo que la ecuación de Euler-Lagrange está igualada a cero, en este caso la expresión final es

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}H + 2\frac{\tilde{g}^2\phi^3}{a^2} + \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ -114\frac{\phi^3 H^2}{a^2} - 5\frac{\phi^2 \dot{\phi}H}{a^2} - 52\frac{\phi^3 \dot{H}}{a^2} + 5\frac{\phi\dot{\phi}^2}{a^2} + 5\frac{\phi^2 \ddot{\phi}}{a^2} \right] = 0. \quad (212)$$

### Adimensionalización de las ecuaciones

Para realizar un análisis numérico de las ecuaciones (210), (211) y (212), es necesario adimensionalizarlas y plantear el sistema dinámico de las nuevas variables adimensionales. Para ello primero se redefine la magnitud de los campos vectoriales, tal y como se muestra en la definición de tríada cósmica,  $A_\mu^c = a\psi\delta_\mu^c$ , esto implica que

$$\phi = a\psi, \quad \dot{\phi} = \dot{a}\psi + a\dot{\psi}, \quad \ddot{\phi} = \ddot{a}\psi + 2\dot{a}\dot{\psi} + a\ddot{\psi}, \quad (213)$$

dando como resultado

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}H^2\psi^2 + H\psi\dot{\psi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}^2\psi^4 \\ & + \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ -8H^2\psi^4 - 47H\psi^3\dot{\psi} + \frac{5}{2}\psi^2\dot{\psi}^2 \right] = M_p^2 H^2, \end{aligned} \quad (214)$$

para la componente temporal de las ecuaciones de campo, donde  $M_p^2 H^2$  es un término asociado con la densidad de energía total;

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ -85H^2\psi^4 - 31\dot{H}\psi^4 + 79H\psi^3\dot{\psi} + 52\psi^3\ddot{\psi} + \frac{307}{2}\psi^2\dot{\psi}^2 \right] \\ & + \frac{1}{2}H^2\psi^2 + H\psi\dot{\psi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}^2\psi^4 = -M_p^2(3H^2 + 2\dot{H}), \end{aligned} \quad (215)$$

para las tres componentes espaciales de las ecuaciones de campo, donde  $-M_p^2(3H^2 + 2\dot{H})$  está asociado con la presión de energía total en las tres componentes espaciales, y por último

$$\begin{aligned} & 2H^2\psi + \dot{H}\psi + 3H\dot{\psi} + \ddot{\psi} + 2\tilde{g}^2\psi^3 \\ & + \frac{\alpha}{M_p^2} \left[ -109H^2\psi^3 + 15H\dot{\psi}\psi^2 - 47\dot{H}\psi^3 + 5\dot{\psi}^2\psi + 5\ddot{\psi}\psi^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (216)$$

para las ecuaciones de movimiento, las cuales también se pueden obtener mediante la divergencia del tensor momentum-energía,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

El último cambio de variables se realiza para adimensionalizar las ecuaciones y obtener un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden, es por eso que se definen las siguientes variables:

$$x \equiv \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H}, \quad y \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2}M_p}, \quad z \equiv \psi \sqrt{\frac{\tilde{g}}{2M_p H}}, \quad (217)$$

$$P \equiv \frac{\ddot{\psi}}{M_p H^2}, \quad \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (218)$$

dando como resultado final

$$y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4 + \alpha [-32y^4 - 188xy^3 + 10x^2y^2] = 1, \quad (219)$$

para la componente temporal de las ecuaciones de campo, la cual ahora funciona como una ligadura para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ ,

$$y^2 + 2xy + x^2 + 2z^4 + \alpha [-340y^4 + 124y^4\varepsilon + 316xy^3 + 614x^2y^2 + 104\sqrt{2}y^3P] = 2\varepsilon - 3, \quad (220)$$

para las tres componentes espaciales de las ecuaciones de campo y

$$\frac{P}{\sqrt{2}} + 2y + 3x - \varepsilon y + 4\frac{z^4}{y} + \alpha [-218y^3 + 30xy^2 + 94y^3\varepsilon + 10x^2y + 5\sqrt{2}y^2P] = 0, \quad (221)$$

para las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, las ecuaciones de evolución para las variables que rigen el sistema son:

$$\dot{x} = \frac{\ddot{\psi}}{\sqrt{2}M_p H} - \frac{\dot{\psi}\dot{H}}{\sqrt{2}M_p H^2} \Rightarrow \frac{dx}{dN} = \frac{P}{\sqrt{2}} + \epsilon x, \quad (222)$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}M_p} \Rightarrow \frac{dy}{dN} = x, \quad (223)$$

donde se tuvo en cuenta que el número de e-folds es una cantidad que está relacionada con el tiempo mediante el parámetro de Hubble,  $\int dN = \int H dt$ .