EL SEMIGRUPO DE ELLIS DE UN SISTEMA DINÁMICO SOBRE UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO NUMERABLE

JHON FREDDY PEREZ REMOLINA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

EL SEMIGRUPO DE ELLIS DE UN SISTEMA DINÁMICO SOBRE UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO NUMERABLE

JHON FREDDY PEREZ REMOLINA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A mi mamá, Solangel Perez, por su amor y apoyo incondicional. Quien ha puesto todo su esfuerzo para verme feliz y triunfando. Este logro es por y para ella, mi fuente de inspiración y mi motor de vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi mamá, Solangel Perez, por todo su esfuerzo y sacrificio durante todos estos años. Gracias por todo el amor y el aliento que siempre me motivan a alcanzar mis metas. Sin ella este logro no sería posible.

A mi familia, por siempre creer en mi y por todo el apoyo brindado durante este trayecto.

A mi gran amigo, Víctor, por su apoyo durante este proceso. Gracias por todo, en especial por las risas compartidas. Su amistad ha sido una parte invaluable de mi vida.

A mi pareja, Ximena, por acompañarme este camino y por el apoyo constante e inspiración, los cuales han sido un faro en esta travesía. Gracias por ser parte de mi fuente de inspiración y por caminar a mi lado en este viaje.

Al profesor Carlos Uzcátegui, quien ha sido un referente fundamental en mi trayectoria académica. Su extraordinaria forma de enseñar y su orientación han sido vitales para la realización de este trabajo.

A residencias universitarias UIS y a la familia de residentes. Gracias por ser mi segunda casa y mi segunda familia.

A todos los profesores que hicieron parte de mi formación académica. Gracias por despertar en mi esta pasión por las matemáticas.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN **9**

1. PRELIMINARES **12**

1.1. RESULTADOS ACERCA DE ALGUNAS TOPOLOGÍAS 12

1.2. EL RANGO DE CANTOR-BENDIXSON 15

1.3. ULTRAFILTROS, EL ESPACIO $\beta(\mathbb{N})$ Y P-LÍMITES 22

2. EL SEMIGRUPO DE ELLIS **32**

2.1. ALGUNAS PROPIEDADES DE $E(X, f)$ 32

2.2. SISTEMAS DINÁMICOS CON INFINITOS PERIODOS 37

3. SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITAS DENSAS **43**

3.1. PROPIEDADES GENERALES 43

3.1.1. SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITAS DENSAS SOBRE $\omega^\alpha + 1$ CON $\alpha > 2$ 50

3.2. EJEMPLOS DE SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITA DENSA 52

3.2.1. SISTEMAS DINÁMICOS ASOCIADOS A ENUMERACIONES DE $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . 54

BIBLIOGRAFÍA **60**

LISTA DE FIGURAS

pág.

1.1. Función discontinua f tal que $f^p \circ f^q \neq f^{q+p}$. 29

2.1. $E(X, f) \cong X$ con todas las funciones continuas. 34
2.2. $E(X, f)$ con funciones discontinuas. 36
2.3. Punto eventualmente periódico con $p \in (4\mathbb{N} + 2)^*$. 37
2.4. $E^*(X, f) \cong 2^{\mathbb{N}}$ 41
2.5. El conjunto de las n-iteradas es discreto en $E(X, f)$ 42

3.1. Definición de V_n abiertos-cerrados. 46
3.2. Función h con $\mathcal{O}_h(-1) = \bigcup_{m>0} D_m$. 53
3.3. $(\omega^2 + 1, f)$ con órbita densa y $E(\omega^2 + 1, f) \cong \omega^2 + 1$. 54
3.4. $\omega^2 + 1$ visto por niveles como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. 55
3.5. Sistema dinámico con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$ visto por niveles. 56
3.6. Enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 57
3.7. Órbita densa sobre $\omega^2 + 1$ a partir de una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 57
3.8. Enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sin sistema dinámico asociado. 58
3.9. Órbita densa que no define un sistema dinámico 59

RESUMEN

TÍTULO: EL SEMIGRUPO DE ELLIS DE UN SISTEMA DINÁMICO SOBRE UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO NUMERABLE [*]

AUTOR: JHON FREDDY PEREZ REMOLINA [**]

PALABRAS CLAVE: SISTEMAS DINÁMICOS, DINÁMICA TOPOLÓGICA, SEMIGRUPO DE ELLIS, SEMIGRUPO ENVOLVENTE, ÓRBITAS DENSAS, ENUMERACIONES DE $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico es un par (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. La órbita de un punto $x \in X$, denotada por $\mathcal{O}_f(x)$ es el conjunto $\{f^n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$, donde f^n es f compuesto con si misma n-veces. Un punto x es periódico si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$ y su periodo es $k = \min\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) = x\}$. El semigrupo de Ellis asociado a un sistema dinámico (X, f), el cual es denotado como $E(X, f)$, se define como la clausura topológica del conjunto $\{f^n\colon n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X.

En esta tesis estudiamos el semigrupo $E(X, f)$ basados en el artículo de García, Rodríguez y Uzcátegui [1]. Estudiamos sistemas dinámicos los cuales tienen periodos arbitrariamente grandes. Mejoramos algunos resultados sobre este tipo de sistemas dinámicos y corregimos un error presentado en el artículo [1]. Además, presentamos algunas propiedades de sistemas dinámicos numerables en los cuales existe un punto con órbita densa y proporcionamos ejemplos de este tipo de sistemas. Específicamente, estudiamos los sistemas dinámicos de la forma $(\omega^\alpha + 1, f)$ con $1 \leq \alpha < \omega_1$. Finalizamos estableciendo una conexión entre los sistemas dinámicos sobre $\omega^2 + 1$ con órbita densa y las enumeraciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (es decir, biyecciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$).

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

[1] GARCÍA, Salvador, RODRÍGUEZ, Yacquelin y UZCÁTEGUI, Carlos. "Cardinality of the Ellis semigroup on compact metric countable spaces". En: *Semigroup Forum* 97 (2018), 162–176.

ABSTRACT

TITLE: THE ELLIS SEMIGROUP OF A DYNAMICAL SYSTEM ON A COMPACT METRIC COUNTABLE SPACE [*]

AUTHOR: JHON FREDDY PEREZ REMOLINA [**]

KEYWORDS: DYNAMICAL SYSTEMS, TOPOLOGICAL DYNAMICS, ELLIS SEMIGROUP, ENVELOPING SEMIGROUP, DENSE ORBITS, ENUMERATIONS OF $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

DESCRIPTION:

A dynamical system is a pair (X, f) where X is a compact metric space and $f \colon X \to X$ is a continuous function. The orbit of a point $x \in X$, denoted by $\mathcal{O}_f(x)$, is the set $\{f^n(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$, where f^n is f composed with itself n-times. A point x is periodic point if there exists $n \geq 1$ such that $f^n(x) = x$ and its period is $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x) = x\}$. The Ellis semigroup associated to a dynamical system (X, f), which is denoted by as $E(X, f)$, is defined as the topological closure of the set $\{f^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ in the product space X^X.

In this thesis we study the semigroup $E(X, f)$ based on the article by García, Rodríguez and Uzcátegui[1]. We study dynamical systems which have points with arbitrarily large period. We improve some results about this type of dynamical systems and correct an error presented in that article [1]. In addition, we present some properties of dynamical systems in which there exists a point with dense orbit and provide examples of that type of systems. Specifically, we study the dynamical systems of the form $(\omega^\alpha + 1, f)$ with $1 \leq \alpha < \omega_1$. We conclude by establishing a connection between dynamical systems on $\omega^2 + 1$ with dense orbit and enumerations of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (that is, bijections from $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$).

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico es una pareja (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. En el año 1960, Robert Ellis, en su artículo titulado *A Semigroup associated with a transformation group*, ver [1]). Inició el estudio de las propiedades algebraicas de los sistemas dinámicos introduciendo un semigrupo llamado actualmente el *semigrupo de Ellis* (o *Enveloping Semigroup*). Este semigrupo, denotado $E(X, f)$, se define como la clausura topológica del conjunto $\{f^n\colon n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X. Desde entonces este semigrupo ha sido estudiado con mucha atención debido a su importancia en dinámica topológica (ver, por ejemplo, el capítulo *Ellis Semigroups and Ellis Actions* de Akin en [2]).

Recientemente se han llevado a cabo algunos estudios acerca de los sistemas dinámicos (X, f) cuando X es numerable [3][4][5]. En este trabajo nos enfocamos particularmente en sistemas dinámicos que tengan una órbita densa. La existencia de órbitas densas es equivalente a la transitividad topológica (ver, por ejemplo, [6]). Esta última propiedad es una de las condiciones que caracterizan a los sistemas caóticos en el sentido de Devaney (ver la sección 9.4 de [7]). Por otra parte, en el trabajo [8], Bobok estudia el concepto de caos

---

[1] ELLIS, Robert. “A Semigroup associated with a transformation group”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 94.2 (1960), págs. 272-281.

[2] AKIN, Ethan. “Ellis Semigroups and Ellis Actions”. En: *Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions*. Boston, MA: Springer US, 1997, págs. 133-153.

[3] QUINTERO, Andrés y UZCÁTEGUI, Carlos. “On the Ellis semigroup of a cascade on a compact metric countable space”. En: *Semigroup Forum* 101 (2020), 435–451.

[4] GARCÍA, Salvador, RODRÍGUEZ, Yacquelin y UZCÁTEGUI, Carlos. “Iterates of dynamical systems on compact metrizable countable spaces”. En: *Topology and its Applications* 180 (2015), págs. 100-110.

[5] GARCÍA, Salvador, RODRÍGUEZ, Yacquelin y UZCÁTEGUI, Carlos. “On the continuity of the elements of the Ellis semigroup and other properties”. En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* (2019).

[6] DEĢIRMENCI, Nedim y KOÇAK, Şhanin. “Existence of a dense orbit and topological transitivity: When are they equivalent?” En: *Acta Mathematica Hungarica* 99 (2003), págs. 185-187.

[7] KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. *Sistemas dinámicos discretos*. Editorial UNAM, 2014.

[8] BOBOK, Jozef. “Chaos in countable dynamical system”. En: *Topology and its Applications* 126.1 (2002), págs. 207-216.

distributivo en espacios compactos numerables.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es estudiar el artículo [1], donde los autores presentan algunos resultados relacionados a la cardinalidad de $E(X, f)$. En este artículo usan como herramienta fundamental los p-límites respecto a un ultrafiltro p sobre $\mathbb{N}$. Presentamos una demostración de la siguiente caracterización del semigrupo de Ellis usando ultrafiltros: Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces

$$E(X, f) = \{f^p \colon p \in \beta(\mathbb{N})\},$$

donde f^p es la p-iterada que se define por $f^p(x)$ igual al p-límite de la sucesión $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $x \in X$ y $\beta(\mathbb{N})$ es el conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$.

En general, el semigrupo $E(X, f)$ puede contener funciones que no son continuas (ver [4] y el ejemplo 2.1.8). Sin embargo, uno de los resultados de [1] que estudiamos muestra que si el sistema dinámico $(\omega^2 + 1, f)$ tiene una órbita densa, entonces las funciones del semigrupo son continuas y, además, $E(\omega^2 + 1, f)$ es homeomorfo a $\omega^2 + 1$.

Durante el estudio de algunos ejemplos de sistemas dinámicos con órbitas densas sobre el espacio $\omega^2 + 1$, observamos que estos sistemas se construyen en base a una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Esta conexión condujo a producir nuevos ejemplos de sistemas dinámicos con órbitas densas y motivó a plantearnos la siguiente pregunta: ¿Los ejemplos de sistemas dinámicos construidos son equivalentes? (ver la sección 3.2.1). Por otro lado, también notamos que hay enumeraciones de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a las cuales no se les puede asociar un sistema dinámico (ver el ejemplo 3.2.7). Por tal motivo, desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos (para más información de esta teoría puede consultar [9]), planteamos la siguiente interrogante: ¿Cuál es la complejidad descriptiva de la familia de enumeraciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ las cuales se les puede asociar un sistema dinámico?

Este trabajo se encuentra divido en 3 capítulos. En el primer capítulo, se establecen los elementos necesarios para el desarrollo y comprensión del trabajo. En este se abordan los conceptos básicos de topología y se introducen los conceptos del rango de Cantor-Bendixson y los p-límites. En el segundo capítulo, se definen los sistemas dinámicos y el semigrupo de Ellis asociado a este, presentando algunos resultados y

[9] DI PRISCO, Carlos y UZCÁTEGUI, Carlos. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2020.

ejemplos básicos. El tercer capítulo, se centra en el estudio de los sistemas dinámicos con órbita densa, mostrando algunas propiedades de estos sistemas encontradas en el artículo [1]. Para finalizar este capítulo se establece una conexión entre los sistemas dinámicos con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$ y las enumeraciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1. PRELIMINARES

El estudio de los sistemas dinámicos usando ultrafiltros requiere de múltiples conocimientos previos. En este capítulo presentamos algunos de esos conceptos que se consideran necesarios para el desarrollo y compresión de este trabajo. En la primera sección, mencionamos algunos resultados sobre topología omitiendo varias de sus demostraciones. En la segunda sección, introducimos la noción del rango de Cantor-Bendixson mostrando algunas propiedades básicas relacionadas a este. En la tercera sección, presentamos los conceptos básicos de ultrafiltros y p-límites, herramientas vitales para nuestro estudio sobre el semigrupo de Ellis.

1.1. RESULTADOS ACERCA DE ALGUNAS TOPOLOGÍAS

Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X, denotaremos por $Cl_X(A)$ a la clausura de A. Cuando no haya lugar a confusión denotaremos la clausura de A simplemente como $\overline{A}$.

Diremos que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersecciones finitas (*p.i.f.*) si para cada $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ finito se tiene que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. El siguiente teorema caracteriza los espacios compactos por medio de una familia de conjuntos cerrados con la *p.i.f.* Una prueba de este resultado se puede ver en el Teorema 1 del capítulo 5 de [10].

Lema 1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si, y solo si, para cada familia de cerrados $\{F_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ con la p.i.f, se tiene que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.*

A continuación presentaremos una definición que generaliza el concepto de sucesión para cualquier espacio topológico. Recordemos que un *conjunto dirigido* es un par $(I, \leq)$ donde $\leq$ es un preorden (reflexivo y transitivo) con la condición de que, si $x, y \in I$ entonces existe $z \in I$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio topológico. Una red en X es una función $x\colon I \to X$, siendo I un conjunto dirigido. Diremos que la red $(x_i)_{i\in I}$ converge a un punto $x \in X$, y escribimos $x_i \to x$, si para cada $U \in \mathcal{N}(x)$, existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq i_0$.

[10] KELLEY, John. *General Topology*. Graduate Text in Mathematics. Springer US, 1975.

El siguiente teorema muestra que las redes se comportan muy similar a como se comportan las sucesiones en espacios métricos, en el sentido que caracterizan la clausura y la continuidad de una función. Una demostración de este resultado se puede consultar en el Teorema 4.23 de [11].

Teorema 1.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $A \subseteq X$. Entonces*

(1) $x \in \overline{A}$ *si, y solo si, existe una red* $(x_i)_{i\in I}$ *en* A *tal que* $x_i \to x$.

(2) $f\colon X \to Y$ *es continua en* x *si, y solo si, siempre que exista una red* $(x_i)_{i\in I}$ *en* X *con* $x_i \to x$, *se tiene que* $f(x_i) \to f(x)$.

(3) *Sea* $(f_i)_{i\in I}$ *una red de funciones donde* $f_i\colon X \to Y$ *para todo* $i \in I$. *Entonces* $(f_i)_{i\in I}$ *converge a* $f\colon X \to Y$ *si, y solo si,* $(f_i(x))_{i\in I}$ *converge a* $f(x)$ *en* Y *para cada* $x \in X$.

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es de *dimensión cero* o *cero dimensional* si existe una base $\mathcal{B}$ de X tal que B es abierto-cerrado para cada $B \in \mathcal{B}$.

Lema 1.1.4. *Si X es métrico y numerable, entonces X es cero dimensional.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$. Veamos que existe un V abierto-cerrado tal que $x \in V \subseteq U$. Como X es métrico, entonces tenemos que X es normal. Además, $\{x\}$ y $X \backslash U$ son cerrados disjuntos, por lo tanto, es posible aplicar el lema de Urysohn. Sea $f\colon X \to [0,1]$ una función continua tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] = \{1\}$. Dado que X es numerable se tiene que $f[X] \subseteq [0,1]$ es numerable. Por tanto, existe $c \in [0,1] \setminus f[X]$. Ahora observe que si $V = f^{-1}[[0,c]] = f^{-1}[[0,c)]$ se tiene que V es un conjunto abierto-cerrado tal que $x \in V \subseteq U$. □

Teorema 1.1.5. *Si X es un métrico, compacto y numerable. Entonces X^X es métrico, compacto y cero dimensional.*

Demostración. Por el Teorema 13 del capítulo 4 de [10] tenemos que el producto numerable de espacios métricos es un espacio métrico. Asimismo, por el teorema 14 del capítulo 5 de [10] tenemos que el producto de espacios compacto es compacto, por lo tanto X^X es un espacio métrico compacto. Resta ver que X^X es un espacio cero dimensional.

---

[11] CAMARGO, Javier y VILLAMIZAR, Elder. *Topología general*. Ediciones UIS, 2019.

Sea $f \in X$ y U abierto de X^X tal que $f \in U$. Mostraremos que existe V un abierto-cerrado de X^X tal que $f \in V \subseteq U$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es un básico, entonces

$$U = \{g \in X^X : g(x_i) \in U_i \text{ para } i = 1, \dots, k\},$$

donde $x_1, \dots, x_k \in X$ y U_i son abiertos de X. Por otro lado, del lema 1.1.4 tenemos que X es cero dimensional. Por lo tanto, existe una base $\mathcal{B}$ de abierto-cerrados de X. Definamos

$$V = \{g \in X^X : g(x_i) \in V_i \text{ para } i = 1, \dots, k\}$$

donde $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_i) \in V_i \subseteq U_i$. Notemos que V es un abierto-cerrado de X^X tal que $f \in V \subseteq U$. De lo anterior, concluimos que X^X es cero dimensional. □

El siguiente teorema es tomado de [9], el cual caracteriza al conjunto de Cantor como el único espacio métrico, compacto, cero dimensional y sin puntos aislados.

Teorema 1.1.6. *(Brouwer) El espacio de Cantor es el único (salvo homeomorfismo) espacio métrico, compacto, cero dimensional y sin puntos aislados.*

Para finalizar esta sección de resultados presentaremos como definición (pues omitiremos la demostración) de la topología del orden para conjuntos totalmente ordenados y un resultado acerca de la topología de los ordinales sucesores numerables.

Definición 1.1.7. Sea X un conjunto totalmente ordenado. Entonces la colección

$$\rho = \{(x, y) : x, y \in X \text{ con } x < y\}$$

donde $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$ es una base para X. La topología generada por esta base es llamada la topología del orden.

Recordemos que cada ordinal β es un conjunto bien ordenado, en particular, β es totalmente ordenado, por lo tanto es posible darle la topología del orden a cada ordinal. En este sentido, de ahora en adelante consideraremos a cada ordinal con esta topología. Denotaremos con ω al ordinal bien ordenado que representa a los números naturales.

Dedicaremos una parte de este trabajo a estudiar los sistemas dinámicos que se pueden definir sobre el espacio $\omega^\alpha + 1$. En este contexto, resulta esencial presentar el siguiente resultado, el cual establece una de las condiciones para construir un sistema dinámico sobre $\omega^\alpha + 1$ (ver el inicio del capítulo 2). Una demostración detallada de este teorema se encuentra disponible en el Teorema 2.5 de [12].

Teorema 1.1.8. *Para cada $\alpha > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\omega^\alpha \cdot p + 1$ es un espacio métrico y compacto.*

1.2. EL RANGO DE CANTOR-BENDIXSON

El concepto del rango de Cantor-Bendixson es una herramienta indispensable para algunas pruebas que expondremos en capítulos posteriores. Por esta razón, le dedicamos una sección en la que presentamos su definición y algunos resultados fundamentales.

Antes de introducir el rango de Cantor-Bendixson, es necesario presentar la definición de un conjunto disperso y algunos resultados con los cuales podemos garantizar la existencia del rango de Cantor-Bendixson para puntos en los espacios métricos compactos.

Definición 1.2.1. Un espacio topológico X se dice que es *disperso* si para todo subespacio Y de X no vacío existe $y \in Y$ aislado en Y.

El siguiente teorema que enunciaremos sin demostración (una prueba la puede consultar en el Teorema 1.53 de [9]) es un resultado importante para la teoría que vamos a usar en este trabajo. Recordemos que $A \subseteq X$ es un conjunto *perfecto* si A es cerrado y no tiene puntos aislados y que un espacio topológico X es *polaco* si X es métrico, completo y separable.

Teorema 1.2.2. *Sea $A \subseteq X$ un conjunto perfecto no vacío de un espacio polaco X. Para todo abierto U, si $U \cap A$ no es vacío, entonces tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. En particular, A tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Lema 1.2.3. *Todo espacio métrico compacto y numerable es disperso.*

Demostración. Sea X un espacio métrico, compacto y numerable. Supongamos por reducción al absurdo que existe $Y \subseteq X$ no vacío tal que $Y = Y'$. De esta manera Y es cerrado y por lo tanto polaco. Luego, por el teorema 1.2.2 tenemos que $|Y| = 2^{\aleph_0}$, lo cual es absurdo, pues Y es numerable. Por lo tanto, X es disperso. $\square$

---

[12] ÁLVAREZ, Borys y MERINO, Andrés. “Countable Ordinal Spaces and Compact Countable Subsets of a Metric Space”. En: *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2019).

Sea X un espacio topológico. Recordemos que X' denota el conjunto de puntos límite de X. El derivado de Cantor-Bendixson de X se define recursivamente como:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= X, \\ X^{(\alpha+1)} &= (X^{(\alpha)})', \\ X^{(\lambda)} &= \bigcap_{\alpha<\lambda} X^{(\alpha)} \text{ si } \lambda \text{ es un ordinal límite.} \end{aligned}$$

Recordemos que para cualquier espacio topológico X y $A \subseteq X$ se tiene que A' es un conjunto cerrado de X. De este modo tenemos que cada $X^{(\beta)}$ es un conjunto cerrado de X.

Definición 1.2.4. Sea X un espacio topológico. El *rango de Cantor-Bendixson* de X, que será denotado por $CB(X)$, es el menor ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Si A es un subespacio de X, definimos el $CB(A)$ como el menor ordinal α tal que $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.

A continuación presentamos algunos resultados que caracterizan el rango de Cantor-Bendixson.

Proposición 1.2.5. *Si X es un espacio métrico compacto y numerable, entonces $CB(X)$ es el primer ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $CB(X) = \alpha$ pero $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$. Por el lema 1.2.3 tenemos que X es disperso. Además, dado que $X^{(\alpha)}$ es un subespacio de X no vacío, concluimos que $X^{(\alpha)}$ tiene un punto aislado. Pero como α es el rango de X, también tenemos que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$, es decir, $X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha)})'$, luego $X^{(\alpha)}$ no tiene puntos aislados, lo cual es una contradicción. Así, $X^{(\alpha)} = \emptyset$. $\square$

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio métrico compacto y numerable, entonces $CB(X)$ es un ordinal sucesor.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $CB(X) = \alpha$ es un ordinal límite. Por definición del rango de Cantor-Bendixson tenemos que $X^{\alpha} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{\alpha}$. Además, de la proposición 1.2.5 tenemos que α es el primer ordinal tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$. Por lo tanto $X^{(\beta)} \neq \emptyset$ para cada $\beta < \alpha$. Así, tenemos que $X^{(\beta)}$ es cerrado, compacto y no vacío para cada $\beta < \alpha$. Ahora notemos que

$$\cdots X^{(\beta+1)} \subseteq X^{(\beta)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(2)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X.$$

Además, no es difícil ver que la colección de cerrados $\{X^{(\beta)} \colon \beta < \alpha\}$ tiene la *p.i.f.* Así, como X es compacto, por el lema 1.1.1 se sigue que $\bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} = X^{(\alpha)} \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto α debe ser un ordinal sucesor. □

Definición 1.2.7. Sea X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Definimos el *rango de Cantor-Bendixson de* x, denotado por $CB(x)$, como el primer ordinal $\alpha < \omega_1$ (donde ω_1 es el primer ordinal no numerable) tal que $x \in X^{(\alpha)}$ y $x \notin X^{(\alpha+1)}$.

Notemos que si $CB(x) = \alpha$ entonces x es aislado en $X^{(\alpha)}$, pues si fuera de acumulación se tendría que $x \in (X^{(\alpha)})'$, lo cual contradice que $CB(x) = \alpha$.

Lema 1.2.8. *Sea X un espacio métrico compacto y numerable. Si $CB(X) = \alpha + 1$ entonces existe puntos de rango máximo, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $CB(x_0) = \alpha$ y $CB(x) \leq \alpha$ para todo $x \in X$. Además, el conjunto de puntos de rango máximo es finito.*

Demostración. Como X es numerable por la proposición 1.2.5 tenemos que $\alpha + 1$ es el primer ordinal tal que $X^{(\alpha+1)} = \emptyset$. Por lo tanto $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, luego existen puntos de rango α y claramente ese es el rango máximo que pueden alcanzar los puntos de X pues $X^{(\alpha+1)} = \emptyset$.

Veamos ahora que el conjunto de puntos de rango máximo es finito. Sea A el conjunto de puntos con rango máximo. Supongamos por reducción al absurdo que A que es infinito. Tomemos una sucesión (x_n) de puntos distintos en A. Por la compacidad de X podemos suponer que (x_n) converge a $x \in X$, por lo tanto $x \in (X^{(\alpha)})' = X^{(\alpha+1)}$, lo cual es absurdo. En conclusión, el conjunto de puntos de rango máximo es finito. □

En el capítulo 3 estudiaremos los sistemas dinámicos sobre el espacio $\omega^\alpha + 1$, es por tal motivo que presentaremos el siguiente lema que nos ayudará a demostrar que en este espacio solo existe un único punto de rango de Cantor-Bendixson igual a α.

Lema 1.2.9. *Suponga que $X_k = [\omega^\beta \cdot k + 1, \omega^\beta \cdot (k+1)]$ con $k \in \mathbb{N}$ y que $Y_\beta = [\omega^\beta + 1, \omega^{\beta+1}]$ donde β es un ordinal. Entonces se tienen las siguientes proposiciones:*

(1) *X_k es homeomorfo a $\omega^\beta + 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

(2) *Y_β es homeomorfo a $\omega^{\beta+1} + 1$ para cada β.*

Demostración. (1) Basta con ver que X_k y $\omega^\beta + 1$ son orden isomorfos para cada $k \in \mathbb{N}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y considere $f \colon \omega^\beta + 1 \to X_k$ dada por,

$$f(\gamma) = \omega^\beta \cdot k + \gamma.$$

Dado que X_k y $\omega^\beta + 1$ son bien ordenados, es suficiente con ver que f es creciente y sobreyectiva. Primero veamos que f es sobreyectiva. Sea $y \in X_k$. Por lo tanto $\omega^\beta \cdot k \leq y$, así, existe un único ordinal γ tal que $\omega^\beta \cdot k + \gamma = y$. Afirmamos que $\gamma \in \omega^\beta + 1$. Si $\gamma \notin \omega^\beta + 1$, entonces $\gamma > \omega^\beta + 1$, por lo tanto

$$y = \omega^\beta \cdot k + \gamma > \omega^\beta \cdot k + \omega^\beta + 1 = \omega^\beta \cdot (k+1),$$

lo cual es absurdo puesto que $y \in X_k = [\omega^\beta \cdot k + 1, \omega^\beta \cdot (k+1)]$. Ahora, notemos que f es una función creciente por como fue definida. Así, X_k es isomorfo a $\omega^\beta + 1$. De lo anterior concluimos que X_k es homeomorfo a $\omega^\beta + 1$.

(2) Veamos que Y_β y $\omega^{\beta+1}+1$ son orden isomorfos. Considere $f\colon \omega^{\beta+1}+1 \to Y_\beta$ definida por:

$$f(\gamma) = \omega^\beta + \gamma.$$

Por definición de f tenemos que f es creciente y que $f(\omega^{\beta+1}) = \omega^{\beta+1}$, puesto que

$$f(\omega^{\beta+1}) = \omega^\beta + \omega^{\beta+1} = \omega^\beta + \omega^\beta \cdot \omega = \omega^\beta \cdot (1+\omega) = \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}.$$

Por lo tanto f está bien definida. Usando la mismas ideas el ítem anterior no es difícil ver que f es sobreyectiva. Así, Y_β y $\omega^{\beta+1}+1$ son orden isomorfos y por lo tanto homeomorfos.

□

A partir de la definición de exponenciación ordinal es fácil ver que ω^α tiene rango α en $\omega^\alpha + 1$. Ahora veremos que este es el único punto cuyo rango es exactamente α.

Teorema 1.2.10. *En el espacio $\omega^\alpha+1$ existe un único punto de rango de Cantor-Bendixson igual a α.*

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción transfinita sobre α. Dado que $\omega^\alpha+1 = \omega^\alpha \cup \{\omega^\alpha\}$, mostraremos que el único punto de rango α es ω^α. Si $\alpha = 1$ el resultado es claro.

Ahora consideremos el caso cuando α es un ordinal sucesor. Suponga que $\alpha = \beta + 1$ y note que

$$\omega^\alpha + 1 = \omega^{\beta+1} + 1 = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(\omega^\beta \cdot k) + 1, \omega^\beta \cdot (k+1)] \right) \cup \{\omega^{\beta+1}\}.$$

Por el lema 1.2.9(1) tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $[\omega^\beta \cdot k + 1, \omega^\beta \cdot (k+1)]$ es homeomorfo a $\omega^\beta + 1$. Así, por hipótesis de inducción, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $[\omega^\beta \cdot k + 1, \omega^\beta \cdot (k+1)]$ tiene un único punto de rango β. Ahora observe que para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_1 \neq k_2$ se tiene que

$$[\omega^\beta \cdot k_1 + 1, \omega^\beta \cdot (k_1+1)] \cap [\omega^\beta \cdot k_2 + 1, \omega^\beta \cdot (k_2+1)] = \emptyset.$$

Lo que implica que los puntos de rango β en $\omega^{\beta+1}$ son aislados. Así, $\omega^{\beta+1}$ es el único punto de rango $\beta + 1$.

Sea α un ordinal límite. Ahora observe que

$$\omega^\alpha + 1 = \{0\} \cup \left(\bigcup_{\beta<\alpha} [\omega^\beta + 1, \omega^{\beta+1}] \right) \cup \{\omega^\alpha\}.$$

Por el lema 1.2.9(2) tenemos que $[\omega^\beta + 1, \omega^{\beta+1}]$ es homeomorfo a $\omega^{\beta+1} + 1$. Luego, por hipótesis de inducción, concluimos que $[\omega^\beta + 1, \omega^{\beta+1}]$ solo tiene un punto de rango $\beta + 1$ para cada $\beta < \alpha$. De lo anterior se sigue que ω^α es el único punto de rango α en $\omega^\alpha+1$. $\square$

Es posible caracterizar el rango de Cantor-Bendixson de un subconjunto a partir del rango de sus elementos.

Lema 1.2.11. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces*

$$CB(A) = \sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\}.$$

Demostración. Sea $\beta = CB(A)$. Primero veamos que $\sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\} \leq \beta$. En efecto, como A es cerrado y X es métrico compacto y numerable, se sigue que A es métrico compacto y numerable, por lo tanto $A^{(\beta)} = \emptyset$ por la proposición 1.2.5. Entonces, tenemos que

$$CB(x) < \beta \text{ para cada } x \in A.$$

Por lo tanto, $CB(x) + 1 \leq \beta$ para cada $x \in X$, y así, $\sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\} \leq \beta$.

Resta ver que $\beta \leq \sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\}$. Como $CB(A) = \beta$, por la proposición 1.2.6 tenemos que β es un ordinal sucesor. Supongamos que $\beta = \alpha + 1$. Ahora, por el lema 1.2.8 existe $x_0 \in A$ tal que $CB(x_0) = \alpha$. Luego,

$$\beta = CB(x_0) + 1 \leq \sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\}.$$

Así, concluimos que $\beta \leq \sup\{CB(x) + 1 \colon x \in A\}$. $\square$

La siguiente propiedad es de utilidad cuando trabajamos con el rango de Cantor-Bendixson.

Lema 1.2.12. *Sea X un espacio métrico compacto numerable y sea $x_0 \in X$. Entonces existe U abierto tal que $x_0 \in U$ y $CB(x) < CB(x_0)$ para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y supongamos que $CB(x_0) = \alpha$. Dado que x_0 es aislado en $X^{(\alpha)}$ existe U abierto de X tal que $X^{(\alpha)} \cap U = \{x_0\}$. Veamos que U es el abierto que estamos buscando, es decir, que para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$ se tiene que $CB(x) < CB(x_0)$.

Supongamos por reducción al absurdo que existe $x \in U$ tal que $CB(x) \geq CB(x_0)$. Dado que $X^{(\alpha)} \cap U = \{x_0\}$, tenemos que $x \notin X^{(\alpha)}$, luego $CB(x) > \alpha$. Entonces $CB(x) \geq \alpha + 1$, pero, recordemos que

$$\cdots \subseteq X^{(\alpha+2)} \subseteq X^{(\alpha+1)} \subseteq X^{(\alpha)},$$

por lo tanto $x \in X^{(\alpha+1)}$, es decir, $x \in (X^{(\alpha)})'$. Por lo tanto, existe $z \in U \setminus \{x\}$ tal que $z \in X^{(\alpha)}$. Pero esto es imposible, pues contradice que $X^{(\alpha)} \cap U = \{x_0\}$. De lo anterior, concluimos que $CB(x) < CB(x_0)$ para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$. $\square$

Concluiremos esta sección presentando un teorema que es necesario para la demostración de una propiedad importante acerca de los sistemas dinámicos con órbita densa (ver el lema 3.1.4).

Teorema 1.2.13. *Sea X un espacio métrico compacto numerable, $f \colon X \to X$ una función continua tal que para cada $x \in X'$ se tiene que $\emptyset \neq f^{-1}(x) \subseteq X'$. Entonces para todo $x \in X'$ existe $z \in f^{-1}(x)$ tal que $CB(x) \leq CB(z)$.*

Demostración. Sea $x \in X'$. Primero definiremos una colección de conjuntos que nos ayudarán a realizar la demostración. Por el lema 1.2.12, para cada $z \in f^{-1}(x)$ existe U_z un abierto de X tal que $z \in U_z$ y $CB(y) < CB(z)$ para todo $y \in U_z$. Definamos

$$U = \bigcup_{z \in f^{-1}(x)} U_z.$$

Dado que f es continua y X es compacto, tenemos que $f(X \setminus U)$ es cerrado, por lo tanto, $V = X \setminus f(X \setminus U)$ es abierto y además $x \in V$. Ahora veamos que $f^{-1}(V) \subseteq U$. En efecto, pues

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(X \setminus f(X \setminus U)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U)) \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U.$$

Mostraremos el teorema usando inducción transfinita sobre $CB(x)$. Si $CB(x) = 1$, entonces por hipótesis se tiene que existe $z \in f^{-1}(x)$ tal que $z \in X'$. Por lo tanto, $CB(z) \geq 1$.

Consideremos el caso donde $CB(x)$ es un ordinal sucesor. Supongamos que $CB(x) = \beta + 1$. Entonces tenemos que $x \in X^{(\beta+1)} = (X^{(\beta)})'$. Como $x \in V$ y además V es abierto, existe $y \in V$ tal que $CB(y) = \beta$ (notemos que $y \neq x$). Luego, por hipótesis de inducción existe $y_0 \in f^{-1}(y)$ tal que $CB(y) \leq CB(y_0)$. Así, $y_0 \in f^{-1}(V)$ y dado que $f^{-1}(V) \subseteq U$, tenemos que $y_0 \in U$, de este modo, por la definición de U existe $z_0 \in f^{-1}(x)$ tal que $y_0 \in U_{z_0}$.

Ahora observemos que $y_0 \neq z_0$, pues $f(y_0) = y \neq x = f(z_0)$. Además, por como fue definido U_{z_0} tenemos que $CB(y_0) < CB(z_0)$, luego $CB(y) < CB(z_0)$ pues $CB(y) \leq CB(y_0)$, por lo tanto $\beta + 1 \leq CB(z_0)$. Es decir, $CB(x) \leq CB(z_0)$ donde $z_0 \in f^{-1}(x)$.

Por último, supongamos que $CB(x) = \beta$ es un ordinal límite. Supongamos por reducción al absurdo que para cada $z \in f^{-1}(x)$ se tiene que $CB(z) < CB(x)$. Definamos

$$\alpha = \sup\{CB(y) + 1 \colon y \in f^{-1}(x)\}.$$

Afirmamos que $\alpha < \beta$. Primero observemos que $\alpha \leq \beta$ y que $\{y \in X \colon y \in f^{-1}(x)\} = f^{-1}(x)$ es un conjunto cerrado de X, pues f es continua y X es métrico. Entonces por el lema 1.2.11, tenemos que $CB(f^{-1}(x)) = \alpha$. Ahora, por la proposición 1.2.6, tenemos que $CB(f^{-1}(x)) = \alpha$ es un ordinal sucesor, por lo tanto $\alpha \neq \beta$ pues β es límite. Así, $\alpha < \beta$.

Dado que β un ordinal límite y de la definición del rango de Cantor-Bendixson, tenemos que $x \in X^{(\beta)} = \bigcap_{\lambda<\beta} X^{(\lambda)}$, en particular, $x \in X^{(\alpha+1)}$. Como $x \in V$ existe $y \in V$ tal que $CB(y) = \alpha$. Luego, por hipótesis de inducción, existe $y_0 \in f^{-1}(y)$ tal que $CB(y) \leq CB(y_0)$. De este modo, $y_0 \in f^{-1}(V)$, así, $y_0 \in U$ pues $f^{-1}(V) \subseteq U$. De la definición de U, tenemos que existe $z_0 \in f^{-1}(x)$ tal que $y_0 \in U_{z_0}$. Por lo tanto, $CB(y) = \alpha \leq CB(y_0) < CB(z_0)$, lo cual implica que $\alpha < CB(z_0) + 1$. Pero esto es una contradicción, pues $z_0 \in f^{-1}(x)$ y $\alpha = \sup\{CB(y) + 1 \colon y \in f^{-1}(x)\}$. De lo anterior, concluimos que debe existir $z_0 \in f^{-1}(x)$ tal que $CB(x) \leq CB(z_0)$, de esta manera finalizamos la prueba. □

1.3. ULTRAFILTROS, EL ESPACIO $\beta(\mathbb{N})$ Y P-LÍMITES

En esta sección nos centramos en introducir las nociones básicas de filtros y ultrafiltros, las cuales son herramientas importantes para el estudio de los sistemas dinámicos que se estudiarán en este trabajo. Para esta sección usaremos como referencia general el libro *Ultrafiltros sobre* $\mathbb{N}$ *y Sistemas Dinámicos Discretos* de Salvador García, ver [13].

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto no vacío. Un *filtro* sobre S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que satisface lo siguiente:

I. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

II. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

III. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in F$.

Ejemplo 1.3.2. Sea X un conjunto no vacío. Las siguientes colecciones son filtros sobre X.

(1) $\mathcal{F} = \{X\}$ (*Filtro trivial*).

(2) Sea $A \subseteq X$ no vacío. Defina $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X \colon A \subseteq B\}$ (*Filtro generado por* A).

(3) Sea X infinito. Defina $\mathcal{F}_r = \{B \subseteq X \colon |X \setminus B| < \omega\}$ (*Filtro de Fréchet o de los complementos finitos*).

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es libre si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. A los filtros que no son libres se les llama fijos. La siguiente proposición caracteriza a los ultrafiltros libres como los filtros que solo contienen conjuntos infinitos.

Proposición 1.3.3. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es libre si y sólo si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.*

El siguiente resultado es importante debido a que gracias a este es posible construir filtros con ciertas propiedades a partir de una colección de subconjuntos de X.

Proposición 1.3.4. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X con la p.i.f. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.*

---

[13] GARCÍA, Salvador. *Ultrafiltros sobre* $\mathbb{N}$ *y Sistemas dinámicos Discretos*. Caracas: Ediciones IVIC, 2010.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y defina $\mathcal{B}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos U de $\mathbb{R}$ tales que $a \in U$. Entonces $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por la proposición 1.3.4 existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ (a este filtro se le conoce como el *filtro de las vecindades del punto* a).

Definición 1.3.5. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un *ultrafiltro* si no está contenido propiamente en otro filtro.

En otras palabras, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si, y solo si, $\mathcal{F}$ es un filtro maximal. En este sentido, es claro que para cada $x \in X$ el filtro generado por x denotado como $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\{x\}}$ es un ultrafiltro, más aún, $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro fijo. Además, no es difícil verificar que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro libre sobre X, entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro generado por algún elemento de X, por lo tanto, los únicos ultrafiltros fijos son los generados por algún elemento.

Es natural preguntarse por ejemplos precisos de ultrafiltros libres. Sin embargo, no es posible encontrarlos de forma explicita, ya que hace falta el axioma de elección para garantizar la existencia de estos ultrafiltros, tal como nos dice Salvador García en su libro (ver el capítulo 1 de [13]). Aunque no es posible obtener ultrafiltros libres de manera explicita, si podemos encontrar ultrafiltros con ciertas propiedades gracias al siguiente resultado.

Proposición 1.3.6. *(Lema del ultrafiltro) Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

La proposición anterior es útil en el sentido de que si queremos encontrar un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$, que por ejemplo, contenga a un conjunto infinito A, basta con encontrar un filtro $\mathcal{F}$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Una estrategia común para realizar lo anterior es usar la colección $\mathcal{B} = \{A\} \cup \mathcal{F}_r$, pues así, $\mathcal{B}$ tiene la *p.i.f.* y $A \in \mathcal{B}$, luego existe un filtro $\mathcal{F}$ con $A \in \mathcal{F}$.

A continuación presentaremos algunas caracterizaciones importantes para los ultrafiltros sobre un conjunto X.

Proposición 1.3.7. *Sea X un conjunto infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes para un filtro $\mathcal{F}$ sobre X.*

I. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro*

II. *Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

III. *Si $A \in \mathcal{P}(X)$ y $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

De ahora en adelante, nuestra atención se centrará exclusivamente en los ultrafiltros definidos sobre $\mathbb{N}$, que denotaremos como $\beta(\mathbb{N})$. Notemos que cada número natural n se puede identificar como el ultrafiltro $\mathcal{F}_n$. Por lo tanto, tiene sentido considerar a $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\beta(\mathbb{N})$. En este contexto, denotaremos por $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ a los ultrafiltros libres de $\mathbb{N}$.

A lo largo de este trabajo estaremos usando los ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$, por tal motivo resulta crucial saber que existen suficientes ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N}^* \neq \emptyset$. De hecho, existen $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$. Para obtener una demostración de lo anterior, se puede consultar el Teorema 1.2.1 del libro de Salvador García en [13].

A continuación veremos que dada una colección de conjuntos infinitos disjuntos dos a dos, es posible encontrar un ultrafiltro que no contenga a todos los conjuntos de dicha colección. Este resultado será útil para la demostración del teorema 3.1.5. Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ definimos $A^* = \{p \in \mathbb{N}^* \colon A \in p\}$.

Proposición 1.3.8. *Sea* $\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *una colección de subconjuntos infinitos de* $\mathbb{N}$ *disjuntos dos a dos. Entonces existe* $q \in \beta(\mathbb{N})$ *tal que* $q \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$.

Demostración. Definamos $A = \{a_n \colon a_n = \min B_n\}$. Como $B_n \cap B_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$, entonces tenemos que $a_n \neq a_m$. Por lo tanto, A es infinito. Ahora notemos que $\mathcal{F}_r \cup \{A\}$ tiene la *p.i.f.* Luego existe un ultrafiltro q tal que $\mathcal{F}_r \cup \{A\} \subseteq q$. Así, q es un ultrafiltro libre y además $A \in q$. Para terminar observemos que $q \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$, pues, si $q \in B_n^*$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se tendría que $B_n \cap A \in q$. Pero $B_n \cap A = \{a_n\}$ es finito. Lo cual es absurdo, pues contradice que q sea libre. $\square$

A continuación introduciremos la noción de p-límites, el cual es un concepto vital para el desarrollo de este trabajo. Recordemos que $N \subseteq X$ es una vecindad de un punto $x \in X$ si $x \in N^{\circ}$. De ahora en adelante, denotaremos como $\mathcal{N}(x)$ al conjunto de todas las vecindades de x.

Definición 1.3.9. Sea X un espacio topológico, $p \in \beta(\mathbb{N})$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Un punto $x \in X$ es *punto* p*-límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y será denotado por $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, si para cada vecindad U de x, se tiene que $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in U\} \in p$.

En este trabajo usaremos los p-límites para caracterizar la adherencia de una sucesión (o un conjunto numerable) lo cual es posible gracias al siguiente resultado.

Teorema 1.3.10. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un punto de adherencia del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si, y solo si, existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $x = p-\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto de adherencia del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, definamos $\mathcal{B} = \{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sea $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{N}(x)$ y defina $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcap_{i=1}^k V_i\}$. No es difícil ver que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_i\} = A.$$

Dado que x es punto de adherencia de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $x \in \bigcap_{i=1}^k V_i$, entonces $A \neq \emptyset$, por tanto $\mathcal{B}$ tiene la *p.i.f.* Por el lema 1.3.4 existe un ultrafiltro $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $\mathcal{B} \subseteq p$. Como $\mathcal{B} \subseteq p$ se sigue que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.
Recíprocamente, sea $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Tome $U \in \mathcal{N}(x)$ y defina $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$. Debido a que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$ se tiene que $A \in p$, en particular $A \neq \emptyset$, luego $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap U \neq \emptyset$. Así, x es punto adherente. $\square$

No es difícil ver que si X es un espacio topológico Hausdorff entonces los puntos p-límite son únicos cuando existan. Además, si p es un filtro fijo, entonces el p-límite siempre existe.

Por otro lado, cuando p es un ultrafiltro libre el p-límite puede no existir para alguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada por $x_n = n$ y $p \in (2\mathbb{N})^*$, no es difícil verificar que el p-límite no existe para esta sucesión. Sin embargo, si el espacio en el cual estamos trabajando es compacto podemos garantizar la existencia de los p-límites para cualquier sucesión.

Teorema 1.3.11. *Toda sucesión en un espacio compacto X tiene un punto p-límite, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. Sea X un espacio compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $p \in \mathbb{N}^*$. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{cl_X(\{x_n : n \in A\}) : A \in p\}$ de subconjuntos cerrados en X. Afirmamos que $\mathcal{B}$ tiene la *p.i.f.*. En efecto, sean $A_0, \ldots, A_k \in p$, como $\bigcap_{i=0}^k A_i \in p$, en particular, $\bigcap_{i=0}^k A_i \neq \emptyset$, sea un n_0 en dicha intersección, entonces $x_{n_0} \in \bigcap_{i=0}^k cl_X(\{x_n : n \in A_i\})$. Así, $\mathcal{B}$ tiene la *p.i.f.* Como X es compacto, por el lema 1.1.1 existe x tal que

$$x \in \bigcap_{A\in p} cl_X(\{x_n : n \in A\}).$$

Veamos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Sea $U \in \mathcal{N}(x)$ y $B = \{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in U\}$. Como $x \in cl_X(\{x_n \colon n \in A\})$, entonces $U \cap \{x_n \colon n \in A\} \neq \emptyset$, por tanto $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in p$. En consecuencia de la proposición 1.3.7 tenemos que $B \in p$. Finalmente concluimos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Para finalizar esta sección introduciremos la suma de ultrafiltros, esta dotará al conjunto de los ultrafiltros $\beta(\mathbb{N})$ con una operación que lo hará un semigrupo. Dados $p, q \in \beta(\mathbb{N})$ se define la suma $p + q$ como:

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} \colon \{m \in \mathbb{N} \colon \{n \in \mathbb{N} \colon m + n \in A\} \in p\} \in q\}.$$

Ejemplo 1.3.12. Sean $p, q \in \beta(\mathbb{N})$ tales que $2\mathbb{N} \in p$ y $2\mathbb{N} + 1 \in q$, donde $2\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N} + 1$ son los números pares e impares respectivamente. Entonces $2\mathbb{N} + 1 \in p + q$.

La siguiente proposición es un resultado importante acerca del espacio $\beta(\mathbb{N})$, el cual nos dice que $\beta(\mathbb{N})$ es un semigrupo algebraico.

Proposición 1.3.13. $\beta(\mathbb{N})$ *con la suma anterior es un semigrupo, es decir,* $+$ *es una operación cerrada y asociativa en* $\beta(\mathbb{N})$*.*

Para no extender mucho la demostración con notación definiremos (haciendo un pequeño abuso de notación) para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo y $A \subseteq \mathbb{N}$, el conjunto

$$-m + A = \{n \in \mathbb{N} \colon m + n \in A\}.$$

Así,

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} \colon \{m \in \mathbb{N} \colon -m + A \in p\} \in q\}.$$

Demostración. Empezaremos probando que $(\beta(\mathbb{N}), +)$ es cerrado con la suma definida. Sean $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, mostraremos que $p + q \in \beta(\mathbb{N})$. Primero veamos que $p + q$ es un filtro. Note que $\emptyset \notin p + q$, pues si $\emptyset \in p + q$ implicaría que $\emptyset \in q$, lo que contradice que q sea un ultrafiltro. Observe también que $\mathbb{N} \in p + q$, ya que $\{m \in \mathbb{N} \colon -m + \mathbb{N} \in p\} = \mathbb{N}$. Dado que $\mathbb{N} \in q$ se sigue que $p + q \neq \emptyset$. Sean $A \in p + q$ y $A \subseteq B$, veamos que $B \in p + q$. En efecto, note que para todo $m \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que $-m + A \subseteq -m + B$, lo que implica que

$$\{m \in \mathbb{N} \colon -m + A \in p\} \subseteq \{m \in \mathbb{N} \colon -m + B \in p\}.$$

Como $A \in p + q$, entonces $\{m \in \mathbb{N} \colon -m + A \in p\} \in q$, luego $\{m \in \mathbb{N} \colon -m + B \in p\} \in q$. Por tanto $B \in p + q$. Ahora suponga que $A, B \in p + q$ y mostremos que $A \cap B \in p + q$.

Note que para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo se tiene $(-m+A) \cap (-m+B) = -m+(A \cap B)$, de este modo se tiene que

$$\{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} \cap \{m \in \mathbb{N}\colon -m+B \in p\} \subseteq \{m \in \mathbb{N}\colon -m+(A \cap B) \in p\}.$$

Y como $A, B \in p+q$ se sigue que $\{m \in \mathbb{N}\colon -m+(A \cap B)\} \in q$, lo que implica que $A \cap B \in p+q$.

Hasta el momento mostramos que $p+q$ es un filtro, resta ver que este es un ultrafiltro. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y suponga que $A \notin p+q$, veamos que $\mathbb{N} \setminus A \in p+q$. Como $A \notin p+q$ entonces $\{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} \notin q$, luego $\mathbb{N} \setminus \{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} \in q$ pues q es un ultrafiltro. Ahora observe que

$$\mathbb{N} \setminus \{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} = \{m \in \mathbb{N}\colon -m+(\mathbb{N} \setminus A) \in p\}.$$

Por tanto $\mathbb{N} \setminus A \in p+q$. Finalmente concluimos que $p+q \in \beta(\mathbb{N})$.

Ahora mostraremos que la suma definida para $\beta(\mathbb{N})$ es asociativa. Sean $p, q, r \in \beta(\mathbb{N})$. Mostraremos que $p+(q+r) = (p+q)+r$. Por definición de suma de ultrafiltros tenemos que:

$$\begin{aligned} A \in p+(q+r) &\iff \{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} \in q+r. \\ &\iff \{n \in \mathbb{N}\colon -n+\{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} \in q\} \in r. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} A \in (p+q)+r &\iff \{n \in \mathbb{N}\colon -n+A \in p+q\} \in r. \\ &\iff \{n \in \mathbb{N}\colon \{m \in \mathbb{N}\colon -m+(-n+A) \in p\} \in q\} \in r. \end{aligned}$$

Note que para probar que $p+(q+r) = (p+q)+r$ es suficiente con ver que

$$-n+\{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} = \{m \in \mathbb{N}\colon -m+(-n+A) \in p\}. \tag{1.1}$$

En efecto, observe que

$$\begin{aligned} -n+\{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\} &= \{i \in \mathbb{N}\colon i+n \in \{m \in \mathbb{N}\colon -m+A \in p\}\}. \\ &= \{i \in \mathbb{N}\colon -(i+n)+A \in p\}. \end{aligned}$$

Note además que $-m+(-n+A) = -(m+n)+A$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} -n + \{m \in \mathbb{N}\colon -m + A \in p\} &= \{i \in \mathbb{N}\colon -(i+n) + A \in p\} \\ &= \{i \in \mathbb{N}\colon -i + (-n+A) \in p\} \end{aligned}$$

Así, concluimos que la igualdad 1.1 se mantiene y por tanto $p+(q+r) = (p+q)+r$. $\square$

Sea X un espacio métrico compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f^n\colon X \to X$ denota la n-*iterada* de f, donde f^n es la composición de f n-veces. Para $p \in \mathbb{N}^*$, se define la p-*iterada* de f como la función $f^p\colon X \to X$ dada por

$$f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(x).$$

El concepto de p-iterada es fundamental para la forma en la que estudiamos los sistemas dinámicos en este trabajo, por tal motivo presentaremos algunas propiedades importantes asociadas a estas.

Teorema 1.3.14. *Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $p, q \in \beta(\mathbb{N})$ entonces $f^p \circ f^q = f^{q+p}$.*

Demostración. Sean $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, $x \in X$. Mostraremos que $f^p(f^q(x)) = (q+p) - \lim_{n\to\infty} f^n(x)$. Sea $U \in \mathcal{N}(f^p(f^q(x)))$ y $A = \{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in U\}$, veamos que $A \in q+p$. Defina $B = \{n \in \mathbb{N}\colon f^n(f^q(x)) \in U\}$, así, $B \in p$. Observe que para mostrar lo deseado es suficiente con ver que $B \subseteq \{n \in \mathbb{N}\colon \{m \in \mathbb{N}\colon m+n \in A\} \in q\}$, ya que, $B \in p$.

Sea $n \in B$, dado que f es continua y $f^n(f^q(x)) \in U$, existe $V \in \mathcal{N}(f^p(x))$ tal que $f^n(V) \subseteq U$ pues f^n es continua. Sea $C = \{m \in \mathbb{N}\colon f^m(x) \in V\}$, entonces $C \in q$ y dado cualquier $m \in C$ se tiene que $f^n(f^m(x)) \in U$. Luego $n+m \in A$, por lo tanto $C \subseteq \{m \in \mathbb{N}\colon m+n \in A\}$. Así, $\{m \in \mathbb{N}\colon m+n \in A\} \in q$, lo que implica que $B \subseteq \{n \in \mathbb{N}\colon \{m \in \mathbb{N}\colon m+n \in A\}\}$. $\square$

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de las p-iteradas y muestra que en el teorema 1.3.14 la condición de continuidad de la función f es necesaria. Para comprender el ejemplo es importante recordar que dados dos espacios topológicos X_1, X_2 disjuntos, podemos definir la suma directa de X_1 y X_2, denotada por $X_1 \oplus X_2$, cuya base esta dada por la siguiente colección de subconjuntos.

$$\mathcal{B} = \{U \subseteq X_1 \cup X_2\colon U \cap X_i \text{ es abierto, para } i = 1, 2\}.$$

Ejemplo 1.3.15. Consideremos $X = X_0 \oplus X_1$ la suma directa de dos sucesiones convergentes $X_0 = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $X_1 = \{n \in \mathbb{Z} \colon n < 0\} \cup \{-\infty\}$. Definamos $f \colon X \to X$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} -n-1 & \text{si } n \geq 0, \\ -n & \text{si } n < 0, \\ 0 & \text{si } n = +\infty, -\infty. \end{cases}$$

Notemos que f es discontinua en $+\infty$ y $-\infty$ (vea la figura 1.1). Mostraremos que existen $p, q \in \beta(\mathbb{N})$ tales que $f^p(f^q(0)) \neq f^{q+p}(0)$. Primero observemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f^{2n}(0) = n$, $f^{2n+1}(0) = -n-1$ y $f^{2n+1}(+\infty) = n$.

Elija $p, q \in \mathbb{N}^*$ con $2\mathbb{N} \in q$ y $2\mathbb{N}+1 \in p$, así, por el ejemplo 1.3.12 se tiene que $2\mathbb{N}+1 \in q+p$. Empezaremos calculando $f^q(0)$. Sea U una vecindad de $+\infty$ y $A = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(0) \in U\}$, veamos que $A \in q$. Defina $B = \{2n \colon n \in \mathbb{N} \text{ y } n \in U\}$ y note que $\{n \in \mathbb{N} \colon n \notin U\}$ es finito. Como $q \in \mathbb{N}^*$, es decir, q es un ultrafiltro libre, por la proposición 1.3.3 tenemos que $C = \mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} \colon n \notin U\} \in q$. Ahora observemos que $B = C \cap 2\mathbb{N}$, por lo tanto, $B \in q$. Por último, notemos que $B \subseteq A$, de este modo, se tiene que $A \in q$. Luego,

$$f^q(0) = p - \lim_{n \to \infty} f^n(0) = +\infty.$$

De forma análoga tenemos que $f^p(+\infty) = +\infty$ y que $f^{q+p}(0) = -\infty$. Por lo tanto, concluimos que $f^p(f^q(0)) = +\infty \neq -\infty = f^{q+p}(0)$.

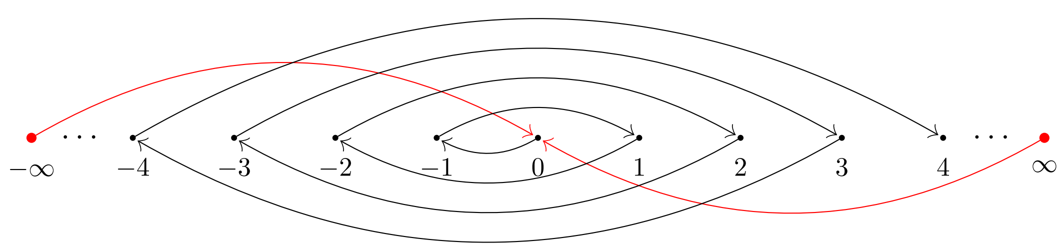

Figura 1.1: Función discontinua f tal que $f^p \circ f^q \neq f^{q+p}$.

Según Salvador García en [13], en general, no se puede asegurar que las p-iteradas conmuten. No obstante, si es posible demostrar que las p-iteradas conmutan con las n-iteradas.

Lema 1.3.16. *Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X. Entonces $f(p-\lim_{n\to\infty} x_n) = p-\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.*

(2) *$f^n \circ f^p = f^p \circ f^n$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua.

(1) Sea $V \in \mathcal{N}(f(x))$. Como $f^{-1}[V] \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \in f^{-1}[V]\} \in p$. De aquí, se sigue que $\{n \in \mathbb{N}\colon f(x_n) \in V\} \in p$. Por lo tanto, $f(x) = p-\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

(2) Sea $x \in X$. Por definición de p-límite tenemos que

$$f^n(f^p(x)) = f^n(p-\lim_{m\to\infty} f^m(x)).$$

Por el item (1), se sigue que

$$f^n(f^p(x)) = p-\lim_{m\to\infty} f^n(f^m(x)) = p-\lim_{m\to\infty} f^m(f^n(x)) = f^p(f^n(x)).$$

Así, $(f^n \circ f^p)(x) = (f^p \circ f^n)(x)$ para todo $x \in X$, lo cual concluye el lema.

□

Con el siguiente resultado mostramos una condición necesaria y suficiente para garantizar que una p-iterada se encuentre en un conjunto V abierto-cerrado.

Proposición 1.3.17. *Sea X un espacio métrico compacto, V un abierto-cerrado de X y x un punto en X. Entonces $\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in V\} \in p$ si, y solo si, $f^p(x) \in V$.*

Demostración. Supongamos que $\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in V\} \in p$. Veamos que $f^p(x) \in V$. Suponga por reducción al absurdo que $f^p(x) \notin V$. Como V es abierto-cerrado, entonces $X\backslash V$ también es abierto cerrado y además $f^p(x) \in X\backslash V$. Así, $\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in X\backslash V\} \in p$. Pero por hipótesis tenemos que $\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in V\} \in p$, lo que implica que

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in V\} \cap \{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) \in X \setminus V\} \in p.$$

Lo cual es absurdo, por lo tanto $f^n(x) \in V$. El recíproco de la proposición se sigue de la definición de p-límite. □

Es posible dotar al conjunto $\beta(\mathbb{N})$ con una topología de tal modo que este sea compacto, Hausdorff y con $\mathbb{N}$ subconjunto discreto de $\beta(\mathbb{N})$, tal como lo muestra el siguiente resultado. El cual es tomado de una versión particular del Lema 2.6 de [14].

Lema 1.3.18. *Considerando a $\mathbb{N}$ con la topología discreta, se tiene que:*

(1) *La colección*
$$\mathcal{B} = \{\hat{A} \colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\},$$
es una base para $\beta(\mathbb{N})$, donde $\hat{A} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) \colon A \in p\}$.

(2) *$\beta(\mathbb{N})$ es un espacio Hausdorff compacto con la topología generada por la base del inciso (1).*

(3) *$\mathbb{N}$ es un denso discreto en $\beta(\mathbb{N})$.*

Para terminar esta sección, mostraremos que $\mathbb{N}^*$ es un conjunto compacto y cerrado, resultado que nos será útil en el capítulo 2 donde mostraremos que $E^*(X, f)$ es un conjunto cerrado de $E(X, f)$ (ver el teorema 2.1.5).

Proposición 1.3.19. *$\mathbb{N}^*$ es un conjunto cerrado y compacto en $\beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Para que no hallan problemas de confusión denotaremos como $\tilde{\mathbb{N}}$ al conjunto de todos los ultrafiltros principales, es decir, $\tilde{\mathbb{N}} = \{\mathcal{F}_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathcal{F}_n$ es el ultrafiltro principal generado por n y consideraremos a $\mathbb{N}$ como el conjunto de números naturales.

Primero mostraremos que $\mathbb{N}^*$ es cerrado. Veremos que $\tilde{\mathbb{N}}$ es un conjunto abierto en $\beta(\mathbb{N})$. En efecto, sea $\mathcal{F}_n \in \tilde{\mathbb{N}}$ y veamos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\hat{A} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}$. Considere $A = \{n\}$ y note que $\mathcal{F}_n \in \hat{A}$. Más aún, tenemos que $\hat{A} = \{\mathcal{F}_n\}$. Así $\hat{A} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}$ y por lo tanto $\tilde{\mathbb{N}}$ es abierto en $\beta(\mathbb{N})$.

Para mostrar la compacidad observe que $\beta(\mathbb{N})$ es Hausdorff y compacto por el lema 1.3.18. Como $\mathbb{N}^*$ es cerrado en $\beta(\mathbb{N})$ por lo anterior, tenemos entonces que $\mathbb{N}^*$ es compacto. □

---

[14] COMFORT, Wistar y NEGREPONTIS, Stylianos. *The theory of ultrafilters*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Heidelberg: Springer Berlin, 1974, págs. 133-153.

2. EL SEMIGRUPO DE ELLIS

En el año 1960, Robert Ellis, en su artículo titulado *A Semigroup associated with a transformation group* (consulte [1]), introdujo la noción del *semigrupo de Ellis*, también conocido como el *Enveloping Semigroup*. Este concepto fue introducido con el propósito de estudiar propiedades algebraicas de los sistemas dinámicos. Desde entonces, el semigrupo de Ellis ha sido una herramienta fundamental en la teoría de la topología dinámica.

Comenzamos este capítulo introduciendo la definición del semigrupo de Ellis, presentando algunas propiedades y ejemplos acerca de este. Seguidamente, mostramos un resultado importante y ejemplos relacionados a los sistemas dinámicos donde el conjunto de periodos posibles es infinito.

2.1. ALGUNAS PROPIEDADES DE $E(X, f)$

Para introducir el semigrupo de Ellis es necesario abordar primero el concepto de sistema dinámico. En este sentido, un *sistema dinámico* es un par (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ es una función continua.

Definición 2.1.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. El *semigrupo de Ellis* se define como

$$E(X, f) = \overline{\{f^n\colon n \in \mathbb{N}\}} \text{ en el espacio producto } X^X.$$

En virtud de la proposición 1.3.10 se pueden caracterizar los elementos del semigrupo de Ellis $E(X, f)$ en términos de las p-iteradas.

Proposición 2.1.2. *Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces*

$$E(X, f) = \{f^p\colon p \in \beta(\mathbb{N})\}.$$

Demostración. Sabemos del teorema 1.3.10 que $E(X, f) = \{p - \lim_{n\to\infty} f^n\colon p \in \beta(\mathbb{N})\}$. Solo nos resta ver que las p-iteradas corresponden a los p-límites de la sucesión $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, sea $p \in \beta(\mathbb{N})$ y U un abierto de X^X tal que $f^p \in U$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es un abierto básico, es decir,

$$U = \{g \in X^X\colon g(x_i) \in U_i \text{ para cada } i = 1, \dots, k\},$$

donde cada $x_i \in X$ y U_i son abiertos de X para cada i. Definamos, $A = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n \in U\}$ y $A_i = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x_i) \in U_i\}$. Por definición de p-iterada, tenemos que $A_i \in p$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in p$. Para finalizar, notemos que

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i \subseteq A$$

Luego, por definición de ultrafiltro, tenemos que $A \in p$. Así, $f^p = p - \lim_{n\to\infty} f^n$. $\square$

Definición 2.1.3. Dado un sistema dinámico (X, f), definiremos $E^*(X, f)$ como

$$E^*(X, f) = E(X, f) \setminus \{f^n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Para evitar casos triviales vamos a suponer que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n \neq f^m$. Bajo la hipótesis anterior tenemos que $E^*(X, f) = \{f^p \colon p \in \mathbb{N}^*\}$. El siguiente lema será útil para mostrar que $E^*(X, f)$ es un conjunto cerrado en X^X.

Lema 2.1.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. La función $\phi \colon \beta(\mathbb{N}) \to E(X, f)$ dada por $\phi(p) = f^p$ es continua sobre $\beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Sean $p \in \beta(\mathbb{N})$ y $\tilde{V}$ un abierto de X^X tal que $f^p \in \tilde{V}$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\tilde{V}$ es un sub-básico de X^X, es decir, $\tilde{V} = \{f^p \colon f^p(x_0) \in V\}$, donde $x_0 \in X$ y V es un abierto de X. Mostraremos que existe $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $p \in \hat{B}$ y $\phi[\hat{B}] \subseteq \tilde{V}$.

Como X es métrico, entonces X es regular. Ahora, dado que $f^p(x_0) \in V$, por la regularidad de X existe W abierto de X, tal que $f^p(x_0) \in W$ y $W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Definamos $B = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x_0) \in W\}$. Es claro que $p \in \hat{B}$ pues $f^p(x_0) \in W$, luego falta ver que $\phi[\hat{B}] \subseteq V$.

Sea $f^q \in \phi[\hat{B}]$, queremos mostrar que $f^q \in V$, es decir, $f^q(x_0) \in V$. Suponga por absurdo que $f^q(x_0) \notin V$, por lo tanto $f^q(x_0) \notin \overline{W}$. Como X es regular entonces existen U_1, U_2 abiertos de X tales que $f^q(x_0) \in U_1$ y $\overline{W} \subseteq U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Defina $W' = V \cap U_2$ y considere los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x_0) \in W'\} \text{ y } A' = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x_0) \in U_1\}.$$

Note que $B \subseteq A$, y debido a que $q \in \hat{B}$ se sigue que $A \in q$. Por otro lado, $A' \in q$ por definición de p-límite. Así, $A \cap A' \in q$, pero $A \cap A' = \emptyset \in q$ lo cual es absurdo. De esta manera concluimos que $f^q(x_0) \in V$ y así $f^q \in V$. Finalmente, tenemos que $\phi[\hat{B}] \subseteq V$. Por lo tanto ϕ es continua en p. $\square$

Ahora procedemos a mostrar que $E^*(X,f)$ es cerrado en $E(X,f)$, en particular, $E^*(X,f)$ es cerrado en X^X.

Teorema 2.1.5. *Dado un sistema dinámico (X,f). El conjunto $E^*(X,f)$ es un conjunto cerrado en el espacio producto X^X.*

Demostración. Por el lema 2.1.4 la función $\phi\colon \beta(\mathbb{N}) \to E(X,f)$ dada por $\phi(p) = f^p$ es continua. Como $\mathbb{N}^*$ es compacto por la proposición 1.3.19 entonces $\phi[\mathbb{N}^*]$ es compacto en $E(X,f)$. Dado que $E(X,f)$ es Hausdorff se tiene que $\phi[\mathbb{N}^*]$ es cerrado en $E(X,f)$. Así, concluimos que $\phi[\mathbb{N}^*] = E^*(X,f)$ es cerrado en $E(X,f)$, luego $E^*(X,f)$ es cerrado en X^X. $\square$

A continuación presentaremos un ejemplo de un sistema dinámico donde ilustraremos el proceso para calcular el semigrupo de Ellis.

Ejemplo 2.1.6. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ y $f\colon X \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ y } 1 \leq n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notemos que para cada $p \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $f^p(x) = 0$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, tenemos que $E(X,f) = \{f^n\colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{0}\}$, donde $\tilde{0}$ es la función constante 0. Así, $E(X,f)$ es una sucesión convergente con su punto límite.

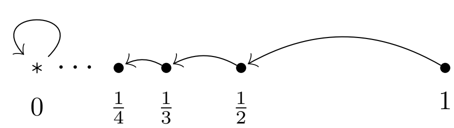

Figura 2.1: $E(X,f) \cong X$ con todas las funciones continuas.

Del siguiente resultado se deduce que $E(X,f)$ es un semigrupo algebraico. La demostración que será presentada la tomamos de [2]. Recordemos que $C(X,X)$ denota el espacio de todas las funciones continuas de X en X.

Teorema 2.1.7. *Sea X un espacio compacto y $A \subseteq C(X,X)$ un semigrupo algebraico con la composición de funciones. Entonces la clausura topológica $\overline{A}$ en X^X (con la topología producto) es un semigrupo algebraico.*

Demostración. Sea A un semigrupo algebraico con la composición de funciones. Es suficiente ver que $\overline{A}$ es cerrado algebraicamente, pues la composición de funciones es asociativa. Para cada $f \in A$ defina

$$T_f = \{g \in X^X \colon fg \in \overline{A}\}.$$

Mostraremos que $\overline{A} \subseteq T_f$. Primero note que $A \subseteq T_f$ pues $A \subseteq C(X,X)$. Veamos ahora que T_f es cerrado. Sea $g \in T_f$, luego por el teorema 1.1.3 existe una red $(g_i)_{i\in I}$ en T_f tal que $g_i \to g$. Como f es continua, entonces $f(g_i(x)) \to f(g(x))$ para todo $x \in X$, por tanto, $fg_i \to fg$. Además, dado que $fg_i \in \overline{A}$ para todo $i \in I$, entonces $fg \in \overline{A}$. Así, $g \in T_f$ y por tanto T_f es cerrado, lo que implica que $\overline{A} \subseteq T_f$. Para cada $h \in \overline{A}$ defina

$$L_h = \{g \in X^X \colon gh \in \overline{A}\}.$$

Afirmamos que $A \subseteq L_h$ y que L_h es cerrado para cada $h \in \overline{A}$. En efecto, sea $f \in A$, ya mostramos que $\overline{A} \subseteq T_f$, por tanto, $h \in T_f$, es decir $fh \in \overline{A}$. Para mostrar que L_h es cerrado, elija $g \in \overline{L_h}$ y sea $(g_i)_{i\in I}$ una red en L_h tal que $g_i \to g$, así, $g_i(h(x)) \to g(h(x))$ para todo $x \in X$. Nuevamente, por el teorema 1.1.3 se tiene que $g_ih \to gh$. Como $(g_ih)_{i\in I}$ es una red en $\overline{A}$ entonces $gh \in \overline{A}$ y así $g \in L_h$. Esto es, $\overline{A} \subseteq L_h$ para todo $h \in \overline{A}$.

Finalmente, probaremos que $\overline{A}$ es cerrado algebraicamente. Sea $f, g \in \overline{A}$, veamos que $fg \in \overline{A}$. Por lo mostrado anteriormente tenemos que $\overline{A} \subseteq L_g$, entonces $f \in L_g$. De esto se tiene que $fg \in \overline{A}$ y finalmente concluimos la prueba del teorema. $\square$

Sabemos que $C(X,X)$, en general, no es cerrado en X^X, por lo cual no siempre se tiene que $\overline{A} \subseteq C(X,X)$. De hecho, el siguiente ejemplo muestra que es posible encontrar funciones discontinuas en el semigrupo de Ellis.

Ejemplo 2.1.8. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ y $f \colon X \to X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \frac{1}{n+1} \text{ y } 1 \le n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Para $p \in \mathbb{N}^*$ y $x > 0$ se tiene que $f^p(x) = 1$, por otro lado $f^p(0) = 0$. Así, se concluye que f^p es discontinua en 0 para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

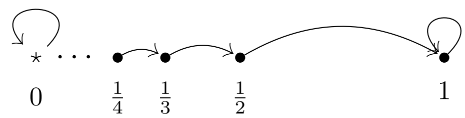

Figura 2.2: $E(X, f)$ con funciones discontinuas.

Definición 2.1.9. Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.

- La *órbita* del punto x es el conjunto $\{f^n(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$ donde $f^0(x) = x$ y será denotada por $\mathcal{O}_f(x)$.
- Se dice que x es un *punto periódico* del sistema dinámico (X, f) si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$ y su *periodo* está dado por $s = \min\{n \in \mathbb{N} \colon f^n(x) = x\}$. El conjunto de todos los periodos será denotado por P_f, es decir,

$$P_f = \{m \in \mathbb{N} \colon \text{existe } x \in X \text{ con periodo } m\}.$$

- Decimos que x es *eventualmente periódico* si su órbita es finita.

No es dif́ícil verificar que un punto x es eventualmente periódico si, y solo si, existe $k \geq 0$ tal que $f^k(x)$ es periódico.

Ahora calcularemos la p-iteración en ciertos puntos de un sistema dinámico, en particular, calcularemos las p-iteradas en puntos periódicos y puntos eventualmente periódicos. Dados $n, l \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ definimos el conjunto $nA + l = \{na + l \colon a \in A\}$.

Lema 2.1.10. *Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.*

(1) *Suponga que x es un punto periódico con periodo n y sea $l < n$. Si $p \in (n\mathbb{N} + l)^*$ entonces $f^p(x) = f^l(x)$.*

(2) *Suponga que x es eventualmente periódico y sea $m \in \mathbb{N}$ el entero más pequeño tal que $f^m(x)$ es un punto periódico. Si n es el periodo de $f^m(x)$ y $p \in (n\mathbb{N} + l)^*$ para algún $l < n$, entonces $f^p(x) = f^l(f^{nj}(x))$ donde $j = \min\{i \colon m \leq ni + l\}$.*

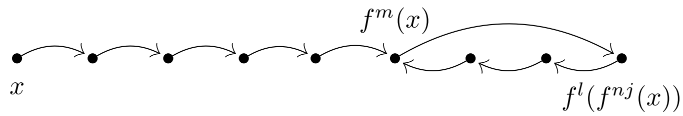

Figura 2.3: Punto eventualmente periódico con $p \in (4\mathbb{N}+2)^*$.

Demostración. Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.

(1) Suponga que x tiene periodo n y que $p \in (n\mathbb{N}+l)^*$ con $l < n$. Sea $V \in \mathcal{N}(f^l(x))$ y defina $A = \{k \in \mathbb{N} \colon f^k(x) \in V\}$. Mostraremos que $A \in p$. Note que basta con ver que $(n\mathbb{N}+l) \subseteq A$ ya que $(n\mathbb{N}+l) \in p$. En efecto, sea $k \in (n\mathbb{N}+l)$ y sea $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $k = nm_k + l$, así

$$f^k(x) = f^l(f^{nm_k}(x)) = f^l(x),$$

puesto que x tiene periodo n. Por tanto, $f^k(x) \in V$. Entonces $(n\mathbb{N}+l) \subseteq A$, así, $A \in p$.

(2) Suponga que n es el periodo de $f^m(x)$ y que $p \in (n\mathbb{N}+l)^*$ donde $l < n$. Sea $V \in \mathcal{N}(f^l(f^{nj}(x)))$ donde $j = \min\{i \colon m \leq ni + l\}$. Sea $A = \{k \in \mathbb{N} \colon f^k(x) \in V\}$, veamos que $A \in p$. Observe que $\{k \in \mathbb{N} \colon k \geq m\} \in p$ puesto que p es un ultrafiltro libre y $\{k \in \mathbb{N} \colon k \geq m\}$ tiene complemento finito. Así, $B = (n\mathbb{N}+l) \cap \{k \in \mathbb{N} \colon k \geq m\} \in p$. Mostraremos que $B \subseteq A$. Sea $k \in B$ y sea $t_k \in \mathbb{N}$ tal que $k = nt_k + l$. Como $k \geq m$, entonces $j \leq t_k$, así, $t_k = j + s$ donde $s \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$f^k(x) = (f^{nt_k+l}(x)) = f^{nj+ns+l}(x) = f^{ns}(f^{nj+l}(x)).$$

Dado que $m \leq nj + l$ y n es el periodo de $f^m(x)$, se sigue que

$$f^k(x) = f^{ns}(f^{nj+l}(x)) = f^{nj+l}(x) = f^l(f^{nj}(x)).$$

Así, $f^k(x) \in V$, lo que implica que $B \subseteq A$. Luego, $A \in p$.

$\square$

2.2. SISTEMAS DINÁMICOS CON INFINITOS PERIODOS

Esta sección la enfocamos en mostrar un resultado acerca de los sistemas dinámicos cuando el conjunto de periodos es infinito. Además, se incluye un ejemplo de un sistema dinámico con infinitos periodos y un contraejemplo que ilustra que el Teorema 2.7 de [1] contiene un error en su enunciado. Antes de enunciar el teorema principal de esta sección, es necesario abordar algunos resultados que son necesarios para su demostración.

Comenzamos por enunciar la versión generalizada del Teorema Chino del Residuo que se encuentra en el libro de Rosen [15].

Lema 2.2.1. *El sistema de ecuaciones*

$$x \equiv r_i \pmod{m_i} \text{ para } i = 1, \ldots, k$$

tiene una solución entera x si, y solo si, $\mathrm{mcd}(m_i, m_j)$ divide a $r_i - r_j$ para todo $i \neq j$.

El siguiente lema es consecuencia del principio del palomar, el cual será útil para probar el lema 2.2.3.

Lema 2.2.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Existe $B \subseteq A$ infinito tal que si $m, m' \in B$ entonces $\mathrm{mcd}(m, m_i) = \mathrm{mcd}(m', m_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$.*

Demostración. Definamos la siguiente relación sobre A. Sean $m, m' \in A$,

$$m \sim m' \iff \mathrm{mcd}(m, m_i) = \mathrm{mcd}(m', m_i) \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

No es difícil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A. Note también que el conjunto de clases de equivalencia es finito (aunque puede ser muy grande), esto se debe a que la cantidad de clases de equivalencia depende de la cantidad de divisores de cada m_i y dicha cantidad sabemos que es finita. Dado que A es infinito, entonces debe existir una clase $[m]_\sim$ con infinitos elementos. Defina $B = [m]_\sim$, así, B claramente cumple con la condiciones del lema. □

A continuación presentamos un resultado necesario para garantizar que el semigrupo de Ellis no tiene puntos aislados cuando P_f es infinito.

Lema 2.2.3. *Sean $k \geq 1$, $m_1, \ldots, m_k$ y $r_1, \ldots, r_k$ enteros positivos con $0 \leq r_i < m_i$. Suponga que el siguiente sistema de ecuaciones E tiene una solución:*

$$x \equiv r_i \pmod{m_i} \text{ para } i = 1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

---

[15] ROSEN, Kenneth. *Elementary Number Theory and its Applications*. Boston: Addison-Wesley, 1993.

Entonces para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe un subconjunto infinito B de A y enteros positivos $s_1 < s_2$ tales que para $i = 1, 2$ el sistema de ecuaciones $E_i = E \cup \{x \equiv s_i \pmod{m}\}$ tiene solución para todo $m \in B$ con $m > s_2$.

Demostración. Por el lema 2.2.2 existe $B \subseteq A$ tal que si $m, m' \in B$, entonces $\mathrm{mcd}(m, m_i) = \mathrm{mcd}(m', m_i)$ para todo $1 \leq 1 \leq k$. Tome $m \in B$ fijo y defina $l_i = \mathrm{mcd}(m, m_i)$. Ahora, considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x \equiv r_i \pmod{l_i} \text{ para } i = 1, \ldots, k. \tag{2.2}$$

Dado que el sistema de ecuaciones (2.1) tiene solución, por el lema 2.2.1, tenemos que $\mathrm{mcd}(m_i, m_j)$ divide a $r_i - r_j$ para todo $i \neq j$. Por la definición de l_i se tiene que $\mathrm{mcd}(l_i, l_j)$ divide a $\mathrm{mcd}(m_i, m_j)$, entonces $\mathrm{mcd}(l_i, l_j)$ divide a $r_i - r_j$. Nuevamente por el lema 2.2.1 se tiene que el sistema de ecuaciones (2.2) tiene solución.

Sean $s_1 < s_2$ dos soluciones del sistema (2.2). Sea $m \in B$ tal que $m > s_2$ y sea $i \in \{1, 2\}$, mostraremos que el sistema E_i tiene solución. Para que el sistema E_i tenga solución es suficiente con ver que $\mathrm{mcd}(m, m_j)$ divide a $s_i - r_j$ para todo $1 \leq j \leq k$. En efecto, dado que s_i es solución del sistema (2.2) se tiene que $s_i \equiv r_j \pmod{l_j}$ para todo j, por tanto, l_j divide a $s_i - r_j$. De este modo, se tiene que $\mathrm{mcd}(m, m_j)$ divide a $s_i - r_j$ pues $l_j = \mathrm{mcd}(m, m_j)$. Así, por el lema 2.2.1 el sistema $E_i = E \cup \{x \equiv s_i \pmod{m}\}$ tiene solución para cada $i = 1, 2$. $\square$

A continuación mostraremos el teorema principal de esta sección que ilustra la interacción de la teoría de números con los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Este resultado corrige el teorema 2.7 de [1] que afirma que cuando P_f es infinito, $E(X, f)$ es homeormorfo al espacio de Cantor. Veremos un contraejemplo más adelante.

Teorema 2.2.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que cada punto tiene órbita finita. Si P_f es infinito entonces $E^*(X, f)$ no tiene puntos aislados. Si además X es numerable, entonces $E^*(X, f)$ es homeomorfo al espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Mostraremos que $E^*(X, f)$ no tiene puntos aislados. Sea $p \in \mathbb{N}^*$ y V un abierto básico de X^X tal que $f^p \in V$ y $V = \{g \in X^X \colon g(x_i) \in V_i \text{ para } i = 1, \ldots, k\}$ donde $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $V_1, \ldots, V_k$ son abiertos de X. Mostraremos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^q \neq f^p$ y $f^q \in V$.

Como la órbita de cada punto de X es finita, entones cada $x \in X$ es eventualmente periódico, en particular cada x_i es eventualmente periódico. Así, existe k_i el mínimo entero positivo tal que $f^{k_i}(x_i)$ es periódico. Sea m_i el periodo de $f^{k_i}(x_i)$ y sea $r_i < m_i$ tal que $p \in (m_i\mathbb{N} + r_i)^*$ para todo $1 \leq i \leq k$. Dado que P_f es infinito, por el lema 2.2.3 existen $s_1 < s_2$ y $m \in P_f$ con $s_2 < m$ tales que el sistema de ecuaciones $x \equiv r_i \pmod{m_i}$ para $i = 1, \ldots, k$ junto con la ecuación $x \equiv s_j \pmod{m}$ tiene solución para $j = 1, 2$. Por tanto, existen $p_j \in \bigcap_{i=1}^{k}(m_i\mathbb{N} + r_i)^* \cap (m\mathbb{N} + s_j)^*$ para $j = 1, 2$.

Sea $y \in X$ tal que y tenga periodo m. Así, por el lema 2.1.10(2), $f^{p_1}(x_i) = f^{p_2}(x_i)$ para cada $1 \leq i \leq k$, por lo tanto $f^{p_1}, f^{p_2} \in V$. Además, por el lema 2.1.10(1) $f^{p_1}(y) = f^{s_1}(y)$ y $f^{p_2}(y) = f^{s_2}(y)$ con $f^{s_1}(y) \neq f^{s_2}(y)$ pues y tiene periodo m. Por ende, $f^{p_1} \neq f^{p_2}$ lo que implica que, $f^p \neq f^{p_1}$ o $f^p \neq f^{p_2}$. En conclusión, $E^*(X, f)$ no tiene puntos aislados.

Ahora probaremos la segunda parte del teorema. Si X es métrico compacto y numerable, entonces X^X es métrico, compacto y cero dimensional por el teorema 1.1.5. Note que $E^*(X, f)$ también es métrico y cero dimensional, pues lo hereda de X^X. Por otro lado, tenemos que $E^*(X, f)$ es cerrado en X^X por el teorema 2.1.5, así, $E^*(X, f)$ es compacto. Además, por lo mostrado anteriormente, $E^*(X, f)$ no tiene puntos aislados. Por lo tanto, $E^*(X, f)$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$ por el teorema 1.1.6. $\square$

El siguiente corolario se sigue de manera inmediata del teorema anterior.

Corolario 2.2.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X numerable tal que cada punto tiene órbita finita. Si P_f es infinito, entonces $E(X, f)$ es no numerable.*

Demostración. Si P_f es infinito, entonces $E^*(X, f)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, en particular, $E^*(X, f)$ es no numerable, así, $E(X, f)$ es no numerable. $\square$

A continuación construiremos un sistema dinámico cuyo conjunto de periodos es infinito.

Ejemplo 2.2.6. Considere $X = \{1 - \frac{1}{n} \colon n \geq 1\} \cup \{1\}$ y la función $f \colon X \to X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{k+1}}{2^{k+1}+1} & \text{si } x = \dfrac{2^k+1}{2^k+2} \text{ para algún } k \geq 0, \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} & \text{si } x = \dfrac{n}{n+1} \text{ donde } 2^k + 1 < n \leq 2^{k+1} \text{ para algún } k \geq 0, \\[2ex] x & \text{si } x = 0, 1. \end{cases}$$

Tenemos que f es continua y además $P_f = \{2^k \colon k \leq 0\} \cup \{0\}$ (una representación gráfica de la función se puede ver en la figura 2.4). Así, por el teorema 2.2.4 tenemos que $E^*(X, f)$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$.

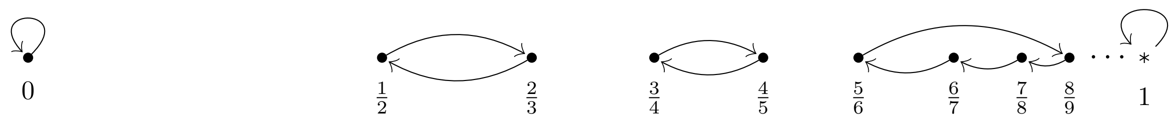

Figura 2.4: $E^*(X,f) \cong 2^{\mathbb{N}}$

El siguiente ejemplo construimos un sistema dinámico (X,f) con P_f infinito tal que $E(X,f)$ tiene puntos aislados. Contrario a lo que dice el teorema 2.7 de [1] que afirma que $E(X,f)$ es homeormorfo al espacio de Cantor. El enunciado correcto es el Teorema 2.2.4.

Ejemplo 2.2.7. Considere $X = X_1 \oplus X_2$ donde,

$$X_1 = \left\{1 - \frac{1}{n} \colon n \geq 1\right\} \cup \{1\} \text{ y } X_2 = \left\{2 - \frac{1}{n} \colon n \geq 2\right\} \cup \{2\}.$$

Sea $h\colon X_1 \to X_1$ la función definida en el ejemplo 2.2.6 y sea $g\colon X_2 \to X_2$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = 2 - \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 2 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Ahora considere $f\colon X \to X$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1, \\ g(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

Es claro que g es una función continua. Por lo tanto, f es continua (vea la figura 2.5). Ahora veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f^n es aislada en $E(X,f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y defina

$$V = \left\{t \in E(X,f) \colon t(3/2) = f^n(3/2)\right\}.$$

Observe que para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $f^p(3/2) = 2$. Por lo tanto, si $f^q \in V$ para algún $q \in \beta(\mathbb{N})$, se debe tener que $q \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{O}_f(3/2)$ es infinita se sigue que $q = n$. Así, f^n es aislada en $E(X,f)$.

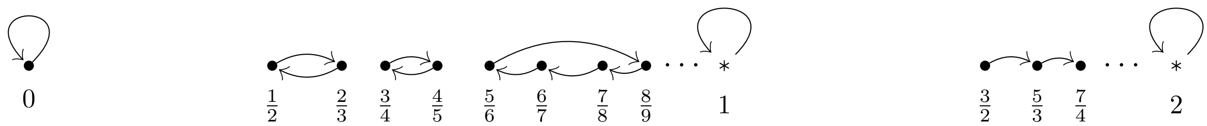

Figura 2.5: El conjunto de las n-iteradas es discreto en $E(X, f)$

En relación al corolario 2.2.5, los autores de [1] se plantean la siguiente pregunta.

Pregunta 2.2.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. ¿Si P_f es finito, entonces $E(X, f)$ es contable?

3. SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITAS DENSAS

Un sistema dinámico con órbita densa es precisamente un sistema dinámico (X, f) donde existe $z \in X$ cuya órbita es densa en X. El estudio de estos sistemas es de gran importancia, ya que, como se evidencia en las proposiciones 1 y 2 del artículo [6], la existencia de una órbita densa es equivalente a que el sistema dinámico sea topológicamente transitivo cuando X es numerable. Esta propiedad de transitividad topológica es una de las condiciones para que un sistema sea caótico en el sentido de Devaney.

Por otro lado, Bobok, en su artículo *Chaos in countable dynamical system* (ver [8]) realiza un estudio sobre el caos distributivo en sistemas dinámicos cuando X es numerable. En particular, demuestra que cualquier sistema dinámico de la forma (ω^2+1, f) no puede ser considerado caótico el sentido del caos distributivo.

En este capítulo presentamos algunos resultados acerca de la cardinalidad del semigrupo de Ellis y propiedades generales cuando trabajamos sobre el espacio $\omega^\alpha+1$ donde $\alpha \geq 1$. En particular, nos enfocamos en el caso cuando $\alpha = 2$, mostrando un resultado que caracteriza al semigrupo de Ellis y ejemplos de órbitas densas sobre ω^2+1. Finalizamos el capítulo estableciendo una conexión entre los sistemas dinámicos sobre ω^2+1 que poseen órbitas densas y las enumeraciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3.1. PROPIEDADES GENERALES

Iniciamos esta sección presentando el siguiente teorema, el cual nos ofrece una caracterización de las p-iteradas a partir de un punto con una órbita densa.

Teorema 3.1.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que existe $w \in X$ con órbita densa. Suponga que f^p es continua para cada $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces $f^p = f^q$ si, y solo si, $f^p(w) = f^q(w)$ para cada $p, q \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathbb{N}^*$ y suponga que $f^p(w) = f^q(w)$. Sea $x \in X$ fijo, veamos que $f^p(x) = f^q(x)$. Primero, suponga que x es un punto aislado. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ (dependiendo de x) tal que $f^n(w) = x$. Por lo tanto $f^p(x) = f^p(f^n(w)) = f^n(f^p(w))$ por el lema 1.3.16. Análogamente tenemos que $f^q(x) = f^q(f^n(w)) = f^n(f^q(w))$. Por hipótesis tenemos que $f^p(w) = f^q(w)$, por lo tanto, $f^p(x) = f^q(x)$.

Ahora suponga que x es un punto límite. Como la órbita de w es densa, existe una sucesión $(f^{m_k}(w))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Dado que f^p es continua, tenemos que

$$f^p(x) = \lim_{k\to\infty} f^p(f^{m_k}(w)) = \lim_{k\to\infty} f^{m_k}(f^p(w)).$$

De la misma forma tenemos que

$$f^q(x) = \lim_{k\to\infty} f^{m_k}(f^p(w)).$$

Dado que $f^q(w) = f^p(w)$, se sigue que $f^p(x) = f^q(x)$. Como x fue arbitrario, entonces se concluye el teorema. $\square$

Corolario 3.1.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X infinito tal que existe $w \in X$ con órbita densa. Si f^p es continua para cada $p \in \mathbb{N}^*$, entonces $|E(X, f)| \leq |X|$.*

Demostración. Consideremos la función $\phi\colon E^*(X, f) \to X$ dada por $\phi(f^p) = f^p(w)$. Del teorema 3.1.1 tenemos que ϕ es inyectiva. Así, $|E^*(X, f)| \leq |X|$. Por lo tanto,

$$|E(X, f)| \leq |E^*(X, f)| + |\{f^n : n \in \mathbb{N}\}| \leq |X|.$$

Y así, concluimos el corolario. $\square$

En el siguiente lema mostraremos algunas propiedades generales de los sistemas dinámicos con órbita densa que se pueden definir sobre el espacio $\omega^\alpha + 1$ donde $\alpha \geq 1$.

Lema 3.1.3. *Sea $(\omega^\alpha + 1, f)$ un sistema dinámico con $\alpha \geq 1$ tal que existe $w \in \omega^\alpha + 1$ con órbita densa. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *$f(y)$ es un punto límite para cada $y \in (\omega^\alpha + 1)'$.*

(2) *w es aislado y su órbita consiste en todos los puntos aislados de $\omega^\alpha + 1$ distintos de w.*

(3) *El rango de f es $(\omega^\alpha + 1) \setminus \{w\}$.*

(4) *Si $x \in (\omega^\alpha + 1)'$, entonces $\emptyset \neq f^{-1}(x) \subseteq (\omega^\alpha + 1)'$.*

(5) *Suponga que $\alpha > 1$. Si $CB(z) = 1$, entonces z es no periódico.*

Demostración. (1) Sea $y \in (\omega^\alpha + 1)'$ y suponga por absurdo que $f(y)$ es un punto aislado de $\omega^\alpha + 1$. Por lo tanto $U = \{z \in \omega^2 + 1 \colon f(z) = f(y)\} = f^{-1}[\{f(y)\}]$ es abierto y además contiene a y. Entonces existe $z < y$ tal que $(z, y+1) \subseteq U$ y como $(z, y+1)$ es infinito, pues y es un punto límite, se tiene que U es infinito. Ahora, como la órbita de w es densa, existen $k < l$ tales que $f^k(w), f^l(w) \in U$, es decir, $f(f^k(w)) = f(f^l(w)) = f(y)$, por lo tanto la órbita de w es finita, lo cual es una contradicción.

(2) Dado que la órbita de w es densa entonces esta debe contener todos los puntos aislados de $\omega^\alpha + 1$. Si $f^k(w)$ fuera un punto límite, entonces por el ítem (1), tenemos que $f^m(w)$ es un punto límite para cada $m \geq k$, por lo tanto solo existen a lo más k puntos aislados, lo cual es absurdo.

(3) Primero note que cada punto aislado, excepto por w, está en el rango de f (por el ítem (2)). Veamos que cada punto límite esta en el rango de f. Suponga por absurdo que existe $y \in (\omega^\alpha + 1)'$ tal que $y \notin f[\omega^\alpha + 1] = A$. Como $\omega^\alpha + 1$ es métrico compacto (ver teorema 1.1.8), entonces se tiene que $\omega^\alpha + 1$ regular. Por lo tanto, existen abiertos U_1, U_2 de $\omega^\alpha + 1$ tales que $A \subseteq U_1$ y $y \in U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como la órbita de w es densa, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(w) \in U_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada punto límite está en el rango de f.

Para terminar, veamos que w no está en el rango de f. Suponga de nuevo por absurdo que existe $y \in X$ tal que $f(y) = w$, entonces y debe ser aislado por el ítem (1). Luego, por el ítem (2) tenemos que $y \in \mathcal{O}_f(w)$, así, w es periódico, lo cual es imposible. Entonces el rango de f es $(\omega^\alpha + 1) \setminus \{w\}$.

(4) Sea $x \in (\omega^\alpha + 1)'$. Por el inciso (3), tenemos que $f^{-1}(x) \neq \emptyset$. Suponga por absurdo que $y \in f^{-1}(x)$ es aislado. Dado que la órbita de w es densa, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(w) = y$ y por lo tanto $f^{n+1}(w) = x$. Por el inciso (1) se tiene que $f^m(w)$ es un punto límite para todo $m \geq n+1$, lo cual contradice que la órbita de w sea densa.

(5) Sea $z \in \omega^\alpha + 1$ tal que $CB(z) = 1$. Por reducción al absurdo, suponga que z tiene periodo l. Para cada $0 \leq j < l$, fijemos conjuntos abierto-cerrados O_j tales que $O_j \cap \mathcal{O}_f(z) = \{f^j(z)\}$ con z el único punto límite en O_0 (pues $CB(z) = 1$). Para cada $0 \leq j < l$ definamos V_j recursivamente como sigue:

- $V_{l-1} = f^{-1}[O_0] \cap O_{l-1}$.

- $V_k = f^{-1}[V_{k+1}] \cap O_k$ para $0 < k < l-1$.
- $V_0 = O_0$.

Por la definición de cada V_j tenemos lo siguiente:

- Para cada $0 \leq j < 1$ el conjunto V_j es abierto-cerrado.
- $V_j \cap V_i = \emptyset$ para todo $j \neq i$.
- $V_j \cap \mathcal{O}_f(z) = \{f^j(z)\}$ para todo $0 \leq j < l$.
- $f[V_i] \subseteq V_{i+1}$ para $0 < j < l-1$.
- $f[V_{l-1}] \subseteq V_0$

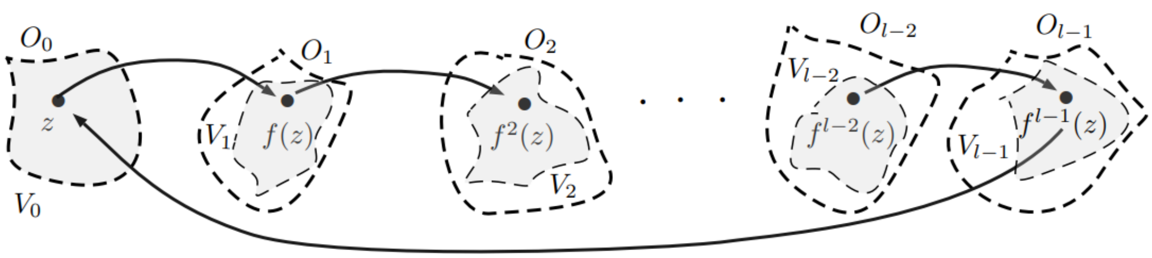

Figura 3.1: Definición de V_n abiertos-cerrados.

Definamos $V = V_1 \cup \cdots \cup V_{l-1}$. Veamos ahora que

$$A = \{n \in \mathbb{N} \colon f^n(w) \in V_0 \text{ y } f^{n+1}(w) \notin V\},$$

es infinito. Suponga por reducción al absurdo que A es finito. Sea m el máximo de A. Como $CB(\omega^\alpha + 1) = \alpha > 1$ entonces existen infinitos puntos con rango de Cantor-Bendixson igual a 1. Por lo tanto, existe $y \in \omega^\alpha + 1$ tal que $CB(y) = 1$. Además, dado que $\mathcal{O}_f(z)$ es finita, podemos suponer que $y \notin \mathcal{O}_f(z)$. Ahora, escoja U abierto-cerrado tal que $y \in U$ con $U \cap V = \emptyset$ y además $f^i(w) \notin U$ para todo $i \leq m$. Con estas condiciones se tiene que $U \cap \mathcal{O}_f(w) = \emptyset$, lo cual es absurdo pues, la órbita de w es densa. Así, debemos tener que A es infinito.

Dado que A es infinito y por la compacidad de V_0, existe $\{n_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito de A tal que $f^{n_k}(w) \to a$, para algún $a \in V_0$. Como que z es el único punto límite en V_0 se tiene que $a = z$. Por lo tanto, $f^{n_k}(w) \in V_0$, pero $f(f^{n_k}(w)) \notin V$ para todo k, lo cual contradice la continuidad de f. En conclusión, tenemos que z no es periódico.

$\square$

En vista de lo demostrado en el teorema 1.2.10, de ahora en adelante denotaremos con d al único punto de $\omega^\alpha + 1$ con rango de Cantor-Bendixson igual a α. El siguiente lema hace parte de los resultados presentados en el artículo [1]. No obstante, proporcionaremos una demostración alternativa de este resultado.

Lema 3.1.4. *Sea* $(\omega^\alpha + 1)$ *un sistema dinámico con* $\alpha \geq 1$ *tal que existe* $w \in \omega^\alpha + 1$ *con órbita densa. Entonces* $f(d) = d$*.*

Demostración. Como w tiene órbita densa, por el lema 3.1.3(4) tenemos que $f^{-1}(x) \subseteq (\omega^\alpha + 1)'$ y además $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in (\omega^\alpha + 1)'$. Luego, por el teorema 1.2.13 existe $z \in f^{-1}(d)$ tal que $CB(z) \geq \alpha$. Dado que α es el rango más alto de $\omega^\alpha + 1$, por el teorema 1.2.10 tenemos que el único punto de rango α es d, luego $z = d$. Así, concluimos que $f(d) = d$. $\square$

Concluiremos esta sección presentando el siguiente teorema, el cual caracteriza al semigrupo de Ellis y a las p-iteradas cuando un sistema dinámico de la forma $(\omega^2 + 1, f)$ tiene una órbita densa.

Teorema 3.1.5. *Sea* $(\omega^2 + 1, f)$ *un sistema dinámico tal que existe* $w \in \omega^2 + 1$ *con una órbita densa. Entonces* f^p *es continua para cada* $p \in \mathbb{N}^*$*, y* $E(\omega^2 + 1, f)$ *es homeomorfo a* $\omega^2 + 1$*.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{N}^*$ fijo y sea $\{d_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todos los puntos límite de $\omega^2 + 1$ con rango de Cantor-Bendixson igual a 1. Entonces tenemos lo siguiente:

(a) $f^p(d) = d$, ya que por el lema 3.1.4 $f(d) = d$, así, se tiene que $f^p(d) = d$.

(b) $\mathcal{O}_f(d_n) \subseteq \{d_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que por el lema 3.1.3 (1), $f(d_n)$ es un punto límite para cada $n \in \mathbb{N}$.

(c) d_n no es un punto periódico para cada $n \in \mathbb{N}$ por el lema 3.1.3 (5).

(d) $f^p(d_n) = d$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, note que basta considerar solo dos casos.

    Caso 1: Suponga que $\mathcal{O}_f(d_n)$ es finita. Entonces d_n es eventualmente periódico. Dado que d_m no es periódico para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $d \in \mathcal{O}_f(d_n)$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(d_n) = d$, así, $f^m(d_n) = d$ para cada $m \geq k$. De lo anterior se sigue que $f^p(d_n) = d$.

Caso 2: Suponga que $\mathcal{O}_f(d_n)$ es infinita. Dado que $\mathcal{O}_f(d_n) \subseteq \{d_m \colon m \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}$, se tiene que $f^m(d_n) \to d$ y por lo tanto $f^p(d_n) = d$.

Con estas consideraciones probaremos que f^p es continua. Sea $y \neq d$ un punto límite y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergiendo a y. Dado que $f^p(y) = d$ por (d), basta con ver que $f^p(y_n) \to d$. Por lo tanto, necesitamos considerar solo dos casos.

Caso 1: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos aislados. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = f^{k_n}(w)$. Así, tenemos que $f^p(y_n) = f^p(f^{k_n}(w)) = f^{k_n}(f^p(w))$ por el lema 1.3.16. Como $p \in \mathbb{N}^*$ tenemos que $f^p(w)$ es un punto límite, entonces $f^p(w) = d_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ o $f^p(w) = d$. En cualquiera de los dos casos se tiene que $f^p(y_n) \to d$.

Caso 2: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos límites. Por (d), tenemos que $f^p(y_n) = d$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $f^p(y_n) \to d$.
Así, concluimos que f^p es continua. Ahora mostraremos que $E(\omega^2 + 1, f)$ es homeomorfo a $\omega^2 + 1$. Sea $\{V_n\} \subseteq \mathcal{P}(\omega^2 + 1)$ una colección de abierto-cerrados disjunta dos a dos tal que d_n es el único punto límite en V_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$B_n = \{i \in \mathbb{N} \colon f^i(w) \in V_n\}.$$

Afirmamos que:

(I) Si $p, q \in B_n^*$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^p = f^q$ y $f^p(w) = d_n$. En efecto, como las p-iteradas son continuas, por el teorema 3.1.1 es suficiente con ver que $f^q(w) = f^p(w)$. Como $B_n \in p$, por la proposición 1.3.17 tenemos que $f^p(w) \in V_n$. Entonces $f^p(w) = d_n$ puesto que d_n es el único punto límite de V_n. Análogamente tenemos que $f^q(w) = d_n$.

(II) Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Si $p \notin B_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^p = \tilde{d}$, donde $\tilde{d}$ es la función constante igual a d. En efecto, sea $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$ y sea $x \in \omega^2 + 1$. Veamos que $f^p(x) = d$. Por los incisos (a) y (b), solo bastaría considerar cuando x es un punto aislado. Si x es un punto aislado, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(w) = x$. Por lo tanto, $f^p(x) = f^p(f^k(x)) = f^k(f^p(w))$. Luego $f^p(w)$ es un punto límite y además es distinto a d_m para cada $m \in \mathbb{N}$, pues $p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$. Así, $f^p(w) = d$ y por lo tanto $f^p(x) = d$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijemos $p_n \in B_n^*$ y fije $q \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$ (que existe por la proposición 1.3.8). Ahora definamos $F\colon \omega^2+1 \to E(X,f)$ como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} f^m & \text{si } x = f^m(w), \\ f^{p_n} & \text{si } x = d_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ f^q & \text{si } x = d. \end{cases}$$

Primero notemos que por las afirmaciones (I) y (II) se sigue que F es inyectiva. Ahora veamos que F es sobreyectiva. Sea $f^p \in E(X,f)$. Entonces se tienen los siguientes casos:

Caso 1: Si $p \in \mathbb{N}$, entonces $p = m$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces $F(f^m(w)) = f^p$.

Caso 2: Si $p \in B_n^*$, por la afirmación (I) se tiene que $F(d_n) = f^{p_n} = f^p$.

Caso 3: Si $p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^*$, por (II) tenemos que $F(d) = f^q = f^p$.

A continuación mostraremos que F es continua. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_i \to x$ en ω^2+1. Supongamos que x es un punto límite y veamos que $F(x_i) \to F(x)$, por lo tanto, solo basta considerar los dos siguientes casos:

(1) Supongamos que $x = d_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Basta con suponer que los x_i son puntos aislados, es decir, $x_i = f^{m_i}(w)$ para algún $m_i \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $f^{m_i} \to f^{p_n}$ puntualmente. En efecto, sea $z \in \omega^2+1$. Primero suponga que z es aislado, entonces $z = f^k(w)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $f^{m_i}(z) = f^{m_i}(f^k(w)) = f^k(x_i)$. Como f^k es continua, se tiene que $f^k(x_i) \to f^k(x) = f^k(d_n)$. Por otro lado, $f^{p_n}(f^k(w)) = f^k(f^{p_n}(w)) = f^k(d_n)$. Así, $f^{m_i}(z) \to f^{p_n}(z)$ cuando z es aislado.

    Resta ver que $f^{m_i}(d_m) \xrightarrow{i} f^{p_n}(d_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{O}_f(d_m) \subseteq \{d_i\colon i \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}$ se sigue que $f^{m_i}(d_m) \to d$. Además tenemos que $f^p(d_m) = d$. Para terminar, note que si $z = d$ claramente se tiene que $f^{m_i}(d) \to f^{p_n}(d)$. Así, $f^{m_i} \to f^{p_n}$ puntualmente y por lo tanto $F(x_i) \to F(x)$.

(2) Supongamos que $x = d$. Primero supongamos que cada x_i son puntos aislados, así, $x_i = f^{m_i}(w)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $F(x_i) = f^{m_i}$ y $F(x) = f^q$. Argumentando de forma análoga al caso (1). Sea $z \in \omega^2+1$. Supongamos que z es aislado, entonces, $z = f^k(w)$. Luego, $f^{m_i}(z) = f^{m_i}(f^k(w)) = f^k(f^{m_i}(w)) = f^k(x_i) \to f^k(x) = f^k(d) = d$. Por otro lado, recuerde que $f^q(z) = d$ para todo z. Por lo tanto $f^{m_i}(z) \to f^q(z)$

cuando z es aislado. Si $z = d_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, análogo al caso (1), se tiene que $f^{m_i}(z) \to f^q(z)$.

Para terminar, solo resta considerar cuando x_i son puntos límites, es decir, $x_i = d_{n_i}$. Entonces $F(x_i) = f^{p_{n_i}}$ y $F(x) = f^q$. Sea $z \in \omega^2 + 1$ y suponga que z es aislado. Entonces $z = f^k(w)$. Así, $f^{p_{n_i}}(z) = f^{p_{n_i}}(f^k(w)) = f^k(f^{p_{n_i}}(w)) = f^k(d_{n_i}) \to f^k(d) = d$. Luego $f^{m_i}(z) \to f^q(z)$. Cuando $z = d_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ el argumento es análogo al ítem (1). En conclusión, $F(x_i) \to F(x)$.

Por todo lo anterior, tenemos que F es biyectiva y continua. Además, observe que F es cerrada. Por lo tanto F es un homeomorfismo. Así, concluimos que ω^2+1 es homeomorfo a $E(\omega^2+1, f)$. $\square$

3.1.1. SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITAS DENSAS SOBRE $\omega^\alpha + 1$ CON $\alpha > 2$

En relación a la construcción de sistemas dinámicos con órbitas densas, los autores de [1] plantean la siguiente pregunta:

Pregunta 3.1.6. ¿Dado un ordinal contable $\alpha > 3$, es posible definir una función continua $f\colon \omega^\alpha + 1 \to \omega^\alpha + 1$ con órbita densa?

En la tesis doctoral de Dolores Pérez [16] se pueden encontrar algunos resultados que guardan relación con la pregunta planteada previamente. No obstante, aún no sabemos si la pregunta 3.1.6 ha sido respondida.

Por otro lado, es natural preguntarse si es posible obtener un resultado similar al teorema 3.1.5 cuando trabajamos sobre el espacio $\omega^3 + 1$. Es decir, dado un sistema dinámico $(\omega^3 + 1, f)$ tal que existe una órbita densa. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se cumple?

- Para cada $p \in \mathbb{N}^*$ se tiene que f^p es continua.
- $E(\omega^3 + 1, f)$ es homeomorfo a $\omega^3 + 1$.

En relación con estas interrogantes, los autores de [1] proporcionan un ejemplo donde construyen un sistema dinámico (ω^3+1, f) con una órbita densa y f^p es discontinua para

[16] PÉREZ, Dolores. “Countable spaces and countable dynamics”. Tesis doct. 2017.

cada $p \in \mathbb{N}^*$. A continuación, presentaremos este ejemplo sin entrar en detalles (para obtener información más detallada puede ver el ejemplo 4.4 de [1]).

Para presentar el ejemplo es conveniente ver el espacio $\omega^3 + 1$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N},\ l \geq i} (D_{i,l} \cup \{d_{i,l}\}) \right) \cup \{d_i \colon i \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}.$$

Donde los puntos aislados serán los puntos que hacen parte de los siguientes conjuntos

$$D_{i,l} = \{d_{i,l}^k \colon k \geq l\},$$

para cada $i, l \in \mathbb{N}$ con $l \geq i$; $(d_{i,l}^k)_{l \leq k}$ es una sucesión estrictamente creciente convergiendo a $d_{i,l}$; los $(d_{i,l})_{l \geq i}$ es una sucesión estrictamente creciente convergiendo a d_i; y $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente convergiendo a d.

Ejemplo 3.1.7. Existe una función continua $f \colon \omega^3 + 1 \to \omega^3 + 1$ tal que

(1) d_i es fijo para cada $i \in \mathbb{N}$.

(2) $\mathcal{O}_f(d_{0,0}^0)$ es densa.

(3) f^p es discontinua para cada $p \in \mathbb{N}^*$.

En relación a la pregunta sobre $\omega^3 + 1$ planteada anteriormente, presentaremos el siguiente ejemplo tomado de [5], donde construyen un sistema dinámico sobre $(\omega^3 + 1, f)$ tal que $|E(\omega^3 + 1, f)| > \aleph_0$, lo que en particular implica que $E(\omega^3 + 1, f)$ no es homeomorfo a $\omega^3 + 1$. Esto muestra que no hay un resultado similar al teorema 3.1.5 cuando trabajamos sobre $\omega^3 + 1$.

Ejemplo 3.1.8. Existe una función $f \colon \omega^3 + 1 \to \omega^3 + 1$ tal que

(1) $\mathcal{O}_f(d_{0,0}^0)$ es densa.

(2) Los puntos de acumulación d_{a_n} tienen periodo $n+2$, donde $a_0 = 0$ y $a_n = a_{n-1} + n + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(3) $E(\omega^3 + 1, f)$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$.

(4) La función f^p es discontinua para cada $p \in \mathbb{N}^*$.

3.2. EJEMPLOS DE SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITA DENSA

En esta sección nos dedicamos a mostrar algunos ejemplos de sistemas dinámicos con órbita densa sobre el espacio $\omega^2 + 1$. Además, presentaremos una conexión entre los sistemas dinámicos con órbitas densas y las enumeraciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Iniciaremos mostrando un ejemplo de sistema dinámico con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$. Es importante destacar que el ejemplo que presentaremos es esencialmente idéntico al ejemplo 4.3 del artículo en [1]. La única variación que introducimos en nuestra versión consiste en una reducción de abstración, ya que optamos por utilizar subconjuntos de $\mathbb{Q}$ en lugar de sucesiones abstractas. Antes de mostrar el ejemplo enunciaremos un lema que nos será útil para construir la función sobre $\omega^2 + 1$ sin una notación tan extensa. Recordemos que $A \subseteq^* B$ si $A \setminus B$ es finito, así, decimos que A y B son casi iguales, y lo denotamos por $A =^* B$, si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.

Lema 3.2.1. *Para cada $m > 0$ definamos*

$$D_m = \left\{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } n > m(m-1)\right\}.$$

Existe una función $h\colon \bigcup_{m>0} D_m \to \bigcup_{m>0} D_m$ tal que:

(1) $h[D_m] =^* D_{m-1}$ *para todo* $m > 1$.

(2) $h[D_1] = \left\{1 - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m(m+1)+1} : m \in \mathbb{N} \text{ con } m > 0\right\}$.

(3) $\mathcal{O}_h(-1) = \bigcup_{m>0} D_m$.

Demostración. Definamos $h\colon \bigcup_{m>0} D_m \to \bigcup_{m>0} D_m$ como se sigue:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n(n+1)+1} & \text{si } x = -\dfrac{1}{n} \text{ para algún } n > 0, \\ -\dfrac{1}{n-1} & \text{si } x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ para algún } n > 2, \\ 1 - \dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{n-l} & \text{si } x = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \text{ con } m > 2 \text{ y } l = 2(m-1) - 1. \end{cases}$$

A continuación presentaremos de manera visual la función h, la cual nos servirá para comprender como se mueve la órbita del -1.

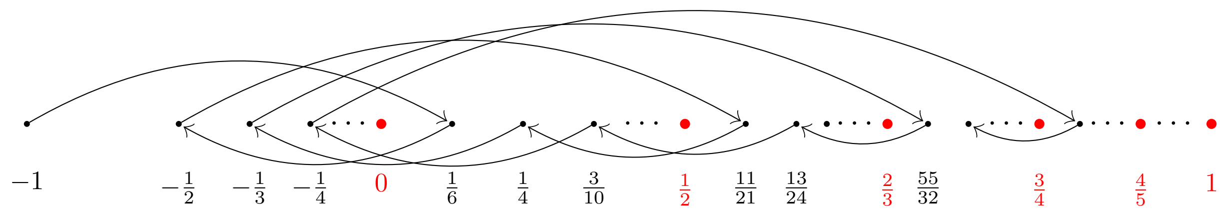

Figura 3.2: Función h con $\mathcal{O}_h(-1) = \bigcup_{m>0} D_m$.

Ahora verificaremos que h cumple con las condiciones del lema.

(1) Suponga que $m > 2$. Veamos que

$$h[D_m] = D_{m-1} \setminus \left\{1 - \frac{1}{m-1} - \frac{1}{(m-1)(m-2)+1}\right\}.$$

En efecto, sea $y \in h[D_m]$. Por lo tanto $y = 1 - \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n-l}$ donde $n > m(m-1)$ y $l = 2(m-1) - 1$. Ahora note que $n - l > (m-1)(m-2) + 1$, así, $y \in D_{m-1}$. Luego $h[D_m] \subseteq D_{m-1}$. Para la otra inclusión tome $y \in D_{m-1}$, por lo tanto $y = 1 - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n}$. Suponga que $n > (m-1)(m-2)+1$. Defina $x = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n+l}$ donde $l = 2(m-1)-1$. Dado que $n > (m-1)(m-2)+1$ se sigue que $n+l > m(m-1)$. Por lo tanto $x \in D_m$. Así, concluimos que $h[D_m] =^* D_{m-1}$.

Si $m = 2$ se puede probar que $h[D_2] = D_1 \setminus \{-1\}$ usando ideas similares al caso anterior.

(2) Dado que $D_1 = \{-\frac{1}{n} : n > 0\}$, la afirmación se sigue de la definición de h.

□

Ejemplo 3.2.2. Definamos

$$X = \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m \cup \left\{1 - \frac{1}{m}\right\}\right) \cup \left\{1\right\}$$

donde para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto D_m se define como

$$D_m = \left\{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } n > m(m-1)\right\}.$$

Notemos que X es homeomorfo a ω^2+1. Veamos que existe una función $f\colon X \to X$ continua tal que el sistema dinámico (X, f) tiene una órbita densa, cada p-iterada de f es continua y $E(X, f)$ es homeomorfo a X.

En efecto, considere h la función del lema 3.2.1 y definamos a f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in D_m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{1}{m-1} & \text{si } x = 1 - \dfrac{1}{m} \text{ con } m > 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, 0. \end{cases}$$

De los ítems (1) y (2) del lema 3.2.1 se sigue que f es continua. Además, por el lema 3.2.1(3) tenemos que la órbita de -1 es densa en X. Así, por el teorema 3.1.5, cada p-iterada de f es continua y además $E(X, f)$ es homeomorfo a X.

En la siguiente figura representamos de forma gráfica la función f. Note que los puntos de color negro son los puntos aislados de ω^2+1, los de color verde los puntos de rango de Cantor-Bendixson igual a 1 y el punto de color azul es el único punto de rango de Cantor-Bendixson igual a 2.

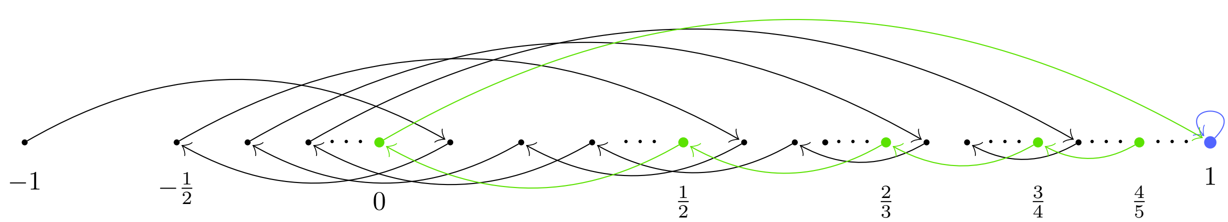

Figura 3.3: (ω^2+1, f) con órbita densa y $E(\omega^2+1, f) \cong \omega^2+1$.

3.2.1. SISTEMAS DINÁMICOS ASOCIADOS A ENUMERACIONES DE $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ En esta sección nos enfocamos en asociarle a los sistemas dinámicos enumeraciones de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, el camino para realizar esto es establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos aislados de ω^2+1 y el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Para ilustrar la correspondencia entre los puntos aislados de ω^2+1 y el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es necesario representar el conjunto ω^2+1 de una manera distinta. Recordemos que una de las formas para construir ω^2+1 es copiar una cantidad numerable de veces hacia la derecha una sucesión estrictamente creciente con su punto límite y luego añadir un punto límite más, el cual será el punto de rango de Cantor-Bendixson igual a 2.

Teniendo en cuenta el proceso de construcción descrito anteriormente, hemos decidido modificarlo de la siguiente manera: en lugar de copiar la sucesión hacia la derecha lo que haremos es copiarla hacia arriba y así obtenemos una representación de ω^2+1 en $\mathbb{R}^2$. Es importante aclarar que la representación que mostraremos es solamente visual.

Para ejemplificar nuestra idea tomaremos la sucesión $(1-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la pegaremos hacia arriba en lugar de hacia la derecha. Una forma para llevar acabo lo anterior sería realizar lo siguiente: Para cada $m>0$ definamos

$$L_m = \left(\left\{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\times\left\{1-\frac{1}{m}\right\}\right)\cup\left\{(1, 1-1/m)\right\}.$$

De este modo obtenemos que ω^2+1 se puede ver como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$\left(\bigcup_{m>0} L_m\right)\cup\{(1,1)\}$$

donde el punto $(1,1)$ correspondería al punto de rango de Cantor-Bendixson igual a 2.
A continuación mostraremos de manera visual (vea la figura 3.4) la nueva nueva construcción de ω^2+1 en $\mathbb{R}^2$, la cual llamaremos *representación por niveles de* ω^2+1. Los puntos negros representan a los puntos aislados de ω^2+1; los puntos de color verde corresponden a los puntos de rango de CantorBendixson igual a 1 y el punto de color azul es el único punto de rango 2.

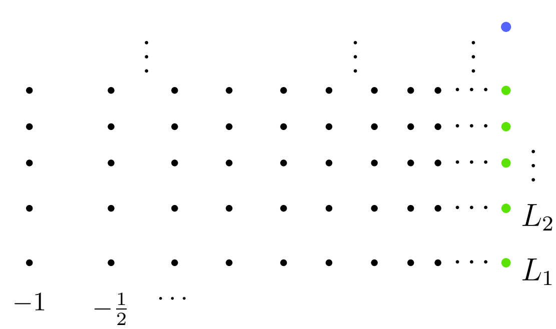

Figura 3.4: ω^2+1 visto por niveles como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

De la figura 3.4 es fácil ver que los puntos aislados se corresponden uno a uno con el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Nuestro siguiente paso es definir la enumeración asociada al sistema dinámico. Para tal propósito será útil definir a ω^2+1 de manera más general como

$$\{d_{n,m} \colon n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{d_k \colon k \in \mathbb{N}\} \cup \{d\},$$

donde se cumple lo siguiente:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(d_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente convergiendo a d_n.

(2) $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente convergiendo a d.

Como podemos ver en el lema 3.1.3, el hecho de que un sistema dinámico (ω^2+1, f) con la condición de que exista $z \in \omega^2+1$ con órbita densa, obliga a que la órbita de z consista de todos los puntos aislados de ω^2+1, por lo tanto tiene sentido definir la enumeración asociada a un sistema dinámico de la siguiente manera.

Definición 3.2.3. Sea (ω^2+1, f) un sistema dinámico tal que la órbita de $d_{0,0}$ es densa. La *enumeración asociada al sistema dinámico* (ω^2+1, f) es la función $h_f \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h_f(n,m) = k, \text{ si } d_{n,m} = f^k(d_{0,0}).$$

Es importante observar que la función h_f es efectivamente una enumeración, lo cual se debe a que la órbita del punto $d_{0,0}$ es densa en ω^2+1. A continuación representaremos de manera visual el sistema dinámico del ejemplo 3.2.2 usando la representación por niveles de ω^2+1, donde podemos apreciar con claridad la enumeración h_f asociada a este.

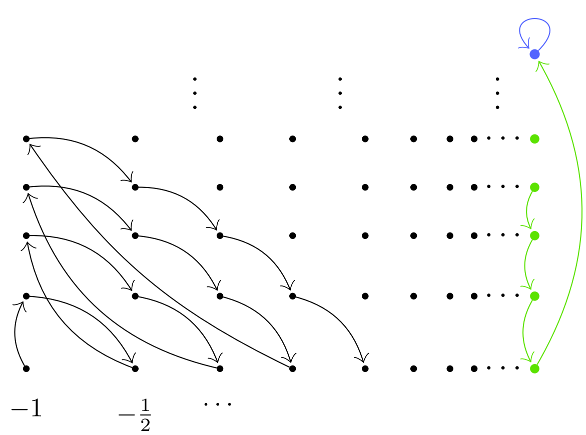

Figura 3.5: Sistema dinámico con órbita densa sobre ω^2+1 visto por niveles.

A partir de la figura 3.5 podemos observar que h_f es una enumeración muy particular, llamada la enumeración por diagonales.

En vista que podemos asociarle a un sistema dinámico con órbita densa una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nos preguntamos como hacer el proceso inverso: Es decir, dada una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como podemos asociarle un sistema dinámico.

Ejemplo 3.2.4. Consideremos la siguiente enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

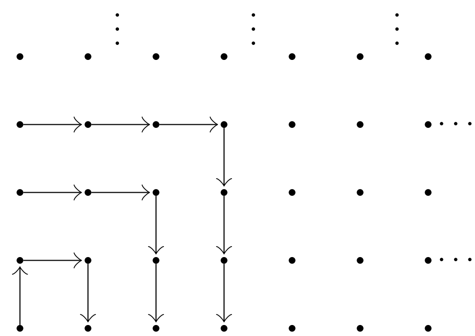

Figura 3.6: Enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Recordemos que una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nos provee una órbita densa para el punto $d_{0,0}$, por tal motivo el paso restante para construir correctamente el sistema dinámico es definir la función f en los puntos límites de tal manera que esta sea continua. En el caso de la enumeración de la figura 3.6 podemos ver que la función continua que se puede asociar al sistema dinámico $(\omega^2 + 1, f)$ esta dada de la siguiente manera (ver las flechas verdes de la figura 3.7).

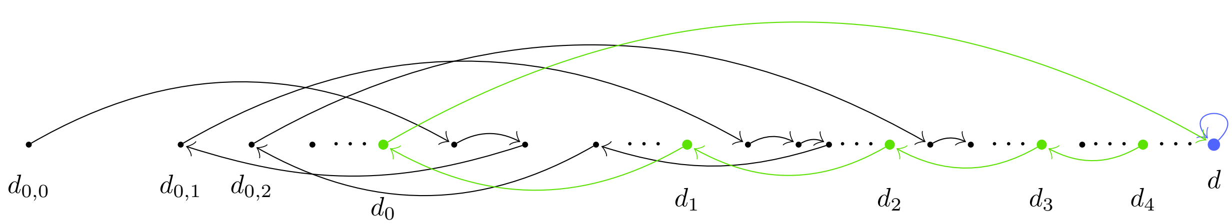

Figura 3.7: Órbita densa sobre $\omega^2 + 1$ a partir de una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Siguiendo con la idea que se usó en el ejemplo 3.2.4 donde a partir de una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le asociamos un sistema dinámico, tiene sentido definir el siguiente conjunto.

Recordemos que $S(X, Y)$ es el conjunto de funciones biyectivas de X en Y.

$$\mathcal{A} = \left\{h \in S(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N})\colon \text{ existe } f \in C(\omega^2 + 1, \omega^2 + 1) \text{ con órbita densa tal que } h_f = h\right\}.$$

Sabemos por el ejemplo 3.2.4 que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Además, construiremos una enumeración $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que no es posible encontrar una función $f\colon \omega^2 + 1 \to \omega^2 + 1$ continua que satisfaga que $h = h_f$. En otras palabras, $\mathcal{A} \neq S(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N})$. Desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos (para más información sobre esta teoría puede consultar [9]), nos planteamos la siguiente pregunta:

Pregunta 3.2.5. ¿Cuál es la complejidad descriptiva de la familia $\mathcal{A}$?

En relación con la pregunta anterior nos planteamos la siguiente interrogante:

Pregunta 3.2.6. ¿Cuál es la complejidad descriptiva del conjunto

$$\{f \in C(\omega^2 + 1, \omega^2 + 1)\colon (\omega^2 + 1, f) \text{ tiene una órbita densa}\}?$$

Ejemplo 3.2.7. Considere la siguiente enumeración h de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

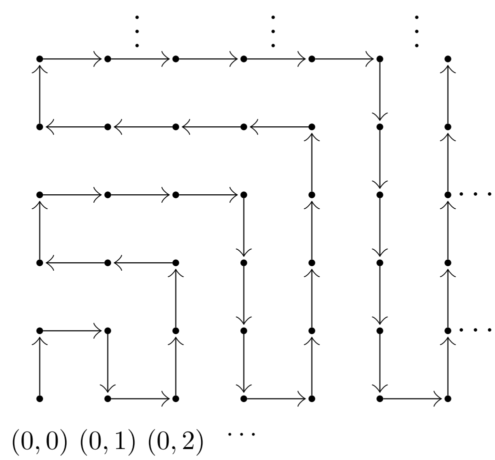

Figura 3.8: Enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sin sistema dinámico asociado.

Veamos que no existe una función $f \in C(\omega^2 + 1)$ tal que $h_f = h$. En realidad mostraremos que cualquier función $f\colon \omega^2 + 1 \to \omega^2 + 1$ con $h_f = h$ es discontinua en d_0.

Sea $f\colon \omega^2 + 1 \to \omega^2 + 1$ una función tal que $h_f = h$. Considere las siguientes subsucesiones de $(d_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$

$$(d_{0,2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } (d_{0,2n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Como $d_{0,m} \to d_0$, entonces tenemos que $d_{0,2n} \to d_0$ y $d_{0,2n+1} \to d_0$. Por otro lado, de la construcción de la enumeración h y de la definición de h_f (recuerde la definición 3.2.3) se debe cumplir que

$$f(d_{0,m}) = \begin{cases} d_{1,m} & \text{si } m \text{ es par,} \\ d_{0,m+1} & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que

$$f(d_{0,2n}) = d_{1,2n} \to d_1 \quad \text{y} \quad f(d_{0,2n+1}) = d_{0,2n+2} \to d_0.$$

De este modo, se sigue que f no puede ser continua en d_0. Como la función f fue arbitraria, concluimos que no existe una función $f \in C(\omega^2 + 1)$ con $h_f = h$. Finalizaremos este ejemplo mostrando la representación gráfica de la órbita densa asociada a la enumeración h.

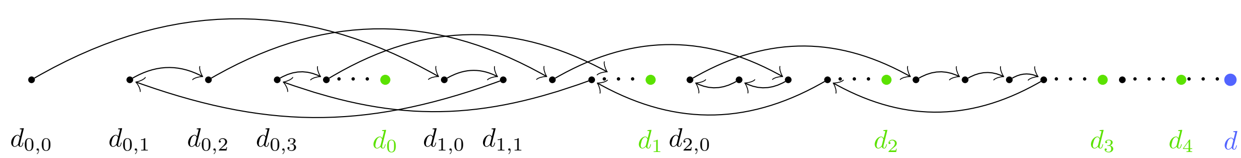

Figura 3.9: Órbita densa que no define un sistema dinámico

Al observar los ejemplos 3.2.2 y 3.2.4, se identifican similitudes en ciertos aspectos, como el comportamiento de sus puntos límites. Por lo tanto, surge la pregunta de si estos dos sistemas pueden considerarse "equivalentes". Con el propósito de abordar este interrogante, presentaremos la siguiente definición (tomada de la pág. 148 de [7]) con el fin de establecer criterios precisos para determinar la equivalencia entre dos sistemas dinámicos.

Definición 3.2.8. Dados los espacios topológicos X_1, X_2 y funciones continuas $f_1\colon X_1 \to X_1$, $f_2\colon X_2 \to X_2$. Diremos que f_1 y f_2 son *topológicamente conjugados* si existe $h\colon X_1 \to X_2$ homeomorfismo tal que $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Tal como nos dicen los autores de [7], si dos funciones $f_1\colon X_1 \to X_1$ y $f_2\colon X_2 \to X_2$ son conjugadas, entonces las propiedades dinámicas de f_1 son esencialmente iguales a las propiedades dinámicas de f_2. Por tal motivo, tiene sentido decir que dos sistemas dinámicos (X_1, f_1) y (X_2, f_2) son *isomorfos* si f_1 es topológicamente conjugado a f_2. A partir de esta definición, formulamos la siguiente pregunta:

Pregunta 3.2.9. ¿Los sistemas dinámicos de los ejemplos 3.2.2 y 3.2.4 son isomorfos?

Bibliografía

AKIN, Ethan. “Ellis Semigroups and Ellis Actions”. En: *Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions*. Boston, MA: Springer US, 1997, págs. 133-153 (vid. págs. 9, 34).

ÁLVAREZ, Borys y MERINO, Andrés. “Countable Ordinal Spaces and Compact Countable Subsets of a Metric Space”. En: *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2019) (vid. pág. 15).

BOBOK, Jozef. “Chaos in countable dynamical system”. En: *Topology and its Applications* 126.1 (2002), págs. 207-216 (vid. págs. 9, 43).

CAMARGO, Javier y VILLAMIZAR, Elder. *Topología general*. Ediciones UIS, 2019 (vid. pág. 13).

COMFORT, Wistar y NEGREPONTIS, Stylianos. *The theory of ultrafilters*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Heidelberg: Springer Berlin, 1974, págs. 133-153 (vid. pág. 31).

DEĢIRMENCI, Nedim y KOÇAK, Şhanin. “Existence of a dense orbit and topological transitivity: When are they equivalent?” En: *Acta Mathematica Hungarica* 99 (2003), págs. 185-187 (vid. págs. 9, 43).

DI PRISCO, Carlos y UZCÁTEGUI, Carlos. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2020 (vid. págs. 10, 14, 15, 58).

ELLIS, Robert. “A Semigroup associated with a transformation group”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 94.2 (1960), págs. 272-281 (vid. págs. 9, 32).

GARCÍA, Salvador. *Ultrafiltros sobre* $\mathbb{N}$ *y Sistemas dinámicos Discretos*. Caracas: Ediciones IVIC, 2010 (vid. págs. 22-24, 29).

GARCÍA, Salvador, RODRÍGUEZ, Yacquelin y UZCÁTEGUI, Carlos. “Cardinality of the Ellis semigroup on compact metric countable spaces”. En: *Semigroup Forum* 97 (2018), 162–176 (vid. págs. 7, 8, 10, 11, 38, 39, 41, 42, 47, 50-52).

– “Iterates of dynamical systems on compact metrizable countable spaces”. En: *Topology and its Applications* 180 (2015), págs. 100-110 (vid. págs. 9, 10).

– “On the continuity of the elements of the Ellis semigroup and other properties”. En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* (2019) (vid. págs. 9, 51).

KELLEY, John. *General Topology*. Graduate Text in Mathematics. Springer US, 1975 (vid. págs. 12, 13).

KING, Jefferson y MÉNDEZ, Hector. *Sistemas dinámicos discretos*. Editorial UNAM, 2014 (vid. págs. 9, 59).

PÉREZ, Dolores. “Countable spaces and countable dynamics”. Tesis doct. 2017 (vid. pág. 50).

QUINTERO, Andrés y UZCÁTEGUI, Carlos. “On the Ellis semigroup of a cascade on a compact metric countable space”. En: *Semigroup Forum* 101 (2020), 435–451 (vid. pág. 9).

ROSEN, Kenneth. *Elementary Number Theory and its Applications*. Boston: Addison-Wesley, 1993 (vid. pág. 38).