

**DESARROLLO - TEÓRICO EXPERIMENTAL DE UN INTERFERÓMETRO A  
DOBLE RED DE DIFRACCIÓN**

**LAYDE MIREYA LOZANO OJEDA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2006**

**DESARROLLO - TEÓRICO EXPERIMENTAL DE UN INTERFERÓMETRO A  
DOBLE RED DE DIFRACCIÓN**

**LAYDE MIREYA LOZANO OJEDA**

**Trabajo de grado para optar al título de  
Físico**

**Director**

**Dr. JAIME ENRIQUE MENESES**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2006**

## RESUMEN

TITULO:

DESARROLLO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UN INTERFERÓMETRO A DOBLE RED DE DIFRACCIÓN\*.

AUTOR(ES):

LOZANO OJEDA Layde Mireya\*\*.

PALABRAS CLAVES:

Interferencia, reconstrucción tridimensional, tratamiento digital de imágenes.

DESCRIPCIÓN:

El interferómetro de doble red de difracción propuesto en este trabajo es un intento para crear un puente entre la Interferometría y la metrología óptica geométrica en el análisis de superficies macroscópicamente rugosas. El instrumento propuesto usa un par de redes de difracción para iluminar un objeto en diferentes ángulos de incidencia. El mismo par de redes recombina los rayos, obteniéndose un modelo de interferencia con una longitud de onda equivalente independiente de la longitud de onda utilizada y variable en función de los parámetros del montaje. La escala de la medida por consiguiente se sitúa entre la Interferometría convencional y las técnicas geométricas tales como la Interferometría Moiré y Triangulación Láser. En el proyecto se analiza teórica y experimentalmente el patrón de interferencia de las redes de difracción iluminadas perpendicularmente y ubicadas paralelas entre sí y perpendiculares a la iluminación. Se recurre a la teoría escalar de la difracción para obtener el patrón de interferencia en el plano de superposición, luego se analiza teórica y experimentalmente el dispositivo interferométrico propuesto con dos redes de difracción para reducir la sensibilidad interferométrica y analizar superficies altamente rugosas.

---

\* Tesis de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Jaime Enrique Meneses, Dr. En Ciencias para Ingenieros.

## ABSTRACT

TITLE:

TEORICAL AND EXPERIMENTAL TREATMENT OF AN INTERFEROMETER WITH TWO DIFFRACTION – GRATING

AUTHOR:

LOZANO OJEDA Layde Mireya.

KEYWORDS:

Interference, 3d Reconstruction, Digital treatment of imagen.

DESCRIPTION:

The interferometer of double diffraction grating of diffraction proposed in this work is an attempt to create a bridge between the Interferometer and the geometric optical metrology in the analysis of macroscopically rough surfaces. The proposed instrument uses. Two diffraction grating to illuminate an object in different angles of incidence. The same pair of gratings both recombines the rays, obtained a model of interference with on equivalent wavelength that is independent of wavelength used and depending of interferometer parameters. The scale of the measurement therefore is placed between the conventional Interferometer and the geometric techniques such as the Interferometer of Moiré and laser triangulation. In the project theoretics - experimentally is analyzed the pattern of interference of parallel the grating of diffraction illuminated perpendicularly and located to each other and perpendiculars to the illumination. One resorts to the theory to climb of the diffraction to obtain the pattern of interference in the superposition plane, soon theoretics is analyzed and experimentally the interferometric device proposed with two grating of diffraction to reduce interferometrica sensitivity and to analyze highly rough surfaces.

---

\* Undergrade Tesis.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Jaime Enrique Meneses, Dr. en Ciencias para Ingenieros.

## **DEDICATORIA**

A Dios y a mis PADRES MARIO LOZANO Y FANNY OJEDA, por haberme permitido culminar mis estudios universitarios.

Layde Mireya Lozano

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis PADRES MARIO LOZANO Y FANNY OJEDA, a mis hermanos y mi novio, por la confianza, comprensión y apoyo en todo este tiempo de realización de mis estudios

A la UIS y la ESCUELA DE FÍSICA por la formación académica.

A mis compañeros del GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES (GOTS) y a los DOCENTES que lo conforman, por sus críticas constructivas y comentarios que fueron de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo

A mi FAMILIA.

Al Dr. JAIME ENRIQUE MENESES, por su incondicional apoyo.

A todas las personas que de una u otra manera contribuyeron a la realización de éste trabajo, en especial a mi compañero de estudio William Gutiérrez

Layde Mireya Lozano Ojeda

## TABLA DE CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
LISTA DE FIGURAS.....	8
LISTA DE TABLAS.....	10
INTRODUCCIÓN.....	11
I. I. CONCEPTOS BÁSICOS PRELIMINARES .....	13
I.1 PRINCIPIO DE HUYGENS – FRESNEL.....	14
I.2 APROXIMACIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER.....	19
II. DIFRACCIÓN DE FRESNEL DE DOS REDES DE DIFRACCIÓN.....	22
II.1 ANÁLISIS TEÓRICO.....	22
II.2 ANÁLISIS EXPERIMENTAL.....	35
III. INTERFERÓMETRO A DOBLE RED DE DIFRACCIÓN.....	41
III.1 ANÁLISIS TEÓRICO.....	42
III.2 ANÁLISIS EXPERIMENTAL.....	52
IV. CONCLUSIONES.....	56
V. PERSPECTIVAS.....	58
REFERENCIAS .....	59

## LISTA DE FIGURAS

		<b>Pág.</b>
<b>Figura 1</b>	Superficie de integración.....	14
<b>Figura 2</b>	Formulación de Difracción de Kirchhoff por una pantalla plana.....	16
<b>Figura 3</b>	Formulación de difracción Rayleigh-Sommerfeld en una Pantalla plana.....	17
<b>Figura 4</b>	Geometría de la difracción.....	18
<b>Figura 5</b>	Interferómetro a doble red de difracción.....	22
<b>Figura 6</b>	Función de transmitancia de la red de difracción.....	23
<b>Figura 7</b>	Nomenclatura usada para definir las distribuciones de campo mostradas en la ecuación (22).....	25
<b>Figura 8</b>	Interferómetro a dos redes de difracción escogiendo los Órdenes $k, k', m, m'$ .....	28
<b>Figura 9</b>	9(a) Interferómetro con dos redes de densidades iguales.....	30
	9(b) Órdenes que producen interferencia visible.....	31
	9(c) combinación de órdenes que no generan franjas visibles.....	32
<b>Figura 10</b>	Combinación de diferentes órdenes con densidades diferentes en las redes.....	33
<b>Figura 11</b>	Interferómetro iluminado con diferentes ángulos de incidencia Para el análisis de superficies con rugosidades considerables.....	35
<b>Figura 12</b>	Franjas adquiridas en el experimento.....	38
<b>Figura 13</b>	Imágenes del sistema de franjas independiente de la longitud De onda.....	39
<b>Figura 14</b>	Interferómetro a dos redes de difracción.....	42
<b>Figura 15</b>	Figura equivalente a la figura 14.....	43
<b>Figura 16</b>	Interferómetro a doble red de difracción escogiendo ciertos ordenes de interferencia para redes de igual densidad.....	48

<b>Figura 17</b>	Grafica de longitud de onda sintética $dz$ en $\mu\text{m}$ contra el ángulo de incidencia $\theta$ en grados.....	51
<b>Figura 18</b>	Montaje experimental del Interferómetro a doble red de difracción.	52
<b>Figura 19</b>	Interferogramas del interferómetro a doble red de difracción.....	53
<b>Figura 20</b>	Imagen de referencia del sistema de franjas de el espejo al rotar la primera red un valor de $\alpha=11^\circ$ .....	54
<b>Figura 21</b>	Sistemas de franjas deformadas debido a el La topografía del objeto .....	55

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1</b> Datos tomados en el experimento del interferómetro a doble red de difracción.....	37
<b>Tabla 2</b> Datos del experimento del interferómetro iluminado con luz blanca.....	39

## INTRODUCCIÓN

Hace más de 50 años la óptica ha jugado un importante papel en diferentes ámbitos científicos y tecnológicos, desde la ingeniería a la publicidad. Uno de los fenómenos luminosos más importantes en la óptica es la interferencia, la cual tiene un variado campo de aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería. Se destacan principalmente técnicas de diagnósticos no destructivos: estudio y control de superficies mecánicas y térmicas de materiales, estudio de deformaciones pequeñas de objetos, etc.

Utilizando el fenómeno de interferencia se han fabricado instrumentos de medida llamados interferómetros, que se encargan de efectuar medidas de muy alta precisión utilizando la longitud de onda como escala de medida. Esta rama de la óptica se le conoce como metrología óptica interferométrica. Existen dos procedimientos para lograr el fenómeno de interferencia: el primero por división de amplitud y al segundo por división del frente de onda. Dos de los interferómetros más comunes son: el sistema de dos rendijas de Young, que produce interferencia por frente de onda y el Interferómetro de Michelson, que produce interferencia por división de amplitud. Esta propuesta de investigación se basa en la implementación de un interferómetro, utilizando el segundo procedimiento: división de frente de onda a partir de dos redes de difracción.

Análisis teóricos preliminares indican que dos redes de difracción paralelas entre sí y con sus líneas paralelas permiten separar y superponer dos frentes de onda planos. El planteamiento de la investigación consiste en establecer qué condiciones se deben imponer a las densidades de las redes para obtener la

interferencia de órdenes de difracción específicos y de igual manera, cómo adaptar el sistema de interferencia en la medición de microtopografía de objetos.

Una de las aplicaciones de la Metrología Óptica Interferométrica consiste en el análisis de rugosidades de superficies. Si un espejo de un interferómetro de Michelson es reemplazado por una superficie rugosa, las franjas del interferograma codifican la topografía a intervalos de  $\lambda/2$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda utilizada. Para el caso del análisis de superficies altamente rugosas se generan interferogramas con muchas franjas, haciéndose difícil su análisis. De esta manera es necesario implementar técnicas de medida que reduzcan la sensibilidad del interferómetro. El interferómetro a doble red de difracción permite incrementar la longitud de onda efectiva a valores que dependen de los ángulos de iluminación y observación y de las densidades de la redes, principalmente.

El presente manuscrito se analiza teórica y experimentalmente el patrón de interferencia de las redes de difracción iluminadas perpendicularmente y ubicadas paralelas entre sí y perpendiculares a la iluminación. Se recurre a la teoría escalar de la difracción para obtener el patrón de interferencia en el plano de superposición, luego se analiza teórica y experimentalmente el dispositivo interferométrico propuesto con dos redes de difracción para reducir la sensibilidad interferométrica y analizar superficies altamente rugosas.

## **I. CONCEPTOS BÁSICOS PRELIMINARES**

### **INTRODUCCIÓN**

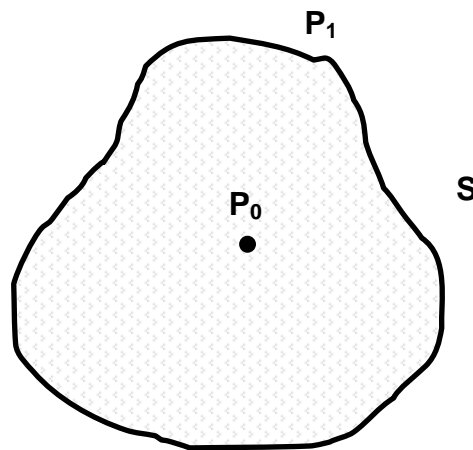
En el presente capítulo se definirá la estructura matemática utilizada para analizar teóricamente el fenómeno de interferencia de dos redes de difracción. No se pretende hacer un análisis detallado de la teoría escalar de la difracción, pero si se debe hacer un breve resumen sobre los fundamentos básicos de la difracción que se hacen posteriormente necesarios para la interpretación del experimento propuesto en el proyecto.

## I.1 Principio de Huygens – Fresnel.

El termino difracción es definido por Sommerfeld [1], como “cualquier desviación de los rayos de luz de su trayectoria rectilínea que no puede ser interpretada como reflexión y refracción”. La difracción es causada por el confinamiento de la extensión lateral de la onda, y es fuertemente apreciable cuando el confinamiento es comparable en tamaño con la longitud de onda de la radiación usada.

Hay una historia fascinante entorno a la interpretación científica de los fenómenos que involucran efectos difractivos. Goodman [2], presenta un desarrollo histórico de la evolución de los conceptos que sirven de soporte para desarrollar la formulación matemática de la difracción de Fraunhofer y Fresnel.

No se pretende desarrollar en detalle la teoría escalar de la difracción [2,3], pero si se deben mostrar los fundamentos matemáticos de la difracción, que serán utilizados posteriormente. El desarrollo matemático de la teoría escalar de la difracción parte de la necesidad de calcular la perturbación compleja  $U$  en un punto de observación  $P_0$  a partir del valor de la perturbación  $U_1$  y su derivada normal en una superficie cerrada, que encierra  $P_0$  como se observa en la figura 1.



**Figura 1**  
Superficie de integración

Según los aportes realizados por Kirchhoff, este problema se puede resolver a partir del teorema de Green y usando como función auxiliar una onda esférica de amplitud unitaria expandiéndose de  $P_0$  definida como:

$$G(p_1) = \frac{e^{\frac{i2\pi r_{01}}{\lambda}}}{r_{01}} \quad (1)$$

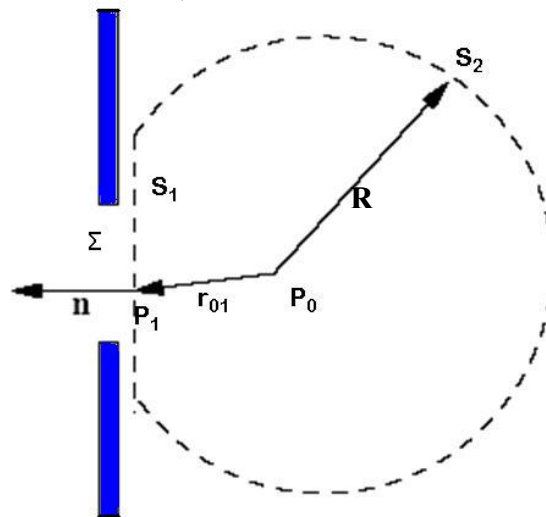
Siendo  $r_{01}$  la magnitud del vector  $\vec{r}_{01}$  que apunta  $P_1$  desde  $P_0$  donde  $P_1$  es un punto sobre la superficie  $S$ .

Usando el teorema de Green, la ecuación de Helmholtz y asumiendo que las derivadas parciales hasta segundo, orden inclusive de  $U$  y  $G$ , son continuas en el volumen que encierra [5], se puede demostrar que para la figura 1 la perturbación compleja en  $P_0$  se reduce a:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi_s} \iint_s \left[ \frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2)$$

Este resultado es conocido como el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff y juega un papel importante en el desarrollo de la teoría escalar de la difracción [2].

La situación matemática presentada en la figura 1 se concretiza experimentalmente al plantear el problema de la difracción causada por una abertura en una pantalla opaca infinita. Como se muestra en la figura 2, una onda incide por la izquierda sobre la pantalla y se pretende calcular el valor del campo en  $P_0$  después de la abertura. Al aplicar el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff, usando como superficie de integración  $s_1 + s_2$ , y haciendo que  $R \rightarrow \infty$ , se obtiene:



**Figura 2**  
Formulación de la Difracción de Kirchhoff por una pantalla plana

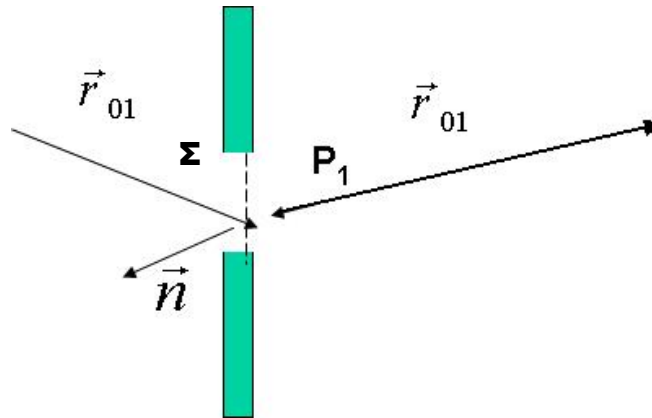
$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_1} \left( \frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

Donde se integra únicamente en el plano  $S_1$ , posterior a la pantalla. Como  $R \rightarrow \infty$  la integral sobre  $S_2$  tiende a cero si el campo incidente sufre una atenuación como una onda esférica divergente y la perturbación  $U$  decae rápidamente como una onda esférica divergente (condición de radiación de Sommerfeld [1]). Varias

alternativas se presentan para simplificar la integral sobre  $S_1$  e integrar únicamente en la superficie  $\Sigma$  de la abertura. La primera solución, de Rayleigh-Sommerfeld consiste en utilizar la función de Green:

$$G_{-}(P_1) = \frac{e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{\frac{i2\pi}{\lambda}\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}} \quad (4)$$

Donde las distancias están definidas en la figura 3. El punto  $\tilde{P}_0$  y  $P_0$  son simétricos con respecto al plano de la pantalla. De esta manera  $G_{-}$  se anula en los puntos de la pantalla.



**Figura 3**  
Formulación de la difracción  
Rayleigh-Sommerfeld en una pantalla plana

Utilizando esta función de Green y asumiendo que únicamente  $U=0$  para los puntos de  $S_1$  fuera de la abertura, la integral se reduce a:

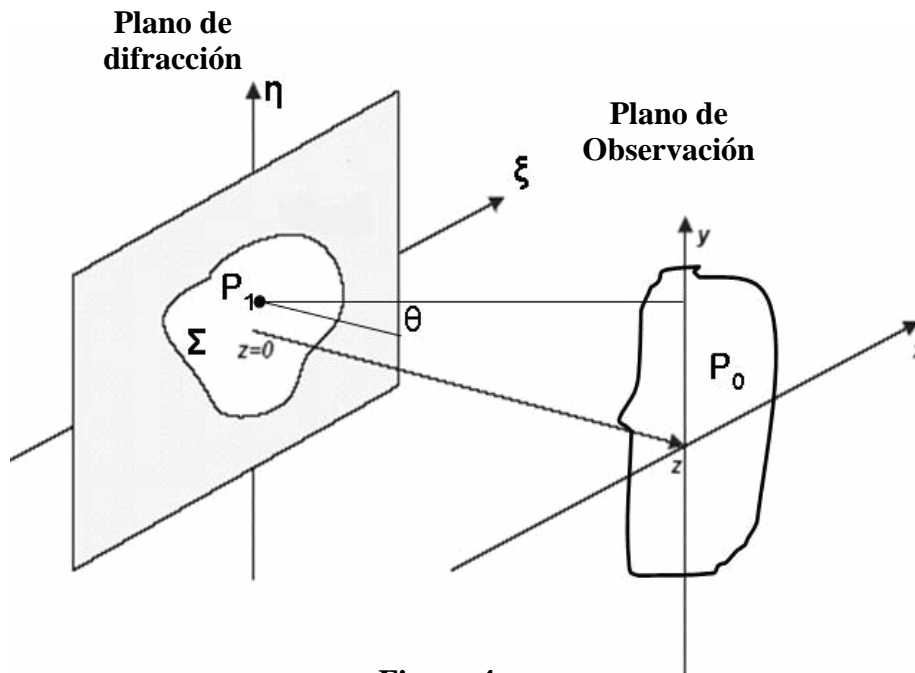
$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (5)$$

Esta integral es conocida como fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld. La anterior ecuación de difracción puede ser escrita en un sistema coordenado rectangular, según la figura 4:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint U(\xi, \eta) \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (6)$$

Donde:

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z^2}} \quad (7)$$



**Figura 4**  
Geometría de la Difracción

## I.2 Aproximación de Fresnel y Fraunhofer.

Dos aproximaciones permiten simplificar la integral (6). Por un lado, la ecuación (7) puede ser desarrollada en una expansión binomial, según:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (8)$$

Siendo:

$$b = \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{z^2} \quad (9)$$

Asumiendo que  $b \ll 1$  y usando hasta el término lineal con  $b$ , la ecuación (6) puede ser simplificada en:

$$U(x, y) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int U(\xi, \eta) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta \quad (10)$$

Esta ecuación es conocida como aproximación de Fresnel. Cuando esta aproximación es válida, se dice que el observador está en la región de difracción de Fresnel o equivalentemente en la región de campo cercano a la abertura.

La ecuación (10) puede ser escrita como una integral de convolución:

$$U(x, y) = \iint U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (11)$$

Donde la respuesta impulsional de la difracción de Fresnel [2], sería:

$$h(x, y) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \quad (12)$$

Sabiendo que:

$$TF \left\{ e^{-\pi(a^2x^2+b^2y^2)} \right\} = \frac{I}{|ab|} e^{-\pi\left(\frac{f_x^2}{a^2} + \frac{f_y^2}{b^2}\right)} \quad (13)$$

La función de transferencia de difracción de Fresnel sería:

$$H(f_x, f_y) = TF\{h(x, y)\} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)} \quad (14)$$

Otra aproximación mucho más estricta consiste en asumir que:

$$z \gg \frac{\pi(\xi^2 + \eta^2) \max}{\lambda} \quad (15)$$

Donde,  $(\xi^2 + \eta^2)_{\max}$  corresponde al cuadrado de la dimensión máxima de la abertura. En este caso la ecuación (10) se reduce a:

$$U(x, y) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta \quad (16)$$

Que corresponde a la Transformada de Fourier de U en la abertura usando como frecuencias espaciales  $F_x = x/\lambda z$  y  $F_y = y/\lambda z$ . Esta aproximación es conocida como aproximación de Fraunhofer.

Revisando en detalle la aproximación de Fresnel, una condición suficiente para utilizar esta aproximación consiste en asumir que el término  $b^2/8$  del desarrollo

exponencial de la raíz cuadrada, introduce en cambio en la fase menor que 1 radián. Esta hipótesis fija la siguiente condición en la distancia:

$$z^2 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]_{\max}^2 \quad (17)$$

Para el caso de una abertura de 1 cm de diámetro, una región de observación circular de 1 cm y una longitud de onda de 0,5  $\mu\text{m}$  esta condición indica que  $z \gg 25$  cm para que la aproximación de Fresnel sea válida.

Para el caso del mismo objeto usando la aproximación de Fraunhofer, la ecuación (12), establece que  $z \gg 314$  m. para introducir un error inferior a 1 radián en la fase  $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r_{0i}}$ .

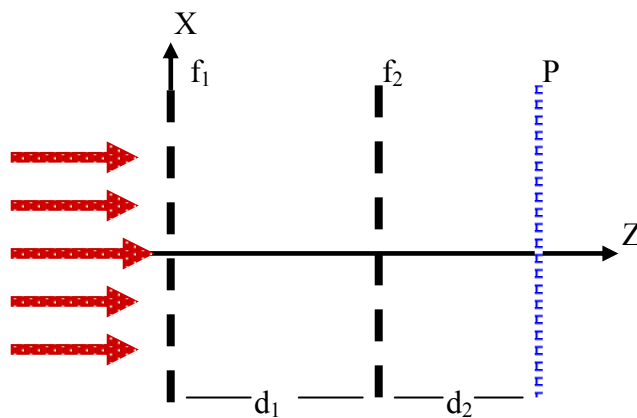
## II. DIFRACCIÓN DE FRESNEL DE DOS REDES PARALELAS ILUMINADAS PERPENDICULARMENTE.

### II.1 Análisis Teórico

Usando la estructura matemática definida anteriormente, se pretende analizar la fundamentación teórica utilizada en la comprensión de un interferómetro a doble red de difracción.

La figura 5 muestra el diagrama básico del Interferómetro a doble red de difracción. El interferómetro consta de dos redes de difracción separadas una distancia  $d_1$  y con sus líneas paralelas, de densidades  $f_1$  y  $f_2$  líneas pares por mm (lpmm).

En esta sección se analizará la distribución en intensidad de la Difracción de fresnel obtenida en un plano P a una distancia  $d_2$  de la segunda red [9]. La conclusión obtenida de este análisis teórico permitirá posteriormente definir las condiciones experimentales necesarias para construir un interferómetro que permita codificar la información topográfica de una muestra ubicada en el plano P.



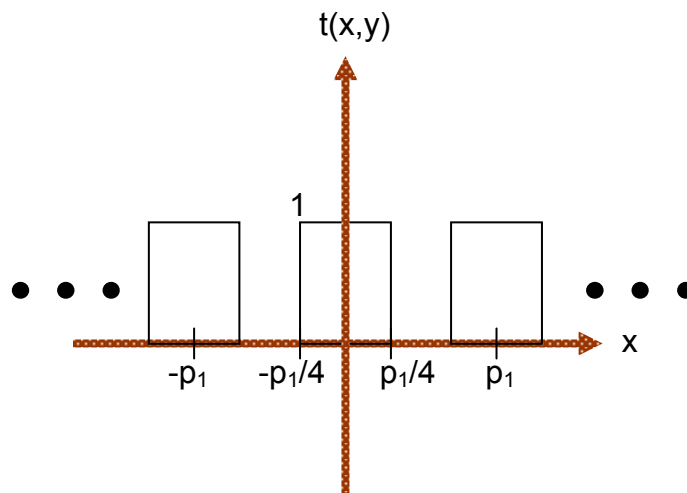
**Figura 5**  
Interferómetro a doble red de difracción

La función de transmitancia de cada red se asume de la siguiente forma:

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Rect}\left(\frac{x - nf_1}{p_1/2}\right) \quad (18)$$

Donde Rect (x) es la función rectángulo [2,6]. Usando la descomposición en series de Fourier, la función de transmitancia de una red de difracción se puede escribir como:

$$t(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_1 x) \quad (19)$$



**Figura 6**  
Función de transmitancia de la red de difracción

Donde

$$A_k = \frac{\text{sen}(k\pi/2)}{\pi k} \quad (20)$$

Sabiendo que la función de transmitancia  $t(x,y)$  se define como

$$t(x, y) = \frac{U_0^D(x, y)}{U_0^A(x, y)} \quad (21)$$

Donde  $U_0^D(x, y)$  y  $U_0^A(x, y)$ , son las distribuciones de campo justo después y justo antes de la transparente como se muestra en la figura 7. La Transformada de Fourier de  $U_0^D(x, y)$  al utilizar una onda incidente de amplitud unitaria,  $U_0^A(x, y)=1$  sería:

$$TF \{ U_0^D(x, y) \} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{2} [ \delta(f_x - kf_x, f_y) + \delta(f_x + kf_x, f_y) ] \quad (22)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

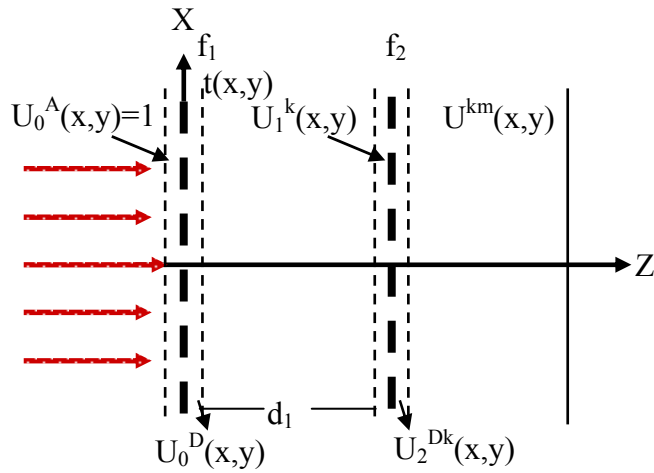
$$TF \{ U_0^D(x, y) \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{2} \delta(f_x - kf_x, f_y) \quad (23)$$

Seleccionando el orden de difracción  $k$ , que corresponde al término  $k$  de la serie de Fourier, se obtiene:

$$TF \{ U_0^{Dk}(x, y) \} = \frac{A_k}{2} \delta(f_x - kf_x, f_y) \quad (24)$$

Se pretende calcular la distribución de campo  $U_1(x, y)$  a una distancia  $z=d_1$  usando la difracción de Fresnel, ver figura 7. A partir de la integral de convolución de la ecuación (11) y de la función de transferencia de Fresnel, la distribución de campo  $U_1(x, y)$ , se puede describir como:

$$U_1(x, y) = TF^{-1} \{ H(f_x, f_y) TF \{ U_0^D(x, y) \} \} \quad (25)$$



**Figura 7**

Nomenclatura usada para definir las distribuciones de campo mostradas en la ecuación (22).

Donde  $TF \{ \}$  Y  $TF^{-1} \{ \}$  son la Transformada de Fourier y la Transformada de Fourier inversa, respectivamente.

Reemplazando los valores y según la ecuación (19); la  $TF \{ U_1(x,y) \}$  del orden  $k$  seleccionado será:

$$H(f_x, f_y) \cdot TF \{ U_0^{Dk}(x, y) \} = \frac{A_k}{2} \delta(f_x - kf_1, f_y) e^{-i\pi\lambda d_1 (kf_1)^2} e^{\frac{i2\pi d_1}{\lambda}} \quad (26)$$

Haciendo la Transformada de Fourier inversa se obtiene la distribución de campo para el orden de difracción  $k$  a  $z=d_1$ , justo antes de la segunda red de difracción:

$$U_1^k(x, y) = \frac{A_k}{2} e^{i2\pi kf_1 x} e^{-i\pi\lambda d_1 (kf_1)^2} e^{\frac{i2\pi d_1}{\lambda}} \quad (27)$$

De igual manera la función de transmitancia de la segunda red se puede escribir como:

$$t(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(2\pi m f_2 x) \quad (28)$$

Donde:

$$B_m = \frac{\text{sen}(m\pi/2)}{m\pi} \quad (29)$$

A partir de la definición básica de la función de transmitancia  $t(x,y)$  y usando la ecuación (27), como la distribución de campo justo antes de la segunda red, la distribución del campo justo después de la segunda red sería:

$$U_2^{Dk}(x, y) = \frac{A_k}{2} e^{i2\pi k f_1 x} e^{-i\pi \lambda d_1 (k f_1)^2} e^{\frac{i2\pi d_1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(2\pi m f_2 x)} \quad (30)$$

De igual manera, seleccionando el orden de difracción  $m$  de la segunda red, la transformada de Fourier de la distribución de campo justo después de la segunda red será:

$$TF \{ U_2^{Dkm}(x, y) \} = \frac{A_k B_m}{4} e^{-i\pi \lambda d_1 (k f_1)^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda} d_1} \delta(f_x - (k f_1 + m f_2), f_y) \quad (31)$$

Usando la integral de convolución, la distribución del campo en  $z=d_2$  será:

$$U^{km}(x, y) = TF^{-1} \{ H(f_x, f_y) . TF \{ U_2^{Dkm}(x, y) \} \} \quad (32)$$

Donde

$$(33)$$

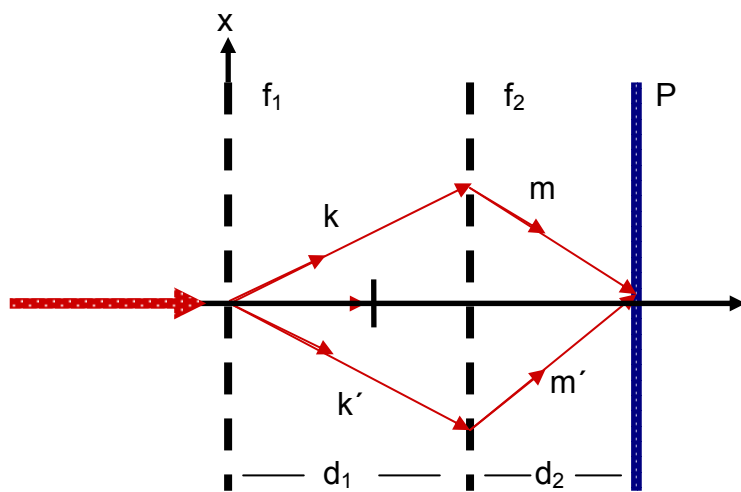
$$H(f_x, f_y) = e^{-i\pi\lambda d_2(f_x^2 + f_y^2)} e^{\frac{i2\pi d_2}{\lambda}}$$

Reemplazando los valores de las distribuciones de campo y realizando la Transformada de Fourier inversa se obtiene la distribución del campo en amplitud para el orden m a  $z=d_2$  proveniente del orden k de la primera red:

$$U^{km}(x, y) = \frac{A_k B_m}{4} e^{i2\pi(kf_1 + mf_2)x} e^{-i\pi\lambda d_1(kf_1)^2} e^{-i\pi\lambda d_2(kf_1 + mf_2)^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)} \quad (34)$$

Esta ecuación indica que sobre el plano P la distribución del campo posee una variación lineal de fase, con términos de fase cuadráticos constantes que dependen de los órdenes escogidos y de las frecuencias de las redes, principalmente. La superposición de dos amplitudes complejas de campo con variación lineal de fase puede generar un patrón de interferencia.

Con el fin de obtener un patrón de interferencia en el plano P, es necesario seleccionar de la primera red dos órdenes de difracción k y k' que a su vez producen dos órdenes de difracción m y m', respectivamente, que interfieren en el plano P. La figura 8 muestra un diagrama de rayos necesario para obtener un patrón de interferencia en el plano P.



**Figura 8**  
Interferómetro a dos redes de difracción  
escogiendo los órdenes  $k, k', m, m'$ .

Realizando un análisis similar para los órdenes  $k'$  y  $m'$  se obtiene una distribución de amplitud compleja similar a la ecuación (34),  $U^{k'm'}(x,y)$ . La distribución en intensidad del campo en el plano P sería:

$$I = (U^{km} + U^{k'm'}) \cdot (U^{km} + U^{k'm'})^* \quad (35)$$

Donde  $U^{km}$  es la ecuación (34) y  $U^{k'm'}$  es similar cambiando  $k$  por  $k'$  y  $m$  por  $m'$ . Al agrupar términos se obtiene finalmente:

$$I = I_0 + m \cos\{2\pi[(k - k')f_1 + (m - m')f_2]x - \pi\lambda[(d_1 + d_2)f_1^2(k^2 - k'^2) + d_2f_2^2(m^2 - m'^2) + 2d_2f_1f_2(km - k'm')]\} \quad (36)$$

Donde:

$$I_0 = \left(\frac{A_k B_m}{4}\right)^2 + \left(\frac{A_k B_{m'}}{4}\right)^2 \quad ; \quad m = \frac{A_k B_m A_k B_{m'}}{16} \quad (37)$$

La anterior ecuación puede ser escrita de la forma:

$$I = I_0 + m \cos[2\pi f_m x + \phi_0] \quad (38)$$

Donde:

$$f_m = (k - k')f_1 + (m - m')f_2 \quad (39)$$

$$\phi_0 = -\pi\lambda[(d_1 + d_2)f_1^2(k^2 - k'^2) + d_2 f_2^2(m^2 - m'^2) + 2d_2 f_1 f_2 (km - k'm')]$$

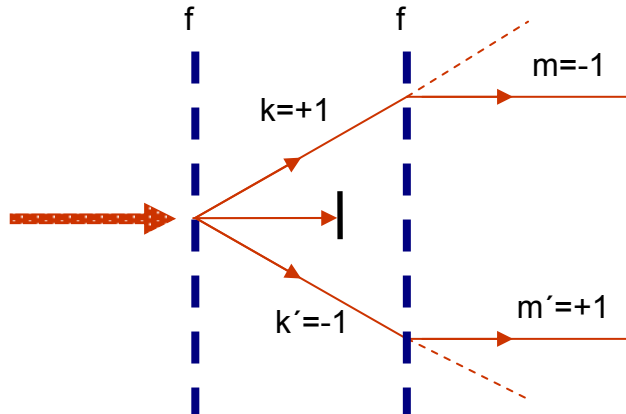
Donde  $f_m$  es la frecuencia espacial del sistema de franjas y  $\Phi_0$  es el corrimiento de fase con respecto a  $x=0$ . La presencia de un sistema de franjas en el plano de salida depende del término  $f_m$  de la ecuación (39). Si  $f_m$  es diferente de 0, se obtendrán franjas de interferencia con una separación espacial de  $1/f_m$  y un corrimiento en fase de  $\Phi_0$  con respecto a  $x=0$ . De igual manera si  $f_m=0$  no se observarán franjas en el plano de salida, obteniéndose un valor de intensidad constante en todo el plano que depende del valor de  $\cos(\Phi_0)$ .

A continuación se analizarán varias situaciones en las cuales el término  $f_m$  es diferente de cero e igual a cero, para redes de frecuencias espaciales iguales o diferentes.

I) Dos redes de frecuencias espaciales iguales ( $f_1 = f_2 = f$ )

a) orden  $k=1$ ,  $k'=-1$ ,  $m=-1$  y  $m'=+1$ .

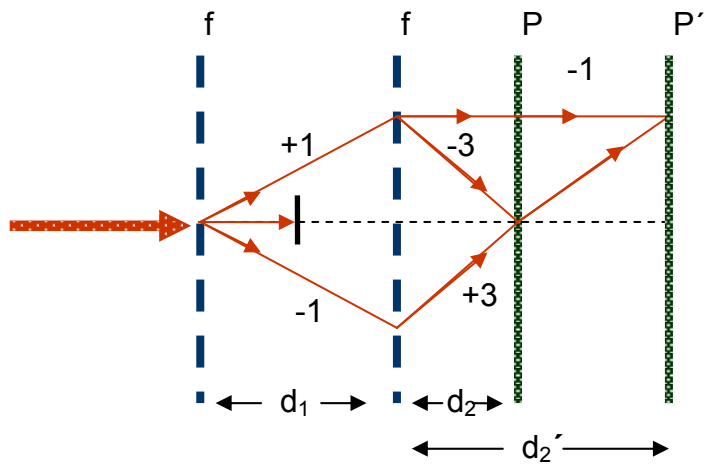
En este caso  $f_m=0$ , no se obtienen sistemas de franjas sobre el plano  $P_0$ . La figura 9(a) muestra el trazado de rayos en esta situación.



**Figura 9(a)**  
Interferómetro con redes de densidades iguales

b) Ordenes que producen interferencia visible.

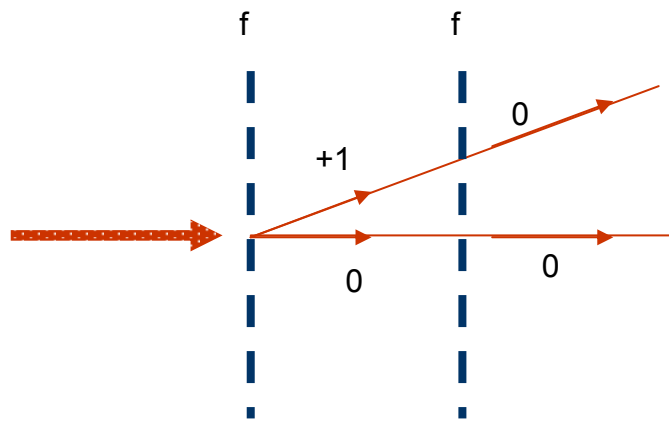
Diferentes alternativas producen franjas de interferencia visibles en el plano de salida. La figura 9(b) muestra dos alternativas. En el plano  $P$  ubicado a una distancia  $d_2$  interfieren los ordenes  $k=1$ ,  $m=-3$  y  $k'=-1$ ,  $m'=+3$ . Para el plano  $P'$  ubicado a una distancia  $d_2'$  interfieren los ordenes  $k=+1$ ,  $m=-1$  y  $k'=-1$ ,  $m'=+3$ , para cada posibilidad se deben calcular las distancias  $d_2$  para que los rayos se superpongan en  $P$ .



**Figura 9(b)**  
 Ordenes que producen interferencia visible

c) Ordenes que producen interferencia no visible.

La figura 9(c) muestra una combinación de ordenes que no genera franjas visibles en el plano de salida, pero si produce un valor de  $f_m \neq 0$ . En esta situación  $k=+1$ ,  $k'=0$ ,  $m=m'=0$  se obtiene una frecuencia  $f_m=f$  y la distancia  $d_2 = -d_1$ . Experimentalmente esta situación corresponde a obtener 2 ordenes de difracción de salida provenientes de una red de imagen virtual en un plano de interferencia con  $d_2 < 0$ .



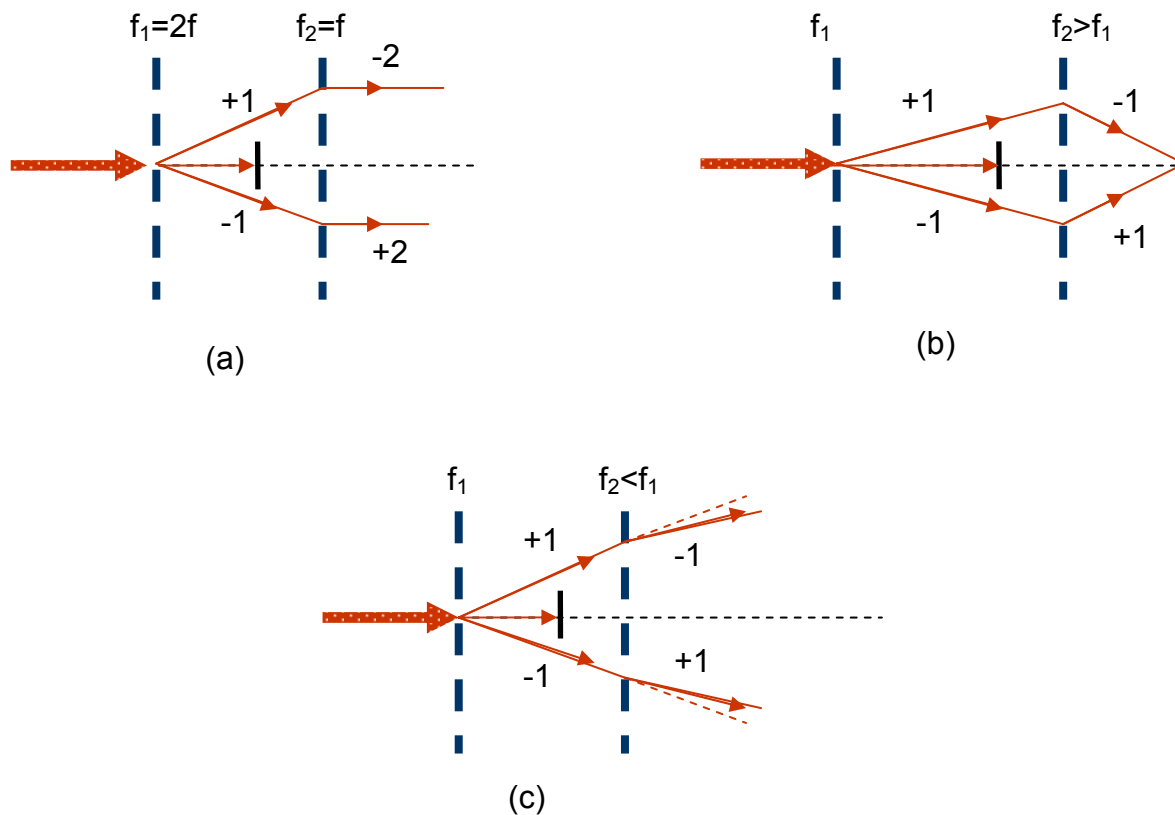
**Figura 9(c)**

Combinación de órdenes que no generan franjas visibles

II) Frecuencias espaciales diferentes.

Analizando en detalle el término  $f_m$  de la ecuación (38) para frecuencias diferentes se encuentran combinaciones donde se pueden obtener las situaciones anteriores. La figura 10, muestra algunos ejemplos.

En conclusión, según el análisis anterior, la ecuación (38) indica que un sistema de franjas de interferencia se obtiene en el plano de salida siempre que el término  $f_m$  sea diferente de cero. Cada red de difracción produce diferentes órdenes. La idea básica de obtener un valor de  $f_m$  diferente de cero es la de seleccionar los órdenes  $k$  y  $k'$  de la primera red que al incidir sobre la segunda red, generan cada uno varios órdenes. Al seleccionar los órdenes  $m$  y  $m'$  apropiados, sus rayos interfieren en el plano de salida. Como se muestra en la sección anterior, dos redes de frecuencias iguales o diferentes pueden producir franjas de interferencia visible, al seleccionar apropiadamente los órdenes de difracción.



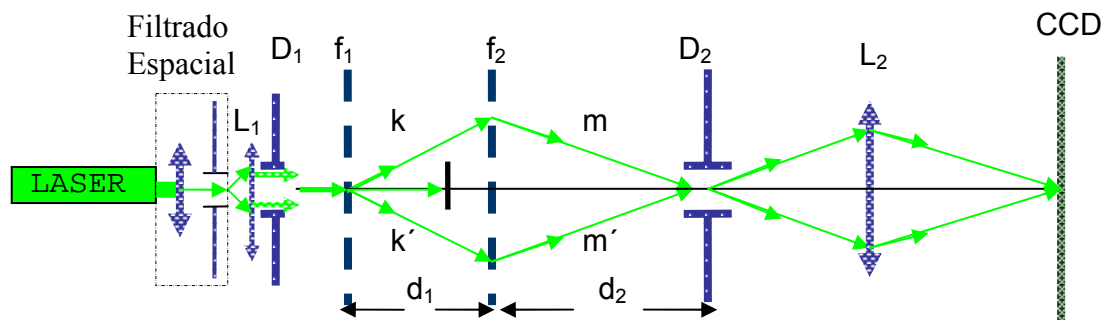
**Figura 10**  
Combinaciones de diferentes órdenes con densidades diferentes en las redes

De igual manera la ecuación (38), presenta ciertas características interesantes del patrón de interferencia. Al fijar las frecuencias de las redes, por ejemplo  $f_1=f$ ,  $f_2=2f$  y usando redes de difracción donde el ancho de línea opaca es la mitad del paso de la red, los ordenes pares desaparecen. En esta situación se obtienen varias posiciones del plano P donde se observan franjas de interferencia. Al fijar el plano P en una posición de interferencia, las franjas se desplazarán lateralmente si se cambia la longitud de onda. El desplazamiento lateral es debido al término  $\Phi_0$  de la ecuación de intensidad. Si se utiliza luz blanca, la superposición final elimina la modulación de las franjas. Al reemplazar en  $\Phi_0$  los ordenes  $k=+1$ ,  $k'=-1$ ,  $m=-1$  y

$m' = +1$  el término  $\Phi_0$  desaparece, lo cual generaría un sistema de franjas de interferencia acromático, independiente de la longitud de onda. Es decir la distribución en intensidad de dos redes de difracción, produce franjas de interferencia en el plano P de salida, aún si se utiliza luz blanca para ciertas condiciones de observación. Esta situación es interesante de obtener experimentalmente cuando se desean desplazar las franjas de interferencia de igual manera para todas las longitudes de onda. El interferómetro de Michelson utilizado en proyección de franjas e implementado para el análisis topográfico por corrimiento de fase, posee el inconveniente de calibrar el sistema de desplazamiento de un espejo en función de la longitud de onda utilizada.

## II.2 Análisis Experimental.

En la sección anterior se realizó el análisis teórico del patrón de interferencia que se obtiene de dos redes de difracción iluminadas axialmente. En esta sección se confrontarán los resultados experimentales obtenidos con el análisis teórico anterior.



**Figura 11**

Interferómetro a doble red de difracción iluminado axialmente

La figura 11 muestra el montaje utilizado, básicamente consiste en dos redes de difracción paralelas de frecuencias espaciales  $f_1$  y  $f_2$ , separadas una distancia  $d_1$ . A una distancia  $d_2$  de la segunda red se ubica el plano de salida de interferencia. Con el fin de obtener una imagen ampliada del sistema de franjas en el plano de salida, se ubica un diafragma  $D_2$  y una lente  $L_2$  de focal 50mm. La distancia entre la lente y el diafragma es cercana a la distancia focal de la lente, de tal manera que la matriz de sensores de la CCD se ubica en el plano imagen lejos de la lente. Un sistema de filtrado espacial y una lente  $L_1$  genera un frente de onda plano. El diafragma  $D_1$  define el campo de iluminación de las redes. Una serie de pantallas no mostradas en la figura, permiten seleccionar los órdenes de difracción de cada red.

Se utilizó inicialmente un láser de Helio-Neón de  $\lambda = 0.5735 \mu\text{m}$ , la cámara CCD utilizada fue la IVC 500 de resolución de 640x480 píxeles a 8 bits (monocromática). El procedimiento experimental utilizado para verificar la interferencia generada por dos redes de difracción consiste en variar las densidades de las redes, definir experimentalmente  $d_1$  y calcular  $d_2$  necesaria para obtener la superposición de los órdenes  $k$ ,  $m$ ,  $k'$  y  $m'$  seleccionados. Ubicando la CCD en el plano imagen de salida se adquiere la imagen digital correspondiente a los órdenes seleccionados. Con el fin de medir el paso del sistema de franjas en milímetros, se calibra el sistema telescópico de observación ubicando una red de difracción de frecuencia conocida en el plano del diafragma  $D_2$ . La imagen adquirida permite calcular el factor de conversión píxeles de la imagen sobre mm en el objeto.

La tabla 1 presenta los datos obtenidos experimentalmente.  $f_1$  y  $f_2$  se seleccionan en función de la disponibilidad de redes.  $k$ ,  $m$ ,  $k'$ ,  $m'$  y  $d_1$  se ajustan en función de condiciones experimentales. El rango de órdenes posibles para la distancia  $d_1$  se ajusta a la divergencia de los haces de tal manera que los órdenes no supera el ancho de las redes. La distancia  $d_2$  se ajusta de tal manera que los ordenes se superpongan en el plano de interferencia. El paso experimental ( $p_{exp}$ ) corresponde al paso del sistema de franjas medido en mm con el sistema telescópico de observación.  $P_{teo}$  corresponde al valor teórico obtenido al evaluar el coeficiente  $f_m$  de la ecuación (38) con los datos experimentales, según esta ecuación:

$$P_{teo} = \frac{1}{(k - k')f_1 + (m - m')f_2} \quad (40)$$

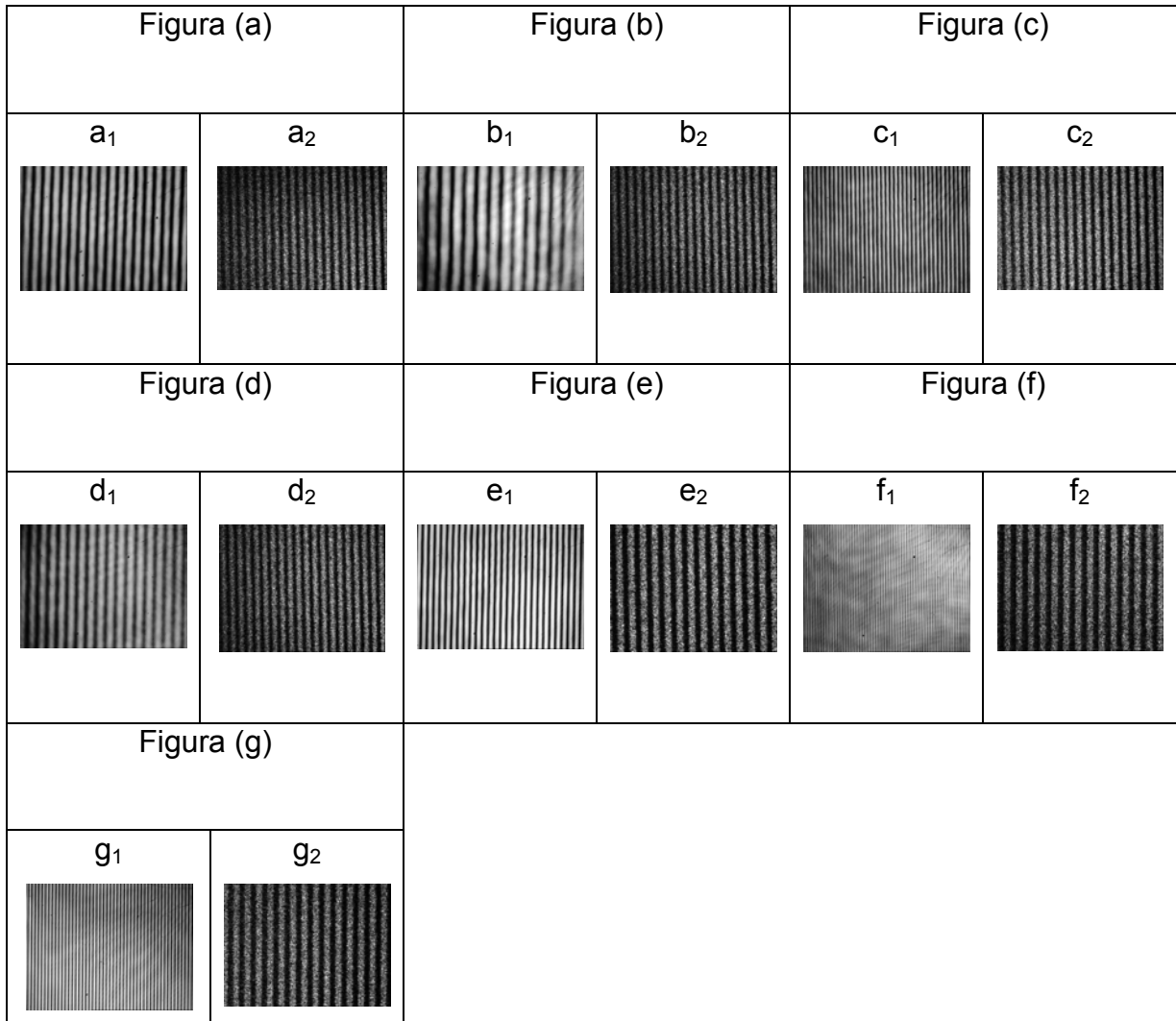
La figura 12 muestra las imágenes experimentales obtenidas asociadas a los datos de la tabla 1. Las letras están referenciadas en la tabla 1, el subíndice 1 corresponde al sistema de franjas de interferencia y el subíndice 2 corresponde a la imagen en la CCD de la red de difracción utilizada para calibrar el espacio objeto de interferencia. En todos los casos se utilizó una red de 30 lpmm como red de calibración.

El porcentaje de error promedio es de 1.8% al comparar  $p_{exp}$  con  $p_{teo}$ , esto verifica las aproximaciones teóricas utilizadas para explicar el fenómeno de interferencia de dos redes de difracción iluminadas axialmente con una radiación láser.

Figura	$f_1$ [lpmm]	$f_2$ [lpmm]	k	$k'$	m	$m'$	d 1 [mm]	d 2 [mm]	$P_{exp}$ [ $\mu$ m]	$P_{teo}$ [ $\mu$ m]	Error %
a	10	30	0	1	0	-1	326	163	49.3	50	1.4
b	10	30	0	1	1	0	326	136	49.5	50	1
c	20	40	0	1	1	-1	332	109	15.7	16	1.88
d	20	40	0	1	0	-1	331	288	46.2	50	7.6
e	40	100	0	1	1	0	162	111	17.2	16	0.08
f	40	100	0	1	1	-1	162	40	6.2	6.25	0.8
g	100	100	0	1	1	-1	125	125	10.0	10	0.18

**Tabla 1**

Datos tomados en el experimento del interferómetro a doble red de difracción



**Figura 12**  
 Franjas adquiridas en el experimento

De igual manera el experimento se realizó con las mismas condiciones experimentales pero se reemplazó el láser de Helio-Neón por una fuente de luz blanca. Con el fin de anular el término  $\Phi_0$  de la ecuación (38) y despejando  $d_2$  se obtiene la distancia donde se observan franjas de interferencia acromáticas.

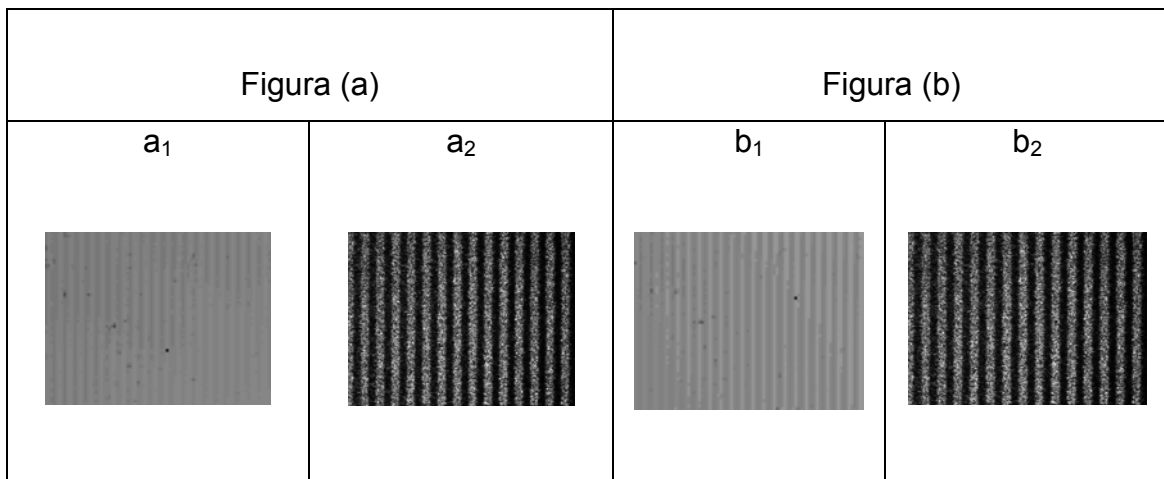
$$d_2 = -\frac{d_1}{1 + \frac{f_2(m - m')}{f_1(k - k')}} \quad (41)$$

Ajustando esta distancia para los órdenes definidos en la tabla 2, se determina la presencia de franjas acromáticas, mostrada en la figura 3.

Figura	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	k	k'	m	m'	d 1 [mm]	d 2 [mm]	P <sub>exp</sub> [μm]	P <sub>teo</sub> [μm]	Error %
a	100	100	0	1	1	-1	125	125	10.02	10	0.18
b	100	100	0	1	3	-1	125	125	5.05	5	1

**Tabla 2**  
 Datos del experimento del interferómetro iluminado con luz blanca

Las imágenes de las franjas se pueden observar en la figura 13:



**Figura 13**  
 Imágenes del sistema de franjas independiente de la longitud de onda

El bajo contraste de las franjas de interferencia acromática se debe a la baja intensidad luminosa, asociado al tamaño de la fuente de luz blanca utilizada.

### **III. INTERFERÓMETRO A DOBLE RED DE DIFRACCIÓN**

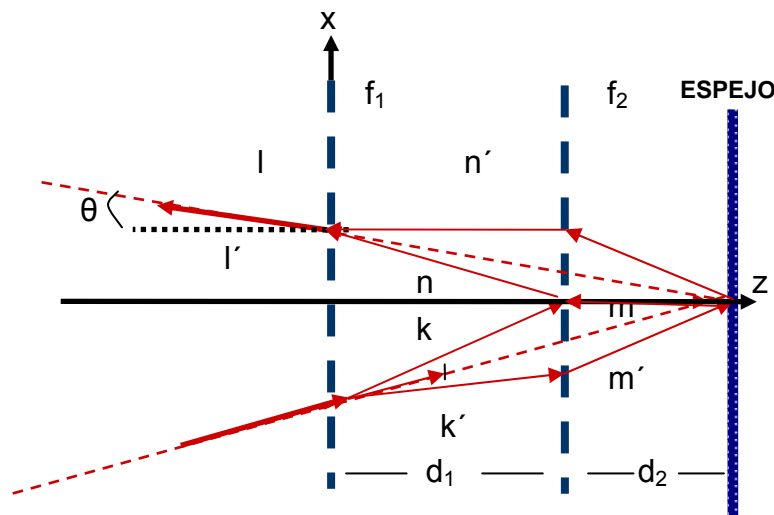
#### **INTRODUCCIÓN**

Aunque se utiliza radiación monocromática, el interferómetro a doble red de difracción incrementa la longitud de onda efectiva en función de parámetros del montaje. De esta manera se puede establecer un procedimiento experimental para el análisis de superficies macroscópicamente rugosas.

En esta sección se analizará teórica y experimentalmente el interferómetro a doble red de difracción y se analizarán detalladamente las condiciones teóricas que se deben imponer a un sistema de dos redes de difracción para generar experimentalmente un dispositivo de interferometría con base en el análisis teórico presentado en las secciones anteriores.

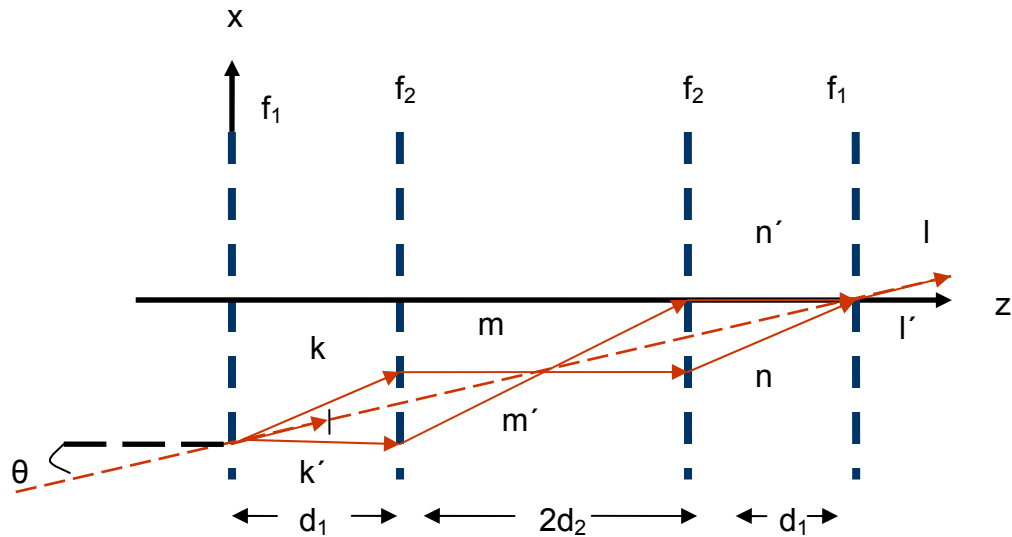
### III.1 Análisis Teórico

La figura 14 muestra el diagrama del interferómetro de dos redes de difracción. Un Frente de onda plano monocromático incide sobre una red de densidad  $f_1$  líneas por mm, formando un ángulo  $\theta$  con la normal. El rayo se difracta en varios órdenes de los cuales se muestran los órdenes  $k$  y  $k'$ . Los rayos recorren una distancia  $d_1$  hasta incidir sobre la segunda red de densidad  $f_2$ . Cada rayo es difractado en varios órdenes, escogiéndose los órdenes  $m$  y  $m'$ , que interfieren en el plano del espejo, ubicado a una distancia  $d_2$  de la segunda red. Los rayos son reflejados e inciden simétricamente sobre  $f_2$  generándose los órdenes  $n$  y  $n'$  que interfieren en el plano de la red  $f_1$ . De igual manera cada rayo genera varios ordenes de difracción obteniéndose únicamente 2 ordenes ( $l$  y  $l'$ ) que se propagan sobre la misma trayectoria, formando un ángulo  $\theta$  con la normal de la red.



**Figura 14**  
Interferómetro a dos redes de difracción

Para analizar teóricamente el interferómetro, la figura 14 es equivalente al trazado de rayos observado en la figura 15.



**Figura 15**  
Figura equivalente a la figura 13

El objetivo del análisis teórico consiste en obtener la distribución en intensidad del patrón de interferencia que resulta de la secuencia de rayos  $k, m, n, l$  y  $k', m', n', l'$  en el plano de salida ubicado en  $z = 2(d_1 + d_2)$ .

La utilización de redes de difracción en transmitancia rectangular, genera muchos órdenes de difracción. La selección de los ordenes corresponde a los ordenes que al ser difractados por las 2 redes interfieren en el plano del espejo. Esta situación fue analizada en el capítulo anterior.

A diferencia del esquema presentado en la figura 8 del capítulo anterior, el rayo forma un ángulo  $\theta$  con la normal de las redes. En este caso el frente de onda plano debe escribirse como:

$$(42)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

Como  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta\hat{k} + \text{sen}\theta\hat{i})$  y  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(z\cos\theta + x\text{sen}\theta)} e^{-i\omega t} \quad (43)$$

Para el plano de entrada del interferómetro ubicado en  $z=0$ , la amplitud compleja del frente de iluminación puede escribirse como:

$$U = E_0 e^{i2\pi f_0 x} \quad (44)$$

Donde

$$f_0 = \frac{\text{sen}\theta}{\lambda} \quad (45)$$

La distribución en intensidad corresponde a un promedio temporal en un rango mayor al periodo de la onda. Como el fenómeno analizado no introduce variaciones en la frecuencia temporal de la onda, la componente  $\exp(-i\omega t)$  se puede obviar. Usando el análisis teórico de dos redes de difracción iluminadas axialmente del capítulo II, la propagación del frente de onda de entrada a través de las redes y recorriendo ciertas distancias a lo largo del eje  $z$  puede describirse como:

a) Amplitud de entrada:

$$E_0 e^{i2\pi f_0 x} \quad (46)$$

b) Orden k de la red f<sub>1</sub>:

$$E_0 e^{i 2 \pi f_0 x} e^{i 2 \pi k f_1 x} \quad (47)$$

c) Difracción de Fresnel al recorrer d<sub>1</sub>:

$$E_0 e^{i 2 \pi (f_0 + k f_1) x} e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1)^2} \quad (48)$$

d) Orden m de la red f<sub>2</sub>:

$$E_0 e^{i 2 \pi (f_0 + k f_1) x} e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1)^2} e^{i 2 \pi m f_2 x} \quad (49)$$

e) Difracción de Fresnel al recorrer 2d<sub>2</sub>:

$$E_0 e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1)^2} e^{i 2 \pi (f_0 + k f_1 + m f_2) x} e^{-i \pi \lambda 2 d_2 (f_0 + k f_1 + m f_2)^2} \quad (50)$$

f) Orden n de la red f<sub>2</sub>:

$$E_0 e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1)^2} e^{-i \pi \lambda 2 d_2 (f_0 + k f_1 + m f_2)^2} e^{i 2 \pi (f_0 + k f_1 + m f_2) x} e^{i 2 \pi n f_2 x} \quad (51)$$

g) Difracción de Fresnel al recorrer d<sub>1</sub>:

$$E_0 e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1)^2} e^{-i \pi \lambda 2 d_2 (f_0 + k f_1 + m f_2)^2} e^{i 2 \pi (f_0 + k f_1 + m f_2 + n f_2) x} e^{-i \pi \lambda d_1 (f_0 + k f_1 + m f_2 + n f_2)^2} \quad (52)$$

h) Orden l de la red f<sub>1</sub>:

$$U_1^{kmnl} = E_0 e^{-i\pi\lambda d_1 (f_0 + kf_1)^2} e^{-i\pi\lambda 2d_2 (f_0 + kf_1 + mf_2)^2} e^{-i\pi\lambda d_1 (f_0 + kf_1 + mf_2 + nf_2)^2} e^{i2\pi (f_0 + kf_1 + mf_2 + nf_2)} e^{i2\pi f_1 x} \quad (53)$$

Haciendo el mismo análisis para el rayo  $k', m', n'$  y  $l'$  se obtiene una ecuación similar,  $U_2^{k'm'n'l'}$ . La distribución en intensidad será entonces:

$$I = UU^* \quad (54)$$

Donde  $U = U_1^{kmnl} + U_2^{k'm'n'l'}$ , siendo  $U_1^{kmnl}$  la ecuación (53) y  $U_2^{k'm'n'l'}$  la ecuación equivalente a los ordenes  $k', m', n'$  y  $l'$ . Al agrupar términos, la distribución en intensidad finalmente es de la forma:

$$I = I_0 + m \cos(2\pi Ax + 2\pi\lambda f_0 B + \pi\lambda C) \quad (55)$$

Siendo:

$$A = [(k + l - k' - l')f_1 + (m + n - m' - n')f_2]$$

$$B = -[2f_1(k - k')(d_1 + d_2) + f_2(d_1(m + n - m' - n') + 2d_2(m - m'))] \quad (56)$$

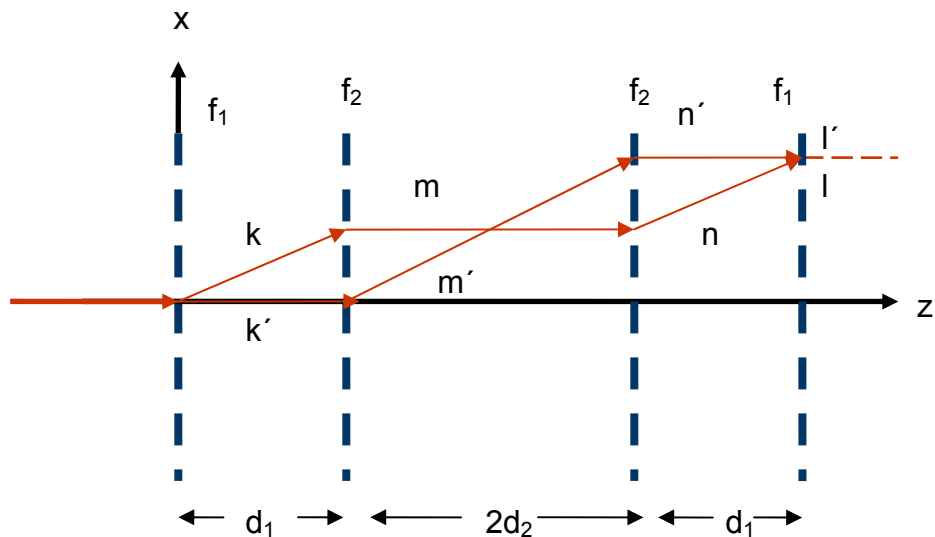
$$C = -[2f_1^2(d_1 + d_2)(k^2 - k'^2) + f_2^2[d_1[(m + n)^2 - (m' + n')^2] + 2d_2(m^2 - m'^2)] + f_1 f_2 [2d_1[k(m + n) - k'(m' + n')] + 4d_2(km - k'm')]]$$

La ecuación (55) indica que se genera un patrón de franjas siempre que el término A sea diferente de cero. Nuevamente se obtiene que el término A me define la frecuencia espacial del sistema de franjas al igual que el término C, el término B

me define el corrimiento de fase con respecto a  $x=0$ . En el capítulo anterior la Figura 9b muestra un trazado de rayos que producen un patrón de interferencia al pasar por dos redes  $f_1$  y  $f_2$  ( $f_2 > f_1$ ).

Como los rayos son reflejados y pasan nuevamente por las redes en las mismas condiciones de interferencia, los ordenes que generan interfieren al salir de la primera red hacen que el termino  $A$  sea siempre cero. Para ilustrar esta situación, se pueden utilizar los ordenes que producen interferencia en la Figura 9b. En este caso  $k=+1$  y  $k'=-1$  al salir de la primera red, y  $m=-1$  y  $m'=+1$  al salir de la segunda red. Según la figura 14 se deben utilizar el orden  $n=+1$  de  $m$  en la segunda red al reflejarse y el orden  $n'=-1$  de  $n$  para interferir en  $f_1$ . Al pasar por  $f_1$ , el orden  $l=-1$  de  $n$  y  $l'=+1$  de  $n'$  se propagan formando un ángulo  $\theta$  con la normal de la red. Usando estos valores de ordenes se obtiene  $A=0$ . Experimentalmente esta situación es similar al interferómetro de Michelson en iluminación paralela con los espejos en contacto óptico, en el plano de salida no hay franjas.

Como se analizó en el capítulo anterior, dos redes de frecuencias  $f_2 > f_1$  generan un patrón de interferencia visible con ordenes simétricos  $+a$  y  $-a$ . Para redes de igual densidad espacial la formación de franjas de interferencia visible es más selectiva en la búsqueda de órdenes.



**Figura 16**

Interferómetro a doble red de difracción escogiendo ciertos órdenes de interferencia para redes de igual densidad.

La figura 15 muestra un trazado de rayos en el interferómetro con redes iguales. Al seleccionar los órdenes  $k=+1$  y  $k'=0$  de la primera red, se deben usar los órdenes  $m=-1$  y  $m'=+1$  al salir de la segunda red para hacer interferir los rayos en el plano del espejo. De igual manera, los rayos reflejados al pasar por la segunda red nuevamente, se deben escoger los órdenes  $n=+1$  y  $n'=-1$  para hacerles interferir en el plano de la primera red. Como se deben obtener 2 rayos propagándose en la misma trayectoria, se deben escoger los órdenes  $l=-1$  y  $l'=0$ . Al reemplazar los valores de los órdenes en la ecuación (50), se obtiene  $A=0$ . En conclusión siempre que los rayos interfieren en el plano del espejo,  $A=0$ . Este resultado no sorprende puesto que al ubicar un espejo en el plano  $p$  de la figura 7, se obtienen órdenes de igual valor con signos opuestos. Usando un análisis similar, se demuestra que el término  $C$  de la ecuación (50) también desaparece. La situación es diferente para el término  $B$ . Al utilizar dos redes tal que  $f_2 > f_1$  y usar los órdenes de la figura 9b, se obtiene:

$$B = 4 f_0 f_1 d_1 + 4 f_0 ( f_1 - f_2 ) d_2 \quad (57)$$

De igual manera, al usar 2 redes iguales  $f=f_1=f_2$  y al seleccionar los órdenes anteriormente señalados se obtiene:

$$B = 2fd_1f_0 + 2fd_2f_0 \quad (58)$$

Al reemplazar los valores en la ecuación (50) se obtiene:

$$I = I_0 + m \cos[ ( 8\pi\lambda f_0 ( f_1 - f_2 ) d_2 + 8\pi\lambda f_0 f d_1 ] \quad (59)$$

$$I = I_0 + m \cos[ 4\pi\lambda f_0 f d_2 + 4\pi\lambda f_0 f d_1 ] \quad (60)$$

El primer término de fase depende linealmente de  $d_2$ , mientras que el segundo término depende de  $d_1$ . Esto indica que al desplazar el espejo en dirección normal, el primer término de fase cambia. Si el espejo es reemplazado por un objeto, la topografía altera localmente la distancia  $d_2$  presentándose una alteración de la fase y una variación en la intensidad de salida. Es decir, mientras el segundo término de fase permanece constante, el primero codifica la topografía del cuerpo en variaciones de fase dadas por:

$$\Delta\phi = 8\pi\lambda z f_0 ( f_1 - f_2 ) \quad (61)$$

$$\Delta\phi = 4\pi\lambda f_0 f z \quad (62)$$

Donde  $d_2=d_0+z$ , siendo  $d_0$  el plano exacto de interferencia medido de la segunda red. Definiendo  $\Delta z$  como la distancia necesaria para introducir un cambio en la fase de  $2\pi$ , se obtiene:

$$\Delta z = \frac{1}{4\lambda f_0(f_1 - f_2)} \quad (63)$$

$$\Delta z = \frac{1}{2\lambda f_0 f} \quad (64)$$

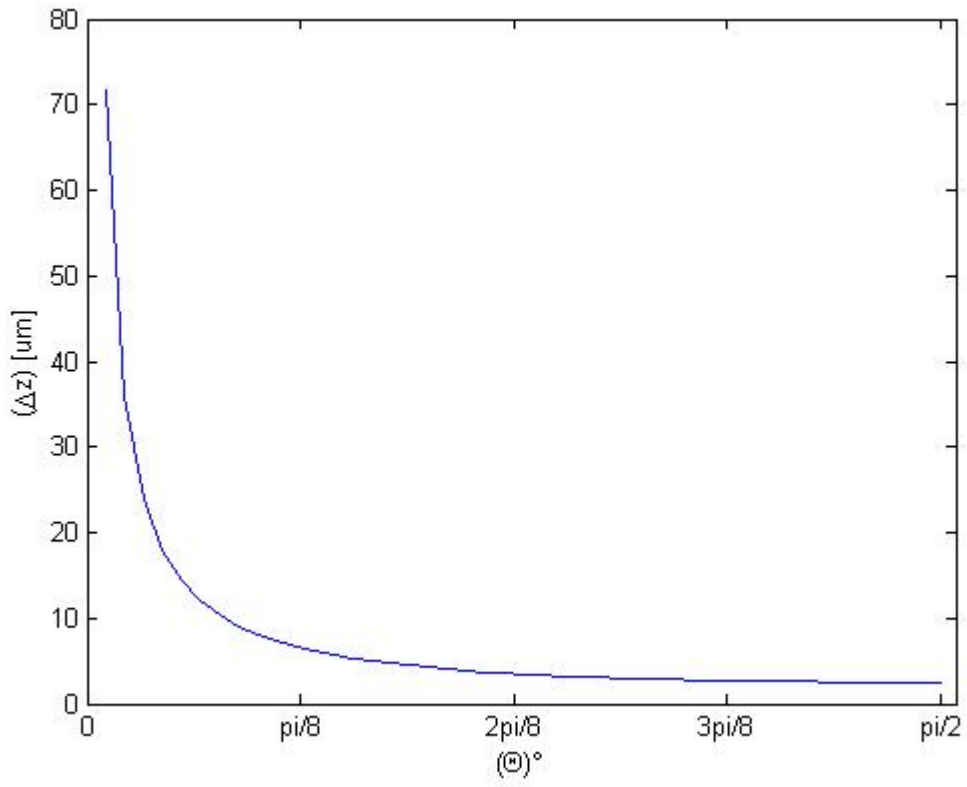
Usando la ecuación (45), se obtiene que  $\Delta z$  es independiente de  $\lambda$ .

En términos generales, el interferómetro a doble red de difracción codifica la topografía del objeto en función del ángulo de iluminación, las densidades de las redes y de los órdenes escogidos. En condiciones experimentales, el contraste del sistema de franjas depende de la intensidad relativa de los órdenes escogidos. Para redes de diferente frecuencia  $f_2 > f_1$ , se escogen los ordenes simétricos +1 y -1 por sus valores altos e iguales de intensidad.

Si  $f_2=2f_1$  se obtiene:

$$\Delta z = \frac{1}{4(\sin\theta)f_1} \quad (64)$$

La figura (17) muestra como cambia  $\Delta z$  en función del ángulo de iluminación con  $f_1=100$  lpmm.



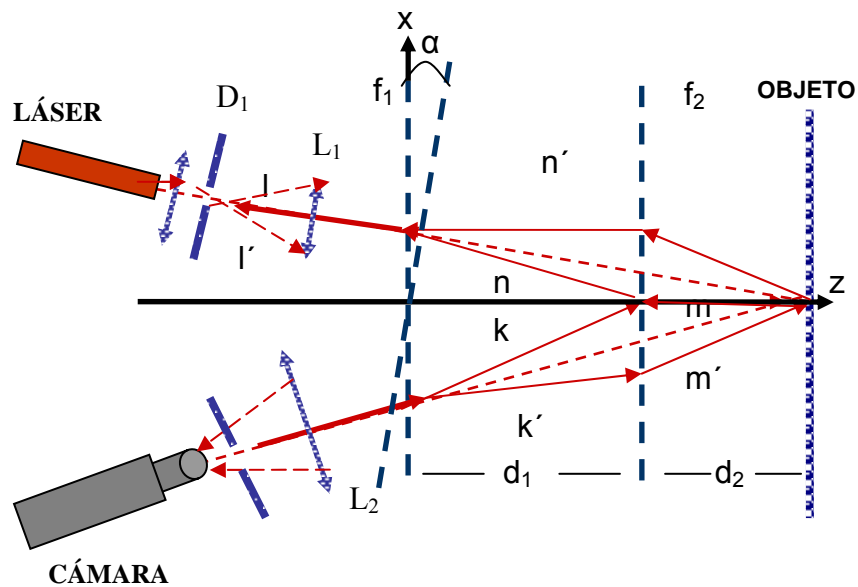
**Figura 17**

Grafica de  $\Delta z$  en  $\mu\text{m}$  contra el ángulo de incidencia  $\theta$  en grados.

### III.2 Análisis experimental

La figura (18) muestra el montaje experimental del interferómetro a doble red de difracción. Un láser filtrado espacialmente y una lente condensadora  $L_1$  generan un frente de onda plano. El diafragma  $D_1$  define la sección transversal de iluminación. La radiación incide sobre la primera red formando un ángulo  $\theta$  con la normal. La segunda red está ubicada a una distancia  $d_1$  paralela a la primera red y el espejo a una distancia  $d_2$  de la segunda red. La lente  $L_2$  genera una imagen ampliada de la superficie del espejo sobre la cámara CCD. El diafragma  $D_2$  ubicado en el plano focal de  $L_2$ , permite filtrar y seleccionar los órdenes  $l$  y  $l'$  que se propagan formando un ángulo  $\theta$  con la normal de la primera red.

Una pantalla, no mostrada en la figura permite seleccionar los órdenes  $k$  y  $k'$  de la primera red y obstruir el orden central.

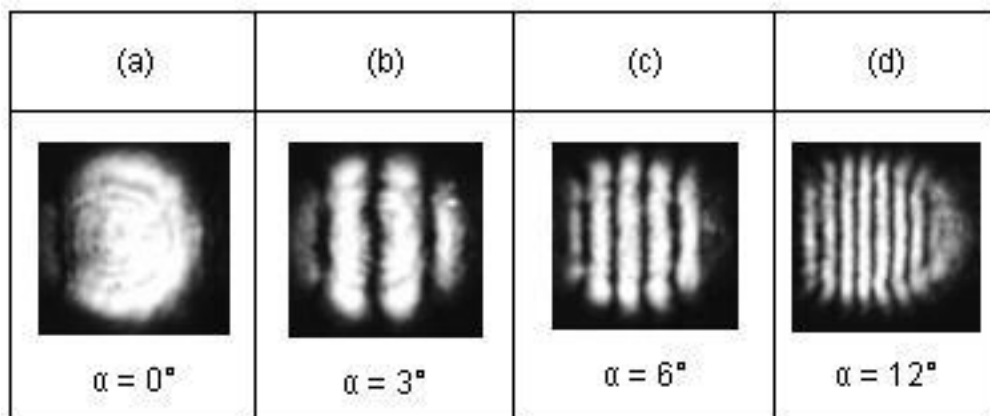


**Figura 18**

Montaje experimental del Interferómetro a doble red de difracción, [8].

Se utilizaron redes de 40lpmm y 115lpmm, ubicadas a una distancia  $d_1=131\text{mm}$  y  $d_2=60\text{mm}$ , la focal de  $L_2$  fue de 200 mm. La dimensión transversal de la primera red permitió ajustar un ángulo máximo de  $\theta$  aproximado de  $5.5^\circ$ . El espejo se ubicó sobre un sistema de microdesplazamiento manual de  $\pm 10\mu\text{m}$  de precisión. La figura (18a) muestra la imagen en la CCD en las condiciones ajustadas anteriormente. Se evidencia la no presencia de franjas, indicando que el término  $A=0$ , para la ecuación (35). De igual manera se observó que al desplazar el espejo levemente, la intensidad cambiaba pasando de máximo a mínimo. Usando el sistema de microdesplazamiento se midió el desplazamiento necesario para obtener 10 máximos sucesivos de intensidad. Realizando la medición de este valor varias veces y promediando se obtuvo un valor experimental de  $\Delta z=32\mu\text{m}$ .

Otra característica encontrada en el interferómetro consiste en la aparición de franjas de interferencia en el plano de salida al rotar las redes. La figura ((19) b,c y d)) muestran tres sistemas de franjas obtenidas al rotar la primera red para valores de  $\alpha=3^\circ, 6^\circ$  y  $12^\circ$  respectivamente,  $\alpha$  esta definido en la figura (18) .Franjas del mismo tipo aparecían al rotar la primera red, valores negativos de  $\alpha$ , y al rotar la segunda red en idénticas condiciones.



**Figura 19**  
Interferogramas del interferómetro a doble red de difracción.

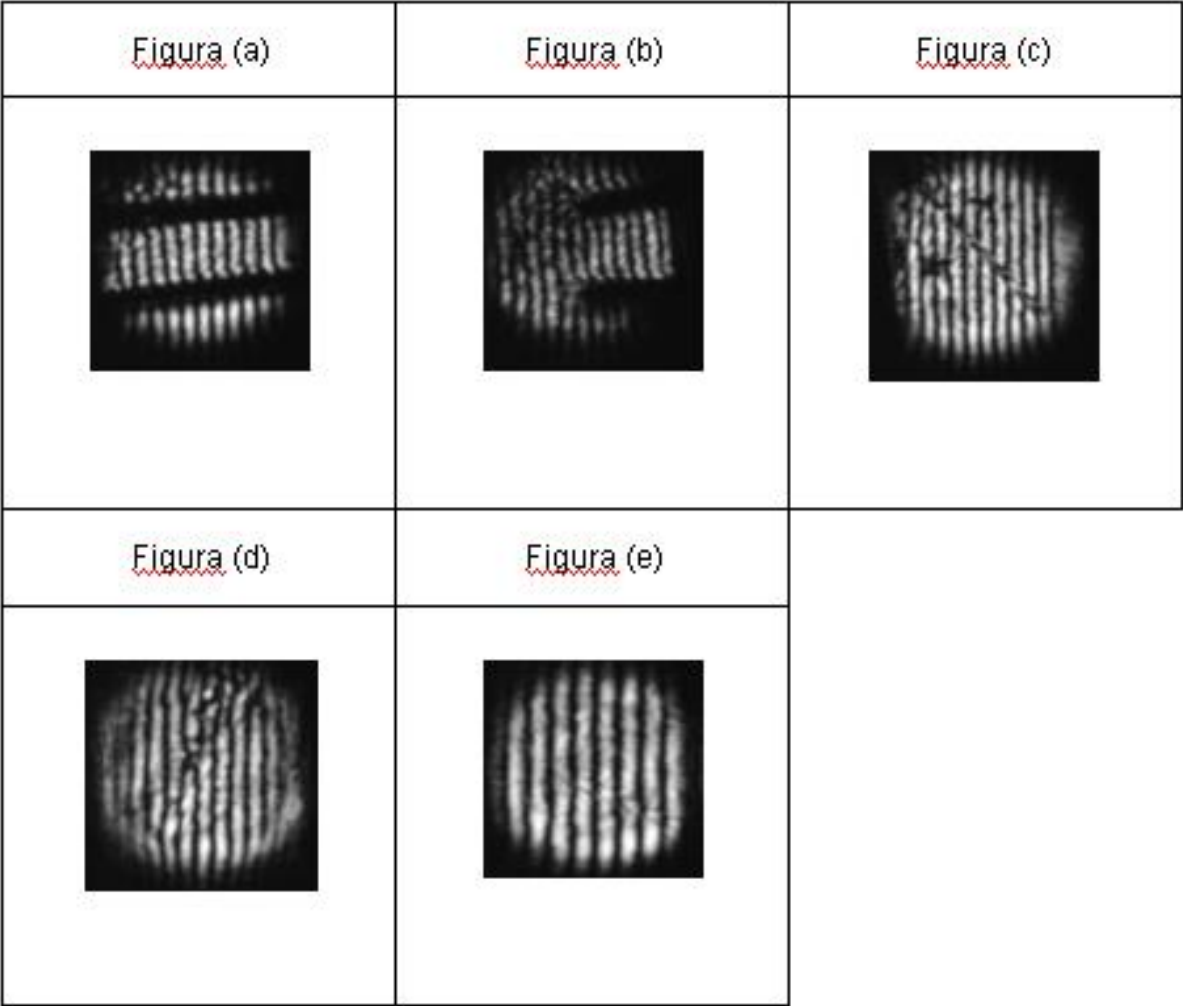
La existencia de franjas en el plano de salida se explica debido a que en el plano del espejo no se superponen exactamente los órdenes puesto que se altera el ángulo de difracción de los órdenes de la red que se ha rotado. Al rotar la red, el paso efectivo se reduce en  $1/\cos\alpha$ , cambiando la dirección de los órdenes. Esta situación hace que los órdenes  $l$  y  $l'$  finales no se propaguen sobre la misma trayectoria, propagándose formando un leve ángulo, y generándose el sistema de franjas.

Con el fin de ilustrar el funcionamiento del interferómetro en la codificación de la topografía se reemplazó el espejo por un objeto. La figura (20) muestra el sistema de franjas sobre el espejo al rotar la primera red un valor de  $\alpha=11^\circ$ . Esta imagen corresponde al sistema de franjas de referencia.



**Figura 20**  
Imagen de referencia del sistema de franjas de el espejo al rotar la primera red un valor de  $\alpha=11^\circ$

La figura (21) muestra 5 interferogramas de diferentes partes del cuerpo. EL objeto era una superficie metálica pulida con defectos en su superficie. Se deja como perspectiva el análisis detallado de los interferogramas obtenidos y posteriormente la reconstrucción tridimensional de la topografía del cuerpo.



**Figura 21**  
Sistemas de franjas deformadas debido a el  
La topografía del objeto

#### IV. CONCLUSIONES

De las imágenes anteriores y los datos obtenidos se puede concluir:

1. Usando la ecuación (63) se obtiene un valor teórico de  $\Delta z=34,7\mu\text{m}$  para  $\theta=5.5^\circ$ ,  $f_1=40\text{lpmm}$  y  $f_2=115\text{lpmm}$ . La diferencia entre este valor teórico y el experimental se debe principalmente a la baja resolución del sistema de desplazamiento ( $\pm 10\mu\text{m}$ ). Desplazando el espejo con un sistema de translación piezo eléctrico computarizado se puede calibrar el interferómetro para hacer reconstrucciones tridimensionales de superficies.
2. El campo transversal de iluminación del objeto está determinado principalmente por el ángulo de difracción de los órdenes seleccionados. Para la red de  $40\text{lpmm}$  el orden +1 y el orden central están separados una distancia de 4mm a 130mm de la red. Esto implica que el diámetro máximo de iluminación de la superficie del objeto corresponde a aproximadamente 4mm. Usando redes de mayor frecuencia espacial, se incrementa el ángulo de difracción y se aumenta el campo de exploración de la superficie del objeto.
3. El valor máximo de  $\theta$  lo determina principalmente el tamaño transversal de la primera red. Escogiendo los órdenes +1 y -1, el contraste de las franjas es máximo.
4. El rango de alturas que puede reconstruir el interferómetro depende de la región de superposición axial de los órdenes alrededor del plano de superposición. Para las condiciones experimentales definidas en el interferómetro implementado, los ordenes +1 y -1 de la segunda red separados 4mm y con un diámetro de 4mm interfieren a 60 mm de la red. Esto define una profundidad de medidas del orden de 8,5 mm. En

situaciones practicas, el rango de valores en  $z$  lo fija la profundidad de campo del sistema de observación.

5. No se analizan en detalle las imágenes del cuerpo ya que el objetivo del proyecto era hacer un análisis teórico – experimental de el interferómetro a partir de dos redes de difracción, especificar las condiciones necesarias para su implementación y los parámetros necesarios para que funcione como dispositivo interferométrico.

En términos generales, se demuestra con el desarrollo de este proyecto de grado que dos redes de difracción generan un sistema de franjas de interferencia, codificándose la topografía del cuerpo. Las condiciones experimentales tales como densidades de las redes, distancia de separación y ángulos de iluminación y observación, principalmente, fijan el rango de medidas y la sensibilidad del interferómetro en términos de  $\Delta z$ . La selección de los órdenes de difracción se realiza experimentalmente en función de limitantes espaciales, tales como ancho de las redes y separación.

## V. PERSPECTIVAS

Con el desarrollo teórico-experimental mostrado en este trabajo, se demuestra que dos redes de difracción permiten construir un interferómetro donde la longitud de onda efectiva se altera en función de los parámetros del montaje. Es decir utilizando redes de densidades apropiadas en ángulos de iluminación apropiados, es posible alterar la sensibilidad del interferómetro a valores  $\Delta z$  apropiados en función del rango de medidas y analizar la topografía de superficies altamente rugosas.

Se presenta como continuidad de este trabajo hacer un sistema de reconstrucción tridimensional basado en la interferencia de 2 redes de difracción.

Esto implica:

1. Un procedimiento experimental de calibración del interferómetro para calcular con precisión  $\Delta z$ .
2. Implementar un procedimiento de calibración del sistema de observación que tenga en cuenta el ángulo de iluminación  $\theta$ .
3. Implementar una técnica para extraer la fase del sistema de franjas.
4. Implementar un algoritmo para la corrección de fase discontinua, inherente a todo sistema de análisis de fases.
5. Adaptar al sistema para la exploración de superficies altamente rugosas en campos de iluminación transversal variables.

## REFERENCIAS

- [1] SOMMERFELD A, Optics, Volume IV of lectures on theoretical physics, Academic Press, New York, 1964.
  
- [2] GOODMAN, J.W, Introduction to Fourier Optics second edition, McGraw-Hill Companies, New York, 1996.
  
- [3] STRONG, J., Concepts of Classical Optics, Freeman, San Francisco, 1958.
  
- [4] HETCHT, E. Zajac, A.. Fundamentos de Óptica. Massachussets, Addison-Wesley Iberoamericana, EUA, 1974. Y R.N., The Fourier Transform and its Applications, McGraw-Hill, 1978.
  
- [5] GARY, E., SOMMARGREN, and H., JOSEPH, WEAVER. Diffraction Of light by an opaque sphere. 1: Description and properties of the diffraction pattern. Applied Optics, vol. 29, No 31., 1990.
  
- [6] HARIHARAN, P, Optical Interferometry, Editorial El Sevier Science, Segunda Edición, USA, 2003.
  
- [7] EMMETT, N. Leith and Lian Shentu, Tomographic Reconstrucción of objects by grating interferometer, Applied optics, Vol.25, No. 6, 1986.
  
- [8] DE GROOT, Peter, Equivalent-wavelength interferometry using diffractive optics, 1996.