

**EVALUACIÓN TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UNA ESTRATEGIA PARA LA  
CALIBRACIÓN MANUAL DE UN DISPOSITIVO DE PROYECCIÓN DE  
FRANJAS**

**ALEXANDER BALLESTEROS DÍAZ**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2014**

**EVALUACIÓN TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UNA ESTRATEGIA PARA LA  
CALIBRACIÓN MANUAL DE UN DISPOSITIVO DE PROYECCIÓN DE  
FRANJAS**

**ALEXANDER BALLESTEROS DÍAZ**

**Trabajo de grado para optar al título de físico**

**Director  
PhD JAIME MENESES**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2014**

## TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO 1 .....	15
1. CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS.....	15
1.1 MÉTODO DE PROYECCIÓN DE FRANJAS.....	15
1.1.1 Codificación de la información .....	16
1.2 MÉTODOS DE CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL.....	21
1.2.1 Método experimental para la calibración del sistema de proyección de franjas .....	21
CAPITULO 2 .....	25
2. MODELOS DE CALIBRACIÓN DE CÁMARAS .....	25
2.1 MODELO PINHOLE .....	25
2.1.1 Cámaras CCD.....	32
2.1.2 La matriz proyectiva de la Cámara.....	33
2.2 ABERRACIONES GEOMÉTRICAS.....	36
2.3 CALIBRACIÓN EXPERIMENTAL DE UNA CÁMARA CCD .....	41
2.3.1 Técnica de calibración de Zhang .....	41
2.3.2 Montaje experimental.....	49
CAPITULO 3 .....	58
3. MODELO MATEMÁTICO DEL PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN.....	58
CAPITULO 4 .....	71
4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.....	71
4.1 PATRÓN PSEUDOALEATORIO .....	71
4.2 DISTRIBUCIÓN DE FASE.....	77
4.3 CALIBRACIÓN EXPERIMENTAL DE UNA UNIDAD DE PROYECCIÓN-ADQUISICIÓN.....	81
4.3.1 Color del Patrón de calibración .....	85
4.3.2 Descripción del procedimiento experimental.....	86

4.4	MODELO MATEMÁTICO DE RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE LA CALIBRACIÓN.....	100
5.	CONCLUSIONES .....	102
6.	PERSPECTIVAS .....	103
	REFERENCIAS.....	104

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. MONTAJE EXPERIMENTAL IMPLEMENTADO EN LA TÉCNICA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS.....	15
FIGURA 2. PATRÓN DE FRANJAS PROYECTADO SOBRE: A) UN PLANO DE REFERENCIA, B) OBJETO.....	16
FIGURA 3: PATRÓN DE FRANJAS CON CORRIMIENTO DE FASE $\phi_i = \pi/2$ ...	19
FIGURA 4. IMAGEN DE LA FASE A) DISCONTINUA Y B) CONTINUA.....	20
FIGURA 5. GEOMETRÍA CON EJES CRUZADOS.....	22
FIGURA 6. GEOMETRÍA PINHOLE DE LA CÁMARA.....	25
FIGURA 7. RELACIÓN DE TRIÁNGULOS: (A) PLANO Y, (B) PLANO X.....	26
FIGURA 8. SISTEMA DE COORDENADAS EN EL <i>PLANO IMAGEN</i> .....	28
FIGURA 9. TRANSFORMACIÓN EUCLIDIANA ENTRE LOS SISTEMAS COORDENADOS DEL MUNDO Y LA CÁMARA.....	30
FIGURA 10. DISTORSIÓN: (A) BARRIL, (B) COJÍN Y (C) BIGOTE.....	36
FIGURA 11. COMPONENTES GEOMÉTRICOS DE LA DISTORSIÓN.....	39
FIGURA 12. PATRÓN UTILIZADO PARA CALIBRAR LA CÁMARA.....	42
FIGURA 13. PATRÓN DE CALIBRACIÓN EN EL SISTEMA COORDENADO DEL MUNDO.....	43
FIGURA 14. PLANO DE REFERENCIA.....	51
FIGURA 15. IMÁGENES DE CALIBRACIÓN.....	52
FIGURA 16. PROCESAMIENTO DE LA IMAGEN 1 MEDIANTE LA CCT. (A) SUB-ÁREA SELECCIONADA POR EL USUARIO, (B) ESQUINAS CALCULADAS AUTOMÁTICAMENTE.....	52
FIGURA 17. (A) COORDENADAS TEÓRICAS Y EXPERIMENTALES CALCULADAS PARA LA IMAGEN 1, (B) ZOOM SOBRE UNA DE LAS ESQUINAS DEL PATRÓN DE CALIBRACIÓN, DONDE SE OBSERVAN LAS COORDENADAS TEÓRICAS Y LAS EXPERIMENTALES DEBIDAMENTE IDENTIFICADAS.....	56
FIGURA 18. ERROR DE RE-PROYECCIÓN EN PÍXEL.....	57

FIGURA 19. PARÁMETROS EXTRÍNSECOS. ....	57
FIGURA 20. ESQUEMA DE UN PROYECTOR. ....	58
FIGURA 21. VARIACIÓN DEL ESQUEMA DEL VIDEO PROYECTOR. ....	59
FIGURA 22. GEOMETRÍA PINHOLE DEL PROYECTOR. ....	60
FIGURA 23. SISTEMA COORDENADO EN LA LCD. ....	60
FIGURA 24. LÍNEA SOBRE LA LCD DEL VIDEO PROYECTOR (A) EN , (B) EN .....	61
FIGURA 25. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL VECTOR . ....	62
FIGURA 26. PROYECCIÓN DEL PLANO (A) VERTICAL, (B) HORIZONTAL. ....	62
FIGURA 27. VECTORES COPLANARES EN EL PLANO VERTICAL QUE PASA POR . ....	63
FIGURA 28. VECTORES COPLANARES EN EL PLANO HORIZONTAL QUE PASA POR . ....	65
FIGURA 29. SISTEMA COORDENADO PARA LA UNIDAD DE PROYECCIÓN - ADQUISICIÓN. ....	66
FIGURA 30. PATRÓN DE PUNTOS PSEUDOALEATORIO (A) PROYECTADO POR EL VIDEO PROYECTOR, (B) VISTO POR LA CÁMARA CCD. ....	73
FIGURA 31. (A) RETROALIMENTACIÓN DE DESPLAZAMIENTO LINEAL Y (B) SECUENCIA BINARIA PSEUDOALEATORIA. ....	74
FIGURA 32. PATRÓN DE PUNTOS DE . ....	76
FIGURA 33. TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA IMAGEN DEL PATRÓN DE PUNTOS. ....	78
FIGURA 34. PLANO COMPLEJO Y FORMULA DE EULER. ....	79
FIGURA 35. DISTRIBUCIÓN DE FASE E INTENSIDAD DE LA IMAGEN DEL PATRÓN DE PUNTOS. ....	80
FIGURA 36. IMAGEN AUMENTADA DE LAS CURVAS DE NIVEL EN LAS DIRECCIONES 1 Y 2. ....	81
FIGURA 37. MONTAJE EXPERIMENTAL DE UNA UNIDAD DE PROYECCIÓN – ADQUISICIÓN. ....	82
FIGURA 38. PROYECCIÓN Y OBSERVACIÓN DE UN PUNTO X. ....	83

FIGURA 39. PLANO DE REFERENCIA INTERSECADO POR LA LÍNEA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS C Y X.....	84
FIGURA 40. (A) PATRÓN DE CALIBRACIÓN, (B) PROYECCIÓN DE PUNTOS SOBRE EL PATRÓN DE CALIBRACIÓN DE CUADROS BLANCOS Y NEGROS. ....	85
FIGURA 41. COLORES PARA EL PATRÓN DE CALIBRACIÓN, (A) , (B) .....	86
FIGURA 42. PATRÓN DE CALIBRACIÓN IMPRESO A COLOR. ....	87
FIGURA 43. IMÁGENES PROYECTADAS, (A) PATRÓN DE PUNTOS, (B) FUENTE: AUTOR. ....	87
FIGURA 44. IMÁGENES DE CALIBRACIÓN. PUNTOS Y CUADROS.....	88
FIGURA 45. TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA IMAGEN 1. ....	88
FIGURA 46. LÓBULO DEL PRIMER ARMÓNICO EN LA DIRECCIÓN, (A) 1, (B) 2. ....	89
FIGURA 47. PATRÓN DE PUNTOS Y DISTRIBUCIÓN DE FASE DISCONTINUA EN LA DIRECCIÓN, (A) 1, (B) 2. ....	90
FIGURA 48. DISTRIBUCIÓN DE FASE CONTINÚA DEL PATRÓN DE PUNTOS EN LA DIRECCIÓN, (A) 1, (B) 2. ....	90
FIGURA 49.COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE CONTROL EN LA IMAGEN 1 DEL PATRÓN DE PUNTOS.....	91
FIGURA 50. PATRÓN DE PUNTOS EN LA LCD. CÍRCULOS ROJOS COORDENADAS Y CONOCIDAS. ....	92
FIGURA 51. COORDENADA DE LOS PUNTOS DE CONTROL VISTOS POR LA CÁMARA CCD. ....	93
FIGURA 52. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS VECTORES .....	95
FIGURA 53. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS VECTORES , EN EL SISTEMA COORDENADO DEL MUNDO. ....	96
FIGURA 54. PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL.	101

## LISTA DE TABLAS.

TABLA 1. COORDENADAS EN PÍXELES DE UN PUNTO DE CONTROL DE LA IMAGEN 1.....	92
TABLA 2. PUNTOS RECUPERADOS DE LAS 6 IMÁGENES DE CALIBRACIÓN CON COORDENADAS .	98

## RESUMEN

**TITULO: EVALUACIÓN TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UNA ESTRATEGIA PARA LA CALIBRACIÓN MANUAL DE UN DISPOSITIVO DE PROYECCIÓN DE FRANJAS.**

**AUTOR: ALEXANDER BALLESTEROS DIAZ.**

**PALABRAS CLAVES: RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL, SISTEMA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS, PATRÓN PSEUDOALEATORIO.**

En el campo de aplicación de la metrología óptica, la reconstrucción tridimensional es un factor importante en la determinación de la métrica y morfología de objetos. Una reconstrucción tridimensional es precisa siempre y cuando la calibración inicial del sistema sea óptima. Existe una variedad de métodos de calibración de cámaras, en los cuales existen dependencias del montaje y del conocimiento previo de ciertos parámetros que dificultan la precisión del método. En el presente trabajo se implementa una estrategia novedosa para la calibración manual de un dispositivo de proyección de franjas. Dicho dispositivo se compone de un sistema de proyección (un video proyector) y una unidad de adquisición (cámara CCD), la calibración de los parámetros extrínsecos e intrínsecos de estas dos unidades son la finalidad de este trabajo. Para tal fin se diseñó una estrategia teórica-experimental que utiliza la técnica de calibración manual de una cámara planteada por Zhang [17] y el modelo de calibración de cámaras pin-hole. La técnica consiste en proyectar un patrón pseudoperiodico que tiene información en píxeles de la LCD del proyector, sobre un patrón cuadrículado del cual, a partir de un patrón pseudoaleatorio de puntos codificados se conocen sus coordenadas espaciales. El software permite procesar las imágenes adquiridas para encontrar los parámetros de calibración tanto de la cámara como de la unidad de proyección, obteniendo los parámetros extrínsecos e intrínsecos del sistema unificado, de acuerdo al modelo planteado.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Jaime Meneses

## ABSTRACT

**TITULO: THEORETICAL AND EXPERIMENTAL EVALUATION OF A STRATEGY FOR CALIBRATION MANUAL PROJECTION DEVICE FRINGES.**

**AUTOR: ALEXANDER BALLESTEROS DÍAZ**

**PALABRAS CLAVES: THREE-DIMENSIONAL RECONSTRUCTION, SYSTEM OF FRINGES PROJECTED, PSEUDORANDOM PATTERN.**

In the field of application of optical metrology, three-dimensional reconstruction is an important metric determination and morphology of objects factor. A three-dimensional reconstruction is always accurate and when the initial calibration of the system is optimal. A variety of camera calibration methods, in which there are dependencies of the assembly and prior knowledge of certain parameters that hinder the accuracy of the method. In this paper a novel strategy for manual calibration of a fringe projection device is deployed. This device consists of a projection system ( a video projector) and an acquisition unit (CCD camera) , the calibration of the extrinsic and intrinsic parameters of these two units are the purpose of this work. To this end, a theoretical -experimental strategy that uses the technique of manual calibration of a camera raised by Zhang [17 ] and model calibration pin -hole camera was designed. The technique is to project a pattern that has information pseudoperiodico pixel LCD projector, on which a grid pattern, based on a pseudorandom pattern encoded spatial coordinates their points known. The software allows you to process the acquired images to find the calibration parameters of both the camera and the projection unit, obtaining the extrinsic and intrinsic parameters of the unified system, according to the proposed model.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Jaime Meneses

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe una clara tendencia a la medida y análisis de elementos mecánicos mediante técnicas ópticas, que posibilitan ensayos no destructivos con gran nivel de detalle y en algunos casos de forma más rápida y económica. El avance tecnológico en computación y electrónica permite la realización de montajes compactos y livianos, pudiéndose medir con gran precisión y sin contacto con el objeto, su forma y/o deformaciones.

Entre las numerosas técnicas ópticas diseñadas para extraer información tridimensional de un objeto, está el método de proyección de franjas. Como su nombre lo indica, se proyecta un patrón en intensidad, conformado por un sistema de franjas paralelas de separación constante, sobre la superficie del objeto. El objetivo consiste en extraer la información que deforma la orientación y separación local de las franjas. Esta información, comúnmente llamada Fase del sistema de franjas, está relacionada con la topografía del objeto a través de una ecuación matemática en la que intervienen, de manera implícita o explícita, los parámetros del montaje experimental. El procedimiento de calibración de un esquema de proyección de franjas consiste en determinar la ecuación matemática que relaciona la topografía del objeto con la Fase del sistema de franjas. Como se mostrará en los capítulos siguientes, la calibración del sistema es una etapa importante en el proceso de reconstrucción 3D de un objeto. Este procedimiento involucra, en muchos casos, la utilización de patrones tridimensionales de alta precisión o la utilización de unidades de traslación de alta resolución.

En el presente trabajo de investigación se desarrolla una estrategia que permite la calibración de un sistema de proyección de franjas usando una superficie plana, sostenida con la mano y ubicada de manera arbitraria en diversas posiciones al interior del campo de observación. En los capítulos siguientes se mostrarán los conceptos básicos necesarios para el planteamiento del modelo matemático

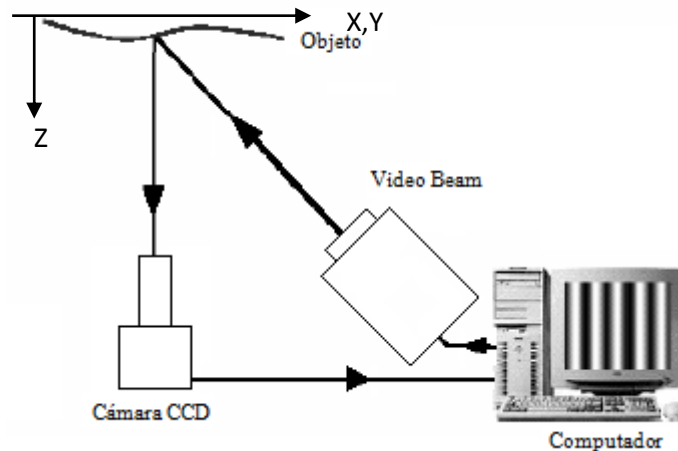
empleado en la calibración. De igual forma se mostrarán los resultados experimentales realizados para validar el modelo de calibración planteado.

# CAPITULO 1

## 1. CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

### 1.1 MÉTODO DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

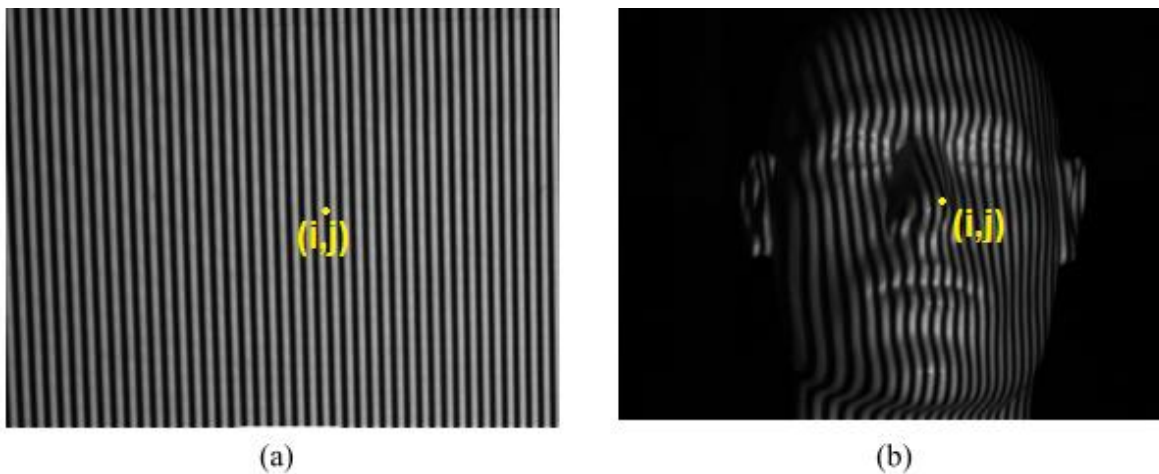
La técnica de proyección de franjas consiste en proyectar sobre el objeto a reconstruir franjas paralelas blancas y negras, que se deforman por la topografía superficial del objeto [1]. La Figura 1 muestra un montaje típico empleado para ejecutar la técnica. El sistema consta de una unidad de proyección/adquisición y una unidad de procesamiento. La unidad de proyección/adquisición está conformada por un dispositivo de proyección (tradicionalmente un Video Proyector) para proyectar las franjas y un dispositivo de observación (cámara CCD) para la adquisición de las imágenes. Las imágenes adquiridas son procesadas por la unidad de control, que permite adicionalmente sincronizar las adquisiciones y calibrar el dispositivo. De manera tradicional, el eje óptico de la cámara es perpendicular al plano de proyección donde se enfocan las franjas y la cámara. Este plano es llamado plano de referencia [1].



**Figura 1.** Montaje experimental implementado en la técnica de proyección de franjas.

**Fuente:** Autor

El proceso físico de codificación de la información topográfica se realiza de la siguiente manera: cuando la proyección se realiza sobre una superficie plana se observan franjas paralelas y de paso constante si la proyección es tele-céntrica; al proyectarlas sobre un objeto, las irregularidades de la superficie (relacionadas directamente con la topografía superficial del objeto) quedan evidenciadas con la deformación de las franjas [[2],[3], ver Figura 2.



**Figura 2.** Patrón de franjas proyectado sobre: a) un plano de referencia, b) objeto.

**Fuente:** Autor

### 1.1.1 Codificación de la información

Teniendo en cuenta un sistema formador de imágenes no tele-céntrico, el ángulo entre los ejes de proyección y observación y la influencia de las aberraciones geométricas, la distribución en intensidad de las imágenes obtenidas con la cámara CCD sobre el plano de referencia tiene la forma de la ecuación (1).

$$I(x_o, y_o) = I_o(x_o, y_o) + A_o(x_o, y_o) * \text{Cos}(2\pi f_o x_o + \phi_o), \quad (1)$$

donde  $I_o$  y  $A$  corresponden a la intensidad del fondo continuo y el contraste de las franjas, respectivamente. El término  $f_o$  es la frecuencia espacial media de las franjas y  $\phi_o$  es la fase inicial de las franjas, que corresponde a la deformación inicial sufrida por las franjas, debida a las características del sistema de proyección-observación. Al ubicar sobre el plano de referencia un objeto, la ecuación se modifica así:

$$I(x_o, y_o) = I_1(x_o, y_o) + A_1(x_o, y_o) * \text{Cos}(2\pi f_o x_o + \phi_o + \Delta\phi). \quad (2)$$

El término  $\Delta\phi$  es la fase introducida por la topografía del objeto. La ecuación (2) se puede reducir de la siguiente manera:

$$I(x_o, y_o) = I_1(x_o, y_o) + A_1(x_o, y_o) * \text{Cos}(\phi), \quad (3)$$

el término  $\phi$  corresponde a la fase del patrón de franjas. De esta forma la deformación que genera un objeto al sistema de franjas altera directamente la fase  $\phi$  de la ecuación (3). Entonces, el proceso de reconstrucción tridimensional (3D), empleando la técnica de proyección de franjas, consiste en recuperar la fase  $\phi$ .

Para dicho cálculo se han desarrollado diversos métodos [4], uno de los más efectivos es el método de Corrimiento de Fase (Phase Shifting) [5]. Para este método se determina la fase del objeto a partir de la intensidad luminosa de  $n$  imágenes digitalizadas, con su respectiva fase modificada en valores  $\varphi_i$  conocidos dentro de un intervalo de  $2\pi$  [2].

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n}(i-1) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

De esta forma la ecuación (3) se puede escribir así:

$$I_i(x_o, y_o) = I_o(x_o, y_o) + A_o(x_o, y_o) * \text{Cos}[\phi - \varphi_i]. \quad (5)$$

A partir de las propiedades ortogonales de las funciones sinusoidales se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n I_i * \text{Cos}(\varphi_i) = \frac{nA}{2} * \text{Cos}(\phi) \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i * \text{Sen}(\varphi_i) = \frac{nA}{2} * \text{Sen}(\phi) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = nI_o. \quad (8)$$

Ordenando las ecuaciones se obtiene:

$$\tan(\phi) = \frac{\sum_{i=1}^n I_i * \text{Sen}(\varphi_i)}{\sum_{i=1}^n I_i * \text{Cos}(\varphi_i)} \quad (9)$$

$$A = \frac{2}{n} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n I_i * \text{Sen}(\varphi_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n I_i * \text{Cos}(\varphi_i) \right)^2}. \quad (10)$$

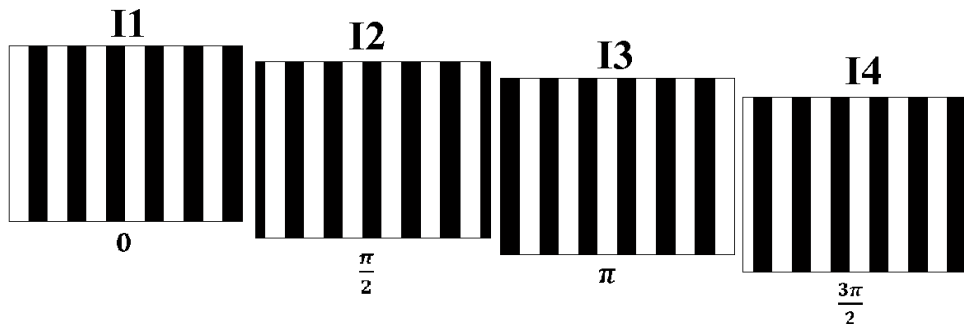
El procedimiento es comúnmente utilizado con  $n = 4$  imágenes [5], lo cual implica un desplazamiento de fase igual a  $\pi/2$ . Así, adquiriendo las 4 imágenes se puede

calcular el valor de  $A$  y  $\phi$  para cada punto  $(x_0, y_0)$  en este caso las ecuaciones (9) y (10) se pueden escribir como,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3}, \quad (11)$$

$$2A(x, y) = \sqrt{(I_2 - I_4)^2 + (I_1 - I_3)^2}, \quad (12)$$

donde  $I_1$  es la imagen correspondiente a un desplazamiento de fase  $\varphi_1 = 0$ ,  $I_2$  para un  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $I_3$  para un  $\varphi_3 = \pi$ , e  $I_4$  para un  $\varphi_4 = 3\pi/2$ . La Figura 3 muestra un ejemplo de estas imágenes.



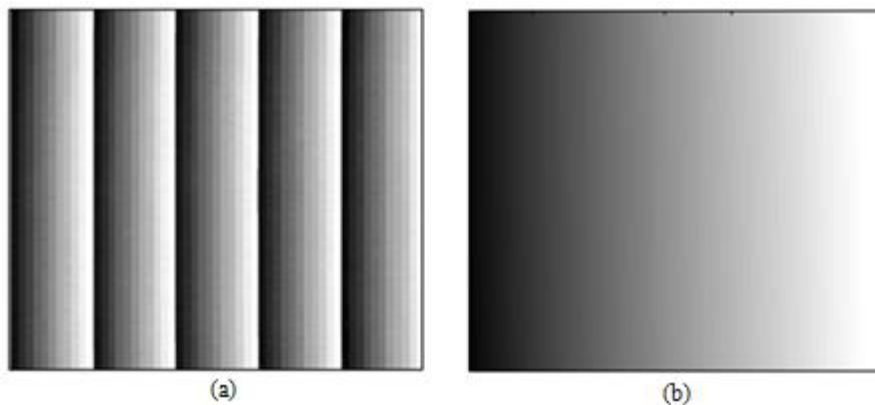
**Figura 3:** Patrón de franjas con corrimiento de fase  $\varphi_i = \pi/2$ .

**Fuente:**[10] González A., Meneses J., León J. (2012) Proyección de franjas en metrología óptica. Revista INGE CUC, Vol. 8, 191-206.

Como se observa en la ecuación (11), el uso de la función tangente inversa para el cálculo de la fase genera puntos de discontinuidad entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Razón por la cual es necesario convertir dicha fase discontinua en una fase continua como se observa en la Figura 4. En la Figura 4 (a) el valor de  $-\pi$  corresponde al nivel de gris negro y  $+\pi$  al nivel de gris blanco. Matemáticamente se demuestra que la transición entre  $\pm\pi$  ocurre en el centro de una franja negra. Con el fin de obtener la

fase continua es necesario identificar las discontinuidades y adicionar valores de  $2\pi N$ , siendo  $N$  una función escalón entera apropiada para eliminar las discontinuidades. Este procedimiento se conoce como “Unwrapping” y se usa para obtener la fase continua del patrón de franjas proyectado sobre el plano de referencia y la fase continua del mismo patrón de franjas proyectado sobre el objeto [2,3]. Según las ecuaciones (1) y (2), la diferencia entre las fases continuas sobre el plano de referencia y sobre el objeto permite obtener  $\Delta\phi$  que contiene información de la topografía del objeto.

El proceso de reconstrucción 3D, se completa al convertir la distribución de fase  $\Delta\phi$  en valores de coordenadas  $Z$  para cada posición  $(X, Y)$  digitalizada por la cámara, ver Figura 1. El proceso de conversión se puede realizar de dos maneras: 1. Usando los parámetros del montaje (ángulo de proyección, paso de proyección, factor de ampliación geométrica de la lente de la cámara) y determinar la ecuación teórica que asocia  $\Delta\phi$  con  $Z$ ; 2. Usando un proceso de calibración que permite determinar una ecuación experimental que asocia  $\Delta\phi$  con  $Z$  [2[3].



**Figura 4.** Imagen de la fase a) discontinua y b) continua.

**Fuente:**[10] González A., Meneses J., León J. (2012) Proyección de franjas en metrología óptica. Revista INGE CUC, Vol. 8, 191-206.

La precisión en el cálculo de las alturas, o medidas de la coordenada Z, depende de un óptimo proceso de calibración. Esta es la razón por la que calibrar el sistema es vital en procedimientos de reconstrucción 3D en los que el fin principal es la obtención de medidas con alta precisión.

## **1.2 MÉTODOS DE CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL**

Un sistema de reconstrucción 3D por proyección de franjas se compone básicamente de CCD, un proyector y un computador, como se observa en la Figura 1, y para efectos prácticos en este trabajo es llamado: “*unidad de proyección-adquisición*”. El proceso de calibración de una *unidad de proyección-adquisición* consta de dos partes bien definidas: la calibración de la cámara CCD y la calibración del sistema *proyección-adquisición*.

La calibración de la cámara consiste en encontrar los parámetros intrínsecos, y extrínsecos. Para ello se usan expresiones matemáticas deducidas a partir de la relación de los parámetros de la cámara y de su geometría. Dichos modelos matemáticos suelen ser matrices con propiedades específicas, que representan el mapeo que realiza la cámara desde un punto en el espacio tridimensional a una imagen en dos dimensiones. El modelo más usado para la representación matemática de cámaras finitas (cámaras con su centro definido en un punto específico) es el modelo *Pinhole*.

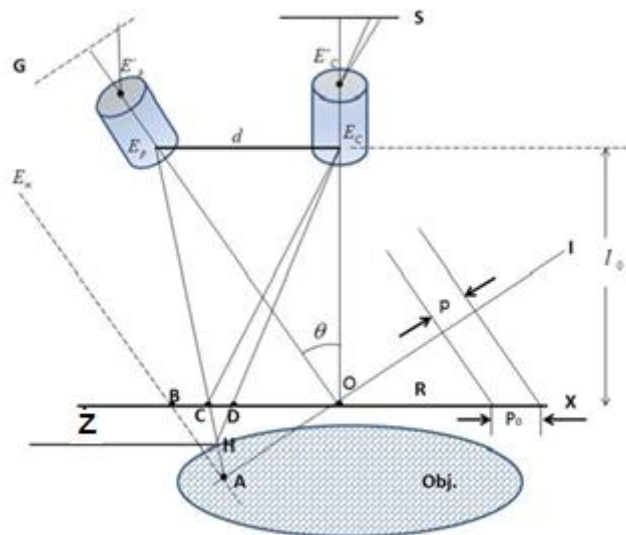
### **1.2.1 Método experimental para la calibración del sistema de proyección de franjas**

Como se mostró en la sección anterior, la información topográfica de la superficie se codifica en la fase del sistema de franjas. Esta fase puede ser obtenida usando el método de corrimiento de fase. De esta manera, calibrar un sistema de proyección de franjas consiste en tener una relación teórica o experimental que

permita convertir la fase calculada para cada punto  $(x, y)$  muestreado de la superficie en altura en milímetros.

La revisión bibliográfica muestra que existen diferentes estrategias para obtener la relación fase  $\phi$  versus  $z$ . De manera muy general, los métodos se pueden clasificar en métodos teóricos, modelos polinomiales y modelos fotogramétricos.

En los modelos teóricos la obtención de una ecuación se basa en los principios básicos de triangulación geométrica y depende de los parámetros del montaje. La Figura 5 muestra el esquema de proyección de franjas;  $E_p$  y  $E_c$  son las pupilas de salida y de entrada del proyector y la cámara, respectivamente. El plano  $s$  imagen de la cámara y el  $xy$  o plano de referencia, son conjugados. El plano objeto  $G$  del proyector, proyecta el sistema de franjas sobre el plano de referencia con un paso  $P_0$  medido sobre el plano de referencia. El punto  $C$  sobre el plano de referencia indica la posición  $m_i$  de la franja.



**Figura 5.** Geometría con ejes cruzados.

**Fuente:** Autor.

Al ubicar el objeto, la franja se proyecta en  $H$  sobre la superficie del objeto y la cámara lo observa en el punto  $D$ . De esta manera la altura  $z$  del punto  $H$ , introduce un corrimiento  $CD$  a la franja ubicada en  $C$ . Usando principios básicos de trigonometría se puede demostrar que [6]:

$$\overline{CD} = \frac{-dz(x, y)}{[l_0 - z(x, y)]}, \quad (13)$$

donde  $z(x, y)$  se define positiva si el punto se ubica en el plano de referencia  $R$  y la pupila de entrada de la cámara  $E_c$ . La relación  $\overline{CD}$  y  $\Delta\phi$ , la variación de fase introducida por  $z$ , es lineal, así:

$$\frac{\Delta\phi(x, y)}{2\pi} = \frac{\overline{CD}}{P_0}, \quad (14)$$

sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (14) y solucionando para  $z(x, y)$  se obtiene (15),

$$z(x, y) = l_0 \Delta\phi(x, y) / [\Delta\phi(x, y) - 2\pi f_0 d]. \quad (15)$$

Esta ecuación indica que calculando la variación de la fase introducida por el objeto y conociendo los parámetros del montaje ( $l_0, f_0, d$ ), se puede obtener  $z(x, y)$ . El uso de la anterior ecuación impone la condición experimental del montaje mostrado en la Figura 5.

La pupila de entrada de la cámara y la pupila de salida del proyector, deben estar ubicados en un plano paralelo al plano de referencia y a una distancia  $l_0$ . Por otro lado la precisión en la medida de  $z$ , depende de la precisión para medir los parámetros del sistema y del error que se introduce en el cálculo de  $\Delta\phi$ . Estas condiciones son muy fuertes y difíciles de cumplir de manera experimental. En la

literatura existen otros modelos teóricos que permiten describir esquemas experimentales menos exigentes, pero las ecuaciones son más complicadas y depende de los parámetros del montaje.

En los modelos polinomiales se busca eliminar la dependencia de los parámetros del sistema, en este tipo de modelos se asume una relación polinomial entre la ecuación de la fase  $\Delta\phi(x, y)$  y la coordenada  $z$ , así:

$$\Delta\phi(x, y) = A(x, y)z^2 + B(x, y)z + C(x, y), \quad (16)$$

donde el objetivo principal es calcular  $A, B$  y  $C$ . La idea básica consiste en ubicar el plano de referencia a diferentes posiciones de  $z$  usando un sistema de desplazamiento con alta precisión. Para cada posición se obtiene la fase  $\phi_z(x, y)$ .  $\Delta\phi(x, y)$  se obtiene usando la ecuación (17) [7].

$$\Delta\phi(x, y) = \phi_z(x, y) - \phi_0(x, y) \quad (17)$$

donde  $\phi_z(x, y)$  corresponde a la fase en  $Z = 0$ . Este tipo de modelos no impone condiciones al montaje experimental, pero requiere de un sistema de desplazamiento de alta precisión. .

En los modelos fotogramétricos se modelizan la cámara y el proyector usando el modelo de proyección puntual o modelo Pinhole. En este tipo de modelos se emplean objetos de forma conocida con patrones en intensidad dibujados en su superficie, no requieren de unidades de desplazamiento y la ecuación final no depende directamente de los parámetros experimentales del montaje. La estrategia que se propone en este trabajo de investigación corresponde a la obtención de un procedimiento teórico- experimental para la calibración de un sistema de proyección de franjas usando un modelo fotogramétrico. Así mismo antes de presentar en detalle el modelo propuesto, se analiza el modelo de proyección puntual o modelo Pinhole.

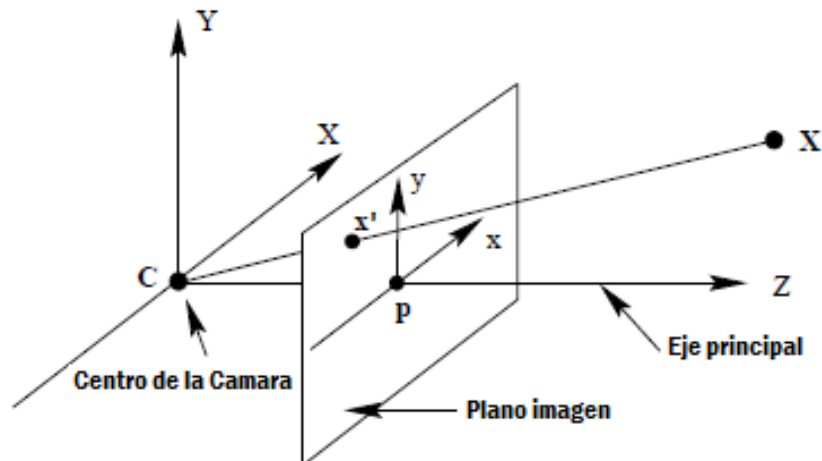
## CAPITULO 2

### 2. MODELOS DE CALIBRACIÓN DE CÁMARAS

#### 2.1 MODELO PINHOLE

En el modelo *Pinhole* se define un plano, llamado el *plano imagen*, y sobre este plano se proyectan los puntos del espacio tridimensional. El centro del *plano imagen* se conoce como el *punto principal* ( $p$ ), y está ubicado frente al *centro de la cámara* ( $C$ ). Dichos puntos son, independientemente, el origen de un sistema de coordenadas Euclidianas.

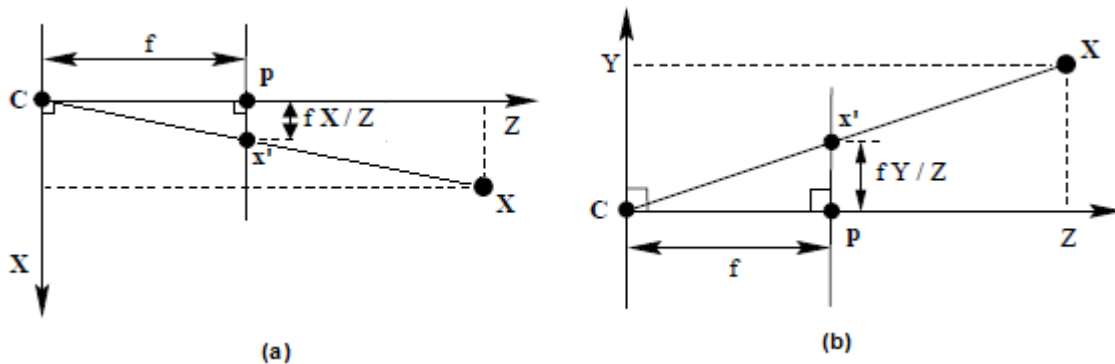
La Figura 6 muestra cómo un punto en el espacio con coordenadas  $X = (X, Y, Z)^T$ , es mapeado a un punto  $x' = (x, y)^T$  en el *plano imagen*.



**Figura 6.** Geometría Pinhole de la cámara.

**Fuente:** [12]

El *plano imagen* es el mismo plano  $Z$  ubicado a una distancia  $f$  (distancia focal) del punto  $C$ , entonces las coordenadas 3D del punto  $x'$  son  $(x, y, f)^T$ . Los puntos  $X$ ,  $x'$  y  $C$  son colineales, como se observa en las Figura 6 y Figura 7.



**Figura 7.** Relación de triángulos: (a) Plano Y, (b) Plano X.

**Fuente:** [12]

Por semejanza de triángulos, Figura 7, y usando las ecuaciones (18) y (19) es posible hallar las coordenadas  $(x, y)$  del punto  $x'$  en la imagen.

$$\frac{X}{Z} = \frac{x}{f} \mapsto x = fX/Z \quad (18)$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{y}{f} \mapsto y = fY/Z \quad (19)$$

En conclusión, las coordenadas de la imagen final se pueden deducir de acuerdo con la ecuación (20), esta ecuación describe el mapeo desde las coordenadas de un punto en el mundo real a las coordenadas del mismo punto en la imagen. Este es un mapeo desde el espacio Euclidiano 3D a el espacio Euclidiano 2D ( $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ ).

$$(X, Y, Z)^T \mapsto (fX/Z, fY/Z)^T \quad (20)$$

El *centro de la cámara* también se conoce con el nombre de *centro óptico*. La línea que pasa por el centro de la *cámara* y que es perpendicular al *plano imagen* es llamada *eje principal* o *rayo principal* de la cámara. En el *punto principal* se

encuentran el *eje principal* y el *plano imagen*. El plano sobre el *centro de la cámara* paralelo al *plano imagen* es llamado el *plano principal* de la cámara.

### Coordenadas Homogéneas.

Los puntos del mundo real y los de la imagen se pueden representar como un mapeo lineal de sus coordenadas homogéneas. La ecuación (20) se puede expresar en términos de una multiplicación de matrices, como se observa en la ecuación (21).

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

La matriz de la ecuación (21) se puede escribir como  $diag(f, f, 1)[I|0]$ , donde  $diag(f, f, 1)$  es una matriz diagonal y  $[I|0]$  representa una matriz dividida en dos partes, una matriz identidad de 3x3 más un vector columna (vector nulo para este caso). La ecuación (21) se puede escribir de forma compacta como se muestra en la ecuación (22).

$$x = PX \quad (22)$$

En donde  $X$  representa el vector de cuatro elementos en coordenadas homogéneas del punto en el mundo real,  $x$  el vector de 3 elementos en coordenadas homogéneas del punto en la imagen y  $P$  es la *matriz de proyección* (3x4) de la cámara en coordenadas homogéneas. La *matriz de proyección* está definida en la ecuación (23).

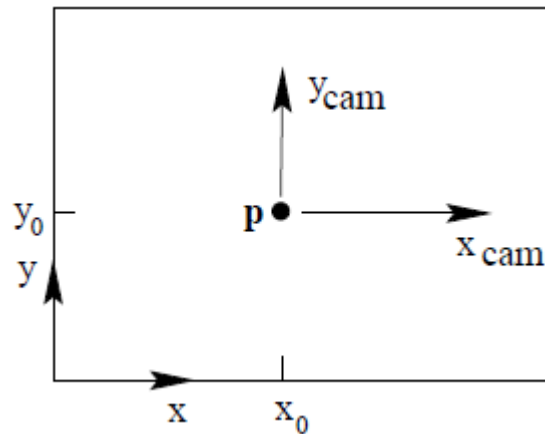
$$P = diag(f, f, 1)[I|0] \quad (23)$$

### El punto principal.

La ecuación (20) asume que el origen de coordenadas del *plano imagen* está en el *punto principal*  $p$ . En la práctica esto no se cumple y la expresión se debe modificar de forma general dando origen a la ecuación (24).

$$(X, Y, Z)^T \mapsto (fX/Z + p_x, fY/Z + p_y)^T \quad (24)$$

En donde  $(p_x, p_y)^T$  son las coordenadas del punto principal, Figura 8.



**Figura 8.** Sistema de coordenadas en el *Plano Imagen*.

**Fuente:** [12]

La ecuación (25) es la transcripción de la ecuación (24) en coordenadas homogéneas.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

De forma abreviada, la ecuación (25) se puede expresar como la ecuación (26).

$$x = K[I|0]X_{cam} \quad (26)$$

La matriz  $K$  se conoce como la *matriz de calibración* de la cámara y está definida por la ecuación (27).

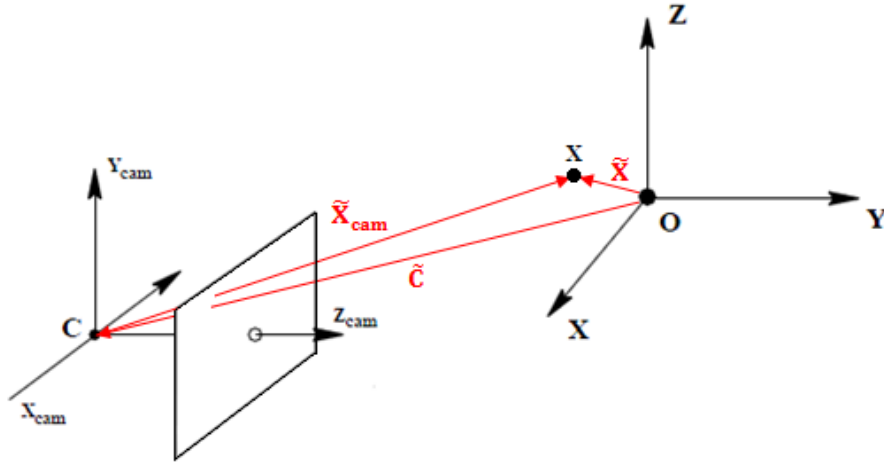
$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

### Rotación y Translación.

Los puntos del espacio 3D se expresan en términos de un sistema de coordenadas Euclidianas diferente al de la cámara, que usualmente se conoce como el *sistema coordenado del mundo*. Si  $\tilde{X}$  es un vector de 3 elementos, en coordenadas no homogéneas, que representa la posición de un punto en el *sistema coordenado del mundo*, y  $\tilde{X}_{cam}$  representa el mismo punto en el *sistema coordenado de la cámara*, se pueden relacionar ambos sistemas mediante la ecuación (28).

$$\tilde{X}_{cam} = \tilde{X} - \tilde{C} \quad (28)$$

En donde  $\tilde{C}$  representa las coordenadas del centro de la cámara en el *sistema coordenado del mundo real*. En la Figura 9 se puede observar la relación de los dos sistemas coordenados.



**Figura 9.** Transformación Euclidiana entre los sistemas coordenados del mundo y la cámara.

**Fuente:** [12]

Considerando que el *sistema coordenado del mundo* puede sufrir una rotación respecto al *sistema coordenado de la cámara*, se incluye una matriz de rotación 3x3 que representa la orientación del *sistema coordenado de la cámara* en la ecuación (27), dicha matriz se representa como  $R$  y da lugar a la ecuación (29).

$$\tilde{X}_{cam} = R\tilde{X} - R\tilde{C} = R(\tilde{X} - \tilde{C}) \quad (29)$$

En coordenadas homogéneas, la ecuación (29) se expresa como se muestra en la ecuación (30).

$$\tilde{X}_{cam} = \begin{bmatrix} R\tilde{X} - R\tilde{C} \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

En coordenadas Euclidianas la ecuación (30) se escribe como la ecuación (31).

$$\tilde{X}_{cam} = [R \quad -R\tilde{C}]X = R[1 \quad -\tilde{C}]X \quad (31)$$

$$\tilde{X}_{cam} = R[I|-\tilde{C}]X$$

Reemplazando (31) en la ecuación (26) se llega a la ecuación (32).

$$\begin{aligned}
 x &= K \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x &= K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & -R\tilde{C}_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & -R\tilde{C}_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & -R\tilde{C}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x &= K \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & -R\tilde{C}_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & -R\tilde{C}_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & -R\tilde{C}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x &= KR \begin{bmatrix} I & -\tilde{C} \end{bmatrix} X
 \end{aligned}$$

**(32)**

El mapeo de una cámara *Pinhole*, tiene 9 grados de libertad: 3 para  $K$  (los elementos  $f, p_x, p_y$ ), 3 para  $R$ , y 3 para  $\tilde{C}$ . Los elementos de  $K$ , distancia focal y origen de coordenadas, se conocen como los *parámetros intrínsecos de la cámara*; los elementos de  $R$  y  $\tilde{C}$ , los cuales relacionan la orientación y posición de la cámara con el *sistema de coordenadas del mundo*, son llamados parámetros extrínsecos.

A menudo es conveniente no incluir el centro de la cámara dentro de los cálculos, y en cambio representar la relación de los ejes coordenados como se expresa en la ecuación (33).

$$\tilde{X}_{cam} = R\tilde{X} + t \quad (33)$$

En donde  $t = -R\tilde{C}$ . En este caso, y en base a las ecuaciones (22) y (32), la matriz de proyección está definida por la ecuación (34).

$$\begin{aligned} x &= KR[I|-\tilde{C}]X \quad \& \quad x = PX \\ PX &= KR[I|-\tilde{C}]X \\ P &= KR[I|-\tilde{C}] \\ P &= K[R|-\tilde{C}] \\ P &= K[R|t] \end{aligned} \quad (34)$$

### 2.1.1 Cámaras CCD.

En el modelo *Pinhole* se asume que las coordenadas de la imagen son coordenadas Euclidianas con escalas iguales en los dos ejes. En casos prácticos, es posible que las cámaras CCD no tengan píxeles perfectamente cuadrados, lo que obliga a incluir factores de corrección en cada dirección. De esta forma, asumiendo  $m_x$  y  $m_y$  como los factores de corrección para el *eje X* y el *eje Y* respectivamente, se tiene que la transformación desde el *sistema de coordenadas del mundo* a las coordenadas en píxeles está dada por la multiplicación de la matriz de calibración (ecuación (27)) con la matriz  $diag(m_x, m_y, 1)$ , dando como resultado la ecuación (35).

$$K = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x f & 0 & m_x p_x \\ 0 & m_y f & m_y p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

en donde  $\alpha_x = fm_x$  y  $\alpha_y = fm_y$ , representan la longitud focal de la cámara en términos de las dimensiones del píxel en ambos ejes. De igual forma  $\tilde{x}_0 = (x_0, y_0)$ , es el punto principal en términos de las dimensiones del píxel, con coordenadas  $x_0 = m_x p_x$  y  $y_0 = m_y p_y$ .

Con el fin de llegar a un cálculo más específico, se puede incluir en la matriz de calibración (ecuación (35)) un parámetro ("s") de *oblicuidad* [8], que vale cero (0) para la mayoría de las cámaras pero que puede tomar valores diferentes en casos inusuales. Así, la matriz de calibración se muestra en la ecuación (36).

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Una cámara ( $P = KR[1|-\tilde{C}]$ ), para la cual su matriz de calibración  $K$  está dada por la ecuación (36), se puede descomponer en bloques así  $P = [M|p_4]$ . donde  $M = KR$ , es una submatriz 3x3 de  $P$ , y  $p_4$  es la última columna de la matriz  $P$ . Si  $M$  es invertible la cámara es finita; si no lo es, es una cámara infinita (cámara sin un centro definido, se dice que su centro está en el infinito).

### 2.1.2 La matriz proyectiva de la Cámara

Si se tiene una relación  $X_i \leftrightarrow x_i$ , entre puntos  $X_i$  del espacio 3D y puntos  $x_i$  de una imagen 2D, se debe cumplir la ecuación (37) para todo  $i$ . Donde  $P$  es una matriz 3x4 y se conoce como matriz proyectiva de la cámara.

$$x_i = PX_i \quad (37)$$

Para dar una solución lineal a  $P$ , la ecuación (37) se puede expresar en términos de un producto cruz de vectores, como la ecuación (38).

$$x_i \times PX_i = 0 \quad (38)$$

Si la primera (1ª) fila de la matriz  $P$  se expresa como  $P_1^T$ , de igual forma la segunda (2ª) y la tercera (3ª) fila,  $P_2^T$  y  $P_3^T$ , el producto  $PX_i$  se puede escribir como se muestra en la ecuación (39)

$$PX_i = \begin{pmatrix} P_1^T X_i \\ P_2^T X_i \\ P_3^T X_i \end{pmatrix} \quad (39)$$

Teniendo  $x_i = (x_i, y_i, w_i)^T$ , el resultado del producto cruz se muestra en la ecuación (40).

$$x_i \times PX_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & w_i \\ P_1^T X_i & P_2^T X_i & P_3^T X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_i P_3^T X_i - w'_i P_2^T X_i \\ w'_i P_1^T X_i - x'_i P_3^T X_i \\ x'_i P_2^T X_i - y'_i P_1^T X_i \end{pmatrix} \quad (40)$$

Considerando que  $P_j^T X_i = X_i^T P_j$  (para  $j = 1, 2$  y  $3$ ) la ecuación (40) se puede escribir como un sistema de 3 ecuaciones en función de  $P$ , que a su vez se puede expresar como un producto de matrices de la forma  $A_i P = 0$ , ecuación (41), en donde  $A_i$  es una matriz de  $3 \times 9$  y  $P$  es un vector de 3 filas formadas por 4 elementos.

$$\begin{pmatrix} (0^T)P_1 - (w'_i X_i^T)P_2 + (y'_i X_i^T)P_3 \\ (w'_i X_i^T)P_1 - (0^T)P_2 - (x'_i X_i^T)P_3 \\ (y'_i X_i^T)P_1 + (x'_i X_i^T)P_2 + (0^T)P_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0^T & -w'_i X_i^T & y'_i X_i^T \\ w'_i X_i^T & 0^T & -x'_i X_i^T \\ -y'_i X_i^T & x'_i X_i^T & 0^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (41)$$

La ecuación  $A_i P = 0$ , es una ecuación lineal con  $P$  desconocido. Dentro de los elementos de  $A_i$  están las coordenadas conocidas de los puntos. En la ecuación (41) hay un sistema de 3 ecuaciones, pero solo 2 de ellas son linealmente independientes, es común omitir la tercera ecuación para llegar a la solución de  $P$  [5], como se observa en la ecuación (42).

$$\begin{bmatrix} 0^T & -w'_i X_i^T & y'_i X_i^T \\ w'_i X_i^T & 0^T & -x'_i X_i^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (42)$$

En donde  $A_i$  es ahora una matriz  $2 \times 9$ . Estas ecuaciones se conservan para cualquier representación en coordenadas homogéneas  $(x'_i, y'_i, w'_i)^T$  del punto  $X_i^T$ .

Para la relación de  $n$  puntos se obtiene una matriz de  $2n \times 12$ , que reúne las ecuaciones de cada relación. La matriz  $P$  consta de 12 elementos, es necesario tener 11 ecuaciones para hallar sus valores. Si se tiene en cuenta que la relación de correspondencia de cada punto conduce a 2 ecuaciones, se requiere como mínimo de  $5\frac{1}{2}$  correspondencias para solucionar  $P$ . El  $\frac{1}{2}$  indica que solo se usa una de las coordenadas del sexto punto de la imagen, ya sea la coordenada  $x$  o la coordenada  $y$ . Si se cumple esta condición la solución es exacta, pero si en dado caso se tiene  $n \geq 6$ , la solución para la ecuación  $AP = 0$  no es exacta.

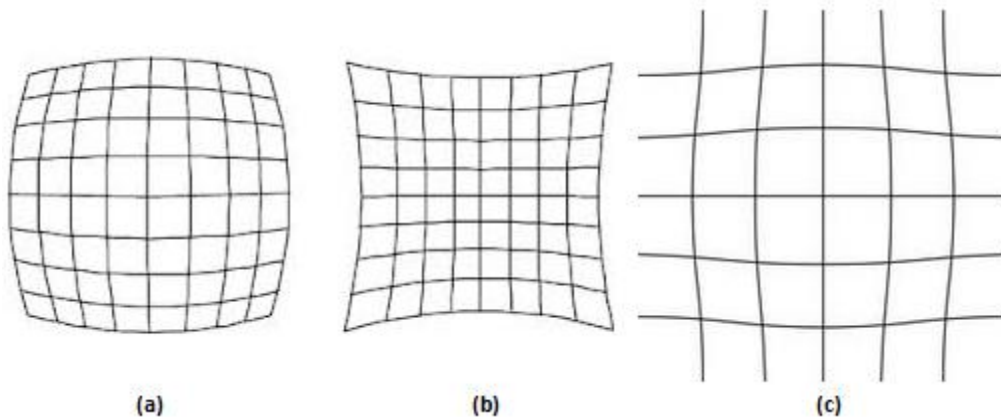
Otra posible solución, en el caso de que el producto de las matrices no sea exacto, consiste en analizar el plano formado por la retro-proyección de una línea  $l$  de la imagen, el cual es igual a  $P^T l$ . Teniendo en cuenta que una línea 3D se puede representar por dos puntos  $x_0$  y  $x_1$  (a través de los cuales pasa la línea), la condición para que un punto  $x_j$  esté contenido en dicho plano está dada por la ecuación (43).

$$l^T P x_j = 0 \text{ para } j = 0, 1. \quad (43)$$

Cada uno de los puntos da como resultado una ecuación lineal, de esta forma se obtienen dos ecuaciones por cada relación de línea 3D a 2D. Estas ecuaciones se pueden introducir en la ecuación (41) para calcular una solución al sistema de ecuaciones.

## 2.2 ABERRACIONES GEOMÉTRICAS

Normalmente las imágenes capturadas con una cámara resultan con cierto tipo de aberraciones, lo cual deteriora la calidad geométrica de la imagen y la capacidad de medir posiciones de objetos en ella. La distorsión de la lente puede clasificarse como radial o tangencial [6]. Las dos distorsiones surgen porque los rayos de luz son desviados por los lentes. La distorsión radial hace que los puntos en las imágenes se desplacen de forma radial a partir del eje óptico, a causa de un pulido defectuoso del lente. La distorsión tangencial ocurre en ángulos rectos a las líneas radiales a partir del eje óptico, causado por un centrado defectuoso de todos los elementos que conforman el sistema de lentes. Muchas veces los efectos de la distorsión tangencial no son considerados por ser menos significativos que los efectos de la distorsión radial. En la Figura 10 se observan imágenes con diferentes tipos de distorsiones.



**Figura 10.** Distorsión: (a) Barril, (b) Cojín y (c) Bigote.

Si se denotan las coordenadas de un punto de proyección *Pinhole* sin distorsiones como  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  medido en unidades de longitud focal, entonces para un punto  $X$  la ecuación (26) se modifica de acuerdo con la ecuación (44),

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, 1)^T = K[I|0]X_{cam}, \quad (44)$$

en donde  $X_{cam}$  es el punto 3D en el *sistema de coordenadas de la cámara*, que se relaciona con el *sistema de coordenadas del mundo real* mediante la ecuación (30). La ecuación (45) relaciona el punto actual (con distorsiones) con el punto ideal (sin distorsiones),

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = L(\tilde{r}) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

en donde  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  son las coordenadas del punto ideal, el cual obedece a una proyección lineal;  $(x_d, y_d)$  es la posición actual del punto en la imagen, después de la distorsión radial;  $\tilde{r}$  es la distancia radial  $\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$  desde el centro de la distorsión radial; y  $L(\tilde{r})$  es un factor de distorsión el cual está únicamente en función del radio  $\tilde{r}$ .

En píxeles las coordenadas de la corrección se escriben como se muestra en las ecuaciones (46) y (47).

$$\hat{x} = x_c + L(r)(x - x_c) \quad (46)$$

$$\hat{y} = y_c + L(r)(y - y_c) \quad (47)$$

En donde  $(x, y)$  es la medida de las coordenadas,  $(\hat{x}, \hat{y})$  son las coordenadas corregidas, y  $(x_c, y_c)$  es el centro de la distorsión radial, con  $r^2 = (x - x_c)^2 +$

$(y - y_c)^2$ . Con esta corrección las coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y})$  son relacionadas a las coordenadas 3D del punto como lo haría una cámara proyectiva lineal.

La función  $L(\tilde{r})$  está únicamente definida para valores positivos de  $r$  y  $L(0) = 1$ . Con una expansión en serie de Taylor se puede llegar a una aproximación arbitraria, como se muestra en la ecuación (48).

$$L(r) = 1 + k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 \dots k_n r^n \quad (48)$$

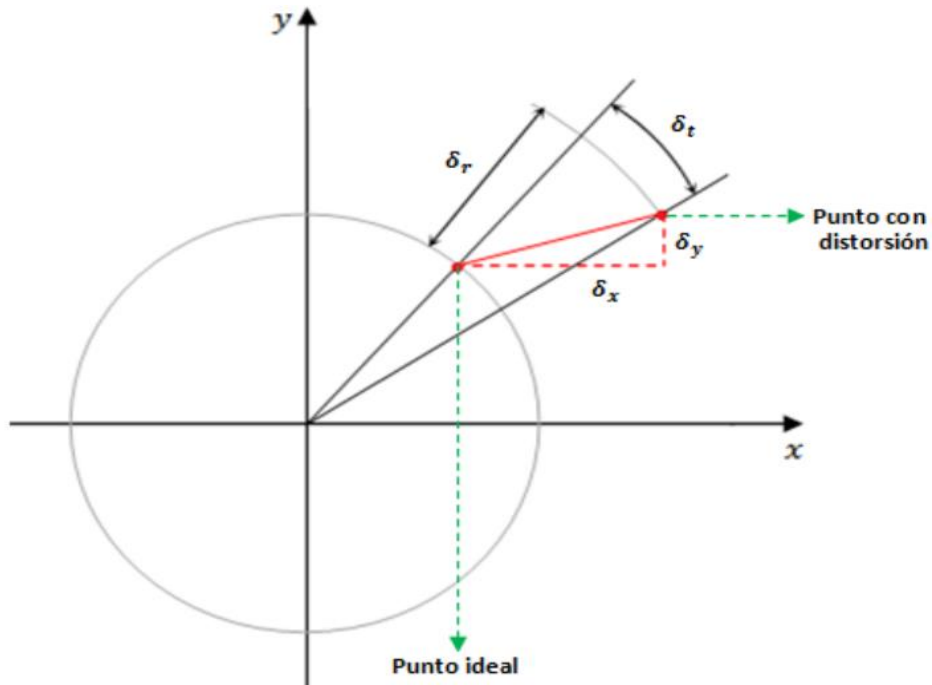
Con base en este modelo los coeficientes  $\{k_1, k_2, k_3 \dots k_n\}$  son infinitos, pero de acuerdo con las demostraciones y resultados obtenidos por Tsai [18] con un único coeficiente ( $k_1$ ) se obtienen muy buenos resultados.

Por otro lado, la variación sobre la posición  $(x, y)$  de un punto, debida al error inducido  $\delta_i$ , está dada por las ecuaciones (49) y (50).

$$\tilde{x}_d = x + \delta_x \quad (49)$$

$$\tilde{y}_d = y + \delta_y \quad (50)$$

En la imagen, la diferencia de la posición real (con distorsiones) y la ideal (sin distorsiones) se descompone en las componentes rectangulares  $(\delta_x, \delta_y)$ , la componente radial  $\delta_r$  y la tangencial  $\delta_t$ , como se puede observar en la Figura 11.



**Figura 11.** Componentes geométricos de la distorsión.

**Fuente:** [12]

Con base en la ecuación (48), las distorsiones radial y tangencial se suelen expresar como se muestra en las ecuaciones (51) y (52) respectivamente [9]

$$\begin{bmatrix} \delta \tilde{x}_i^{(r)} \\ \delta \tilde{y}_i^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 + \dots) \\ y(k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 + \dots) \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \tilde{x}_i^{(t)} \\ \delta \tilde{y}_i^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_1 x_i y_i + p_2 (r_i^2 + 2x_i^2) \\ p_1 (r_i^2 + 2y_i^2) + 2p_2 x_i y_i \end{bmatrix} \quad (52)$$

Como se mencionó con anterioridad, haciendo referencia a la ecuación (51), los términos  $k_1, k_2, \dots$  son coeficientes para la distorsión radial y de acuerdo con Tsai [18] es suficiente con un único coeficiente ( $k_1$ ) para compensarla. En la ecuación (52),  $p_1$  y  $p_2$  son coeficientes para la distorsión tangencial, y en los dos casos  $r_i$

siempre está dado por la expresión  $\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ .

Considerando las componentes de la distorsión geométrica, la matriz de calibración, ecuación (30), se puede reescribir como se muestra en la ecuación (53).

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 + \delta_x \\ 0 & \alpha_y & y_0 + \delta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Teniendo en cuenta que  $m_x$  y  $m_y$  son los parámetros en unidades métricas de las dimensiones del píxel, en la ecuación (53) se tiene que  $\alpha_x = m_x f$  y  $\alpha_y = m_y f$  (longitud focal de la cámara),  $x_0 = m_x p_x$  y  $y_0 = m_y p_y$  (coordenadas del punto principal de la cámara),  $\delta_x = m_x \delta \tilde{x}$  y  $\delta_y = m_y \delta \tilde{y}$  (componentes de la distorsión geométrica), y  $s$  el parámetro de oblicuidad (skew) que en la mayoría de los casos vale cero (0).

Existen varias componentes de error en los procesos de medida con imágenes capturadas con cualquier tipo de cámara; por tal motivo algunos trabajos en esta área sugieren que la forma más adecuada de estimar los parámetros de la cámara es minimizar la diferencia entre los puntos ideales del modelo matemático sin distorsiones y los  $N$  puntos reales  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  producto de la observación de la cámara, en dónde  $i = 1 \dots N$ .

Entonces, el cálculo de los parámetros se convierte en un proceso de optimización no lineal cuya función de error se expresa como una suma de diferencia de cuadrados como se expresa en la ecuación (54).

$$F = \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - y_i)^2 \quad (54)$$

En donde  $N$  es el número de puntos de observación,  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  son las coordenadas experimentales y  $(x_i, y_i)$  las coordenadas teóricas de un punto  $X_i$ .

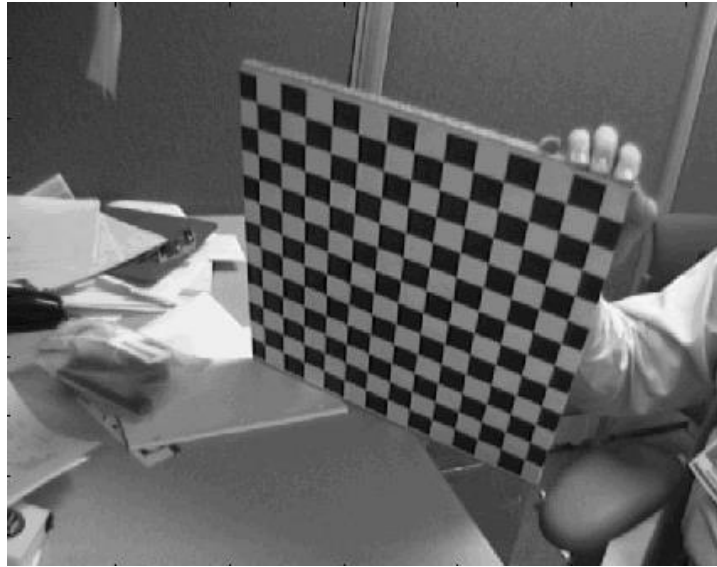
### 2.3 CALIBRACIÓN EXPERIMENTAL DE UNA CÁMARA CCD

Actualmente una de las herramientas más usada para la calibración de cámaras es un algoritmo de código abierto desarrollado dentro del entorno de MATLAB y de libre distribución, llamado *Camera Calibración Toolbox CCT*, se encuentra disponible en [http://www.vision.caltech.edu/bouquetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouquetj/calib_doc/).

Esta herramienta calcula los parámetros de la cámara, hace una corrección para proyecciones asimétricas y una corrección general de la imagen. En este trabajo surge la necesidad de desarrollar algoritmos de calibración; para lo cual se requiere implementar una técnica que permita recuperar los parámetros de la cámara de forma rápida, sencilla, en repetidas ocasiones, y sobre todo que sean valores confiables a la hora de obtener información metrológica. A continuación, se describe la técnica implementada.

#### 2.3.1 Técnica de calibración de Zhang

La técnica de calibración de una cámara propuesta por Zhang [17], requiere que un patrón plano sea visto por la cámara en al menos dos posiciones diferentes. Esta técnica utiliza por objeto un patrón con una cuadrícula uniforme, sobre una superficie plana, Figura 12.



**Figura 12.** Patrón utilizado para calibrar la cámara.

**Fuente:** [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/htmls/example.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/htmls/example.html).

Como se observa en la Figura 12 los movimientos se realizan manualmente, y una de las grandes ventajas es que no se necesita información sobre los desplazamientos, tampoco conocer con precisión la distancia entre el patrón de calibración y la cámara CCD. Según el autor, clasifica la técnica entre una calibración Fotogramétrica y una Auto-calibración, porque se basa en información métrica 2D que se obtiene a partir de imágenes de un patrón plano con información métrica 3D implícita. Comparadas con otras técnicas de calibración, la propuesta por Zhang es más flexible, y tal vez la más apropiada para aplicaciones fuera del laboratorio [17].

Esta técnica de calibración se basa en el modelo Pinhole, y parte desde la suposición que el patrón de calibración observado por la cámara se encuentra en una posición respecto al sistema coordenado del mundo tal que  $Z = 0$ , como se observa en la Figura 13. Es decir, al ser una superficie plana las coordenadas del mundo tienen los ejes  $xy$  en el plano del patrón y paralelos a la cuadrícula y el eje  $z$  es perpendicular. De esta manera a la esquina de un cuadrado se le conocen

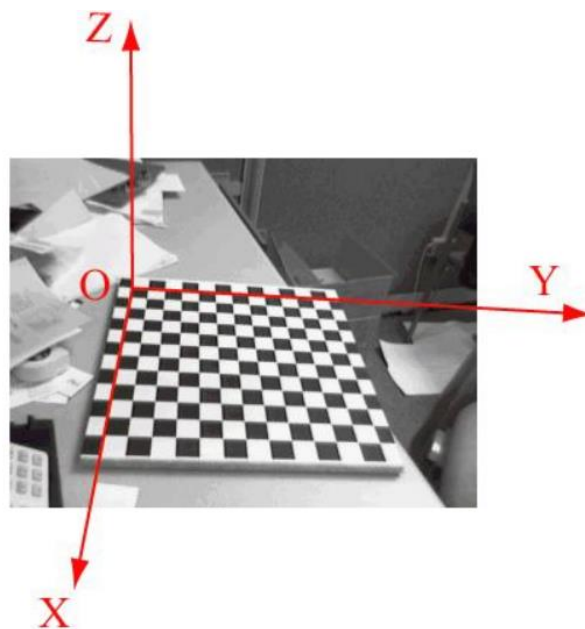
sus coordenadas simplemente contando cuadros y haciendo  $Z = 0$ . Entonces la ecuación (32) quedaría reducida a la ecuación (55).

$$x = K[R \ t]X$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(55)



**Figura 13.** Patrón de calibración en el sistema coordenado del mundo.

**Fuente:** [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/htmls/parameters.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/htmls/parameters.html).

La transformación proyectiva entre dos planos es la más básica en la Geometría Proyectiva, se asume que  $Z = 0$  para el plano en el sistema coordenado del mundo y se asemeja a la transformación proyectiva entre: el plano imagen de una cámara y un plano físico; esta transformación se conoce como una homografía. La expresión matemática que define esta transformación, similar a la ecuación (55), básicamente es la multiplicación entre las coordenadas de un punto en el plano y su respectiva matriz de Homografía (matriz de Proyección reducida), ecuación (56).

$$x = HX \quad (56)$$

Relacionando las ecuaciones (55) y (56), se tiene para este caso que la matriz de Homografía está dada por la ecuación (57).

$$H = K[r_1 \ r_2 \ t] \quad (57)$$

Si los vectores columna de  $H$  se definen como  $[h_1 \ h_2 \ h_3]$ , los términos  $r_1$  y  $r_2$  se pueden expresar de acuerdo con las ecuaciones (58) y (59).

$$[h_1 \ h_2 \ h_3] = K[r_1 \ r_2 \ t]$$

$$r_1 = h_1 K^{-1} \quad (58)$$

$$r_2 = h_2 K^{-1} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta el carácter ortogonal entre  $r_1$  y  $r_2$ , se deben cumplir las ecuaciones (60) y (61).

$$\begin{aligned} r_1^T r_2 &= 0 \\ h_1^T (K^{-1})^T h_2 K^{-1} &= h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} r_1^T r_1 &= r_2^T r_2 \\ h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 &= h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2 \end{aligned} \quad (61)$$

La expresión  $K^{-T}$  es una abreviación de  $(K^{-1})^T$ . Para mayor claridad se definen a continuación, de la matriz  $K$  ecuación (36), su matriz inversa y la matriz transpuesta a la inversa, ecuaciones (62) y (63).

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_x & -s/\alpha_x\alpha_y & sy_0 - x_0\alpha_y/\alpha_x\alpha_y \\ 0 & 1/\alpha_y & -y_0/\alpha_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$(K^{-1})^T = K^{-T} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_x & 0 & 0 \\ -s/\alpha_x\alpha_y & 1/\alpha_y & 0 \\ sy_0 - x_0\alpha_y/\alpha_x\alpha_y & -y_0/\alpha_y & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

El producto  $K^{-T} K^{-1}$ , presente en las ecuaciones (62) y (63), se resuelve en la ecuación(64) y Zhang lo define como la matriz  $B$ .

$$K^{-T} K^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_x & 0 & 0 \\ -s/\alpha_x\alpha_y & 1/\alpha_y & 0 \\ (sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x\alpha_y & -y_0/\alpha_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\alpha_x & -s/\alpha_x\alpha_y & (sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x\alpha_y \\ 0 & 1/\alpha_y & -y_0/\alpha_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \quad (64)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/\alpha_x^2 & -s/\alpha_x^2\alpha_y & (sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x^2\alpha_y \\ -s/\alpha_x^2\alpha_y & s^2/\alpha_x^2\alpha_y^2 + 1/\alpha_y^2 & -s(sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x^2\alpha_y^2 - y_0/\alpha_y^2 \\ (sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x^2\alpha_y & -s(sy_0 - x_0\alpha_y)/\alpha_x^2\alpha_y^2 - y_0/\alpha_y^2 & (sy_0 - x_0\alpha_y)^2/\alpha_x^2\alpha_y^2 + y_0^2/\alpha_y^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Las ecuaciones (60) y (61) se pueden expresar ahora como se muestran en las ecuaciones (65) y (66).

$$h_1^T B h_2 = 0 \quad (65)$$

$$h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2 \quad (66)$$

Resolviendo la ecuación (65), se obtiene la ecuación (67).

$$(h_{11} \quad h_{12} \quad h_{13}) \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} h_{11}B_{11} + h_{12}B_{12} + h_{13}B_{13} & h_{11}B_{12} + h_{12}B_{22} + h_{13}B_{23} & h_{11}B_{13} + h_{12}B_{23} + h_{13}B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_{11}B_{11}h_{21} + h_{12}B_{12}h_{21} + h_{13}B_{13}h_{21} + h_{11}B_{12}h_{22} + h_{12}B_{22}h_{22} + h_{13}B_{23}h_{22} + h_{11}B_{13}h_{23} \\ +h_{12}B_{23}h_{23} + h_{13}B_{33}h_{23} \end{pmatrix} \\
&= (h_{11}h_{21})B_{11} + (h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22})B_{12} + (h_{11}h_{22})B_{22} + (h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23})B_{13} \\
&\quad + (h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23})B_{23} + (h_{13}h_{23})B_{33} \\
&\quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_{11}h_{21} \\ h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22} \\ h_{11}h_{22} \\ h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23} \\ h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23} \\ h_{13}h_{23} \end{bmatrix} = 0 \tag{67}
\end{aligned}$$

Como se observa en la ecuación (67), la operación se puede reducir al producto de dos vectores de 6 elementos. Definiendo  $b$  y  $v_{ij}$  como:

$$b = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} h_{11}h_{21} \\ h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22} \\ h_{11}h_{22} \\ h_{13}h_{21} + h_{11}h_{23} \\ h_{13}h_{22} + h_{12}h_{23} \\ h_{13}h_{23} \end{bmatrix} \quad (69)$$

De acuerdo con esto, las ecuaciones (65) y (66) se pueden expresar como se muestra en la ecuación (70).

$$\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix} b = 0 \quad (70)$$

Si se toman  $n$  imágenes del patrón de calibración y se agrupan las ecuaciones, se tiene la ecuación (71).

$$Vb = 0 \quad (71)$$

En donde  $V$  es una matriz de dimensiones  $2n \times 6$ . Una vez conocido  $b$  se pueden calcular todos los componentes de la matriz  $K$ , ecuación (36), que contiene los parámetros intrínsecos. Con las siguientes ecuaciones, de la (72) a la (76), se hallan los parámetros intrínsecos de la cámara. Se puede observar que las ecuaciones han sido deducidas a partir de la matriz  $B$ , ecuación (64).

$$y_0 = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)} \quad (72)$$

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{1}{B_{11}}} \quad (73)$$

$$\alpha_y = \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}} \quad (74)$$

$$s = -B_{12}\alpha_x^2\alpha_y \quad (75)$$

$$x_0 = \frac{sy_0}{\alpha_y} - B_{13}\alpha^2 \quad (76)$$

Una vez conocida la matriz  $K$ , los parámetros extrínsecos se pueden calcular usando las ecuaciones (58) (59) (77) y (78).

$$r_3 = r_1 \times r_2 \quad (77)$$

$$t = h_3 K^{-1} \quad (78)$$

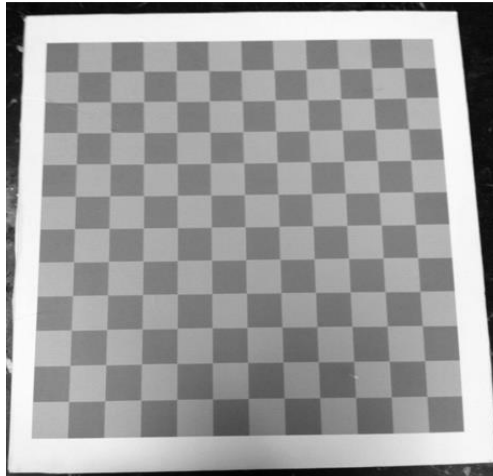
### 2.3.2 Montaje experimental

La técnica de calibración de una cámara que se ha descrito, permite calcular los parámetros intrínsecos y extrínsecos usando un modelo lineal, ecuación (71). Al

considerar las aberraciones geométricas propias de los sistemas formadores de imágenes, introduciendo las ecuaciones (46) y (47) en la ecuación (51), el modelo matemático deja de ser lineal y se requiere de un proceso de optimización no lineal para calcular los parámetros de la cámara.

Para el procedimiento de calibración experimental se requiere un patrón de calibración bien conocido metrológicamente, de tal forma que estén identificadas las coordenadas  $(X_i, Y_i)$  de los puntos de control  $X_i$ . Con esta información y con valores aproximados de los parámetros intrínsecos y extrínsecos (deducidos a partir del modelo matemático), se calculan las coordenadas  $(x_i, y_i)$  en píxeles de los respectivos puntos de control  $x_i$ . En otro paso, mediante procesamiento digital de imágenes, las coordenadas experimentales  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  en píxeles de los puntos  $x_i$  también son calculadas. De esta manera, se define la función de error como la suma de las distancias euclidianas entre las coordenadas experimentales y las coordenadas teóricas deducidas a partir del modelo matemático, ecuación (54). El proceso de optimización consiste en determinar los valores de los parámetros intrínsecos y extrínsecos que minimizan la función de error; tomando como valores iniciales, para los parámetros de la cámara, los que se obtienen sin considerar las aberraciones geométricas.

En este trabajo se usó como plano de referencia una tabla de acrílico de dimensiones 40 cm x 40 cm x 0,5 cm, con una cuadrícula adherida de 144 cuadros de 3 cm x 3 cm cada uno. El plano de referencia con el patrón de calibración se puede observar en la Figura 14.



**Figura 14.** Plano de referencia.

**Fuente:** Autor.

La cámara CCD a calibrar es de la marca UEYE referencia UI2310M, con conexión USB 2.0, monocromática y resolución VGA de 640 píxeles x 480 píxeles; la lente es EDMUND OPTICS de 8.5mm/F1.3.

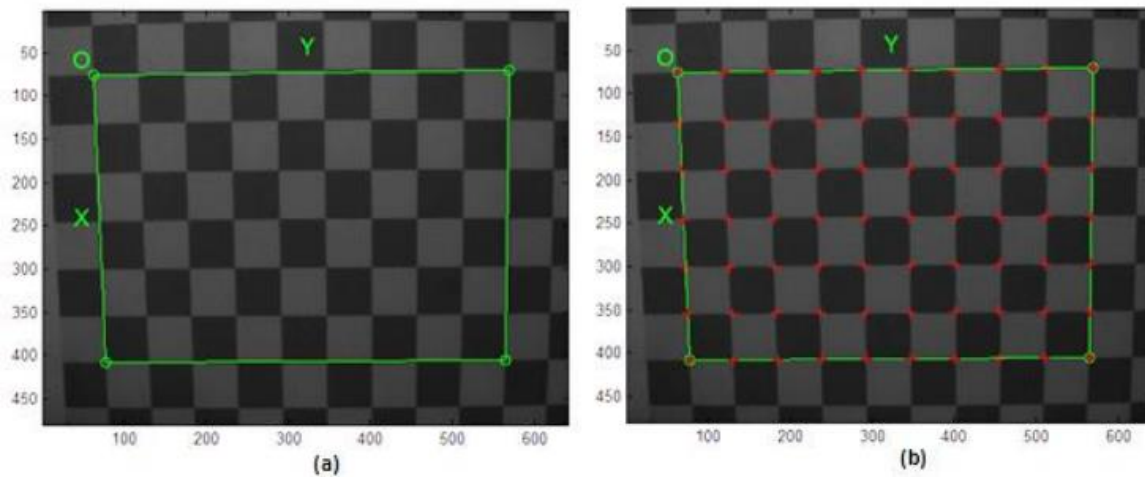
El proceso de calibración inicia con la adquisición de más de dos imágenes del plano ajedrezado, para este experimento se decidió tomar 6 imágenes a modo de ejemplo, cada una en una posición diferente y arbitraria dentro de la profundidad del campo de observación de la cámara. Luego, las imágenes son cargadas en la CCT, Figura 15.

El siguiente paso consiste en calcular las coordenadas  $(x_i, y_i)$ , en unidades métricas, del mayor número posible de puntos  $x_i$  sobre las imágenes. Para tal fin, mediante técnicas de procesamiento de imágenes, la CCT identifica las esquinas de los cuadrados presentes en una sub-área seleccionada por el usuario, donde también se define el sistema coordenado del *plano imagen*, con origen en la esquina superior izquierda, Figura 16.



**Figura 15.** Imágenes de Calibración.

**Fuente:** Autor.



**Figura 16.** Procesamiento de la Imagen 1 mediante la CCT. (a) Sub-área seleccionada por el usuario, (b) Esquinas calculadas automáticamente.

**Fuente:** Autor.

Las esquinas encontradas corresponden a los puntos  $x$  en la imagen, y a los puntos  $X$  en el plano de calibración. Las coordenadas  $(X_i, Y_i)$  de los puntos  $X_i$ , en el plano de calibración, se pueden deducir fácilmente en coordenadas métricas gracias a que las dimensiones de los cuadros son conocidas y teniendo en cuenta que para el plano de calibración respecto al sistema coordenado del mundo.

Las esquinas de las imágenes son calculadas con una precisión de 0,1 píxel aproximadamente, usando técnicas de procesamiento digital de imágenes especializadas en detección de bordes (Bouguet, 2010). Este procedimiento se realiza para las 6 imágenes restantes, con el fin de recuperar la información necesaria de cada una de ellas. Con estos datos se ejecuta el algoritmo de calibración calculando inicialmente la matriz de Homografía  $H$ , ecuación (56), para cada imagen. En las siguientes ecuaciones, (79) a (84), se muestran los resultados obtenidos para la matriz de las 6 imágenes procesadas.

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.0626 & 4.6689 & 65.8027 \\ 4.4849 & 0.0326 & 137.5833 \\ -0.0002 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0238 & 4.2916 & 76.1415 \\ 4.4084 & -0.2277 & 129.7401 \\ -0.0001 & -0.0003 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0.1525 & 4.5343 & 72.6440 \\ 4.1884 & -0.0109 & 148.1729 \\ -0.0004 & -0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0.0030 & 4.7550 & 43.9132 \\ 4.1883 & 0.1197 & 98.1518 \\ -0.0005 & -0.0005 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} -0.2653 & 4.1156 & 111.2556 \\ 3.8234 & -0.2360 & 99.5025 \\ -0.0006 & -0.0002 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$H_6 = \begin{bmatrix} 0.2131 & 4.9747 & 70.7979 \\ 4.8089 & -0.0253 & 121.3649 \\ 0.0000 & 0.0004 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Una vez conocidos los valores  $h_{ij}$  de cada imagen, se crea la matriz  $V$  y se calculan los elementos del vector  $b$ , ecuación (71), para luego llegar a la matriz de calibración  $K$ , ecuación (36). Los parámetros intrínsecos de la cámara calculados con la CCT, se muestran en la ecuación (85).

$$K = \begin{bmatrix} 1805,4 & 0 & 520,98 \\ 0 & 1788,2 & 398,50 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Finalmente, con los valores de la matriz  $K$ , se procede a hallar los parámetros extrínsecos, que corresponden a la matriz compuesta por la matriz de rotación  $R_i$  y el vector de traslación  $t_i$  de cada una de las imágenes, ecuaciones (86) a (91).

$$R_1 [I | t_1] = \begin{bmatrix} 0.0132 & 0.9997 & 0.0184 & -98.0133 \\ 0.9956 & -0.0114 & -0.0927 & -56.7235 \\ -0.0925 & 0.0195 & -0.9955 & 388.7490 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$R_2[I|t_2] = \begin{bmatrix} 0.0173 & 0.9914 & -0.1293 & -98.9224 \\ 0.9990 & -0.0225 & -0.0389 & -60.3412 \\ -0.0415 & -0.1285 & -0.9908 & 401.4739 \end{bmatrix} \quad (87)$$

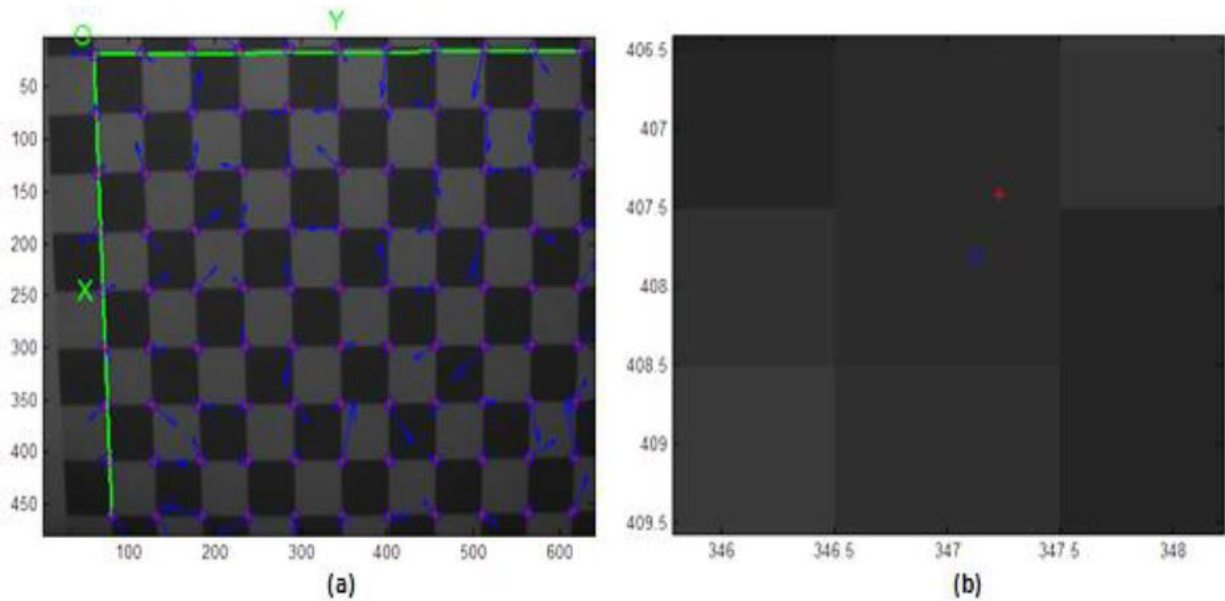
$$R_3[I|t_3] = \begin{bmatrix} 0.0185 & 0.9991 & 0.0374 & -99.9366 \\ 0.9831 & -0.0114 & -0.1825 & -56.3360 \\ -0.1820 & 0.0401 & -0.9825 & 402.4260 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$R_4[I|t_4] = \begin{bmatrix} 0.0652 & 0.9790 & 0.1933 & -104.1015 \\ 0.9725 & -0.0189 & -0.2321 & -66.1696 \\ -0.2235 & 0.2031 & -0.9533 & 393.9514 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$R_5[I|t_5] = \begin{bmatrix} 0.0117 & 0.9953 & -0.0964 & -96.4931 \\ 0.9663 & -0.0360 & -0.2547 & -71.0931 \\ -0.2570 & -0.0902 & -0.9622 & 425.1764 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$R_6[I|t_6] = \begin{bmatrix} 0.0341 & 0.9877 & 0.1525 & -93.3340 \\ 0.9988 & -0.0390 & 0.0293 & -58.0096 \\ 0.0349 & 0.1513 & -0.9879 & 374.2974 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Conociendo el valor de los parámetros intrínsecos, matriz  $K$ , y el de los parámetros extrínsecos, matriz  $R_i[I|t_i]$ , se calculan las coordenadas teóricas  $(x_i, y_i)$  en píxeles de los puntos  $x_i$ , usando las coordenadas  $(X_i, Y_i, Z_i)$  en milímetros del respectivo punto  $X_i$  en el patrón de calibración, como se muestra en la ecuación (32). De este modo, la función de error a optimizar está dada por la ecuación (54). En la Figura 17 se muestran, las coordenadas experimentales señaladas con una cruz roja y las coordenadas teóricas señaladas con un círculo azul, calculadas para la imagen 1.



**Figura 17.** (a) Coordenadas teóricas y experimentales calculadas para la imagen 1, (b) Zoom sobre una de las esquinas del patrón de calibración, donde se observan las coordenadas teóricas y las experimentales debidamente identificadas.

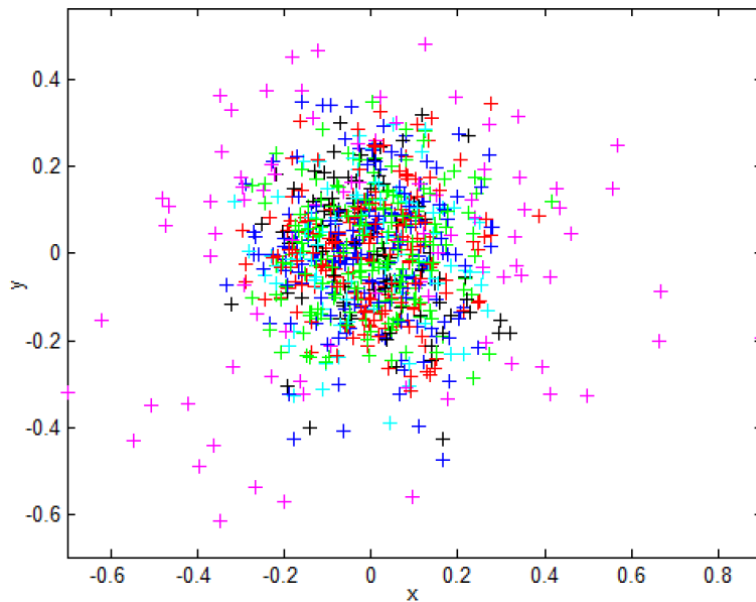
**Fuente:** [12]

La CCT incluye dentro del código principal las rutinas necesarias para minimizar la función de error a partir del método de optimización de Gradiente descendiente, y usando como parámetros de entrada los valores de  $K$  y  $R_i[I|t_i]$  que se muestran en las ecuaciones (86) a (91), obtenidos usando el modelo lineal. En el procedimiento de optimización no lineal se emplean 5 coeficientes que definen las aberraciones geométricas, ecuación (92).

$$K = \{0.063 \quad 0.0668 \quad 0.00021 \quad 0.00027 \quad 0.00000\} \quad (92)$$

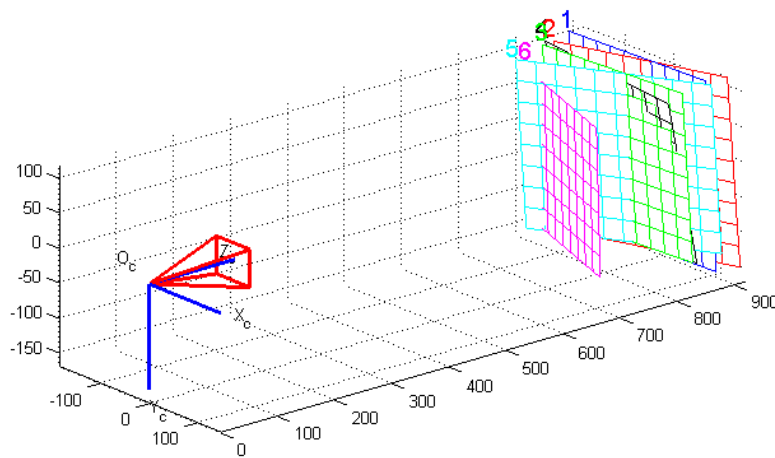
En la Figura 18, se muestra la nube de error final. La posición de cada cruz en la gráfica corresponde a la diferencia entre las coordenadas teóricas y las experimentales, de cada uno de los puntos  $x_i$  de las 6 imágenes.

En la Figura 19, se observa la representación gráfica de los parámetros extrínsecos finales respecto al sistema coordenado de la cámara.



**Figura 18.** Error de re-proyección en píxel.

**Fuente:** Autor.



**Figura 19.** Parámetros extrínsecos.

**Fuente:** Autor.

## CAPITULO 3

### 3. MODELO MATEMÁTICO DEL PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN

En este trabajo un sistema de proyección – adquisición está compuesto por un proyector y una cámara CCD. La técnica de proyección de franjas se basa en proyectar franjas paralelas con un perfil sinusoidal, en escala de grises, que están a la misma distancia entre sí, sobre un objeto que se desea reconstruir. La cámara CCD adquiere la imagen de las franjas deformadas por la topografía del objeto; esta deformación altera directamente la fase del perfil original. La calibración de la unidad de proyección adquisición consiste en determinar los parámetros necesarios para convertir la fase de la imagen del sistema de franjas deformadas, en coordenadas  $(X, Y, Z)$  métricas de la superficie del objeto. Estos parámetros deben ser función de los parámetros intrínsecos y extrínsecos del proyector y la cámara CCD. Para tal fin se propone en este trabajo una estrategia basada en la estimación de la fase de un patrón de puntos codificado, que contiene información cifrada con las coordenadas de los píxeles de la pantalla de cristal líquido (LCD) del Video Proyector.

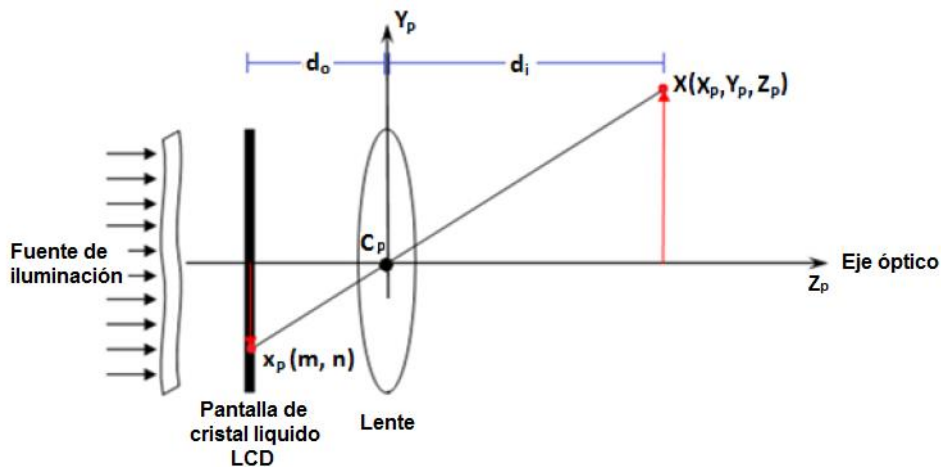
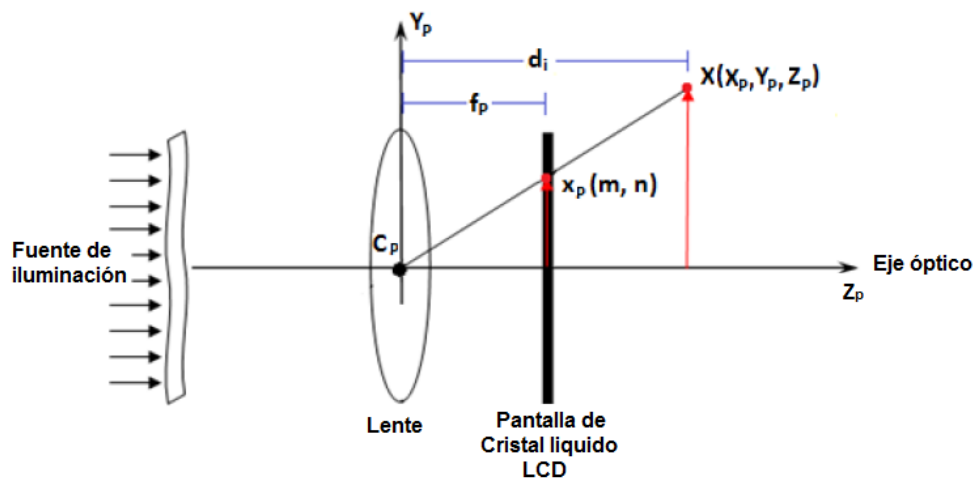


Figura 20. Esquema de un proyector.

Fuente: [12]

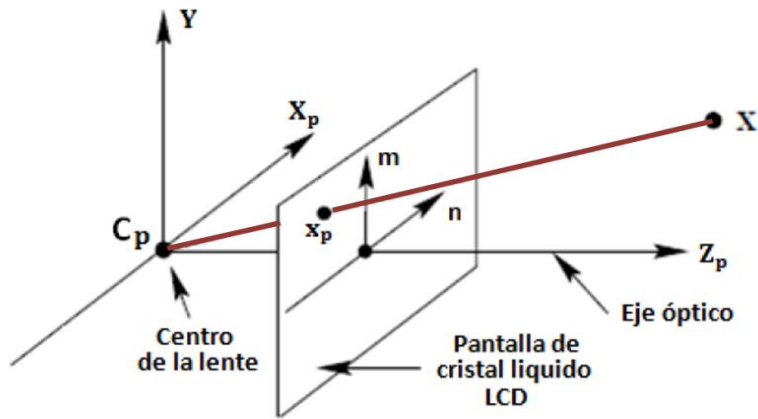
En la Figura 20 se observa cómo un punto  $x_p$  con coordenadas  $(m,n)$  en la pantalla de cristal líquido del Video Proyector, a una distancia objeto  $d_o$  respecto al centro de la lente ( $C_p$ ), es proyectado a un punto  $X$  en el espacio con coordenadas  $(X_p, Y_p, Z_p)$ , a una distancia imagen  $d_i$  respecto a  $C_p$ . El rayo de luz, representado por la línea recta que une los puntos, atraviesa el centro de la lente; y la coordenada  $n$  del punto  $x_p$ , que ha sido invertida previamente mediante un procedimiento electrónico propio del Video Proyector, vuelve a su posición original para que la imagen proyectada se conserve fiel a la imagen real. Para excluir el procedimiento de inversión del modelo del Video Proyector, se supone que la LCD está ubicada delante de la lente a una distancia  $d_o \approx f_p$  respecto a  $C_p$ , Figura 21.



**Figura 21.** Variación del esquema del Video Proyector.

**Fuente:** [12]

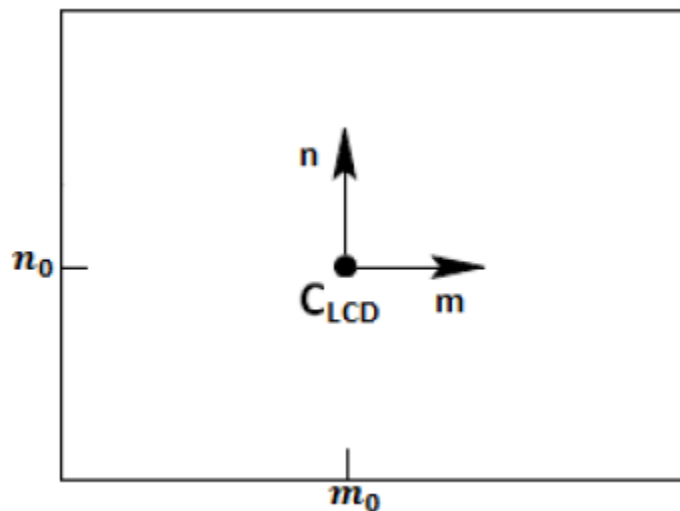
Al comparar la Figura 21 con la geometría de la cámara propuesta en el modelo Pinhole, Figura 6, la única diferencia es la dirección de la luz, por lo que este modelo se conoce como el modelo de cámara inversa [19]. En la Figura 22 se muestra la geometría del proyector según este modelo.



**Figura 22.** Geometría Pinhole del Proyector.

**Fuente:** Autor.

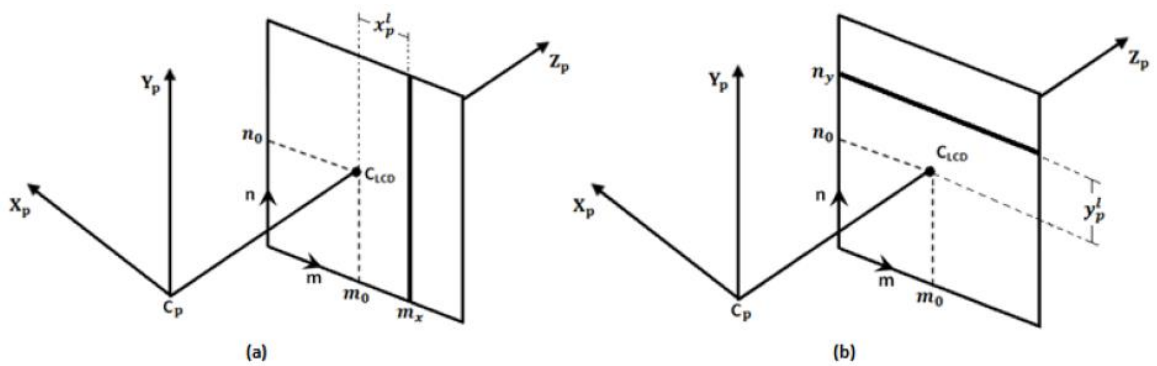
Las ecuaciones del modelo del Video Proyector se deducen a partir del modelo Pinhole. Sobre la pantalla de cristal líquido (LCD) del Video Proyector se define un sistema coordenado con origen en el centro ( $C_{LCD}$ ), Figura 23. Las coordenadas de  $C_{LCD}$  son  $(m_0, n_0)$ .



**Figura 23.** Sistema coordenado en la LCD

**Fuente:** [12]

Considerando una fila  $n_y$  y una columna  $m_x$  sobre la LCD del video proyector, en las posiciones  $y_p^l$  y  $x_p^l$  respectivamente, como se muestra en la Figura 24, un punto en la LCD se puede definir como la intersección de estas dos líneas con coordenadas en píxeles  $(m_x, n_y)$ ; o bien se puede definir por el vector posición  $\vec{r}$  con coordenadas métricas  $(x_p^l, y_p^l, Z_p)$ , donde  $Z_p \approx f_p$ , Figura 25. Las ecuaciones (93) y (94) definen la relación entre  $y_p^l, x_p^l, m_x$  y  $n_y$ .



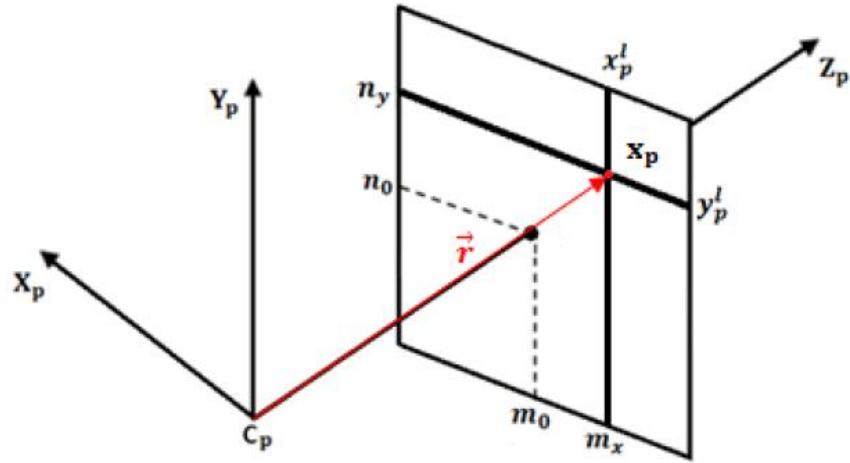
**Figura 24.** Línea sobre la LCD del video proyector (a)  $m_x$  en  $x_p^l$ , (b)  $n_y$  en  $y_p^l$

Fuente: [12].

$$x_p^l = D_{x_p} (m_x - m_0) \quad (93)$$

$$y_p^l = D_{y_p} (n_y - n_0) \quad (94)$$

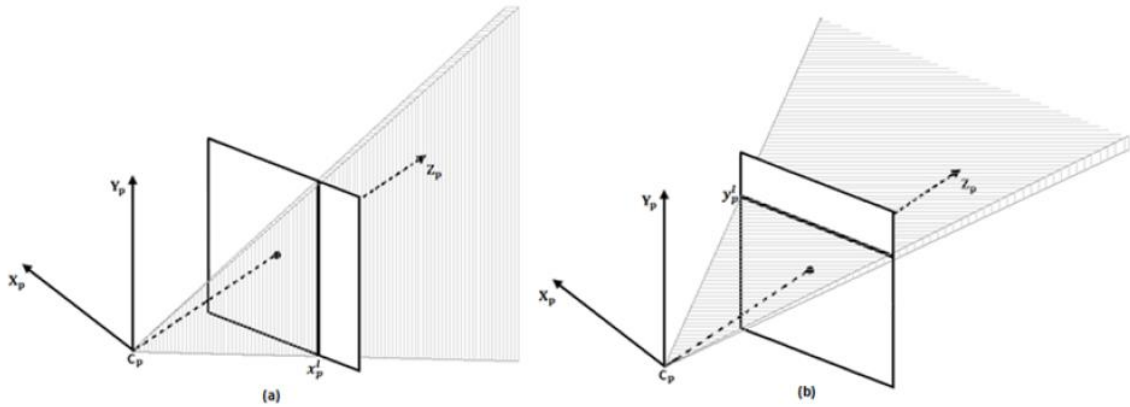
Donde los términos  $D_{x_p}$  y  $D_{y_p}$  corresponden a los factores de conversión de milímetros a píxeles en los ejes horizontal y vertical.



**Figura 25.** Representación gráfica del vector  $\vec{r}$ .

**Fuente:** [12].

La luz emitida por el Video Proyector para formar las líneas  $m_x$  y  $n_y$  se propaga en el espacio como dos planos, Figura 26 y el punto en  $\vec{r} = (X_p, Y_p, Z_p)$  se puede descomponer como la intersección de dos planos que pasan por la columna  $m_x$  y la fila  $n_y$ .



**Figura 26.** Proyección del plano (a) vertical, (b) Horizontal.

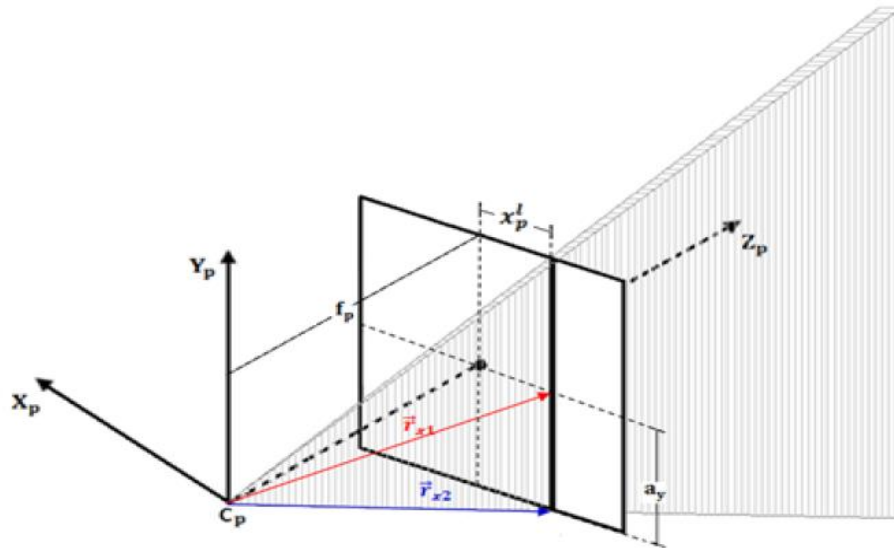
**Fuente:** [12]

En la búsqueda de la ecuación del plano vertical que pasa por la columna  $m_x$ , se definen los vectores coplanares  $\vec{r}_{x1}$  y  $\vec{r}_{x2}$ , ecuaciones (95) y (96).

$$\vec{r}_{x1} = (x_p^l, 0, f_p) \quad (95)$$

$$\vec{r}_{x2} = (x_p^l, a_y, f_p) \quad (96)$$

En donde  $x_p^l$  es la posición horizontal de la línea, dada por la ecuación (92),  $a_y$  corresponde a la mitad del total de píxeles verticales en la LCD expresada en milímetros y  $f_p$  es la distancia focal en milímetros del Video Proyector. En la Figura 27 se observan gráficamente los vectores  $\vec{r}_{x1}$ ,  $\vec{r}_{x2}$  y sus componentes.



**Figura 27.** Vectores coplanares en el plano vertical que pasa por  $m_x$ .

**Fuente:** [12]

Con el producto cruz entre  $\vec{r}_{x1}$  y  $\vec{r}_{x2}$  se calcula el vector  $\vec{N}$  normal al plano, que posteriormente sirve para calcular la ecuación del plano vertical que pasa por  $m_x$ ,

al resolver el producto punto entre el vector normal  $\vec{N}$  y el vector posición  $\vec{r} = (X_p, Y_p, Z_p)$ . La ecuación (97) muestra la ecuación del plano.

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = \vec{r}_{x1} \times \vec{r}_{x2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X_p^l & 0 & f_p \\ X_p^l & a_y & f_p \end{vmatrix} = -(a_y f_p) \hat{i} + (X_p^l a_y) \hat{k}$$

$$(X_p \hat{i}, Y_p \hat{j}, Z_p \hat{k}) \cdot (-a_y f_p \hat{i} + X_p^l a_y \hat{k}) = 0$$

$$x_p^l Z_p - X_p f_p = 0$$

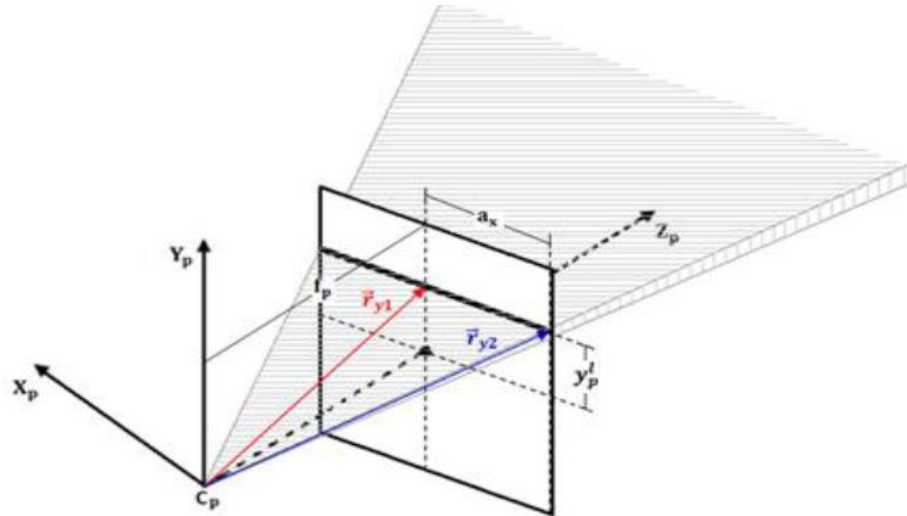
**(97)**

De igual forma los vectores  $\vec{r}_{y1}$  y  $\vec{r}_{y2}$  coplanares, pertenecen al plano horizontal que pasa por la fila  $n_y$ , ecuaciones (98) y (99)

$$\vec{r}_{y1} = (0, y_p^l, f_p) \quad \text{(98)}$$

$$\vec{r}_{y2} = (a_x, y_p^l, f_p) \quad \text{(99)}$$

En donde  $y_p^l$  es la posición vertical de la línea, dada por la ecuación (98),  $a_x$  corresponde a la mitad del total de píxeles horizontales en la LCD expresada en milímetros y  $f_p$  es la distancia focal en milímetros del Video Proyector. En la Figura 28 se observan gráficamente los vectores  $\vec{r}_{y1}$ ,  $\vec{r}_{y2}$  y sus componentes.



**Figura 28.** Vectores coplanares en el plano horizontal que pasa por  $n_y$ .

**Fuente:** [12]

De la misma manera se recupera la ecuación del plano isofase horizontal que pasa por la fila  $n_y$ , ecuación (100).

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = 0$$

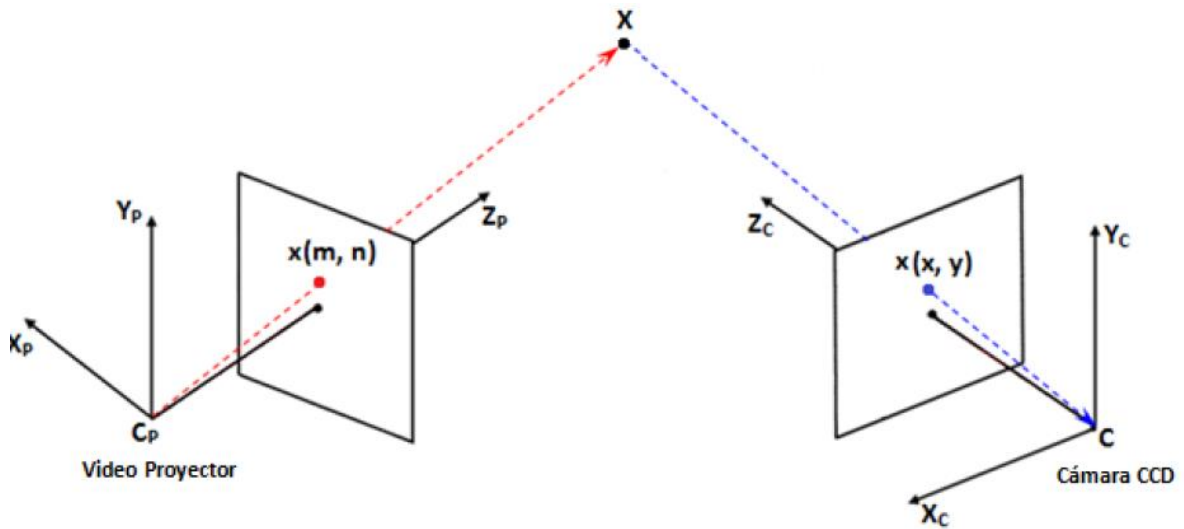
$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & Y_p' & f_p \\ a_x & Y_p' & f_p \end{vmatrix} = (a_x f_p) \hat{j} - (Y_p' a_x) \hat{k}$$

$$(X_p \hat{i}, Y_p \hat{j}, Z_p \hat{k}) \cdot (a_x f_p \hat{j} - Y_p' a_x \hat{k}) = 0$$

$$Y_p f_p - Y_p' Z_p = 0$$

**(100)**

Las ecuaciones (97) y (100) definen los planos que pasan por un punto en la LCD en coordenadas del Video Proyector. La Figura 29 muestra los sistemas coordenados empleados para el sistema de proyección – adquisición.



**Figura 29.** Sistema coordenado para la unidad de proyección - adquisición.

**Fuente:** [12]

La transformación entre el sistema coordenado del proyector  $(X_p, Y_p, Z_p)$  y el sistema coordenado de la cámara  $(X_c, Y_c, Z_c)$ , está dada por la ecuación (101).

$$X_p = R_c X_c + t_c \tag{101}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix}, r_c = \begin{bmatrix} r_{c11} & r_{c12} & r_{c13} \\ r_{c21} & r_{c22} & r_{c23} \\ r_{c31} & r_{c32} & r_{c33} \end{bmatrix}, X_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix}, t_c = \begin{bmatrix} t_{c1} \\ t_{c2} \\ t_{c3} \end{bmatrix}$$

De donde se deduce el siguiente sistema de ecuaciones (ecuaciones (102)-(104)).

$$X_p = r_{c_{11}} X_c + r_{c_{12}} Y_c + r_{c_{13}} Z_c + t_{c_1} \quad (102)$$

$$Y_p = r_{c_{21}} X_c + r_{c_{22}} Y_c + r_{c_{23}} Z_c + t_{c_2} \quad (103)$$

$$Z_p = r_{c_{31}} X_c + r_{c_{32}} Y_c + r_{c_{33}} Z_c + t_{c_3} \quad (104)$$

Al reemplazar en las ecuaciones (97) y (100), se tiene que las ecuaciones de los planos con coordenadas en milímetros están ahora dadas por las ecuaciones (105) y (106), en función del sistema coordinado de la cámara.

$$f_p(r_{c_{11}} X_c + r_{c_{12}} Y_c + r_{c_{13}} Z_c + t_{c_1}) - X_p^l(r_{c_{31}} X_c + r_{c_{32}} Y_c + r_{c_{33}} Z_c + t_{c_3}) = 0 \quad (105)$$

$$f_p(r_{c_{11}} X_c + r_{c_{12}} Y_c + r_{c_{13}} Z_c + t_{c_1}) - D_{X_p}(m_x - m_0)(r_{c_{31}} X_c + r_{c_{32}} Y_c + r_{c_{33}} Z_c + t_{c_3}) = 0$$

$$f_p(r_{c_{21}} X_c + r_{c_{22}} Y_c + r_{c_{23}} Z_c + t_{c_2}) - Y_p^l(r_{c_{31}} X_c + r_{c_{32}} Y_c + r_{c_{33}} Z_c + t_{c_3}) = 0$$

$$f_p(r_{c_{21}} X_c + r_{c_{22}} Y_c + r_{c_{23}} Z_c + t_{c_2}) - D_{Y_p}(n_y - n_0)(r_{c_{31}} X_c + r_{c_{32}} Y_c + r_{c_{33}} Z_c + t_{c_3}) = 0 \quad (106)$$

Resolviendo las ecuaciones (105) y (106), se obtienen las ecuaciones (107) y (108)

$$(f_p r_{c_{11}} + D_{X_p} m_0 r_{c_{31}}) X_c + (f_p r_{c_{12}} + D_{X_p} m_0 r_{c_{32}}) Y_c + (f_p r_{c_{13}} + D_{X_p} m_0 r_{c_{33}}) Z_c + (f_p t_{c_1} + D_{X_p} m_0 t_{c_3}) - D_{X_p} m_x r_{c_{31}} X_c - D_{X_p} m_x r_{c_{32}} Y_c - D_{X_p} m_x r_{c_{33}} Z_c - D_{X_p} m_x t_{c_3} = 0 \quad (107)$$

$$\begin{aligned}
& (f_p r_{c_{21}} + D_{y_p} n_0 r_{c_{31}})X_c + (f_p r_{c_{22}} + D_{y_p} n_0 r_{c_{32}})Y_c + (f_p r_{c_{23}} + D_{y_p} n_0 r_{c_{33}})Z_c + \\
& (f_p t_{c_2} + D_{y_p} n_0 t_{c_3}) - D_{y_p} n_y r_{c_{31}} X_c - D_{y_p} n_y r_{c_{32}} Y_c - D_{y_p} n_y r_{c_{33}} Z_c - D_{y_p} n_y t_{c_3} = 0
\end{aligned} \tag{108}$$

Dividiendo por los factores  $D_{x_p}$  y  $D_{y_p}$  respectivamente en (107) y (108) se obtienen las ecuaciones (109) y (110).

$$\begin{aligned}
w_{11}X_c + w_{12}Y_c + w_{13}Z_c + w_{14} - w_{31}m_x X_c - w_{32}m_x Y_c - w_{33}m_x Z_c - w_{34}m_x &= 0 \\
w_{11}X_c + w_{12}Y_c + w_{13}Z_c + w_{14} &= w_{31}m_x X_c + w_{32}m_x Y_c + w_{33}m_x Z_c + w_{34}m_x \\
w_{11}X_c + w_{12}Y_c + w_{13}Z_c + w_{14} &= m_x (w_{31}X_c + w_{32}Y_c + w_{33}Z_c + w_{34}) \\
w_{11}X_c + w_{12}Y_c + w_{13}Z_c + w_{14} &= \alpha m_x
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
w_{21}X_c + w_{22}Y_c + w_{23}Z_c + w_{24} - w_{31}n_y X_c - w_{32}n_y Y_c - w_{33}n_y Z_c - w_{34}n_y &= 0 \\
w_{21}X_c + w_{22}Y_c + w_{23}Z_c + w_{24} &= w_{31}n_y X_c + w_{32}n_y Y_c + w_{33}n_y Z_c + w_{34}n_y \\
w_{21}X_c + w_{22}Y_c + w_{23}Z_c + w_{24} &= n_y (w_{31}X_c + w_{32}Y_c + w_{33}Z_c + w_{34}) \\
w_{21}X_c + w_{22}Y_c + w_{23}Z_c + w_{24} &= \alpha n_y
\end{aligned} \tag{110}$$

Los factores  $w_{ij}$ , que contienen los parámetros intrínsecos del Video Proyector, están definidos por las ecuaciones (111) - (114); y el factor  $\alpha$  por la ecuación (123).

$$w_{11} = \frac{f_p r_{c_{11}}}{D_{X_p}} + m_0 r_{c_{31}} \tag{111}$$

$$w_{12} = \frac{f_p r_{c_{12}}}{D_{X_p}} + m_0 r_{c_{32}} \tag{112}$$

$$w_{13} = \frac{f_p r_{c_{13}}}{D_{X_p}} + m_0 r_{c_{33}} \tag{113}$$

$$w_{14} = \frac{f_p t_{c_1}}{D_{X_p}} + m_0 t_{c_3} \tag{114}$$

$$w_{21} = \frac{f_p r_{c21}}{D_{Y_p}} + n_0 r_{c31} \quad (115)$$

$$w_{22} = \frac{f_p r_{c22}}{D_{Y_p}} + n_0 r_{c32} \quad (116)$$

$$w_{23} = \frac{f_p r_{c23}}{D_{Y_p}} + n_0 r_{c33} \quad (117)$$

$$w_{24} = \frac{f_p t_{c2}}{D_{Y_p}} + n_0 t_{c3} \quad (118)$$

$$w_{31} = r_{c31} \quad (119)$$

$$w_{32} = r_{c32} \quad (120)$$

$$w_{33} = r_{c33} \quad (121)$$

$$w_{34} = t_{c3} \quad (122)$$

$$\alpha = w_{31} X_c + w_{32} Y_c + w_{33} Z_c + w_{34} \quad (123)$$

En coordenadas homogéneas, las ecuaciones (109), (110) y (123) se pueden expresar como se muestra en la ecuación (124).

$$\begin{bmatrix} \alpha m_x \\ \alpha n_y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{bmatrix} \quad (125)$$

A partir de los valores de  $(X_c, Y_c, Z_c)$  junto con los valores de  $(m_x, n_y)$ , se calculan todos los términos  $w_{ij}$  resolviendo el sistema lineal formado por las ecuaciones (109) y (110).

La ecuación (124) indica que para un píxel de la pantalla de cristal líquido del proyector  $(m_x, n_y)$ , se puede determinar las ecuaciones de los planos horizontal y vertical, expresados en el sistema coordenado de la cámara.

## CAPITULO 4

### 4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

En el capítulo anterior se planteó la estructura matemática asociada a la calibración del sistema de proyección de franjas usando un modelo fotogramétrico. El objetivo del procedimiento experimental de calibración consiste en determinar la matriz  $w$  de la ecuación (124). La ecuación asocia las coordenadas de un punto de la pantalla de cristal líquido y sus planos propagándose en el espacio y expresados en el sistema coordenado de la cámara.

En este capítulo se mostrará cómo se pueden determinar las coordenadas  $(m_x, n_y)$  del video proyector en una imagen obtenida por la cámara sobre un plano con un patrón de referencia. De igual forma se mostrarán los resultados experimentales para el montaje implementado.

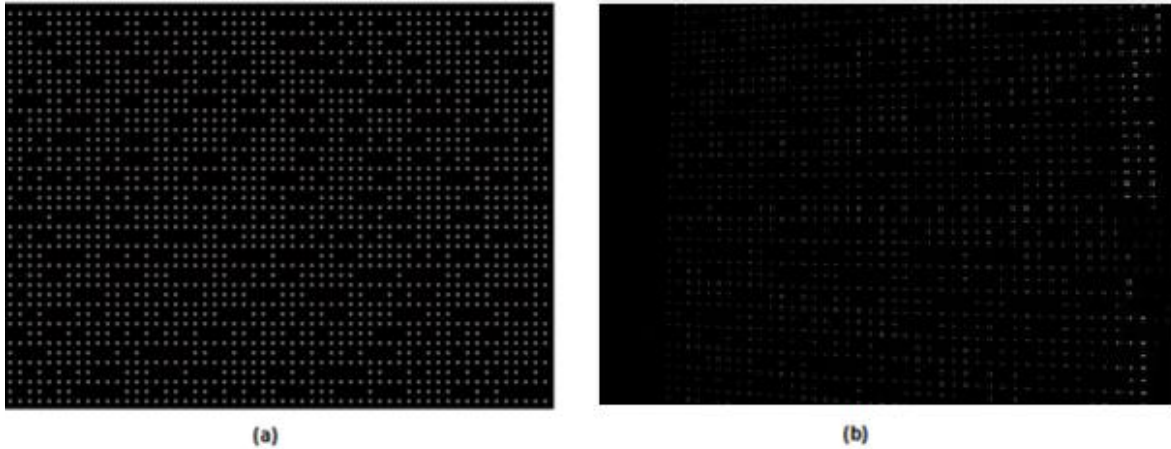
#### 4.1 PATRÓN PSEUDOALEATORIO

Ubicando el patrón de calibración en el campo de observación de la cámara y conociendo las coordenadas en píxeles de un punto de control, se pueden calcular las coordenadas en unidades métricas del mismo punto de control en el sistema coordenado de la cámara, siempre que la cámara esté calibrada, es decir, que se conozcan los parámetros intrínsecos y los parámetros extrínsecos para la posición dada del patrón de calibración. Por otro lado, la ecuación (124) define una relación lineal entre las coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$ , de cualquier punto sobre los planos Horizontal y Vertical, y las coordenadas  $(m_x, n_y)$  de cualquier punto en la LCD del Video Proyector por donde pasen dichos planos; los factores de esta relación lineal son los valores de  $w_{ij}$ . Para calcular  $w_{ij}$ , que es el objetivo de calibrar un sistema de proyección – adquisición, se deben conocer las coordenadas  $(m_x, n_y)$

de varios puntos ubicados sobre la LCD y sus respectivas coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  sobre los planos horizontales y verticales correspondientes.

El modelo de calibración propuesto consiste en calcular los coeficientes  $w_{ij}$  empleando las relaciones lineales que se han descrito, ecuaciones (111)- (123). Si se ubica un plano en cualquier posición arbitraria dentro del campo de observación y se proyecta sobre él algún patrón con coordenadas conocidas  $(m_i, n_i)$ , al adquirir una imagen vista por la cámara para esta posición del plano, mediante procesamiento digital de imágenes es posible calcular las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de los puntos de control definidos en la imagen. Luego, con los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara previamente calibrada, se calculan las coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  de cada punto de control. De esta manera para cada punto de control con  $(m_i, n_i)$ , conocido previamente, y con las coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  calculadas, se reemplazan en las ecuaciones (109) y (110), dando como resultado dos sistemas de ecuaciones lineales con  $w_{ij}$  como incógnitas. Si para cada posición del plano de referencia se utilizan  $N$  puntos de control y se adquieren  $M$  imágenes del plano de referencia desplazado manualmente en el volumen de calibración, se obtendrán  $2 \times N \times M$  ecuaciones lineales, que se pueden resolver usando los métodos clásicos de sistemas lineales.

Para la proyección se ha diseñado un código pseudoaleatorio de puntos blancos equiespaciados, que matemáticamente se pueden expresar como un patrón ortogonal de franjas horizontales y verticales. Cada uno de los puntos en el patrón proyectado tiene sus coordenadas  $(m_i, n_i)$  bien conocidas; y la estrategia propuesta en este trabajo para hallar las coordenadas  $(x_i, y_i)$ , consiste en calcular la fase espacial de la imagen vista por la cámara al proyectar el patrón de puntos sobre un plano de referencia, Figura 30.



**Figura 30.** Patrón de puntos pseudoaleatorio (a) Proyectado por el Video Proyector, (b) Visto por la cámara CCD.

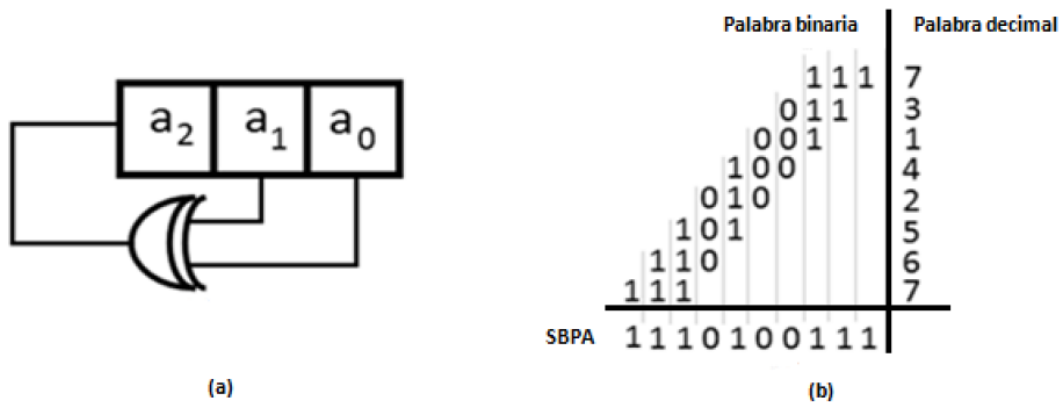
Fuente: **Autor.**

En otros trabajos [13, [15], se ha usado un patrón de puntos pseudoaleatorio para determinar las coordenadas 3D de un objeto en el espacio. Hallando la transformada de Fourier de un patrón de puntos pseudoaleatorio se obtiene un grupo de lóbulos ortogonales que corresponden a dos patrones periódicos ortogonales con sus respectivas distribuciones de fase. La posición central de cada punto se puede calcular con resolución subpíxel, interpolando la distribución de fase [16].

La imagen del patrón de puntos, tiene una distribución espacial de puntos blancos y puntos ausentes (espacios vacíos), estos puntos ausentes hacen que el patrón sea pseudoaleatorio y su distribución espacial codifica la posición 2D  $(m_x, n_y)$  de cada uno de los puntos. Dicha codificación se obtiene usando una secuencia binaria pseudoaleatoria (SBPA) generada por un registro lineal con

retroalimentación (RLR). Un RLR de  $N$  registros, con un Or-Exclusivo (XOR) como función lineal, produce una secuencia periódica máxima de  $2^N - 1$  dígitos de longitud  $N$  [16].

La Figura 31 muestra un RLR de  $N=3$ , la compuerta XOR provee la retroalimentación del registro que desplaza los bits de izquierda a derecha. La secuencia máxima consta de todas las palabras posibles excepto "000". La secuencia máxima posible para este caso está formada por 7 palabras, en binario y decimal, iniciando desde "111"; la SBPA final está formada por 7 bits: "1110100".



**Figura 31.** (a) Retroalimentación de desplazamiento lineal y (b) Secuencia binaria pseudoaleatoria.

**Fuente:** [10]

Debido al registro de desplazamiento lineal, las palabras sucesivas en la SBPA comparten necesariamente  $N - 1$  bits consecutivos con sus vecinos inmediatos. Cada palabra posee una posición única dentro de la secuencia completa, de esta forma, es posible recuperar el valor de la palabra agrupando  $N$  bits consecutivos en la SBPA.

Para esta estrategia, un punto blanco representa un bit de valor "1" y un "0" es representado por un espacio negro o punto ausente. Un punto blanco posee  $N$  vecinos horizontales hacia la derecha, al agruparlos se define una palabra. La posición de la palabra en la SBPA determina la coordenada horizontal ( $m_x$ ) del punto. La coordenada vertical de un punto se obtiene introduciendo desplazamientos horizontales conocidos a la secuencia de puntos de la línea horizontal anterior. De esta manera, identificando el corrimiento introducido a una línea se determina su coordenada vertical ( $n_y$ ). La influencia de puntos ausentes en la distribución de fase se puede reducir ubicando  $L$  líneas horizontales sin puntos ausentes entre dos secuencias de código consecutivas. La Figura 30 muestra un patrón de  $56 \times 46$  puntos con  $L=21$ ,  $N=15$  y 21 líneas horizontales con secuencia de código. La secuencia máxima en la SBPA resultante tiene  $2^{15} - 1 = 32767$  y con un algoritmo de optimización se recuperó la secuencia de 56 bits con el menor número de puntos ausentes "0", dando como resultado la siguiente secuencia:

11001111100011001011001111100001001011001111110100011110

El patrón de puntos se construyó de la siguiente forma: en la primera fila se insertó una línea  $L$  sin código, con todas sus posiciones ocupadas por puntos blancos o "1". En la segunda fila, se insertaron 56 bits de la SBPA con la menor cantidad de puntos ausentes o "0". La tercera fila, al igual que la primera es una línea  $L$  de puntos blancos sin código. La cuarta fila se obtiene al desplazar horizontalmente hacia la derecha, un (1) bit la secuencia codificada de la segunda fila. La quinta fila es una línea  $L$  de puntos sin código. La sexta fila se obtiene al desplazar horizontalmente hacia la derecha, dos (2) bits la cuarta fila. En la séptima fila se vuelve a ubicar una línea  $L$ . Para la octava fila, se desplaza horizontalmente hacia la derecha tres (3) bits la línea de código que se ha insertado en la sexta fila. De esta manera las filas pares poseen corrimientos



El patrón de puntos se puede describir matemáticamente como una distribución regular ortogonal, como se muestra en la ecuación (126)

$$I(x, y) = I_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_{k1} \cos[k\varphi_1(x, y)] + a_{k2} \cos[k\varphi_2(x, y)] \right\} \quad (126)$$

En donde  $I_0$  hace referencia a la intensidad,  $a_k$  a la amplitud del armónico de orden  $k$  y  $\varphi_i$  a la distribución de fase. Si el patrón de puntos es capturado por una cámara con un lente libre de distorsiones y en condiciones telecéntricas entonces la distribución de fase es una función lineal de la posición; sin embargo, debido a la distorsión geométrica y a la perspectiva de proyección, la cámara recupera una distribución de fase no lineal.

## 4.2 DISTRIBUCIÓN DE FASE

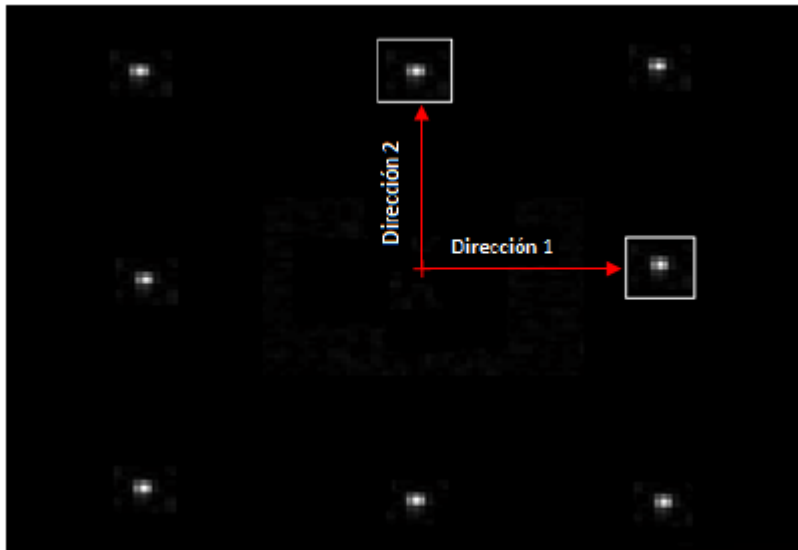
Las distribuciones de fase  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se pueden calcular con el método de la transformada de Fourier (Takeda & Mutoh, 1983), como se muestra en la ecuación (129), y se describe a continuación.

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x) + b(x) \cos[2\pi f_0 x + \varphi(x)] \\ g(x) &= a(x) + b(x) \left[ \frac{e^{i2\pi f_0 x + i\varphi(x)} + e^{i2\pi f_0 x - i\varphi(x)}}{2} \right] \\ g(x) &= a(x) + b(x) \left[ \frac{e^{i2\pi f_0 x} e^{i\varphi(x)} + e^{-i2\pi f_0 x} e^{-i\varphi(x)}}{2} \right] \\ g(x) &= a(x) + \frac{b(x)e^{i\varphi(x)}}{2} e^{i2\pi f_0 x} + \frac{b(x)e^{-i\varphi(x)}}{2} e^{-i2\pi f_0 x} \\ g(x) &= a(x) + c(x)e^{i2\pi f_0 x} + c^*(x)e^{-i2\pi f_0 x} \end{aligned} \quad (127)$$

Donde  $c(x) = \frac{b(x)e^{i\varphi(x)}}{2}$ , y  $c^*$  denota complejo conjugado. Calculando la transformada de Fourier a  $g(x)$ , se obtiene la ecuación (128).

$$G(f) = A(f) + C(f - f_0) + C^*(f - f_0) \quad (128)$$

Los subíndices 1 y 2 de la ecuación (126) representan las dos direcciones ortogonales del patrón de puntos, Figura 33. Como se observa en la ecuación (128) y en la Figura 33, los espectros están separados y por lo tanto es posible filtrar un único espectro.



**Figura 33.** Transformada de Fourier de la imagen del patrón de puntos.

**Fuente:** Autor.

Seleccionando el filtro adecuado para separar el primer armónico en ambas direcciones y procesando la transformada inversa de Fourier de la imagen filtrada, se obtienen dos distribuciones complejas. La fase de dichas distribuciones

complejas corresponde a las fases discontinuas de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

$$c(x) = F^{-1} \{C(f)\}$$

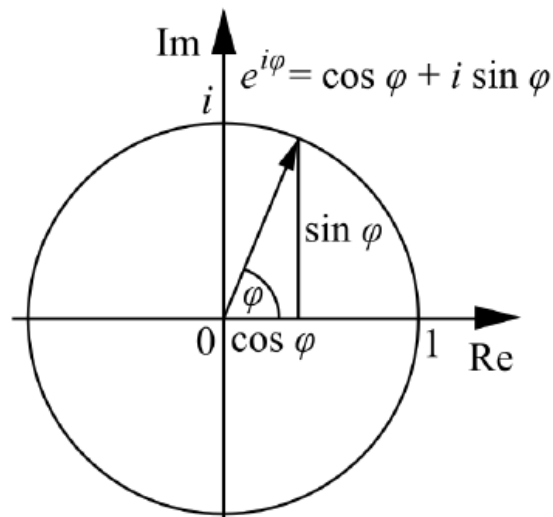
$$c(x) = \frac{b(x)e^{i\varphi(x)}}{2}$$

$$c(x) = \frac{b(x)}{2} \cos[\varphi(x)] + i \frac{b(x)}{2} \sin[\varphi(x)]$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[c(x)]}{\text{Re}[c(x)]}$$

(129)

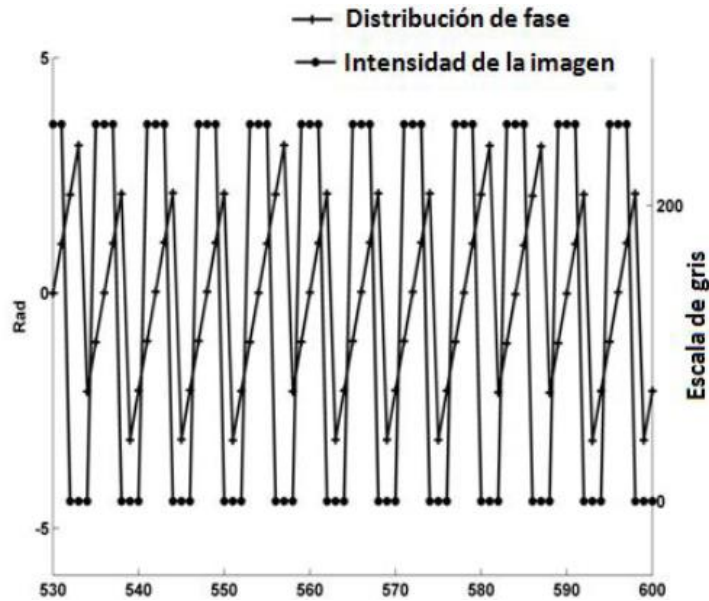
Visualizando el plano complejo, Figura 34, queda evidenciada la necesidad del uso de la función tangente inversa.



**Figura 34.** Plano complejo y Formula de Euler.

**Fuente:** [12].

El uso de la función tangente inversa genera discontinuidades en las fases calculadas de  $\pm 2\pi$ , que son eliminadas adicionando de manera apropiada  $2\pi n$ , siendo  $n$  una función entera en escalón. En la Figura 35 se puede observar un corte de la distribución de fase discontinua  $\varphi_1$ , las discontinuidades  $\pm\pi$  se ubican en mínimos de intensidad y los valores de fase discontinua de cero se localizan en los máximos de intensidad o centro de los puntos blancos.

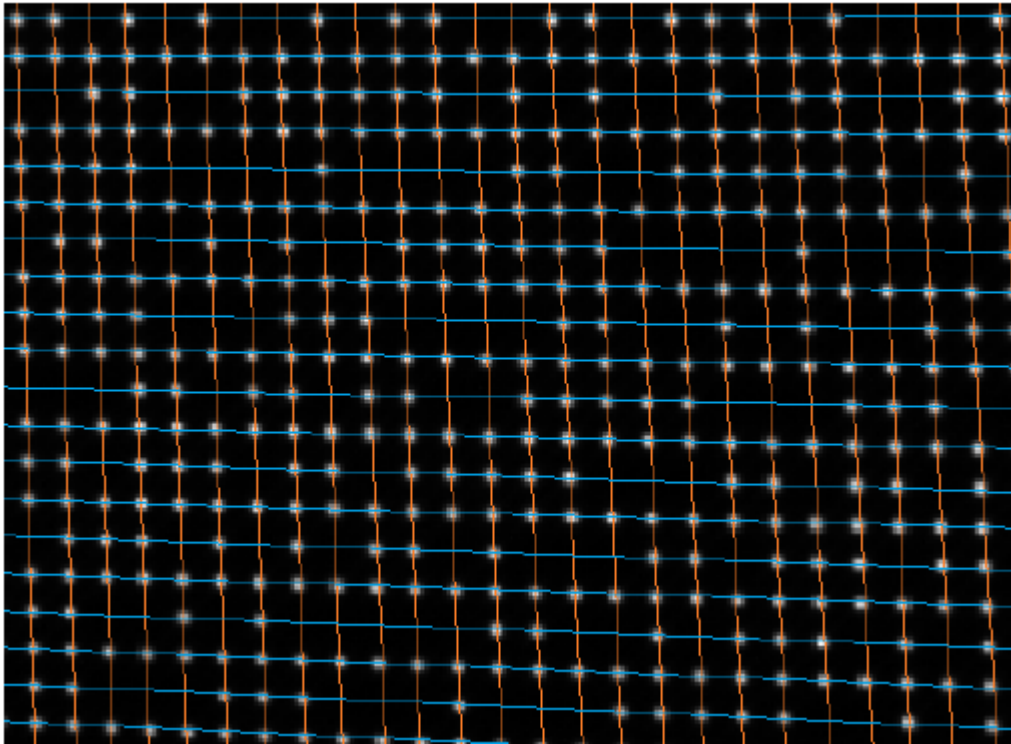


**Figura 35.** Distribución de fase e intensidad de la imagen del patrón de puntos.

**Fuente:** [10]

Los valores de cero de la fase discontinua corresponden a valores enteros de  $2\pi$  en la fase continua. Así, los puntos de intersección de las curvas de nivel de las fases continuas para valores de  $\varphi_1 = 2\pi N_1$  y  $\varphi_2 = 2\pi N_2$  determinan las coordenadas  $m_x$  y  $m_y$  de cada punto de control en el patrón de puntos, definido por los valores enteros  $N_1$  y  $N_2$ . El origen de este sistema coordinado se localiza en la esquina superior izquierda y los puntos se van incrementando ordenadamente para valores de  $N_1$  y  $N_2$  en las direcciones 1 y 2 respectivamente.

En la Figura 36, se muestra una imagen aumentada del patrón de puntos con sus respectivas curvas de nivel ya calculadas. Los trazos de color naranja describen las curvas de nivel en la dirección 1 y los de color celeste, las curvas de nivel en la dirección 2. De esta manera, usando la información regular del patrón de puntos, se calculan las coordenadas de los puntos en la imagen adquirida por la cámara. De igual forma usando la información codificada de las coordenadas de los puntos y a partir del código binario, se establecen las posiciones  $(m_i, n_i)$  de cada punto en el plano *LCD* del proyector.



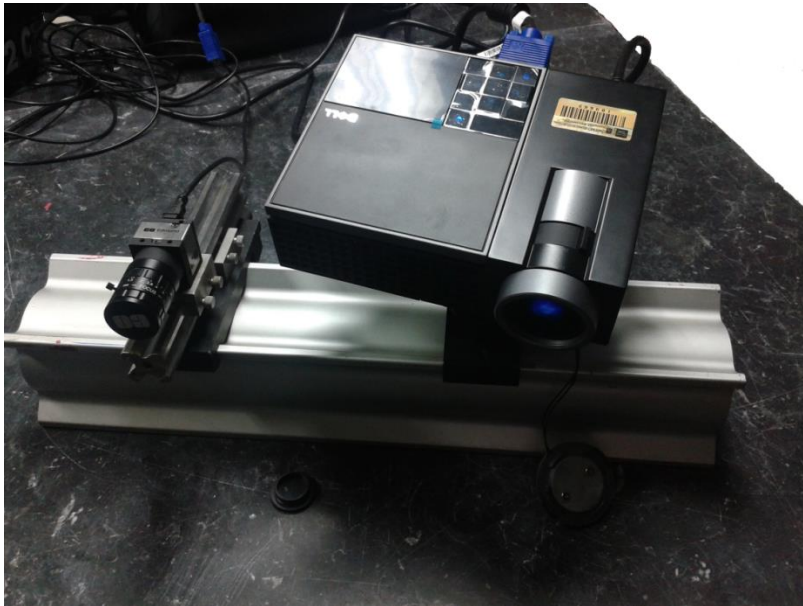
**Figura 36.** Imagen aumentada de las curvas de nivel en las direcciones 1 y 2.

**Fuente:** Autor.

#### **4.3 CALIBRACIÓN EXPERIMENTAL DE UNA UNIDAD DE PROYECCIÓN-ADQUISICIÓN**

Con base en la teoría, se calibró una unidad de proyección-adquisición formada por: una cámara CCD de la marca UEYE referencia UI2310M, con conexión USB

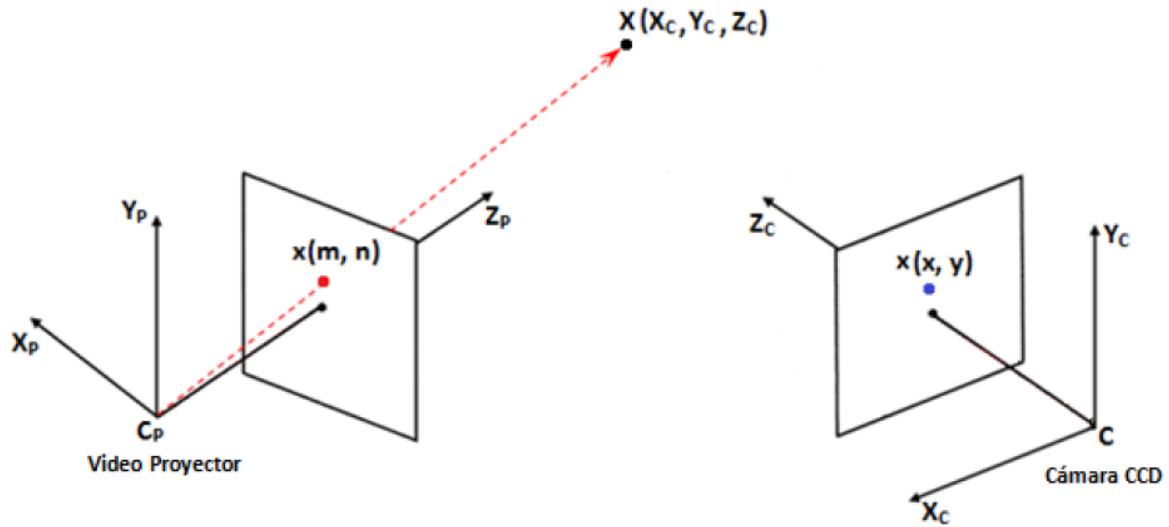
2.0, monocromática y resolución VGA de 640 x 480 píxel, con lente EDMUND OPTICS de 8.5mm/F1.3; y un video proyector DELL referencia M210X, con brillo de 2000 lúmenes ANSI y resolución XVGA de 1024 x 768 píxel, Figura 37. Las imágenes se procesaron con un computador portátil DELL referencia LATITUDE E6500, con procesador Intel Core i7, 16 GB de memoria RAM y tarjeta gráfica NVIDIA NVS 5200M de 1 GB.



**Figura 37.** Montaje experimental de una unidad de proyección – adquisición.

**Fuente:** Autor.

La estrategia de calibración consiste en calcular los coeficientes de la matriz  $W$  (ecuación (125)), que implícitamente comprende una transformación proyectiva entre el sistema coordenado del proyector y el sistema coordenado de la cámara CCD. Para resolver dicho sistema de ecuaciones, es necesario conocer con precisión las coordenadas  $(m, n)$  en la LCD del Video Proyector y sus respectivas coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  de por lo menos cuatro (4) puntos  $X$  proyectados y vistos por la cámara CCD, Figura 38.

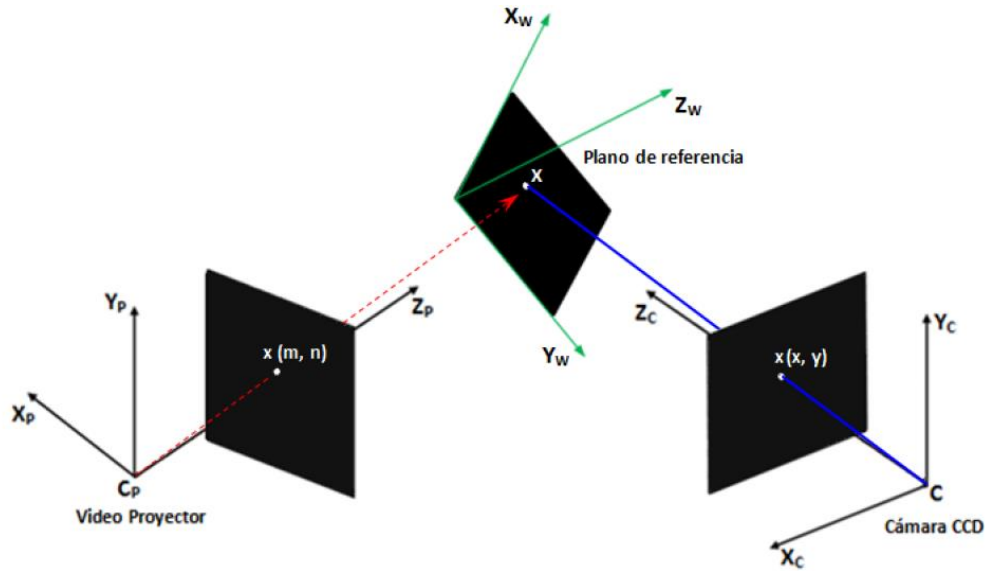


**Figura 38.** Proyección y observación de un punto X.

**Fuente:** [12].

El patrón de puntos se proyecta en un plano de referencia, de dicha proyección, se captura una imagen y mediante el procesamiento digital de imágenes, se recuperan las coordenadas  $(x, y)$  de cada uno de los puntos en el plano imagen (imagen de la proyección del patrón de puntos, capturada con la cámara CCD).

El siguiente paso, consiste en hallar las coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  de los puntos del patrón vistos por la cámara CCD, usando la ecuación (130). Para esto, se requiere conocer las coordenadas  $(X_w, Y_w, Z_w)$  de cada uno de los puntos; para hallar estas coordenadas resulta útil tener en cuenta que los puntos  $X, x$  y  $C$ , son colineales, Figura 39.



**Figura 39.** Plano de referencia intersecado por la línea recta que pasa por los puntos C y x.

**Fuente:** [12].

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (130)$$

De acuerdo con la ecuación (130), para la relación entre los sistemas coordenados del mundo y de la cámara, se deben conocer la matriz de rotación y el vector de traslación (parámetros extrínsecos), para la posición específica en la que está el plano de referencia cuando se toma la imagen de la proyección. Para llevar a cabo este procedimiento, la proyección de los puntos se realiza sobre el mismo patrón de calibración (cuadros ajedrezados a dos colores, Figura 12); y se capturan dos imágenes con el plano en la misma posición. Con la imagen de cuadros se calibra la cámara (cálculo de parámetros intrínsecos y extrínsecos) y con la imagen de puntos se calibra la unidad de proyección-adquisición. Gracias a que se trabaja con un computador de alto rendimiento las dos imágenes se adquieren en un tiempo estimado de 100ms, garantizando que el plano de referencia (patrón de

calibración) conserva la misma posición durante las dos tomas y de este modo ambas imágenes tienen los mismos parámetros extrínsecos.

#### 4.3.1 Color del Patrón de calibración

Usualmente, los cuadros para el patrón de calibración son de color blanco y negro, para tener imágenes bien contrastadas y facilitar la búsqueda de las esquinas. La imagen del patrón de puntos blancos se crea con un fondo negro, lo que ocasiona problemas en la imagen al capturarla con una cámara monocromática, si la proyección se realiza sobre un plano con los mismos colores. Como se muestra en la Figura 40, los cuadros negros absorben gran parte de la luz que crea los puntos, mientras que en los cuadros blancos los puntos brillan en exceso.



**Figura 40.** (a) Patrón de Calibración, (b) Proyección de puntos sobre el patrón de calibración de cuadros blancos y negros.

**Fuente:** Autor.

Este inconveniente complica la etapa de procesamiento de las imágenes porque se pierde la secuencia binaria insertada en las filas. Por tal motivo se necesita una cuadrícula a color para ejecutar la estrategia de calibración. Para elegir los colores apropiados, se capturó una imagen de una plantilla con varias tonalidades de los

colores primarios, y se seleccionaron aquellos con niveles de gris alto y bajo sin llegar a extremos, porque presentan el mismo problema que el blanco y el negro.

Los colores seleccionados fueron: un tono de los verdes  $R:165, G:255, B:0$  para el nivel bajo de gris, y uno de los rojos  $R:255, G:150, B:0$  para el nivel alto de gris, Figura 41.

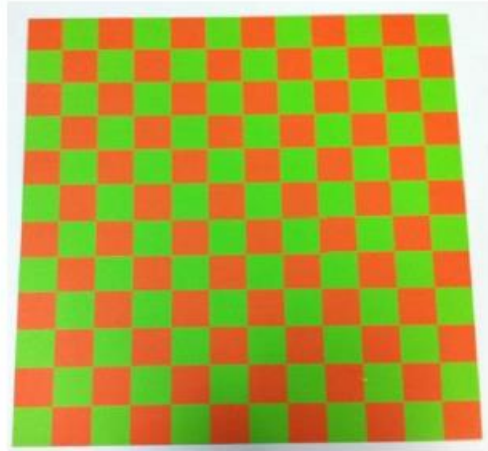


**Figura 41.** Colores para el patrón de Calibración, (a)  $R:165, G:255, B:0$ , (b)  $R:255, G:150, B:0$ .

**Fuente:** Autor.

#### **4.3.2 Descripción del procedimiento experimental.**

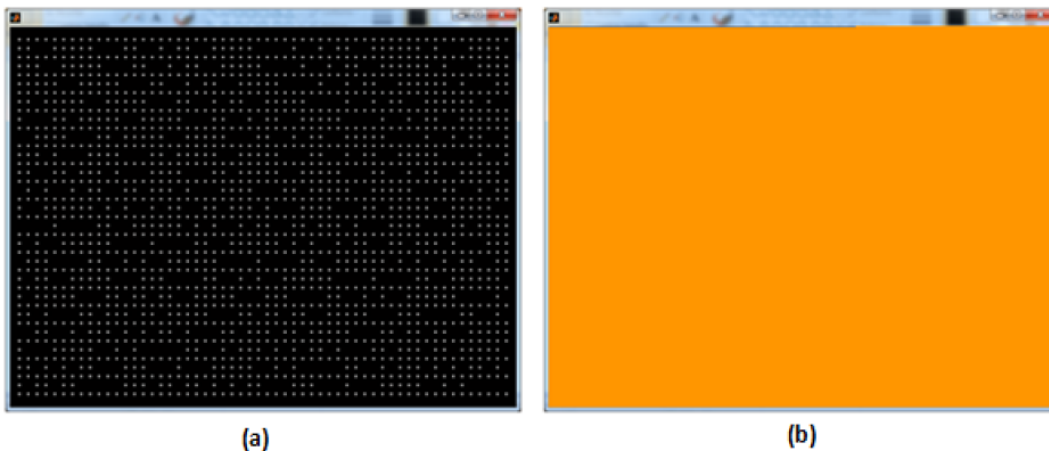
Se adaptaron los colores anteriormente mencionados al patrón de calibración de la cámara CCD (Figura 12), de tal forma que el nuevo patrón es como se ve en la Figura 42.



**Figura 42.** Patrón de Calibración impreso a color.

**Fuente:** Autor.

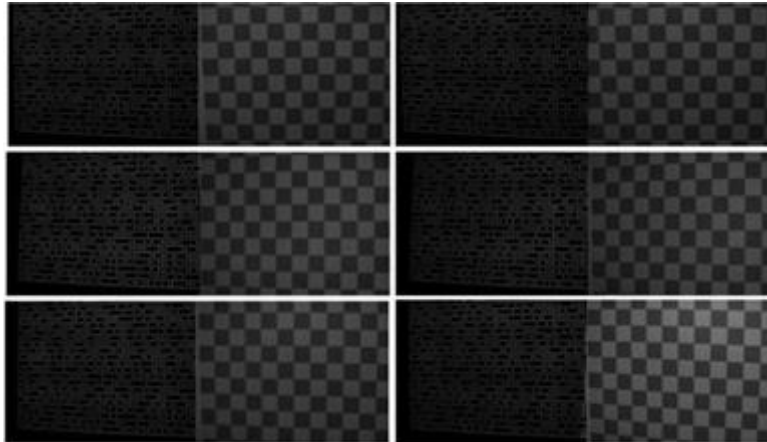
Seguido a esto, la toma de las imágenes de calibración se realiza proyectando el patrón de puntos y luego una plantilla roja con la finalidad de mejorar el contraste entre los cuadros (del patrón de calibración Figura 42.), puesto que los cuadros rojos son vistos por la CCD con un nivel de gris alto y los cuadros verdes con un nivel de gris bajo. En la Figura 43 se muestran las dos imágenes proyectadas.



**Figura 43.** Imágenes proyectadas, (a) Patrón de puntos, (b)  $R: 255, G: 150, B = 0$ .

**Fuente:** Autor.

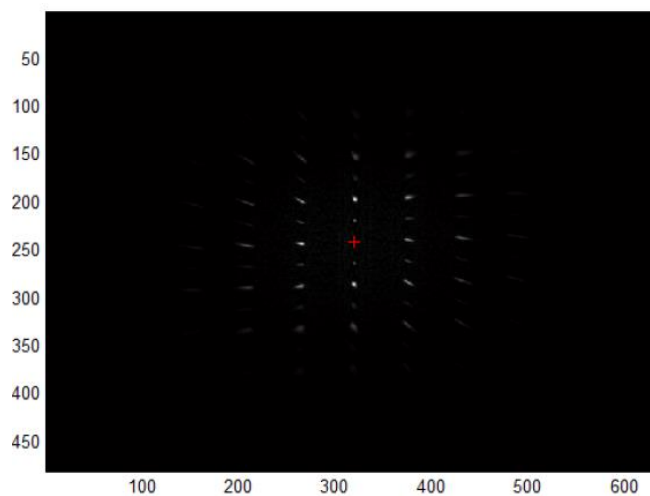
Las imágenes para el procedimiento experimental, son las mismas de la Calibración experimental de una cámara CCD (sección 2.2.2.), Figura 44. Las imágenes fueron adquiridas por orden de filas y de izquierda a derecha, desde la imagen 1 hasta la 9.



**Figura 44.** Imágenes de calibración. Puntos y cuadros.

**Fuente:** Autor.

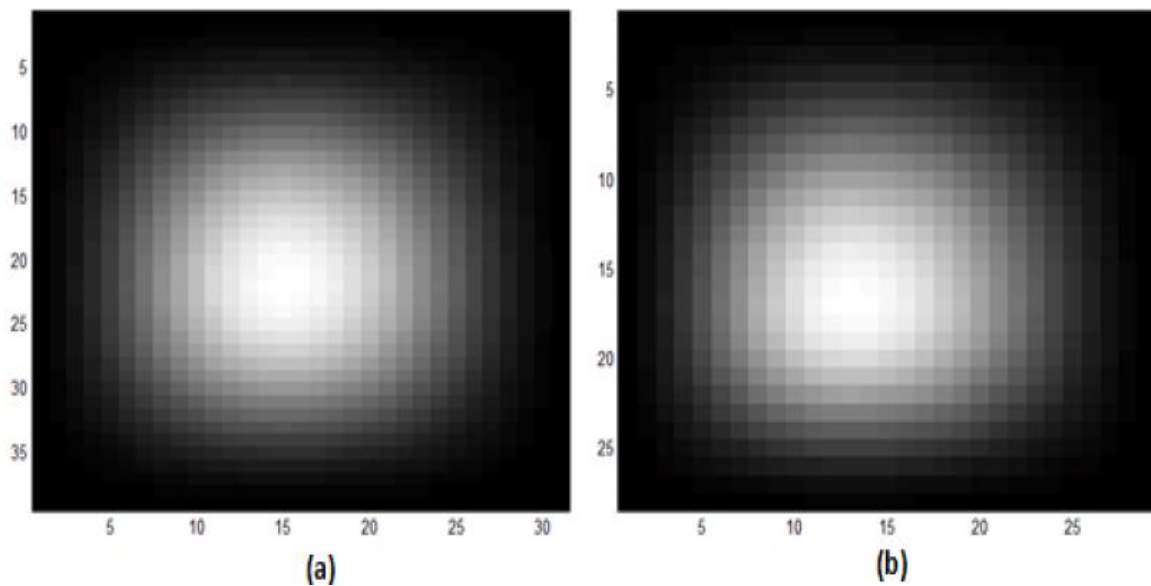
Con las imágenes adquiridas y calculados los parámetros intrínsecos y extrínsecos, se procesan las imágenes de puntos, iniciando con el cálculo de la Transformada de Fourier. En la Figura 45, se muestra la transformada de Fourier de la imagen 1.



**Figura 45.** Transformada de Fourier de la imagen 1.

**Fuente:** Autor.

En la Figura 45, la cruz roja representa el origen del sistema coordinado de la transformada de Fourier y los lóbulos blancos son los armónicos que resultan de la Transformada de Fourier para la imagen 1, que se propagan de manera ortogonal en las direcciones 1 y 2, tal como se explica en la Figura 33. Con el filtro apropiado se aíslan los primeros lóbulos en cada dirección, los cuales corresponden al primer armónico de la Transformada de Fourier y contienen información de la fase en su respectiva dirección, Figura 46.

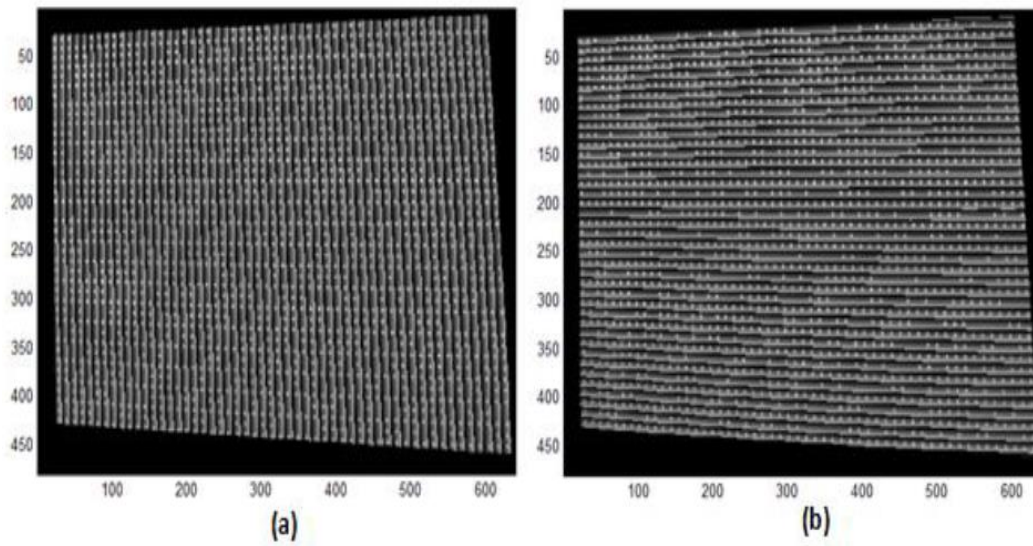


**Figura 46.** Lóbulo del primer armónico en la dirección, (a) 1, (b) 2.

**Fuente:** Autor.

De acuerdo con la ecuación (129), la fase que se recupera de las distribuciones complejas en los primeros armónicos es una fase discontinua, puesto que el uso de la función tangente inversa genera puntos de discontinuidad entre  $-\pi$  y  $\pi$ . En la Figura 47, se muestran las imágenes superpuestas de la fase discontinua y el patrón de puntos, si el lóbulo se filtró de forma apropiada y los valores de fase recuperados del respectivo armónico son correctos, los puntos blancos deben

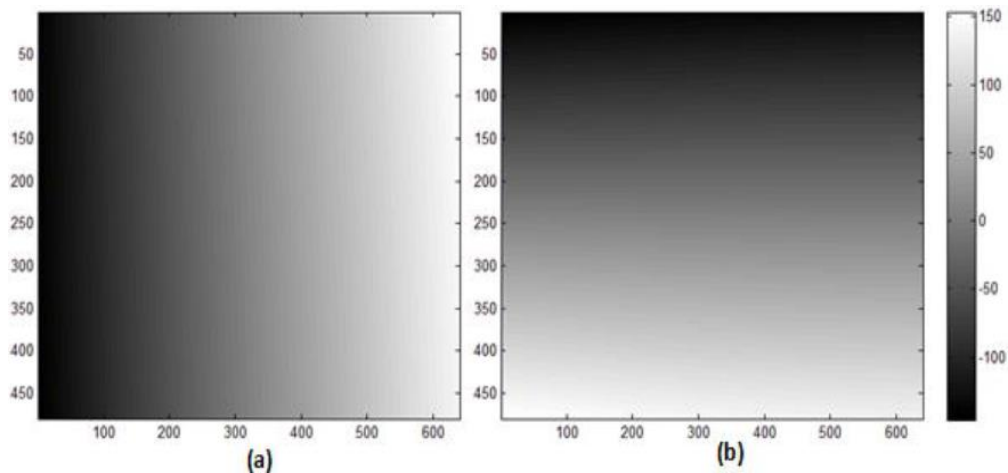
estar en medio de las transiciones de la fase discontinua, como se explica en la Figura 35 y se muestra en la Figura 47.



**Figura 47.** Patrón de puntos y distribución de fase discontinua en la dirección, (a) 1, (b) 2.

**Fuente:** Autor.

Con un algoritmo de “Unwrapping” se recuperan las distribuciones de fase continua del patrón de puntos, Figura 48.



**Figura 48.** Distribución de fase continúa del patrón de puntos en la dirección, (a) 1, (b) 2.

**Fuente:** Autor.

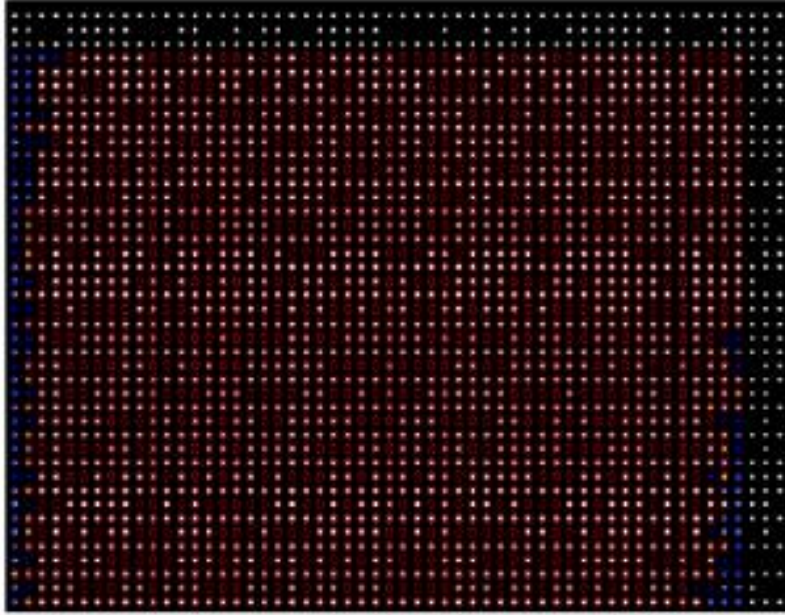
Como ya se ha mencionado, los puntos de intersección de las fases continuas determinan las coordenadas  $(x, y)$  de cada punto de control en la imagen; los niveles de gris en la imagen y la SBPA permiten verificar si efectivamente, a dichas coordenadas, le corresponde un punto de control "1" o un punto ausente "0". En la Figura 49, se muestran señaladas con un círculo rojo las coordenadas  $(x, y)$  que se hallaron correctamente para la imagen 1, las cruces azules marcan las coordenadas que no coinciden con la posición del centro del punto de control.



**Figura 49.**Coordenadas  $(x, y)$  de los puntos de control en la imagen 1 del patrón de puntos.

**Fuente:** Autor.

Con esta información es posible saber qué porción del patrón de puntos fue captada por la cámara en la imagen 1, y de cuales puntos con coordenadas  $(m, n)$  conocidas en la LCD del Video Proyector, se conocen sus respectivas coordenadas  $(x, y)$  en el plano imagen de la cámara CCD, Figura 50.



**Figura 50.** Patrón de puntos en la LCD. Círculos rojos coordenadas  $(m,n)$  y  $(x,y)$  conocidas.

**Fuente:** Autor.

En este caso (procesamiento de la imagen 2), el algoritmo que ejecuta este procedimiento recupera las coordenadas  $(x,y)$  en el plano imagen de 637 puntos (incluyendo "1" y "0"), Figura 55.

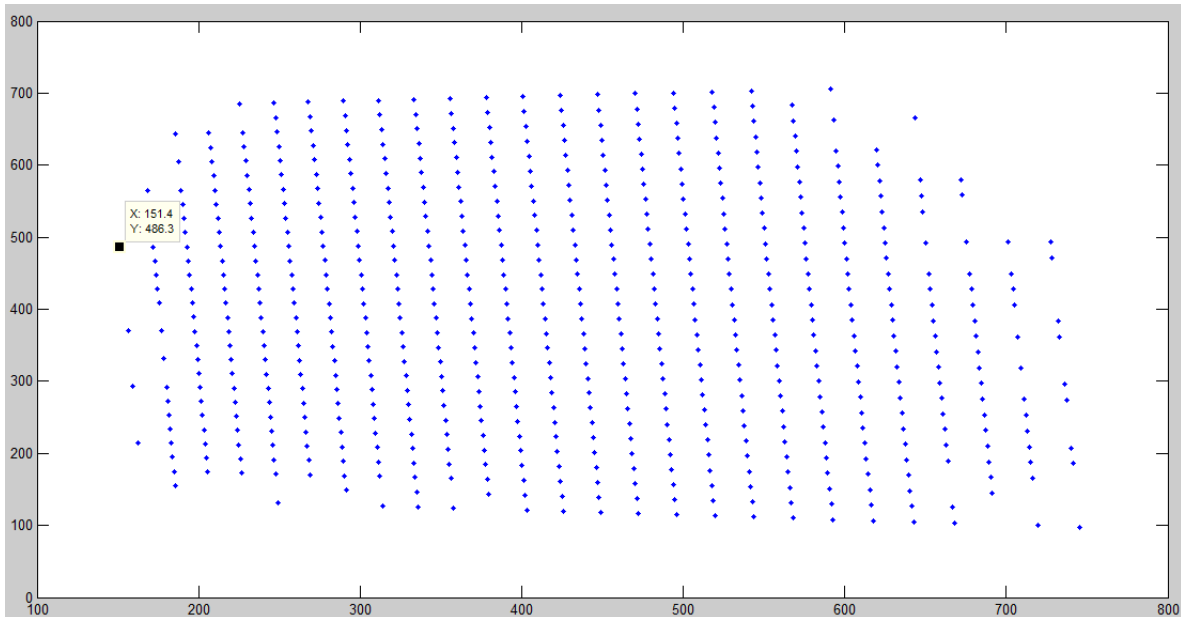
Como ejemplo, la **Tabla 1** contiene las coordenadas corregidas (en píxeles) del punto que se encuentra en dirección positiva del eje  $x=151.4$ , y que se muestra en la **Figura 51**.

Punto	$x$	$y$
4	151.4	486.3

**Tabla 1.** Coordenadas  $(x,y)$  en píxeles de un punto de control de la imagen 1.

**Fuente:** Autor.

Haciendo uso de la ecuación (27) para cada punto  $x_i$ , con sus respectivas coordenadas  $(x_i, y_i)$  conocidas en el plano imagen, se pueden hallar las coordenadas de ese mismo punto, en unidades métricas, respecto al sistema coordenado, de la cámara, con su coordenada  $Z_c = 1mm$ . Por ejemplo, para el punto  $x_4 = (151.4, 486.3)$  el resultado se muestra en la ecuación (131).



**Figura 51.** Coordenada de los puntos de control vistos por la cámara CCD.

**Fuente:** Autor.

$$X_C = K^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & -0.2886 \\ 0 & 0.0006 & -0.2229 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 151.4307 \\ 486.2910 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2047 \\ 0.0491 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Si se traza una línea recta desde el centro de la cámara, hasta el punto con las coordenadas que se hallaron en la ecuación (131), y se prolonga hacia el espacio

tridimensional, dicha línea debe intersectar el punto en el plano imagen (Figura 51) y el punto  $x$  en el plano de calibración. Esto se hace con el fin de hallar las coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  del punto en el plano de calibración; el procedimiento se describe a continuación, para ilustrarlo, las coordenadas de la ecuación (131) corresponden a las coordenadas del vector  $\vec{r}_c$  respecto al sistema coordenado de la cámara; y mediante la ecuación (33) se transforman en el vector  $\vec{r}_w$  con coordenadas  $(X_w, Y_w, Z_w)$  respecto al sistema coordenado del mundo, donde se ha fijado el patrón de calibración o plano de referencia, el resultado da origen a la ecuación (132).

$$X_w = R^{-1}(X_c - T)$$

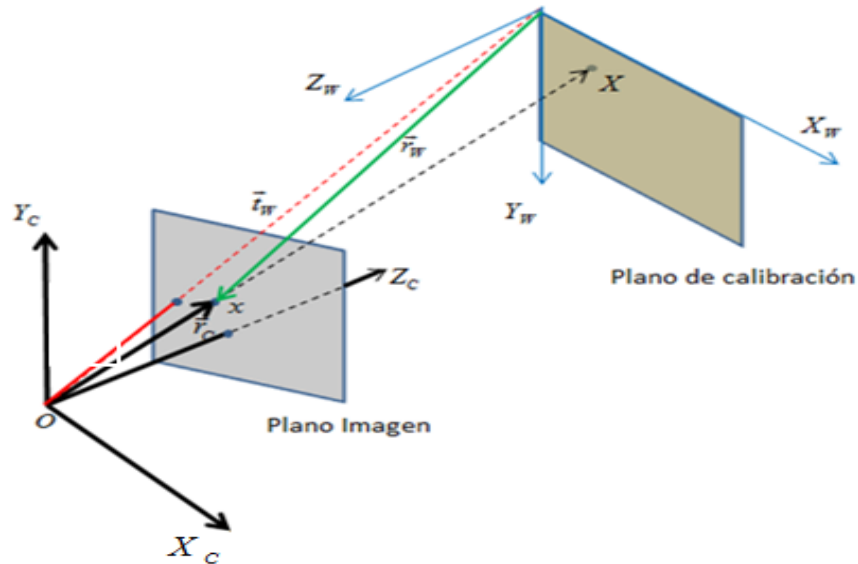
$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0119 & 1.0018 & -0.0269 \\ 0.9998 & -0.0115 & 0.0188 \\ 0.0185 & -0.0933 & -1.0016 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -0.2047 \\ 0.0491 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -98.0133 \\ -56.7235 \\ 388.7490 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -68.4905 \\ 89.8494 \\ 384.8977 \end{bmatrix} \quad (132)$$

En la Figura 52 se muestra la representación gráfica, que no está a escala, de los vectores  $\vec{r}_c$  y  $\vec{r}_w$  que contienen las coordenadas del punto  $x$  en el sistema coordenado de la cámara y en el sistema coordenado del mundo, respectivamente. El vector  $\vec{t}_w$ , es el vector que relaciona la traslación entre el origen de los dos sistemas coordenados, y sus coordenadas se hallan con la ecuación (133),

$$\begin{aligned} \vec{t} &= R * \vec{t}_w \\ \vec{t}_w &= R^{-1} * \vec{t} \end{aligned}$$

$$\vec{t}_w = \begin{bmatrix} 0.0119 & 1.0018 & -0.0269 \\ 0.9998 & -0.0115 & 0.0188 \\ 0.0185 & -0.0933 & -1.0016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 97.8086 \\ 56.7726 \\ -384.7490 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -68.3669 \\ -90.1082 \\ -382.0501 \end{bmatrix}, \quad (133)$$

el vector  $\vec{t}_w$  se ha invertido intencionalmente para ser usado en el cálculo de las coordenadas del vector  $\vec{r}_c$  respecto al sistema coordenado del mundo, dando origen al vector  $\vec{r}_{wc}$  (Figura 53), expresado en la ecuación (134).



**Figura 52.** Representación gráfica de los vectores  $\vec{r}_c, \vec{r}_w$  y  $\vec{t}_w$ .

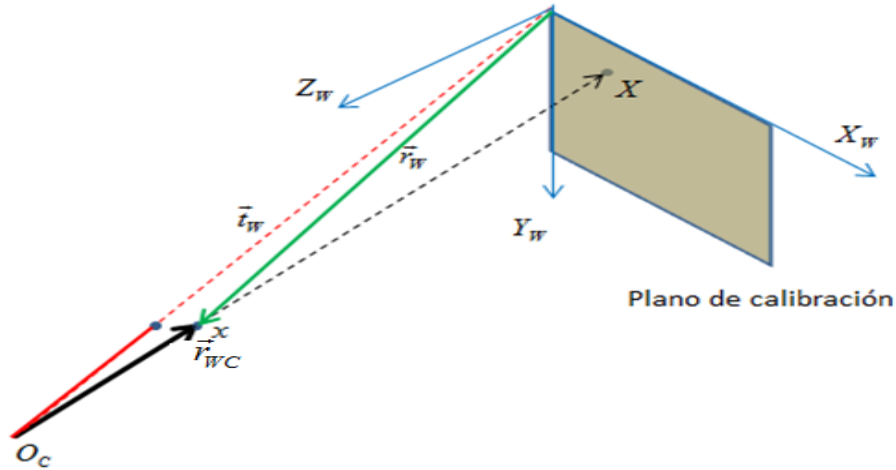
**Fuente:** Autor.

$$\vec{r}_{wc} = \vec{r}_w - \vec{t}_w$$

$$\vec{r}_{wc} = \begin{bmatrix} -68.4905 \\ 89.8494 \\ 384.8977 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -68.3669 \\ -90.1082 \\ -382.0501 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1236 \\ 179.9576 \\ 766.9478 \end{bmatrix} \quad (134)$$

La prolongación del vector  $\vec{r}_{wc}$ , interseca al patrón de calibración exactamente en el punto de control con coordenadas  $(X_w, Y_w, 0)$ , como se observa en la Figura 53 con la línea negra punteada. Entonces las coordenadas del punto de control en el sistema coordenado del mundo están dadas por el vector, colineal a  $\vec{r}_{wc}$ , que

representa dicha prolongación para  $Z_w = 0$ ; es decir, la línea que pasa por  $O_c$  y es colineal con  $\vec{r}_{wC}$  interseca al plano en las coordenadas  $(X_w, Y_w, 0)$ , el objetivo es calcular el valor de  $X_w$  y  $Y_w$ . Para que se cumpla la condición de colinealidad, el producto cruz de este vector (la prolongación de  $\vec{r}_{wC}$ ) con su vector unitario (vector unitario de  $\vec{r}_{wC}$ ) debe ser igual a cero. El vector unitario de  $\vec{r}_{wC}$  está dado por la ecuación (135)



**Figura 53.** Representación gráfica de los vectores  $\vec{r}_{wC}$ ,  $\vec{r}_w$  y  $\vec{t}_w$ , en el sistema coordenado del mundo.

**Fuente:** Autor.

$$\vec{u}_{\vec{r}_{wC}} = \frac{1}{|\vec{r}_{wC}|} \vec{r}_{wC}$$

$$\vec{u}_{\vec{r}_{wC}} \frac{[(0.1236), (179.9576), (766.9478)]}{\sqrt{(0.1236)^2 + (179.9576)^2 + (766.9478)^2}} = [(0.0001569), (0.2284), (0.9736)] \quad (135)$$

El vector con las coordenadas del punto de control se puede representar como la diferencia de dos vectores, ecuación (136); resolviendo el producto cruz con el

vector unitario  $\vec{u}_{r_{wc}}$ , ecuaciones (137) y (138), y teniendo en cuenta que  $Z_w = 0$  se pueden hallar las coordenadas  $X_w$  y  $Y_w$ , ecuaciones (139) y (140).

$$(\vec{r} - \vec{t}_w) \times \vec{u}_{r_{wc}} = \vec{0} \quad (136)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x - t_{wx} & r_y - t_{wy} & r_z - t_{wz} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0$$

$$u_z(r_y - t_{wy}) - u_y(r_z - t_{wz}) = 0 \quad (137)$$

$$u_z(r_x - t_{wx}) - u_x(r_z - t_{wz}) = 0 \quad (138)$$

$$X_w = \frac{u_x(r_z - t_{wz})}{u_z} + t_{wx} = \frac{0.0001569(0 + 382.0501)}{0.9736} + (-68.3669) = -68.3053 \quad (139)$$

$$Y_w = \frac{u_y(r_z - t_{wz})}{u_z} + t_{wy} = \frac{0.2284(0 + 382.0501)}{0.9736} + (162.1956) = 251.8220 \quad (140)$$

$$Z_w = 0$$

Conociendo las coordenadas del punto de control respecto al sistema coordenado del mundo, es posible resolver la ecuación (130) y hallar las coordenadas (en unidades métricas) del punto respecto al sistema coordenado de la cámara, ecuación (141).

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0132 & 0.9997 & 0.0184 \\ 0.9956 & -0.0114 & -0.0927 \\ -0.0925 & 0.0195 & -0.9955 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -68.4905 \\ 0.0491 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -68.3669 \\ -90.1082 \\ -382.0501 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -69.2035 \\ -158.3906 \\ -376.7093 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Con el procedimiento anterior se calculan las respectivas coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  de los 636 puntos restantes, luego se procesan las imágenes restantes (en este

caso la 1, 2, 3, 5 y 6) de forma idéntica. De este modo se recupera la información necesaria, coordenadas  $(m,n)$  y  $(X_c, Y_c, Z_c)$  para calcular los coeficientes  $w_{ij}$ .

La

Tabla 2 contiene la cantidad de puntos de control que se lograron recuperar de las 6 imágenes de calibración, con el procesamiento anteriormente mencionado.

<b>Imagen</b>	<b>Puntos</b>
1	637
2	720
3	713
4	633
5	707
6	671
<b>Total de puntos</b>	<b>4081</b>

**Tabla 2.** Puntos recuperados de las 6 imágenes de calibración con coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$ .

**Fuente:** Autor.

La ecuación (124) se puede resolver por medio del algoritmo de Transformación Lineal Directa (DLT) [20], como se observa en la ecuación (142) se tienen dos ecuaciones para cada correspondencia. Al ensamblar todas las ecuaciones obtenidas para cada correspondencia se tiene una matriz de  $2n \times 12$  elementos, que para el caso particular de esta calibración son 97944 elementos.



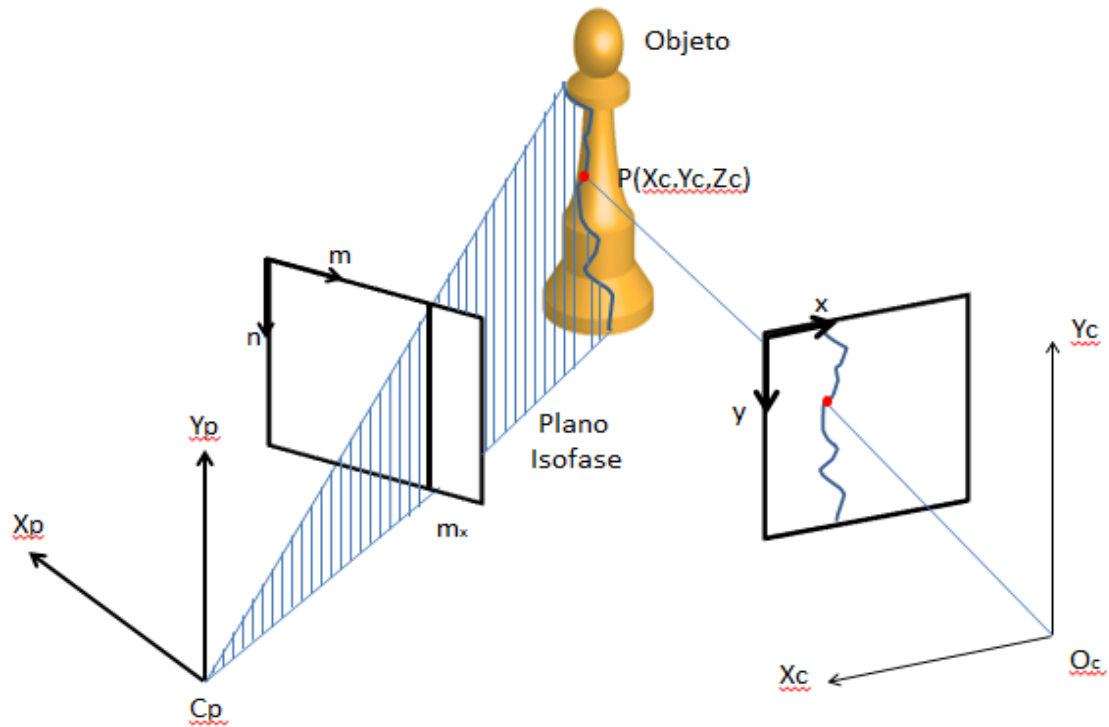
$$W = \begin{bmatrix} 21.617 & -0.1286 & -4.3599 & 4.26e+03 \\ 1.9675 & 21.2073 & 3.8294 & 290.01 \\ 0.0062 & -3.9e-05 & 0.013 & 1 \end{bmatrix} \quad (144)$$

#### 4.4 MODELO MATEMÁTICO DE RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE LA CALIBRACIÓN.

Para el caso de utilizar el sistema para obtener información tridimensional de un objeto, se reemplaza el patrón de puntos por un sistema de franjas verticales, de paso  $P_0$ . El perfil en intensidad es cosenosoidal y la fase lineal está dada por:

$$\phi = \frac{2\pi}{P_0} m_x, \quad (145)$$

donde  $m_x$  representa la variable horizontal en la *LCD* del proyector. Al proyectar las franjas sobre la superficie del objeto, estas se deforman según su topografía. La cámara adquiere la imagen del sistema de franjas deformado. Usando el algoritmo a cuatro imágenes se calcula la fase en el plano imagen de la *CCD*. De esta manera cada punto  $P(u, v)$  en la *CCD* tendrá un valor de fase  $\phi$  y con este valor se podrá calcular  $m_x$  sobre el plano *LCD* del proyector, según la ecuación (145), usando la ecuación (109) y los valores  $w_{ij}$ , previamente obtenidos de la calibración, se calcula la ecuación del plano isofase vertical que pasa por  $m_x$ , ver Figura 54. Por otro lado, conociendo los parámetros intrínsecos de la cámara se conoce la ecuación de la línea que pasa por  $\overline{O_c P}$ . La intersección de la línea con el plano permite calcular la coordenada  $(X_c, Y_c, Z_c)$  del plano  $P$  en la superficie del objeto.



**Figura 54.** Procedimiento de reconstrucción tridimensional.

**Fuente:** Autor.

Repitiendo este procedimiento con todos los puntos muestreados de la superficie del objeto y ubicados en el sistema de franjas, se obtiene la nube de puntos tridimensional del objeto.

## 5. CONCLUSIONES

- Se desarrolló una estrategia novedosa y flexible que permite calibrar un sistema de reconstrucción tridimensional por proyección de franjas sin la necesidad de utilizar unidades de traslación de alta precisión. El plano de referencia se ubica en posiciones arbitrarias al interior del campo de observación de la cámara CCD con el propósito de adquirir dos imágenes por cada posición del plano: patrón de puntos proyectos y patrón ajedrezado cromático adherido superficie.
- El procedimiento de calibración manual resulta ser una herramienta ágil, dinámica, y versátil en un sistema de proyección-adquisición, los movimientos se realizan manualmente, y una de las grandes ventajas es que no se necesita información sobre los desplazamientos, tampoco conocer con precisión la distancia entre el patrón de calibración y la cámara CCD. Cuando se desea extraer información a 360° de observación, se necesita emplear varias unidades de proyección-observación ubicadas en posiciones angulares que cubran los 360° del objeto. En estas situaciones se requiere de un sistema rápido y ágil para calibrar cada unidad.
- Se implementó la técnica de calibración manual de una cámara planteado por Zhang en donde se utilizó un patrón ajedrezado cromático (cuadros a dos colores), sobre una superficie plana para el caso de un sistema de proyección-adquisición.
- La gran ventaja que se obtiene del modelo matemático planteado consiste que la calibración de sistema de proyección de franjas es independiente del paso de las franjas proyectado. De esta manera, se puede utilizar cualquier paso de proyección y extraer información 3D del objeto, utilizando el mismo procedimiento de calibración.

## 6. PERSPECTIVAS

Con el desarrollo de este trabajo se logró encontrar una técnica práctica para la calibración de un sistema de reconstrucción tridimensional. Lo que se pretende con este trabajo es suplir la necesidad de usar unidades de traslación de alta precisión para la calibración de un sistema de proyección-adquisición. El objetivo central del presente trabajo de investigación consistía en buscar una estrategia que permitiera calibrar una unidad de proyección-adquisición de manera ágil y sin utilizar unidades de traslación o patrones 3D de alta precisión. Aunque se cumplió el objetivo planteado, queda la duda en determinar cuál es el error que se introduce en el proceso de calibración que afecta la precisión de la medida final, reportada en los datos 3D. Indudablemente la respuesta se obtiene al utilizar un objeto de forma conocida y hacer el desarrollo computacional completo de su reconstrucción 3D. Esto implica realizar completamente el dispositivo de medida 3D por proyección de franjas y calibrado a manos libres, con la estrategia planteada, lo cual corresponde a un desarrollo más completo e implica más tiempo de investigación. De esta manera, la continuidad del presente trabajo se centra en la evaluación del error que se comete al hacer la R3D de un objeto, usando el procedimiento de calibración planteado.

## REFERENCIAS

- [1] Salvi, J. (2001). *Pattern codification strategies in structured light systems*. Girona: Instituto de Informatica, Universidad de Girona.
- [2] Pérez G, Z. (2006). *Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas*. Bucaramanga: Trabajo de Grado. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander.
- [3] Meneses, J. (1998). *Système Optique Pour La Mesure des Dèformations De la Voûte Plantaire Sous Charge Statique*. Franche-Comté: Thèse. L'U.F.R Des Sciences Et Techniques DeL'Université De Franche-Comté.
- [4] Saldner, H. O., & Huntley, J. M. (1997). Profilometry using temporal phase unwrapping phase unwrapping and a spatial light modulator-based fringe projector. *Optical Engineering* , 610-615
- [5] Larkin, K., Hibino, K., Oreb, B., & Farrant, I. (1995). Phase shifting for nonsinusoidal waveforms with phase-shift errors. *Optical Society of America* , 761-768.
- [6] Takeda M., Mutoh K. (1983). Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3 –D object shapes. *Appl. Opt.* 22, 3977-3982.
- [7] Rojas J., Meneses J. (2012). *Exploración topográfica del rostro humano a múltiples campos con registro unificado tridimensional*. Bucaramanga: Trabajo de Grado. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander.
- [8] Hartley R., Zisserman (2004). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Second Edition.
- [9] Heikkilä J., Silvén O. (1997). A Four-step Camera Calibration Procedure with Implicit Image Correction. *Proceedings of the 1997 Conference on Computer Vision and Pattern*, 1106-1113.

- [10] González A., Meneses J., León J. (2012) Proyección de franjas en metrología óptica. Revista INGE CUC, Vol. 8, 191-206.
- [11] Gómez A. Dispositivo óptico para la reconstrucción tridimensional de la piel humano por el método e proyección de franjas. Trabajo de Grado. Escuela de Física, Universidad del Cauca. 2009.
- [12] González A. (2013). Reconstrucción 3d del torso humano a 360° de observación mediante la técnica de proyección de franjas. Trabajo de grado. Maestría en Telemática, Universidad Autónoma de Bucaramanga.
- [13] Arias N. A., Sandoz P., Meneses J., Suarez M. Gharbi T. (2010). 3D localization of a labeled target by means of a stereo vision configuration with subvoxel resolution. Optics Express, 24152-24162.
- [14] Arias N., Meneses N., Meneses J., Gharbi T. (2011). A hand-held 3D laser scanning with global positioning system of subvoxel precision. Journal of Physics: Conference Series, 1742-1750.
- [15] Galeano Z, J., Sandoz P., Gaiffe E., Launay S., Laurent R., Jacquot M., y otros. (2011). Position-referenced microscopy for live cell culture monitoring. Biomed Opt Express, 1307-1318.
- [16] González A. L., Ballesteros A., Meneses J., León J. (2013). Método para la extracción de puntos de control en la calibración de una cámara basado en la estimación de la fase de un patrón de puntos codificado. ITECKNE, 7-15.
- [17] Zhang Z, (2000) "A flexible new technique for camera calibration," IEEE Trans. Patter Anal. Mach. Intell 22, 1330-1334.
- [18] Tsai R., (1997) ""A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-self TV camera lenses," IEEE J. Robot. Autom. RA-3, 323-344.
- [19] Zhang S., P. S. Huang (2006), Novel method for structured light system calibration, Opt. Eng. 45 (8) (2006) 083601.
- [20] Heyden, A. (1997). Reconstruction fom multiple images by means of using relative depths. International Journal of Computer Vision, 155-161.