

Estimación de la distribución de densidad interna de objetos geológicos mediante tomografía de muones

Kevin Joel Dlaikan Castillo

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática
Bucaramanga
2023

Estimación de la distribución de densidad interna de objetos geológicos mediante tomografía de muones

Kevin Joel Dlaikan Castillo

**Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero de Sistemas
e Informática**

Director:

Luis A. Núñez, Ph.D

Codirectores:

Jesús Peña Rodríguez, Ph.D

Fabio Martínez Carrillo, Ph.D

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática
Bucaramanga
2023

Para mis padres William y Luz Clemencia, que son la razón de lo que soy.

Para mi hermano Allan, quien ha sido un ejemplo a seguir.

Para toda mi familia, que son el pilar de todos los valores infundados en mí.

Para Darling, quien le ha dado diferentes perspectivas a mi vida.

Para Pachito, mi incondicional compañía desde que fui un niño.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director Luis Nuñez, quien confió en mí para llevar a cabo este trabajo y por enseñarme la importancia del rol de la ciencia en la sociedad, desde su divulgación hasta sus aplicaciones.

A Jesús Peña, quien me guió en el desarrollo de este trabajo y por su entrega y dedicación en esta apasionante área.

A Fabio Martínez, quien brindó su apoyo e interés en este trabajo y por su aporte como docente en mis estudios académicos.

Al grupo de investigación Halley y sus miembros, quienes desde su ejemplo y apoyo como personas y profesionales orientaron mi camino en la investigación.

A la Universidad Industrial de Santander por permitir formarme profesionalmente y dar a conocer, por medio de sus espacios, la diversidad y calidad de las personas que habitan esta región.

Contenido

Introducción	2
Radiografía de muones	3
Tomografía de muones	5
Métodos analíticos	6
Métodos algebraicos	10
Métodos estadísticos	11
1. Objetivos	14
1.1. Objetivo General	14
1.2. Objetivos Específicos	14
2. Implementación y evaluación de algoritmos de reconstrucción	15
2.1. Cálculo de error	15
2.2. Escenario de prueba	16
2.3. Tiempo de ejecución	20
2.4. Confiabilidad	21
2.5. Variación del rango angular	22
2.6. Variación del número de puntos de observación	23
2.7. Variación del número de iteraciones	25
3. Tomografía de muones del volcán Cerro Machín	28
3.1. Reconstrucción de objetos geológicos	28
3.2. Evaluación de la reconstrucción del volcán Cerro Machín	33
3.3. Variación de número de puntos de observación	37
4. Conclusiones	45

Índice de figuras

1.	Ilustración de la detección de muones producidos por rayos cósmicos . .	4
2.	Ilustración del proceso de tomografía de muones	6
3.	Esquema de transformada de Radón	7
4.	Sinograma	8
5.	Retroproyección simple vs. Retroproyección filtrada	10
6.	Esquema de reconstrucción con el método ART	11
2.1.	Reconstrucciones obtenidas con algoritmos de Tomopy	17
2.2.	Reconstrucciones obtenidas con algoritmos de ASTRA	19
2.3.	Reconstrucciones con 30 puntos de observación	21
2.4.	Reconstrucción con 180 puntos y variación de rango angular	23
2.5.	Reconstrucciones con rango angular de 180 grados y variación de número de puntos	24
2.6.	RMSE de reconstrucciones variando el número de puntos de observación	25
2.7.	RMSE de reconstrucciones variando el número de iteraciones	26
2.8.	RMSE de reconstrucciones variando el número de puntos e iteraciones .	26
3.1.	Muograma del volcán Cerro Machín obtenido a partir de un punto de observación	28
3.2.	Topografía 3D del volcán Cerro Machín	29
3.3.	Topografía 2D del volcán Cerro Machín	30
3.4.	Puntos de observación con $h=2495$ m s.n.m ± 10 m ubicados en la topografía	31
3.5.	Puntos de observación con equidistancia a ± 40 m ubicados en la topografía	31
3.6.	Muogramas del volcán Cerro Machín obtenidos por MUYSC	32
3.7.	Reconstrucción 3D del volcán Cerro Machín	33
3.8.	Mapa de error de vista superior de reconstrucción del volcán Cerro Machín	34
3.9.	Mapa de error de vista frontal de reconstrucción del volcán Cerro Machín	35
3.10.	Mapa de error de vista lateral de reconstrucción del volcán Cerro Machín	36
3.11.	Ubicación de puntos de observación utilizados en las reconstrucciones variando el número de puntos	37
3.12.	Vista superior de reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos	38
3.13.	RMSE de vista superior de reconstrucciones variando el número de puntos e iteraciones	39
3.14.	RMSE de vista superior de reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos	40

Índice de figuras

3.15. Vista frontal de reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos	41
3.16. RMSE de vista frontal de reconstrucciones de dos iteraciones variando el número de puntos	42
3.17. Vista lateral de reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos	43
3.18. RMSE de vista lateral de reconstrucciones de 6 iteraciones variando el número de puntos	44

Índice de cuadros

2.1. RMSE de algoritmos de TomoPy	18
2.2. RMSE de algoritmos de ASTRA	19
2.3. Tiempo de ejecución de algoritmos de TomoPy.	20
2.4. Tiempo de ejecución de algoritmos de ASTRA.	20

Resumen

Título: Estimación de la distribución de densidad interna de objetos geológicos mediante tomografía de muones *

Autor: Kevin Joel Dlaikan Castillo**

Palabras Clave: Tomografía de muones, muografía, puntos de observación, volcán Cerro Machín.

Descripción: Los muones son partículas generadas por la interacción de la radiación cósmica y núcleos atómicos en la atmósfera de la Tierra, con capacidad de penetrar cientos de metros de roca. La muografía es el proceso por el cual se aprovecha el flujo atenuado de muones detectado por un instrumento ubicado en un punto de observación, para obtener una imagen 2D (muograma) de la distribución de densidad interna del objeto estudiado. La tomografía de muones es el proceso en el cual se utilizan los muogramas obtenidos en diferentes puntos de observación alrededor del objeto para estimar la distribución de densidad volumétrica (3D) de la estructura. Como regla general, a mayor cantidad de puntos de observación, más precisa es la reconstrucción por tomografía respecto al objeto original. No obstante, se ha encontrado que para el volcán Cerro Machín en Colombia se cuenta con sólo 4 puntos de observación favorables debido a sus dificultades topográficas. Actualmente no se tiene una distribución de densidad interna disponible del volcán Cerro Machín.

En este trabajo se experimentó inicialmente con el espectro Shepp-Logan y se observó que la curva de RMSE (Root Mean Squared Error) en las reconstrucciones tomográficas obtenidas con el algoritmo ART (Algebraic Reconstruction Technique) sigue una tendencia parabólica al variar el número de puntos de observación igualmente espaciados. Esto implica que hay un número medio de puntos de observación que minimiza el error en la reconstrucción tomográfica en comparación con el objeto original. En segunda estancia se obtuvo la distribución de distancia recorrida por los muones en roca del volcán Cerro Machín por medio del algoritmo ART disponible en la librería TomoPy. Se dispuso de 42 muogramas obtenidos en puntos de observación a 1059 ± 40 metros de distancia del punto más alto del volcán y una altura de 2495 ± 10 m s.n.m. Finalmente se evaluó el mapa de error sistemático y el RMSE de las vistas de la reconstrucción variando el número de puntos de observación e iteraciones, obteniendo un error mínimo (RMSE = 0.117) en la vista superior de la reconstrucción de 14 puntos y 1 iteración y un error mínimo (RMSE = 0.059 km) en la vista frontal con 14 puntos y 2 iteraciones, por lo que se pudo obtener una mejor reconstrucción con 28 puntos de observación menos que los iniciales.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ingenierías Físicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director: Luis A. Nuñez, Doctor en Ciencias Naturales. Codirectores: Jesús Peña Rodríguez, Doctor en Física. Fabio Martínez Carrillo, Doctor en Ingeniería de Sistemas y Computación.

Abstract

Title: Estimation of Internal Density Distribution of Geological Objects Using Muon Tomography *

Author: Kevin Joel Dlaikan Castillo **

Keywords: Muon tomography, muography, observation points, Cerro Machín volcano.

Description: Muons are particles generated by the interaction of cosmic radiation and atomic nuclei in Earth's atmosphere, with the ability to penetrate hundreds of meters of rock. Muography is the process by which the attenuated muon flux detected by an instrument located at an observation point is used to obtain a 2D image (muogram) of the internal density distribution of the object under study. Muon tomography is the process in which the muograms obtained at different observation points around the object are used to estimate the volumetric (3D) density distribution of the structure. As a general rule, the more observation points available, the more accurate the tomographic reconstruction is with respect to the original object. However, it has been found that for the Cerro Machín volcano in Colombia, there are only 4 favorable observation points due to its topographical difficulties. Currently, there is no available internal density distribution of the Cerro Machín volcano.

In this work, experiments were initially conducted using the Shepp-Logan spectrum, and it was observed that the root mean squared error (RMSE) curve in the tomographic reconstructions obtained with the algebraic reconstruction technique (ART) algorithm follows a parabolic trend as the number of equally spaced observation points varies. This implies that there is an optimal number of observation points that minimizes the error in tomographic reconstruction compared to the original object. In a second step, the distribution of distance traveled by muons in the rock of the Cerro Machín volcano was obtained using the ART algorithm available in the TomoPy library. 42 muograms obtained at observation points at a distance of 1059 ± 40 meters from the highest point of the volcano and an altitude of 2495 ± 10 m above sea level were available. Finally, the systematic error map and RMSE of the reconstruction views were evaluated by varying the number of observation points and iterations, obtaining a minimum error (RMSE = 0.117) in the top view of the reconstruction with 14 points and 1 iteration, and a minimum error (RMSE = 0.059 km) in the frontal view with 14 points and 2 iterations, allowing for a better reconstruction with 28 fewer observation points than initially used.

*Bachelor thesis

**Facultad de Ingenierías Físicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Advisor: Luis A. Nuñez, PhD. in Natural Science. Co-advisors: Jesús Peña Rodríguez, PhD. in Physics. Fabio Martínez Carrillo, PhD. in Computer and Systems Engineering.

Introducción

El estudio de volcanes es una rama importante de la geología, que tiene como fin anticipar desastres naturales debidos a erupciones volcánicas. Para lograr esto y entender las dinámicas relacionadas con la erupción de un volcán activo, sería de gran utilidad “ver” su estructura interna.

Del mismo modo en que puede conocerse el interior del cuerpo de un ser humano por medio de radiografías o tomografías, esto puede hacerse para grandes estructuras como los volcanes. Se puede obtener y estimar una imagen de la densidad interna de un volcán por medio de “radiografías” a partir de partículas que penetren la estructura. Estas partículas son los muones, generados por interacciones entre radiación cósmica ionizante (mayoritariamente protones) y núcleos atómicos existentes en la atmósfera de la Tierra (principalmente nitrógeno) [Neddermeyer and Anderson \[1937\]](#).

Las partículas de alta energía incidentes en la atmósfera del planeta se conocen como rayos cósmicos primarios, mientras que los muones generados posteriormente hacen parte de los rayos cósmicos secundarios. Las partículas secundarias generadas son una cadena de reacciones nucleares que generan una cascada de partículas secundarias denominada cascada atmosférica extensa. Los rayos cósmicos fueron descubiertos en 1912, por investigaciones independientes de Domenico Pacini [Pacini \[2010\]](#) y Victor Hess [Hess \[1912\]](#). Posteriormente a este hallazgo, las cascadas atmosféricas extensas fueron descubiertas por Rossi, Schmeiser, Bothe, Kolhöster y Auger en los años 30 [Kampert and Watson \[2012\]](#). Finalmente entre los años 1930 y 1950 se descubrieron diferentes partículas en el estudio de rayos cósmicos [Bonomi et al. \[2020\]](#), entre ellas los muones [Anderson and Neddermeyer \[1936\]](#), generados por el decaimiento de piones y kaones cargados [Procureur \[2018\]](#).

Los muones producidos por rayos cósmicos tienen un tiempo de vida de $2,2 \times 10^{-6}$ s y una masa 200 veces mayor a la del electrón, lo que les da la capacidad de llegar a la superficie terrestre sin decaer [Procureur \[2018\]](#). El flujo de muones al nivel del mar se ha medido entre $60 - 70 \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$. Por lo que, en general, puede decirse que 10 000 muones por minuto por metro cuadrado tocan el suelo [Tanabashi \[2018\]](#) o que, en promedio, alrededor de 600 atraviesan el cuerpo humano cada minuto. El flujo de los muones puede cambiar por diferentes variables como la altitud, latitud, longitud, presión atmosférica, entre otras [Procureur \[2018\]](#).

Radiografía de muones

Los muones cósmicos de alta energía tienen la capacidad de penetrar cientos de metros de roca Nagamine [2003]. Al penetrar en un material interactúan con los átomos del mismo, ocurriendo una pérdida de energía del muón y una deflexión de su dirección incidente debido a las colisiones inelásticas y dispersiones elásticas con los electrones y con el núcleo del átomo del material. Otros procesos como la emisión de radiación Cherenkov, bremsstrahlung (radiación de frenado) y reacciones nucleares también influyen en la pérdida de energía del muon Bonomi et al. [2020], Tanaka and Ohshiro [2017]. Debido a esta pérdida de energía, el muon puede o no atravesar por completo un objeto y esto depende en gran medida de la dimensión y densidad del mismo. La fracción de muones que logra pasar el material es dada por la integral de la densidad por la distancia recorrida. Esta cantidad se llama opacidad Tanaka and Ohshiro [2017]. De esta manera, aprovechando la alta capacidad penetrante y baja dispersión de los muones de alta energía, se puede medir la atenuación del flujo de los muones en diferentes direcciones a través del objeto, obteniendo así una cartografía de la opacidad del mismo. A esta técnica se le conoce como muografía de absorción Procureur [2018] y la proyección obtenida del objeto se conoce como muograma.

Para conseguir una medición del flujo atenuado de muones según la trayectoria, es necesario un detector de partículas. Existen diferentes tipos de detectores, que ofrecen ventajas sobre otros según su aplicación, los cuales se basan en tres técnicas de detección: detectores de emulsión nuclear, detectores gaseosos y detectores de centelleo Bonomi et al. [2020]. Una ilustración del concepto de muografía se muestra en la Figura 1.

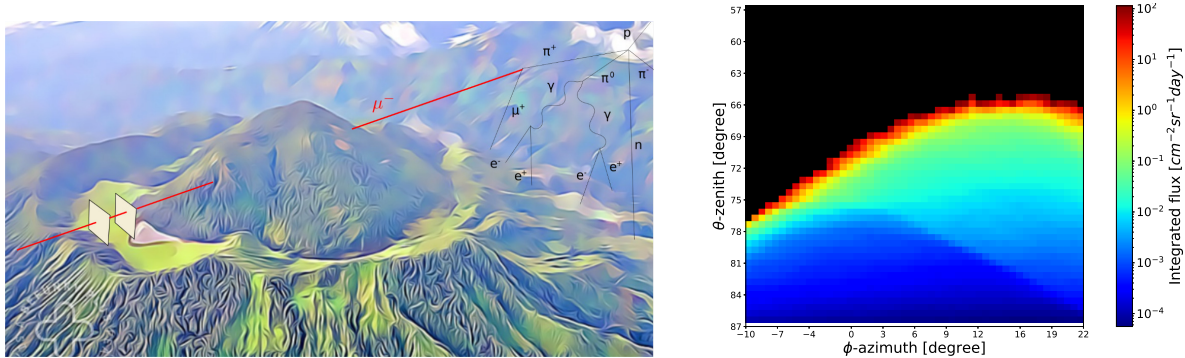


Figura 1: Ilustración de la detección de muones producidos por rayos cósmicos (izquierda). Se observa la cascada atmosférica extensa producida por un próton y el decaimiento de las partículas secundarias hasta la componente muónica. El detector se encuentra del otro lado de la estructura y capta la trayectoria de los muones que la atraviesan en diferentes direcciones, obteniendo así el muograma del flujo atenuado de muones en roca (derecha).

De esta manera puede realizarse una radiografía de muones a un volcán. Esa fue la aplicación propuesta por K. Nagamine en 1995 estudiando el Monte Tsukuba Nagamine et al. [1995], seguido de una nueva contribución de Nagamine en colaboración con H.

Tanaka en 2003, donde implementaron una radiografía de muones en el Monte Asama [Tanaka et al. \[2003\]](#). Estos estudios de volcanes en Japón revivieron la radiografía de muones, luego de ser pausada por décadas después del trabajo pionero de L. Álvarez buscando cámaras ocultas en la pirámide de Kefrén en 1970 [Alvarez et al. \[1970\]](#). En general, la muografía permite estudiar de forma no invasiva el interior de grandes estructuras como volcanes, pirámides, reactores nucleares, minas subterráneas, etc [Kaiser \[2019\]](#).

En los últimos años se han desarrollado diferentes estudios en muografía, enfocados principalmente en el campo de la vulcanología, siendo Japón, Italia y Francia los principales países desarrollando nuevos experimentos. Mientras tanto, en Colombia ha sido investigada por el grupo Halley de la Universidad Industrial de Santander, desde el desarrollo del telescopio híbrido de muones MuTe [Peña-Rodríguez et al. \[2020\]](#), su respectivo estudio de simulación de detección de partículas [Vásquez-Ramírez et al. \[2020\]](#), la herramienta de cadena de simulación de rayos cósmicos ARTI [Sarmiento-Cano et al. \[2022\]](#), el estudio de sitios para realizar tomografía de muones para volcanes en Colombia [Vesga-Ramírez et al. \[2020\]](#) y la herramienta de simulación de muografía y tomografía MUYSC [Peña-Rodríguez et al. \[2023\]](#).

Tomografía de muones

La tomografía de muones fue propuesta en 2003 por un grupo de Los Alamos [Borozdin et al. \[2003\]](#), [Priedhorsky et al. \[2003\]](#). Mientras que para la muografía es conveniente que la trayectoria del muon sea una línea recta, la deflexión de la dirección del muon dentro de la estructura debido a la dispersión múltiple de Coulomb puede aprovecharse para estudiar la estructura multi-direccionalmente, lo que permite obtener una distribución volumétrica. Sin embargo, también se puede realizar tomografías por medio de la absorción de muones e incluso combinar ambas mediciones para reducir incertidumbres. En general, la tomografía de muones es el proceso en el cual se utilizan los muogramas (radiografías de muones) obtenidos por diferentes detectores o por un detector ubicado en diferentes puntos de observación alrededor del objeto para estimar la distribución de densidad volumétrica (3D) de la estructura por medio de un algoritmo de reconstrucción tomográfica. La Figura 2 ilustra el concepto de tomografía de muones.

Como regla general, una buena reconstrucción tomográfica se obtiene por medio de un alto número de puntos de observación igualmente espaciados alrededor del objeto [Nagahara and Miyamoto \[2018\]](#). Largos tiempos de exposición, un bajo flujo de muones y una topografía irregular dan un bajo número de puntos de observación no igualmente espaciados. Estas dificultades se encuentran para estudiar objetos geológicos en diferentes partes del mundo y particularmente en el volcán Cerro Machín, así como otros volcanes activos en Colombia ubicados en la cordillera de los Andes [Vesga-Ramírez et al. \[2020\]](#). Las montañas alrededor del volcán son penetradas por los muones, impidiendo que lleguen a la estructura, por lo que crean un efecto de blindaje. Por lo tanto, es necesario conocer preliminarmente tanto la ubicación de los puntos con los que se obtiene una reconstrucción tomográfica óptima, como la cantidad necesaria de

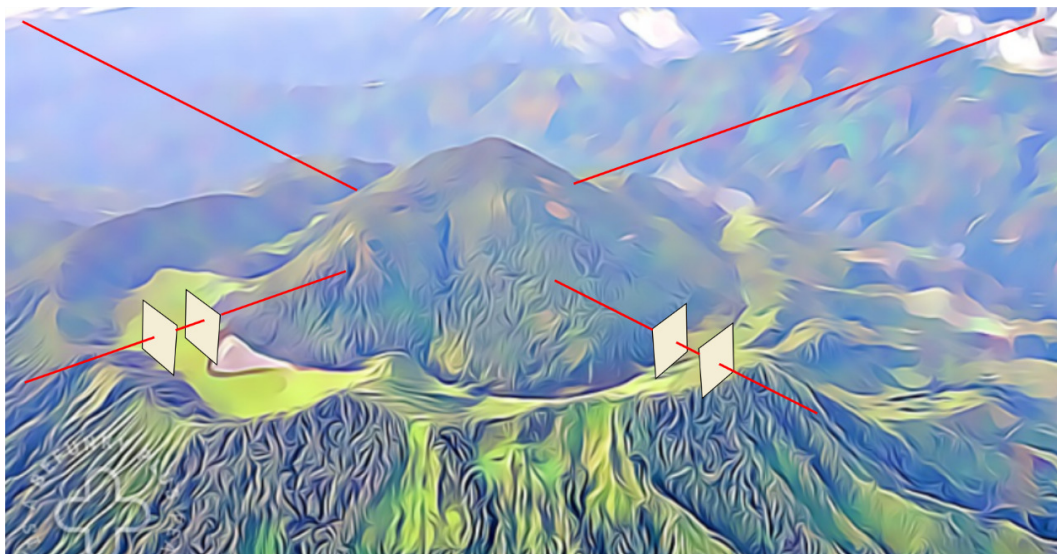


Figura 2: Ilustración del proceso de tomografía de muones. Se ubican detectores en diferentes posiciones alrededor del objeto, obteniendo en cada uno una radiografía de muones y con ellas se reconstruye la distribución volumétrica de la estructura.

los mismos antes de llevar a cabo un estudio por tomografía. Esta técnica puede hacer uso pero no requiere modelos iniciales o datos geológicos, a diferencia de técnicas como tomografía gravimétrica o sísmica.

Si bien los métodos de reconstrucción son comunes en el ámbito médico, la tomografía de muones aún está en desarrollo. En primer lugar, los algoritmos de reconstrucción tomográfica disponibles están diseñados para un entorno médico. Esto quiere decir que no consideran la variabilidad topográfica que se puede encontrar en un objeto geológico. En el trabajo realizado por Nagahara [Nagahara and Miyamoto \[2018\]](#) no se tiene en cuenta este problema. Por otra parte, para abordar el proceso de la tomografía de muones es fundamental conocer y comprender los diferentes algoritmos de reconstrucción tomográfica, así como su fundamento teórico.

Existen tres categorías de algoritmos de reconstrucción tomográfica: analíticos, estadísticos y algebraicos. Cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas y su elección dependerá de la situación en cuestión. Por lo tanto, es necesario analizar cada uno de ellos para determinar cuál es el algoritmo que proporciona los mejores resultados en una tomografía de muones, teniendo en cuenta las limitaciones previamente mencionadas.

Métodos analíticos

Retroproyección filtrada

La retroproyección filtrada (Filtered Back Projection - FBP) es el algoritmo más utilizado en problemas médicos y también ha sido utilizado en tomografía de muones

Nagahara and Miyamoto [2018]. Inicialmente, este método puede entenderse bajo su planteamiento en problemas bidimensionales. En la retroproyección filtrada, las proyecciones de un objeto $f(x, y)$ se conocen como transformadas de Radón y están dadas por la siguiente expresión:

$$p_\gamma(\xi) = \int_0^s \mu(\xi, \eta) d\eta \quad (0.1)$$

donde p_γ es la proyección o transformada de Radón obtenida en un ángulo fijo γ , μ es el coeficiente de atenuación del objeto ubicado en diferentes puntos (ξ, η) del sistema de coordenadas polares del detector Buzug [2008]. La figura 3 ilustra el proceso de la transformada de Radón.

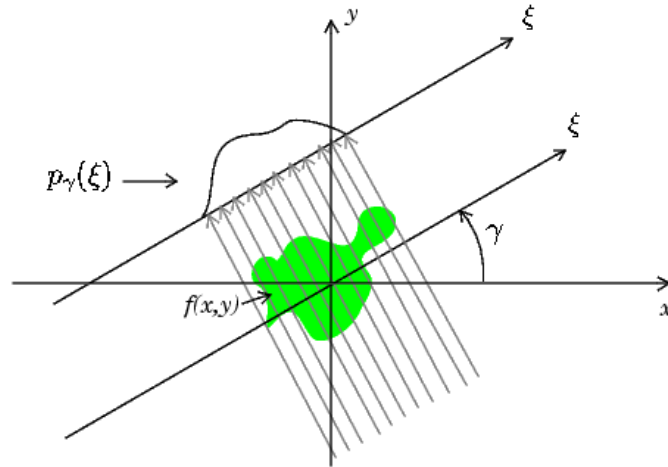


Figura 3: Proyección $p_\gamma(\xi)$ del objeto $f(x, y)$ obtenida por un detector con ángulo γ . La proyección adquirida es la suma de los coeficientes de atenuación μ del objeto en cada línea de proyección.

Este proceso se repite en diferentes ángulos, obteniendo diferentes proyecciones. La concatenación lineal de estos datos es llamada sinograma y es la imagen que se observa en la Figura 4.

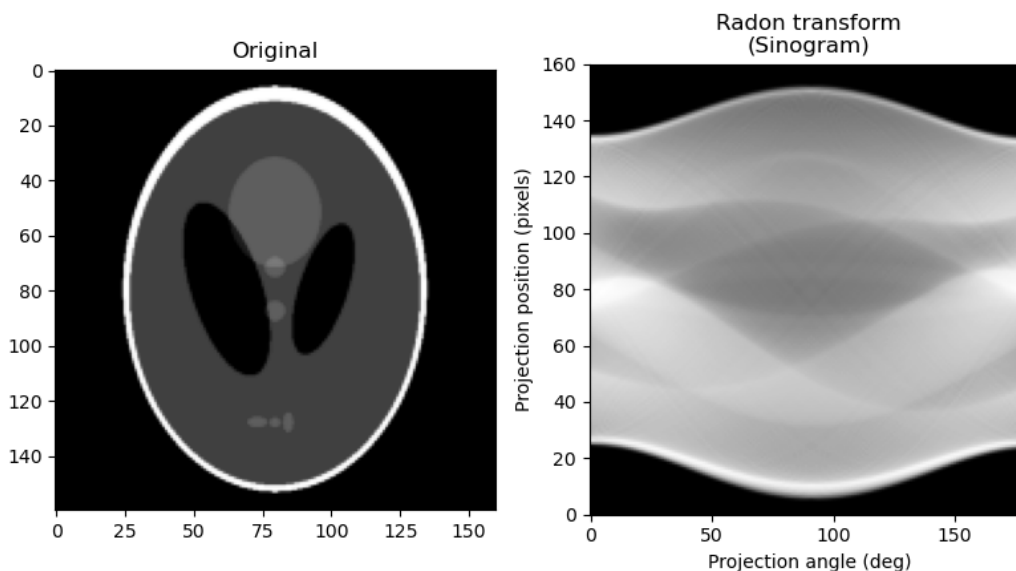


Figura 4: Objeto original (izquierda) con su respectivo sinograma (derecha) [sin \[2023\]](#). Los ejes del sinograma son el ángulo de proyección que va de 0 a 180 grados y la posición de proyección, que equivale a la dimensión del objeto original en píxeles. A mayor número de proyecciones utilizadas, mayor es la resolución del sinograma.

La reconstrucción tomográfica puede resolverse por medio del teorema del corte de Fourier, dado por los siguientes pasos:

Cálculo de la transformada de Fourier de $p_\gamma(\xi)$

$$p_\gamma(\xi) \rightarrow P_\gamma(q)$$

Construcción de la transformada de Fourier de f desde P

$$P_\gamma(q) \rightarrow F(u, v)$$

Reconstrucción del objeto f a partir de transformada inversa de Fourier de F

$$F(u, v) \rightarrow f(x, y)$$

Siguiendo este esquema se parte de la transformada de Fourier al dominio de frecuencias q :

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\gamma(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi \quad (0.2)$$

El teorema del corte de Fourier asegura que:

$$F(u, v) = P_\gamma(q) \quad (0.3)$$

donde $u = q \cos(\gamma)$, $v = q \sin(\gamma)$.

Por lo tanto, con la transformada inversa de F se tiene que:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv \quad (0.4)$$

Expresando F en coordenadas polares e igualando con (0.3) se llega a:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_\gamma(q) e^{2\pi i q \xi} |q| dq d\gamma \quad (0.5)$$

Bajo esta expresión final, se puede observar que se obtiene el objeto original a partir de sus proyecciones. La intuición de este proceso reside en la aplicación principal de la transformada de Fourier, la cual permite pasar una ecuación de onda de un dominio (temporal generalmente) a un dominio de frecuencias, donde pueden detectarse valores máximos en aquellas frecuencias que componen la ecuación de onda original. Para obtener la ecuación de onda original, se utiliza la transformada inversa de Fourier. Haciendo un símil, si los datos de proyección se pueden interpretar como una ecuación de onda (sinograma), y estos datos contienen información del volumen original, entonces las “frecuencias” o diferentes ondas encontradas en el sinograma corresponden a los diferentes elementos que componen el volumen.

De esta manera, el esquema muestra como se puede pasar del objeto original a obtener un sinograma, pasarlo al dominio de frecuencias, donde equivale a la transformada de la función original y regresar al dominio espacial. En la ecuación 0.5 aparece $|q|$, el cual equivale al filtro de este método, ya que este amplifica la función para valores mayores de q , es decir, las ondas que definen al objeto. En otras palabras, visualmente este filtro permite definir mejor los bordes que se encuentran en el objeto, como se observa en la Figura 5.

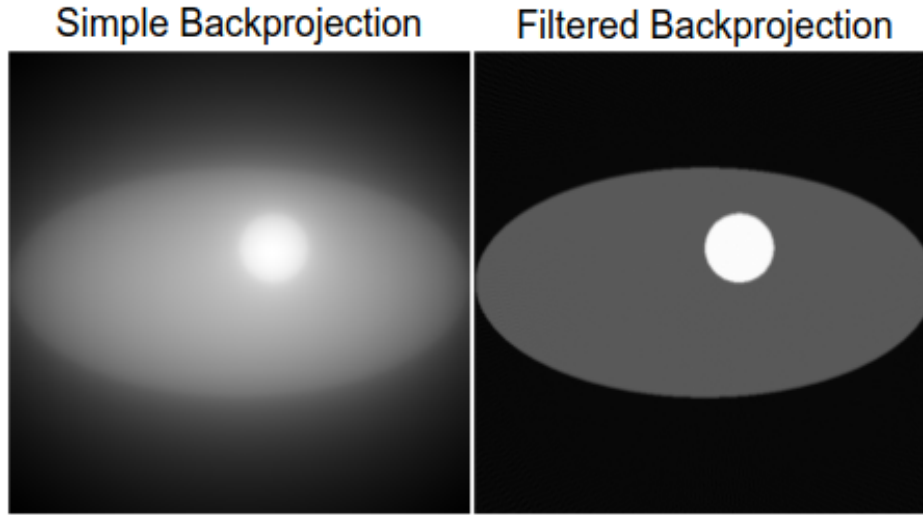


Figura 5: Ilustración de la diferencia entre una reconstrucción hecha por retroproyección simple (izquierda) y filtrada (derecha) [Vandeghinste \[2014\]](#). La retroproyección simple no hace uso de filtros, por lo que se obtiene una imagen borrosa

Cabe recalcar que el proceso es el mismo para un objeto tridimensional y en el contexto de la tomografía de muones, las proyecciones son imágenes 2D que equivalen a los muogramas, como puede apreciarse en el proceso de obtención de los mismos, que consiste en la suma de los valores de densidad (coeficiente de atenuación) a lo largo de una trayectoria a través del objeto. También como algoritmo computacional, el proceso es discretizado, por lo que el objeto original no es una función continua sino una matriz de píxeles (o un volumen de vóxeles) y las integrales son sumatorias con límites definidos. Este algoritmo se destaca por su eficiencia computacional y por tanto es ampliamente utilizado. Sin embargo, depende de un gran número de proyecciones y que estas se encuentren igualmente espaciadas [Buzug \[2008\]](#), [Herman \[2009\]](#), por lo que puede no ser una alternativa viable en la tomografía de muones.

Métodos algebraicos

Técnica de reconstrucción algebraica

Si bien el FBP puede dar un mayor entendimiento a los principios de la reconstrucción tomográfica debido a su formulación analítica, el algoritmo ART (Algebraic Reconstruction Technique) es más instructivo ya que representa el problema de reconstrucción como un sistema de ecuaciones lineales. Dado un sistema $Ax = b$, donde x es el volumen a reconstruir vectorizado, dadas la proyección b . Este sistema puede resolverse con la siguiente expresión:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} a_i^T \quad (0.6)$$

donde A es una matriz dispersa $M \times N$, cuyos elementos a_i representan la contribución relativa de cada pixel en el detector hacia el volumen (M siendo el número de valores individuales de los datos de proyección y N el número de vóxeles del volumen). La Figura 6 ilustra el proceso del ART.

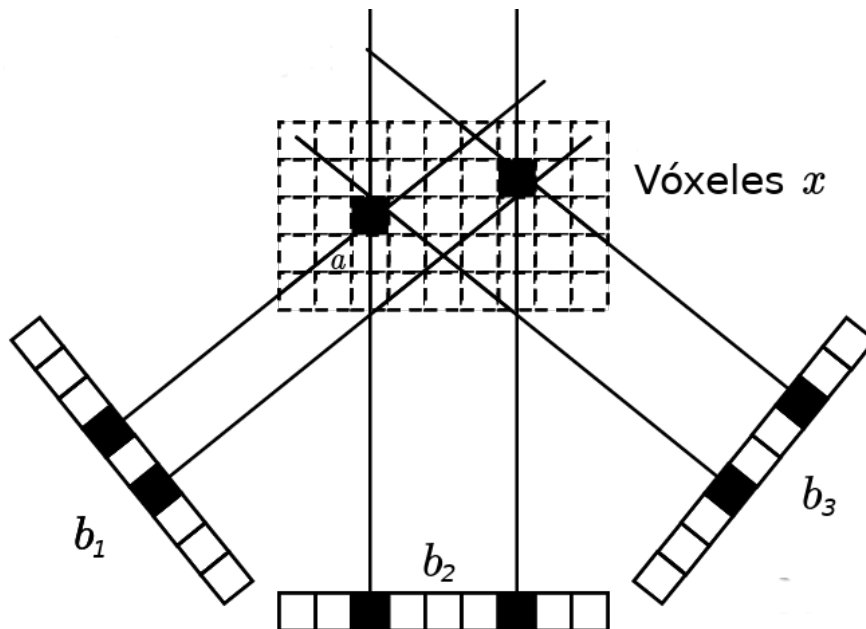


Figura 6: Reconstrucción tomográfica basada en el método ART. Los vóxeles llenos representan los valores necesarios para satisfacer los píxeles llenos en cada proyección registrada en los detectores b . [Atkinson and Soria \[2007\]](#)

El algoritmo realiza k iteraciones, en cada una de las cuales recorre cada detector b y, a su vez, cada pixel de dicho detector. Se inicializa el volumen a reconstruir x y en cada pixel del detector se traza una línea transversal al eje de proyección, donde se calculan las longitudes a de la línea que intersecta los vóxeles. La solución se obtiene cuando la suma de los vóxeles que intersectan la línea de proyección, multiplicados por su respectiva longitud, igualan al valor original encontrado en el pixel del detector, es decir, cuando el valor encontrado en el pixel del detector se ha distribuido correctamente a lo largo del volumen.

Como se mencionó anteriormente, este método resulta más intuitivo como solución computacional, siendo resuelto y planteado como un problema de minimización (donde λ es un parámetro de relajación utilizado en la solución de estos problemas). Si bien fue descartado anteriormente debido a su costo computacional, ha sido retomado gracias al continuo incremento de la potencia de los sistemas de cómputo. Además, se ha comprobado que ofrece resultados óptimos con un menor número de proyecciones no equidistantes, a comparación del FBP [Buzug \[2008\]](#), [Flores et al. \[2015\]](#), [Herman and Meyer \[1993\]](#).

Métodos estadísticos

Esperanza de maximización de la máxima verosimilitud

Al igual que el ART, el algoritmo ML-EM (Maximum Likelihood - Expectation Maximization) es un método iterativo, en el cual se inicializa la densidad del volumen $\lambda^{(0)}(b)$ de un vóxel b ; donde $b = 1, 2, \dots, B$, siendo B el número de vóxeles de la imagen 3D. La proyección bidimensional de la imagen en el detector puede ser calculada por la estimación del volumen $\lambda^{(m)}$ en la m -ésima iteración:

$$n'(d) = \sum_{b=1}^B \lambda^{(m)} p(b, d) \quad (0.7)$$

donde $n'(d)$ es el vector de atenuación, que corresponde a un valor de densidad de la estructura que atenúa el flujo de muones, $p(b, d)$ es la probabilidad de detectar un evento de un muon en el vóxel b a ser detectado por el par de pixeles d donde $d = 1, 2, \dots, D$. D corresponde a la cantidad total de direcciones observadas permitidas por el detector. Con esta estimación, se actualiza el volumen:

$$\lambda^{(m+1)}(b) = \lambda^{(m)}(b) \left\{ \frac{1}{\sum_d p(b, d)} \sum_d \frac{n(d) p(b, d)}{n'(d)} \right\} \quad (0.8)$$

Se sigue iterando actualizando $n'(d)$ y λ con la ecuación 0.7 y 0.8, respectivamente, hasta que $n'(d)$ iguale al vector experimental de atenuación $n(d)$.

En resumen, este método utiliza información y principios estadísticos de las partículas, lo que le permite estimar el volumen aunque se posean pocos datos. No obstante, este proceso estocástico requiere un gran costo computacional. Este algoritmo tiene ciertas ventajas sobre métodos analíticos como el FBP, por ejemplo, en la utilización de conjunto de datos incompletos de proyección. Esta ventaja es relevante en el problema de muografía de volcanes, debido al bajo índice de muones producido por rayos cósmico y las limitaciones de posición y ángulos de los detectores [Chaiwongkhot et al. \[2022\]](#).

Teniendo en cuenta este marco teórico, se estructuró este trabajo de la siguiente manera: en la sección 2 se enumeran los objetivos formulados para esta investigación. En la sección 3 se seleccionó un algoritmo de reconstrucción tomográfica entre los diferentes métodos disponibles en diferentes librerías. Posteriormente se implementó el algoritmo de reconstrucción tomográfica elegido, teniendo las consideraciones necesarias para tomografía de muones. Se exploró el alcance y limitaciones de este algoritmo variando el número de puntos de observación, basándose en la motivación principal de este estudio. En la sección 4, se reconstruyó la distribución interna del volcán Cerro Machín y se validó para diferentes reconstrucciones variando el número de puntos de observación, encontrando un número de puntos de observación óptimo para obtener la mejor reconstrucción. Finalmente, en la sección 5 se exponen las conclusiones de este trabajo.

1 Objetivos

1.1. Objetivo General

- Realizar la reconstrucción de imagen por tomografía de muones para obtener la distribución de densidad interna de un objeto geológico.

1.2. Objetivos Específicos

- Seleccionar un algoritmo de reconstrucción apto para tomografía de muones.
- Evaluar resultados obtenidos a partir de la variación en la cantidad de puntos de observación igualmente espaciados.
- Implementar un algoritmo para la reconstrucción tomográfica de objetos geológicos utilizando proyecciones simuladas.
- Validar la reconstrucción de imagen por tomografía de la distribución de densidad interna de un objeto geológico.

2 Implementación y evaluación de algoritmos de reconstrucción

Teniendo en cuenta los principales métodos de reconstrucción tomográfica presentados en el marco teórico, se buscaron librerías que contuvieran dichos algoritmos. Notablemente están las librerías TomoPy [Gursoy et al. \[2014\]](#) y ASTRA Toolbox [van Aarle et al. \[2015\]](#). Esta última permite al usuario ingresar datos más específicos como la geometría de proyección y distancias entre fuente detector. Por otra lado, TomoPy es una librería de fácil uso que no requiere inicialización de geometría del volumen y proyecciones para realizar una reconstrucción tomográfica con un tiempo de ejecución eficiente. Por estas razones se utilizó TomoPy con la alternativa de usar ASTRA a partir de su integración con TomoPy [Pelt et al. \[2016\]](#).

2.1. Cálculo de error

Para evaluar las reconstrucciones tomográficas obtenidas con los diferentes algoritmos, es necesario definir la forma de evaluar estas imágenes. Existen diferentes formas de evaluar la discrepancia entre una imagen obtenida y una imagen de referencia. El error cuadrático medio (MSE por sus siglas en inglés) o raíz del error cuadrático medio (RMSE) son las más comunes pues es fácil de calcular y tiene un sentido físico, sin embargo no proporciona una intuición visual comparativa para el humano [Wang et al. \[2004\]](#), por lo que debe apoyarse de otra métrica que asista a encontrar las diferencias estructurales entre ambas imágenes. Teniendo esto en cuenta, para evaluar y comparar los resultados obtenidos en el proceso de reconstrucción, se seleccionaron las siguientes métricas:

$$\varepsilon_{i,j} = R_{i,j} - T_{i,j} \quad (2.1)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (R_{i,j} - T_{i,j})^2} \quad (2.2)$$

donde R es la imagen reconstruida, T la imagen original, M y N las dimensiones en píxeles de la imagen.

La ecuación 2.1 calcula la diferencia pixel a pixel entre la imagen reconstruida y la

imagen original, lo que permite obtener un mapa de error que muestra regiones faltantes o de exceso en la reconstrucción. Por su parte, la ecuación 2.2 mide la raíz el error cuadrático medio de la imagen reconstruida, lo que permite obtener un valor numérico para analizar el error. Estas métricas son utilizadas en tomografía de muones como error sistemático y accidental [Nagahara and Miyamoto \[2018\]](#).

Aunque existen métricas invariantes a diferentes transformaciones en la reconstrucción de imágenes [Fienup \[1997\]](#), [Tong et al. \[2019\]](#), no se consideró necesario utilizarlas en este proyecto. En la tomografía de muones, es importante calcular un nuevo error si la imagen sufre transformaciones de escala o translación, ya que esto indica un cambio en la región geológica. En cambio, el RMSE varía muy poco ante cambios en la distribución de densidad interna de un mismo objeto, lo que significa que los puntos de observación necesarios para su reconstrucción tomográfica serán los mismos.

2.2. Escenario de prueba

Para probar los algoritmos de reconstrucción tomográfica se utilizó un escenario de prueba, cuyos resultados son conocidos. El escenario de prueba implica usar un objeto con un rango completo de puntos de observación con las condiciones idóneas para obtener la mejor reconstrucción posible.

Se utilizó como imagen de prueba el espectro Shepp-Logan [Shepp and Logan \[1974\]](#), disponible en TomoPy. Es un volumen de $128 \times 128 \times 128$ vóxeles, cuyos valores internos representan su densidad interna. Se obtuvieron proyecciones en 180 puntos igualmente espaciados en un rango de 180 grados. Para reconstruir el volumen se requieren las proyecciones, los ángulos donde estas fueron obtenidas respecto al centro de rotación y el algoritmo a emplear. Se probaron todos los algoritmos de reconstrucción disponibles en esta librería y se visualizó un corte transversal del volumen reconstruido, como se muestra en la Figura 2.1.

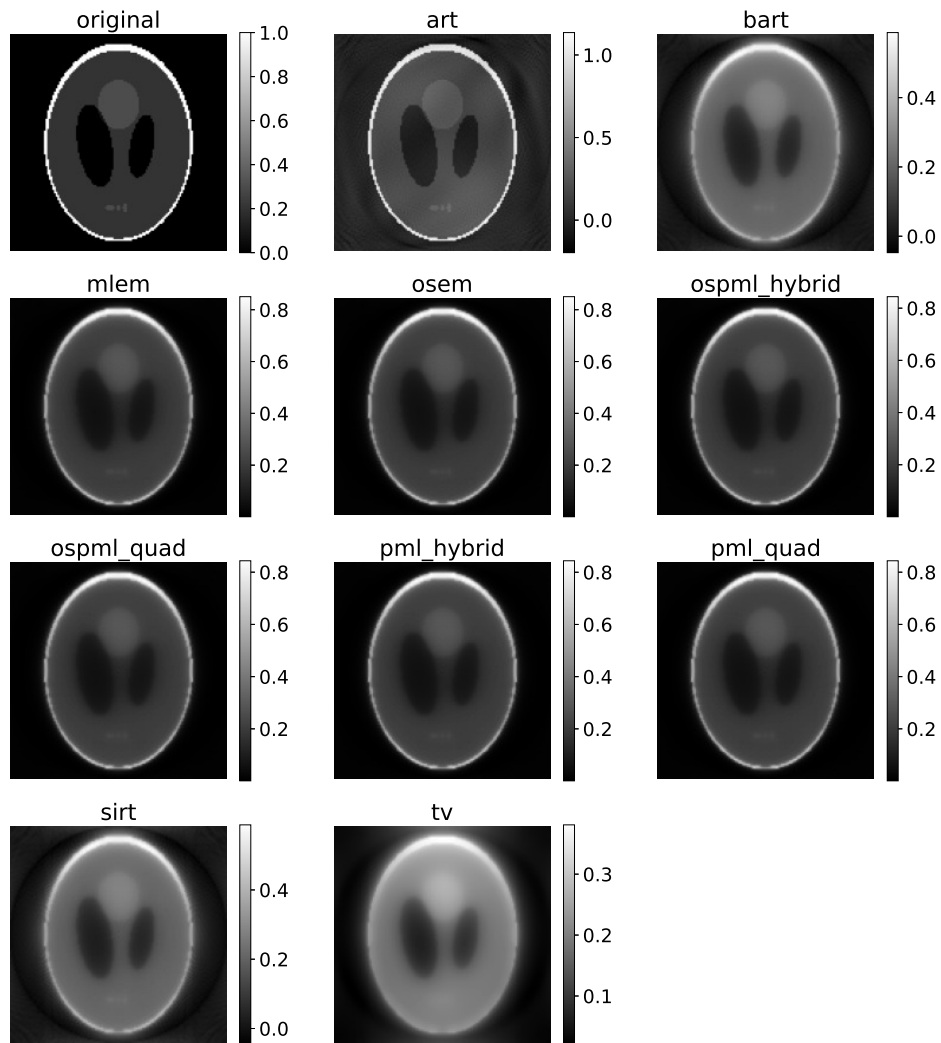


Figura 2.1: Corte transversal de reconstrucciones del espectro con los diferentes algoritmos iterativos de TomoPy. La escala de grises en la Figura representa los diferentes niveles de densidad del objeto, donde los colores más claros indican una mayor densidad y los colores más oscuros indican una menor densidad.

Se puede observar que en la Figura 2.1 no se incluyó el método FBP ya que TomoPy no tiene implementado el filtrado, el cual es necesario para obtener una reconstrucción satisfactoria, como se evidencia en la Figura 5. En cambio se evaluaron métodos iterativos con 10 iteraciones para la reconstrucción. Se destaca el resultado del algoritmo ART, que obtiene una mejor definición en las densidades internas del objeto. La raíz del error cuadrático medio de los diferentes algoritmos se muestra en el Cuadro 2.1

Algoritmo	RMSE
Algebraic reconstruction technique (ART)	0.001486
Block algebraic reconstruction technique (BART)	0.01841
Maximum-likelihood expectation maximization algorithm (ML-EM)	0.01016
Ordered-subset expectation maximization algorithm (OSEM)	0.01016
Ordered-subset penalized maximum likelihood algorithm with weighted linear and quadratic penalties (OSPML_hybrid)	0.01029
Ordered-subset penalized maximum likelihood algorithm with quadratic penalties (OSPML_quad)	0.01031
Penalized maximum likelihood algorithm with weighted linear and quadratic penalties (PML_hybrid)	0.01029
Penalized maximum likelihood algorithm with quadratic penalty (PML_quad)	0.01031
Simultaneous algebraic reconstruction technique (SIRT)	0.01841
Total Variation reconstruction technique (TV)	0.02740

Cuadro 2.1: RMSE de algoritmos de TomoPy con 10 iteraciones. Se obtiene un error mínimo de 0.001486 con el algoritmo ART.

Se puede observar en el Cuadro 2.1 que el ART obtiene el menor RMSE con una notable diferencia. Si bien es cierto que el número de iteraciones necesarias para converger varía según el algoritmo, por lo que otros métodos pueden obtener mejores resultados a mayor número de iteraciones, es relevante conocer que el algoritmo ART obtiene un mejor resultado con un menor número de iteraciones.

También se evaluaron los algoritmos disponibles en ASTRA y los resultados se muestran en la Figura 2.2 y el Cuadro 2.4.

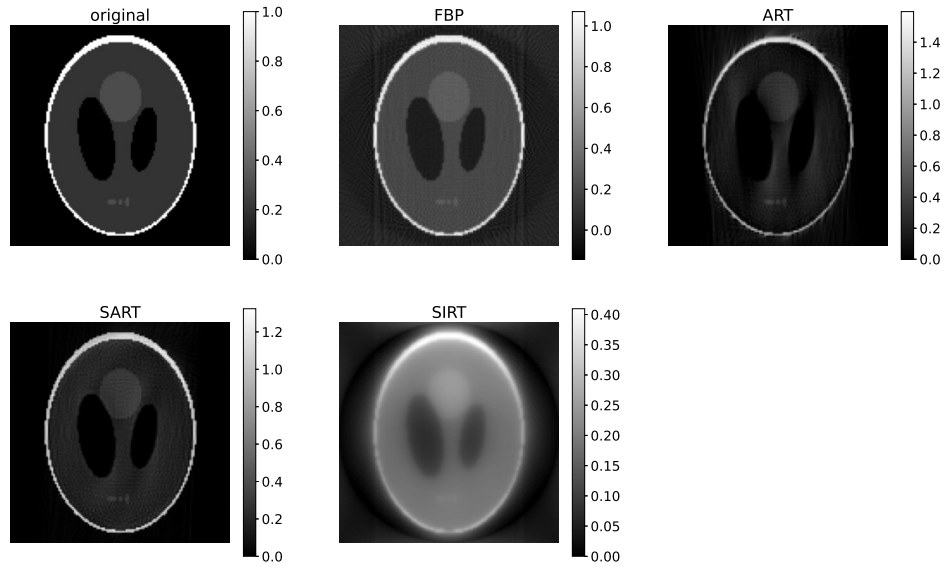


Figura 2.2: Corte transversal de reconstrucciones con algoritmos de ASTRA. La barra de color indica el valor de densidad de la imagen. Los algoritmos, aunque sean los mismos presentados en la Figura 2.1 pueden tener una implementación diferente, lo que implica en un manejo diferente de parámetros que puede resultar en una reconstrucción diferente.

Algoritmo	RMSE
Filtered Back Projection (FBP)	0.002452
Algebraic reconstruction technique (ART)	0.01057
Simultaneous Algebraic reconstruction technique (SART)	0.001647
Simultaneous algebraic reconstruction technique (SIRT)	0.02551

Cuadro 2.2: RMSE de algoritmos de ASTRA. Se obtiene un error mínimo de 0.001647 con el algoritmo SART.

Esta vez el FBP se encuentra correctamente implementado, siendo el segundo mejor resultado que se observa en el cuadro 2.4. Para los métodos iterativos restantes, un mismo número de iteraciones no funcionaba para todos, por lo que se procuró tener como punto de comparación un tiempo de ejecución cercano entre los algoritmos. Se puede observar en la Figura 2.2 que la versión del ART de Astra no termina de converger, dando un peor resultado que la versión de TomoPy, mientras que ambas versiones del SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique [Gilbert \[1972\]](#)) dan resultados similares. Finalmente el algoritmo SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique [Andersen and Kak \[1984\]](#)) obtiene el error mínimo (RMSE = 0.001647). Cabe resaltar que estos últimos métodos son ampliamente utilizados en la investigación médica y aplicaciones clínicas de tomografía computarizada.

2.3. Tiempo de ejecución

Otro aspecto importante de los algoritmos de reconstrucción es su eficiencia computacional. Para evaluarlos se compararon los tiempos de ejecución (obtenidos sin uso de GPUs) de las reconstrucciones obtenidas en las Figuras 2.1 y 2.2, como se observa en los Cuadros 2.3 y 2.4.

Algoritmo	Tiempo (s)
Algebraic reconstruction technique (ART)	13.36631
Block algebraic reconstruction technique (BART)	54.74838
Maximum-likelihood expectation maximization algorithm (ML-EM)	50.36013
Ordered-subset expectation maximization algorithm (OSEM)	45.08083
Ordered-subset penalized maximum likelihood algorithm with weighted linear and quadratic penalties (OSPML_hybrid)	49.12267
Ordered-subset penalized maximum likelihood algorithm with quadratic penalties (OSPML_quad)	53.81185
Penalized maximum likelihood algorithm with weighted linear and quadratic penalties (PML_hybrid)	50.30256
Penalized maximum likelihood algorithm with quadratic penalty (PML_quad)	56.78958
Simultaneous algebraic reconstruction technique (SIRT)	47.93596
Total Variation reconstruction technique (TV)	57.39038

Cuadro 2.3: Tiempo de ejecución de algoritmos de TomoPy.

Algoritmo	Tiempo (s)
Filtered Back Projection (FBP)	1.22045
Algebraic reconstruction technique (ART)	14.00061
Simultaneous Algebraic reconstruction technique (SART)	13.12403
Simultaneous algebraic reconstruction technique (SIRT)	15.22713

Cuadro 2.4: Tiempo de ejecución de algoritmos de ASTRA.

Se puede observar en el Cuadro 2.3 que el método ART tiene un tiempo de ejecución de 13.36631 segundos, el cual es significativamente menor a los demás. Esto combinado con los resultados que se ilustran en la Figura 2.1 lo muestran como el mejor método de la librería TomoPy.

Por otra parte, en el Cuadro 2.4 se observa que el FBP obtuvo el menor tiempo de ejecución fue de 1.22045 segundos, el cual también muestra los mejores resultados en la Figura 2.2. Como se mencionó anteriormente, se buscó igualar el tiempo de ejecución de los métodos iterativos, que también resultan cercanos al tiempo del ART de TomoPy y de esta manera se observa que el método de esta librería obtuvo mejores resultados que el método de ASTRA. No obstante, el SART da el mejor resultado entre los métodos iterativos con un tiempo de ejecución de 13.12 segundos, a comparación de 14 segundos del ART y 15.227 del SIRT.

2.4. Confiabilidad

Teniendo en cuenta que en la tomografía de muones se tiene un número bajo de puntos de observación, los algoritmos elegidos fueron evaluados en reconstrucciones de 30 puntos de observación y se calculó su RMSE. Los resultados se muestran en la Figura 2.3.

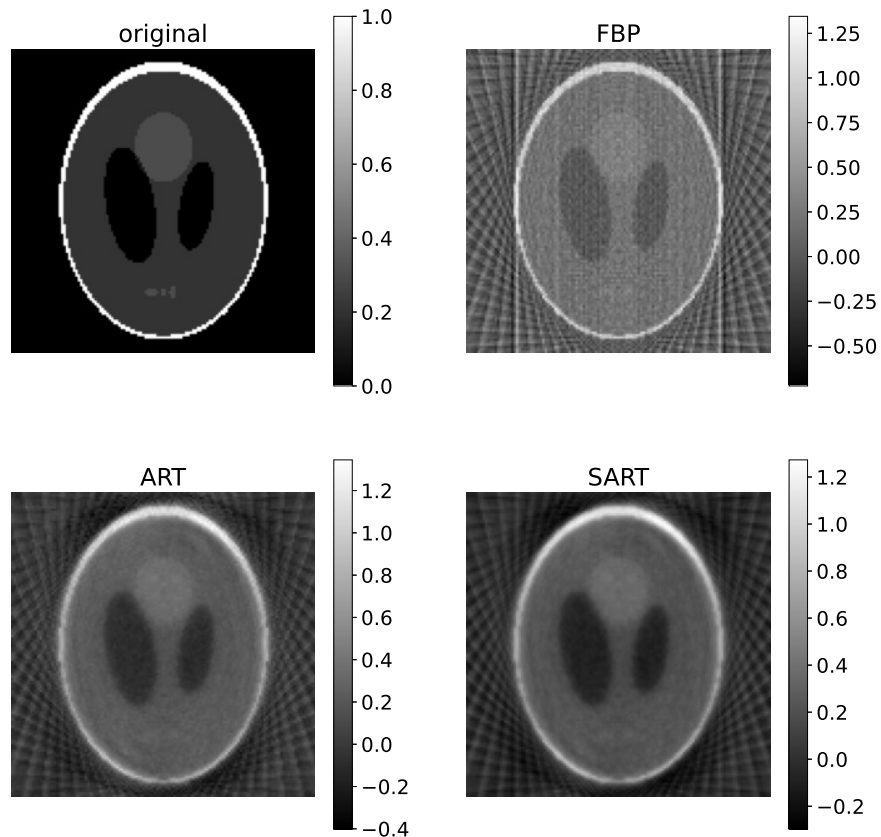


Figura 2.3: Reconstrucciones con 30 puntos de observación de algoritmos elegidos. Se estableció un tiempo de ejecución cercano para los 3 algoritmos, de 0.21 segundos para el algoritmo FBP y ART y 0.5 segundos para el SART. Se obtuvo un $RMSE = 0.15$ con el FBP, 0.117 con el SART y 0.119 para el ART.

Como se observa en la Figura 2.3, el FBP tiene peor desempeño al contar con un bajo número de puntos de observación y obtiene un RMSE de 0.152, siendo el mayor de las tres reconstrucciones, lo cual concuerda con los conceptos estudiados previamente en el marco teórico. Además, los tres resultados se obtuvieron con un tiempo de ejecución cercano, alrededor de los 0.21 segundos para el FBP y ART y 0.5 segundos para el SART, esto se debe a que este último requiere como mínimo un número de iteraciones igual al número de puntos de observación, mientras que el ART utilizó una sola iteración. La reconstrucción obtenida es casi idéntica a la del SART, con un RMSE de 0.119 para el ART y 0.117 para el SART, por lo que, teniendo en cuenta una ligera ventaja en tiempo de ejecución y por su simplicidad, como también las ventajas que presenta debido a sus principios teóricos enunciados en la sección anterior, se escogió el ART como algoritmo de reconstrucción para el resto de la experimentación.

A continuación se hace una evaluación mediante un mayor número de puntos de observación igualmente espaciados, un mayor rango angular de los puntos de observación ubicados, y un mayor número de iteraciones, lo que resulta en una mejor calidad de la imagen obtenida.

Las dos primeras reglas se evidencian en la ecuación 0.5, donde se reconstruye el objeto con una integral de 0 a π (rango suficiente para reconstruir la imagen completa, debido a la simetría entre detector-fuente [Herman \[2009\]](#)), lo que indica que se tienen proyecciones indefinidas en ese rango, siendo imposible en un caso discreto, pero la solución discreta se aproxima más a la analítica entre más proyecciones se tengan.

La última regla está respaldada por la ecuación 0.6, que corresponde a un método de optimización que itera hasta minimizar la diferencia entre las proyecciones medidas y las proyecciones simuladas a partir de una solución candidata. Por lo tanto requiere suficientes iteraciones para converger y encontrar la solución óptima.

Con el objetivo de determinar si las reglas generales de las reconstrucciones tomográficas se mantienen en la tomografía de muones, se llevaron a cabo experimentos para corroborar estas reglas y establecer una comparación directa.

2.5. Variación del rango angular

Dado que hay dificultades topográficas que reducen el rango angular en la que se pueden ubicar los detectores alrededor de la estructura geológica, se realizaron reconstrucciones del espectro Shepp-Logan con variación de rango angular y número de puntos de observación fijos, como se muestra en la Figura 2.4.

2.6. VARIACIÓN DEL NÚMERO DE PUNTOS DE OBSERVACIÓN

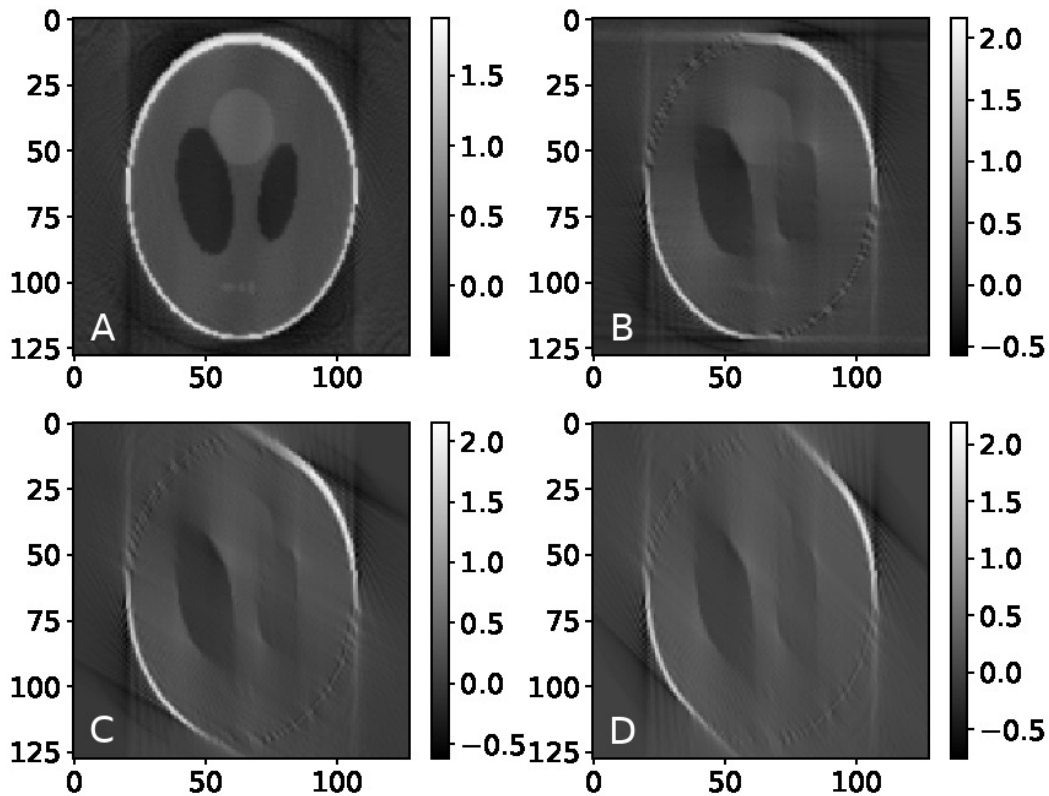


Figura 2.4: Reconstrucciones con 180 puntos y variación de rango angular. A) Rango angular de 0 a 180 grados. B) Rango de 0 a 90 grados. C) Rango de 0 a 60 grados. D) Rango de 0 a 45 grados.

Como se observa en la Figura 2.4, a pesar de obtener reconstrucciones con buena resolución, su forma desmejora a menor rango angular, obteniendo una buena reconstrucción únicamente en la zona angular con la que se cuenta (y su cuadrante opuesto debido a la simetría de proyección respecto al origen), como se había establecido anteriormente. Efectivamente el menor error ($RMSE = 0.019$) es obtenido con el rango de 180 grados y va aumentando al disminuir el rango angular. Esto demuestra que no es suficiente tener una gran cantidad de puntos de observación, sino que estos deben estar ubicados uniformemente en un rango de 180 grados alrededor del objeto.

2.6. Variación del número de puntos de observación

Para este apartado se reconstruyó el espectro con un rango angular fijo de 180 grados, variando el número de puntos de observación, como se muestra en la Figura 2.5.

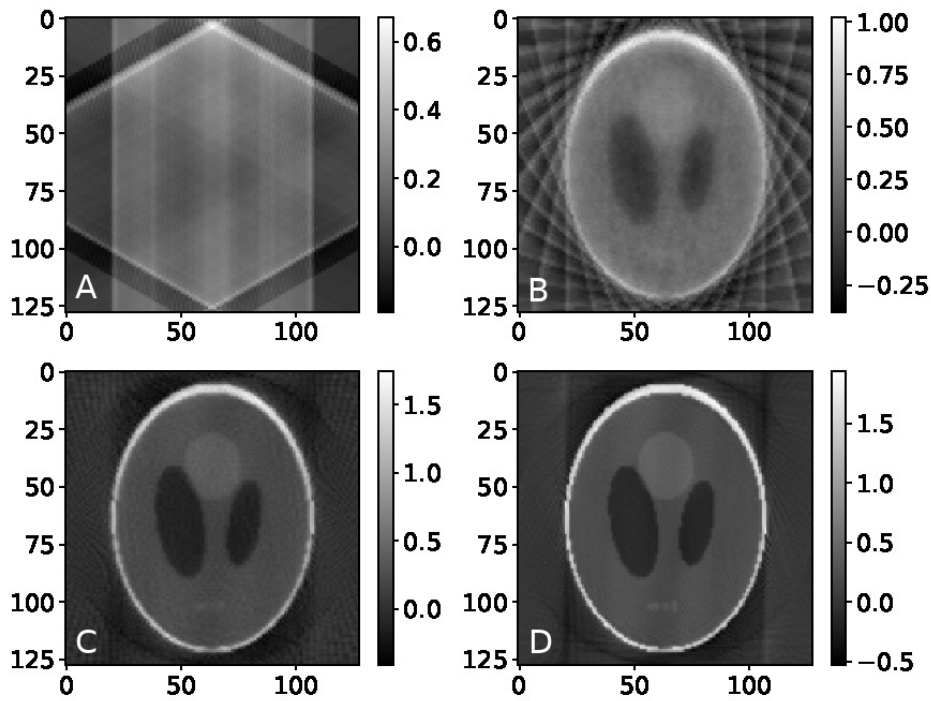


Figura 2.5: Reconstrucciones con rango angular de 180 grados y variación de número de puntos de observación. A) 4 puntos. B) 16 puntos. C) 64 puntos. D) 256 Puntos.

Esta vez se obtiene la forma completa del objeto y su resolución aumenta a mayor número de puntos de observación. En la Figura 2.5 se observa que desde la reconstrucción de 16 puntos se aprecia claramente el objeto, mientras que con 256 puntos se obtiene la mejor definición. Sin embargo, al observar la barra de colores, se aprecia un exceso en la magnitud de la densidad interna, recordando que la densidad del espectro original va de 0 a 1 como se muestra en la Figura 2.3. Esto indica que la reconstrucción D no necesariamente es la mejor opción, ya que este exceso aumenta el error de la reconstrucción. Por otra parte, a pesar de que la densidad interna de la reconstrucción B llega hasta 1, lo que indicaría que se acerca más en magnitud a la original, la imagen resultante es ruidosa. Por lo tanto, según los resultados de la Figura 2.5, el número de puntos de observación óptimo reside entre 16 y 256. A partir de esta hipótesis, se realizaron más reconstrucciones variando el número de puntos, y se calculó su error respecto a la imagen original por medio de la ecuación 2.2.

2.7. VARIACIÓN DEL NÚMERO DE ITERACIONES

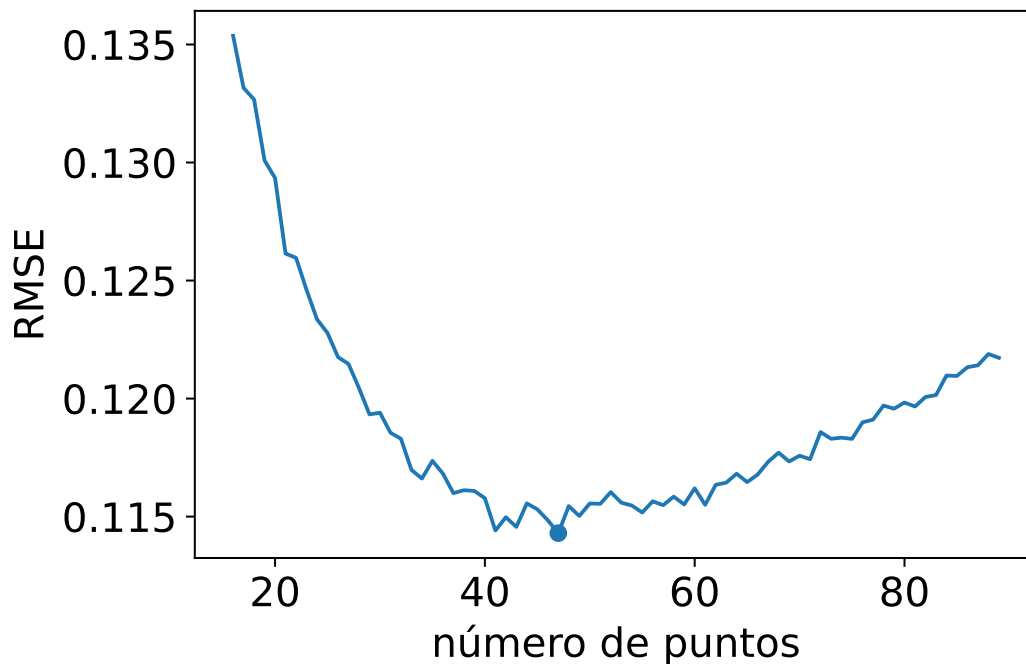


Figura 2.6: RMSE de reconstrucciones variando el número de puntos de observación. El error mínimo (RMSE = 0.114) se encuentra con 47 puntos.

Como se observa en la Figura 2.6, se obtuvo un error mínimo de 0.114 en 47 puntos, validando la hipótesis. También se observa una forma parabólica, lo que indica que el error disminuye en la medida que aumentan los puntos de observación e incrementa nuevamente al haber un exceso en la magnitud de la densidad interna debido a un exceso de puntos. En otras palabras, existe un punto medio entre aumentar la resolución de la imagen con suficientes puntos de observación, y no utilizar demasiados puntos para evitar exceso en la magnitud de la densidad interna.

2.7. Variación del número de iteraciones

En la sección anterior, se utilizó una sola iteración en el algoritmo para todas las reconstrucciones. De esta manera, se pudo analizar el comportamiento del error variando el número de puntos de observación con un bajo costo computacional. Sin embargo, para medir el alcance del algoritmo, se reconstruyó el objeto con 180 puntos y un rango angular de 180 grados, aumentando el número de iteraciones y calculando el error cuadrático medio, como se muestra en la Figura 2.7.

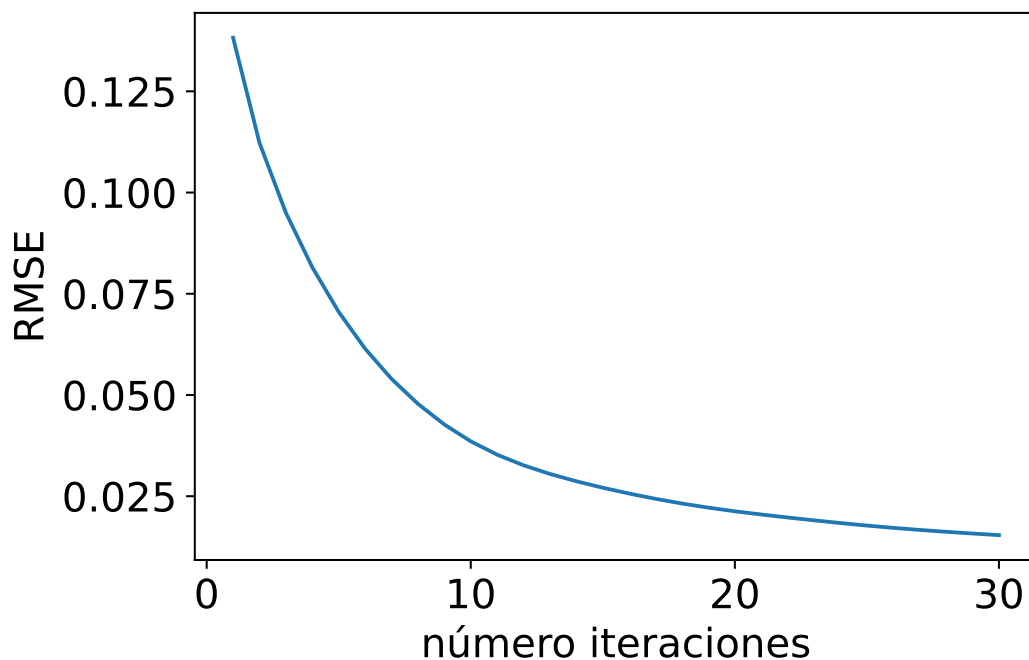


Figura 2.7: RMSE de reconstrucciones variando el número de iteraciones.

Se observa en la Figura 2.7 que el error tiende a converger a 0 en 30 iteraciones. Por lo tanto, se obtuvo un menor error con 180 puntos y 30 iteraciones en comparación con 47 puntos y 1 iteración. De hecho, con 180 puntos y 2 iteraciones se obtiene un $RMSE = 0.112$, el cual es menor al error mínimo obtenido en la Figura 2.6. Esto indica que el número de puntos óptimos aumentó al aumentar el número de iteraciones. Para corroborar esto, se unieron ambos experimentos y los resultados se muestran en la Figura 2.8.

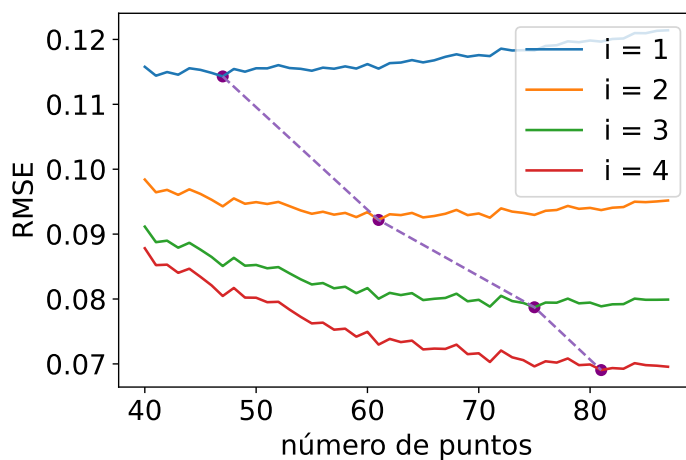


Figura 2.8: RMSE de reconstrucciones variando el número de puntos e iteraciones i . Cada línea de color representa reconstrucciones variando el número de puntos de observación con el número de iteraciones i dado.

2.7. VARIACIÓN DEL NÚMERO DE ITERACIONES

Se puede observar en la Figura 2.8 que el número de puntos óptimo aumenta en cada iteración y el error de su reconstrucción disminuye. Es importante tener en cuenta que el costo computacional incrementa considerablemente en la medida que se aumentan las iteraciones, especialmente si se tiene un mayor número de proyecciones.

En resumen, se puede obtener una reconstrucción óptima haciendo uso de las diferentes reglas generales estudiadas en la experimentación hecha en esta sección:

1. Hacer uso del mayor rango angular posible (0 a 180 grados).
2. Encontrar el número de puntos de observación óptimo (suficientes para una buena calidad de imagen, no demasiados para no excederse en la magnitud).
3. Aumentar el número de iteraciones.

3 Tomografía de muones del volcán Cerro Machín

3.1. Reconstrucción de objetos geológicos

Una vez establecido el algoritmo a utilizar y las métricas para evaluar su precisión, como también las reglas generales a tener en cuenta, se abarcó el problema de la tomografía de muones. Se usaron proyecciones simuladas de la estructura real del objeto geológico de estudio (volcán Cerro Machín) obtenidas por MUYSC (MUographY Simulation Code) Peña-Rodríguez et al. [2023], una herramienta de simulación que permite obtener muogramas a partir de las coordenadas (en latitud y longitud) de la región donde se ubica el objeto de interés y el punto de observación donde se quiere obtener el muograma. Los muogramas son obtenidos por medio de un algoritmo que simula el paso de muones a través de la topografía de la estructura geológica, la cual se encuentra disponible en un dataset de la NASA nas [2013] y se aproxima su densidad a la de roca estándar. Por medio del trazado de rayos, se calcula la distancia recorrida por cada muon dentro de la estructura, y de esta manera se obtiene un muograma como el ilustrado en la Figura 3.1.

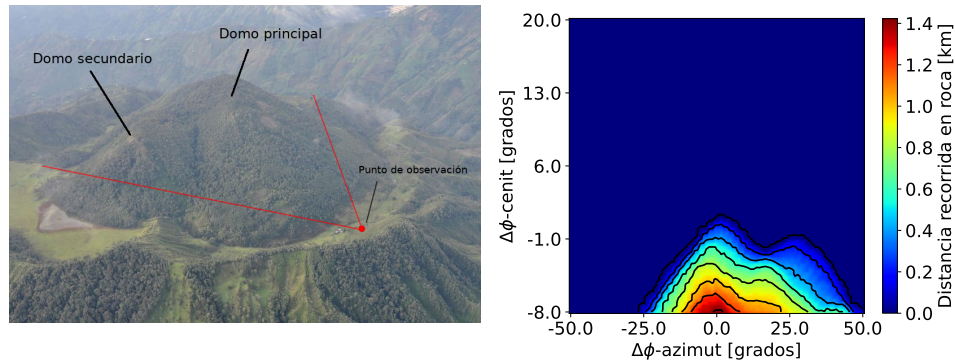


Figura 3.1: Ilustración de ubicación del punto de observación donde se obtiene el muograma del volcán Cerro Machín (izquierda), muograma obtenido por MUYSC (derecha). El muograma fue obtenido de un punto de observación ubicado en 4.496 latitud y -75.389 longitud a 1079 m del punto más alto del volcán, a una altura de 2495 ± 10 m s.n.m y un ángulo de 0.03 rad respecto al punto de referencia y el eje latitudinal. El rango angular es ingresado por el usuario, en este caso es 28 grados cenit y 100 grados azimut. La escala de colores indica la distancia recorrida en roca por el muon.

3.1. RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS GEOLÓGICOS

En la Figura 3.1, se puede observar un muograma del volcán Cerro Machín, cuyos ejes son el rango angular en azimut y cenit en grados del detector simulado (parámetros dados por el usuario) y sus valores internos corresponden a la distancia en kilómetros recorrida en roca por los muones. Estos valores están directamente relacionados con la distribución de densidad interna, en especial en el modelo donde se asume como aproximación que toda la estructura está compuesta de roca estándar, por lo que la densidad del volcán aumenta proporcionalmente a mayor cantidad de materia en la estructura, en otras palabras, la densidad es mayor a mayor distancia recorrida en roca por los muones. Es por eso que esta medida previa Peña-Rodríguez [2021] estimada en el módulo de muografía es aplicable también para la tomografía de muones.

Para obtener este muograma fueron necesarios tres parámetros fundamentales: La región de la topografía, las coordenadas del punto de observación y del punto de referencia. La región es dada en un arreglo de cuatro coordenadas, que son las esquinas del rectángulo que encierra la región deseada. En este caso la región dada fue de 4.47 y 4.5 en latitud y -75.4 y -75.37 en longitud, dando la topografía ilustrada en la Figura 3.2.

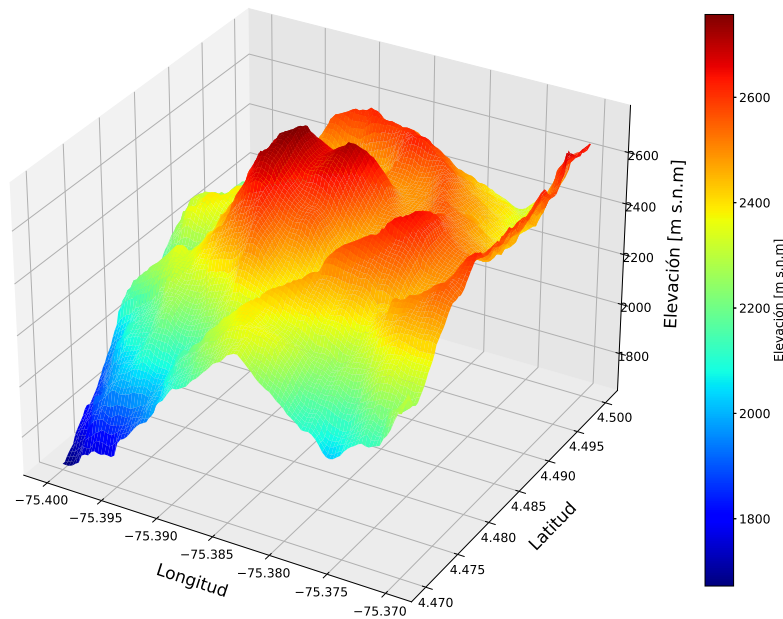


Figura 3.2: Topografía del volcán Cerro Machín. La escala de colores corresponde a la altura del volcán en metros sobre el nivel del mar.

O por conveniencia, para una mejor visualización de toda la región:

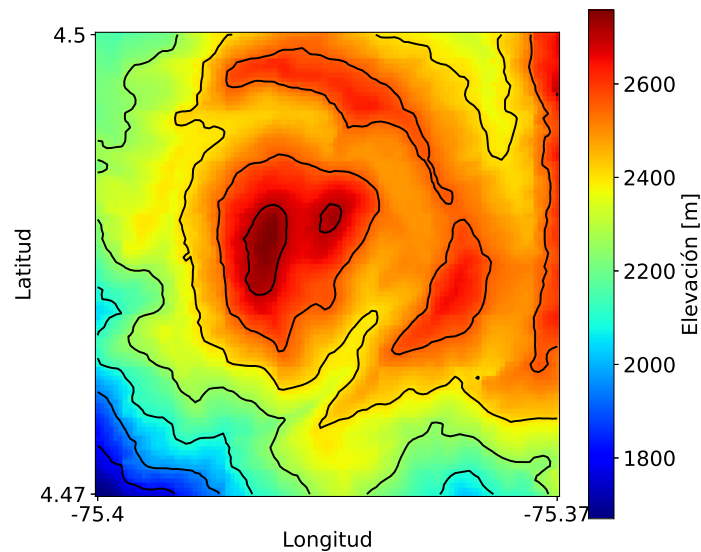


Figura 3.3: Vista superior de la topografía del volcán Cerro Machín. Los valores y región presentados son los mismos que en la Figura 3.2. El punto de referencia se ubica en el punto más alto del volcán, ubicado en 4.487° latitud y -75.389° longitud, a 2758 m s.n.m.

La coordenada del punto de referencia es por defecto el punto más alto de la región, que en este caso es 4.487 latitud y -75.389 longitud, a una altura de 2758 m s.n.m. Finalmente, la coordenada del punto de observación es dada por el usuario.

Este proceso se repite para obtener muogramas en diferentes coordenadas alrededor del volcán, para así realizar la tomografía de muones. No obstante, como se mencionó en un principio, y como se puede observar en la Figura 3.2, la región es irregular, por lo que los puntos de observación no se encuentran en un mismo plano a una misma altura. Esto es fundamental, pues el algoritmo de reconstrucción tomográfica asume esto, ya que es el caso en un entorno médico. Por lo tanto, se buscaron coordenadas que tuvieran la misma altura en toda la región, con una variación definida de 10 m. Este umbral se escogió manualmente, por lo que puede cambiar para obtener diferentes resultados, sin embargo se consideró que 10 metros era un umbral que podría no afectar en gran cantidad la reconstrucción final y al mismo tiempo permitía conservar algunos puntos que podrían ser de utilidad. Los puntos obtenidos se muestran en la Figura 3.4.

3.1. RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS GEOLÓGICOS

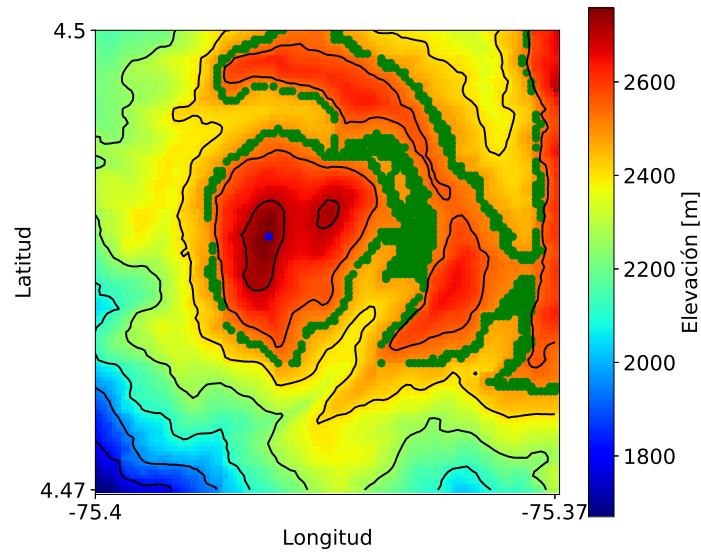


Figura 3.4: Puntos de observación con $h=2495$ m s.n.m ± 10 m (verde) ubicados en la topografía del volcán Cerro Machín. Punto de referencia (azul) ubicado en el punto más alto del volcán.

Como se observa en la Figura 3.4, los puntos verdes son coordenadas que tienen una altura de 2495 m s.n.m, con una variación de ± 10 m.

Hecho esto, es fundamental filtrar los puntos para garantizar que tengan la misma distancia respecto al punto de referencia, lo cual nuevamente es encontrado en un entorno métrico, por lo que el algoritmo asume esta equidistancia. Para ello se estableció un umbral de 40 m y se obtuvieron los puntos que se observan en la Figura 3.5.

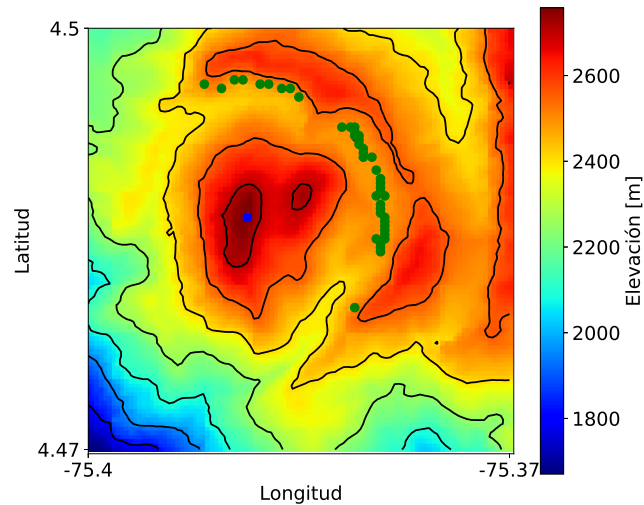


Figura 3.5: Puntos de observación con altura $h=2495$ m s.n.m ± 10 m y equidistancia a ± 40 m ubicados en la topografía del volcán Cerro Machín. La región resultante donde residen los puntos concuerda con la región óptima para realizar tomografía de muones [Vesga-Ramírez et al. \[2020\]](#).

CAPÍTULO 3. TOMOGRAFÍA DE MUONES DEL VOLCÁN CERRO MACHÍN

Esta vez se escogió una variación de 40 metros, y se obtuvieron 42 puntos de observación. Es importante resaltar este proceso, pues se evidencia la dificultad del problema de tomografía de muones en un volcán como el Cerro Machín. En la Figura 3.4, se tenían 701 puntos y luego de filtrar según su equidistancia (con un umbral relativamente alto), solo quedan 42. La irregularidad de la topografía es un problema que se debe abordar si se hace tomografía de muones con volcanes, sin contar el problema de blindaje de montañas aledañas que presenta el trabajo de A. Vesga et al. [Vesga-Ramírez et al. \[2020\]](#). La mayoría de trabajos sobre tomografía de muones no aborda el problema de la ubicación de los puntos de observación, en parte debido a que sus volcanes de estudio son topográficamente favorables [Nagahara and Miyamoto \[2018\]](#).

Finalmente, se obtiene el muograma en cada punto de observación por medio de MUYSC, obteniendo así 42 muogramas de 100×100 píxeles, tomando un tiempo de ejecución de aproximadamente 93 segundos por muograma, dando una totalidad de 65 minutos. La Figura 3.6 muestra los muogramas obtenidos.

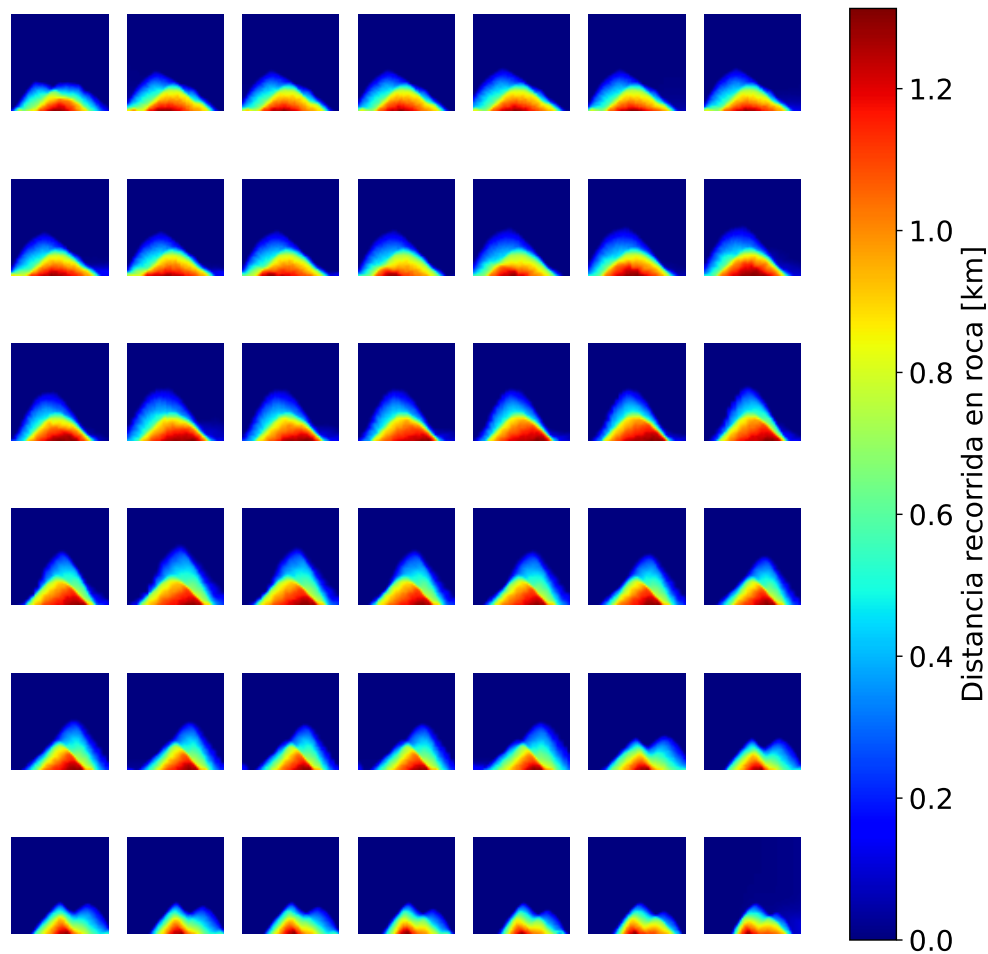


Figura 3.6: Muogramas del volcán Cerro Machín obtenidos por MUYSC. Los muogramas son obtenidos en cada punto de observación mostrados en la Figura 3.5.

3.2. Evaluación de la reconstrucción del volcán Cerro Machín

Una vez se cuenta con los muogramas, sus respectivos ángulos respecto al punto de referencia y el algoritmo a utilizar, se reconstruyó un volumen del volcán Cerro Machín de $100 \times 100 \times 100$ vóxeles, cuyos valores internos representan la distancia recorrida en roca. El volumen cuenta entonces con cuatro dimensiones: ejes X, Y, Z y sus valores internos. Debido a esta dimensionalidad las reconstrucciones tomográficas suelen visualizarse en cortes transversales, y para graficar el volumen completo se requiere una concatenación de dichos cortes, como se muestra en la Figura 3.7.

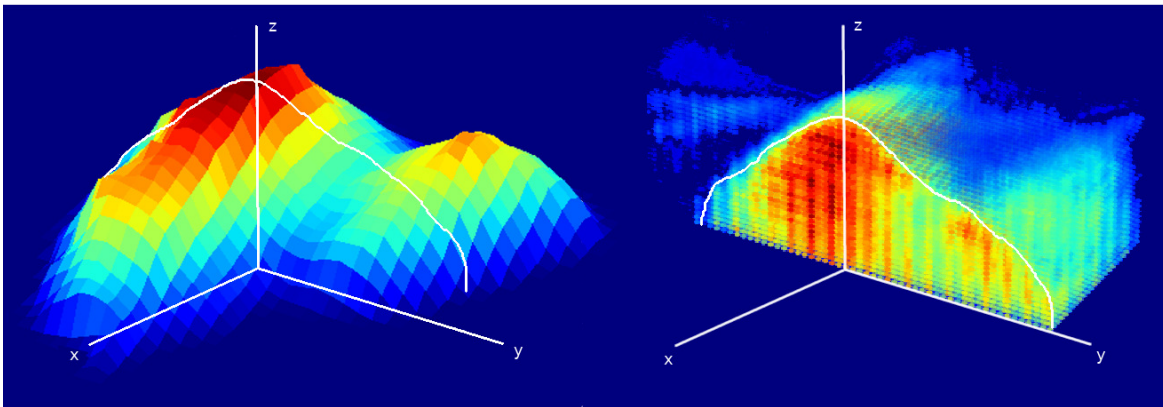


Figura 3.7: Reconstrucción 3D del volcán Cerro Machín (derecha) obtenido a través del proceso de tomografía con la topografía del volcán (izquierda). La reconstrucción da un volumen de $100 \times 100 \times 100$ vóxeles, cuyos valores internos representas las distancias recorridas en roca. El corte realizado donde indica la línea blanca en la reconstrucción muestra sus valores internos.

La Figura 3.7 sirve para ilustrar el volumen reconstruido, donde se aprecian los dos domos característicos del volcán Cerro Machín y un corte medio que muestra su distribución de espesor de roca interna [Tanaka et al. \[2010, 2005\]](#). La evaluación analítica de resultados suele hacerse con cortes transversales. Para lograr esta evaluación se comparó con la vista superior, frontal y lateral del volcán.

La vista superior original corresponde al mapa de alturas mostrado en la Figura 3.3. Si bien los valores de la imagen representan la altura de la estructura, su distribución de espesor de roca en la reconstrucción se mostrará equivalente al asumir que la densidad es constante en toda la estructura, dado que a mayor altura se encuentra menos cantidad de materia. Por lo tanto, la suma de cortes perpendiculares al eje vertical de la reconstrucción da una imagen que contiene la distribución de espesor de roca en las diferentes alturas, lo que es comparable con el mapa de alturas si ambas imágenes son normalizadas eliminando así sus unidades. También es necesario conocer la región de reconstrucción para obtener una nueva imagen acotada del mapa de alturas con mismas dimensiones (100×100 píxeles), como también la altura mínima de observación. Esto

CAPÍTULO 3. TOMOGRAFÍA DE MUONES DEL VOLCÁN CERRO MACHÍN

se logra convirtiendo los ejes angulares del telescopio a latitud, longitud y altura. Las coordenadas de las esquinas de la región se obtienen encontrando la intersección de las líneas de proyección externas del eje azimutal de los detectores convertidos en latitud y longitud.

Por otra parte, la altura mínima de observación se calculó haciendo uso de la distancia calculada anteriormente en metros y convirtiendo la resolución angular cenital en la altura en el punto más bajo de la imagen a -8 grados, la cual se encontró a 2608 m s.n.m. Adicionalmente, esto se pudo corroborar al ver que el valor del pixel en la esquina superior derecha del mapa de alturas estaba dentro del intervalo de altura de los puntos de observación ($2495 \text{ m s.n.m} \pm 10 \text{ m}$) y la reconstrucción mostró valores de 0 donde en el mapa de alturas se encontraba aproximadamente la altura mínima de observación.

Teniendo el mapa de alturas con la región acotada y descartando sus alturas menores a la mínima de observación, se comparó con la reconstrucción obteniendo la Figura 3.8.

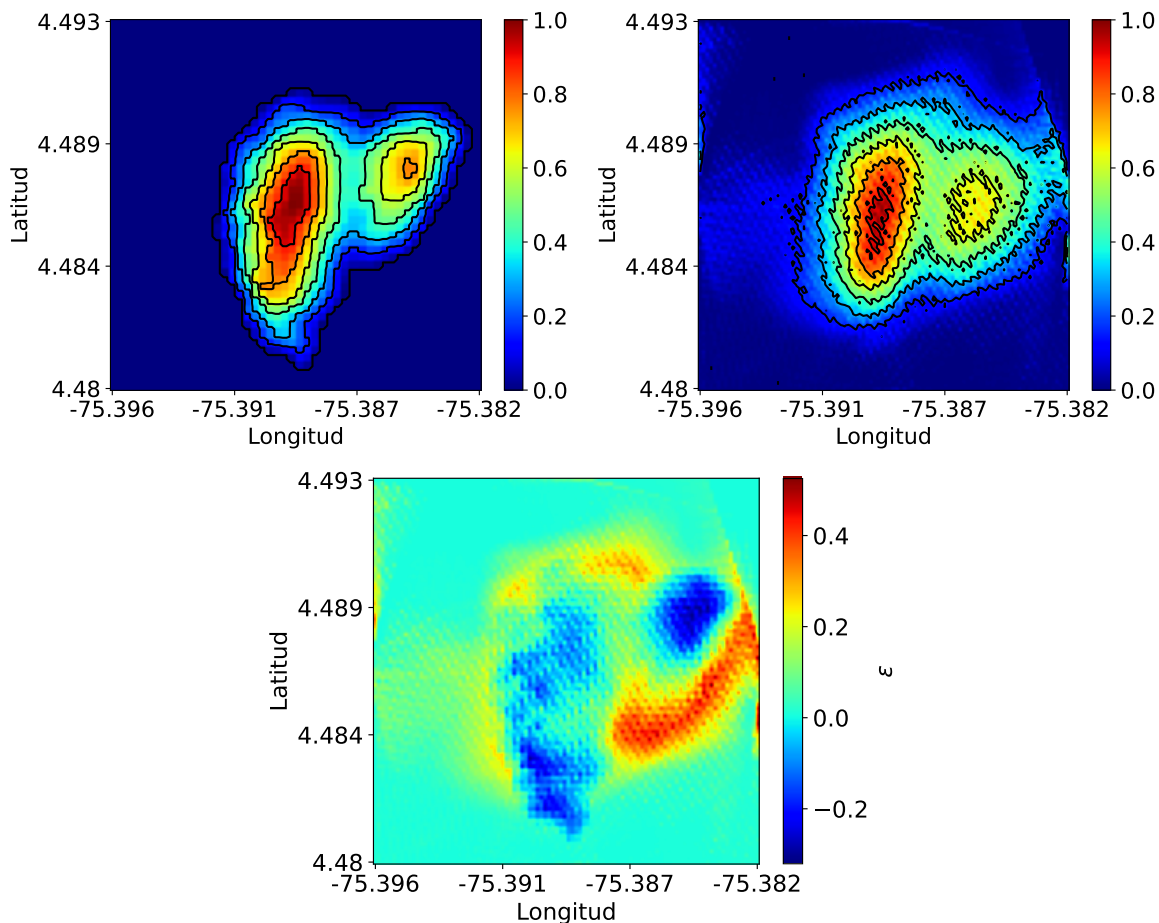


Figura 3.8: Vista superior original del volcán Cerro Machín (izquierda), vista superior de la reconstrucción (derecha), mapa de error sistemático ε (abajo). Las zonas rojas muestran un exceso de magnitud en la reconstrucción, mientras que las azules son magnitudes faltantes.

3.2. EVALUACIÓN DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL VOLCÁN CERRO MACHÍN

En la Figura 3.8 se observa la vista superior original y reconstruida con unidades normalizadas. El mapa de error muestra las diferentes regiones de exceso o falta de cantidad de materia. Se observa un error mínimo ($\varepsilon_{\min} = -0,327$) en la parte superior del domo secundario y un error máximo ($\varepsilon_{\max} = 0,525$) en la parte posterior del domo. Por otra parte, el error mínimo en el domo principal alcanza ($\varepsilon_{\min} = -0,309$), en una región de error más dispersa. Cabe resaltar que la variación de error en el domo principal es menor que en el secundario, lo cual puede deberse a la gran cantidad de puntos de observación acumulados en un rango de 20 grados en esa zona. Se calculó el error promedio $\mu_{|\varepsilon|}$ y la desviación estándar $\sigma_{|\varepsilon|}$ de la región de interés, eliminando las zonas vacías de la imagen. Se obtuvo un error promedio de $\mu_{|\varepsilon|} = 0,105$, con una desviación estándar de $\sigma_{|\varepsilon|} = 0,099$ y un RMSE = 0.150.

Generalmente esta vista es suficiente para evaluar una reconstrucción tomográfica, ya que se evidencia la totalidad del volumen reconstruido, el cual depende de las proyecciones empleadas. Sin embargo, dado que la comparación es adimensional, es difícil evaluar cuánta magnitud falta o excede, por lo que también se hizo uso de las vistas frontales y laterales del volcán, comparando con muogramas obtenidos en 0.03 rad y $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ azimut respecto al punto de referencia. De esta manera, la evaluación de las tres vistas en conjunto dio un análisis más completo de los resultados obtenidos. La Figura 3.9 muestra la vista frontal original y de la reconstrucción con unidades de distancia recorrida en roca.

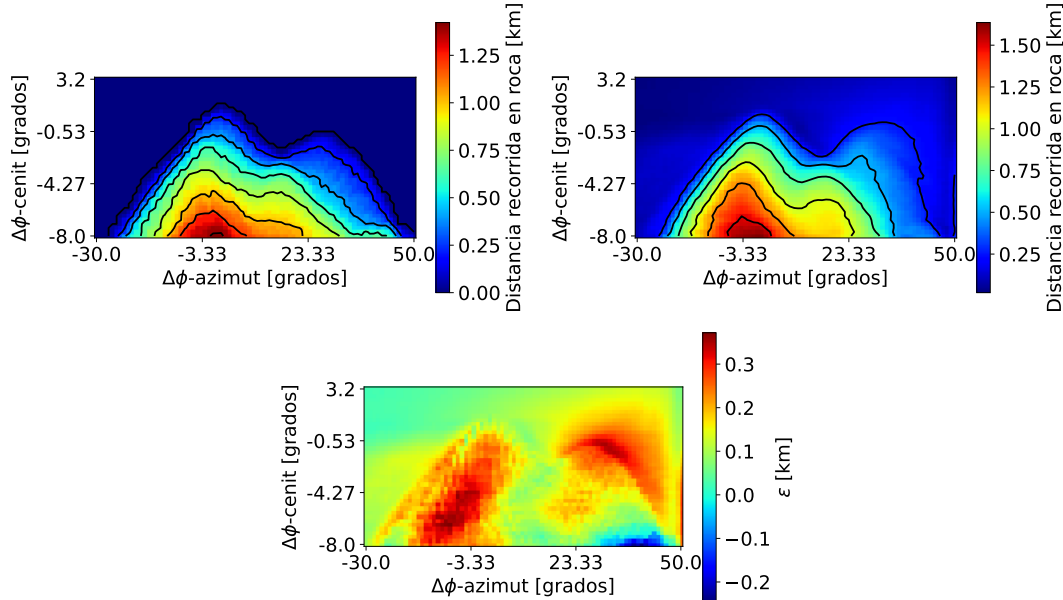


Figura 3.9: Vista frontal original del volcán Cerro Machín (izquierda), vista frontal de la reconstrucción (derecha), mapa de error sistemático (abajo). La reconstrucción presenta un exceso de magnitud máximo ($\varepsilon_{\max} = 0,372 \text{ km}$) en el centro del domo primario y la parte superior del domo secundario ($\varepsilon_{\max} = 0,348 \text{ km}$), como también una ausencia en la parte inferior del mismo ($\varepsilon_{\min} = -0,243 \text{ km}$).

En la Figura 3.9 se puede observar que la vista reconstruida cuenta con un exceso de distancia recorrida en la región central ($\varepsilon_{\max} = 0,372$ km), en la región alta del domo secundario ($\varepsilon_{\max} = 0,348$ km) y una región negativa en la parte baja del domo secundario ($\varepsilon_{\min} = -0,243$ km). Se obtuvo un error promedio de $\mu_{|\varepsilon|} = 0,149$ km, con una desviación estándar de $\sigma_{|\varepsilon|} = 0,077$ km y un RMSE = 0.168 km.

Si bien el muograma usado para comparar fue también utilizado para la reconstrucción, es interesante observar cómo las demás proyecciones afectan la vista frontal de la reconstrucción, haciendo que ambas vistas no sean iguales. Lo mismo puede apreciarse para la vista lateral en la Figura 3.10.

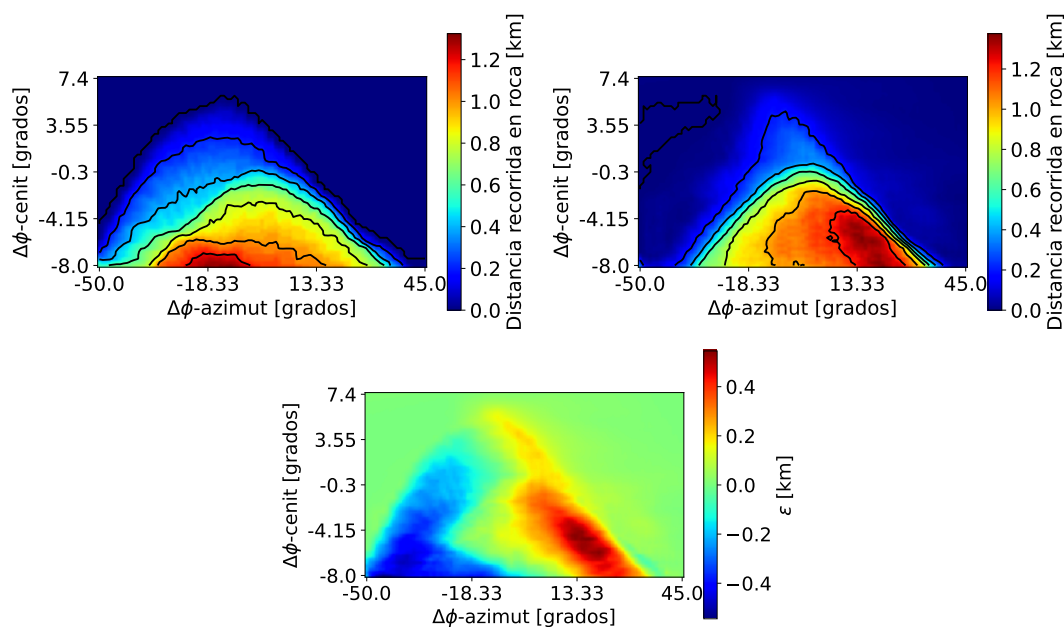


Figura 3.10: Vista lateral original del volcán Cerro Machín (izquierda), vista lateral de la reconstrucción (derecha), mapa de error sistemático (abajo). Se obtuvo un exceso de magnitud máximo ($\varepsilon_{\max} = 0,545$ km) en la parte derecha de la estructura y una ausencia mínima ($\varepsilon_{\max} = -0,545$ km) en la parte izquierda, donde se ubica el domo secundario.

En la Figura 3.10 se puede observar que si bien la vista original y la reconstruida tienen una forma similar, su distribución difiere en la región de máxima distancia recorrida, teniendo un error máximo ($\varepsilon_{\max} = 0,545$ km), y un error mínimo ($\varepsilon_{\max} = -0,545$ km). Se obtuvo un error promedio de $\mu_{|\varepsilon|} = 0,121$ km, con una desviación estándar de $\sigma_{|\varepsilon|} = 0,133$ km y un RMSE = 0.176 km.

Con los errores obtenidos se evidencia un mayor error en la vista lateral, lo cual concuerda con el análisis previo de la Figura 3.8, donde se ve una mayor variación en el domo secundario, el cual se encuentra frente al punto de observación lateral de la estructura.

3.3. Variación de número de puntos de observación

Los resultados anteriormente mostrados fueron obtenidos a partir de una reconstrucción de una iteración y usando la totalidad de muogramas. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las Figuras 2.6 y 2.7, se realizaron nuevas reconstrucción del volcán Cerro Machín variando el número de puntos de observación y de iteraciones. Para variar el número de puntos se aseguró que fueran aquellos que estén más igualmente espaciados. La Figura 3.11 muestra los puntos utilizados para las reconstrucciones.

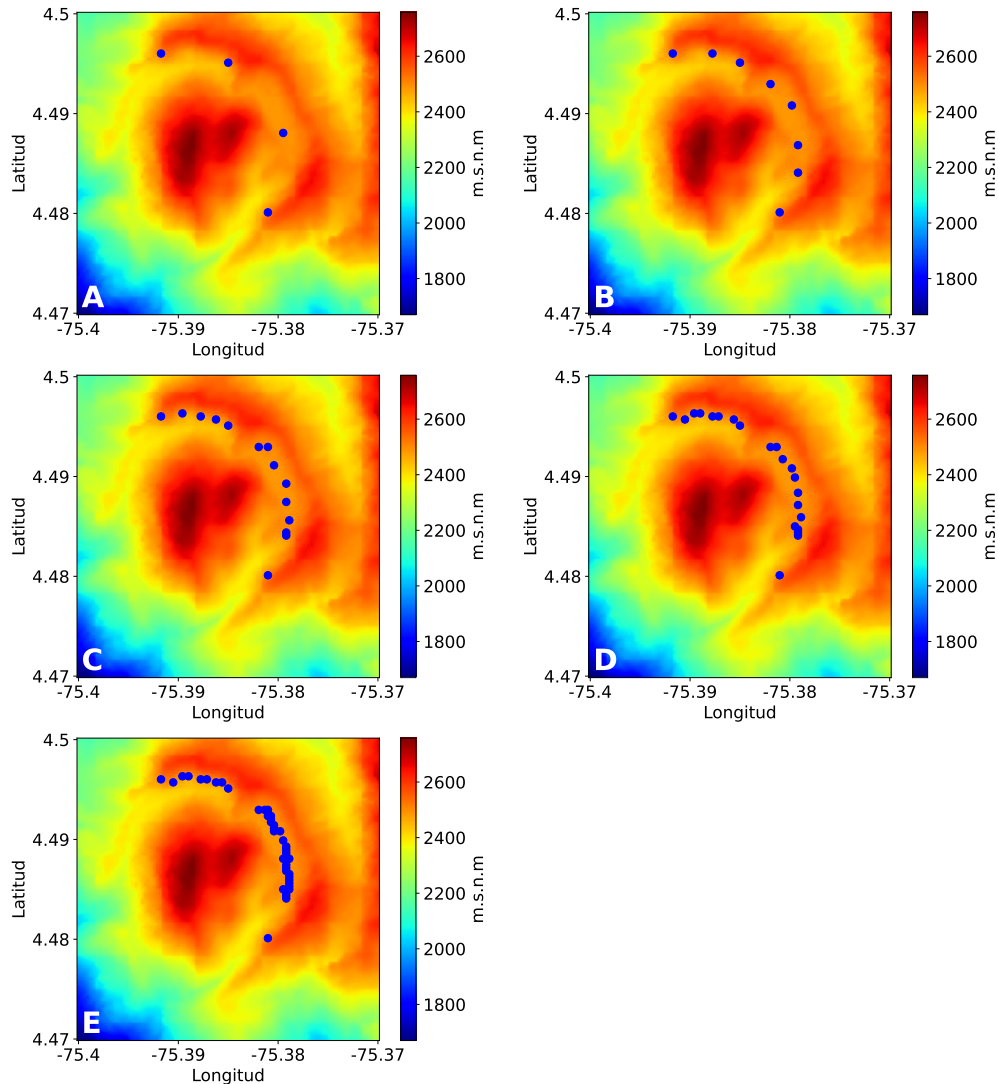


Figura 3.11: Ubicación de puntos de observación utilizados en las reconstrucciones variando el número de puntos de observación. A) 4 puntos. B) 8 puntos. C) 14 Puntos. D) 21 puntos. E) 42 puntos.

De esta manera, se realizaron reconstrucciones de 1 iteración con 4, 8, 14, 21 y 42 puntos de observación y se evaluó el RMSE de sus diferentes vistas. La Figura 3.12 muestra la vista superior de las reconstrucciones.

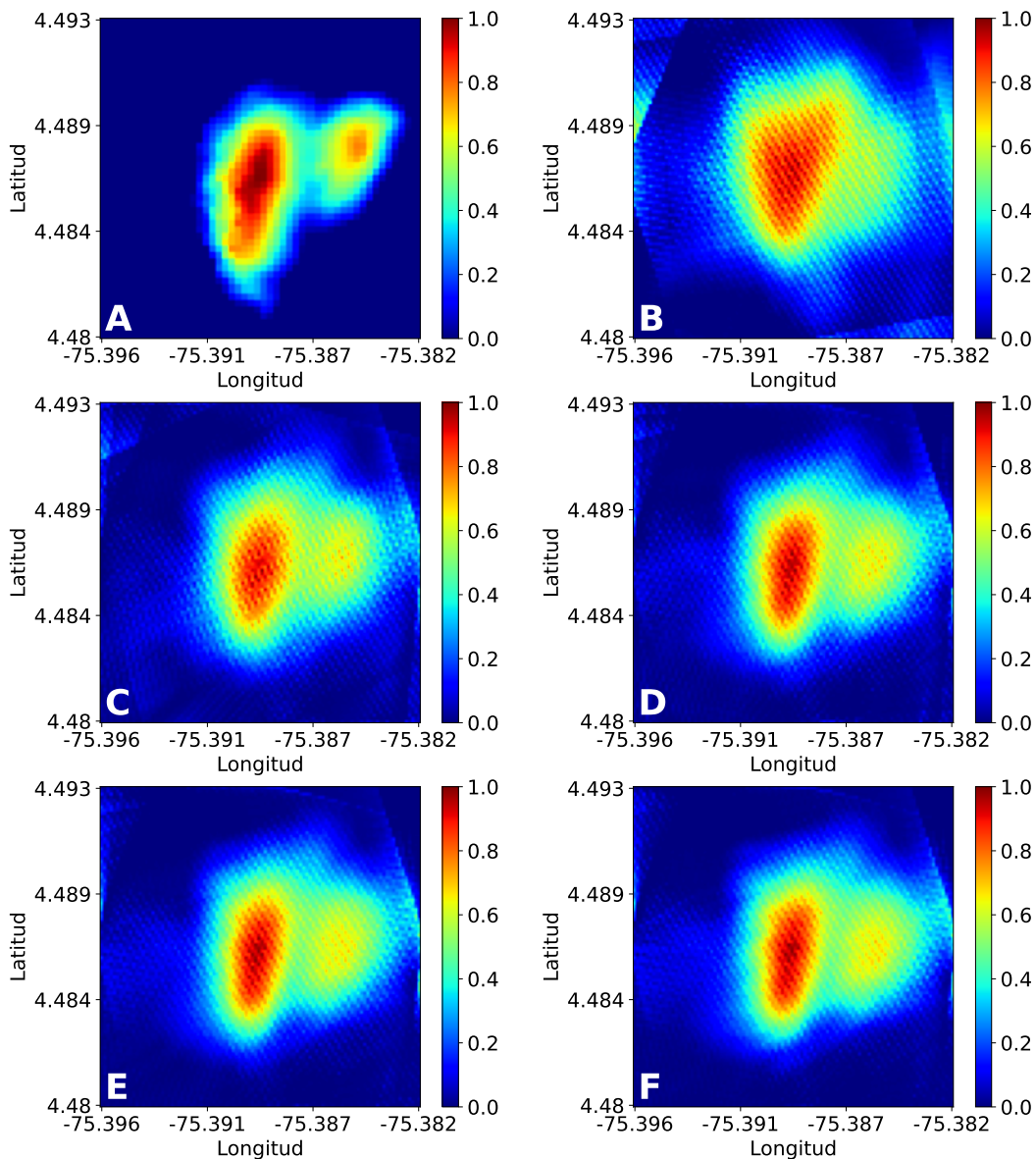


Figura 3.12: Vista superior de reconstrucciones de una iteración del volcán Cerro Machín variando el número de puntos. A) Vista superior original. B) 4 puntos. C) 8 puntos. D) 14 Puntos. E) 21 puntos. F) 42 puntos.

Se puede observar de la Figura 3.12 que a partir de 8 puntos ya se pueden distinguir los dos domos del volcán, mientras que de 14 a 42 puntos la reconstrucción casi no cambia. Al aumentar el número de iteraciones para cada reconstrucción se obtuvo la Figura 3.13.

3.3. VARIACIÓN DE NÚMERO DE PUNTOS DE OBSERVACIÓN

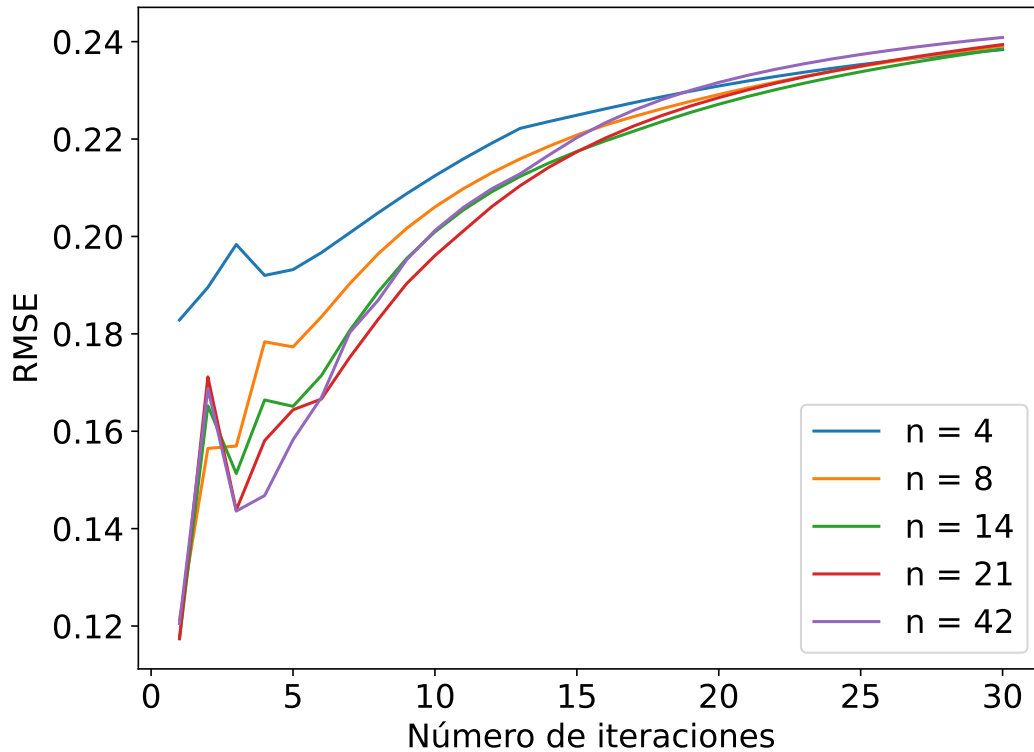


Figura 3.13: RMSE de vista superior de reconstrucciones variando el número de puntos e iteraciones. Cada línea de color representa el número de puntos de observación utilizado para la reconstrucción. Se encuentra un error mínimo de 0.117 con una iteración y 14 puntos.

En la Figura 3.13 se observa un aumento en el error al aumentar las iteraciones para todas las reconstrucciones, lo que es contrario al resultado esperado ilustrado en la Figura 2.7. Este incremento en el error se debe a que el parámetro λ_k encontrado en la ecuación 0.6 no es ajustable en la implementación de TomoPy y al ser un valor alto por defecto no garantiza una convergencia para datos como los muogramas, los cuales poseen un error inicial producto del proceso de simulación de los mismos y de las aproximaciones hechas en la obtención de los puntos de observación. De esta manera, con un λ_k alto, el error de los muogramas se propaga al ser usados en cada iteración del algoritmo. Este error de los muogramas no pudo ser corregido disminuyendo la variación de equidistancia, pues los puntos resultantes tienen una menor rango angular, lo que resulta en una peor reconstrucción como se comprobó en la Figura 2.4, generando así un nuevo error. Concretamente, el aumento del error es consecuencia de una remoción de cantidad de materia en la reconstrucción con el incremento de iteraciones. Por este motivo, los errores mínimos de todas las reconstrucciones se encuentran en la primera iteración, consiguiendo un error mínimo (RMSE = 0.117) con 14 puntos de observación.

La Figura 3.14 muestra la curva de error de las reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos de observación.

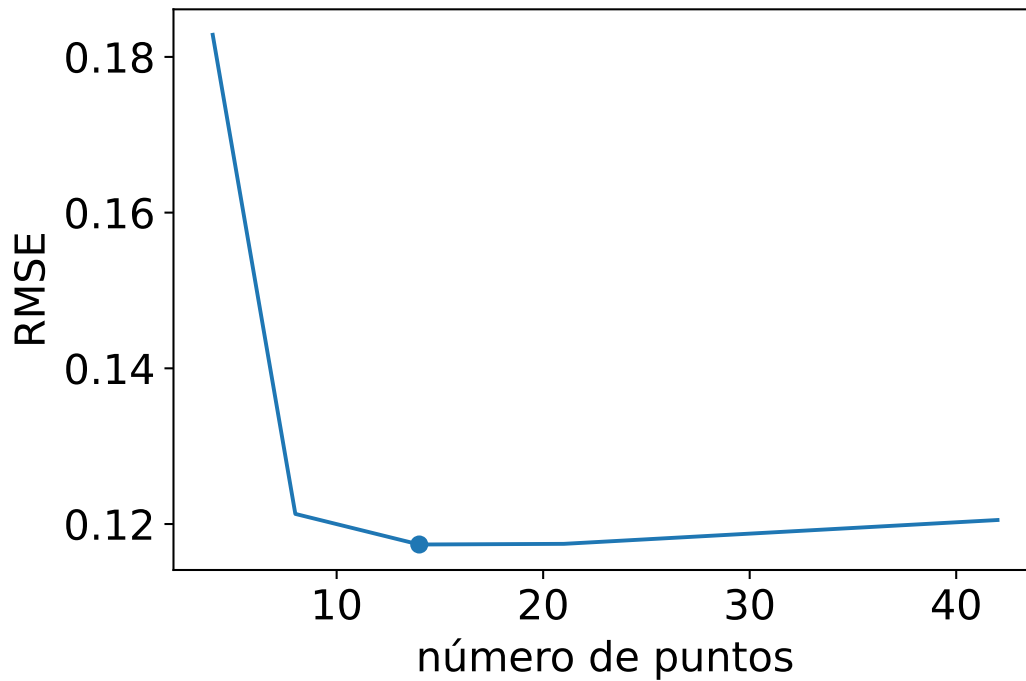


Figura 3.14: RMSE de vista superior de reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos. Se encuentra un error mínimo de 0.117 usando 14 puntos de observación mostrados en la imagen C de la Figura 3.11.

En la Figura 3.14 se observa un error mínimo de 0.117 con 14 puntos de observación. Al igual que en la Figura 2.6, se tiene un error mínimo en medio de la curva. La curva de la Figura 3.14 no es continua ya que son solo 5 reconstrucciones, por lo que es posible que exista un error aún menor entre 14 y 21 puntos. Sin embargo, se tiene un comportamiento general del error, donde se evidencia una variación de error de 0.003 entre 8 a 42 puntos. Esto indica que no solo la reconstrucción de 14 puntos es mejor a la de 42, sino que la de 8 presenta resultados satisfactorios también. Esto concuerda con los resultados obtenidos en la Figura 3.8 y 3.10, donde se evidencia un exceso de magnitud en el rango donde se encuentra un gran cúmulo de puntos, mientras que en la imagen C de la Figura 3.11 se observa una distribución más uniforme y espaciada de los puntos de observación.

El mismo procedimiento se realizó para las otras vistas. La Figura 3.15 muestra la vista frontal de las reconstrucciones de una iteración variando el número de puntos.

3.3. VARIACIÓN DE NÚMERO DE PUNTOS DE OBSERVACIÓN

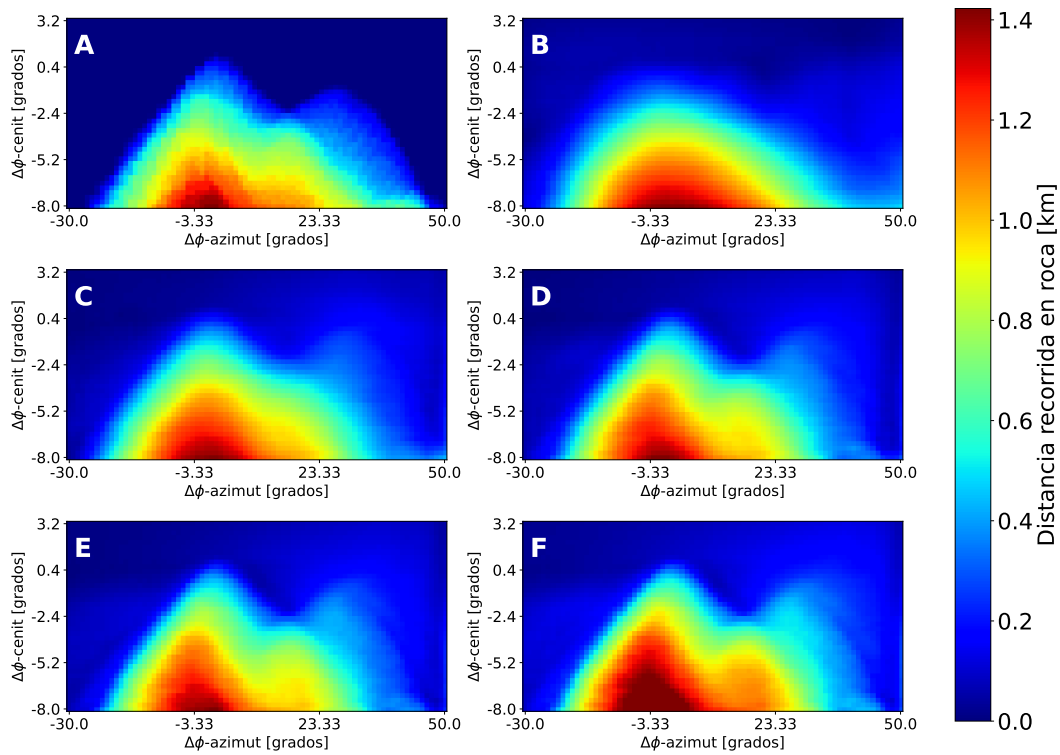


Figura 3.15: Vista frontal de reconstrucciones de una iteración del volcán Cerro Machín variando el número de puntos. A) Vista frontal original. B) 4 puntos. C) 8 puntos. D) 14 Puntos. E) 21 puntos. F) 42 puntos.

En la Figura 3.15 se puede ver nuevamente que a partir de 8 puntos de observación se distinguen los dos domos del volcán. En este caso, a mayor es el número de puntos, mayor es la magnitud en el centro de la estructura, aumentando así su error.

Al aumentar las iteraciones, se observó nuevamente un aumento del error. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, el aumento de iteraciones genera una remoción de cantidad de materia, por lo que se pudo observar que en la segunda iteración se disminuyó el error para las reconstrucciones entre 8 a 42 puntos al eliminar el exceso de magnitud encontrado en la Figura 3.15. Para la tercer iteración en adelante el error aumentó, por lo que el error mínimo se encontró con dos iteraciones. La Figura 3.16 muestra la curva de error de la vista frontal de reconstrucciones de 2 iteraciones variando el número de puntos de observación.

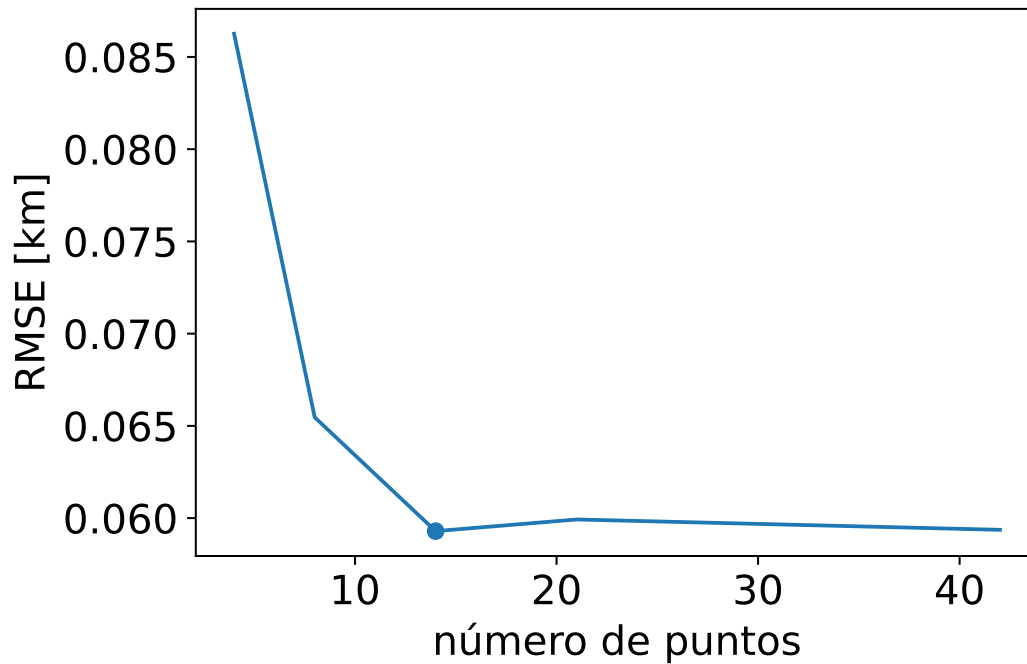


Figura 3.16: RMSE de vista frontal de reconstrucciones de dos iteraciones variando el número de puntos. Se encuentra un error mínimo de 0.059 km usando 14 puntos de observación.

La Figura 3.16 muestra un error mínimo de 0.059 km obtenido con 14 puntos, al igual que en la Figura 3.14. A su vez, se ve una variación menor a 0.001 km entre 14 y 42 puntos, lo cual indica nuevamente que los resultados obtenidos con 14 puntos son satisfactorios. También se puede notar que en este caso la remoción de cantidad de materia producida por el aumento de iteración disminuye el RMSE 0.0234 en la vista frontal, mientras que lo aumenta 0.0479 en la vista superior. Cabe mencionar que para estos resultados se tiene en cuenta la imagen completa, en otras palabras, no se eliminaron zonas vacías de la imagen, ya que más que querer conocer el valor exacto del error se quiere conocer el comportamiento de la curva al variar el número de puntos, la cual no es alterada por la inclusión de zonas vacías.

Finalmente, se analizó la vista lateral de las reconstrucciones variando el número de puntos. La Figura 3.17 muestra la vista lateral de las reconstrucciones de una iteración.

3.3. VARIACIÓN DE NÚMERO DE PUNTOS DE OBSERVACIÓN

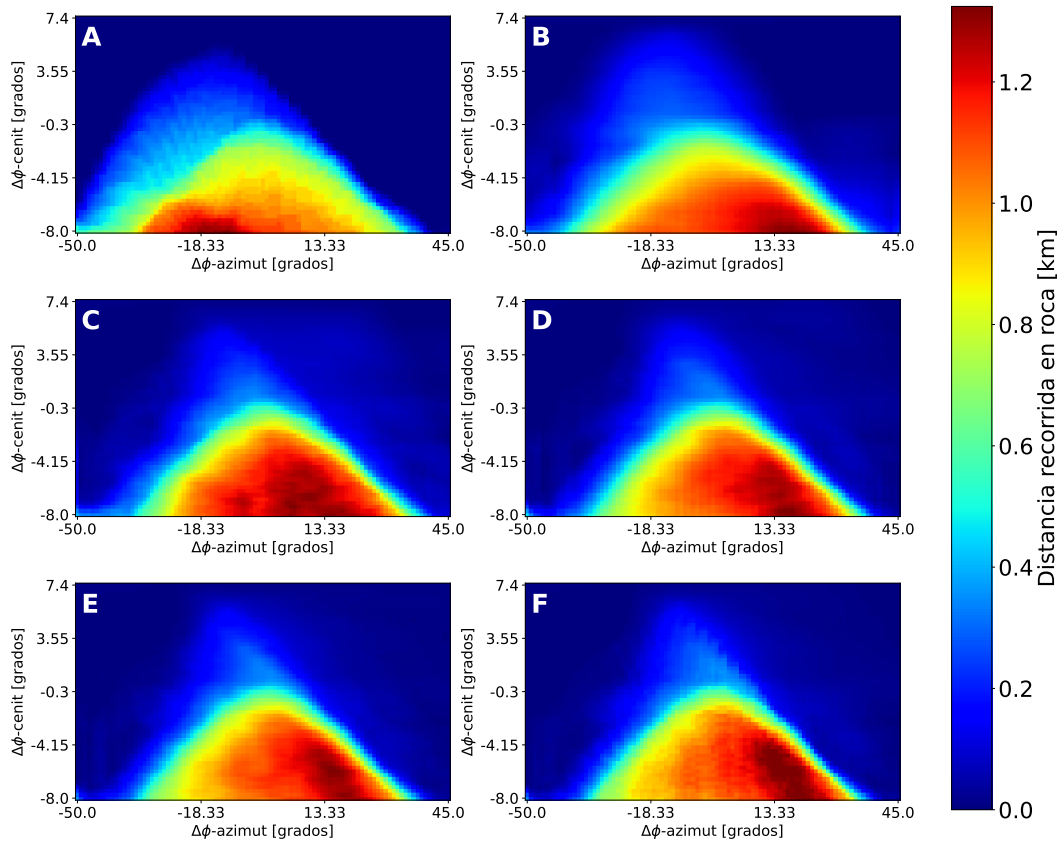


Figura 3.17: Vista lateral de reconstrucciones de una iteración del volcán Cerro Machín variando el número de puntos. A) Vista lateral original. B) 4 puntos. C) 8 puntos. D) 14 Puntos. E) 21 puntos. F) 42 puntos.

En la Figura 3.17 se observa que a mayor número de puntos de observación se obtiene un mayor exceso de cantidad de materia en la parte derecha de la imagen, lo que genera un mayor error. Para el caso de la vista lateral, un aumento en las iteraciones ayuda a remover el exceso de magnitud encontrado, antes de que el error vuelva a aumentar con el incremento de iteraciones. El error mínimo (RMSE = 0.060 km) se encontró con 6 iteraciones y 4 puntos de observación. Este resultado es opuesto al de la Figura 3.13, donde el error mayor era obtenido con 4 puntos. Si se observa la Figura 3.17, se puede notar que la vista lateral de 4 puntos tiene menor cantidad de materia que las demás debido al uso de pocas proyecciones. Esto hace que tenga menor exceso de magnitud, lo que disminuye su error. Además no se ve tan afectada por la forma de la reconstrucción como las otras vistas, debido a que su forma es más homogénea. La Figura 3.18 muestra la curva de error de la vista lateral de reconstrucciones de 6 iteraciones variando el número de puntos de observación.

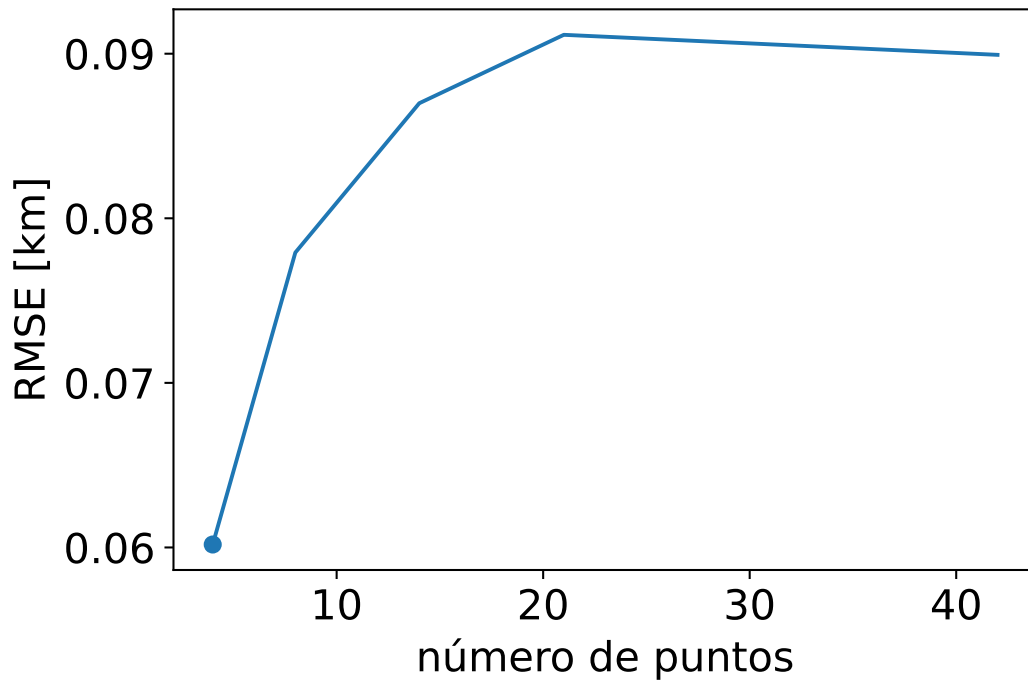


Figura 3.18: RMSE de vista lateral de reconstrucciones de 6 iteraciones variando el número de puntos. Se encuentra un error mínimo de 0.060 km usando 4 puntos de observación.

El aumento en la magnitud al aumentar el número de puntos de observación se evidencia en el incremento del error en la Figura 3.18. El error mínimo ($RMSE = 0.060$ km) se obtiene con 4 puntos de observación y se tiene una variación de 0.0029 entre la reconstrucción de 14 puntos y la de 42, por lo que con los resultados anteriores se puede sostener que la reconstrucción de 14 puntos es satisfactoria.

4 Conclusiones

Se implementó el algoritmo ART como método de reconstrucción para tomografía de muones, utilizando proyecciones simuladas obtenidas por MUYSO y garantizando una distancia de 1059 ± 40 m para los puntos de observación al punto de referencia y ± 10 m de variación en su altura. Como resultado se reconstruyó el volumen 3D del volcán Cerro Machín cuyos valores internos representan la distancia recorrida en roca de los muones, en la región de 4.48° a 4.493° latitud y -75.396 a -75.38 longitud, con una altura mínima de observación de 2607 m s.n.m.

Se observó que, aunque como regla general un mayor número de puntos de observación genera una mejor reconstrucción, esto no siempre es el caso con el algoritmo ART, ya que usar demasiados genera un exceso de magnitud. La variación del número de puntos de observación mostró una tendencia parabólica en la curva de RMSE, lo cual indica que la calidad de la reconstrucción no mejora de manera proporcional al aumento del número de puntos de observación, sino que existe un punto óptimo, siendo 47 puntos en 1 iteración para el espectro Shepp-Logan.

El volumen reconstruido del volcán Cerro Machín fue comparado con las vistas de sus tres ejes, donde se encontró un $RMSE = 0.117$ en la vista superior de la reconstrucción de 1 iteración y 14 puntos, $RMSE = 0.059$ km en la vista frontal de la reconstrucción de 2 iteraciones y 14 puntos y $RMSE = 0.060$ km en la vista lateral de la reconstrucción de 6 iteraciones y 4 puntos. Se consideró como mejor reconstrucción la de 14 puntos de observación, ya que se obtiene un error menor con una variación máxima de 0.003 en todos los casos a la reconstrucción de 42 puntos y reduce el costo computacional de 65 a 21 minutos de tiempo de ejecución del proceso de obtención de muogramas.

Referencias

- Nasa shuttle radar topography mission global 1 arc second v003, 2013. URL <https://doi.org/10.5067/MEaSURES/SRTM/SRTMGL1.003>.
- Radon transform, 2023. URL https://scikit-image.org/docs/stable/auto_examples/transform/plot_radon_transform.html.
- Luis W Alvarez, Jared A Anderson, F El Bedwei, James Burkhard, Ahmed Fakhry, Adib Girgis, Amr Goneid, Fikhry Hassan, Dennis Iverson, Gerald Lynch, et al. Search for hidden chambers in the pyramids: The structure of the second pyramid of giza is determined by cosmic-ray absorption. *Science*, 167(3919):832–839, 1970.
- A.H. Andersen and A.C. Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart): A superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6(1):81–94, 1984. ISSN 0161-7346. doi: [https://doi.org/10.1016/0161-7346\(84\)90008-7](https://doi.org/10.1016/0161-7346(84)90008-7). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0161734684900087>.
- Carl D Anderson and Seth H Neddermeyer. Cloud chamber observations of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level. *Physical Review*, 50(4):263, 1936.
- Callum Atkinson and Julio Soria. Algebraic reconstruction techniques for tomographic particle image velocimetry. *Proceedings of the 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, 16AFMC*, 01 2007.
- G. Bonomi, P. Checchia, M. D’Errico, D. Pagano, and G. Saracino. Applications of cosmic-ray muons. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 112:103768, 2020. ISSN 0146-6410. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2020.103768>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641020300156>.
- Konstantin N Borozdin, Gary E Hogan, Christopher Morris, William C Priedhorsky, Alexander Saunders, Larry J Schultz, and Margaret E Teasdale. Radiographic imaging with cosmic-ray muons. *Nature*, 422(6929):277–277, 2003. doi: 10.1038/422277a. URL <https://doi.org/10.1038/422277a>.
- Thorsten Buzug. *Computed Tomography*. Springer Berlin, Heidelberg, 2008. doi: 10.1007/978-3-540-39408-2. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-39408-2>.
- K. Chaiwongkhot, T. Kin, Y. Nagata, T. Komori, N. Okamoto, and H. Basiri. 3d cosmic-ray muon tomography using portable muography detector. *Journal of Instrumentation*, 17(01):P01009, jan 2022. doi: 10.1088/1748-0221/17/01/P01009. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/17/01/P01009>.
- J. R. Fienup. Invariant error metrics for image reconstruction. *Appl. Opt.*, 36(32):

- 8352–8357, Nov 1997. doi: 10.1364/AO.36.008352. URL <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-36-32-8352>.
- Liubov Flores, Vicent Vidal, and Gumersindo Verdú. Iterative reconstruction from few-view projections. *Procedia Computer Science*, 51:703–712, 2015. ISSN 1877-0509. doi: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.05.188>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915009965>. International Conference On Computational Science, ICCS 2015.
- Peter Gilbert. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1):105–117, 1972. ISSN 0022-5193. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(72\)90180-4](https://doi.org/10.1016/0022-5193(72)90180-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519372901804>.
- Doga Gursoy, Francesco Carlo, Xianghui Xiao, and Chris Jacobsen. Tomopy: A framework for the analysis of synchrotron tomographic data. *Journal of Synchrotron Radiation*, 21, 09 2014. doi: 10.1107/S1600577514013939.
- Gabor T. Herman. *Fundamentals of Computerized Tomography*. Springer London, 2009. doi: 10.1007/978-1-84628-723-7. URL <https://doi.org/10.1007/2F978-1-84628-723-7>.
- G.T. Herman and L.B. Meyer. Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient (positron emission tomography application). *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(3):600–609, 1993. doi: 10.1109/42.241889.
- Viktor F Hess. Über beobachtungen der durchdringenden strahlung bei sieben freiballonfahrten. *Phys. Zeits.*, 13:1084–1091, 1912.
- Ralf Kaiser. Muography: overview and future directions. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 377(2137):20180049, 2019.
- Karl-Heinz Kampert and Alan A Watson. Extensive air showers and ultra high-energy cosmic rays: a historical review. *The European Physical Journal H*, 37(3):359–412, 2012.
- S. Nagahara and S. Miyamoto. Feasibility of three-dimensional density tomography using dozens of muon radiographies and filtered back projection for volcanos. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*, 7(4):307–316, 2018. doi: 10.5194/gi-7-307-2018. URL <https://gi.copernicus.org/articles/7/307/2018/>.
- K Nagamine, M Iwasaki, K Shimomura, and K Ishida. Method of probing inner-structure of geophysical substance with the horizontal cosmic-ray muons and possible application to volcanic eruption prediction. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 356(2-3):585–595, 1995.
- Kanetada Nagamine. *Introductory Muon Science*. Cambridge University Press, 2003. doi: 10.1017/CBO9780511470776.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

- Seth H. Neddermeyer and Carl D. Anderson. Note on the nature of cosmic-ray particles. *Phys. Rev.*, 51:884–886, May 1937. doi: 10.1103/PhysRev.51.884. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.884>.
- Domenico Pacini. Penetrating radiation at the surface of and in water. *arXiv preprint arXiv:1002.1810*, 2010. doi: 10.48550/arXiv.1002.1810.
- Daniël M Pelt, Doga Gürsoy, Willem Jan Palenstijn, Jan Sijbers, Francesco De Carlo, and Kees Joost Batenburg. Integration of tomopy and the astra toolbox for advanced processing and reconstruction of tomographic synchrotron data. *Journal of synchrotron radiation*, 23(3):842–849, 2016.
- J Peña-Rodríguez, J Jaimes-Teherán, K Dlaikan-Castillo, and LA Núñez. Muysc: An end-to-end muography simulation toolbox. *arXiv preprint arXiv:2303.02627*, 2023. doi: 10.48550/arXiv.2303.02627. URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.02627>.
- J. Peña-Rodríguez, J. Pisco-Guabave, D. Sierra-Porta, M. Suárez-Durán, M. Arenas-Flórez, L.M. Pérez-Archila, J.D. Sanabria-Gómez, H. Asorey, and L.A. Núñez. Design and construction of mute: a hybrid muon telescope to study colombian volcanoes. *Journal of Instrumentation*, 15(09):P09006, sep 2020. doi: 10.1088/1748-0221/15/09/P09006. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/15/09/P09006>.
- Jesús Peña-Rodríguez. *Diseño y calibración de un telescopio de muones híbrido para estudios vulcanológicos*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, 2021. URL http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=191534|%20|1|4.
- William C. Priedhorsky, Konstantin N. Borozdin, Gary E. Hogan, Christopher Morris, Alexander Saunders, Larry J. Schultz, and Margaret E. Teasdale. Detection of high-z objects using multiple scattering of cosmic ray muons. *Review of Scientific Instruments*, 74(10):4294–4297, 2003. doi: 10.1063/1.1606536. URL <https://doi.org/10.1063/1.1606536>.
- S. Procureur. Muon imaging: Principles, technologies and applications. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 878:169–179, 2018. ISSN 0168-9002. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2017.08.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900217308495>. Radiation Imaging Techniques and Applications.
- Christian Sarmiento-Cano, Mauricio Suárez-Durán, Rolando Calderón-Ardila, Adriana Vásquez-Ramírez, Andrei Jaimes-Motta, Luis A Núñez, Sergio Dasso, Iván Sidelnik, Hernán Asorey, and LAGO Collaboration. The arti framework: cosmic rays atmospheric background simulations. *The European Physical Journal C*, 82(11):1019, 2022. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10883-z. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10883-z>.

- Lawrence A Shepp and Benjamin F Logan. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on nuclear science*, 21(3):21–43, 1974.
- M. Tanabashi. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 98:030001, Aug 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.030001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.
- H. Tanaka, K. Nagamine, N. Kawamura, S.N. Nakamura, K. Ishida, and K. Shimomura. Development of a two-fold segmented detection system for near horizontally cosmic-ray muons to probe the internal structure of a volcano. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 507(3):657–669, 2003. ISSN 0168-9002. doi: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(03\)01372-X](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(03)01372-X). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020301372X>.
- Hiroyuki Tanaka and M Ohshiro. Muography. *PoS, KMI2017*, 26, 2017. doi: 10.22323/1.294.0026. URL <https://doi.org/10.22323/1.294.0026>.
- Hiroyuki KM Tanaka, Hideaki Taira, Tomihisa Uchida, Manobu Tanaka, Minoru Takeo, Takao Ohminato, Yosuke Aoki, Ryuichi Nishitama, Daigo Shoji, and Hiroshi Tsuiji. Three-dimensional computational axial tomography scan of a volcano with cosmic ray muon radiography. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115(B12), 2010.
- H.K.M. Tanaka, K. Nagamine, S.N. Nakamura, and K. Ishida. Radiographic measurements of the internal structure of mt. west iwate with near-horizontal cosmic-ray muons and future developments. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 555(1):164–172, 2005. ISSN 0168-9002. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2005.08.099>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900205017547>.
- Xiaohua Tong, Zhen Ye, Yusheng Xu, Sa Gao, Huan Xie, Qian Du, Shijie Liu, Xiong Xu, Sicong Liu, Kuifeng Luan, and Uwe Stilla. Image registration with fourier-based image correlation: A comprehensive review of developments and applications. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 12(10):4062–4081, 2019. doi: 10.1109/JSTARS.2019.2937690.
- Wim van Aarle, Willem Jan Palenstijn, Jan De Beenhouwer, Thomas Altantzis, Sara Bals, K. Joost Batenburg, and Jan Sijbers. The astra toolbox: A platform for advanced algorithm development in electron tomography. *Ultramicroscopy*, 157:35–47, 2015. ISSN 0304-3991. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ultramic.2015.05.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304399115001060>.
- Bert Vandeghinste. *Iterative reconstruction in micro-SPECT/CT: regularized sparse-view CT and absolute in vivo multi-isotope micro-SPECT quantification*. PhD thesis, Ghent University, 2014.
- Alejandra Vesga-Ramírez, David Sierra Porta, Jesús Peña Rodríguez, José Sanabria-Gómez, Martha Valencia-Otero, Christian Sarmiento-Cano, Mauricio Suárez-Durán,

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

- Hernán Asorey, and Luis Núñez. Muon tomography sites for colombian volcanoes. *Annals of Geophysics*, 63(6), December 2020. doi: 10.4401/ag-8353. URL <https://doi.org/10.4401/ag-8353>.
- A. Vásquez-Ramírez, M. Suárez-Durán, A. Jaimes-Motta, R. Calderón-Ardila, J. Peña-Rodríguez, J. Sánchez-Villafrades, J.D. Sanabria-Gómez, H. Asorey, and L.A. Núñez. Simulated response of mute, a hybrid muon telescope. *Journal of Instrumentation*, 15(08):P08004, aug 2020. doi: 10.1088/1748-0221/15/08/P08004. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/15/08/P08004>.
- Zhou Wang, Alan C Bovik, Hamid R Sheikh, and Eero P Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on image processing*, 13(4):600–612, 2004.