

Construcción del concepto de vector en álgebra lineal: Un modelo cognitivo desde
la perspectiva de la teoría APOE

Yulieth Alexandra Gutierrez Carrillo

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Codirectora

Luzdari Rangel Ruiz

Magíster en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mis padres, Claudia y Orlando.

Esta tesis es resultado del compromiso y amor que han tenido conmigo, para brindarme una educación sólida. Gracias por ser luz en mi vida e inculcarme la importancia del esfuerzo y la disciplina.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción.....	11
1. Antecedentes.....	13
1.1 Sobre el aprendizaje del concepto de vector	13
1.2 Propuestas de enseñanza para el concepto de vector.....	19
1.3 Aspectos sobre la construcción de los conceptos del álgebra lineal	21
2. Planteamiento del problema	22
2.1 Pregunta de investigación.....	23
3. Objetivo	24
3.1 Objetivo General.....	24
4. Marco teórico: Teoría APOE.....	24
4.1 Estructuras y mecanismos mentales	24
4.2 Descomposición genética	28
5. Metodología: Ciclo de investigación de la teoría APOE.....	29
5.1 Análisis teórico.....	30
5.2 Diseño e implementación de instrumentos.....	30
5.3 Recolección y Análisis de datos	30
6. Análisis Teórico.....	31
6.1 Epistemología del concepto de vector	31

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VECTOR EN ÁLGEBRA LINEAL	4
6.2 Análisis de libros de texto	46
6.3 Elementos para la construcción del concepto de vector	57
6.4 Estructuras previas necesarias para la construcción del concepto de vector	61
6.5 Descomposición genética preliminar del concepto de vector	62
7. Diseño e implementación de instrumentos	66
7.1 Población y contexto	66
7.2 Dinámica del curso	68
7.3 Instrumentos y tareas	69
7.3.1 Prueba diagnóstica.....	69
7.3.2 Cuestionario.....	75
7.3.3 Entrevista 1	84
7.3.4 Entrevista 2	86
8. Recolección y análisis de datos	90
8.1 Datos obtenidos de la Prueba Diagnóstica	90
8.2 Datos obtenidos en el Cuestionario y las Entrevistas	94
8.2.1 Concepción Acción de vector.....	94
8.2.2 Concepción Proceso de vector.....	98
8.2.3 Concepción Objeto de vector	110
8. Conclusiones.....	113
8.1 Descomposición genética refinada	113

8.2 Recomendaciones didácticas 121

8.2.1 Sobre la definición del concepto de vector esperada..... 122

8.2.2 Sobre las estructuras previas para la construcción del concepto de vector 124

8.2.3 Organización de un primer curso de álgebra lineal enfocado en la construcción del concepto de vector 125

8.2.4 Sobre las tareas 127

8.3 Sugerencias para futuras investigaciones 128

9. Referencias 130

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 Proposiciones sobre magnitudes y los axiomas del espacio vectorial.....	34
Tabla 2 Orden de los contenidos en los libros de texto	48
Tabla 3 Presentación del concepto de vector en los libros de texto	51
Tabla 4 Definiciones de vector en el libro de Grossman.....	52
Tabla 5 Definiciones de vector en el libro de Poole.....	53
Tabla 6 Clasificación de los ejemplos y ejercicios de los libros de texto.....	56
Tabla 7 Ejemplo de interpretación geométrica, numérica y algebraica.....	60
Tabla 8 Programa del curso Álgebra Lineal I adaptado para esta investigación.....	67
Tabla 9 Respuestas de los estudiantes en la tarea 3 ítem i)	92
Tabla 10 Respuesta de los estudiantes a la tarea 3 ítem ii	93

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1 Construcción del conocimiento matemático en la teoría APOE.....	25
Figura 2 Ciclo de investigación de la teoría APOE.....	29
Figura 3 Carácter geométrico de los números negativos.....	35
Figura 4 Representación geométrica del número complejo $a + b\varepsilon$	37
Figura 5 Representación del número complejo $a + b\sqrt{-1}$	42
Figura 6 Representación geométrica de la suma de vectores	43
Figura 7 Definición de norma de un vector.....	53
Figura 8 Definición de vector en el libro Isaacs y Sabogal (2009)	54
Figura 9 Diagonal del cuadrado	71
Figura 10 Objetos	72
Figura 11 Sistema de ecuaciones lineales	74
Figura 12 Vectores u, v y w	78
Figura 13 Triángulo OKL.....	81
Figura 14 Objetos 2	82
Figura 15 Procedimiento de E1 en la tarea 1i del Cuestionario	95
Figura 16 Procedimiento de E1 en la tarea 1ii del Cuestionario	95
Figura 17 Procedimiento de E4 en la tarea 4 del Cuestionario	96
Figura 18 Procedimiento de E5 en la tarea 4 del Cuestionario	97
Figura 19 Procedimiento de E3 en la pregunta 1 de la Entrevista 1.....	99
Figura 20 Procedimiento de E3 en la pregunta 1i de la Entrevista 2	101
Figura 21 Procedimiento de E3 en la pregunta 1ii de la Entrevista 2	104

Figura 22 Procedimiento de E6 en la pregunta 4 de la Entrevista 1.....	105
Figura 23 Procedimiento de E6 en la tarea 7 del Cuestionario	110
Figura 24 Procedimiento de E6 en la pregunta 2 de la Entrevista 1.....	111
Figura 25 Descomposición genética refinada del concepto de vector	120
Figura 26 Contenido del curso de álgebra lineal utilizado en esta investigación.....	126

Resumen

Título: Construcción del concepto de vector en álgebra lineal: Un modelo cognitivo desde la perspectiva de la teoría APOE*

Autor: Yulieth Alexandra Gutierrez Carrillo**

Palabras Clave: Vector, Descomposición genética, Teoría APOE, Álgebra Lineal.

Descripción:

Esta investigación presenta los resultados obtenidos en un estudio que analiza el desarrollo cognitivo sobre el concepto de vector, a través de su relación con otros conceptos como: el espacio vectorial \mathbb{R}^n , sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y base.

Los elementos de la teoría APOE (Acrónimo Acción, Proceso, Objeto y Esquema) (Arnon et al. , 2014) fundamentan esta investigación y permiten diseñar una descomposición genética que describe las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto de vector. Este análisis cognitivo es validado a través de las producciones de un grupo de estudiantes universitarios de álgebra lineal, mediante el diseño y desarrollo del ciclo de investigación de la teoría APOE.

El proceso metodológico es guiado por la aplicación de las tres componentes del ciclo de investigación: Análisis teórico, Diseño e implementación de instrumentos y, Recolección y análisis de datos. El análisis de la implementación permite obtener resultados sobre las construcciones que logran los estudiantes cuando el diseño y desarrollo de la clase es guiado por las componentes del ciclo. Los datos recolectados indican la necesidad de estructurar el concepto de igualdad como Objeto y el concepto de conjunto como Proceso, para promover la evolución de una concepción Acción a una concepción Proceso de vector. Además, la construcción del Objeto de vector se puede fomentar a partir de una concepción Proceso de base y Objeto de conjunto.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática educativa. Codirector: Luzdari Rangel Ruíz. Magíster en Educación Matemática

Abstract

Title: Construction of the vector concept in linear algebra: a cognitive model from the perspective of APOE theory*

Author(s): Yulieth Alexandra Gutierrez Carrillo¹

Key words: Vector, Genetic Decomposition, APOS theory, Linear Algebra.

Description:

This research presents the results gathered in a study that analyzes the cognitive development of the concept of vector through its relationship with other concepts such as the vector space \mathbb{R}^n , systems of linear equations, linear combination, linear dependence and independence, generator and base set.

The elements of the APOS theory (Action, Process, Object, and Schema) (Arnon et al. , 2014) support this research and allow us to design a genetic decomposition that describes the structures and mental mechanisms involved in the construction of the vector concept. This cognitive analysis is validated through the productions carried out by a Linear Algebra group of university students through the design and development of the APOE theory research cycle.

The methodological process is guided by the application of the three components of the research cycle: theoretical analysis, instrument design and implementation, and data analysis and collection. The analysis of the implementation allows the compilation of results about the constructions that students achieve when the design and development of the class are oriented by the components of the cycle. The data collected show the need to structure the equality notion as an Object and the totality perception as a process to promote the evolution of an Action conception to a Vector Process conception. In addition, the construction of the Vector Object can be promoted from a base Process and set Object conception.

* Bachelor Thesis

¹Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática educativa. Codirector: Luzdari Rangel Ruíz. Magíster en Educación Matemática

Introducción

Diversas investigaciones señalan las dificultades asociadas a la comprensión del concepto de vector, relacionadas por ejemplo, con su representación (Aguirre y Erickson, 1984; Hillel, 2000; Poynter y Tall, 2005) con la naturaleza del vector y el escalar (Appova y Berezovski, 2013; Acevedo et al., 2021), las concepciones del vector cero de un espacio vectorial (Parraguez, 2020); o concebir como vectores, los elementos de un espacio vectorial distinto de \mathbb{R}^n (Harel, 2000; Parraguez, 2020). Así mismo, el concepto de vector se relaciona con conceptos que son fundamentales en los cursos de álgebra lineal, entre ellos, el espacio vectorial, combinación lineal, transformaciones lineales, entre otros. Por ende, es pertinente investigar sobre su construcción en álgebra lineal.

Esta investigación se centra en la construcción del concepto de vector en álgebra lineal fundamentada con los elementos teóricos y metodológicos que plantea la teoría APOE con el fin de diseñar una descomposición genética del concepto de vector, para determinar las construcciones que realizan los estudiantes universitarios que participan en un curso de álgebra lineal por primera vez. Con este modelo cognitivo, se puede señalar un “camino” que muestra como un estudiante aprende el concepto de vector; este es útil para elaborar estrategias de enseñanza y fomentar la comprensión del concepto en contextos similares al estudiado (Trigueros y Oktaç, 2019).

El presente documento se encuentra organizado en diez capítulos y a continuación, se describe el contenido y propósito de cada uno de forma breve:

El primer capítulo, se presenta la revisión de los estudios encontrados sobre la enseñanza y aprendizaje enfocado en el concepto de vector, las cuales orientan el problema planteado y la perspectiva teórica de esta investigación.

El segundo capítulo expone el problema, la pregunta y el tercer capítulo presenta el objetivo general que trazan el enfoque y delimita la investigación.

El cuarto capítulo se describe la teoría APOE (Arnon et al. , 2014) que sustenta el proceso metodológico que se detalla en el cuarto capítulo.

Los capítulos cinco, seis y siete corresponden al desarrollo del ciclo del Análisis teórico, el Diseño e implementación de instrumentos y la Recolección y el análisis de datos respectivamente.

Finalmente, en el octavo capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, para dar respuesta a la pregunta de investigación, algunas recomendaciones didácticas y sugerencias para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

En este capítulo se señalan algunos resultados reportados sobre la construcción del concepto de vector en álgebra lineal, desde diferentes perspectivas en Educación Matemática. Entre ellos, se presentan tres apartados: dificultades, propuestas de enseñanza y aspectos para la construcción del concepto; esto con el fin de encontrar reflexiones y recomendaciones que permitan guiar el presente estudio.

1.1 Sobre el aprendizaje del concepto de vector

Algunos trabajos como los de Aguirre y Erickson (1984) y Poynter y Tall (2005) señalan una dificultad que tienen los estudiantes para aprender el concepto de vector, está relacionada con la representación del vector; ya que cada una de ellas, depende del contexto donde es abordado este concepto.

Por ejemplo, Gutierrez y Roa Fuentes (2023) señalan lo siguiente:

Sierpinska et al. (1999) señalan que en física, el vector se representa por medio de una flecha y se interpreta como una fuerza que actúa sobre un objeto; pero, en álgebra lineal, el vector es visto de tres formas: una flecha que representa posiciones de puntos y transformaciones con respecto a un origen, una cadena de números reales que representan la aritmética de n-uplas en el caso de \mathbb{R}^n , y un elemento de un espacio vectorial que se representa por una letra v (p.2).

De este modo, la estructura de espacio vectorial requiere que los estudiantes desarrollen nuevas formas de pensar sobre el vector, lo que ocasiona dificultades para su aprendizaje y el de otros conceptos del álgebra lineal, entre ellos, operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial. En efecto, Gutierrez y Roa Fuentes (2023) indican que “Parraguez (2020) estudió la construcción de significados de las operaciones

suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial a la luz de la teoría APOE (Acrónimo Acción Proceso, Objeto, Esquema)” (p.2). Además, el trabajo de Parraguez (2020) muestra que las dificultades que se presentan en la comprensión del vector cero de un espacio vectorial se deben a las concepciones que tienen los estudiantes, algunas de estas son:

- El vector cero de un espacio vectorial siempre es la n-upla cero.
- El módulo aditivo de un espacio vectorial y el vector cero son elementos distintos para los estudiantes.
- El vector cero es entendido como un vector que no es linealmente independiente (LI), ni es linealmente dependiente (LD), sino que es neutro.

La autora señala que estas ideas erróneas se deben a la familiaridad que tienen los estudiantes con el caso particular de vectores de \mathbb{R}^n y conllevan a obstáculos para la construcción de la estructura Objeto de las operaciones del espacio vectorial; por ende, es indispensable una comprensión sobre la naturaleza del vector, es decir, cuestionarse por el espacio vectorial en donde se encuentran los vectores e incluso las operaciones que definen este espacio.

Así mismo, Hillel (2000) destaca tres modos de descripción del vector en álgebra lineal:

Modo geométrico del vector. Un vector sin coordenadas se define como un segmento de recta dirigido (flecha) que parte de un punto en común (origen), posee magnitud y dirección, y es denotado como \overrightarrow{OP} o \vec{u} . También, se tiene un vector de coordenadas, son flechas que se encuentran en espacios bidimensionales y tridimensionales dotados de un

sistema de coordenadas y se pueden despojar de la representación de flechas para ser vistos como puntos en el plano o en el espacio.

Modo algebraico del vector. Son n-uplas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Modo abstracto del vector. Son elementos de un espacio vectorial e indicados por las letras u, v o \vec{u}, \vec{v} para diferenciarlos de los escalares.

Con base en los tres aspectos mencionados anteriormente, Hillel (2000) señala que comprender un modo de descripción del vector a otro, es uno de los prerrequisitos básicos en álgebra lineal y algunas de las dificultades que se pueden presentar son las siguientes:

- El tránsito entre la representación geométrica (flecha) y algebraica (punto)
- Los ejes coordenados no son vistos por los estudiantes como un conjunto de vectores que forman una base, sino que son líneas que determinan una cuadrícula,
- La representación de vectores de una base y la representación de un vector en términos de bases, donde una n-upla X es la representación de un vector $[X]_{\beta}$ relativo a una base β .

Así mismo, Harel (2000) primero realizó una revisión de libros de texto de álgebra lineal e identificó que existe la creencia que los estudiantes son capaces de manipular estructuras abstractas, reconocer modelos y resolver problemas sin necesidad de una preparación previa; pues, no existen bases intuitivas para comprender conceptos abstractos.

En consecuencia, Harel (2000) señala que la representación geométrica de un vector es un objeto concreto para los estudiantes; es decir, los vectores son visuales y permiten introducir nociones básicas del álgebra lineal. Con base en esta idea, el autor diseña y

desarrolla una secuencia de enseñanza para el concepto de espacio vectorial, determinada por tres etapas:

i) Estudiar el concepto de espacio vectorial considerando los vectores como segmentos de recta dirigidos y estudiar conceptos como la dependencia e independencia lineal, combinación lineal, base y dimensión empleando este tipo de representación de los vectores.

ii) Redefinir los conceptos introducidos en la fase anterior, donde los vectores son elementos de los espacios \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 para llegar a establecerlos en \mathbb{R}^n a partir del vector de coordenadas.

iii) Estudiar los espacios vectoriales y los demás conceptos en \mathbb{R}^n haciendo énfasis en los sistemas de ecuaciones lineales $n \times m$ y transformaciones de matrices en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

El objetivo es que los estudiantes comprendan que los resultados del álgebra lineal dependen de los axiomas del espacio vectorial y no de definiciones de elementos específicos.

Por su parte, Gutierrez y Roa Fuentes (2023) mencionan que “Appova y Berezovski (2013) diseñaron y aplicaron una prueba a 23 estudiantes universitarios de primer año de un curso de métodos lineales” (p.2). Estos resultados muestran que el 74% de ellos no resolvieron correctamente la prueba, además, identificaron tres tipos de errores que comenten los estudiantes al operar vectores y escalares:

- vector - escalar = escalar
- escalar · vector = escalar
- vector · vector = vector

“Los autores señalan que estos errores son consecuencia de la falta de imágenes para representar la solución de un problema específico” (Gutierrez y Roa Fuentes, 2023, p.2). Por

esta razón, recomiendan que para la enseñanza del concepto de vector, se utilicen enfoques geométricos y se aborde el objeto mediante diferentes representaciones.

Otros autores como Barniol y Zavala (2014) desarrollaron una prueba de selección múltiple llamada Test of understanding of vectors (TUV), conformada por 20 ítems para evaluar tópicos como por ejemplo: dirección de vectores, magnitud, componentes vectoriales, vector unitario, representación vectorial, suma y resta de vectores, multiplicación por escalar y producto cruz. Esta fue implementada con 423 estudiantes que finalizaban un curso de física y evidenciaron 4 tipos de dificultades en la comprensión del vector y los respectivos errores:

Dificultades para comprender las propiedades gráficas. Los estudiantes asocian que la magnitud de un vector está determinada por la segunda componente de su representación algebraica, además, poseen la idea errónea de la representación algebraica de un vector unitario es el vector $(1,1)$.

Dificultades asociadas a procedimientos gráficos. Se encuentran problemas para sumar vectores de manera geométrica y representar geoméricamente el producto de un escalar negativo por un vector, pues los estudiantes no comprenden el efecto que este produce en la dirección del vector.

Dificultades asociadas a procedimientos de cálculos geométricos. Corresponden a errores al emplear el teorema de Pitágoras para calcular la magnitud de la suma de vectores, y utilizar la función coseno para calcular la componente x de un vector cuando el ángulo dado se mide desde el eje y .

Dificultades asociadas a procedimientos de cálculo de notación vectorial unitaria. Estos corresponden con problemas para realizar operaciones como el producto punto entre dos vectores y el producto cruz de vectores.

Además, Watson et al. (2003) señalan que la experiencia que adquieren los estudiantes sobre el concepto de vector se da en dos momentos y estos son explicados mediante la teoría de los tres mundos de las matemáticas así:

En la secundaria, se emplea el vector a partir de un mundo encarnado, como una cantidad con magnitud y dirección, para estudiar conceptos de la física como: la fuerza, la velocidad o la aceleración de un objeto. Además, para interpretar cada uno de estos fenómenos, se representa el vector mediante una flecha que parte de un punto a otro.

A nivel universitario, el concepto de vector es estudiado en cursos de álgebra lineal desde el mundo simbólico. Esto corresponde, a interpretar el vector como una n -upla de números reales y se definen la suma de dos vectores, como el vector obtenido de la suma de las componentes respectivamente. Finalmente, el concepto de vector se ubica en el mundo formal, como un objeto abstracto, definido a partir de las operaciones suma y multiplicación por escalar sobre un espacio vectorial.

Con base en lo anterior, Watson et al. (2003) aplicaron una prueba a 26 estudiantes de preparatoria (17 -18 años) quienes había sido divididos en dos grupos: 11 estudiantes tomaron el curso tradicional donde se abordó el concepto de vector con un enfoque teórico y 15 estudiantes asistieron a sesiones plenarias enfocadas en estudiar la noción de vector libre por medio de problemas, donde era necesario interpretar el vector como una fuerza que actúa sobre un objeto. Los resultados reportados por los autores, indica que existen dificultades para comprender la noción de vector libre en los estudiantes que tomaron las clases tradicionales, a diferencia de los que asistieron a las sesiones plenarias, donde se desarrolló esta noción de los vectores en diferentes contextos.

Así mismo, Stewart y Thomas (2009) adaptaron los elementos de la teoría de los tres mundos de las matemáticas de Tall y la teoría APOE, para estudiar la comprensión de los

estudiantes sobre unos conceptos del álgebra lineal. En particular, para el concepto de suma de vectores y multiplicación por escalar, los autores especifican la estructura Acción, Proceso y Objeto en relación con los tres mundos de la matemática:

Una Acción en el mundo encarnado. Corresponde a ver el vector como un desplazamiento de un punto a otro y sumar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma algebraica y simbólica.

Un Proceso en el mundo encarnado. Hace referencia a reconocer que dos vectores geométricos son equivalentes, si estos se representan por medio de flechas paralelas con la misma longitud y dirección.

Un Objeto en el mundo formal. Corresponde a ver el vector como un elemento de un espacio vectorial que puede ser operado mediante las operaciones definidas sobre el espacio vectorial.

Desde esta perspectiva teórica, Stewart y Thomas (2009) mencionan que las dificultades encontradas, se relacionan con la noción de vector libre, ya que los estudiantes piensan que un vector que parte del origen a un punto A , es un vector diferente a cuando se traslada de su origen. Además, otra confusión de los estudiantes está relacionada con la noción de vector y escalar, pues no pueden identificar la naturaleza que diferencia estos objetos. Estos obstáculos se presentan debido a la enseñanza del concepto de vector enfocada en repetir procedimientos mecanizados, que carecen de una reflexión previa.

1.2 Propuestas de enseñanza para el concepto de vector

En este apartado, se presentan las investigaciones que se enfocaron en diseñar e implementar actividades y tareas para la enseñanza del concepto de vector relacionadas con

la magnitud y dirección. Por ejemplo, Paz (2020) señala la necesidad de abordar el concepto de vector en las aulas, desde un enfoque geométrico así:

Dotar de escenarios geométricos en donde los estudiantes puedan realizar las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar como una graduación para lograr la concepción del vector en su forma abstracta vista en un curso de álgebra lineal (p.39).

Por esta razón, Paz (2020) plantea una serie de tareas a partir de un problema en un contexto real como es el movimiento de un brazo robótico, en el que se involucra la concepción de vector como flecha. La propuesta se desarrolló con 15 estudiantes que estaban cursando álgebra lineal, y estudiaban el pregrado en Informática, Administración Industrial e Ingeniería Industrial en México.

Un aspecto importante que señala Paz (2020) es que la simulación de un brazo robótico en GeoGebra, fomenta la comprensión de la longitud y posición del vector como el eslabón del brazo robótico, debido a que los estudiantes podían variar esta medida por medio de un deslizador.

Por otra parte, Acevedo et al. (2021), proponen dos actividades para la enseñanza del concepto de vector en \mathbb{R}^2 . La primera actividad busca que los estudiantes comprendan el concepto de vector en \mathbb{R}^2 , la magnitud y dirección del vector por medio de ejercicios que requieran graficar vectores al ubicar dos puntos en el plano, visualizar vectores equivalentes de manera gráfica y algebraica, y encontrar la dirección de un vector mediante el software de GeoGebra.

La segunda actividad consiste en hallar la suma y resta de vectores de manera algebraica, y luego, relacionar estas operaciones con la representación gráfica del vector

suma y resta, interpretando este vector como la diagonal de un paralelogramo, mediante el uso de GeoGebra.

1.3 Aspectos sobre la construcción de los conceptos del álgebra lineal

Mediante la teoría APOE (Acrónimo Acción, Proceso, Objeto y Esquema) se han desarrollado diversos trabajos relacionados con la construcción de los conceptos del álgebra lineal. Por ejemplo, Oliveros (2019) y Roa-Fuentes y Oktaç (2010), estudiaron la construcción de los sistemas de ecuaciones lineales y transformación lineal respectivamente. Estas investigaciones presentan una descomposición genética, que permite explicar cómo un estudiante puede comprender el respectivo concepto y señalan algunos aspectos sobre el concepto de vector que se destacan a continuación:

Oliveros (2019) menciona que, para construir un Proceso de sistemas de ecuaciones lineales, es necesario construir una concepción Proceso de vector a partir de tareas que requieran describir qué vector o vectores son solución de cierto sistema; esto con el fin, de que un estudiante pueda considerar de forma general todas las soluciones de un sistema.

Una estructura Proceso de Vector implica que el estudiante comprenda que un vector v , que para el caso de las soluciones de un SEL son n -*uplas*, son elementos del espacio \mathbb{R}^n , y por lo tanto si se considera un vector de la forma $(r, r + 1)$, con $r \in \mathbb{R}$, se deben considerar a $(0,1)$, $(2,3)$, $(r + s, r + s + 1)$, en general a infinitos vectores de esa forma, así como la suma entre ellos mismos y la multiplicación por un escalar, por ser elementos de un espacio vectorial (Oliveros, 2019, p.54).

Además, Roa-Fuentes y Oktaç (2010) señalan la necesidad de estructurar el Objeto de vector para construir el concepto de transformación lineal, donde $T:U \rightarrow V$, $u \in U$ y c es un escalar. Esta construcción se puede evidenciar cuando un estudiante puede pensar

en el vector u de un espacio vectorial U como un vector que representa cualquier elemento del espacio y puede comparar los vectores $T(cu)$ y $cT(u)$ como elementos de cualquier espacio V , esto le permite comprobar que la función T preserva la multiplicación por escalar para todo elemento de U .

Con este panorama desde la Educación Matemática, se tienen resultados sobre la forma en qué se estudia el concepto de vector, las dificultades que pueden presentarse en su aprendizaje, algunas propuestas de enseñanza del vector en \mathbb{R}^2 y estudios que han considerado el vector como elemento de \mathbb{R}^n para estructurar conceptos como los sistemas de ecuaciones lineales y la transformación lineal. Cabe resaltar que, no se hallaron descomposiciones genéticas que muestre cómo evolucionan las concepciones de vector mediante la relación entre los conceptos del álgebra lineal.

2. Planteamiento del problema

En la literatura se ha reportado una problemática que tiene que ver con la comprensión de los conceptos del álgebra lineal dada por su naturaleza abstracta. Dorier et al. (2000) mencionan que “para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas, que representan con gran dificultad” (p. 95). Un ejemplo de esto es el concepto de vector, usualmente estudiado en cursos de álgebra lineal en el que se abordan conceptos como: espacios vectoriales, combinaciones lineales de vectores, base, transformaciones lineales, valores y vectores propios, entre otros; en cada uno de estos conceptos es necesario comprender el concepto de vector.

El concepto de vector en los libros de texto inicialmente se presenta como el conjunto de segmentos de recta dirigido (interpretación geométrica, una flecha), como una n -upla (interpretación algebraica, (x_1, x_2, \dots, x_n)) para el espacio vectorial \mathbb{R}^n y de manera

general, como elemento de un espacio vectorial V , quedando totalmente descontextualizado y estático. Así mismo, los estudiantes presentan dificultades para distinguir el vector mediante sus representaciones (Hillel, 2000), diferenciar el vector de un escalar (Appova y Berezovski, 2013), comprender que el vector cero no siempre está definido como la n -upla cero (Parraguez, 2020) o pensar en que una función puede ser un vector (Harel, 2000).

La articulación del concepto de vector en el estudio de otros conceptos del álgebra lineal fortalece la concepción que inicialmente han construido los estudiantes sobre el vector. Por ende, es necesario estudiar el espacio vectorial para fomentar la comprensión del concepto de vector y la estructura algebraica del conjunto donde se encuentran este objeto. De este modo, cabe preguntarse ¿Qué concepciones tienen los estudiantes sobre el vector? y si ¿estas concepciones permiten la construcción del concepto de vector en un curso de álgebra lineal? Por ende, se plantea la siguiente pregunta:

2.1 Pregunta de investigación

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto de vector en estudiantes de un curso de álgebra lineal?

Para dar respuesta a esta pregunta, en el siguiente capítulo se plantea el objetivo que guía el desarrollo de la presente investigación.

3. Objetivo

3.1 Objetivo General

Diseñar una descomposición genética que describa las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto de vector en estudiantes universitarios de álgebra lineal mediante el desarrollo del ciclo de investigación de la teoría APOE.

Para responder la pregunta y cumplir con el objetivo planteado en esta investigación, se considera el marco teórico, la teoría APOE. A continuación, se presentan los elementos que se utilizarán para el desarrollo de la investigación.

4. Marco teórico: Teoría APOE

En este capítulo se presenta los elementos de la teoría APOE (acrónimo Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Arnon et al. , 2014) que sustentan esta investigación. Entre ellos, se describen las estructuras y mecanismos mentales que permiten explicar la construcción de un concepto matemático y en qué consiste una descomposición genética de un concepto.

4.1 Estructuras y mecanismos mentales

La teoría APOE fue desarrollada por Dubinsky et al. (2014) para explicar cómo los estudiantes universitarios pueden aprender matemáticas. Desde esta perspectiva teórica se tiene que la construcción de un conocimiento matemático surge por medio de estructuras y mecanismos mentales. Las estructuras mentales están asociadas a la concepción que un individuo tiene sobre el concepto; pues, McDonald et al. (2000) señalan que “una

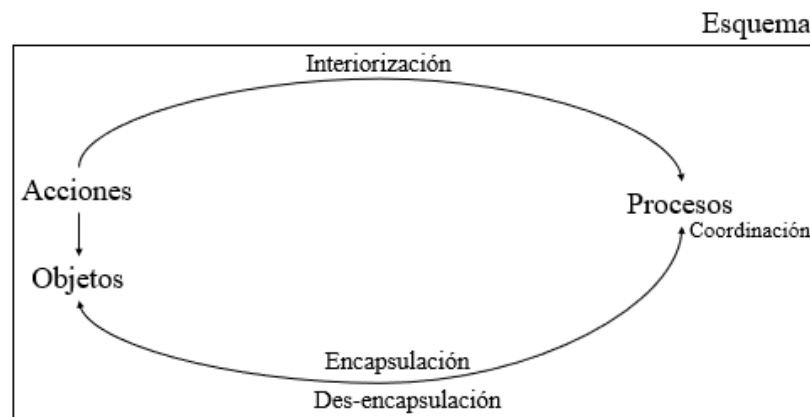
concepción es algo intrapersonal (es decir, la idea o comprensión que posee un individuo)” (p.78). Estas se desarrollan mediante un mecanismo mental (Arnon et al. , 2014).

Los mecanismos mentales que actúan en la construcción del conocimiento matemático son interiorización, coordinación, encapsulación, des-encapsulación y reversión que dan lugar a las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquemas (Arnon et al. , 2014).

La Figura 1 muestra cómo se relacionan las estructuras y los mecanismos mentales mencionados anteriormente.

Figura 1

Construcción del conocimiento matemático en la teoría APOE



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.18), por Arnon et al. , 2014, Springer.

A continuación, se explican las estructuras mentales y cómo los mecanismos mentales permiten evolucionar cada una de ellas. Se utiliza el concepto de transformación lineal para mostrar cómo un individuo puede comprender este concepto en términos de estructuras y mecanismos mentales.

Acción. Esta estructura consiste en transformar objetos matemáticos por medio de instrucciones externas; estas permiten guiar al individuo sobre la aplicación paso a paso de las transformaciones que puede realizar; sin embargo, el individuo no cuenta con la capacidad de reflexionar sobre estas (Asiala et al. , 1996). Por ejemplo, una Acción de transformación lineal donde $T: U \rightarrow V$, Roa-Fuentes y Oktaç (2010) señalan que consiste en:

Tomar dos vectores particulares de U y sumarlos mediante la adición definida en este espacio, determinar su imagen bajo T como elemento de V , obtener un nuevo elemento de V y comparar los vectores resultantes, bajo una concepción objeto de los nuevos elementos hallados como vectores (p .104).

De este modo, el estudiante sólo puede comprobar con vectores particulares que una transformación lineal preserva la suma vectorial, pero no le permite verificar que esta propiedad se cumple para cualquier vector de U .

Proceso. Esta estructura puede desarrollarme por medio de la interiorización de Acciones o la coordinación de dos o más Procesos. Asiala et al. (1996) afirma que “Cuando se repite una Acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un Proceso” (p. 7); es decir, un individuo ha construido un Proceso si es consciente de la Acción, en lugar de seguir instrucciones externas.

Roa-Fuentes y Oktaç (2010) mencionan que un estudiante ha interiorizado una Acción de transformación lineal cuando puede pensar en si T satisface o no la suma vectorial para todos los vectores de U y la forma en la que actúa T sobre los vectores, sin tener que realizar cálculos.

Además, se puede estructurar un Proceso de un concepto a partir de coordinar dos o más Procesos; por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktaç (2010) señala que es necesario coordinar el Proceso de suma vectorial con el Proceso de producto por un escalar, para construir un solo Proceso de transformación lineal, al pensar que una transformación lineal satisface las dos propiedades simultáneamente.

Objeto. Esta estructura se desarrolla por medio de la encapsulación. Esto permite realizar nuevas Acciones sobre el Proceso que se construyó, estableciendo una concepción estática del concepto (Objeto). Por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktaç (2010) mencionan que un Objeto de transformación lineal consiste en considerar la transformación lineal como composición de transformaciones lineales o elementos de un conjunto.

Esquema. Es la estructura más grande, que contienen otras y están relacionadas con un concepto matemático específico. Trigueros (2005) afirma que los Esquemas son:

Una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un Esquema para tratarlo (p. 11).

Teniendo en cuenta un concepto matemático específico y la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales definidos anteriormente, la teoría APOE permite obtener un modelo cognitivo del concepto en estudio, llamado descomposición genética.

4.2 Descomposición genética

Una descomposición genética de un concepto (DG) muestra un camino que pueden usar los estudiantes para comprender el concepto en estudio, en términos de las estructuras y mecanismos mentales que puede construir un estudiante en su proceso de aprendizaje.

Se entiende por *Descomposición genética preliminar* como “aquella que no ha sido probada experimentalmente, pues Asiala et al. (1996) mencionan que la DG debe refinarse con base en los resultados obtenidos en la implementación, de modo que refleje lo que se ha encontrado empíricamente” (Gutierrez y Roa Fuentes, 2023, p.4).

Algunos recursos utilizados para diseñar estos modelos cognitivos pueden ser el análisis de libros de texto, antecedentes, estudios históricos y epistemológicos, entre otros. Cabe resaltar que las descomposiciones genéticas no son únicas, pues, Arnon et al. (2014) afirma que, “no proporciona una forma única en la que todos los estudiantes construyan un concepto matemático específico” (p. 40).

Las descomposiciones genéticas ofrecen rutas posibles para la construcción de conceptos matemáticos y tienen la intención de fomentar la comprensión de los estudiantes, pero estas no son únicas, ya que están condicionadas por los presaberes y la experiencia de los individuos. Por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) presentan dos caminos para la construcción del concepto de transformación lineal. La primera descomposición genética parte de que un individuo posee una concepción Objeto previa de transformación al considerar una función definida entre espacios vectoriales. Otra forma de construir el concepto de transformación lineal puede ser mediante la aplicación de Acciones como sumar vectores particulares y tomar vectores dados y multiplicarlos por un escalar bajo una función dada.

5. Metodología: Ciclo de investigación de la teoría APOE

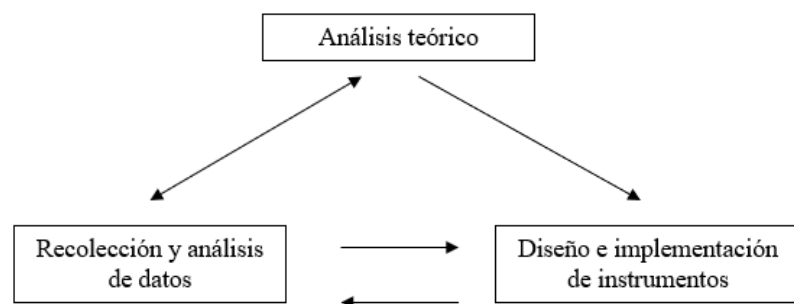
Esta investigación estudia las estructuras y mecanismos mentales que construyen los estudiantes de un curso de álgebra lineal sobre el concepto de vector. Se caracteriza por desarrollar una metodología cualitativa, de orden cognitivo basado en la teoría APOE (Arnon et al. , 2014). Esto dado que, desde la perspectiva APOE, se analiza la viabilidad de una descomposición genética del concepto de vector que describe las posibles construcciones de los estudiantes.

La investigación se desarrolla en el contexto universitario con 20 estudiantes de primer semestre (16 – 23 años) de Ingeniería Metalúrgica que cursan álgebra lineal I por primera vez en la Universidad Industrial de Santander (UIS) en Bucaramanga, Colombia; este curso está a cargo del docente investigador. Dado que la teoría APOE tiene su propio paradigma de investigación, este es utilizado para llevar a cabo esta investigación. El paradigma está conformado por tres componentes: i) Análisis teórico, ii) Diseño e implementación de instrumentos y iii) Recolección y análisis de datos (Arnon et al. , 2014).

La Figura 2 muestra la interacción entre las tres componentes.

Figura 2

Ciclo de investigación de la teoría APOE



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.94), por Arnon et al. , 2014, Springer.

5.1 Análisis teórico

Esta investigación inicia con el Análisis teórico que consiste en estudiar el concepto de vector a partir de estudios históricos y epistemológicos, el análisis de libros de texto, investigaciones previas, descomposiciones genéticas reportadas y la experiencia de las investigadoras como estudiantes y profesoras en relación con el concepto de vector. Estos elementos se consideran recursos importantes, pues, permiten determinar qué conceptos previos y conexiones intervienen en su construcción. De este modo, el desarrollo del Análisis teórico permite proponer una descomposición genética preliminar del concepto de vector. En el capítulo 6 se profundiza sobre esta componente.

5.2 Diseño e implementación de instrumentos

Esta componente, se caracteriza por el diseño de instrumentos que permitan evidenciar o complementar las construcciones de los estudiantes descritas en la descomposición genética preliminar del concepto de vector. En esta investigación, se decidió diseñar una prueba diagnóstica, un cuestionario y dos entrevistas; estos instrumentos contienen tareas (Trigueros y Oktaç, 2019), destinadas en fomentar la construcción de estructuras y mecanismos mentales (ver capítulo 7).

5.3 Recolección y Análisis de datos

Esta componente pretende evidenciar las construcciones que realizaron los estudiantes y validar o complementar la descomposición genética obtenida en el Análisis teórico. Arnon et al. (2014) señala que el ciclo de investigación finaliza hasta que la

evidencia empírica y la descomposición genética apunten hacia las mismas construcciones mentales. En el capítulo 8 se tiene el análisis de los datos y la descomposición genética refinada.

6. Análisis Teórico

Esta componente se caracteriza por estudiar el concepto de vector, con el fin de identificar los conocimientos previos que un estudiante requiere para construir el concepto en un curso de álgebra lineal, determinar las concepciones que se pueden evidenciar y finalmente, diseñar una descomposición genética preliminar del concepto de vector.

En este caso, se considera la epistemología del concepto de vector, el análisis de libros de texto e investigaciones previas que señalan aspectos sobre el aprendizaje del concepto de vector, los cuales permiten plantear un camino para su construcción.

6.1 Epistemología del concepto de vector

La construcción de este apartado se realizó por medio de la revisión de los trabajos de Zea (2012) y Chavarría (2019) centrados en la epistemología de dos conceptos: vector y espacio vectorial respectivamente. Teniendo en cuenta estos antecedentes epistemológicos, se plantearon dos preguntas que guían el estudio:

- ¿Cómo surge el concepto vector?
- ¿Cuáles son las situaciones que influyeron para la construcción de este conocimiento matemático?

Desde una perspectiva didáctica, el estudio epistemológico se dividió en tres etapas: noción, consolidación y abstracción. Esto con el fin de mostrar el desarrollo, los retrocesos y la evolución del conocimiento, como se explica a continuación.

Noción de vector

Una de las primeras evidencias sobre el vector está relacionada con las magnitudes y los segmentos de recta. En la matemática griega se encuentran problemas como el de calcular la diagonal D de un cuadrado en función del lado L ; la forma de solucionarlo consistió en tomar el segmento de longitud L y llevarlo sucesivamente sobre el segmento de longitud D y así se concluye que la diagonal D del cuadrado no se logra cubrir completamente con el segmento de longitud L .

Las formas de pensar sobre el lado de un cuadrado como un segmento con longitud L se debe a Euclides (330-275 a. C), quien es uno de los pioneros en asignarle magnitud a los segmentos de recta y operar aritméticamente números y magnitudes, como aparece el libro V de los Elementos. Para los griegos, sólo existían magnitudes conmensurables, es decir, las magnitudes se podían expresar como múltiplos enteros de esta; sin embargo, para el problema de la diagonal del cuadrado, Zea (2012) señala que Euclides demostró por reducción al absurdo, que no existen dos números n y m , tales que $nD = mL$. Esta deducción, muestra la existencia de magnitudes inconmensurables, que ahora se conocen como números irracionales.

Así mismo, las magnitudes inconmensurables emergieron en distintos problemas, por ejemplo, al establecer una relación entre el lado y la altura de un triángulo equilátero, o relacionar la medida de la circunferencia con su diámetro; pero la aceptación de su existencia ocasionó la llamada crisis de los fundamentos en la Matemática. Esta situación llevó a Euclides a organizar la matemática en definiciones, postulados y teoremas (la geometría euclidiana), donde una de sus deducciones consiste en establecer relaciones entre dos magnitudes.

En este caso, las ideas de Euclides se basan en considerar dos tipos de objetos: las magnitudes y los múltiplos de las magnitudes, estos permiten mostrar algunos axiomas del espacio vectorial donde los múltiplos de las magnitudes son escalares y las magnitudes actúan como vectores. Además, la forma de actuar sobre los objetos se da mediante un enfoque geométrico que permitió resolver demás problemas de la matemática griega.

La Tabla 1 se muestran algunas proposiciones planteadas por Euclides sobre las magnitudes y su relación con algunos axiomas de la definición de espacio vectorial.

Tabla 1

Proposiciones sobre magnitudes y los axiomas del espacio vectorial

Proposiciones	Interpretación de Zea (2012)
Dado cualquier número de magnitudes, sean cuales fueran. Equimúltiplos de otras magnitudes en igual números, cualesquier que fueren las veces que de una de ellas sea múltiplo de alguna, este múltiplo será todas las demás (Euclides, 1996, p.790).	“Propiedad distributiva del producto escalar y la suma de vectores: $mA + mB + mC = m(A + B + C)$ ” (Zea, 2012, p. 27).
Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda, que de una tercera lo es de una cuarta y una quinta es el mismo múltiplo de la segunda, que una sexta lo es de una cuarta, la primera y la quinta juntas serán el mismo múltiplo de la segunda que de la tercera y la sexta lo son de la cuarta (Euclides, 1996, p.790).	“Propiedad distributiva de la suma de escalares con respecto a la multiplicación por un vector: $mA + nA = (m + n)A$ donde A es un vector y m, n son escalares” (Zea, 2012, p.27).
Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta. (Euclides, 1996, p.790).	“Propiedad asociativa del producto escalar: $n(mA) = (nm)A$ ” (Zea, 2012, p.27).

Estas ideas de Euclides fueron tomadas por Descartes para solucionar ecuaciones algebraicas a través de la geometría analítica de segmentos, con los cuales pudo realizar operaciones. Por ejemplo, Zea (2012) señala que para la multiplicación de dos magnitudes AB y AC , Descartes construye el segmento unidad u , de modo que el segmento AB es múltiplo del segmento u , y así puede aplicar la proporción y relacionar magnitudes conocidas; esta forma de proceder corresponde a determinar $AB = ku$ donde k es un entero

distinto de cero, es decir, multiplicar un escalar por un vector, donde AB y u son vectores de \mathbb{R}^2 .

Desde esta perspectiva, se resolvieron problemas como dividir una línea recta en una cantidad de segmentos iguales, bisecar ángulos, construir algunos polígonos regulares, generar cuadrados de igual o dos veces el área de un determinado polígono. Más adelante, se empieza a trabajar los segmentos de recta con una nueva característica a los segmentos de recta: la dirección; esta se desarrolla al interpretar problemas como el siguiente:

Supongamos que un hombre ha avanzado de A a B , 5 yardas, y luego se devuelve 2 yardas (de B a C), si al llegar a C se le pregunta, ¿cuánto avanzó (en toda la marcha)? Yo encuentro que está avanzado 3 yardas. Pero si, habiendo avanzado 5 yardas a B , de allí retrocede 8 yardas a D ; Y luego se le preguntó cuánto avanzó cuando estaba en D : digo -3 yardas. Es decir, está avanzado 3 metros a la izquierda que nada. (Wallis, 1685, p. 265)

Este problema permite pensar en los números negativos como segmentos que poseen una magnitud y sentido; si la magnitud es positiva, tenemos un segmento ubicado a la derecha del punto de referencia y de lo contrario, se ubica hacia la izquierda como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Carácter geométrico de los números negativos



Nota. Tomado de *A Tratisse of álgebra* (p.265), por Wallis, 1685.

Esta interpretación apareció en 1685 y fue desarrollada por Wallis (1616-1703) al considerar que los enteros positivos aumentan hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda. Además, sus ideas sobre los segmentos de recta con dirección contribuyeron en la representación geométrica del número complejo $a + b\sqrt{-1}$ así:

Simbolizar la parte real de un número complejo sobre la recta horizontal, teniendo en cuenta que si es negativo estará a la izquierda del origen y si es positivo a su derecha. A partir del número ubicado en la recta se traza un segmento perpendicular que simboliza la parte imaginaria multiplicada por $\sqrt{-1}$ (Chavarría, 2019, p.69).

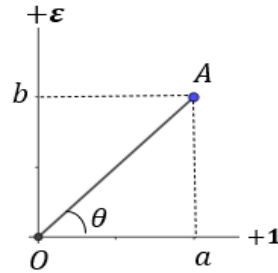
A pesar de que los números negativos y los números complejos aparecieron como raíces de polinomios y fueron ignorados por muchos años debido a que estos objetos carecían de interpretación y no evidenciaban utilidad en los problemas como la medición de terrenos (Chavarría, 2019). Sin embargo, cuando Wallis interpretó geoméricamente los números complejos, cobraron importancia en el desarrollo de las matemáticas; es así como Wessel (1745-1818) plantea una representación moderna de los números complejos:

Wessel construye su plano complejo trazando dos rectas perpendiculares, donde el punto de intersección lo llama origen. La unidad en la recta horizontal en $+1$ y en la vertical $+i$, en una interpretación moderna corresponde a $\sqrt{-1}$ (Euler es quien introduce el símbolo i para denotar la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$) (Chavarría, 2019, p.70-71).

La representación de los números complejos planteada por Weesel se ilustra en la Figura 4.

Figura 4

Representación geométrica del número complejo $a + b\varepsilon$



Nota. Tomado de *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (p.46), por Zea C., 2012, Tesis de maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia

Las ideas de Wessel muestran la integración del plano cartesiano y permite visualizar el número complejo $a + b\varepsilon$ como un segmento OA o como pareja ordenada (a, b) y permite definir dos operaciones entre segmentos: suma y multiplicación. Si (a, b) y (c, d) son dos segmentos, entonces la suma de segmentos se define $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y la multiplicación es interpretada geoméricamente mediante rotaciones de 0° , 90° y 180° (Chavarría, 2019).

En general, la etapa noción de vector se caracteriza por el desarrollo del vector como segmento de recta dirigido con magnitud y dirección, que fue construyéndose en la medida en que se amplía el conjunto numérico con el descubrimiento de los números irracionales, negativos y complejos, siendo una herramienta para representar estos números, sin ningún interés por su conceptualización.

Consolidación del vector

Esta etapa se caracteriza por la evolución de la matemática del siglo XIX debido a la necesidad resolver problemas como la caída libre. También, se retoman los avances asociados a la interpretación geométrica de los números complejos como segmentos de recta con dirección o como parejas ordenadas, pues, promovieron el desarrollo de la teoría de los cuaterniones y la conceptualización del vector.

En esta época, se destacan las ideas de Hamilton, quien se interesa en extender los números complejos como parejas ordenadas, al espacio tridimensional por medio de una terna de números ordenados llamados triplas (Chavarría, 2019).

Uno de los resultados presentes en el álgebra era llamado el Principio de permanencia de formas equivalentes:

Cualquiera que sea la forma equivalente del Álgebra Aritmética, considerada como la ciencia de la sugestión, donde los símbolos son generales en su forma, aunque específicos en sus valores, continuará siendo una forma equivalente donde los símbolos son generales por su naturaleza como en su forma (Peacock, 1833, p.198-199).

Este principio implicaba que los objetos resultantes de operaciones aritméticas preservaban la naturaleza de los objetos que le dieron origen; sin embargo, la multiplicación de triplas es un número con cuatro componentes, lo que implica que no satisface este Principio.

Para solucionar esta inconsistencia, Hamilton define los cuaterniones, estos son números de la forma $a + bi + cj + dk$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y i, j y k son unidades imaginarias que satisfacen $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ y conllevaron a enfrentarse a un

nuevo problema, los cuaterniones no cumplen con la conmutatividad de la multiplicación, como se creía desde la matemática griega.

Los cuaterniones fueron el primer ejemplo de conjunto que no satisface la propiedad conmutativa del producto y da paso a definir dos tipos de producto: “el producto punto (no cumple la ley Modulativa (vectores ortogonales) y la división; y el producto cruz, no cumple la ley asociativa y conmutativa” (Zea, 2012, p.80). Además, los cuaterniones fueron muy importantes para la conceptualización del vector, pues, Hamilton define los términos de vector y escalar a partir de ellos, así:

La parte algebraicamente real puede recibir todos los valores contenidos en la escala de progresión de números de lo negativo a lo positivo infinitamente; nosotros llamaremos entonces la parte escalar, o simplemente el escalar del cuaternión, y designaremos este símbolo prefijando, a el símbolo del cuaternión, la característica *Scal.*, o simplemente *S.*, cuando no haya confusión para usar esta última abreviatura. De otro lado, la parte algebraicamente imaginaria, la cual es geoméricamente construida por una línea recta o radio del vector. En general, un cuaternión tiene una determinada longitud y dirección en el espacio, puede ser llamada la parte del vector, o simplemente vector del cuaternión; y puede ser denotada prefijando la característica *Vect*, o *V*. Por tanto, podemos decir que un cuaternión es en general la suma de sus propias partes escalares y vectoriales, y podemos escribir $Q = Scal.Q + Vect.Q$, $Q = S.Q + V.Q$ o simplemente $Q = SQ + VQ$ (Hamilton, 1846, p. 26).

La descomposición del cuaternión en una parte vectorial y otra escalar permitió a Hamilton establecer el producto de cuaterniones. Zea (2012) señala que primero definió el producto de los vectores unitarios y luego definió esto de manera analítica así:

Si $P = ai + bj + ck$ y $Q = a'i + b'j + c'k$ son cuaterniones tales que la parte real es igual a cero, entonces $P \cdot Q = Scal P \cdot Q + Vect P \cdot Q$, donde $Scal P \cdot Q = -(aa' + bb' + cc')$ y $Vect P \cdot Q = (bc' - cy')i + (ca' - ac')j + (ab' - ba')k$, que en términos modernos corresponden al producto cruz y el producto escalar (p.81).

Además, Chavarría (2019) afirma que Hamilton definió las siguientes propiedades de los cuaterniones:

Sean $P = a + bi + cj + dk$ y $Q = a' + b'i + c'j + d'k$ cuaterniones y t un escalar, se tiene que:

- La suma de dos cuaterniones es
- $P + Q = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$;
- La multiplicación de un escalar por un cuaternión es
- $tP = ta + (tb)i + (tc)j + (td)k$;
- El conjugado del cuaternión $P = a + bi + cj + dk$ es $P^* = a - bi - cj - dk$;
- El producto entre el cuaternión y su conjugado es $P \cdot P^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;
- El inverso multiplicativo de un cuaternión es la forma $P^{-1} = \frac{P^*}{PP^*}$. (p.77).

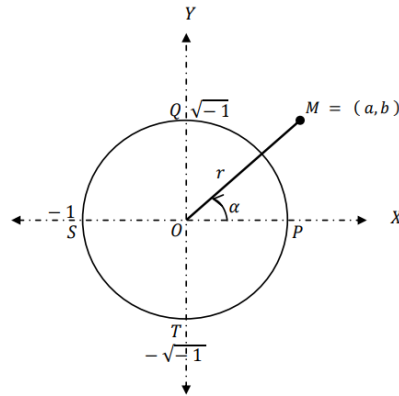
Las propiedades de los cuaterniones muestran que la suma y multiplicación de cuaterniones preserva la descomposición del número como una parte vectorial y otra escalar; además, se destacan algunos axiomas de la definición del espacio vectorial.

Por otra parte, los trabajos de Hamilton causaron interés para los matemáticos de esta época como por ejemplo Tait (1831-1901) quien en 1873 plantea una representación de los números complejos en el plano cartesiano de manera más completa a la realizada por Wessel.

Si rotamos el segmento OP , en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto O , un ángulo de 90° , se llega de P a Q . Ahora, si realizamos la misma operación repetidamente, se llega a S , luego a T y finalmente retornamos nuevamente a P , como lo muestra la Figura 6. De esta forma, en principio, se generarían las cuatro rotaciones básicas de 90° . En general la cantidad $a + b\sqrt{-1}$, se puede representar como un punto en el plano: $M = (a, b)$. A su vez el segmento $OM = \|r\| = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su dirección con el eje X , estaría determinada por el ángulo α igual $\left(\frac{b}{a}\right)$ (Zea, 2012, p. 98).

Figura 5

Representación del número complejo $a + b\sqrt{-1}$



Nota. Tomado de *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (p.98), por Zea C., 2012, Tesis de maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

La ubicación de números complejos en el espacio fue muy importante para Tait, pues esto le permite definir un vector geométrico como un segmento de recta dirigido que posee tres elementos (magnitud, dirección y sentido) como se evidencia en la obra *Elementary Treatise on Quaternions*:

All lines which are equal and parallel may be represented by a common symbol, and that symbol contains three distinct numbers. In this sense a line is called a VECTOR, since by it we pass from the one extremity, *A* to, the other, *B*; and it may thus be considered as an instrument which carries *A* to *B*: so that a vector may be employed to indicate a definite translation in space. [Todas las rectas iguales y paralelas pueden representarse por un mismo símbolo, y ese símbolo contiene tres

números distintos. En este sentido, una recta se llama VECTOR, ya que por ella pasamos de un extremo A a otro B ; y así puede ser considerado como un instrumento que lleva A a B : de modo que puede emplearse un vector para indicar una traslación definida en el espacio]. (Tait, 1873, p. 5)

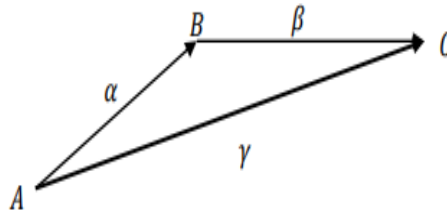
Tait señala el vector como una recta que va de un punto A a otro B , para hacer referencia al vector como un segmento de recta con magnitud, dirección y sentido. Además, la interpretación del vector como traslación, se debe a la cercanía de Tait con sus conocimientos en Física; pues, Zea (2012) señala que el método del paralelogramo usado para sumar vectores es obra de Tait, pues planteó la suma de vectores así: “Sean A , B y C tres puntos cualesquiera, donde $\overline{AB} = \alpha$, $\overline{BC} = \beta$ y $\overline{AC} = \gamma$ establezcamos la siguiente relación: $AB + BC + AC \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma$ ” (Tait, 1873, p.9).

Debido a los aportes de Tait, se conceptualiza el vector como un objeto matemático y su representación permite explicar fenómenos físicos como fuerza, velocidad, movimiento, posición, campos eléctricos, entre otros, los cuales se estuvieron trabajando desde finales del siglo XVII (Zea, 2012).

La Figura 6 muestra que para sumar los vectores AB y BC , el extremo final B del primer vector AB debe coincidir con el origen B del segundo vector BC . Así, la suma resultante es el vector AC .

Figura 6

Representación geométrica de la suma de vectores



Nota. Tomado de *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (p.101), por Zea 2012, Tesis de maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Como se pudo observar, establecer entre la interpretación geométrica y algebraica de vector, permitió la ampliación del campo numérico y el desarrollo del álgebra abstracta como se describe en el siguiente apartado.

Abstracción del concepto de vector

Continuando este desarrollo histórico-epistemológico del concepto de vector y siguiendo las ideas de Hamilton, esta última etapa (mitad del siglo XIX) consideramos las ideas de Grassman, ya que dan paso a la formalización de las operaciones entre vectores.

Los aportes de Hamilton sobre los cuaterniones evidencian un primer ejemplo de espacio vectorial y contribuyen en el desarrollo del análisis vectorial. Zea (2012) menciona que en 1844 Hamilton publicó su primer artículo sobre cuaterniones y su interés era describir matemáticamente fenómenos del mar; estas ideas abren paso para que Grassman desarrollara sus trabajos sobre el análisis vectorial, formalizando las operaciones básicas entre vectores, donde explica lo siguiente:

El primer impulso provino de las consideraciones de lo negativo en la geometría; me fui acostumbrando a ver las distancias AB y BA como magnitudes opuestas. En

este sentido, llegué la conclusión que si A , B y C , son puntos de una misma línea recta, entonces en todos los casos $AB + BC = AC$, esto va a ser es cierto cuando AB y BC tienen la misma dirección o direcciones opuestas (cuando C está entre A y B). Las magnitudes AB y BC no las considero solamente con sus longitudes, sino también con sus direcciones, pues pueden tener direcciones opuestas. Desde esta perspectiva, hice una distinción entre la suma de longitudes y la suma de distancias, las cuales tienen fijada una dirección. De esto resultó la necesidad de establecer el concepto de suma, no sólo cuando las distancias estaban dirigidas en la misma dirección, sino también en direcciones opuestas. En esencia esto podría realizarse en una forma más simple, puesto que la ley de $AB + BC = AC$, es tan bien válida cuando A , B y C , no se apoyan en una misma línea recta. (Crowe, 1994, p. 56-57)

De lo anterior se puede ver que Grassman inicia con acciones como graficar el vector mediante la construcción de un segmento que une dos puntos e interpretar la magnitud del segmento como distancia, para establecer expresiones como $AB + BC = AC$. Esta perspectiva produce un cambio de pensamiento, pues se desarrolla la aritmética de vectores desde la interpretación algebraica, debido a que Grassman encontró limitaciones en el contexto geométrico, una de ellas es la siguiente:

Si la superficie es tomada en lugar del punto, entonces es producido un sólido geométrico como producto de tres factores. Esto es lo más lejos que uno puede ir en geometría pues el espacio es de solamente tres dimensiones; tales limitaciones no aparecen en la aritmética. (Crowe, 1994, pág. 59)

Aunque las bases teóricas de los trabajos de Grassman partieron de la geometría, sus ideas evolucionaron hasta el punto de desconectarlas con el contexto geométrico. Por otra parte, Peano parte de los trabajos de Grassman y finalmente “Peano logra sintetizar las propiedades inherentes a la noción de vector y define la axiomática de los espacios vectoriales sobre los números reales, más o menos de una forma moderna”(Zea, 2012, p.136). Es decir, Peano desarrolla la teoría de los espacios vectoriales, donde el vector se establece como un objeto matemático asociado a una estructura algebraica.

Para finalizar, se puede afirmar que la construcción del vector requiere un cambio de perspectiva, pues, durante este recorrido epistemológico, se evidenció la importancia de pasar de lo geométrico a lo algebraico para que el concepto de vector permitiera concretar las teorías de la física y la matemática. A partir del desarrollo de estas dos líneas, se centraron las bases para el análisis vectorial y el álgebra lineal.

6.2 Análisis de libros de texto

El análisis de libros de texto es un recurso importante para realizar Análisis teóricos de conceptos matemáticos (Arnon et al. , 2014, Trigueros, 2005); pues, da una idea de cómo se puede presentar un contenido específico en las aulas de clase (Robitaille y Travers, 1992; Reys et al. , 2004) y se pueden identificar las definiciones del concepto según la perspectiva de cada autor. Algunos análisis de libros universitarios que se han realizado tratan conceptos de cálculo, combinatoria y álgebra lineal (Harel, 2000; Capaldi, 2012; Lockwood et al. , 2017; Cook et al. , 2018).

Por esta razón, esta investigación analiza tres libros de texto: Álgebra lineal (Grossman, 1993), Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico (Isaacs y Sabogal, 2009) y Álgebra lineal: una introducción moderna (Poole, 2011); estos son

utilizados por los profesores de la UIS para guiar su proceso de enseñanza del álgebra lineal. Se busca analizar las definiciones con la que se estudia el concepto de vector y la forma en la que se desarrolla; pues, esto permite determinar el tipo de construcciones que pueden realizar los estudiantes y su alcance del aprendizaje.

Para analizar los libros de texto mencionados anteriormente, se consideran tres aspectos propuestos por Campos (2017):

- *Estructura general de los libros de texto.* Busca identificar la secuencia de los conceptos, su dependencia y los conocimientos previos.
- *Presentación y definición del concepto.* Se analiza aquellos elementos que motivan su definición y la forma de desarrollar el concepto.
- *Ejemplos y ejercicios de los libros de texto.* Tiene como objetivo identificar los ejemplos y ejercicios que incentivan al estudio y práctica del concepto estudiado.

A continuación, se explica cada uno de los aspectos mencionados anteriormente.

Estructura general en los libros de texto

La Tabla 2 muestra la organización de los contenidos de los libros de texto analizados y permite ubicar en el texto el orden y desarrollo del concepto de vector. En este caso fue necesario revisar cada página del libro porque el concepto de vector en algunos casos está relacionado con los conceptos de combinación lineal, independencia lineal, subespacios, transformaciones, entre otros.

El libro de Grossman (1993), comienza con el tema de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), donde se utiliza las matrices para solucionar los SEL. Posteriormente, en la sección 1.5 aparece la primera definición sobre el vector como un conjunto ordenado de n

números haciendo distinción entre el vector fila y vector columna con el fin de introducir el álgebra de matrices para ver que una matriz está conformada por vectores fila y columna.

Tabla 2

Orden de los contenidos en los libros de texto

Grossman (1993)	Poole (2011)	Isaacs y Sabogal (2009)
Sistemas de ecuaciones lineales y matrices	Vectores geométricos	Inducción matemática y números complejos
Determinantes	Sistemas de ecuaciones lineales	\mathbb{R}^n como espacio vectorial
Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	Matrices	Transformaciones lineales y álgebra de matrices
Espacios vectoriales	Valores y vectores propios	\mathbb{R}^n como espacio vectorial euclídeo
Transformaciones lineales	Ortogonalidad	Función determinante

En el capítulo 4 se profundiza sobre el concepto de vector en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 para desarrollar las propiedades de los vectores geométricos (la magnitud, dirección, ángulo entre vectores, entre otros). Después, en el siguiente capítulo el autor menciona que se pasa de lo concreto que corresponde a solucionar ecuaciones, al mundo abstracto donde se estudian los espacios vectoriales; ya que aparecen los vectores como elementos de un espacio vectorial.

Por otra parte, en el libro de Poole (2011) comienza con el tema de vectores enfocados en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , donde se desarrollan los conceptos de combinación lineal, conjunto

generado, dependencia e independencia lineal de vectores para estos espacios particulares, e incluso estudia estos conceptos con matrices, sin mencionar la definición de espacio vectorial; además, el autor espera que a partir de las propiedades y conceptos estudiados en los capítulos anteriores sobre \mathbb{R}^n , se logren establecer dichas propiedades. Esto podría deberse a que el autor quiere mostrar la similitud que existe entre el álgebra de vectores y el álgebra de matrices como dos conjuntos que son espacios vectoriales para finalmente generalizar el concepto de espacio vectorial.

Este texto es muy enriquecedor sobre los vectores, pues presenta variedad de ejemplos de espacios vectoriales, tiene en cuenta las n -uplas, matrices, polinomios de grado menor o igual a 2 y funciones reales y parejas ordenadas de números complejos como vectores; además, los conceptos de combinación lineal, conjunto generado, dependencia e independencia lineal, etc, son nuevamente estudiados con estos vectores particulares.

En la Tabla 2 se observa que el libro de Isaacs y Sabogal (2009), inicia con el capítulo de Inducción matemática y luego aborda el tema de números complejos haciendo énfasis en su representación geométrica, pues acerca al lector a la idea de vectores de \mathbb{R}^2 como se muestra en el siguiente capítulo del libro.

El capítulo 2 es el más extenso porque aparece la definición de \mathbb{R}^n como el conjunto de todas las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) de n variables, donde las n -upla ya no es solo vista como una solución a un SEL, sino que evoluciona para verse como un vector, al satisfacer los axiomas de la definición de espacio vectorial. Estas ideas dan lugar al desarrollo de los conceptos combinación lineal, independencia lineal, planos y rectas, y finaliza con la sección 2.5 de subespacios de \mathbb{R}^n .

Luego, en el capítulo 3 se presenta el concepto de transformación lineal, emplea la representación por medio de matrices y se define el núcleo e imagen de una transformación, para desarrollar el álgebra de matrices sin considerar las matrices como vectores. Por último, define la operación producto interno en \mathbb{R}^n , para estudiar la estructura algebraica de \mathbb{R}^n , desde la perspectiva geométrica. Cabe resaltar que en este texto solo se encontraron espacios vectoriales como \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^n , porque el interés de los autores es estudiar los conceptos del álgebra lineal desde un enfoque geométrico.

Presentación del concepto de vector en los libros de texto

En la Tabla 3 se destacan aspectos sobre cómo abordar el concepto de vector en cada texto; algunas de estas corresponden a características que propician la introducción del concepto de vector, las definiciones propuestas, las conexiones que establece entre el vector y el espacio vectorial \mathbb{R}^n , entre otros.

Cabe resaltar que el libro de Grossman (1993) y Poole (2011), inicialmente profundizan sobre el concepto de vector en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y se estudia sus propiedades geométricas para finalmente en otro capítulo, desarrollar la teoría de los espacios vectoriales donde se establece el vector como un elemento de él.

Además, los textos de Grossman (1993), Poole (2011) e Isaacs y Sabogal (2009) se caracterizan por estudiar el concepto de vector como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n , con el fin de abordar otros conceptos como el espacio vectorial de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y, independencia lineal y base, respectivamente.

Tabla 3*Presentación del concepto de vector en los libros de texto*

Grossman (1993)	Poole (2011)	Isaacs y Sabogal (2009)
Inicia con el estudio de Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)	Inicia con el estudio del vector como un movimiento en el plano cartesiano.	Inicia con el estudio de los números complejos.
Presenta las n-uplas como solución de un SEL	Presenta el vector como un segmento de recta dirigido.	Presenta las n-uplas como solución de un SEL.
Define un vector como renglón (fila) y columna de n componentes.	Señala que un vector de n componentes se puede representar como vector fila o columna.	Señala la representación del vector como un vector columna para facilitar la notación en el estudio de las transformaciones lineales.
Define el vector en representación geométrica y algebraica.	Define el vector como un segmento de recta dirigido, define la suma de vectores y el producto por escalar en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y extiende estas definiciones a vectores de \mathbb{R}^n .	Define \mathbb{R}^n como todas las soluciones de los SEL de n variables y las n-uplas son llamadas vectores y utiliza la representación geométrica de los vectores para $n=2$ y $n=3$.
Define a \mathbb{R}^n como el conjunto de vectores con n componentes.	Establece a \mathbb{R}^n como un conjunto con las operaciones suma y producto por escalar y satisface propiedades.	Establece que \mathbb{R}^n con las operaciones suma y producto por escalar y satisface axiomas. Es llamado espacio vectorial
Relaciona los vectores de \mathbb{R}^n con las matrices, donde define a una matriz como una fila o columna.	Estudia los SEL para relacionarlos con el concepto de independencia lineal de vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 y conjunto generador.	Estudia los conceptos de subespacios, independencia lineal de vectores, base y dimensión con vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
Estudia espacios vectoriales de polinomios, matrices y funciones).	En el último capítulo 6 estudia espacios vectoriales abstractos como polinomios, matrices y funciones.	Estudia \mathbb{R}^n como espacio vectorial euclídeo (norma de los vectores).

Por otra parte, en el libro Grossman (1993) se presentan cuatro definiciones distintas de vector para diferenciar sus representaciones (vector renglón de n componentes, vector columna de n componentes, vector geométrico y vector algebraico) como aparece en la Tabla 4.

Tabla 4

Definiciones de vector en el libro de Grossman

Vector renglón de n componentes	“Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera: (x_1, \dots, x_n) ” (Grossman, 1993, p.42)
Vector columna de n componentes	“Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ” (Grossman, 1993, p.43)
Vector geométrico	“El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama vector” (Grossman, 1993, p.221)
Vector algebraico	“Un vector v en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se denominan elementos o componentes del vector v . El vector cero es el vector $(0,0)$ ” (Grossman, 1993, p.222).

El texto de Poole (2011) propone el “juego de pistas de carrera” para motivar la introducción de vectores en el plano como una traslación de un punto a otro. En la Tabla 5 se muestran las definiciones de vector que plantea este texto.

Tabla 5*Definiciones de vector en el libro de Poole*

Vectores en el plano	“Un vector es un segmento de recta dirigido que corresponde a un desplazamiento desde un punto A hasta otro punto B ” (Poole, 2011; p.3)
Vectores en \mathbb{R}^n	“ \mathbb{R}^n se define como el conjunto de todas las n -adas ordenadas de números reales escritos como vectores renglón o columna. Por ende, un vector v en \mathbb{R}^n es de la forma $[v_1, \dots, v_n]$ o $[v_1 \ ; \ v_n]$ ” (Poole, 2011; p.9)

Cabe resaltar que en Poole (2011), después de definir vectores en \mathbb{R}^n , las definiciones como norma de un vector, vectores ortogonales, entre otros, se presenta el vector como elemento de \mathbb{R}^n , como se muestra en la Figura 7.

Figura 7*Definición de norma de un vector*

Definición La longitud (o norma) de un vector $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ en \mathbb{R}^n es el escalar no negativo $\|v\|$ definido por

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Nota. Tomado de *Álgebra lineal: Una introducción Moderna* (p.19), por Poole D, 2011, Thomson.

Por otra parte, el texto Isaacs y Sabogal (2009) relaciona los sistemas de ecuaciones lineales con los vectores y \mathbb{R}^n pues, plantea preguntas como: ¿Qué es una solución de un sistema con n variables? y ¿Dónde se encuentran esas soluciones? Su objetivo es introducir \mathbb{R}^n como el mundo donde habitan las posibles soluciones a los sistemas de

ecuaciones con n variables, establece las n -uplas como soluciones de un sistema y rápidamente define el vector como se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Definición de vector en el libro Isaacs y Sabogal (2009)

Las n -uplas son también llamadas **vectores n -dimensionales**. El término **vector** es inspirado en la interpretación geométrica del caso particular $n = 2$, es decir en los vectores en el plano, seguramente familiares para el estudiante. Cada vector n dimensional tiene entonces n **componentes** que se llaman también **coordenadas** del vector. Los vectores los notaremos con letras mayúsculas. El conjunto de todos los vectores de dimensión n con componentes reales lo notaremos \mathbb{R}^n . Así:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{R}^3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &\vdots \\ \mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Nota. Tomado de *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico* (p.49), por Isaacs R. y Sabogal S., 2009, Ediciones UIS.

Sobre los ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto

Se revisaron los ejemplos y ejercicios propuestos para estudiar el concepto de vector en cada texto y estos se clasificaron en las siguientes categorías:

- *Noción (N)*. En esta categoría se ubican los ejemplos y ejercicios que requieren estudiar al vector a partir de la geometría como un segmento de recta que tienen magnitud y dirección, sin establecer al vector como objeto matemático.
- *Consolidación (C)*. En esta categoría se encuentran los ejemplos y ejercicios que se caracterizan por estudiar al vector en el plano cartesiano y el espacio.
- *Abstracción (A)*. En esta categoría se ubican los ejemplos y ejercicios que requieren estudiar a los vectores como elemento de un espacio vectorial.

Estas categorías fueron definidas a partir de la epistemología del concepto de vector, donde se evidenció las etapas de noción, consolidación y abstracción de este concepto.

Con respecto a la clasificación de los ejemplos y ejercicios planteados por cada texto, sobre el concepto de vector, se tiene que los tres libros tienen la particularidad de que los ejemplos y ejercicios que corresponden a la categoría C tienen un mayor porcentaje como se muestra en la Tabla 6.

El libro de Grossman (1993) se caracteriza por tener un capítulo dedicado al concepto de vector geométrico, este contiene 5 secciones en la que cada una de ellas se presentan ejemplos y ejercicios sobre el vector en el plano y en el espacio. De este modo, se obtiene en total 30 ejemplos y 311 ejercicios sobre el concepto de vector que corresponden a la categoría C; mientras que, para el vector como elemento de un espacio vectorial, aparece una sola sección del libro, con un total de 12 ejemplos y 35 ejercicios que pertenecen a la categoría A.

Se puede afirmar que el libro de Grossman (1993) busca que el lector profundice en el concepto de vector geométrico, pues el 71,4% de ejemplos y 89,9% de ejercicios corresponden a la categoría C, y el 10,1% pertenece a ejercicios sobre el vector como elemento de un espacio vectorial.

En Poole (2011) se tiene que los ejemplos y ejercicios propuestos sobre el concepto de vector, enfatizan en la representación geométrica, ya que el 59% de ejemplos y el 77,9% de ejercicios corresponden a la categoría C. Además, este texto es muy enriquecedor de ejemplos y ejercicios comparado con la cantidad de ejemplos y ejercicios que se presentan en Isaacs y Sabogal (2009) y Grossman (1993).

Tabla 6*Clasificación de los ejemplos y ejercicios de los libros de texto*

Grossman (1993)	Poole (2011)	Isaacs y Sabogal (2009)
<i>Ejemplos:</i> N: 0% (No hay ejemplos)	<i>Ejemplos:</i> N: 8,2% (5 ejemplos)	<i>Ejemplos:</i> N: 25% (1 ejemplo)
C: 71,4% (30 ejemplos)	C: 59% (36 ejemplos)	C: 50% (2 ejemplos)
A: 28,6% (12 ejemplos)	A: 32,8% (20 ejemplos)	A: 25% (1 ejemplo)
Total: 42 ejemplos	Total: 61 ejemplos	Total: 4 ejemplos
<i>Ejercicios:</i> N: 0% (No hay ejercicios)	<i>Ejercicios:</i> N: 0% (No hay ejercicios)	<i>Ejercicios:</i> N: 11,1% (4 ejercicios)
C: 89,9% (311 ejercicios)	C: 77,9% (152 ejercicios)	C: 83,3% (30 ejercicios)
A: 10,1% (35 ejercicios)	A: 22,1% (43 ejercicios)	A: 5,6% (2 ejercicios)
Total: 346 ejercicios	Total: 195 ejercicios	Total: 36 ejercicios

Cabe destacar que algunos de los ejemplos y ejercicios de categoría A en Poole (2011) aparecen en los textos de Isaacs y Sabogal (2009) y Grossman (1993), aunque Poole (2011) ofrece variedad de ejemplos que pueden impulsar una mejor comprensión sobre el concepto de vector.

Con respecto al texto Isaacs y Sabogal (2009), se tuvieron en cuenta los ejemplos y ejercicios de las secciones 2.2, 2.4 y 2.5. Por otra parte, este texto se titula “Álgebra lineal, un enfoque geométrico” y este enfoque se confirma, pues el 50% de ejemplos y el 83,3% de

ejercicios de este libro sobre el concepto de vector, corresponden a la categoría C que hace referencia al vector geométrico.

6.3 Elementos para la construcción del concepto de vector

Desde los Antecedentes de este documento, se han identificado algunas de las dificultades relacionadas con la comprensión del concepto de vector. Una de ellas es lograr estructurar el concepto de espacio vectorial donde las operaciones entre vectores, los inversos aditivos de un vector o el vector cero, no corresponden a la generalización de los aspectos trabajados en \mathbb{R}^n (Harel, 2000; Parraguez 2020; Can, 2022).

Incluso, es usual enfatizar en la representación geométrica de vector sin contar con la riqueza conceptual del espacio vectorial \mathbb{R}^n ; pues, Rodríguez et al. (2018) señalan que “en el aula y en los textos se enfatiza en particular esta estructura algebraica para el caso $n = 2$ y $n = 3$ ” (p.60).

Teniendo en cuenta estos aspectos, en la presente investigación se decidió considerar que para fomentar la comprensión del concepto de vector es necesario estudiar el concepto de vector relacionado con otros conceptos como: los sistemas de ecuaciones lineales, la combinación lineal, la dependencia e independencia lineal, el conjunto generado, generador y base. Por ende, se tienen en cuenta las siguientes definiciones que presentan los textos que utilizan los estudiantes que hacen parte de esta investigación:

Vector en \mathbb{R}^n : “ \mathbb{R}^n se define como el conjunto de todas las n -uplas ordenadas de números reales. Por ende, un vector v de \mathbb{R}^n es de la forma $[v_1, \dots, v_n]$ o $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ” (Poole, 2019, p.9)

Igualdad de n-uplas: “Si tenemos las n-uplas (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_n) , para que sean iguales es necesario y suficiente que sean iguales componente a componente, es decir, $(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$ ” (Isaacs y Sabogal, 2019, p.49).

Espacio vectorial \mathbb{R}^n Siendo $U = (u_1, \dots, u_n)$ y $V = (v_1, \dots, v_n)$ vectores de \mathbb{R}^n y a es un número real, definimos la suma vectorial $U + V \in \mathbb{R}^n$ y el producto por escalar $aU \in \mathbb{R}^n$ así:

$$U + V := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$aU := (au_1, \dots, au_n)$$

\mathbb{R}^n con estas dos operaciones forma un espacio vectorial real pues cumple las siguientes propiedades:

- i. \mathbb{R}^n es cerrado para la suma de vectores y para el producto por escalar, es decir: si, $U, V \in \mathbb{R}^n$ entonces $U + V \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
- ii. La suma de vectores es conmutativa, es decir, para todo $U, V \in \mathbb{R}^n$ se tiene $U + V = V + U$.
- iii. La suma de vectores es asociativa: para todo $U, V, W \in \mathbb{R}^n$ se tiene $(U + V) + W = U + (V + W)$.
- iv. La suma de vectores es modulativa: existe $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $U \in \mathbb{R}^n$ se tiene, $U + 0 = U$, 0 también se llama vector nulo, módulo o elemento neutro para la suma.
- v. La suma de vectores es invertiva: para todo $U \in \mathbb{R}^n$ existe $(-U) \in \mathbb{R}^n$ tal que $U + (-U) = 0$, $-U$ se llama el opuesto o inverso aditivo de U y como en los números $U + (-V)$ se notará $U - V$.
- vi. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $U \in \mathbb{R}^n$, $a(bU) = (ab)U$.
- vii. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $U \in \mathbb{R}^n$, $(a + b)U = aU + bU$.
- viii. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $U, V \in \mathbb{R}^n$, $a(U + V) = aU + aV$.
- ix. Para todo $U \in \mathbb{R}^n$, $1U = U$ (Isaacs y Sabogal, 2019, p.50-51).

Una característica de la definición anterior es considerar la construcción del vector a partir del espacio vectorial \mathbb{R}^n , utilizando la representación algebraica del vector (una n-

upla de números reales), con el fin de que un estudiante también pueda estructurar los demás conceptos del álgebra lineal. Así mismo, en la epistemología de este concepto (ver sección 5.1), se señalaron las etapas de noción, consolidación y abstracción, que evidencian la importancia del tránsito entre sus representaciones, para que el concepto evolucione. En concordancia con González y Roa-Fuentes (2017) quienes mencionan que:

La representación geométrica permite que el estudiante vea características de los objetos «físicos» un punto, una flecha o un polígono como representantes de los vectores de un espacio vectorial. Es decir, la representación geométrica le permite realizar acciones sobre objetos concretos que pueden ser interiorizadas en procesos que permiten la construcción de objetos abstractos (p.99).

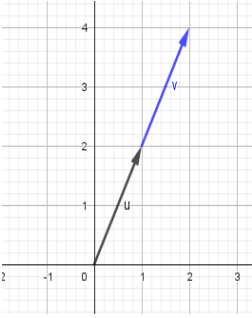
Se considera que representar geoméricamente vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 favorece la comprensión de este concepto, pues el individuo puede actuar sobre Objetos concretos en términos de Arnon et al. (2014). Además, la evolución de las estructuras del concepto de vector se promueve a partir de las conexiones que un individuo pueda establecer entre las representaciones geométrica, algebraica y abstracta del vector. Por ejemplo, para abordar la pregunta ¿El vector $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ es paralelo al vector $(2, 4)$?, un individuo puede mostrar tres formas de responder, como se muestra en la Tabla 7.

En este caso, el uso de la representación geométrica permite que un estudiante pueda observar características de los vectores como es la colinealidad, lo que implica la Acción de graficar vectores. Además, se espera que el estudiante al considerar el vector como n-upla de números reales y a partir de realizar las operaciones suma de vectores, multiplicación por escalar definidas en \mathbb{R}^n e igualdad de n-uplas, pueda determinar

características de los vectores al analizar las componentes del vector, lo que conlleva a una posible construcción de un Proceso.

Tabla 7

Ejemplo de interpretación geométrica, numérica y algebraica

Interpretación Geométrica	Interpretación algebraica	Interpretación abstracta
 <p>Los vectores u y v son paralelos porque son colineales.</p> <p>Acciones concretas</p>	<p>El vector $u = (1, 2)$ es paralelo a $v = (2, 4)$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que</p> $(1, 2) = \lambda(2, 4)$ $(1, 2) = (2\lambda, 4\lambda)$ $1 = 2\lambda, \quad 2 = 4\lambda$ <p>Por lo tanto, si $\lambda = \frac{1}{2}$</p> $(1, 2) = (2\lambda, 4\lambda).$ <p>Procesos abstractos</p>	<p>El vector u es paralelo a v porque existe un escalar $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $u = \frac{1}{2}v$.</p>

Por otra parte, se realizó una revisión del documento Estándares y Competencias Matemáticas propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para identificar las competencias que desarrollaron los estudiantes en su bachillerato (Grado 6° a 11°) y que pueden estar relacionadas con la construcción del vector. A continuación, se señalan algunas de estas competencias establecidas por MEN (2006):

- Representar objetos bidimensionales y tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.

- Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.
- Reconocer y generalizar propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (p.84-89).

De acuerdo con lo anterior, se puede observar que los estudiantes al terminar su bachillerato cuentan con conocimientos previos asociados a los conceptos ecuación lineal, representación de puntos en el plano y poseen una concepción Objeto de igualdad y Proceso de conjunto planteadas por Can (2022).

6.4 Estructuras previas necesarias para la construcción del concepto de vector

Al considerar la construcción del concepto de vector, su evolución con el espacio vectorial \mathbb{R}^n y los demás conceptos mencionados anteriormente; se considera necesario que un estudiante pueda identificar e interpretar cuándo dos expresiones son iguales (Acción presente en el concepto de sistemas de ecuaciones lineales o igualdad de vectores) a partir

de una definición. Así mismo, reflexionar sobre los elementos de un conjunto mediante la validación de una condición de pertenencia dada (\mathbb{R}^n como un conjunto de n-uplas, conjunto generado, conjunto linealmente dependiente o independiente, base). Por esta razón, se plantea la necesidad de las siguientes estructuras previas:

Objeto de igualdad. Encadenar diferentes expresiones por medio de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo de igualdad (Can, 2022).

Proceso de conjunto

Consiste en que el estudiante reflexiona sobre los elementos de un conjunto a partir de la condición de pertenencia dada y puede describirlos sin necesidad de contar con el listado específico para determinar elementos que pertenecen o no a un conjunto dado (Can, 2022, p.48).

6.5 Descomposición genética preliminar del concepto de vector

En esta investigación se diseña una descomposición genética preliminar del concepto de vector sustentada en aspectos epistemológicos, el análisis de libros de texto y los demás aspectos mencionados en la sección 6.4. Este modelo cognitivo es llamado *preliminar* porque a partir del ciclo de investigación de la teoría APOE, se refinará para determinar las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes evidencian sobre el concepto de vector al considerarlo como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n y establecer relaciones con otros conceptos como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generado y base. Se propone que el estudio de las relaciones con dichos conceptos puede promueve la evolución de las estructuras y los mecanismos y por tanto, desarrollar una mayor comprensión del concepto de vector en los estudiantes.

Estructura Acción de vector. Consiste en la construcción de \mathbb{R}^2 como un conjunto de parejas ordenadas de números reales, el vector es definido como un segmento de recta dirigido con magnitud y dirección o como un punto específico en el plano cartesiano. Esto le permite al individuo por ejemplo, determinar que dados dos vectores en \mathbb{R}^2 , uno es combinación lineal del otro si los vectores son colineales. Además, puede interpretar que dos vectores en \mathbb{R}^2 son iguales si tienen la misma magnitud y dirección, pero no puede determinar la igualdad de vectores como parejas ordenadas de números reales.

La interiorización de Acciones se da mediante la construcción de \mathbb{R}^n como el conjunto de todos los vectores con n componentes reales, donde se definen dos operaciones, la suma y la multiplicación de un escalar por un vector. Esto es, dados dos vectores $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n , el vector $u + v$ se define como $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$. Además, dado un escalar c (en este caso es un número real) y $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vector de \mathbb{R}^n , se define el vector cu como $cu = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$.

Estructura Proceso de vector. Con esta estructura el individuo construye \mathbb{R}^n como el conjunto de n-uplas de números reales y reconoce que en este conjunto está definida la operación suma vectorial y multiplicación por escalar real. La Acción de vector ha sido interiorizada en un Proceso cuando el individuo construye una n-upla de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) como vector de \mathbb{R}^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, al considerar un vector de la forma $(a, a + 1)$ con $a \in \mathbb{R}$, un individuo reconoce que este vector es elemento de \mathbb{R}^2 y puede calcular de manera específica vectores como $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, incluso determinar la existencia de infinitos vectores de esa forma; además, puede operar con ellos bajo la suma y la multiplicación por un escalar real. Esta es una estructura

dinámica porque un individuo puede determinar las características del vector, al reflexionar sobre el vector de coordenadas en un contexto específico.

Por medio de la siguiente tarea se puede evidenciar la estructura Proceso de vector:
¿Cuáles son los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $u = (1, -1, 2)$ y $v = (k^2, k, -3)$ son vectores ortogonales?

Un estudiante con una concepción Proceso de vector concibe a v como un vector con tres componentes reales, que representa infinitos vectores de esta forma, además, el estudiante puede realizar el producto punto entre los vectores u y v e igualar a cero para encontrar los valores de k para los cuales son ortogonales; a partir de esta transformación se tiene la expresión $k^2 - k - 6 = 0$. Esta expresión es equivalente a $(k - 3)(k + 2) = 0$, así puede concluir que los valores de k son 3 y -2 .

Estructura Objeto de vector. El Proceso de vector es encapsulado en un Objeto cuando un individuo construye el vector como elemento de un espacio vectorial por medio de la relación de pertenencia de conjuntos; además, debe establecer relaciones entre el concepto de espacio vectorial, base, y dimensión. Esta estructura es estática dado que el individuo debe inferir sobre las características del vector como elemento del espacio vectorial, puede describir estas características al estructurar el concepto de base y dimensión. Para esto, es necesario que el individuo tenga una estructura Objeto de espacio vectorial, Objeto de base y Objeto de dimensión, para realizar nuevas Acciones como las de asociar una base al espacio vectorial o pensar en la dimensión del espacio donde se encuentran los vectores.

Se entiende por estructura Proceso de base cuando un individuo comprende la base como un conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que tiene la menor cantidad de vectores que

generan el espacio, “esto le permite caracterizar el espacio vectorial, compararlo con otras bases y conjuntos, tomarlo como punto de partida para cambiar de base” (Kú et al. , 2008, p.73).

El Objeto de espacio vectorial es definido como “un conjunto con dos operaciones binarias (suma de vectores y multiplicación por escalar) que satisface axiomas” (Can 2022, p.54). Esta estructura, permite que un individuo realice Acciones como las siguientes: “encontrar una base, encontrar un conjunto generador, determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de elementos interpretados como vectores y cuando aplica transformaciones lineales entre espacios vectoriales” (Can, 2022, p.56).

Cabe resaltar que la estructura Objeto de vector implica el cambio de representación del vector como una letra v , pues no es suficiente que el individuo represente el vector como una n-upla de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ para realizar Acciones sobre estos, sino que las nuevas Acciones están involucradas con las características que posee el espacio vectorial donde están definidos el o los vectores.

Por ejemplo: Considere $u, v, w \in \mathbb{R}^2$. Si el conjunto de vectores $\{u, v\}$ es linealmente independiente, ¿el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente o dependiente? (Ballesteros, 2020).

Un estudiante con una concepción Objeto de vector, Objeto de base y Objeto de dimensión puede determinar que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente porque el conjunto $\{u, v\}$ tiene 2 vectores de \mathbb{R}^2 y estos son linealmente independientes, entonces $\{u, v\}$ es una base de \mathbb{R}^2 , por lo tanto, los vectores u y v generan el espacio \mathbb{R}^2 , y al incluir el vector $w \in \mathbb{R}^2$, este debe ser combinación lineal de u y v .

7. Diseño e implementación de instrumentos

En este capítulo se explican los aspectos asociados al contexto en el que se desarrolló la investigación, las características de los instrumentos, la intención de cada una de las tareas y cómo se avanzó en las implementaciones.

7.1 Población y contexto

Esta investigación se desarrolló en la Universidad Industrial de Santander (UIS), en el primer periodo académico de 2023 (marzo-julio de 2023), con 20 estudiantes de primer semestre de Ingeniería Metalúrgica (16 – 23 años) que tomaban el curso de álgebra lineal I por primera vez, a cargo del docente investigador.

Con respecto a los cursos de álgebra lineal I en la UIS, el plan de asignatura señala cinco conceptos que es indispensable estudiarlos, estos son: vectores de \mathbb{R}^n , sistemas de ecuaciones lineales, álgebra de matrices y determinantes. Además, el docente tiene la posibilidad de complementar el curso con otros conceptos que se consideran opcionales, teniendo en cuenta cuatro enfoques diferentes: Clásico, Categórico, Moderno y Matricial. Las diferencias entre cada enfoque son los conceptos opcionales, el orden en que se desarrollan y el libro de texto que se propone como guía.

Cabe resaltar que el plan de asignatura ofrece una serie de conceptos independientes y esto no permite desarrollar un énfasis en la interiorización de Acciones, encapsulación de Objetos, o en general, en la construcción de conexiones entre los conceptos. Por esta razón, el contenido del curso que tomaron los estudiantes que participaron en esta investigación, fue modificado (ver Tabla 8) con base en el análisis teórico (ver capítulo 5), donde se identificaron estructuras previas para la construcción del concepto de vector y se centró en la evolución de las concepciones del vector por medio de la construcción de los sistemas de

ecuaciones lineales, el espacio vectorial \mathbb{R}^n , combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generado y base.

Tabla 8

Programa del curso Álgebra Lineal I adaptado para esta investigación

Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3	Capítulo 4
Sistemas de ecuaciones lineales	Campo de los números reales \mathbb{R}	Espacio vectorial real \mathbb{R}^n	Espacio vectorial de matrices $M_{m \times n}$
Método de Gauss y Gauss-Jordan para resolver sistemas	Campo de los números complejos \mathbb{C}	Subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	Conjunto generador, base y dimensión
Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos	Operaciones de números complejos, representación binómica y polar	Conjunto generador y generador	Operaciones de matrices (multiplicación e inversa)
	Espacio euclídeo \mathbb{R}^n	Dependencia e independencia lineal de vectores	Determinantes
		Base y dimensión	

Como se muestra en la Tabla 8, se decidió que el curso iniciaría con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, dado que los estudiantes están familiarizados con este concepto según su experiencia en el bachillerato y pueden graficar puntos y rectas en el plano cartesiano como lo señala MEN (2016). Además, se abordó el conjunto de los números complejos \mathbb{C} y reales \mathbb{R} como Campo, para que los estudiantes recordaran las propiedades y empezaran a considerar estos conjuntos con una estructura.

Se profundizó sobre \mathbb{R}^n como espacio vectorial, para que los estudiantes consideraran dos conjuntos: \mathbb{R} como el conjunto de escalares y \mathbb{R}^n como el conjunto de vectores; así mismo, tuvieran la capacidad de actuar sobre los vectores como n-uplas de

números reales mediante las operaciones definidas en \mathbb{R}^n , para abordar los demás conceptos.

7.2 Dinámica del curso

El curso de álgebra lineal I que tomaron los estudiantes que participaron en esta investigación se desarrolló desde marzo hasta julio de 2023, durante 32 sesiones de clase, de 2 horas cada una, a cargo del docente investigador. En la primera sesión, se realizó la implementación de la Prueba Diagnóstica cuyo objetivo es evidenciar los conocimientos previos que tenían los estudiantes antes de iniciar el curso. Cada capítulo del programa (ver Tabla 9), se desarrolló durante siete sesiones, en la octava sesión, los estudiantes debían plantear preguntas para profundizar los conceptos vistos.

Se inició con el estudio del concepto de sistemas de ecuaciones lineales, pues Oliveros (2019) señala que es necesario abordar los sistemas de ecuaciones lineales en relación con el concepto de vector, de modo que los estudiantes aborden tareas que tengan que describir qué vector o vectores son solución de cierto sistema.

Las demás sesiones de clase se desarrollaron haciendo uso de GeoGebra para representar geoméricamente el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales y vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 (suma de vectores, multiplicación por escalar, vectores paralelos, conjunto generado, entre otros).

La actividad matemática se centró en la identificar el tipo de objetos que se involucran en álgebra lineal, por ejemplo: identificar si el objeto es un conjunto, un vector, un escalar, una matriz, una operación, entre otros; de modo que los estudiantes al resolver las tareas primero reflexionaban sobre los objetos involucrados. Esto permitió una mejor comprensión de los enunciados y las tareas formuladas en la clase.

En la sesión 20 se realizó la implementación del Cuestionario, pues, se consideró que los estudiantes ya habían construido los conocimientos necesarios para abordar las tareas relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales, espacio vectorial \mathbb{R}^n , combinación lineal, dependencia e independencia lineal y base. El objetivo de este instrumento fue determinar las estructuras construidas y seleccionar los estudiantes que participarían en las Entrevistas.

Al finalizar las sesiones de clase, se realizaron dos Entrevistas con el fin de profundizar en las estructuras construidas por los estudiantes, estas permiten refinar la descomposición genética preliminar del concepto de vector.

7.3 Instrumentos y tareas

Se diseñaron tres instrumentos: una Prueba Diagnóstica, un Cuestionario y dos Entrevistas. Se eligieron estos instrumentos ya que una Prueba diagnóstica permite identificar los conocimientos previos que poseen los estudiantes. Además, Arnon et al. (2014) menciona que los Cuestionarios y las Entrevistas semiestructuradas son medios importantes para recopilar datos y permiten que la investigadora profundice sobre las construcciones de los estudiantes. A continuación, se describen los instrumentos y la intención de las tareas.

7.3.1 Prueba diagnóstica

Este instrumento fue diseñado con el fin de conocer el grupo de estudiantes y determinar sus conocimientos previos asociados con los conceptos de ecuación lineal, representación de puntos en el plano cartesiano y las distintas representaciones de un vector; además evidenciar la concepción Objeto de conjunto y Proceso de igualdad, estructuras que se consideran necesarias para la construcción del concepto de vector.

La implementación se realizó el primer día de clase del curso de Álgebra Lineal I, participaron 20 estudiantes que tomaban por primera vez dicha asignatura durante el primer periodo académico de 2023. La prueba se desarrolló en dos momentos: i) trabajo individual y ii) trabajo grupal. Durante el trabajo individual, los estudiantes debían resolver las primeras cuatro tareas con un tiempo estimado de 40 minutos; después, se les pidió a los estudiantes formar grupos de 2 o 3 estudiantes para realizar las dos tareas restantes durante otros 40 minutos.

Los estudiantes tenían permitido el uso del celular para realizar consultas en internet que consideraran pertinentes. Algunos estudiantes no completaron la prueba indicando que no tenían los conocimientos necesarios o no recordaban. La recolección de datos se realizó a partir de las hojas de trabajo que contenían las producciones de los estudiantes.

A continuación, se presenta una descripción acerca de la intención de cada una de las tareas planteadas en la Prueba Diagnóstica, los planteamientos que los estudiantes y su respectiva solución (análisis normativo). Es pertinente aclarar que las Tareas 1 y 4 también son analizada en términos de las estructuras previas relacionadas con igualdad y conjunto (análisis teórico) para evidenciar las construcciones de los estudiantes.

Tarea 1. Sean a, b, c y d números reales. En cada caso explique ampliamente su respuesta:

- i. ¿Es posible encontrar números reales que cumplan con $a + b = c$ y $a + c = b$?
- ii. Si sabemos que $a + b = c$ y $a + d = c$, ¿qué puede decir de b y d ? (Can, 2022).

Esta tarea tiene como objetivo de analizar qué concepciones tienen los estudiantes sobre el concepto de igualdad, antes de iniciar el curso de álgebra lineal; ya que en la descomposición genética se presenta como necesario la construcción de Objeto de igualdad

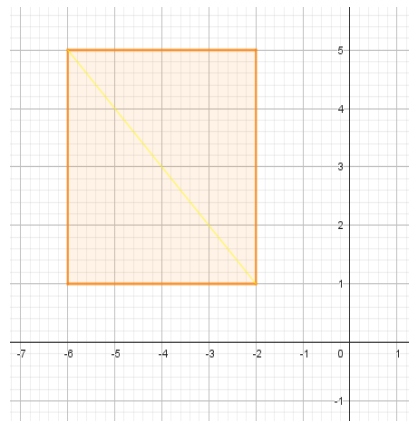
para iniciar la construcción del concepto de vector. Por esta razón, en el ítem i) un estudiante puede solucionarlo mediante la aplicación de Acciones como: darle valores a a , b y c ; luego explicar las condiciones que satisfacen las variables en las dos expresiones dadas. Esto fomenta la interiorización Acciones del concepto de igualdad.

En el ítem ii) el rol que juega c en las dos expresiones, promueve la reflexión de la relación que hay entre las dos expresiones, esto puede llevar a construir un Proceso de igualdad, donde conciba a a , b y c como números reales cualesquiera. En consecuencia, un estudiante podría establecer la expresión equivalente $a + b = a + d$ y así mismo, concluir que $b = d$. De este modo, el estudiante puede encapsular un Proceso para construir el Objeto de igualdad.

Tarea 2. ¿Cuál es el valor de la diagonal del cuadrado de la Figura 9? Explique su procedimiento (Paz, 2020).

Figura 9

Diagonal del cuadrado



Nota. Tomada de *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas* (p.220), por Paz S., 2020, Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

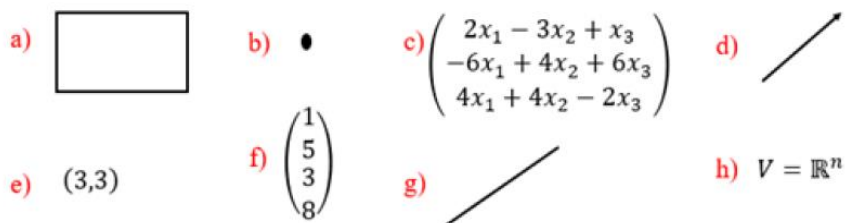
Esta tarea está relacionada con la ubicación de puntos en el plano cartesiano como parejas ordenadas y el cálculo de la distancia entre dos puntos, pues, se presenta un cuadrado sobre el plano cartesiano. Note que el cuadrado se ubica en el segundo cuadrante donde uno de los ejes son números negativos y está trasladado 2 unidades a la izquierda del origen y 1 unidad arriba del origen.

El objetivo de esta tarea es observar las estrategias de solución que utilizan los estudiantes, pues es necesario analizar la ubicación de los puntos en el plano cartesiano y la medida de los lados del cuadrado; además, mediante sus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras, puede concluir que la diagonal corresponde a la hipotenusa de los triángulos rectángulos formados; por lo tanto, la diagonal mide $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ unidades.

Tarea 3. Observe el objeto presentado en cada ítem de la Figura 10.

Figura 10

Objetos



Nota. Tomada de *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas* (p.221), por Paz S., 2020, Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

- i. Diga cuál o cuáles son vectores y explique por qué.
- ii. Escriba qué entiende por vector.

Esta tarea se planteó con el fin de determinar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el vector. Por ejemplo, en el ítem i) se presenta una imagen con objetos y como: a) rectángulo, b) un punto c) es un vector obtenido de la suma de tres vectores de \mathbb{R}^3 donde sus componentes involucran variables, d) flecha, e) pareja ordenada de números reales, f) cuádrupla de números reales, g) segmento y h) \mathbb{R}^n . En este caso, teniendo en cuenta la experiencia que tuvieron los estudiantes en el bachillerato, pueden señalar que los objetos de los incisos d) y g) representan vectores.

En el ítem ii) se busca que los estudiantes expliquen qué entienden por vector, con el fin de profundizar sobre la definición que construyeron.

Tarea 4. Considere la siguiente definición:

Un conjunto es una colección objetos. Cuando un conjunto se define dando la lista completa de todos sus miembros decimos que el conjunto está definido por extensión. En muchos casos no es posible o no es fácil dar la lista completa de todos los elementos de un conjunto y en su lugar se da una propiedad que satisfacen única y exclusivamente los elementos del conjunto (por comprensión) (Uzcateguí, 2019, p.49-50).

Por ejemplo:

Por extensión: $A = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Por comprensión: $A = \{2n: n \in \mathbb{Z}\}$.

- i. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, escriba los siguientes conjuntos por extensión:
 - a) $\{x \in \mathbb{N}: 3 \leq x < 9\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{Z}: x = n^2 - n^3 \text{ para algún } n \in \{1,2,3,4\}\}$
- ii. Escriba los siguientes conjuntos por comprensión:

- a) $\{1,3,5,7,9,11, \dots\}$
- b) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$ (Uzcátegui, 2019).

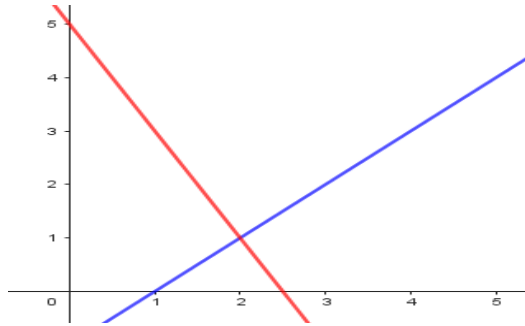
Con esta tarea se quiere evidenciar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto de conjunto, el uso de la notación de conjuntos y relación de pertenencia. En el ítem i) se tiene dos conjuntos por comprensión y los estudiantes deben determinar el conjunto por extensión. Como lo señala Can (2022), un estudiante con una concepción Acción puede “evaluar si un elemento dado pertenece a un conjunto específico o bien comprobando que dicho elemento satisface una condición de pertenencia dada” (p.48).

En el ítem ii) se presentan dos conjuntos por extensión y los estudiantes deben determinar el conjunto por comprensión. Un estudiante debe reflexionar sobre los elementos del conjunto, describirlos por medio de una condición de pertenencia y determinar los elementos que pertenecen o no al conjunto por medio de la verificación de la validez de la condición de pertenencia y la comparación con el conjunto dado. De este modo, se interioriza la Acción de Conjunto.

Tarea 5. Represente el sistema de ecuaciones lineales de la Figura 11 y su solución de forma algebraica.

Figura 11

Sistema de ecuaciones lineales



Esta tarea se diseñó con el fin de evidenciar los conocimientos que tiene los estudiantes como: ubicar puntos en el plano cartesiano, determinar la ecuación de una recta, la intersección de dos rectas e identificar las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, un estudiante puede identificar que las rectas se interceptan en el punto $(2,1)$, es decir, el sistema corresponde a dos rectas y su conjunto solución es $\{(2,1)\}$.

Para determinar el sistema de ecuaciones de forma algebraica, el estudiante debe hallar las ecuaciones de las rectas por medio de dos puntos que estén sobre cada una de las rectas. En efecto, una de las rectas pasa por los puntos $(0,5)$ y $(2,1)$, entonces la pendiente de la recta es -2 y su ecuación es $y = -2x + 5$; la otra recta pasa por los puntos $(1,0)$ y $(2,1)$, así su pendiente es 1 y la ecuación es $y = x - 1$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales formado por las rectas es
$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

7.3.2 Cuestionario

Este instrumento fue diseñado con el fin de evidenciar las estructuras Acción y Proceso de vector con relación a los sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal de vectores de \mathbb{R}^n .

La implementación se realizó durante 2 horas de clase del curso de álgebra lineal I a cargo del docente investigador en el que participaron 20 estudiantes y podían elegir las tareas que deseaban trabajar. En la primera hora de clase, los estudiantes resolvieron las tareas y en la segunda hora de clase, se realizó la socialización de los procedimientos con el fin de analizar el trabajo realizado y promover la discusión.

Cabe resaltar que el segundo momento de la implementación, se destacaron algunos estudiantes por su participación en la clase y su interés por comprender los conceptos; esto permitió seleccionar los estudiantes que participarían en las Entrevistas.

A continuación, se presenta la descripción a cerca de la intención de las tareas, los planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas en términos de las estructuras y mecanismos mentales.

Tarea 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ encuentre todas las soluciones de los

siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

- i. $Ax = 0$.
- ii. $Ax = b$.
- iii. $Ax = 2x$.

Esta tarea fue diseñada con el objetivo de evidenciar la concepción Proceso de vector relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales, pues, un estudiante puede reflexionar sobre la naturaleza de los objetos involucrados en las ecuaciones $Ax = 0$, $Ax = b$ y $Ax = 2x$. Por ejemplo, en el ítem i) se tiene la ecuación $Ax = 0$, donde un estudiante puede determinar que $x \in \mathbb{R}^3$ y $0 \in \mathbb{R}^3$, al analizar el tamaño de la matriz A . Esta reflexión promueve que el estudiante conciba un sistema de ecuaciones lineales a partir de su

representación matricial, es decir, permite la construcción de una concepción Proceso de sistema de ecuaciones lineales como lo señala Oliveros (2019) y la concepción Proceso de vector, pues, el estudiante puede determinar un conjunto de vectores que son solución de un sistema.

En el ítem ii) se tiene la ecuación $Ax = b$, donde se tiene explícitamente que el vector $b = (b_1, b_2, b_3)$. El estudiante puede reflexionar sobre el tamaño de la matriz A y de b para determinar que x es un vector de \mathbb{R}^3 . El rol de $b = (b_1, b_2, b_3)$ como términos independientes de las ecuaciones del sistema promueve la construcción de una concepción Proceso de sistema de ecuaciones lineales como lo señala Oliveros (2019), pues los vectores que son solución del sistema quedan determinados por los valores que se le pueden asignar a b_1, b_2 y $b_3 \in \mathbb{R}$.

Para el ítem iii) se presenta la ecuación $Ax = 2x$, con el objetivo de evidenciar una concepción Proceso de vector, pues, se quiere que a partir de la experiencia construida por los ítems i) y ii), el estudiante logre reflexionar sobre el tamaño de la matriz A y determine la naturaleza x y $2x$. Al tener la ecuación matricial igualada a $2x$, pretende que el estudiante no sólo concluya que x y $2x$ son vectores de \mathbb{R}^3 , sino que el estudiante pueda definir estos vectores en términos de sus componentes, para poder interpretar el sistema que debe resolver y encontrar el conjunto solución del sistema ya que este queda en términos de las componentes del vector x . Este aspecto permite evidenciar una concepción Proceso de vector.

Tarea 2. Halle los valores de los escalares a y b para los cuales se cumple:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar si el estudiante puede realizar las Acciones de sumar vectores, multiplicar vectores por los escalares a y b e igualar vectores, donde sus componentes incluyen una variable; pues, esto permite evidenciar la interiorización de la Acción de vector. Por ejemplo, desarrollando el lado derecho de la igualdad dada se tiene:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ ka \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b \\ 7b \\ kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - 2b \\ -2a + 7b \\ ka + kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la última expresión se tiene que los vectores son iguales si se cumple que

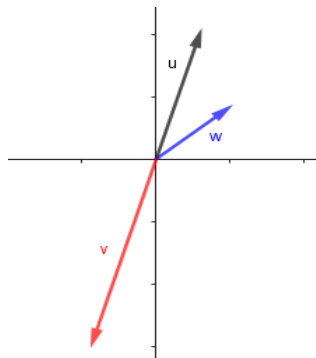
$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a + 7b = 0. \\ ka + kb = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se concluye que los escalares a y b son cero y $k \in \mathbb{R}$.

Tarea 3. ¿Los vectores u, v y w que se muestran en la siguiente imagen son linealmente independientes o dependientes? Justifique su respuesta.

Figura 12

Vectores u, v y w



Con esta tarea se quiere observar si un estudiante puede determinar si los vectores son linealmente dependientes o independientes utilizando la representación geométrica de los vectores, sin necesidad de expresar los vectores en coordenadas.

Un estudiante con una concepción Objeto de vector puede concluir que los vectores u, v y w son linealmente dependientes sin necesidad de actuar sobre los vectores, pues puede observar que el vector u y v son múltiplos. Sin embargo, un estudiante con una concepción Proceso de vector, podría asignarle valores a la escala del plano cartesiano donde se encuentran los vectores, para así expresarlos como parejas ordenadas y encontrar los escalares de la combinación lineal $c_1u + c_2v + c_3w = (0,0)$.

Tarea 4. ¿El vector $(2, -3)$ pertenece al conjunto $gen(v_1, v_2)$ donde $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0, -1)$?

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar una concepción Proceso de vector; pues, el estudiante puede concebir el vector como combinación lineal de dos vectores al considerar que el $gen(v_1, v_2)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1 y v_2 o puede determinar si el vector $(2, -3)$ es un elemento del $gen(v_1, v_2)$, al reflexionar sobre la condición de pertenencia al tener el conjunto $gen(v_1, v_2)$ por comprensión. Estas dos posibles formas de abordar la tarea permiten evidenciar una concepción Proceso de vector

porque requiere que el estudiante actúe sobre el vector en términos de sus coordenadas y el vector sea interpretado con relación al conjunto generado.

En efecto, el vector $(2, -3) \in \text{gen}(v_1, v_2)$ sí existen los escalares a y $b \in \mathbb{R}$ que cumplen:

$$av_1 + bv_2 = (2, -3)$$

$$a(1,0) + b(0, -1) = (2, -3)$$

$$(a, 0) + (0, -b) = (2, -3)$$

$$(a, -b) = (2, -3)$$

En la última expresión se tiene una igualdad de vectores, por definición de igualdad de vectores se concluye que $a = 2$ y $b = 3$. Por lo tanto $(2, -3) \in \text{gen}(v_1, v_2)$.

Tarea 5. Sean $u = (-1,5)$, $v = (3,2)$. Encuentre el vector x que cumple $2x + u = 3(x - v)$. (Isaacs y Sabogal, 2009).

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar la interiorización de Acciones de vector, pues, el estudiante puede realizar la Acción de despejar x de la ecuación, pero necesita reflexionar sobre la naturaleza de u , v y x como vectores y considerar las operaciones suma de vectores, multiplicación por escalar e igualdad de vectores.

Para resolver esta tarea, el estudiante debe identificar que la expresión $2x + u = 3(x - v)$ se involucran la operación suma de vectores y multiplicación por escalar, además, es necesario una concepción Acción de vector y una concepción Objeto de igualdad para que el estudiante pueda obtener expresiones equivalentes y encontrar el vector x .

En efecto,

$$2x + u = 3(x - v)$$

$$2x + u = 3x - 3v$$

$$2x - 3x = -3v - u$$

$$x = 3v + u$$

$$x = 3(3,2) + (-1,5)$$

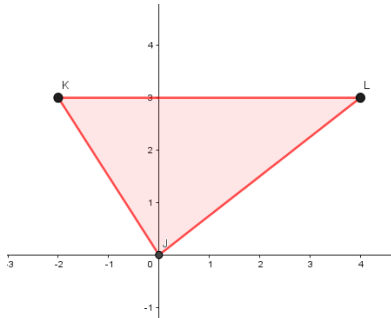
$$x = (9,6) + (-1,5)$$

$$x = (8,11).$$

Tarea 6. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo de la Figura 13?

Figura 13

Triángulo OKL



Esta tarea se diseñó con el fin de identificar qué estrategias que utilizan los estudiantes para hallar la medida de los lados del triángulo al conocer sus vértices. En particular, un estudiante al observar el triángulo puede concebir los vértices del triángulo como vectores $J = (0,0)$, $L = (4,3)$ y $K = (-2,3)$ al utilizar de la norma de un vector para hallar la medida de sus lados.

Esto muestra que un estudiante está construyendo el vector como punto o como pareja ordenada. Así, los lados del triángulo corresponden a los vectores $\vec{JL} = (4,3) - (0,0) = (4,3)$, $\vec{KL} = (4,3) - (-2,3) = (6,0)$ y $\vec{KJ} = (0,0) - (-2,3) = (2,-3)$.

Por lo tanto, la medida de los lados del triángulo es:

$$\|\overline{JL}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \|\overline{KL}\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \text{ y } \|\overline{KJ}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

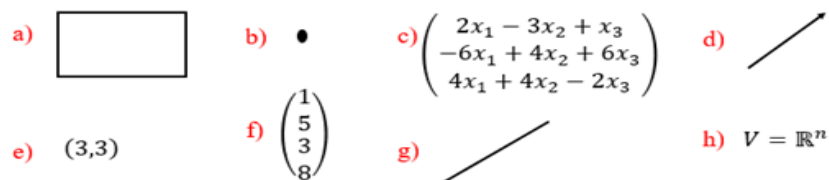
Tarea 7. ¿Es posible que existan 3 vectores de \mathbb{R}^2 y sean linealmente independientes? (Si es posible, muestre un ejemplo de 3 vectores que cumplan con esto, de lo contrario justifique por qué no es posible) (Ballesteros, 2020).

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar una concepción Objeto de vector, pues, el estudiante puede argumentar que no existen vectores que satisfagan dicha condición, utilizando elementos teóricos que caractericen los vectores. Por ejemplo, hay que considerar que las bases de \mathbb{R}^2 tienen dos vectores. Por lo tanto, cualquier conjunto con tres vectores de \mathbb{R}^2 será linealmente dependiente; esto permite evidenciar una concepción Objeto de vector, pues el estudiante determina las características que tiene los vectores a partir del espacio \mathbb{R}^2 .

Tarea 8. Observe cuidadosamente el objeto presentado en la Figura 14 y diga cuál o cuáles son vectores. Justifique su respuesta.

Figura 14

Objetos 2



Nota. Tomada de *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas* (p.220), por Paz S., 2020, Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Esta tarea ya había sido abordada por los estudiantes en la Prueba Diagnóstica; sin embargo, se planteó en el Cuestionario, con el fin de evidenciar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el vector a partir de sus distintas representaciones. Por ejemplo, un estudiante puede señalar que el ítem d) y g) son vectores, de este modo, se evidencia que el estudiante tiene una concepción Acción de vector.

Además, un estudiante con una concepción Proceso de vector puede identificar que los ítems b), c) d), e), f) y g) son vectores pues, no sólo se evidencia que concibe el vector como segmento de recta dirigido, sino como punto, vector a partir de sus coordenadas en fila o columna y el vector como suma de tres vectores donde sus componentes tienen variables.

Tarea 9. Liste cinco elementos del conjunto $S = \{(x, x, 0): x \in \mathbb{R}\}$.

Esta tarea fue diseñada con el fin de observar si el estudiante puede realizar la Acción de listar los elementos de un conjunto, esto indica que el estudiante posee una concepción Proceso de conjunto como lo señala Can (2022), ya que puede reflexionar sobre los elementos del conjunto a partir de la condición de pertenencia.

Además, se puede evidenciar una concepción Proceso de vector, ya que un estudiante puede considerar el vector $(x, x, 0)$ como el representante de todos los vectores del conjunto y determinar los vectores que son elementos del conjunto dado.

7.3.3 Entrevista 1

Este instrumento fue diseñado para analizar las concepciones Acción y Proceso de vector relacionada con los conceptos de espacio vectorial de \mathbb{R}^n , dependencia e independencia lineal de vectores, conjunto generado y base.

La implementación se realizó durante 2 horas en el que participaron dos estudiantes del curso de álgebra lineal I, donde se habían desarrollado los instrumentos anteriores. La Entrevista tardó 30 minutos con cada estudiante, donde se les pidió que respondieran algunas preguntas.

A continuación, se presenta una descripción a cerca de la intención de cada una de las seis tareas, los planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas en términos de las estructuras y mecanismos mentales.

Pregunta 1. Considere los vectores $v_1 = (1,0,-2)$, $v_2 = (-2,1,7)$ y $v_3 = (h,-3,5)$.

- i. ¿Para qué valores de h , el vector v_3 está en el $gen(v_1, v_2)$?
- ii. ¿Los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes o independientes?
- iii. ¿El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de \mathbb{R}^3 ? (Ballesteros, 2020).

Esta pregunta tiene como objetivo evidenciar si el estudiante puede plantear argumentos sobre el conjunto generado de un conjunto de vectores, la dependencia e independencia lineal de vectores o la base, donde se involucran vectores que tienen variables en sus componentes.

Un estudiante puede realizar la Acción de asignarle valores a h para determinar si v_3 es combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 ; esto indica que el estudiante posee una

concepción Acción de vector porque requiere de vectores específicos para realizar combinaciones lineales.

También, se puede evidenciar una concepción Proceso de vector, pues, un estudiante puede reflexionar sobre los valores de h a partir de expresar al vector v_3 como combinación lineal de v_1 y v_2 , esto evidencia una concepción Proceso de vector porque puede concebir a v_3 como vector a pesar de no tener explícito el valor de h y al concebir la combinación lineal de vectores como otro vector.

Pregunta 2. Sean u, v y $w \in \mathbb{R}^2$ y se sabe que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente. ¿El conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente o independiente?

Esta pregunta fue planteada con el fin de evidenciar si el estudiante toma casos particulares para los vectores u, v y $w \in \mathbb{R}^2$ o puede pensar en las características de los vectores como elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^2 o necesita definir a u, v y w como vectores cualesquiera en términos de sus coordenadas; estos tres aspectos permiten evidenciar una concepción Objeto, Proceso o Acción de vector respectivamente.

Por ejemplo, un estudiante con una concepción Objeto de vector puede argumentar que como $\{u, v\}$ es linealmente independiente, donde $u, v \in \mathbb{R}^2$ y se sabe que la base de \mathbb{R}^2 tiene dos vectores que son linealmente independientes y generan todo el espacio, entonces $\{u, v\}$ también es base de \mathbb{R}^2 por tener solo dos vectores linealmente independientes. Así, u y v generan \mathbb{R}^2 y si se agrega un vector cualquiera $w \in \mathbb{R}^2$ al conjunto $\{u, v\}$, w es combinación lineal de u y v . Por lo tanto, $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente.

Pregunta 3. Considere el conjunto $H = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ donde todos los vectores están en \mathbb{R}^n y uno de ellos es el vector cero. ¿ H es linealmente independiente o dependiente?

Esta pregunta fue planteada con el fin de observar si el estudiante es capaz de plantear argumentos sobre la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores de \mathbb{R}^n sin tener que escribir los vectores como n-uplas o trabajar con vectores particulares; así, se puede distinguir entre una concepción Objeto, Proceso o Acción de vector respectivamente.

Pregunta 4. ¿El conjunto $\{(1,2,3,4), (1, -2,0,1), (-2, -2,7,11), (1,0, -1, k)\}$ es linealmente dependiente o independiente? (Ballesteros, 2020).

Esta pregunta tiene como objetivo observar si el estudiante puede argumentar sobre la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores donde sus componentes contienen una variable. Esto permite evidenciar una concepción Proceso de vector, pues, el estudiante puede reflexionar sobre el vector obtenido de la combinación lineal $a(1,2,3,4) + b(1, -2,0,1) + c(-2, -2,7,11) + d(1,0, -1, k) = 0$, donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$; al comparar sus componentes con el vector $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ y extraer conclusiones sobre los valores de los escalares y k .

7.3.4 Entrevista 2

Este instrumento fue diseñado con el fin de analizar las concepciones Proceso y Objeto de vector relacionada con los conceptos de espacio vectorial \mathbb{R}^n , dependencia e independencia lineal de vectores y base.

La implementación tuvo una duración de 2 horas, en la que participaron dos estudiantes; cada uno de ellos trabajó sobre las preguntas de manera individual durante 1 hora, luego, se les pidió que explicaran lo que habían hecho.

A continuación, se describe la intención de cada una de las tareas, los planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas en términos de las estructuras y mecanismos mentales.

Pregunta 1. Considere $u=(a, 1, 0)$, $v = (1, 0, a)$ y $w = (1 + a, 1, a)$.

- i. ¿Para qué valores de a , el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente?
- ii. ¿El conjunto $\{(1,1,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$ es linealmente independiente?

Esta pregunta fue planteada con el fin de evidenciar una concepción Proceso de vector. Concretamente, en el ítem i) se quiere observar si el reflexiona sobre el conjunto solución del sistema obtenido al desarrollar la combinación lineal $c_1u + c_2v + c_3w = 0$ para argumentar sobre la dependencia o independencia lineal de los vectores.

Esto, puede indicar una concepción Proceso de vector, porque al desarrollar la combinación lineal, obtiene un vector donde sus componentes están dadas en terminos de los escalares y debe reflexionar sobre la igualdad de vectores $(c_1a + c_2 + c_3(1 + a), c_1 + c_3, c_2a + c_3a) = (0,0,0)$. A partir de esta reflexión, el estudiante puede obtener un sistema de ecuaciones lineales homogéneo 3×3 .

Además, un estudiante con una concepción Proceso de sistemas de ecuaciones lineales (Oliveros, 2019) puede determinar que $c_1 = -c_3 = c_2$ y c_3 es una variable libre; esto permite evidenciar que un estudiante con una concepción Proceso de vector puede relacionar la solución del sistema con los valores de a cuando se reflexiona sobre la solución del sistema, pues dado que el sistema tiene infinitas soluciones y este sistema se

obtuvo de la combinación lineal de los vectores, donde las componentes de estos vectores involucraban la variable a , entonces el sistema tiene infinitas soluciones para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$ y concluir que el conjunto es linealmente dependiente para todo $a \in \mathbb{R}$.

En el ítem ii) se quiere observar si el estudiante identifica que los vectores dados son casos particulares de los vectores que aparecen en el ítem i), es decir, un estudiante puede realizar la Acción de asignarle el valor de $a = 1$ a las componentes de los vectores del ítem i) y reflexionar sobre el valor de $a = 1$ relacionado con la independencia lineal de los vectores específicos. Esto caracteriza una concepción Proceso de vector, pues el estudiante no solo realiza combinaciones lineales de vectores que tienen variables en sus componentes, sino que puede caracterizar los vectores particulares y argumentar sobre el conjunto.

Pregunta 2. Considere $u = (1,0,0)$ y $v = (0,1,0)$ y $H = \{(s, s, 0): s \in \mathbb{R}\}$. ¿Cuáles son los vectores $w \in H$ que hacen que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea base de \mathbb{R}^3 ? (Ku et al. , 2008).

Esta pregunta tiene como objetivo observar si el estudiante considera cómo son los vectores de un conjunto dado a partir de la relación de pertenencia, se puede evidenciar que el estudiante posee una concepción Proceso de conjunto porque puede tomar un vector $w \in H$ y analizar las condiciones de ese vector para que $\{u, v, w\}$ sea base de \mathbb{R}^3 . Además, con esta pregunta se puede evidenciar una concepción Proceso de vector porque el estudiante puede reflexionar sobre los infinitos vectores que están en H .

Pregunta 3. Considere $u = (a, 0,0)$ y $v = (0, b, c)$.

- i. ¿El conjunto $\{u, v\}$ es base de \mathbb{R}^2 ? Justifique su respuesta.

- ii. ¿El conjunto $\{u, v\}$ es base de \mathbb{R}^3 ? Justifique su respuesta.

Esta pregunta se planteó con el fin de observar si el estudiante considera la pertenencia de los vectores en el espacio vectorial para determinar si es base de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 . Como se trata de analizar las componentes de los vectores, se puede evidenciar una concepción Proceso de vector, para dar una respuesta correcta.

Pregunta 4. Dadas A, B y C matrices de tamaño 2×2 . ¿Es posible encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $C = aA + bB$? Justifique su respuesta.

Esta pregunta se planteó con el objetivo de observar si el estudiante puede concebir las operaciones suma y multiplicación por escalar para matrices, además, realizar las Acciones de asignarle valores a A, B y C para expresar una matriz como combinación lineal de otras. En esta pregunta, se pretende evidenciar Acciones de las operaciones al cambiar el espacio vectorial.

Pregunta 5. Considere una matriz A de tamaño 3×3 . Si se sabe que al escalonar la matriz aumentada $[A|0]$ se obtiene la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -k-1 & 0 \end{array} \right).$$

- i. ¿Las columnas de A son linealmente dependientes o independientes? Justifique su respuesta
- ii. ¿Cuáles valores puede tomar k para que las columnas de A sean linealmente dependientes? Justifique su respuesta.

Esta pregunta se planteó con el objetivo de evidenciar si el estudiante puede determinar la dependencia o independencia lineal de vectores formados por una matriz

asociada a un sistema, a partir del tipo de solución que tiene el sistema, o si el estudiante necesita tener explícitos los vectores para desarrollar la combinación lineal. Pues la diferencia indicaría una concepción Objeto y Proceso de vector respectivamente.

8. Recolección y análisis de datos

En este capítulo se desarrolla el análisis de los datos recolectados por medio de la implementación de la Prueba Diagnóstica, el Cuestionario y las Entrevistas, para así, mostrar las evidencias de construcciones realizadas por los estudiantes. Esto permite determinar la viabilidad de la descomposición genética hipotética del concepto de vector o en dado caso, su refinación.

8.1 Datos obtenidos de la Prueba Diagnóstica

A continuación, se presenta el análisis general de las respuestas que plantearon 20 estudiantes (E1, E2, E3, ..., E20) a cada una de las tareas de la Prueba Diagnóstica. El objetivo, es dar informe de los conocimientos que se evidencian.

Por ejemplo, en la tarea 1, ítem i) se tiene las ecuaciones $a + b = c$ y $a + c = b$, y el estudiante debía argumentar si existen o no valores de a , b y c que cumplieran con las dos expresiones. El 19% de los estudiantes plantean casos particulares para a , b y c que satisfacen las dos ecuaciones, por ejemplo, $a = 0$ y $b = 0, 1, 2, 3$. El 37% de los estudiantes no responden y el 44% presentan uno de los siguientes argumentos:

- Asignar valores a las variables a , b y c en las dos expresiones y compararlas, pero al no encontrar valores para los que se cumplieran las dos expresiones, concluyen que no existen.

- Afirmar que existen valores para a, b y c que cumplan con las dos expresiones porque a, b y c son números reales y los números reales son infinitos, pero no puede encontrar un caso particular de estos.
- Asignar valores a las variables a, b y c a una expresión y en la segunda expresión asignaban valores diferentes.

En el ítem ii) de la tarea 1, el 56% de los estudiantes concluyen que $b = d$ al verificar las expresiones por medio de asignar valores a las variables a, b y c . El 11% de los estudiantes no responden y el 33% asignan valores a a, b y c pero no comprenden que deben buscar los valores que cumplan las dos ecuaciones.

En la tarea 2 el 30% de los estudiantes responden que la diagonal del cuadrado mide $4\sqrt{2}$ unidades, utilizan el teorema de Pitágoras porque la diagonal corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo donde sus dos catetos miden 4 unidades. Esta medida es calculada por medio de contar los cuadrados que cubren cada uno de los catetos del triángulo.

Además, el 40% de los estudiantes, responden incorrectamente la tarea 2; pues hallan la pendiente de la recta que pasa por los dos extremos de la diagonal del triángulo o señalan que los lados del cuadrado miden 5 unidades sin analizar que el cuadrado está trasladado 1 unidad hacia arriba del origen; el 30% no responden.

La tarea 3 se planteó con el objetivo de conocer cómo interpretan los estudiantes el objeto vector. La Tabla 9 muestra que 15 estudiantes reconocen el vector como una flecha, sin embargo 4 estudiantes no respondieron señalando que no tenían conocimiento sobre esto.

Tabla 9*Respuestas de los estudiantes en la tarea 3 ítem i)*

Inciso	a) Rectán gulo	b) Punt o	c) Matriz con variable s	d) Flech a	e) Pareja ordenad a	f) Matri z $4 \times$ 1	g) Segment o de recta	h) Espacio vectori al \mathbb{R}^n	No respon de
Estudiante									
E1				x			x		
E2				x			x		
E3				x					
E4									x
E5									x
E6							x		
E7				x			x		
E8				x			x		
E9				x					
E10				x					
E11				x					
E12				x					
E13				x			x		
E14				x					
E15				x					
E16									x
E17				x			x		
E18				x					
E19				x					
E20									x
Total	0	0	0	15			7		4

Por otra parte, la Tabla 10 muestra que en el ítem ii) sólo 16 estudiantes describen el vector a partir de su representación geométrica como un segmento de recta o flecha.

Tabla 10*Respuesta de los estudiantes a la tarea 3 ítem ii*

Estudiante	Respuesta
E1	Segmento de recta que tiene dirección, punto inicial y final.
E2	Segmento.
E3	Flecha.
E4	No responde.
E5	No responde.
E6	Línea.
E7	Flecha o segmento.
E8	Flecha.
E9	Segmento que tiene magnitud.
E10	Flecha.
E11	Segmento con dirección.
E12	Segmento de recta.
E13	Línea recta que tiene dirección.
E14	Flecha.
E15	Flecha con dirección y magnitud.
E16	No responde.
E17	Segmento de recta.
E18	Línea recta.
E19	Línea recta.
E20	Segmento de recta.

En la tarea 4, ítem i) los estudiantes deben escribir los conjuntos por extensión, estos involucran desigualdades y la relación de pertenencia; sin embargo, el 15% de los estudiantes responden correctamente, el 70% no responden y el 15% de los estudiantes mostró dificultades asociadas al evaluar la validez de la condición de pertenencia aplicada sobre el elemento y el uso de llaves para escribir un conjunto. Además, en el ítem ii) se evidenció que los estudiantes tienen dificultades para escribir conjuntos por comprensión, pues el 26% responden incorrectamente y el 74% no responden; en general, estos resultados muestran que los estudiantes no tienen construido una concepción Proceso de conjunto.

En la tarea 5, el 56% de los estudiantes señalan que la solución del sistema es el punto de intersección de las rectas; sin embargo, no hallan las ecuaciones del sistema; el 40% no responden y el 4% hallan las ecuaciones del sistema de manera incorrecta y no pueden argumentar sobre la solución del sistema.

8.2 Datos obtenidos en el Cuestionario y las Entrevistas

En esta sección se estudia los datos recolectados de las hojas de trabajo de 6 estudiantes (E1, E3 E4, E5, E6, E8) que trabajaron en el Cuestionario y las videograbaciones de las Entrevistas de dos estudiantes (E3 y E6). El objetivo es señalar las características que distinguen las concepciones Acción, Proceso, Objeto y la forma en la que ocurre el mecanismo de interiorización y encapsulación del concepto de vector; por ende, el análisis se presenta por concepciones y no por estudiante.

8.2.1 Concepción Acción de vector

Con una concepción Acción de vector, un individuo puede reconocer el vector como una n-upla de números reales particulares; además, realizar las operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar de vectores particulares. Sin embargo, esta concepción del vector no es suficiente para estructurar los sistemas de ecuaciones lineales en su representación matricial o determinar cuándo un vector se puede escribir como combinación lineal de otros.

Por ejemplo, la concepción que tiene E1 sobre el concepto de vector y su relación con los sistemas de ecuaciones lineales, se muestra al trabajar la tarea 1 del Cuestionario (ver Figura 15). Se puede observar que el estudiante puede hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$; incluso, el estudiante señala el conjunto

solución con un único vector, el vector (0,0,0) como elemento de \mathbb{R}^3 sin presentar ninguna dificultad.

Figura 15

Procedimiento de E1 en la tarea 1i del Cuestionario

$$A(x) = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_1 \rightarrow F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$4F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 18 & 0 \end{array} \right]$$

$$6F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$-2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -x + 3z &= 0 \\ -2y + 12z &= 0 \\ -6z &= 0 \end{aligned}$$

$$z = -\frac{0}{-6} \quad \boxed{z=0}$$

$$-2y - 12z = 0$$

$$-2y = -12(0)$$

$$y = \frac{0}{-2}$$

$$\boxed{y=0}$$

$$-x + 0y + 3(0) = 0$$

$$\boxed{-x=0}$$

$$S = \{(0,0,0) \in \mathbb{R}^3\}$$

Sin embargo, al desarrollar el ítem ii de la tarea 1 del Cuestionario que corresponde al sistema $Ax = b$ (ver Figura 18), el estudiante E1 aplica Acciones sobre la matriz $[A|b]$ y

considera b como un escalar, sin tener en cuenta que $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ es un vector de \mathbb{R}^3 .

Figura 16

Procedimiento de E1 en la tarea 1ii del Cuestionario

$$b = Ax = b$$

$$\text{solución}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 0 & b \\ 4 & -2 & 0 & b \\ -1 & 0 & 3 & b \end{array} \right] F_1 \leftrightarrow F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & b \\ 4 & -2 & 0 & b \\ 6 & -4 & 0 & b \end{array} \right]$$

$$4F_1 + F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & b \\ 0 & -2 & 12 & 5b \\ 6 & -4 & 0 & b \end{array} \right]$$

$$6F_1 + F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & b \\ 0 & -2 & 12 & 5b \\ 0 & -4 & 18 & 7b \end{array} \right]$$

$$-2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & b \\ 0 & -2 & 12 & 5b \\ 0 & 0 & -6 & -3b \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -x + 0\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}b\right) &= b \\ -x + \frac{3}{2}b &= b \\ -x &= b - \frac{3}{2}b \\ (-1) \cdot x &= -\frac{1}{2}b \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3z &= b \\ -2y + 12z &= 5b \\ -6z &= -3b \end{aligned}$$

$$z = -\frac{-3b}{-6}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{2}b}$$

$$\begin{aligned} -2y + 12\left(\frac{1}{2}b\right) &= 5b \\ -2y + 6b &= 5b \\ -2y + 6b - 6b &= 5b - 6b \\ -2y &= 5b - 6b \\ y &= \frac{-1}{2}b \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}b}$$

El razonamiento mostrado en las Figuras 15 y 16, indica que E1 interpretó la ecuación matricial $Ax = 0$ y $Ax = b$ como un sistema, al pensar en la matriz $[A|0]$ y $[A|b]$

respectivamente, ya que le permite actuar sobre ellas. Aunque el estudiante intenta construir el vector como solución de un sistema, es evidente que no concibe la x de la ecuación matricial como el representante de los vectores que son solución, pues, esto requiere del mecanismo de interiorización del concepto de vector. En concordancia con Oliveros (2019), es necesario construir una concepción Proceso de vector, para que el estudiante pueda construir los sistemas de ecuaciones lineales en representación matricial.

Así mismo, al trabajar en la tarea 4 del Cuestionario, también se puede evidenciar esta concepción del vector en algunos estudiantes. En efecto, la Figura 17 muestra que el estudiante E4 primero analiza la condición de pertenencia del vector $(2, -3)$ en el conjunto $gen(v_1, v_2)$; por ende, escribe el vector $(2, -3)$ como combinación lineal de v_1 y v_2 y deduce un sistema de ecuaciones lineales 2×2 .

El razonamiento de E4 en la Figura 17 evidencia una concepción Acción de combinación lineal, pues, en este caso el estudiante puede plantear la ecuación $av_1 + bv_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y determinar la existencia de los escalares al trabajar con vectores particulares.

Figura 17

Procedimiento de E4 en la tarea 4 del Cuestionario

Para que pertenezca, tiene que cumplir: $av_1 + bv_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + 0b = 2 \\ 0a + -b = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}$$

$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ El vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ si pertenece al generado de v_1 y v_2

E4 no desarrolla las operaciones que están implícitas en la expresión $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sino que se centra en transformar la combinación lineal en un sistema de ecuaciones lineales que le permite encontrar los valores de a y b , sin darse cuenta de que el sistema se obtiene de la igualdad de vectores $(a, -b) = (2, -3)$.

Esto muestra que E4 posee una concepción Acción de vector porque realiza las operaciones sin generar mayor reflexión sobre sus procedimientos; por ejemplo, la igualdad de vectores, que da origen al sistema de ecuaciones lineales. Esta concepción de vector puede dificultar la construcción de una concepción Proceso de combinación lineal, ya que es necesario que un individuo tenga la capacidad de concebir la combinación lineal para cualquier vector de \mathbb{R}^n , reflexionar sobre la igualdad de vectores cuando se tenga variables o parámetros como coordenadas del vector.

También se evidenció que un individuo puede construir una concepción Acción de combinación lineal basada en desarrollar solamente las operaciones suma y multiplicación por escalar como se muestra en el razonamiento de E5 al responder la tarea 4 del Cuestionario:

Figura 18

Procedimiento de E5 en la tarea 4 del Cuestionario

$$\begin{aligned} (c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2) &= (2, -3) \\ (c_1 \cdot 0, c_1 \cdot 1) + (c_2 \cdot 0, c_2 \cdot -1) &= (2, -3) \\ (0, c_1) + (0, -c_2) &= (2, -3) \\ (c_1 - c_2) &= (2, -3) \end{aligned}$$

Dado que no hay forma de demostrar c_1 y c_2 que cumpla la ecuación, podemos concluir que en el punto $(2, -3)$ no puede ser generado como una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 .

El razonamiento de E5 en la Figura 18 indica que no puede encontrar escalares c_1 y c_2 que cumplan la igualdad $(c_1, -c_2) = (2, -3)$, porque no concibe a $(c_1, -c_2)$ como un vector de \mathbb{R}^2 y la igualdad de vectores como n-uplas de números reales, para poder compararlos bajo la igualdad de sus coordenadas respectivas; lo que caracteriza una concepción Acción de vector.

En general, los individuos que poseen una concepción Acción del vector, pueden pensar en el concepto en términos de Acciones específicas como la aplicación de operaciones y determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de las ecuaciones explícitas para escribir los vectores solución como un arreglo de números reales. Sin embargo, esta concepción no es suficiente para construir un Proceso de combinación lineal o un Proceso de sistemas de ecuaciones lineales como lo plantea Oliveros (2019); pues, la evolución de estas construcciones se ven limitadas por los procedimientos mecanizados del vector en determinadas situaciones.

7.2.2 Concepción Proceso de vector

Una concepción Proceso de un concepto matemático se muestra mediante la reflexión de un estudiante sobre las Acciones que puede aplicarle al objeto matemático. Esto se evidencia en dos estudiantes (E3 y E6) que fueron entrevistados.

E3 al trabajar en el ítem i) de la pregunta 1 de la Entrevista 1 (ver Figura 19), muestra que su razonamiento tiene las siguientes características: escribir el vector v_3 como combinación lineal de v_1 y v_2 , comparar los vectores $(h, -3, 5)$ y $(c_1 - 2c_2, c_2, -2c_1 + 7c_2)$ mediante la igualdad de vectores en \mathbb{R}^3 , deducir un sistema de ecuaciones lineales y determinar la existencia de los escalares que hacen posible la combinación lineal.

Figura 19

Procedimiento de E3 en la pregunta 1 de la Entrevista 1

Handwritten mathematical work on grid paper showing the solution of a system of linear equations to find scalars c_1 and c_2 for a vector equation. The work is as follows:

$$(h-3, 5) = c_1(1, 0, -2) + c_2(-2, 1, 7)$$

$$(h-3, 5) = (c_1 - 2c_2, c_2, -2c_1 + 7c_2)$$

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = h \\ c_2 = -3 \\ -2c_1 + 7c_2 = 5 \end{cases} \rightarrow c_2 = -3$$

Results on the right side:

$$\begin{matrix} c_1 = -3 \\ c_2 = -13 \\ h = -7 \end{matrix}$$

$$c_1 - 2(-3) = h$$

$$c_1 + 6 = h$$

$$c_1 = h - 6 = -7 - 6 = -13$$

$$-2(h-6) + 7(-3) = 5$$

$$-2h + 12 - 21 = 5$$

$$-2h = 5 - 12 + 21$$

$$-2h = 14$$

$$h = \frac{14}{-2} = -7$$

En este caso, E3 muestra una concepción Acción de conjunto generado como lo plantea Kú et al. (2009), porque se centra en verificar que existen escalares que puedan expresar un vector específico como combinación lineal de los otros vectores dados. Además, se evidencia una interiorización de Acciones de vector porque E3 se detiene a reflexionar sobre la expresión $(h, -3, 5) = (c_1 - 2c_2, c_2, -2c_1 + 7c_2)$ como una igualdad de vectores de \mathbb{R}^3 como se muestra en el siguiente fragmento de la Entrevista 1:

Inv: ¿Por qué escribe eso? [señalando $(h, -3, 5) = c_1(1, 0, -2) + c_2(-2, 1, 7)$]

E3: Quiero que esas dos cosas sean iguales para encontrar los escalares.

Inv: ¿Qué hizo después?

E3: Multipliqué c_1 por v_1 y c_2 por v_2 .

Inv: ¿Quiénes son c_1 y c_2 ?

E3: Son escalares.

Inv: Mire que al lado izquierdo de la igualdad tiene a v_3 , ¿al lado derecho qué hay?

[señalando $(h, -3, 5) = (c_1 - 2c_2, c_2, -2c_1 + 7c_2)$]

E3: Es un vector que tiene tres componentes.

Inv: Ok. ¿qué puede deducir de eso?

E3: Tengo dos vectores iguales entonces igualo cada componente y tengo un sistema.

Cuando E3 señala “quiero que esas dos cosas sean iguales para encontrar los escalares” y considera a $(c_1 - 2c_2, c_2, -2c_1 + 7c_2)$ como “es un vector que tiene tres componentes”, indica que el estudiante ha construido una concepción Proceso de combinación como una igualdad de vectores. Además, puede reflexionar sobre los infinitos vectores que representa $v_3 = (h, -3, 5)$ al considerar h como una variable y se centra en encontrar condiciones para esta:

Inv: Cuando tiene el vector $v_3 = (h, -3, 5)$ ¿Cuántos valores puede tomar h ?

E3: Muchos, infinitos.

Inv: ¿Puede dar un ejemplo de un vector que tenga la misma forma de v_3 ?

E3: Por ejemplo $(2, -3, 5)$ o $(5, -3, 5)$ y h puede tomar todos los valores de los números reales.

Inv: ¿Por qué h es un número real?

E3: Porque v_3 es un vector de \mathbb{R}^3 y no había condiciones para h sino que debía encontrarlas para que estuviera en el $gen(v_1, v_2)$.

Como se puede ver, E3 posee una concepción Proceso de vector, pero esta no es suficiente para estructurar un Proceso de conjunto generado, porque no puede considerar un vector de manera general como elemento de un conjunto generado.

Por otra parte, E3 al trabajar en la pregunta 1 de la Entrevista 2 (ver Figura 20) se evidencia que su razonamiento se basa en los siguientes elementos: considera a u, v y w como vectores de \mathbb{R}^3 , escribe el vector cero de \mathbb{R}^3 como combinación lineal de los vectores dados, deduce un sistema de ecuaciones lineales y utiliza la calculadora de matrices Matrixcalc para encontrar una matriz equivalente asociada al sistema que le permita encontrar el valor de los escalares. Sin embargo, presenta dificultades para comprender la solución del sistema, porque concluye que el sistema tiene infinitas soluciones, sin darse

cuenta de que el sistema tiene infinitas soluciones cuando $a^2 - a = 0$ y en caso contrario, tiene solución única (0,0,0).

Figura 20

Procedimiento de E3 en la pregunta 1i de la Entrevista 2

$U = (a, 1, 0)$
 $V = (1, 0, a)$
 $W = (1+a, 1, a)$
 $\in \mathbb{R}^3$

a) Sabemos que para que sean l.i. tienen que existir:

$C_1 U + C_2 V + C_3 W = (0, 0, 0)$ sus escalares "0" tienen que ser "0"

$C_1(a, 1, 0) + C_2(1, 0, a) + C_3(1+a, 1, a) = (0, 0, 0)$ si sus escalares no son 0 se denomina que es l.d.

$(aC_1 + C_2 + (1+a)C_3, C_1 + C_3, aC_2 + aC_3 = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} aC_1 + C_2 + (1+a)C_3 = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \\ aC_2 + aC_3 = 0 \end{cases}$$

matriz resultante $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}$

* infinitas soluciones

entonces este conjunto de vectores son l.i. por lo tanto ningún valor de a. razón que el C de vectores sea l.d.

$C_1 + C_3 = 0$
 $C_2 + C_3 = 0$
 $C_1 + C_3 = 0$
 $C_3 = -C_2$

son l.i. porque no existen condiciones para C_1, C_2, C_3

$C_1 - C_2 = 0$
 $C_1 = +C_2$

$C_1 = C_2$
 $C_2 = C_2$
 $C_3 = -C_2$

La forma de pensar de E3 sobre el concepto de independencia y dependencia lineal, evidencia una concepción Acción, porque E3 se centra en verificar si todos los escalares son cero cuando escribe el vector cero como combinación lineal de los vectores dados, o si existe alguno que no es cero respectivamente.

Cuando se le preguntó a E3 sobre la forma en la que resolvió la combinación lineal, señala lo siguiente: “Multipliqué los escalares por los vectores y me dio la suma de tres vectores. Después, igualé los vectores y resolví el sistema usando matrixcalc. Me dio que el sistema tiene infinitas soluciones, entonces no hay condiciones para los escalares”. Esto indica que E3 posee una concepción Proceso de vector porque reconoce que u, v y w son vectores, los considera elementos de \mathbb{R}^3 , es consiente de que al desarrollar la combinación lineal obtiene un vector y que la combinación lineal involucra una igualdad de vectores.

A pesar de que el razonamiento de E3 es coherente, se evidencia que no ha estructurado una concepción Proceso de sistemas de ecuaciones lineales que le permita comprender las condiciones de existencia de la solución de un sistema; pues, E3 sólo considera una matriz equivalente asociada al sistema llama “matriz resultante” cuando $a = 1$ y de esta deduce que el sistema tiene “*infinitas soluciones*” porque la última fila de la matriz es cero.

También, E3 no se da cuenta que a es una variable en la solución del sistema porque cuando observa que $c_1 = c_2$, $c_3 = -c_2$, y ve que no aparece ninguna expresión con a , concluye erróneamente que “este conjunto de vectores son LI por lo tanto ningún valor de a hará que el conjunto sea LD”.

Durante la Entrevista, se realizaron algunas preguntas con el fin de profundizar sobre la confusión de E3 con el tipo de solución del sistema y la conclusión sobre la independencia y dependencia de los vectores. Con relación a este contexto, se tiene el siguiente fragmento de la Entrevista 2:

Inv: ¿Qué tipo de solución tiene el sistema?

E3: El sistema tiene infinitas soluciones.

Inv: ¿Por qué?

E3: Porque la última fila de la matriz es cero.

Inv: ¿Qué tipo de solución tiene el sistema si $c_1 = c_2$, $c_3 = -c_2$?

E3: Umm [el estudiante se queda en silencio]

Inv: ¿Qué valores puede tomar c_2 ?

E3: Muchos, infinitos.

Inv: Ok ¿Qué tipo de solución tiene el sistema si $c_1 = c_2$, $c_3 = -c_2$?

E3: Infinitas.

Inv: Puede dar un ejemplo de una solución del sistema.

E3: Tomemos $c_1 = 2$ $c_2 = 2$ y $c_3 = -2$.

Inv: Ok. Con esos valores, ¿qué puede concluir del conjunto de vectores?

E3: ¡Son dependientes porque los escalares no me dieron cero!

Del fragmento anterior, se puede observar que E3 es consciente que c_2 es una variable libre y esta puede tomar infinitos valores; sin embargo, no puede interpretar que el sistema tiene infinitas soluciones porque c_1 y c_3 dependen de c_2 . Esta falta de comprensión sobre la solución del sistema es lo que ocasiona que el estudiante concluya erróneamente que los vectores son linealmente independientes; pues, a partir de la reflexión del estudiante sobre una solución particular del sistema, el estudiante señala “*son dependientes porque los escalares no me dieron cero*”.

A pesar de los errores de E3, se evidencia una concepción Proceso de vector porque al considerar como solución del sistema $c_1 = c_2$, $c_3 = -c_2$, E3 puede considerar a a como una variable o parámetro que le permite caracterizar qué vectores son linealmente independientes y dependientes. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de la Entrevista:

E3: El conjunto es dependiente porque c_2 puede tomar cualquier valor, pero esto ¿afecta a a ? ¡No!, ¡igual no afecta!

Inv: ¿Por qué no afecta?

E3: Porque sólo encontré condiciones para los escalares, entonces no hay condiciones para a .

Inv: Con el valor de los escalares ¿qué concluyó?

E3: Que el conjunto es linealmente dependiente.

Inv: ¿Quiénes son los vectores que son linealmente dependientes?

E3: Los vectores u, v, w .

Inv: ¿Importa el valor de a ?

E3: No, ahí ya determiné que los vectores son dependientes para cualquier valor de a .

La concepción Proceso de vector le permite a E3 considerar a a como una variable para caracterizar cuándo los vectores dados son dependientes o independientes, pues señala “los vectores son dependientes para cualquier valor de a ”. Sin embargo, en la Figura 21

muestra que cuando aborda el ítem ii) de la pregunta 1, no se da cuenta los vectores son un caso particular de los vectores del ítem i) cuando $a = 1$.

Figura 21

Procedimiento de E3 en la pregunta Iii de la Entrevista 2

$$\begin{array}{l}
 u = (1, 1, 0) \\
 v = (1, 0, 1) \\
 w = (2, 1, 1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \\
 (c_1 + c_2 + 2c_3, c_2 + c_3, c_2 + c_3) = (0, 0, 0) \\
 \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right. \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_2 - c_3 = 0 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} c_1 + c_3 + 2c_3 = 0 \quad -c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \quad -c_2 = +c_3 \\ c_1 = -c_3 \quad c_2 = -c_3 \end{array} \\
 \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -c_3 \\ c_3 = c_3 \end{array}}
 \end{array}$$

Rta: El conjunto de vectores son LI ya que $c_1 = -c_3$, $c_2 = -c_3$ y para c_3 no hay condiciones.

Esto se presenta porque en este caso, E3 no sólo necesita ver que los vectores $u = (a, 1, 0)$, $v = (1, 0, a)$ y $w = (1 + a, 1, a)$ representan infinitos vectores de esa forma, sino que debe ser consciente de que a está variando en los números reales, y que se está considerando infinitos conjuntos de vectores $\{u, v, w\}$.

Cabe resaltar que E3 ya había mostrado evidencias de puede considerar de manera general un vector en términos de variables o parámetros y determinar vectores específicos de esta misma forma, cuando desarrolló la pregunta 1i de la Entrevista 1 (ver Figura 20), en la que señaló que el vector $(h, -3, 5)$ representa “infinitos vectores” de esta forma y halló casos particulares de este.

Además, en la Figura 21 se puede observar que el razonamiento de E3 en el ítem ii es igual al del ítem i y comete el mismo error en su conclusión “el conjunto de vectores es LI”, debido a que el estudiante posee una concepción Acción de dependencia e independencia lineal que no le permite reflexionar en ese momento sobre su procedimiento.

Por otra parte, se tienen evidencias de una concepción Proceso de vector de E6 cuando aborda preguntas relacionadas con el concepto de dependencia e independencia lineal. En efecto, al responder la pregunta 4 de la Entrevista 1, E6 muestra que su razonamiento se basa en plantear la combinación lineal de los vectores, desarrollar las operaciones entre vectores, determinar la igualdad de vectores, aplicar operaciones elementales a una matriz para obtener una matriz equivalente y encontrar el valor de los escalares (ver Figura 22).

Figura 22

Procedimiento de E6 en la pregunta 4 de la Entrevista 1

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \\ 3C_1 \\ 4C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_2 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2C_3 \\ -2C_3 \\ 7C_3 \\ 11C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_4 \\ 0 \\ -C_4 \\ kC_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_2 - 2C_3 + C_4 \\ 2C_1 - 2C_2 - 2C_3 + 0 \\ 3C_1 + 0 + 7C_3 - C_4 \\ 4C_1 + C_2 + 11C_3 + kC_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4 \times 1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 7 & -1 & | & 0 \\ 4 & 1 & 11 & k & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -3r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \\ -4r_1 + r_4 \rightarrow r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -13 & | & 0 \\ 0 & -3 & 19 & k-11 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -4a - 3 = 0 \\ -9a = 3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{3}{4}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \\ -\frac{3}{4}r_2 + r_4 \rightarrow r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{4} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2C_3 + C_4 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 - 2C_3 + 0 = 0 \\ 3C_1 + 0 + 7C_3 - C_4 = 0 \\ 4C_1 + C_2 + 11C_3 + kC_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

Esto indica una concepción Acción de independencia lineal, pues E6 se centra en verificar que los escalares de la combinación lineal de los vectores dados, son cero y muestra su capacidad para operar los vectores como n-uplas de números reales, donde sus componentes están determinadas por parámetros o variables.

Con el fin de profundizar sobre las construcciones de E6, la investigadora realiza unas preguntas y se desarrolla el siguiente diálogo:

Inv: Explique lo que hizo

E6: Tengo cuatro vectores de \mathbb{R}^4 , multipliqué cada vector por el escalar c_1, c_2, c_3 y c_4 e igualé todo a cero.

Inv: ¿Cuál cero?

E6: Al cero de \mathbb{R}^4

Inv: ¿Por qué iguala al cero de \mathbb{R}^4 ?

E6: Porque tengo vectores con cuatro componentes. Cuando multipliqué cada escalar, me dio otro vector; luego, sumé los vectores y me da otro vector y lo

$$\text{igualé a cero [señala } \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2c_3 + c_4 \\ 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 - c_4 \\ 4c_1 + c_2 + 11c_3 + kc_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

Del fragmento anterior, se evidencia una concepción Proceso de vector porque E6 concibe el vector de manera general como una n-upla de números reales para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y es consciente de la cerradura de la suma de vectores y la multiplicación por escalar. Sin

embargo, cuando el estudiante llega a la expresión $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2c_3 + c_4 \\ 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 - c_4 \\ 4c_1 + c_2 + 11c_3 + kc_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

piensa en una matriz asociada a un sistema y no como una igualdad de vectores, pues, señala lo siguiente:

Inv: ¿Qué más hizo?

E6: Tengo la matriz y soluciono el sistema

Inv: ¿Cuál matriz?

E6: Esa [señala $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2c_3 + c_4 \\ 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 - c_4 \\ 4c_1 + c_2 + 11c_3 + kc_4 \end{pmatrix}$]

Inv: ¿Por qué es una matriz?

E6: Porque tiene cuatro filas y cuatro columnas.

La confusión de la igualdad de vectores con la matriz asociada al sistema se presenta porque E6 tiene una concepción Acción de dependencia e independencia lineal que lo lleva a interesarse sólo en solucionar un sistema para encontrar los escalares. No obstante, mediante la intervención de la investigadora, E6 logra reflexionar sobre la naturaleza de los objetos, como se señala en el siguiente fragmento de la Entrevista 1:

Inv: ¿Qué pasa con los signos + y - que están ahí? ¿Puede separar eso que tiene adentro como filas columnas de una matriz sin importar los signos?

E6: Es 4×1

Inv: ¿A qué se refiere?

E6: ¡Es un vector de \mathbb{R}^4 !

Inv: ¿Cómo se dio cuenta que era un vector de \mathbb{R}^4 ?

E6: Cuando vi que al lado tenía el vector cero de \mathbb{R}^4

Inv: ¿Qué hizo después de igualar esos vectores?

E6: Yo escribí una matriz donde igualé a cero cada componente del vector para encontrar k .

E6 se da cuenta que es una matriz de tamaño 4×1 o un vector de \mathbb{R}^4 , porque su concepción Proceso de vector le permite considerar la cuádrupla de ceros como el vector cero de \mathbb{R}^4 , sin necesidad de considerar \mathbb{R}^4 o el conjunto de matrices de tamaño 4×1 como espacios vectoriales.

Además, se evidencia que E6 puede interpretar a k como una variable y es consciente de que el vector $(1, 0, -1, k)$ representa infinitos vectores de esa forma, pero tiene dificultades para interpretar la independencia lineal de los vectores con relación a las condiciones que encontró para k . Esto se evidencia en el siguiente fragmento de la Entrevista 1:

- E6: Yo escribí una matriz donde igualé a cero cada componente del vector para encontrar k .
- Inv: ¿Qué dice el enunciado de la tarea?
- E6: Me preguntan si esos vectores que me dan, son linealmente dependientes o independientes
- Inv: Si tiene ese conjunto con esos vectores, ¿Qué valores puede tomar k ?
- E6: Cualquier número real
- Inv: ¿Qué hace para saber si ese conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente?
- E6: Eso que hice y solucionar el sistema
- Inv: Si resuelve el sistema, ¿qué puede concluir?
- E6: Todos los escalares dan cero
- Inv: ¿Qué pasa si todos los escalares dieron cero?
- E6: Es linealmente independiente
- Inv: Ok ¿Qué valores puede tomar k para que sea linealmente independiente?
- E6: Cualquier valor
- Inv: ¿Seguro?
- E6: (...)

Esta dificultad se presenta porque es necesario que E6 reflexione sobre k como una variable del sistema. Por esta razón, la investigadora decide preguntarle por la solución del sistema de ecuaciones lineales, con el fin de que piense sobre las condiciones que encontró para k y las relacione con la dependencia o independencia lineal de los vectores. En este contexto, se desarrolla el siguiente fragmento de la Entrevista 1:

- Inv: Cuando resolvió el sistema, ¿qué encontró?
- E6: El valor de los escalares
- Inv: ¿Qué pasó con k ?
- E6: Hay condiciones para k
- Inv: ¿Cuáles?
- E6: Aquí dice que $23k + 30 \neq 0$ [señalando la solución que obtuvo en matrixcalc]
- Inv: ¿Por qué aparece eso en matrixcalc?

- E6: De la última ecuación del sistema sale que $23k + 30 \neq 0$ para yo despejar c_4
- Inv: Ok. ¿Ese conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente?
- E6: Independiente porque todos los escalares son cero
- Inv: ¿Ese conjunto de vectores siempre será linealmente independiente?
- E6: No, depende de k
- Inv: ¿Por qué?
- E6: Porque $23k + 30$ no puede ser cero
- Inv: ¿Qué pasa si $23k + 30 = 0$?
- E6: Los vectores serán linealmente dependientes
- Inv: ¿Por qué?
- E6: Porque el sistema sería 3×4 , entonces hay una variable libre y tendría infinitas soluciones.

Como se muestra en el fragmento anterior, E6 logra darse cuenta de que hay condiciones para k , pues señala “de la última ecuación del sistema sale que $23k + 30 \neq 0$ para yo despejar c_4 ”; esto le permite concluir que si $23k + 30 = 0$, el conjunto de vectores es dependiente porque el sistema tendrá una variable libre, que hace que por lo menos un escalar no sea cero.

En este caso, a pesar de que E6 posee una concepción Acción de dependencia e independencia lineal, puede caracterizar un conjunto de vectores como dependientes o independientes, a partir de una variable o parámetro k ; porque posee una concepción Proceso de vector y Proceso de sistemas de ecuaciones lineales que son coordinados cuando E6 considera a k como una variable del sistema.

Los conceptos de combinación lineal, conjunto generado, dependencia e independencia lineal y vector se estructuran mutuamente; pues, la concepción Proceso de vector se enriquece cuando se coordina con el Proceso de sistemas de ecuaciones lineales, ya que ahora el estudiante puede determinar condiciones para los parámetros o variables de las coordenadas de los vectores.

7.2.3 Concepción Objeto de vector

Esta construcción se evidencia mediante las características que un individuo puede deducir de un conjunto de vectores cualesquiera como elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^n para algún $n \in \mathbb{N}$, al considerar la base o la dimensión del espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Por ejemplo, al desarrollar la tarea 7 del Cuestionario, se obtiene evidencia de la encapsulación del Proceso que E6 realizó sobre el conjunto de vectores (ver Figura 23):

Tarea 7. ¿Es posible que existan tres vectores de \mathbb{R}^2 y sean linealmente independientes? (Si es posible, muestre un ejemplo de tres vectores que cumplan con esto, de lo contrario justifique por qué no es posible).

Figura 23

Procedimiento de E6 en la tarea 7 del Cuestionario

5) No es posible por que 2×3 es dependiente por que queda una variable libre

Ej: $\{ (1, 2), (2, 3), (3, 1) \}$

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 3) + c_3(3, 1) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 3c_2 + c_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo con 3 variables y 2 ecuaciones entonces tiene infinitas soluciones y por lo tanto es un conjunto linealmente dependiente.

Nota: Cualquier conjunto de de 3 vectores en \mathbb{R}^2 debe ser linealmente dependiente.

El razonamiento de E6 se basa en considerar el tamaño del sistema ecuaciones lineales que se puede formar cuando se escriben tres vectores cualesquiera de \mathbb{R}^2 como combinación lineal del vector cero, pues señala “No es posible porque 2×3 es dependiente porque queda una variable libre”. Esto muestra la capacidad de E6 para empezar a construir el vector como Objeto y el concepto de dimensión de un espacio vectorial; ya que E6 deja de actuar sobre el vector como una n-upla de números reales y se enfoca en establecer una

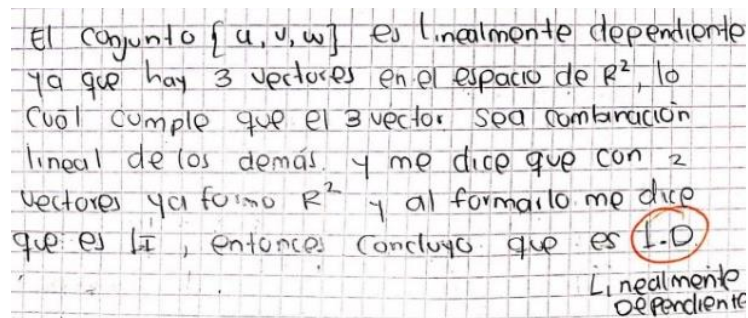
relación entre el número de componentes que tiene los vectores y la cantidad de vectores que tiene el conjunto, en lugar de convertir su procedimiento en resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Más adelante, E6 al trabajar la pregunta 2 de la Entrevista 1 (ver Figura 24) muestra su capacidad para pensar en el vector como elemento de un espacio vectorial, al relacionar los conceptos de independencia lineal y conjunto generador:

Pregunta 2. Sean u, v y $w \in \mathbb{R}^2$ y se sabe que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente. ¿El conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente o independiente?

Figura 24

Procedimiento de E6 en la pregunta 2 de la Entrevista 1



El conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente ya que hay 3 vectores en el espacio de \mathbb{R}^2 , lo cual cumple que el 3 vector sea combinación lineal de los demás. y me dice que con 2 vectores ya formo \mathbb{R}^2 y al formarlo me dice que es LI, entonces concluyo que es L.D.

Linealmente dependiente

E6 consideró los aspectos que permiten determinar si es un conjunto es una base (independencia lineal y conjunto generador) y muestra su capacidad para coordinarlas, a pesar de que no mencione la base. En este caso, E6 posee una concepción Objeto de vector porque puede concebirlo como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^2 al analizar la independencia lineal y conjunto generador de vectores de \mathbb{R}^2 , sin necesidad de actuar sobre los vectores de manera específica.

Para profundizar sobre la expresión “con 2 vectores ya formo \mathbb{R}^2 y al formarlo me dice que es LI”, la investigadora decide preguntar ¿Qué pasa si hay tres vectores de \mathbb{R}^2 ? y el estudiante responde lo siguiente:

E6: No es base de \mathbb{R}^2

Inv: ¿Por qué no es base de \mathbb{R}^2 ?

E6: Porque una base de \mathbb{R}^2 tiene dos vectores

Inv: Mire lo que escribí: “el conjunto es LD porque hay tres vectores de \mathbb{R}^2 ¿qué pasa que haya tres vectores de \mathbb{R}^2 ?

E6: El tercer vector es combinación lineal porque el escalar puede tomar cualquier valor

Inv: ¿Puede explicar eso?

E6: Es que al multiplicar los vectores por los escalares, me va a quedar un escalar libre.

E6 muestra tener una concepción Proceso de base como lo señala Kú et al. (2008), ya que en este caso usa la cantidad de vectores que tiene una base de \mathbb{R}^2 para determinar la cantidad de vectores que puede tener un conjunto para que sea linealmente independiente. Esta concepción de base permite que el estudiante caracterice un espacio vectorial y en particular a un conjunto de vectores.

Se puede observar que E6 construye una concepción Proceso de dependencia lineal mediante la coordinación de dos Procesos: combinación lineal como lo plantea Parraguez y Uzurriaga (2014) y sistemas de ecuaciones lineales entendido como lo señala Oliveros (2019); pues, el análisis del estudiante se basa en destacar el escalar que queda como variable libre en el sistema homogéneo formado por la combinación lineal de los vectores, sin necesidad de actuar sobre los vectores y el sistema.

8. Conclusiones

En este capítulo se discuten los resultados obtenidos de esta investigación con base en el marco teórico, el proceso metodológico y el análisis sustentado por la teoría APOE (Arnon et al. , 2014).

Partiendo de la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto de vector en estudiantes de un curso de álgebra lineal?, este capítulo inicia con la presentación de la descomposición genética refinada del concepto de vector. Con base en esta y en el desarrollo del trabajo, se señalan algunas reflexiones, entre ellas, recomendaciones relacionadas con la enseñanza del concepto de vector en un primer curso de álgebra lineal. Finalmente, se plantean las preguntas que surgen de la problemática estudiada y de los resultados obtenidos, asuntos que pueden ser abordados en futuras investigaciones.

8.1 Descomposición genética refinada

De acuerdo con el análisis de los datos mostrados en el capítulo anterior, se encontró que las evidencias sustentan gran parte de la descomposición genética preliminar del concepto de vector, planteada en el Análisis teórico (ver sección 5.5). Además, los resultados permiten enriquecer este modelo cognitivo, gracias a la constante interacción entre las tres componentes del Ciclo de investigación de la teoría APOE. A continuación, se presenta la descomposición genética refinada del concepto de vector.

Uno de los resultados que se obtuvo de la reflexión sobre el Análisis teórico, fue el planteamiento de estructuras previas para iniciar la construcción del concepto de vector, estas son:

Objeto de igualdad. Objeto de igualdad. Encadenar diferentes expresiones por medio de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo de igualdad (Can, 2022).

Proceso de conjunto. Como lo menciona Can (2022):

Consiste en que el estudiante reflexiona sobre los elementos de un conjunto a partir de la condición de pertenencia dada y puede describirlos sin necesidad de contar con el listado específico para determinar elementos que pertenecen o no a un conjunto dado. (p.48)

Estas estructuras no fueron tan evidentes en el trabajo inicial de los estudiantes; sin embargo, el desarrollo de la investigación muestra que estas construcciones son indispensables para la evolución de las concepciones de los estudiantes sobre el vector. En efecto, el Objeto de igualdad es necesario para promover la comparación de vectores.

Por ejemplo, la Figura 23 muestra que E6 cuando aborda la tarea 4 del Cuestionario,

construye la expresión $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y puede

desarrollar las operaciones que se involucran en la combinación lineal, mediante la producción de expresiones como las siguientes:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ 3c_1 \\ 4c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_3 \\ -7c_3 \\ c_3 \\ 11c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 \\ 0 \\ -c_4 \\ kc_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 \\ 2c_1 - 2c_2 - 7c_3 \\ 3c_1 + c_3 - c_4 \\ 4c_1 + c_2 + 11c_3 + kc_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gracias a su concepción Objeto de igualdad, E6 puede comparar las componentes de los vectores involucrados en la igualdad y escribir la matriz aumentada para resolver el sistema homogéneo. Una vez realiza transformaciones sobre dicha matriz E6 escribe el sistema homogéneo y escribe la solución. Al realizar todo el procedimiento, E6 evidencia que puede comparar vectores a través de determinar si dos vectores son iguales; esto promueve la reflexión sobre las componentes de los vectores involucrados.

Por otra parte, el Proceso de conjunto permite que un individuo pueda distinguir la naturaleza de dos objetos: los escalares como elementos de \mathbb{R} (un conjunto que cumple las propiedades de un Campo) y los vectores como elementos de \mathbb{R}^n (un conjunto que cumple con las propiedades de un Espacio vectorial). Así mismo, un individuo puede validar condiciones de pertenencia de los vectores en conjuntos que son: solución de un sistema de ecuaciones lineales, conjuntos linealmente dependientes o independientes, generados por otros vectores, así como elementos que pertenecen a una base.

Construcción del concepto de vector

La construcción del concepto de vector inicia con la aplicación de Acciones. Esta estructura permite que el individuo construya el vector como segmento de recta dirigido con magnitud y dirección. Además, puede listar números reales en una cadena con un orden particular; esto le permite al individuo identificar vectores como arreglos ordenados de números reales particulares, por ejemplo, $(1,2)$, $(0,0,0)$, $(-1,3,5,7,9,0,0,2)$ son vectores.

Una característica de la estructura Acción de vector es su relación con una estructura Acción de sistema de ecuaciones lineales. Oliveros (2019) señala que la Acción de sistemas de ecuaciones lineales se caracteriza por las transformaciones que un individuo

le puede realizar a las ecuaciones del sistema; es decir, un individuo necesita tener las variables y ecuaciones de manera explícita, para actuar sobre él.

En este contexto, el análisis de los datos muestra que un individuo puede determinar los vectores que pertenecen al conjunto solución. Sin embargo, también se evidencia que cuando el individuo tiene un sistema dado en representación matricial, no puede determinar los vectores que satisfacen el sistema, porque debe reflexionar sobre el tipo de objetos que intervienen en una ecuación matricial $Ax = b$ y analizar cómo se relacionan cada uno de estos objetos en el sistema. Es decir, identificar que la matriz A representa los coeficientes del sistema y determina la dimensión en donde se definen los vectores solución de la ecuación, que b es el vector de términos independientes y que x es el vector de variables, que necesita ser definido, por ejemplo, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$; esto requiere de una concepción Proceso de vector.

El tránsito de una Acción a un Proceso de vector ($A \rightarrow P$) se realiza mediante la interiorización de Acciones. Este mecanismo se desarrolla por la aplicación de Acciones de combinación lineal; por ejemplo, cuando un individuo requiere de calcular la suma de vectores y la multiplicación por escalar con vectores dados o calcular combinaciones lineales de vectores particulares.

Dichas Acciones permiten identificar que el resultado de cada operación es un vector con la misma cantidad de componentes que los vectores dados en la combinación lineal (en este caso, el individuo necesita contar las componentes del vector); es decir, el individuo puede reconocer que el vector resultante de la multiplicación por escalar y de la suma de vectores, satisface la propiedad de la cerradura. Esto conlleva a deducir una expresión que representa una igualdad de n-uplas de números reales, lo cual motiva a

reflexionar sobre las componentes del vector y pueden dar lugar a una estructura Proceso de vector.

La estructura Proceso de vector permite que un individuo pueda construir cualquier vector como n-upla de números reales, al considerar que las componentes del vector son cualesquiera números reales. Por ejemplo, un individuo con una concepción Proceso de vector, puede reconocer que $u = (h, -3, 5)$ representa infinitos vectores, entre ellos $(-1, -3, 5), (0, -3, 5), (1, -3, 5), \dots$, al definir a $h \in \mathbb{R}$ como una variable.

El paso de un Proceso a un Objeto de vector ($P \rightarrow O$) es realizado por el mecanismo de encapsulación, el cual muestra el desarrollo de un Proceso de vector dinámico a una estructura estática sobre la cual es posible aplicar nuevas Acciones. Los datos obtenidos señalan que el mecanismo de encapsulación puede llevarse a cabo mediante la construcción de dos niveles.

El primer nivel muestra que es necesario estructurar los conceptos de conjunto generado, conjunto generador, dependencia e independencia lineal así:

Acción de dependencia lineal. Verificar que existe por lo menos un escalar que no es cero, cuando se escribe el vector cero como combinación lineal de los vectores de un conjunto dado S .

Acción de independencia lineal. Verificar que todos los escalares son cero cuando escribe el vector cero como combinación lineal de los vectores de un conjunto dado S .

Acción de conjunto generado y generador. “Verificar si existen escalares en K que puedan expresar a un vector específico de V como combinación lineal de los vectores de un conjunto dado S ” (Kú et al. , 2009, p.187).

Cuando un individuo realiza Acciones de conjunto generado y generador, puede caracterizar un vector dado como elemento de un conjunto S . Además, realizar Acciones de dependencia e independencia lineal, permite que un individuo caracterice el vector cero como un elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n para algún n particular, o comparar un vector dado de \mathbb{R}^n con una matriz de un tamaño particular.

Por ejemplo, E6 en la pregunta 4 de la Entrevista 1 expresa lo siguiente:

- “Tengo cuatro vectores de \mathbb{R}^4 .”
- “El cero de \mathbb{R}^4 .”
- “Es una matriz 4×1 o un vector de \mathbb{R}^4 ”.

El segundo nivel se caracteriza por estructurar los conceptos de independencia lineal, conjunto generador y base así:

Proceso de independencia lineal. Como lo define Kú et al. (2008):

Un individuo con una concepción Proceso de independencia lineal puede, establecer combinaciones lineales de los vectores de los conjuntos dados y decidir cuáles de ellas producen el vector cero; de ahí, determinar cuáles serían los conjuntos de vectores en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero (p.72).

Proceso de conjunto generador. “Un individuo con una concepción Proceso del concepto de conjunto generador puede, por ejemplo, decidir qué propiedades deben tener los vectores pertenecientes a un espacio vectorial generado por un conjunto generador dado” (Kú et al. , 2009, p.188).

Kú et al. (2008) señalan que estos dos Procesos son coordinados por medio de validar la dependencia o independencia lineal de vectores de S y de determinar cuáles vectores de un espacio vectorial se generan. Además, cuando se coordinan estos dos Procesos, da origen a un Proceso de base; esto le permite a un individuo, determinar qué vectores de un conjunto S son indispensables para generar el espacio vectorial involucrado.

Finalmente, la estructura Objeto de vector se caracteriza por ser estática, el vector es estructurado como un ente matemático v , donde $v \in \mathbb{R}^n$, $v \in M_{m \times n}$ o $v \in S$, donde \mathbb{R}^n y $M_{m \times n}$ son espacios vectoriales y S es un subconjunto de \mathbb{R}^n , para algún $n \in \mathbb{N}$. Esta forma de concebir el vector, se da gracias a una estructura Proceso de base y una estructura Objeto de conjunto.

La estructura Objeto de conjunto se puede evidenciar cuando un “individuo compara dos conjuntos definidos por condiciones de pertenencia para determinar sus semejanzas y diferencias; establece relaciones de contención” (Can, 2022, p.49). La estructura Objeto de vector se muestra en el razonamiento de E6 al responder la pregunta 2 de la Entrevista 1.

Pregunta 2. Sean u, v y $w \in \mathbb{R}^2$ y se sabe que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente. ¿El conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente o independiente?

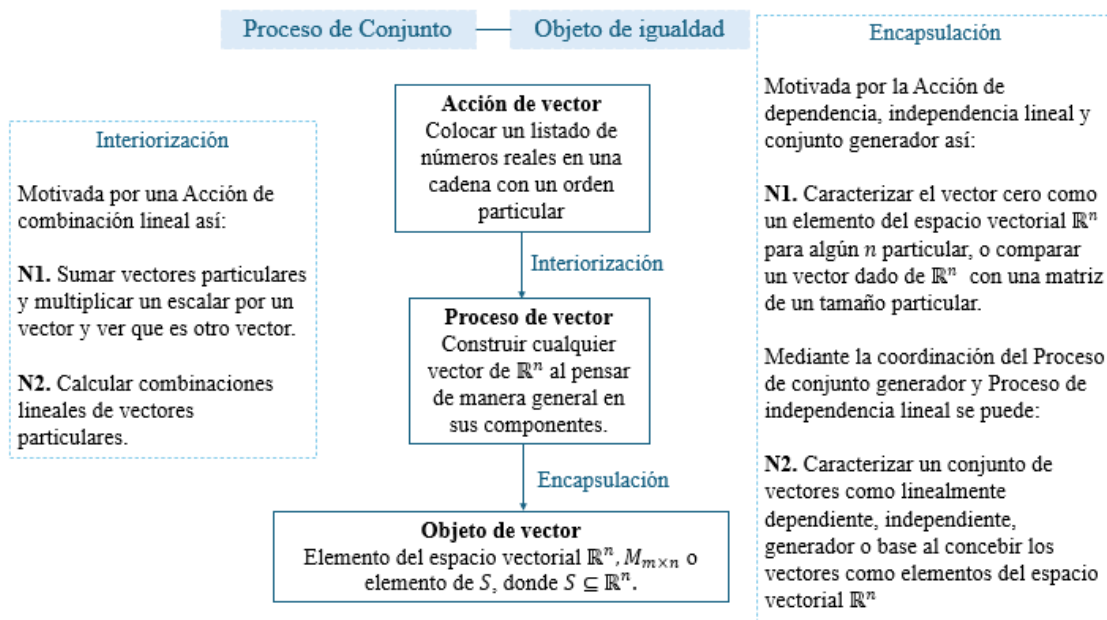
En este caso, E6 tiene un conjunto de vectores de \mathbb{R}^2 linealmente independiente y señala que: “con 2 vectores ya formo \mathbb{R}^2 ”. Esto muestra que E6 no necesita actuar sobre los vectores dados para saber si el conjunto es linealmente dependiente o independiente; sino que puede caracterizar el conjunto de vectores al pensar en ellos como elementos del espacio vectorial \mathbb{R}^2 . Además, puede determinar la igualdad de dos conjuntos: un conjunto

generado por dos vectores de \mathbb{R}^2 linealmente independientes y el espacio vectorial \mathbb{R}^2 formado por una concepción Proceso de base y Objeto de conjunto.

A continuación, se presenta el esquema de la descomposición genética refinada del concepto de vector, que busca sintetizar la descripción realizada.

Figura 25

Descomposición genética refinada del concepto de vector



Como se muestra en la Figura 25, el paso de una estructura a otra ($A \rightarrow P \rightarrow O$) está demarcado por el desarrollo de niveles. “Según Arnon et al. (2014), en línea con el trabajo de Piaget (1975; 1974/1976) y haciendo referencia a las construcciones mentales de Acción, Proceso y Objeto, “un nivel denota una unión evolutiva entre dos de estas etapas”” (Oktaç, 2022, p. 139).

En este caso, el paso de la Acción al Proceso de vector ($A \rightarrow P$) se desarrolla mediante el mecanismo de interiorización que consiste en realizar Acciones de combinación lineal y se

tienen dos niveles (**N1** y **N2**) como se muestra en cuadro de Interiorización. Además, para estructurar un Objeto de vector es necesario encapsular un Proceso de vector. En el mecanismo de encapsulación se desarrollan dos niveles (**N1** y **N2**) como se muestra en el cuadro del lado derecho de la Figura 25.

8.2 Recomendaciones didácticas

Una de las estrategias utilizadas en esta investigación, fue considerar que los sujetos de estudio tomaran el curso de álgebra lineal a cargo de la docente investigadora. Esto con el fin de que las decisiones tomadas sobre el desarrollo del curso fueran guiadas por la interacción entre las tres componentes del Ciclo de investigación de la teoría APOE.

En este caso, el curso de álgebra lineal inicialmente fue orientado por las reflexiones de la docente sobre el Análisis teórico del concepto de vector; pues, este brinda una serie de antecedentes didácticos, cognitivos y epistemológicos, que permitieron determinar aspectos sobre la actividad matemática fomentada por la docente investigadora y tomar decisiones asociadas al currículo; decisiones como las siguientes:

- Establecer la definición que se espera que los estudiantes construyan sobre el vector.
- Identificar las estructuras previas necesarias para construir este concepto.
- Organizar el contenido de un primer curso de álgebra lineal que fomente la construcción del concepto de vector.
- Determinar el tipo de tareas que realizan los estudiantes para aprender el concepto de vector en un primer curso de álgebra lineal.

A continuación se presenta detalladamente los resultados sobre cada uno de los aspectos mencionados anteriormente.

8.2.1 Sobre la definición del concepto de vector esperada

Los Antecedentes y la aplicación de la Prueba diagnóstica permitieron identificar que los estudiantes definen el vector como un segmento de recta dirigido con magnitud y dirección (Paz, 2020; Can, 2022); sin embargo, esta definición no es suficiente para estructurar otros conceptos del álgebra lineal como el concepto de Espacio vectorial. Por esta razón, la presente investigación consideró trabajar con las siguientes definiciones:

Vector en \mathbb{R}^n : “ \mathbb{R}^n se define como el conjunto de todas las n -uplas ordenadas de

números reales. Por ende, un vector v de \mathbb{R}^n es de la forma $[v_1, \dots, v_n]$ o $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ”

(Poole, 2019, p.9).

Igualdad de n -uplas: “Si tenemos las n -uplas (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_n) , para que sean iguales es necesario y suficiente que sean iguales componente a componente, es decir, $(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$ ” (Isaacs y Sabogal, 2019, p.49).

Espacio vectorial \mathbb{R}^n : Siendo $U = (u_1, \dots, u_n)$ y $V = (v_1, \dots, v_n)$ vectores de \mathbb{R}^n y a es un número real, definimos la suma vectorial $U + V \in \mathbb{R}^n$ y el producto por escalar $aU \in \mathbb{R}^n$ así:

$$U + V := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$aU := (au_1, \dots, au_n)$$

\mathbb{R}^n con estas dos operaciones forma un espacio vectorial real pues cumple las siguientes propiedades:

- i. \mathbb{R}^n es cerrado para la suma de vectores y para el producto por escalar, es decir: si, $U, V \in \mathbb{R}^n$ entonces $U + V \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
- ii. La suma de vectores es conmutativa, es decir, para todo $U, V \in \mathbb{R}^n$ se tiene $U + V = V + U$.
- iii. La suma de vectores es asociativa: para todo $U, V, W \in \mathbb{R}^n$ se tiene $(U + V) + W = U + (V + W)$.
- iv. La suma de vectores es modulativa: existe $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $U \in \mathbb{R}^n$ se tiene, $U + 0 = U$, 0 también se llama vector nulo, módulo o elemento neutro para la suma.
- v. La suma de vectores es invertiva: para todo $U \in \mathbb{R}^n$ existe $(-U) \in \mathbb{R}^n$ tal que $U + (-U) = 0$, $-U$ se llama el opuesto o inverso aditivo de U y como en los números $U + (-V)$ se notará $U - V$.
- vi. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $U \in \mathbb{R}^n$, $a(bU) = (ab)U$.
- vii. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $U \in \mathbb{R}^n$, $(a + b)U = aU + bU$.
- viii. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $U, V \in \mathbb{R}^n$, $a(U + V) = aU + aV$.
- ix. Para todo $U \in \mathbb{R}^n$, $1U = U$ (Isaacs y Sabogal, 2019, p.50-51).

Cabe resaltar que esta investigación está de acuerdo con lo planteado por autores como Parraguez y Oktaç (2010), Kú et al. (2008) y Can (2022) sobre la necesidad de estudiar otros espacios vectoriales distintos a \mathbb{R}^n , para mitigar los obstáculos presentados en los estudiantes por la generalización de las operaciones binarias de un espacio vectorial o las dificultades asociadas a las concepciones que tienen los estudiantes sobre el vector cero de un espacio vectorial. Sin embargo, se decidió estructurar el vector como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n , para fomentar nuevas formas de pensar sobre el vector a partir de la relación con otros conceptos del álgebra lineal; por ejemplo, concebir el vector como una n-upla de números reales, como una combinación lineal de vectores, como una matriz o un $v \in \mathbb{R}^n$.

En la descomposición genética refinada (ver Figura 25) se evidencia que cada una de estas interpretaciones del vector, es generada por el tipo de concepciones que los estudiantes tienen sobre conceptos como: combinación lineal, el espacio vectorial, conjunto

generado, base, entre otros. Además, los resultados indican que estructurar el vector de esta forma y establecer relaciones con los conceptos mencionados anteriormente, puede lograr que un individuo caracterice el vector como elemento del espacio vectorial de matrices, a pesar de que la actividad en el aula sólo se enfoque en presentar ejemplos de otros espacios vectoriales de dimensión n y sus bases canónicas.

En este caso, estructurar el vector como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n y fomentar la relación entre otros conceptos en un primer curso de álgebra lineal, puede ser una estrategia didáctica para el estudio de espacios vectoriales de dimensión n , como el espacio de polinomios de grado menor o igual a n ; dada la familiaridad que tienen los individuos al trabajar con n -uplas ordenadas de números reales.

8.2.2 Sobre las estructuras previas para la construcción del concepto de vector

Los Antecedentes de esta investigación indican la necesidad de estructurar los conceptos de igualdad y conjunto, para construir los sistemas de ecuaciones lineales (Oliveros, 2019) y espacio vectorial (Can, 2022). En consecuencia, los modelos cognitivos de los conceptos de igualdad y conjunto (Can, 2022) permitieron analizar que la estructura Objeto de igualdad favorece la interpretación de la igualdad de vectores de \mathbb{R}^n y la estructura Proceso de conjunto promueve la reflexión sobre dos tipos de objetos que se involucran en el desarrollo del álgebra lineal: los escalares (elementos de \mathbb{R}) y vectores como elementos de \mathbb{R}^n o $M_{m \times n}$ (conjuntos que tienen dos operaciones binarias que satisface los axiomas del espacio vectorial).

Cabe resaltar que los sujetos de estudio al iniciar el curso de álgebra lineal no poseían estas construcciones sobre el concepto de igualdad y conjunto; sin embargo, durante el desarrollo de las clases, la docente investigadora se centró en propiciar espacios

para la reflexión sobre el tipo de objetos y símbolos que se utilizan al estudiar los conceptos del curso. En efecto, los estudiantes antes de resolver una tarea debían reflexionar sobre el tipo de objetos que se involucran en el enunciado (vector, escalar, matriz, operación, entre otros) y determinar cuál de sus interpretaciones (geométrica, algebraica o abstracta) brinda información suficiente para resolver la tarea.

8.2.3 Organización de un primer curso de álgebra lineal enfocado en la construcción del concepto de vector

El contenido del curso en el que participaron los sujetos de estudio está conformado por cuatro capítulos, cada uno de estos tiene como propósito desarrollar los conceptos de Sistemas de ecuaciones lineales, \mathbb{R}^n como espacio vectorial euclídeo, Espacio vectorial \mathbb{R}^n y Espacio vectorial $M_{m \times n}$ respectivamente, como se muestra en la Figura 26.

En la Figura 26 se puede ver que la definición de vectores en \mathbb{R}^n (ver en Poole, 2019, p.9) fue estudiada en el capítulo de sistemas de ecuaciones lineales; esto permitió que los estudiantes pudieran dar ejemplos de vectores que son solución del sistema, así como determinar el conjunto de vectores que son solución de éste. Además, se presentó la definición de las ecuaciones paramétricas de una recta y un plano, de modo que los estudiantes pudieran reconocer de manera algebraica, si el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales dado, generaba una recta o un plano; esto con el fin de fomentar la construcción del concepto de conjunto generador y de subespacio.

El tercero y cuarto capítulo está centrado en estudiar los conceptos de conjunto generador, dependencia e independencia lineal, base y dimensión con el espacio vectorial \mathbb{R}^n y el espacio vectorial de matrices respectivamente. Incluir estos conceptos en el curso

de álgebra lineal fue fundamental para fomentar la evolución de las concepciones del vector; a pesar de que sólo se hayan construido Acciones de estos conceptos.

Figura 26

Contenido del curso de álgebra lineal utilizado en esta investigación

Capítulo 1
Definición y ejemplos de ecuaciones lineales
Definición de sistemas de ecuaciones lineales $m \times n$
Definición de vectores de R^n
Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 2×3 (representación algebraica y geométrica)
Ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de rectas
Representación matricial de Sistemas de ecuaciones lineales $m \times n$
Método de eliminación de Gauss para solucionar sistemas de ecuaciones lineales
Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales 3×3 (representación matricial y geométrica)
Ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana de un plano
Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos
Condiciones de existencia y unicidad de las solución de sistemas de ecuaciones lineales
Problemas de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales
Capítulo 2
Campo de los números reales
Definición de los números complejos
Aritmética de números complejos: suma y multiplicación de números complejos
Campo de los números complejos
Definición de las operaciones suma de vectores en R^n y multiplicación por escalar real
Ejemplos de los axiomas de espacio vectorial en un conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con las operaciones suma y multiplicación por escalar real
Ejemplo de que las soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo no satisface los axiomas del espacio vectorial cuando se trabajan con las operaciones suma y multiplicación por escalar complejos
Espacio vectorial R^n
Representación geométrica de la suma y multiplicación por escalar
Producto punto, norma, ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales y paralelos, proyección ortogonal
Definición de Producto cruz, propiedades del producto cruz (anticommutativo, no asociativo)
Capítulo 3
Definición de subespacio
Ejemplos de Rectas y Planos como subespacios de R^2 y R^3
Definición de Conjunto generador de vectores en R^n
Dependencia e independencia lineal de vectores R^n
Base y dimensión de R^n
Capítulo 4
Espacio vectorial de matrices
Conjunto generador
Dependencia e independencia lineal de matrices
Base y dimensión del espacio vectorial de matrices
Aritmética de matrices (multiplicación e inversa)
Determinantes

Una limitación de la organización del curso presentada en esta investigación se relaciona con el tiempo que se emplea en cada clase para el desarrollo de los temas y el

objetivo que tiene el docente para la construcción de los conceptos. Pues, esta investigación muestra que la matriz es estructurada como un sistema de ecuaciones lineales y esto puede llevar a que los estudiantes presenten dificultades para construir los conceptos de combinación lineal, independencia lineal, entre otros. Además, la dificultad de construir la matriz más allá de una herramienta para resolver sistemas está asociada a las concepciones que puedan estructurarse sobre el vector.

8.2.4 Sobre las tareas

En esta investigación se observó que plantear tareas relacionadas con el concepto de combinación lineal, es útil para la interiorización de Acciones del vector. Algunas de las tareas que permitieron evidenciar esta construcción son las siguientes:

- Sean $u = (-1,5)$, $v = (3,2)$. Encuentre el vector x que cumple $2x + u = 3(x - v)$.
- Halle los valores de los escalares a y b para los cuales se cumple:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

También, es importante desarrollar tareas que involucren conjuntos de vectores como n-uplas de números reales, donde una de sus componentes es una variable y que dichas tareas requieran analizar sus elementos a partir de los conceptos de dependencia, independencia lineal, conjunto generador o base. Esta característica favorece la capacidad de los estudiantes para plantear y caracterizar vectores que pertenecen a un conjunto dado.

Por ejemplo:

- Considere los vectores $v_1 = (1,0,-2)$, $v_2 = (-2,1,7)$ y $v_3 = (h,-3,5)$.
 - i. ¿Para qué valores de h , el vector v_3 está en el $gen(v_1, v_2)$?
 - ii. ¿Los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes o independientes?

iii. ¿El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de \mathbb{R}^3 ?

En general, los resultados logrados son consecuencia de la aplicación del Ciclo de investigación de la teoría APOE. Este puede ser un recurso importante para el docente, no sólo porque se obtiene una descomposición genética del concepto en estudio, sino que ofrece un Análisis teórico que permite la reflexión del docente sobre su práctica y puede guiar la toma de decisiones sobre la enseñanza de la asignatura. De este modo, las construcciones de los estudiantes no son accidentales, sino que son fomentadas por un tipo de actividad matemática en aula.

8.3 Sugerencias para futuras investigaciones

Esta investigación presenta una descomposición genética del concepto de vector donde se considera el vector como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n debido a que el estudio se realizó con estudiantes de primer semestre (16-23 años) que cursan álgebra lineal por primera vez, en la Universidad Industrial de Santander. Además, el plan de asignatura señala el espacio vectorial \mathbb{R}^n como un concepto indispensable en el curso.

Se plantea como aspecto interesante de abordar en futuras investigaciones, diseñar tareas que promuevan la interiorización de Acciones y encapsulación de Procesos del concepto de vector, a partir de su relación con otros conceptos como el concepto de espacio vectorial, donde los vectores sean matrices, polinomios, funciones.

Desde esta perspectiva se podría determinar cómo se estructura el vector, cómo otros conceptos del álgebra lineal influyen en la evolución de las concepciones del vector, qué características tiene el Objeto de vector y cómo se relaciona el concepto de vector con otros Esquemas como el de espacio vectorial, base, transformación lineal, entre otros. Estos aspectos pueden ser tomados en cuenta para el desarrollo de un segundo curso de álgebra

lineal, tal como lo proponen Stewart et al. (2022), tomando como base, las construcciones del concepto de vector, fomentadas en un primer curso de álgebra lineal.

También, es posible usar el modelo cognitivo validado del concepto de vector que se presenta en esta investigación, para diseñar secuencias de enseñanza de este concepto en primeros cursos de álgebra lineal, que consideren contextos diferentes a los expuestos, para abordar la construcción del concepto de vector.

9. Referencias

- Acevedo, J., Morelos, S., Zaldívar, J., y Quiroz, S. (2021). Estudio de la enseñanza del concepto de vector en \mathbb{R}^2 , y propuesta didáctica. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa*, 18(1), 4-13.
- Aguirre, J., y Erickson, G. (1984). Students' conceptions about the vector characteristics of three physics concepts. *Journal of Research in Science Teaching*, 21(5), 439–457. .
<http://doi.org/10.1002/tea.3660210502>
- Appova, A., y Berezovski, T. (2013). Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations. In S. Brown, G. Karakok, G. Hah Roh, & M. Oehrtman (Eds.), *Conference on research in undergraduate mathematics education: Crume xvi* (pp. 8–17).
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA Notes*, 37-54.
- Ballesteros, S. (2020). Comprensión del concepto de dependencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- Barniol, P., y Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 10(1). <http://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121>
- Can, A. (2022). *Construcciones mentales en el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial* (Tesis doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.
- Capaldi, M. (2012, Febrero). A study of abstract algebra textbooks. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman (Presidency), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Conference held at the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Portland, Oregon.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., y Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.
- Chavarría, S. (2019). *Historia del concepto de espacio vectorial, con consideraciones sobre la enseñanza del álgebra lineal en la licenciatura en matemáticas de la universidad del valle* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Campos, V. (2017). *Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE*. (Tesis de maestría). Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Cook, P., Zaskis, D., y Estrup, A. (2018). Rationale for Matrix Multiplication in Linear Algebra Textbooks. (pp. 193-216) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfeld (Eds.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 221–243). NJ:Erlbaum.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., y Rogalsiu, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J. Dorier (Eds.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Springer.

Dorier, J., y Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 255–273. <http://doi.org/10.1007/0-306-47231-7>

Euclides (1996). *Elementos*. Gredos

González, D., y Roa Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 0089-107. <http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150>

Grossman, S. (1993). *Aplicaciones del Álgebra Lineal*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gutierrez Y., y Roa S. (2023, 30 de julio-4 de agosto). *Construcción del concepto de vector en álgebra lineal desde la perspectiva de la teoría APOE*. [Conferencia]. XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Lima, Perú. <https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen2-Tema-1.pdf>

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J. Dorier (Eds.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Springer.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. Dorier (Eds.), *On the teaching of linear algebra*, (pp. 191-207). Springer.

Isaacs, R., y Sabogal, S. (2009). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*. Ediciones UIS. Colombia.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Kú, D., Oktaç, A., y Trigueros, M. (2009). Conjunto generador y generado: Un análisis desde la teoría APOE. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Instituto Tecnológico de Ciudad de Madero. Avance de Investigación. 139-140.

Lockwood, E., Reed, Z., y Caughman, J. S. (2017). An Analysis of Statements of the Multiplication Principle in Combinatorics, Discrete, and Finite Mathematics

Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(3), 381–416. <http://doi.org/10.1007/s40753-016-0045-y>

McDonald, M., Mathews, D., y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV. CBMS issues in Mathematics Education* (vol. 8, pp. 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Oliveros, L. (2019). Un modelo cognitivo de construcción de los sistemas de ecuaciones lineales (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Parraguez, M. (2020). Construcción de significados de las operaciones del espacio vectorial a través de conjuntos linealmente independientes/dependientes. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 60-70. <http://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.22>

Parraguez, M., y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2112-2124. <http://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034>

Parraguez, M., y Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. *Scientia Et Technica*, 19(3), 328–334. <http://doi.org/10.22517/23447214.9303>

Paz, S. (2020). *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Peacock, G. (1833) *A Treatise on Algebra*, Cambridge. Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis. *Report on the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 185–352.

Piaget, J. (1975/1985). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Barcelona: Crítica.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción Moderna*. Thomson.

Poynter, A., & Tall, D. (2005). Relating theories to practice in the teaching of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1264–1273.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61–66.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 89-112.

Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, (pp. 687-709). Macmillan Publishing Co, Inc.

- Rodríguez, M., Parraguez, M., & Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2 . *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 57-86. <http://doi.org/10.12802/relime.18.2113>
- Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches En Didactique Des Mathematiques*, 19(1), 7–40.
- Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., ... & Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(5). <http://doi.org/10.1090/noti2479>
- Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 951–961. <http://doi.org/10.1080/00207390903200984>
- Tait, G. P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions*. Cambridge
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1), 5-31.
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55. <http://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256>
- Uzcátegui C. (2019). *Fundamentos de matemáticas*. <http://matematicas.uis.edu.co/adrialba/sites/default/files/NotasFundUIS.pdf>

Wallis, J. (1685). *A Tratise of álgebra*. Londres.

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 1(2), 73–97.

Zea, C. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia