

**CONCEPCIONES ACERCA DE LA PROBABILIDAD, PRESENTES EN
ALUMNOS DE OCTAVO GRADO DEL COLEGIO LUZ DE LA ESPERANZA DE
BERLÍN, AL SER SOMETIDOS A UNA ENSEÑANZA BASADA EN LA
EXPERIMENTACIÓN FÍSICA Y LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL**

VIVIANA VILLAMIZAR GARCÍA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008**

**CONCEPCIONES ACERCA DE LA PROBABILIDAD, PRESENTES EN
ALUMNOS DE OCTAVO GRADO DEL COLEGIO LUZ DE LA ESPERANZA DE
BERLÍN, AL SER SOMETIDOS A UNA ENSEÑANZA BASADA EN LA
EXPERIMENTACIÓN FÍSICA Y LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL**

VIVIANA VILLAMIZAR GARCÍA

**Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciada en Matemáticas**

**Director:
Ph.D. GABRIEL YÁÑEZ CANAL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2008

*A la memoria de mi
hermanita Paola Villamizar, que estará en mi corazón por siempre,*

AGRADECIMIENTOS

*A Dios todo poderoso, por iluminarme y darme la fortaleza suficiente
para afrontar el largo camino de la vida.*

*A mi querido esposo Robinson Silva, por su amor, compañía y apoyo
incondicional.*

*A mis padres, por brindarme la oportunidad de vivir y hacer de mí lo
que soy, por su amor, paciencia, apoyo y comprensión y sobre todo por
hacer mis sueños suyos también.*

A mis hermanos Arnol y Yaneth, por su apoyo y compañía.

*A mis sobrinos Geraldine, Maycol y Yair, por ser la alegría de mi
familia.*

*Al Dr. Gabriel Yáñez Canal, por su valiosa colaboración en mi
formación docente, en la realización de este trabajo, por su orientación,
apoyo, paciencia y sobre todo por haber depositado su confianza en mí.*

*A las directivas del colegio Luz de la Esperanza, por permitir la
realización de este trabajo, por su confianza y colaboración.*

*A los estudiantes del grado octavo del colegio Luz de la Esperanza 2008,
por su participación, entusiasmo y dedicación en el desarrollo de este
trabajo.*

*Al profesor Juan de Dios Urbina, por su apoyo y contribución en mi
formación docente y por su valiosa amistad.*

*A Diana, Daniel, Rafael, Arnulfo, Andrea y Yudy, por brindarme su
amistad incondicional.*

CONTENIDO

	Pág.
PRESENTACIÓN	1
1. MARCO TEÒRICO	5
1.1 CICLOS DE APRENDIZAJE: LA TAXONOMÍA SOLO	5
1.2 SESGO Y MALAS CONCEPCIONES	15
1.2.1 Insensibilidad al tamaño de la muestra o a la ley de los pequeños números.	15
1.2.2 El sesgo de equiprobabilidad.	15
1.3 LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS	16
2. ANTECEDENTES	18
3. METODOLOGÍA	25
3.1 POBLACIÓN Y MUESTRA	25
3.2 INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS	25
3.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN	26
3.4 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE RESULTADOS	42
4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	44
CONCLUSIONES	79
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	79
ANEXOS	83

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Modos y niveles en la taxonomía SOLO	10
Tabla 2. Modos ciclos de aprendizaje y formas de conocimiento	12
Tabla 3. El concepto de evaporación a través de los modos y niveles	14

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. DIAGNÓSTICO	83
ANEXO B. TALLER 1: JUGAR PARA APRENDER I	86
ANEXO C. TALLER 2: JUGAR PARA APRENDER II	90
ANEXO D. EXPLORANDO EL PROBABILITY EXPLORER	94
ANEXO E. TALLER 2: SIMULACIÓN Y JUEGO CON EL PROBABILITY	100
ANEXO F. EVALUACIÓN	105
ANEXO G. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN CON MONEDAS	108
ANEXO H. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN CON DADOS	109
ANEXO I. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN 1 CON BOLAS EN UNA URNA	110
ANEXO J. TABLA GRUPAL DE LA ACTIVIDAD 2 CON BOLAS EN UNA URNA	111

RESUMEN

TITULO: CONCEPCIONES ACERCA DE LA PROBABILIDAD, PRESENTES EN ALUMNOS DE OCTAVO GRADO AL SER SOMETIDOS A UNA ENSEÑANZA BASADA EN LA EXPERIMENTACIÓN FÍSICA Y LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL *

AUTORA: VILLAMIZAR GARCÍA, Viviana **

PALABRAS CLAVES: Concepciones, simulador computacional, experimentos aleatorios, probabilidad, Ley de los Grandes Números, Taxonomía SOLO.

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación presenta una propuesta de aula cuyo objetivo es Identificar y analizar el desarrollo de las concepciones que los estudiantes de octavo grado de un colegio rural poseen acerca de los juegos de azar y la probabilidad al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional.

Este trabajo consistió en implementar una serie de actividades en un ambiente de juego, donde los estudiantes debían hacer en primer lugar experimentaciones físicas con monedas, dados y bolas en una urna y después hacer simulaciones computacionales de las mismas, utilizando el Software Probability Explorer. Las actividades con cada uno de los experimentos fueron diseñadas de forma similar, para poder analizar el avance de los estudiantes en cada uno de ellos; dicho análisis fue realizado a partir de Taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991). Taxonomía SOLO, muestra el avance de los estudiantes de la incompetencia hasta la experticia, permitiendo evaluar su desempeño al realizar una tarea específica de determinado tema.

Los resultados de esta investigación muestran el avance de los estudiantes, desde el diagnóstico hasta la evaluación, después de haber sido sometidos a experimentaciones físicas y computacionales, donde los estudiantes pudieron modificar sus concepciones alcanzando a inferir la convergencia de los patrones de resultados al realizar muchas repeticiones y la relación que tiene con la proporción del espacio muestral, lo que les permitió incluso proceder en sentido contrario, asociando la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna. Estos resultados evidencian la presencia de un significado fuerte de la Ley de los Grandes Números y, por qué no decirlo, de cierta lógica inductiva.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Licenciatura en Matemáticas. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

ABSTRACT

TITLE: CONCEPTIONS ABOUT OF THE PROBABILITY, PRESENT IN STUDENTS OF EIGHTH GRADE TO THE SUBJECTED BEING TO A TEACHING BASED IN THE PHYSICAL EXPERIMENTATION AND THE COMPUTATIONAL SIMULATION *

AUTHOR: VILLAMIZAR GARCÍA, Viviana **

KEY WORDS: Conceptions, computational simulator, aleatory experiments, probability, Big Numbers Law, Taxonomy SOLO.

DESCRIPTION:

This investigation presents a classroom proposal whose objective is to identify and to analyze the development of the conceptions that the students of eighth grade of a rural school possess about the games of chance and the probability to the subjected being to a teaching based on the physical experimentation and the computational simulation.

This work consisted on implementing a series of activities in a game atmosphere, where the students should make physical experimentations in the first place with coins, dice and balls in an urn and later to make computational simulations of the same ones, using the Software Probability Explorer. The activities with each one of the experiments were designed in a similar way, to be able to analyze the advance of the students in each one of them; this analysis was carried out to leave of Taxonomy SOLO of Biggs and Collis (1991). Taxonomy SOLO, shows the advance of the students of the incompetence until the experience, allowing to evaluate its acting when carrying out a specific task of certain subject.

The results of this investigation show the advance of the students, from the diagnosis until the evaluation, after having been subjected to physical and computational experimentations, where the students could modify their conceptions succeeding in inferring the convergence from the patterns of results when carrying out many repetitions and the relationship that they has with the proportion of the space muestral, what even allowed them to proceed in contrary sense, associating the frequency of the results with the proportion of balls in the urn. These results evidence the presence of a strong meaning of the Big Numbers Law and, why not to say it, of certain inductive logic.

* Grade Work

** Faculty of Sciences. School of Licentiate in Mathematics. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

PRESENTACIÓN

En los últimos tiempos en algunas investigaciones, relacionadas con la probabilidad y la estadística, ha sido adoptado el enfoque frecuencial, a favor de que los estudiantes confronten las intuiciones que traen, con las concepciones adquiridas después de la experiencia, con el fin de de posibilitar un análisis probabilístico para comprender la ley de los grandes números, en estas investigaciones se tiene en cuenta la necesidad de utilizar herramientas tecnológicas, donde diferentes experimentos puedan ser simulados, demostrando que son útiles para la enseñanza y aprendizaje de diversas disciplinas y en este caso en las matemáticas.

En el contexto local no hay suficientes investigaciones que aborden dicho tema, por lo tanto no existen evidencias claras que ayuden a superar las concepciones erróneas detectadas. De hecho, se han hecho pocos estudios semejantes con estudiantes. Con base en lo anterior se percibe que hace falta explorar las posibilidades que ofrecen las nuevas herramientas tecnológicas (Probability Explorer) para crear situaciones conflictivas en las que se comparen, las diferentes estrategias utilizadas en la modificación de concepciones.

Debido a esta situación surge el siguiente interrogante:

¿Cuál es el desarrollo de las concepciones que los estudiantes poseen acerca de los juegos de azar y la probabilidad, al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional?

La utilización de la probabilidad en diversas disciplinas hace necesaria la enseñanza de este tema en las diferentes instituciones educativas, sin excepción

alguna, lamentablemente por diversas razones como: el currículo, la falta de tiempo y preparación de algunos docentes esto no se hace posible; sobre todo en las escuelas y colegios rurales. Como es el caso del colegio Luz de la Esperanza (Berlín-Tona), para responder a este interrogante se decidió llevar a cabo la investigación en esta institución, con 24 estudiantes del grado octavo, teniendo como objetivo Identificar y analizar el desarrollo de las concepciones que los estudiantes de octavo grado de un colegio rural poseen acerca de los juegos de azar y la probabilidad al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional

Este trabajo consistió en implementar una serie de actividades en un ambiente de juego, donde los estudiantes debían hacer en primer lugar experimentaciones físicas con monedas, dados y bolas en una urna y después hacer simulaciones computacionales de las mismas, utilizando el Software Probability Explorer, software comercial creado por Hollylynne Stohl Drier, el cual esta disponible en www.probexplorer.com (versión demo).

Las actividades fueron diseñadas teniendo en cuenta algunas recomendaciones de Réatiga (2004) y Jaimes y Martínez (2007),

Las actividades con cada uno de los experimentos aleatorios, fueron diseñadas de forma similar, para poder analizar el avance de los estudiantes en cada uno de los experimentos.

Era de gran preocupación para la autora la forma en la cual serían analizadas las concepciones y el nivel de percepción de la ley de los grandes números en los estudiantes, por lo tanto dicho análisis se basa en la Taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991). La Taxonomía SOLO, muestra el avance de los estudiantes de la incompetencia hasta la experticia, permitiendo evaluar su desempeño al realizar una tarea específica de determinado tema. Además abre la posibilidad de que el

docente diseñe actividades en busca de un mejor rendimiento por parte de los estudiantes. Estos autores postulan cinco niveles, para clasificar conductas y razonamientos, para cumplir con el objetivo de esta investigación fueron adaptados de la siguiente forma: preestructural, el estudiante no asume la pregunta, presenta malas concepciones respecto a la Naturaleza de los experimentos aleatorios, no considera la equiprobabilidad en los casos pertinentes o evidencia algún sesgo; uniestructural, el estudiante considera solamente la impredecibilidad y variabilidad de los experimentos aleatorios, pero no da evidencia de la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos; multiestructural, El estudiante tiene en cuenta de alguna manera el espacio muestral al hacer predicciones acerca de los resultados del experimento aleatorio, pero no los relaciona de forma correcta; relacional, el estudiante relaciona la composición del espacio muestral asociada a un experimento con el resultado de los experimentos al hacer predicciones; abstracción extendida, el estudiante maneja en forma abstracta la relación entre espacio muestral con el resultado de los experimentos, por lo tanto es capaz de inferir el espacio muestral, partiendo desde los resultados del experimento.

Este trabajo esta conformado por cinco capítulos, en el primer capítulo, “*Marco Teórico*” se presenta la Taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991), tomada en cuenta en el análisis de este trabajo, además se presentan algunos sesgos y malas concepciones que se generan en los estudiantes y por último se explica el enfoque frecuencial para el aprendizaje de la ley de los grandes números.

En el segundo capítulo, “*Antecedentes*” se presenta una síntesis de algunos trabajos, tenidos en cuenta en esta investigación, relacionados con el enfoque frecuencial y la simulación computacional.

En el tercer capítulo, “*Metodología*” se describe el tipo de investigación, la población y muestra con la que se desarrollo el trabajo, el diseño y los objetivos de

las actividades en cada una de las etapas de investigación y las categorías de análisis de los resultados.

En el cuarto capítulo, "*Análisis de resultados*" se hace una síntesis a través de las categorías de análisis propuestas en la metodología.

En el quinto capítulo "*Conclusiones*" se presentan las conclusiones generales obtenidas como resultado de las actividades desarrolladas en esta investigación.

Al final después de las referencias se presentan los anexos, que comprenden los talleres desarrollados en cada etapa de investigación y algunos datos obtenidos después de la experimentación física.

1. MARCO TEÓRICO

Se presenta en este capítulo la taxonomía SOLO de Biggs y Collis acerca de los ciclos de aprendizaje, que muestra el avance de los estudiantes de la incompetencia hasta la experticia, permitiendo evaluar su desempeño al realizar una tarea específica de determinado tema. Además, se hace referencia a los sesgos y malas concepciones, presentes en estudiantes cuando realizan experimentos aleatorios con dados, monedas y bolas en una urna.

1.1 CICLOS DE APRENDIZAJE: LA TAXONOMÍA SOLO

El texto que aquí se presenta es un resumen del capítulo 5 Multimodal Learning Behavior de Biggs y Collis realizado por el autor de este trabajo, razón por la cual adoptamos evitamos las citas recurrentes salvo en los casos en que se haga una cita textual, caso en el cual referimos la página donde se puede encontrar. La inteligencia es fruto de la necesidad del ser humano para dar respuestas a problemas que plantea el entorno. Así, dar solución a problemas cotidianos y académicos hace imprescindible el ser competente, un resultado de comportamiento competente es el logro de una forma particular de conocimiento como las mencionadas a continuación:

- **Conocimiento tácito:** es aquel que se manifiesta haciendo y normalmente no es accesible verbalmente. Se evidencia cuando la persona desarrolla una actividad, aunque no tenga un fundamento teórico-argumentativo que lo sustente.

- Conocimiento intuitivo: se percibe directamente o se siente, se manifiesta cuando se da solución a un problema antes de que se pueda expresar simbólicamente.
- Conocimiento declaratorio: es expresado a través de un sistema simbólico, que es altamente entendible.
- Conocimiento teórico: está en un nivel superior de abstracción, está fundamentado en teorías racionales.

Las teorías de inteligencia deben referirse a las expresiones de competencia de los estudiantes en cualquier contexto, aspectos que son considerados en descripciones del desarrollo cognitivo.

La Taxonomía SOLO fue propuesta por Biggs y Collis (1982) como consecuencia de ciertas críticas que habían surgido sobre la teoría de las etapas de Piaget. Fundamentalmente, los piagetianos de la época. Consideran que el desarrollo cognoscitivo procedía de etapas discretas evolutivas, en las cuales cada vez se alcanzaban dominios más estructurados y complejos. Cada etapa o estadio estaba definido en términos de una estructura lógica que regula el desempeño dentro de esa etapa. Los ejemplos de actuaciones oscilantes entre diferentes etapas, referidas como decaláges, se veían como aberrantes y extraños.

Autores neopiagetanos han demostrado la importancia del contexto de aprendizaje, por ejemplo lo que resultó evidente para Biggs y Collis (1982), fue que en el contexto escolar, era muy común encontrar, que no hay uniformidad en los desempeños: un estudiante podía ser “Preformal” en matemática mientras que en historia podría ser “Preconcreto” o, incluso, “Preformal” en matemática un día y “concreto” el siguiente (Biggs y Collis, 1982). Estas observaciones, no pueden

indicar cambios en el desarrollo cognitivo, sino más bien, cambios en niveles más próximos como el aprendizaje, la actuación o la motivación de los estudiantes.

Todos los neopiagetianos están de acuerdo en la existencia de etapas en alguna forma por las siguientes razones:

- Es posible describir los periodos de edad cuando todos los niños excepto los superdotados, aprenden las tareas importantes.
- Las actividades son cada vez más abstractas a medida que transcurren las etapas.
- Hay diferencias cualitativas claras en la forma en que los niños se ocupan de la misma tarea en etapas diferentes.
- Lo que varía en cada etapa es el modo de representación.

Los modos de representación, son niveles de abstracción, a través de los cuales se van haciendo más complejos y estructurados los conocimientos.

Según los neopiagetianos un modo no reemplaza al anterior, sino que coexiste con él.

Los modos de representación son los siguientes:

1. *El Sensoriomotor* (del nacimiento). El niño sólo puede interactuar con el mundo de la manera más concreta posible: dando una respuesta motriz a un estímulo sensorial. Durante la infancia, el modo sensoriomotor es el único disponible para aprender. El aprendizaje Sensoriomotor conduce a un conocimiento tácito.

2. *Icónico* (alrededor de 18 meses). Si una acción se vuelve más abstracta se debe representar de alguna manera. La manera más simple de internalizar una acción es imaginarla, formando un cuadro interior o “el icono.” Esto se generaliza con la ayuda del idioma (porque es un requisito previo necesario) después de 18 meses. El pensamiento icónico utiliza la imaginación excesivamente.
3. *Concreto-simbólico* (alrededor de los 6 años) este modo involucra un cambio significativo en la abstracción, de la simbolización directa del mundo a través del idioma oral, al escrito. . El modo concreto simbólico es en el cual se realizan los aspectos cognitivos en la vida diaria.
4. *Formal* (alrededor de 14 años). El pensamiento formal se refiere a un sistema abstracto en que cualquier tópico dado es incluido, y que puede usarse para generar hipótesis sobre formas alternativas de ordenar el mundo. Este sistema se identifica con el cuerpo de conocimiento que actualmente prevalece en una disciplina. El pensamiento formal incorpora y trasciende las circunstancias particulares. Este modo empieza a aparecer, en algunos individuos con respecto a sus experiencias particulares, alrededor de los 14 años de edad, pero no se generaliza a todo el pensamiento, y en algunos individuos puede no desarrollarse en lo absoluto. El modo formal es el nivel de abstracción requerido en el estudio, y alguna evidencia de pensamiento formal en el área propuesta de estudio debe ser esencial para la admisión a una universidad.
5. *Pos formal* (desde los 20 años). El pensamiento post formal implica un grado superior de abstracción, de innovación y creatividad en muchos campos del saber, y es raro en estudiantes universitarios. No obstante este modo es requerido para hacer buenas investigaciones, y su ausencia puede explicar la dificultad que tienen los estudiantes para desarrollar con éxito sus investigaciones.

A partir de estos modos de representación Biggs y Collis (1991) fundamentan su propuesta en los ciclos de aprendizaje de los estudiantes, donde se muestra un avance de la incompetencia hasta la experticia, proponiendo cinco niveles básicos en el ciclo de aprendizaje: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, relacional, y el abstracto extendido. Se presenta en estos niveles un aumento jerárquico en la complejidad estructural de las respuestas sea cual sea el modo de representación en el que el aprendizaje se expresa. Los niveles más elevados de la taxonomía corresponden a un aprendizaje más profundo, a una interpretación personal del contenido que relaciona la tarea con situaciones alejadas del contexto inmediato, que establece relaciones con otros conocimientos relevantes y con materiales procedentes de diferentes fuentes de información. Contrariamente, los niveles inferiores de la taxonomía SOLO corresponden al tratamiento de la información de manera aislada y reproductiva.

Se considera que estructuralmente las complejidades en cada modo de representación son las mismas es decir el ciclo de aprendizaje se repite en cada uno de ellos.

A este sistema jerárquico se le denomina taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes: Estructura de los resultados observados del aprendizaje) y, según los autores, se puede utilizar tanto para evaluar la calidad del aprendizaje como para establecer los objetivos del currículo. En la siguiente tabla se presentan los modos y niveles de complejidad en la taxonomía SOLO.

Tabla 1. Modos y niveles en la taxonomía SOLO

Modo		Nivel estructural (SOLO)
Siguiente	5	<i>Abstracto Extendido.</i> El aprendiz ahora generaliza la estructura para considerar nuevas y más características abstractas, pasando a un nuevo y superior modo de representación.
Objetivo	4	<i>Relacional.</i> El aprendiz ahora integra las partes una con otra tal que el todo tiene una estructura coherente y significativa.
	3	<i>Multiestructural.</i> El aprendiz escoge más y más características relevantes o correctas pero no las integra
	2	<i>Uniestructural.</i> El aprendiz se enfoca en el dominio pertinente, y recoge un aspecto para trabajar.
Previo	1	<i>Preestructural.</i> La tarea es asumida, pero el aprendiz es distraído o confundido por un aspecto que pertenece a una etapa o modo anterior.

El enfoque de aprendizaje es el modo objetivo (sensoriomotor, icónico, concreto-simbólico, formal o post-formal) en el cual los niveles 2,3 y 4, pueden usarse descriptivamente, para referirse al punto del ciclo de aprendizaje que el estudiante ha alcanzado. El primer y ultimo nivel caen fuera del modo objetivo, las respuestas Preestructurales pertenecen al modo previo, indicando que ese aprendizaje está a un nivel demasiado bajo de abstracción para la tarea específica. Las respuestas abstractas extendidas son, como el nombre lo sugiere, un nivel de abstracción que se extiende hasta el próximo modo, y que se vuelve el primero, el nivel Uniestructural de ese próximo modo.

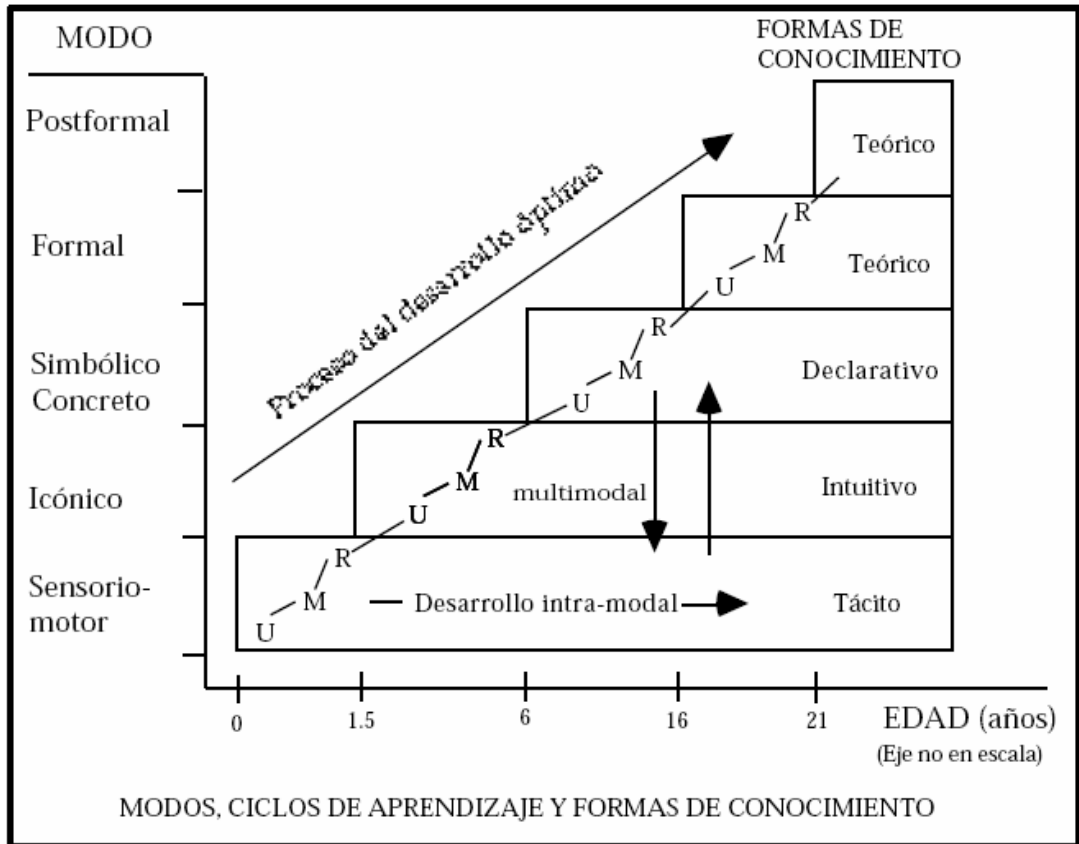
Relacionado con los conceptos de modo y ciclos de aprendizaje se puede postular lo siguiente:

- Los modos aparecen aditivamente en edades particulares, es decir en el mismo momento distintos modos pueden coexistir.
- Los niveles Uniestructural, Multiestructural y relacionales del ciclo de aprendizaje se repiten en todos los modos, las respuestas abstractas extendidas indican una transición al siguiente modo superior.
- El crecimiento o aumento de la competencia dentro de cualquier modo conduce a un tipo particular de conocimiento.
- Las tareas particulares pueden requerir la integración de varios modos.

En la figura siguiente se resume gráficamente la manera como se interpreta el aprendizaje (Adaptado de Biggs y Collis 1991). En la cual se presentan los ciclos de aprendizaje, los modos de representación y las formas de conocimiento En ella no abarcan los niveles Preestructural y de abstracción extendida para no aumentar la complejidad del diagrama.

Los modos aparecen comúnmente a las edades indicadas en la abscisa, estos se presentan como queda indicado en la ordenada, a la derecha están las formas de conocimiento asociadas a un modo en particular y el ciclo de aprendizaje que se presenta en cada uno de los modos de representación, donde se da la transición de la abstracción extendida del nivel relacional en un modo al Uniestructural en el siguiente:

Tabla 2. Modos ciclos de aprendizaje y formas de conocimiento



El proceso del desarrollo óptimo se representa como normalmente es estudiado por los sicólogos del desarrollo.

Parte del proceso corre dentro de una etapa, pero el interés está en lo que pasa a través de las etapas, y específicamente en el máximo grado de abstracción de que puede ocuparse con éxito un grupo o un individuo a cualquier edad dada, este crecimiento es óptimo y espontáneo y muy probablemente ligado fisiológicamente. La clave aquí es la transición de la abstracción extendida del nivel relacional en un modo al Uniestructural en el siguiente. Los factores siguientes parecen estar involucrados: la maduración física, el nivel relacional que responde al modo

anterior, la disponibilidad de memoria de trabajo, el soporte social y la confrontación con un problema.

El desarrollo Intramodal: representa el caso más simple del ciclo de aprendizaje, que ocurre del nivel Uniestructural al multiestructural y del multiestructural al relacional dentro de un modo.

El primero y más particular caso del aprendizaje intramodal se presenta en el modo sensorimotor que es el único disponible en la infancia. Se ha defendido que finalmente esto lleva al conocimiento tácito de habilidades sensorimotoras, a veces de un orden sumamente alto de complejidad, obviamente va más allá de lo que los niños responden al nivel relacional y son capaces de realizar.

Las flechas en el grafico una de arriba hacia abajo y otra de abajo hacia arriba representan las dos formas de aprendizaje multimodal. La primera forma se manifiesta de la siguiente manera: es obvio que los adolescentes y adultos no aprenden los actos del modo sensorimotor de la misma manera como lo hacen los bebés. No solamente tienen el sistema nervioso más desarrollado sino que los modos de orden superior facilitan el aprendizaje en los de orden inferior. La activación dentro de varios modos es así posible para aumentar el desempeño de la habilidad en el modo sensorimotor. Hay, sin embargo, posiblemente diferencias considerables en la magnitud en que los individuos, con propósitos diferentes, utilizan modos diferentes al servicio del aprendizaje de la habilidad que es de su interés.

La segunda forma de aprendizaje multimodal se presenta cuando el individuo se encuentra en un modo de representación alto e invoca los más bajos modos para lograr el aprendizaje.

Como ejemplo se presentan las respuestas de los estudiantes, en los niveles de Taxonomía .Solo dentro de los diferentes modos de representación para el tema de evaporación, este ejemplo es tomado del artículo en cuestión.

Tabla 3. El concepto de evaporación a través de los modos y niveles

Postformal	(EA)U	desarrollando y probando una nueva teoría
Formal	R	El entendimiento activo de las disciplinas físicas.
	M	Otros conceptos físicos que involucran principios de energía, la materia.
	(EA)U	La energía de calor proporcionó las partículas de velocidades para los cambios de agua convertida en el vapor. El calor latente es la cantidad de energía proporcionada
Concreto simbólico	R	El calor convierte el agua en el vapor y se evapora afuera, permaneciendo invisible en la Atmósfera (15 años).
	M	La llama hace el vapor venir y el agua se va (9 años)
	(EA)U	Moja la cacerola
Preoperacional	R	Las causas de vapor hacen desaparecer el agua. (7 años) esto no pasa en mi casa pues mi mamá siempre hace te con el agua.
	M	Usted pone la cacerola encima de la llama y el agua se va
	(EA)U	La llama lo produce (5 años)

1.2 SESGO Y MALAS CONCEPCIONES

Es de gran importancia referirnos a los conceptos y concepciones erróneas que están presentes en los estudiantes cuando se realizan experiencias aleatorias repetidas veces. Los estudiantes creen poder adivinar e inferir resultados futuros basados en observaciones pasadas, predecir resultados sin tener en cuenta el tamaño de las muestras y adjudicar igual probabilidad a resultados que no son equiprobables.

1.2.1 Insensibilidad al tamaño de la muestra o a la ley de los pequeños números.

Este sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra según indican Tversky y Kahneman (1971), se manifiesta cuando las personas hacen una extensión indebida de la ley de los grandes números y asumen que en las muestras pequeñas debe reflejarse la probabilidad de los eventos. En particular, las personas creen que para obtener el valor de la probabilidad de un evento, basta con calcular la frecuencia relativa en un número reducido de ensayos, o, en otro sentido, asumen que los resultados obtenidos en pequeñas muestras deben ser proporcionales a la probabilidad de los eventos. Se ha encontrado que este sesgo es indiferente al paso del tiempo y al crecimiento intelectual de las personas. Fischbein (1975) lo describe en niños que se inician en la vida escolar y Tversky y Kahneman (1971) lo describen en psicólogos con experiencia.

1.2.2. El sesgo de equiprobabilidad.

Este sesgo hace referencia a la creencia de las personas en adjudicarle igual medida de probabilidad a todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio. Para comprobar esta creencia Leucoutre (1985) realiza unos experimentos en los que propone a unas personas si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de

obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. Muchas personas en diferentes contextos y con edades diferentes responden que tienen la misma probabilidad. Leucoutre argumenta que no se puede considerar este error como una falta de pensamiento combinatorio, si no, que los modelos combinatorios no se asocian con las situaciones en las que interviene el azar. Las personas que muestran el sesgo de equiprobabilidad consideran que el resultado del experimento depende del “azar” y en consecuencia todos los resultados son equiprobables.

1.3 LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en su conjunto, ya que individualmente son impredecibles. Para analizar la dificultad de la comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números (la que se observa al recoger datos estadísticos de cierto fenómeno) y las correspondientes leyes matemáticas deducidas en forma de teoremas por diferentes probabilistas y que pueden ser demostradas formalmente.

La convergencia empírica es observable en la realidad, por ejemplo, la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año termina equilibrándose alrededor de los dos sexos. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza “libertad individual bajo restricciones colectivas”. Esa correspondencia empírica, hace que las correspondientes leyes matemáticas de los grandes números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si los alumnos son capaces de diferenciar entre el modelo y la realidad, ya que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta.

A continuación se presenta una definición de la ley de los grandes números:

Sea un evento definido en un espacio muestral, cuya frecuencia de ocurrencia en n experimentos es $f(A)$ entonces cuando n aumenta considerablemente –con límite al infinito- y se repite el experimento cualquier número de veces bajo las “mismas condiciones”, entonces la frecuencia con que se da el evento respecto al número de pruebas se aproxima a un valor constante que corresponde a la probabilidad teórica de ocurrencia de dicho evento.

2. ANTECEDENTES

En la escuela de matemáticas en la Universidad Industrial de Santander se encuentra un proyecto de especialización realizado por Alexander Reátiga (2004) con el título siguiente “*confrontación entre realidad y modelo teórico: una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en niños de sexto grado.*”

Este trabajo presenta los resultados de una propuesta de aula realizada con el fin de posibilitar en el estudiante el desarrollo de la intuición probabilística acerca de los siguientes temas: espacio muestral, certeza incertidumbre de un suceso, azar, naturaleza de pruebas experimentales, tratamiento de residuos, sesgos asociados a experimentos aleatorios y la ley de los grandes números. Lo cual es respaldado teóricamente por los siguientes autores Piaget e Inhelder, Fischbein y Heitele (1985).

La actividad se llevo a cabo con 19 estudiantes de sexto grado del Gimnasio Saucará donde se presentaron cuatro talleres que se resolvieron con la menor ayuda posible del profesor, estos talleres estaban enfocados para que los estudiantes predijeran resultados, definieran espacios hicieran muestras, discutieran acerca de la naturaleza de las pruebas experimentales y fueran anotando sus respuestas. Los talleres se desarrollaron de forma lúdica. A continuación se presentan las conclusiones generales a las que llego el autor del proyecto sobre el desempeño de los estudiantes en la realización de los cuatro talleres a través de las cinco categorías de análisis.

1. *Distinción entre certeza e incertidumbre:* Al principio los estudiantes creían que podían predecir los resultados, pero a medida que se fueron realizando los talleres, los estudiantes pudieron establecer la incertidumbre de los sucesos

aleatorios, por lo tanto la actividad sirvió para cambiar algunas concepciones erróneas de los estudiantes.

2. *Naturaleza de las pruebas experimentales:* al principio los estudiantes creían que podían influir en el resultado al hacer el lanzamiento de un dado, a medida que se iba realizando la actividad los estudiantes fueron cambiando la forma de pensar, de esta manera fueron aclarando la idea de la naturaleza de las pruebas experimentales asociada al lanzamiento de los dados
3. *Relaciones entre resultados individuales y patrones de resultados:* cuando los estudiantes realizaron experimentos con un espacio muestral no equiprobable, como los resultados de la suma de dos dados, no alcanzaron a construir un modelo claro que les permitiera predecir futuros resultados. Pero se logró que los estudiantes reconocieran las relaciones presentes entre resultados individuales y patrones globales. Los estudiantes fueron incapaces de construir el espacio muestral teniendo en cuenta la conmutatividad, para el autor la principal causa fue la falta de más experiencias concretas, para que los estudiantes logaran extrapolar los conceptos.
4. *Estructura de los eventos:* determinar el espacio muestral en cada uno de los experimentos no causó mayor dificultad, pero lamentablemente los estudiantes no pudieron comprender la conmutatividad de los resultados en la suma del lanzamiento de dos dados, por lo tanto no pudieron entender de una mejor forma el espacio muestral asociado.
5. *Tratamiento de los residuos:* la diferencia entre el valor esperado y el valor realmente dado, causó muchas dificultades a los estudiantes quienes no pudieron identificar las frecuencias en los resultados, a pesar de todas las experimentaciones realizadas, por lo tanto el autor argumenta que es necesario realizar muchas mas experiencias aleatorias las cuales se pueden

reforzar con el uso del computador, lo cual puede reducir la búsqueda de regularidades por parte de los estudiantes.

El autor hace referencia a la necesidad de utilizar el medio computacional y de asistir al estudiante con cierta instrucción para modificar sus intuiciones, estas recomendaciones se tuvieron en cuenta en el desarrollo de esta investigación, donde se trabajo de forma conjunta experimentaciones físicas y simuladas, en las cuales el docente toma el papel de mediador, proporcionando las herramientas necesarias para que el estudiante construya de forma adecuada sus conceptos.

Otro trabajo de relevancia para el desarrollo de este proyecto, es el realizado por Edgar David Jaimes Carvajal y Jorge Alexander Martínez Silva como proyecto de especialización en educación matemática realizado en la Universidad Industrial de Santander: *“Probability Explorer: un socio cognitivo en la construcción del significado de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional.* Este trabajo presenta una experiencia en el aula cuyo propósito era implementar y estudiar los efectos de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo del concepto de probabilidad a partir de una situación problema contextualizada y el uso de un simulador aleatorio llamado Probability Explorer, el principal interés de los autores era identificar las malas concepciones probabilísticas a partir de un diagnóstico, analizar los posibles cambios y su relación con la construcción del significado de la ley de los grandes números durante el desarrollo de las actividades de experimentación y simulación computacional a través del enfoque frecuencial.

La población objeto de estudio fue un grupo de 40 estudiantes de octavo grado con edades entre 12 y 17 años. Se realizaron una serie de actividades basadas en el análisis de resultados experimentales en una promoción de paletas, la cual giraba en torno a una apuesta relacionada a el lanzamiento de una moneda y la extracción de dos balotas de dos colores al azar donde el objetivo general era que

los estudiantes pudieran predecir con argumentos si la promoción era viable a largo plazo. A continuación se presentan las conclusiones generales a las que llegaron los autores a través de las categorías de análisis propuestas en su metodología

1. Modificabilidad de las concepciones previas: Se analizaron las intuiciones de los estudiantes en cuatro momentos distintos del proceso.

- **La controlabilidad y la predicibilidad se relacionan como significados iniciales en forma diferente para cada estudiante.** En el diagnóstico se pudo observar que los estudiantes creen que pueden predecir y controlar los resultados, a pesar de que esas malas concepciones no fueron modificadas no representaron en sí un obstáculo para la construcción del significado de la ley de los grandes números.
- **Los sesgos son posibles de modificar.** En el diagnóstico se pudo notar malas concepciones en cuanto a los sesgos de desorden, de los valores recientes y de equiprobabilidad. El sesgo de desorden pudo ser modificado por algunos estudiantes gracias al análisis que hicieron de las secuencias aleatorias desde el punto de vista frecuencial, a partir de la experimentación con monedas y balotas.

El sesgo de los valores recientes fue modificado por algunos alumnos, al comprender el significado de probabilidad que le permitió justificar los resultados de un fenómeno inmediato, a corto y a largo plazo con coherencia.

El análisis directo con experimentos reales y simulados, permitió a los estudiantes modificar el sesgo de equiprobabilidad cuando deben hacer predicción de secuencias aleatorias teniendo en cuenta el espacio muestral.

- **El surgimiento del significado de parcialidad.** Este significado surgió como consecuencia del análisis de los estudiantes de las frecuencias absolutas y fue utilizado como un criterio para determinar la aleatoriedad de un fenómeno.

En la experimentación real con monedas, se notó que el cliente escoge más la cara que el sello y efectivamente gana, lo cual fue un impedimento para que los estudiantes aceptaran la aleatoriedad del fenómeno relacionado con la primera promoción de paletas y más aun le tomaran confianza a la herramienta computacional; lo cual solo pudo ser posible al realizar la experimentación con la nueva promoción de paletas utilizando balotas.

- **Los significados que surgen de la experimentación física influyen en la confiabilidad que tiene el estudiante sobre la herramienta computacional y sus resultados.** Para generar confianza en la herramienta los estudiantes esperan encontrar características similares en el comportamiento de los resultados reales y simulados al comparar las secuencias aleatorias y las frecuencias absolutas y relativas, lo anterior implica una mayor responsabilidad a la hora de diseñar experimentos físicos que no permitan generar malas concepciones.
- **Los resultados experimentales validan los resultados simulados.** Sin la experiencia física es difícil que los resultados construidos en el ambiente computacional puedan ser considerados por los estudiantes como válidos en la realidad del fenómeno.
- **La coordinación entre los sistemas de representación.** Es común que a los estudiantes se les dificulte la interpretación y descripción de cualquier tipo de gráficas estadísticas. Por lo tanto es muy importante que ellos conozcan el fenómeno real, interactúe con el y lleve a cabo un proceso de abstracción para

comprender la simulación computacional. De esta forma el estudiante puede comprender de manera simple los distintos sistemas de representación.

2. Construcción del significado conceptual. La comprensión de la ley de los grandes números exige la comprensión inicialmente de dos significados el de “variabilidad” y el de “estabilidad” relacionados con las características de las frecuencias relativas a corto y largo plazo, así como el significado de probabilidad y el espacio muestral relacionados con las características superficiales del experimento.

- **El surgimiento del significado de variabilidad.** Para que el estudiante pueda construir el significado claro de “variabilidad” era necesario primero el surgimiento del significado de “estabilidad”.
- **El significado de estabilidad.** Se refiere a la capacidad del estudiante para percibir en el resultado de las frecuencias relativas la tendencia hacia un valor específico al repetir el experimento. Este resultado requiere tener en cuenta dos aspectos para su activación: el número de pruebas y la repetición. En general los estudiantes no pudieron establecer este significado ni expresarlo claramente, debido a la influencia de los significados de parcialidad.
- **Relación del espacio muestral y el significado de probabilidad.** En el caso de un estudiante llamado Camilo, este resultado aparece de manera significativa cuando analiza las condiciones de la nueva promoción con un espacio no equiprobable y de alguna manera predice la probabilidad. Lo cual permite asociar a cada espacio muestral una probabilidad, marcando una diferencia con sus compañeros a la hora de construir el significado de la ley de los grandes números. Camilo relacionó el espacio muestral con el valor de probabilidad y a su vez el valor de probabilidad con la frecuencia relativa al condicionar el “cumplimiento del valor de la probabilidad al hecho de que dicho

valor debía reflejarse en las frecuencias porcentuales, encontrando que este valor solo se cumplía al realizar el experimento a largo plazo como lo pudo constatar en el simulador demostrando una aparente comprensión de la ley de los grandes números.

Los autores hacen referencia a la necesidad de diseñar y aplicar experimentos físicos que no generen malas concepciones a la hora de construir significados certeros a través de las simulaciones computacionales, aspecto que se tuvo en cuenta en el momento en que se propusieron las actividades de experimentación física, lo cual fue muy importante en el desarrollo de esta investigación. Además se tendrán en cuenta otros aspectos que mas adelante aparecerán en el análisis de resultados.

3. METODOLOGÍA

Este proyecto utiliza una metodología de tipo descriptivo que busca identificar y analizar el desarrollo de las concepciones que los estudiantes de octavo grado de un colegio rural poseen acerca de los experimentos aleatorios y la probabilidad al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional.

3.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población objeto de estudio son los estudiantes de grado octavo; la muestra la conformaban 35 estudiantes de grado octavo del Colegio Luz de la Esperanza, en el corregimiento Berlín, municipio de Tona (Km. 64 vía a Pamplona, Santander-Colombia), con edades entre los 12 y 17 años, en un ambiente rural de estratos 1 y 2, los cuales no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal en los conceptos de probabilidad.

Durante la investigación se seleccionó un grupo de 24 estudiantes, quienes participaron en todas las etapas de la investigación, la cual se realizó en las horas de clase de Matemáticas e Informática aprovechando la ausencia de la docente debido a una incapacidad.

3.2 INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

En el proceso de la investigación se utilizaron los siguientes instrumentos para la recolección de datos:

- **Diario de campo:** en el cual se registraron los sucesos importantes durante la investigación, aspectos como preguntas realizadas por los estudiantes, conversaciones entre los estudiantes acerca de las actividades, registro de las tablas realizadas grupalmente y diálogos con los estudiantes.
- **Video grabación:** con la debida autorización de los estudiantes y directivas del colegio, se realizaron algunas grabaciones de las actividades realizadas por los estudiantes durante la investigación.
- **Informes escritos de los talleres:** en los cuales se encuentra registrada la mayor parte de información que será utilizada en el análisis de esta investigación. En esos informes se puede percibir las concepciones de los estudiantes a lo largo del periodo de investigación.
- **Archivos del computador:** en estos archivos se tiene registro de algunos resultados obtenidos por parte de los estudiantes a partir de la utilización del software Probability Explorer.

3.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de la investigación fueron diseñadas una serie de actividades acerca de experimentos aleatorios con monedas, dados y bolas en una urna y la utilización del software Probability Explorer, La aplicación de las actividades tuvo lugar durante tres meses aproximadamente.

La investigación se desarrolló en cuatro etapas. Las actividades desarrolladas en el transcurso de las etapas, referentes a los experimentos aleatorios aquí mencionados, eran prácticamente las mismas, con el fin de observar el

desempeño y avance de los estudiantes en cada uno de los experimentos al ser sometidos a experiencias similares.

A continuación se describen cada una de las etapas de investigación:

ETAPA 1: Diagnóstico

Esta etapa comprende el diseño y la aplicación de una prueba con el fin de conocer las preconcepciones de los estudiantes acerca de los juegos de azar, para tener un punto de referencia para las posibles modificaciones que los estudiantes podrían presentar durante la investigación. Esta prueba consta de ocho preguntas las cuales fueron contestadas por los estudiantes de forma individual. Esta prueba tuvo una duración de una hora. (Ver Anexo A). A continuación se presentan cada una de las preguntas realizadas en el diagnóstico, con la justificación correspondiente:

Con la primera y segunda pregunta se quería observar si los estudiantes conciben la aleatoriedad, y como justifican los resultados de los experimentos aleatorios. Se tomó como referencia el lanzamiento de una moneda.

- 1) *Imagina que lanzas una moneda al aire, ¿cuál es el resultado que vas obtener? ¿Por qué?*
- 2) *Si un compañero te propone una apuesta de \$ 2000 a cara y sello y gana quien obtenga el resultado que escogió:*
 - a) *¿Qué cara de la moneda escogerías?*
 - b) *Estarías seguro de ganar, si o no ¿Por qué?*

Con la tercera pregunta se querían indagar las concepciones de los estudiantes respecto a la equiprobabilidad y a los eventos imposibles.

3) *Si en tu colegio hacen una rifa, gana quien al lanzar un dado obtenga el número tres, el juego tiene las siguientes condiciones: todos tienen la oportunidad de lanzar, aunque el tres le haya salido a otra persona, si mas de una persona saca el número tres se reparten el premio.*

a) Crees que es posible ganar si o no ¿por qué?

b) Si son 10 personas las que juegan ¿cual crees que tiene más posibilidades de ganar? Justifica tu respuesta.

c) Si hacen otra rifa en la cual gana quien obtenga el número siete, crees que es posible ganar si o no y ¿por qué?

Con la cuarta pregunta se buscaba observar si los estudiantes presentaban algunas intuiciones acerca de la ley de los grandes números, a pesar de ser una pregunta muy ambiciosa, se considero pertinente hacerla.

4) *Si lanzas un dado 120 veces. ¿cuántas veces crees que saldrá cada resultado?*

Con la quinta pregunta se quería observar si los estudiantes creen que es posible controlar los resultados de los experimentos aleatorios realizados con dados.

5) *¿Crees que existe alguna forma de lanzar el dado para obtener un resultado específico?*

Con la sexta pregunta se quería observar si los estudiantes relacionaban en alguna forma la composición del espacio muestral asociado a un experimento con los resultados que se obtienen cuando el experimento se realiza.

Para que los estudiantes pudieran responder con toda claridad a esta pregunta fue necesario explicarles que significaba la palabra justo en un juego, de la siguiente

forma: justo es cuando todos los participantes tienen las mismas posibilidades de ganar.

6) *En una urna se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja, suponga que vas a jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna, ganas si sacas el color que escogiste.*

a. *¿Cuál color escogerías y por qué?*

b. *¿El juego es justo? ¿por qué?*

c. *Si en la urna se depositara otra bola roja ¿cual color escogerías? ¿ahora el juego es justo?*

ETAPA 2. Experimentación física.

Esta etapa se realizó en dos talleres: Taller 1: Jugar para Aprender I y Taller 2: Jugar para Aprender II. Estos talleres fueron diseñados con el fin de conocer las concepciones que los estudiantes de octavo grado se forman acerca de los experimentos aleatorios después de experimentar con monedas, dados y bolas en una urna.

El Taller 1: jugar para aprender I (Ver Anexo B), presenta dos actividades. La primera, con monedas, fue realizada en parejas, pero las preguntas fueron contestadas individualmente. Se hizo una demostración con un estudiante y se registró en una tabla en el tablero para que todos llenaran la tabla de la misma forma, además fue necesario esclarecer cual era la cara y el sello de la moneda, en este caso se escogió como sello el lado de la moneda en la que aparece el número que identifica su valor. A continuación se presentan cada una de las actividades realizadas en el taller y las preguntas con la justificación correspondiente:

La primera actividad pretendía confrontar en los estudiantes sus concepciones a priori sobre los resultados de la moneda con los resultados obtenidos después de lanzarla varias veces. Se quería conocer hasta qué punto los estudiantes, después de esta experiencia, observaban alguna regularidad en los resultados obtenidos que les permitiera realizar algunas predicciones sobre los resultados que se obtienen al repetir el experimento muchas veces.

1. *Los invito a jugar, van a conformar grupos de 2 estudiantes, cada uno va a escoger un lado de la moneda, lancen la moneda 20 veces y registren los resultados en la siguiente tabla, gana quien al final obtenga más resultados a favor.*

a. *¿Cuál lado de la moneda escogiste? ¿por qué?*

b. *¿Cuál de los dos tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?*

Después de que los estudiantes hicieron la actividad planteada debían comparar los resultados con los de una pareja de compañeros, luego elaborar una tabla con los datos de todo el grupo (Ver Anexo G) y responder las siguientes preguntas:

c. *¿Qué concluyes acerca del juego?*

d. *¿Crees que puedes predecir los resultados que obtendrías al lanzar 1000 veces una moneda, sin tener que lanzar las monedas? ¿Por qué?*

La segunda actividad, experimentación con dados, fue realizada en la cancha del colegio al aire libre con cuatro grupos de seis personas y un grupo de cuatro. Cada grupo tenía que dibujar el cuadro presentado en el taller (Ver Anexo B) con tiza en la cancha. Esta actividad fue diseñada de tal manera que los estudiantes tuvieran un contexto y además pudieran divertirse. Después de que cada grupo hizo el cuadro se les entregó un dado y se hizo la explicación pertinente. Las preguntas correspondientes a esta actividad fueron contestadas por los

estudiantes individualmente. Este taller tuvo una duración de tres horas (Ver Anexo B). Este taller tenía el mismo objetivo que el primero pero con el lanzamiento de un dado, de ahí que las preguntas tuvieran las mismas intenciones.

A continuación se presenta la actividad y las preguntas realizadas con la debida justificación:

2. En el siguiente juego se presenta un campo, en el centro del campo hay un tesoro, cada jugador debe escoger un número del dado, los jugadores pueden avanzar hacia el tesoro solamente sí al lanzar un dado se obtiene el número que escogió, sin importar quien lance los dados. Gana el primero que llegue al tesoro.

- Llena la siguiente tabla:

Resultado del lanzamiento	Número de veces que salió
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- Compara tus resultados con los de otros compañeros y da unas conclusiones*
- Completa la tabla con los resultados de todos tus compañeros. (Ver Anexo H)*
- ¿Cuál de los números tiene más posibilidad de salir?*
- ¿Crees que con el número que escogiste si vuelves a jugar es posible ganar?
¿Por qué?*

- e. *¿Crees que con el número que escogió tu compañero, si vuelve a jugar es posible que gane, si o no? ¿Por qué?*
- f. *Al lanzar los dados puedes predecir que número vas a obtener si o no ¿Por qué?*
- g. *¿Existe alguna forma de lanzar un dado y obtener un número específico?*

- h. *Si lanzas los dados 2400 veces ¿cuántas veces esperas que salga cada uno de los números sin tener que realizar los lanzamientos? ¿Por qué?*

El Taller 2: jugar para aprender II, presenta dos actividades diseñadas con bolas en una urna. Para efectos de este taller fue necesario construir 16 urnas y adecuar 72 bolas de pimpón. Las actividades fueron diseñadas de tal forma que los estudiantes pudieran contextualizar la experimentación y además se divirtieran, buscando de tal forma la motivación e interés por parte de ellos. La primera actividad fue realizada en parejas, a cada pareja se le entregó una urna y tres bolas de pimpón de las cuales dos eran del mismo color. La segunda actividad se realizó en grupos de 3 estudiantes, a cada grupo se le entregó una urna y seis bolas de pimpón y se llevó a cabo en la cancha del colegio al aire libre. Las 5 preguntas propuestas en el taller fueron resueltas individualmente. El taller se desarrolló durante dos horas. (Ver Anexo C) A continuación se presentan las actividades, las preguntas y su justificación:

1. *En el siguiente juego vamos a suponer que estamos en un reino en el cual cada año el rey escoge a sus esclavos y a sus caballeros. El rey utiliza un método muy curioso para escogerlos: En una urna deposita tres bolas dos de ellas del mismo color (eje: dos amarillas y una verde). Cada persona tiene que sacar una bola de la urna, si pertenece a las dos bolas del mismo color será esclavo, si es distinta será caballero. Cuando se es elegida cada persona la bola se vuelve a colocar en la urna. Las bolas son indistinguibles entre sí y la persona no puede verlas. Haz esta actividad con otro compañero, juega 20 veces, cuenta cuántas*

veces fuiste elegido caballero y cuántas esclavo en el reino, Después de que todos los grupos terminen la persona que fue elegida más veces caballero en el reino colocará a los esclavos un ejercicio físico.

Antes de realizar el ejercicio responde las siguientes preguntas:

Con las preguntas a y b se querían corroborar las concepciones de los estudiantes con respecto a las presentadas en el diagnóstico, antes de realizar la experimentación con urnas.

a. ¿Crees que el rey es justo con las personas que viven en el reino ? explica tu respuesta

b. ¿Cómo está planteado el juego crees que serás elegido más veces, esclavo o caballero? ¿Por qué?

Con el apartado c se buscaba que los estudiantes después de realizar la experimentación con urnas, pudieran modificar los sesgos que presentan, o por el contrario afianzar las buenas concepciones.

c. Elabora una tabla para registrar el número de veces que salió cada color, llena la tabla con la inicial de tu nombre y la de tu compañero para que se pueda saber cuál persona obtuvo el resultado y responde la siguiente pregunta:

❖ *Con base en los resultados obtenidos, sigues pensando lo mismo que contestaste en la pregunta 1. b) ¿por qué?*

❖ *Compara tus resultados con los de tus compañeros. Y elabora una tabla con los resultados de todo el grupo registrando cuántas veces salió cada color. (Ver Anexo I).*

d. *Si el rey hiciera esta actividad 180 veces en el reino, aproximadamente, ¿Cuántas veces serías elegido esclavo y cuántos caballero?*

Con la misma intención que la de la actividad anterior, se propuso una experiencia con urnas añadiendo un color adicional.

2. *El rey ha decidido hacer un cambio en el reino, ahora va a clasificar a las personas en tres grupos, caballeros, soldados y esclavos. Con este fin deposita 6 bolas ejemplo: 1 roja, 2 amarillas y 3 azules. Las personas que saquen la bola roja serán caballeros, los que saquen la amarilla serán soldados y los que saquen la azul serán esclavos. (haz lo mismo pero con los colores que te correspondieron) juega 30 veces, cuenta cuántas veces fuiste elegido caballero, cuántas soldado y cuántas esclavo en el reino, Después de que todos los grupos terminen, la persona, o personas, que fue elegida más veces caballero en el reino, colocará a los esclavos un ejercicio físico, solamente se salvarán las tres personas que fueron elegidas más veces soldados.*

a) *Registre en la siguiente tabla los datos obtenidos (escribe los colores que te correspondieron) llena la tabla con la inicial de tu nombre y la de tus compañeros, para poder saber cuál persona obtuvo el resultado.*

b) *Compara los resultados con los de tus compañeros y elabora una tabla de todo el grupo para registrar cuántas veces salió cada color. (Ver Anexo J)*

c) *¿Crees que el rey es justo con las personas que viven en el reino? ¿Por qué?*

d) *Si el rey hiciera esta actividad 600 veces en el reino, aproximadamente, ¿Cuántas veces serías elegido esclavo, cuántas soldado y cuántas esclavo? ¿Por qué?*

ETAPA 3. Experimentación computacional:

Esta etapa se realizó en dos talleres: El taller 1: Explorando el Probability Explorer y el taller 2: Simulación y Juego con el Probability Explorer. Estos talleres fueron diseñados con el fin de identificar el desarrollo de las concepciones acerca del azar cuando los estudiantes de octavo grado realizan experimentos aleatorios utilizando el software Probability Explorer.

Para el taller 1: Explorando el Probability Explorer (Ver Anexo D), se elaboró una guía con una amplia explicación del funcionamiento y la simulación de experimentos aleatorios con el Probability Explorer. Este taller de familiarización con el paquete se realizó en la sala de cómputo del colegio, que a pesar de tener 18 computadores, solo fue posible instalar el software en 9 de ellos lo que nos obligó a realizar la actividad en grupos de 3 o 2 estudiantes. Para el desarrollo de la actividad los estudiantes tenían que seguir paso a paso las instrucciones de la guía que estaba estructurada con base a tres preguntas:

1. ¿Cómo se abre el programa Probability Explorer?
2. ¿Cómo funciona el programa Probability Explorer?
3. ¿Cómo simulo un experimento?

Para responder a la primera pregunta los estudiantes debían seguir una serie de instrucciones que les permitiría abrir el programa.

Para responder a la segunda pregunta los estudiantes debían seguir una serie de instrucciones que les permitía conocer cada una de las herramientas con las que cuenta el programa.

Por ultimo para dar respuesta a la tercera pregunta los estudiantes debían realizar una serie de ejercicios, para lo cual era necesario que manejaran la primera y segunda actividad de la guía. La profesora estuvo dando las explicaciones requeridas por los estudiantes. Esta actividad se prolongó durante dos horas. (Ver Anexo D)

El taller 2: Simulación y Juego con el Probability Explorer, comprendía una serie de actividades de simulación de experimentos aleatorios con dados, monedas y bolas en una urna. Como los estudiantes ya sabían manejar el programa se les entregó el taller y comenzaron a realizarlo sin ningún inconveniente. Este taller se desarrolló en grupos de 3 estudiantes; las 12 preguntas del taller fueron resueltas individualmente. Este taller duró 3 horas. (Ver Anexo E)

Las actividades y preguntas propuestas se presentan a continuación con la debida justificación:

Todas las actividades propuestas son las versiones simuladas en el computador de las ya realizadas en la Etapa 2, Experimentación Física. El objetivo era el mismo, esto es, observar si el estudiante percibía la estrecha relación entre la distribución de los resultados posibles en el espacio muestral y la distribución de los datos empíricos. Se pensaba que con las ventajas que ofrece el paquete, en términos tanto de nuevas representaciones de los resultados como de la facilidad que se tiene para aumentar el tamaño muestral y para obtener variadas muestras, los estudiantes serían capaces de percibir la relación propuesta. Empezamos con el lanzamiento de una moneda:

1. Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Probability Explorer para experimentar con una moneda. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:

- a) Haz 50 lanzamientos de una moneda en el Probability Explorer y registra en la siguiente tabla cuántas veces salió cara y cuántas sello.
- b) Sin borrar el total de lanzamientos realiza otros 50 colocando el Probability Explorer en alta velocidad. Y registra cuántos lanzamientos llevas en total, cuántas caras y cuántos sellos.
- c) Realiza 100 lanzamientos más y regístralos en la tabla.
- d) Realiza otros 100 lanzamientos y regístralos.
- e) Por ultimo Realiza 200 lanzamientos más y regístralos en la tabla.

Las preguntas que se plantearon después de realizada la actividad fueron las siguientes:

2. *En 1000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas caras y cuántos sellos saldrán? ¿Por qué?*
3. *Realiza 500 lanzamientos y súmalos con los 500 realizados anteriormente. Regístralos en la tabla ¿Cuántas caras y cuántos sellos obtuviste en total? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados ¿Por qué?*
4. *En 5000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas caras y cuántos sellos saldrán? ¿Por qué?*
5. *En 100000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas caras y cuántos sellos crees que pueden salir? ¿Por qué?*

Ahora continuamos con el lanzamiento de un dado:

6. *Experimentar con un dado de 6 caras. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:*

- a) Haz 60 lanzamientos de un dado en el Probability Explorer y registra en la siguiente tabla cuántas veces salio cada número.
- b) Sin borrar el total de lanzamientos realiza otros 60 colocando el Probability Explorer en alta velocidad, y registra cuántos lanzamientos lleva en total, y cuántas veces ha salido cada número.
- c) Realiza 120 lanzamientos más y regístralos en la tabla.
- d) Realiza otros 120 lanzamientos y regístralos.
- e) Por ultimo realiza 240 lanzamientos más y regístralos en la tabla.

Terminada la experiencia se les propusieron las siguientes preguntas:

7. *En 1200 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces debe salir cada número? ¿Por qué?*
8. *Realiza 600 lanzamientos y súmelos con los 600 realizados anteriormente. Regístralos en la tabla ¿Cuántas veces salio cada número? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados ¿Por qué?*
9. *En 6000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá número?*
10. En 24000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada número?

Ahora continuamos con la extracción de bolas de una urna

11. Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Probability Explorer para experimentar con bolas en una urna. Introduce 2 bolas rojas y una negra. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:

- a) Haz 60 extracciones y registra en la siguiente tabla cuántas veces salió cada color
- b) Sin borrar las 60 extracciones realiza otras 60 y registra en la tabla cuantas extracciones van en total y cuantas veces ha salido cada color.
- c) Realiza 120 extracciones más y regístralas.

- d) Realiza otras 120 extracciones más y regístralas.
- e) Por ultimo realiza 240 extracciones y regístralas en la tabla.

Terminada la experiencia se propusieron las siguientes preguntas:

- 12. En 1200 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color?
- 13. *Realiza 600 extracciones y súmelas con los 600 realizadas anteriormente. Regístralas en la tabla ¿Cuántas veces salio cada color? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados ¿Por qué?*
- 14. En 6000 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color?
- 15. En 24000 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color?

ETAPA 4: Evaluación

La evaluación al final de la experimentación computacional se realizó en dos momentos: una escrita y otra computacional. Se quería evaluar cuáles eran los significados que los estudiantes se habían formado alrededor de los diferentes conceptos que habían aparecido en juego durante el desarrollo de la investigación. En particular, se querían conocer los cambios y transformaciones que los estudiantes habían sufrido a través de las actividades implementadas. La evaluación fue resuelta en forma individual, la parte escrita comprendía 7 preguntas y la computacional 2 preguntas. Para poder llevar a cabo la fase computacional fue necesario dividir el grupo, puesto que no se contaba con el número de equipos requeridos (Ver Anexo F). A continuación se presentan las preguntas propuestas que no requieren mayor explicación ya que son muy semejantes a las ya hechas a lo largo de las experimentaciones física y computacional.

- 1) *Imagina que lanzas una moneda al aire ¿cuál resultado vas obtener? ¿Por qué?*

2) Si lanzas una moneda determinado número de veces, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada resultado? ¿por qué? Completa la siguiente tabla:

Número de lanzamientos	Cara	Sello
100		
600		
1000		
20000		

3) *Al lanzar un dado cual número tiene más posibilidad de salir:*

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5
- f) 6
- g) *todos tienen la misma posibilidad de salir*

4) *Al lanzar un dado puedes predecir que número vas a obtener ¿Por qué?*

5) Si lanzas un dado determinado número de veces, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada resultado? Completa la siguiente tabla:

Número de lanzamientos	1	2	3	4	5	6
60						
600						
1200						
2400						

6) *En una urna se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja, suponga que vas a Jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna, ganas si sacas el color que escogiste.*

a) *¿Cuál color escogerías? ¿Por qué?*

b) *¿El juego es justo? ¿Por qué?*

c) *Si en la urna se depositara otra bola roja ¿Cual color escogerías? ¿El juego es justo?*

7) *Si en una urna se introducen 2 bolas negras y una roja, al hacer un determinado número de extracciones, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color? Completa la siguiente tabla:*

Número de lanzamientos	Negro	Rojo
30		
300		
600		
1200		
60000		

La fase computacional se desarrollo con el fin de identificar si los estudiantes concebían de forma clara la ley de los grandes números al hacer extracciones de bolas en una urna, esta actividad fue tomada de la investigación de Jaimes y Martínez (2007) como se presenta a continuación:

8) *Utilizando el Probability Explorer, tu profesor introduce una cantidad de bolas en una urna y tendrás que deducir cuántas bolas hay de cada color dentro de la urna. ¿Por qué?*

Se realizaron varios experimentos primero se seleccionaron dos bolas de un mismo color y una distinta en el Probability Explorer hay una opción la cual permite ocultar los iconos, por lo tanto los estudiantes no podían saber cuántas bolas había en la urna, Los estudiantes debían proceder en sentido contrario al utilizado en los talleres, esto es, debían hacer tantas extracciones como fuesen necesarias y observar los diagramas de barras para inferir la composición de la urna, en el siguiente ejercicio fueron introducidas dos bolas de distinto color, después fueron introducidas 3 bolas de un color y una de otro, Por ultimo se realizo el siguiente ejercicio con 3 bolas azules, 1 negra y 1 amarilla.

3.4 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis de resultados de esta investigación, se establecieron dos categorías de análisis:

Modificabilidad de las concepciones previas: en la cual se analizo hasta que punto las intuiciones previas y malas concepciones evidenciadas en el diagnostico pudieron ser modificadas con la estrategia aplicada.

Relación entre el espacio muestral asociado a un experimento con la distribución de los datos empíricos: esta categoría permitió analizar si la estrategia aplicada fue útil para que los estudiantes advirtieran lo impredecible de un solo experimento y la relación entre la composición del espacio muestral con la convergencia de los resultados al realizar varias repeticiones. Intuyendo de esta forma el significado conceptual de la ley de los grandes números.

Debido a la complejidad en la cual se presenta cada una de las concepciones de los estudiantes en cuanto a la relación entre el espacio muestral asociado a un experimento con la distribución de los datos empíricos, en cada una de las etapas

de investigación presentadas en este trabajo, se toma como ayuda para el análisis y evaluación de este proceso la taxonomía SOLO de Biggs y Collis acerca de los ciclos de aprendizaje, la cual permite hacer una globalización de los resultados de los estudiantes durante cada una de las etapas, donde se puede observar más claramente su avance. Adaptada de la siguiente forma en relación al contenido de la presente investigación:

Niveles en la taxonomía SOLO

Preestructural: el estudiante no asume la pregunta, presenta malas concepciones respecto a la naturaleza de los experimentos aleatorios o evidencia algún sesgo.

Uniestructural: el estudiante, considera lo impredecible y variabilidad de los experimentos aleatorios, pero no los relaciona con el espacio muestral.

Multiestructural: el estudiante tiene en cuenta de alguna manera el espacio muestral al hacer predicciones acerca de los resultados del experimento aleatorio. Pero no lo hace de forma adecuada.

Relacional: el estudiante relaciona el espacio muestral con el resultado de los experimentos al realizar varias repeticiones, de forma coherente.

Abstracción Extendida: el estudiante maneja en forma abstracta la relación entre espacio muestral con el resultado de los experimentos, por lo tanto es capaz de inferir el espacio muestral, partiendo de los resultados del experimento.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presentará el análisis general de todas las actividades desarrolladas en este trabajo a través de las dos categorías propuestas en la metodología: Modificabilidad de las concepciones previas y Estableciendo la relación entre el espacio muestral asociado a un experimento con la distribución de los datos empíricos.

MODIFICABILIDAD DE LAS CONCEPCIONES PREVIAS

En esta categoría se analizó hasta qué punto las intuiciones previas y malas concepciones evidenciadas en el diagnóstico en cada uno de los experimentos aleatorios (con dados, monedas y bolas en una urna) pudieron ser modificadas con la estrategia aplicada.

Respecto a la naturaleza de los experimentos aleatorios:

Esta categoría está relacionada con el hecho de que algunos estudiantes asumen que en cierta forma se puede influir sobre los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento.

En cuanto a los experimentos aleatorios con monedas y dados en el diagnóstico, se observó que la mayoría de los estudiantes no consideran la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, puesto sino que creen poder controlar los resultados de alguna manera, de forma física o sobrenatural, como acudiendo a Dios, a la buena suerte o haciendo lanzamientos de determinada forma y en determinado turno.

Respecto a la primera y segunda pregunta del diagnóstico, relacionadas con monedas (Ver Anexo A), se pudo observar lo siguiente:

- Quince de los veinticuatro estudiantes escogieron uno de los lados de la moneda y creen estar seguros de ganar, once de ellos por razones como: fe en Dios, porque tienen buena suerte, porque ese lado siempre cae, porque el que juega limpio siempre gana. Los otros cuatro estudiantes creen poder controlar los resultados como lo expresan en su respuesta: si se lanza por cara cae sello, y viceversa.
- Los nueve estudiantes restantes contestaron que no están seguros de ganar por razones como la suerte, el destino, porque la otra persona también tiene posibilidades de ganar, porque es impredecible, porque puede caer cara o sello. Donde aparentemente se evidencia que los estudiantes consideran la impredecibilidad y aleatoriedad en los resultados. La respuesta dada por Eider Fabián es un ejemplo de esta consideración:

“No estaría seguro de ganar o perder porque hay una posibilidad de dos de que gane la apuesta”.

Después de la experimentación física con monedas (Ver Anexo B), se pudo observar que 13 estudiantes modificaron sus concepciones, en cuanto a la impredecibilidad y aleatoriedad de los resultados de los experimentos aleatorios argumentando que cualquier lado de la moneda puede caer.

En la evaluación final tan solo tres estudiantes consideran que se puede controlar el resultado del lanzamiento de una moneda, la respuesta dada por Dimas Alberto es un ejemplo de esta concepción:

“El resultado que voy a obtener es sello por que si agarras la moneda por el lado de la cara puede voltear la moneda y caer sello”

En cuanto a los dados (Ver Anexo A) se pudo observar que 13 estudiantes consideran la predicibilidad de los resultados con argumentos similares a los que presentaron con las preguntas referentes a la experimentación con monedas.

- Un ejemplo claro de este pensamiento determinista es la respuesta de Alix a la pregunta 7 (Ver Anexo A):

“Si, hay una forma tirándolo con una sola mano y la otra cruzando los dedos el resultado seria 6 para mí”.

Durante la segunda etapa en la experimentación física con dados (Ver Anexo B), se pudo observar que 23 estudiantes consideran la variabilidad e impredecibilidad de los resultados, con argumentos como: los números varían, nunca se sabe que va a caer, es imposible predecir. Solamente un estudiante no considera la impredecibilidad de los resultados, ya que sigue creyendo que puede lanzar el dado y obtener un número específico.

En la experimentación con bolas en una urna, en la pregunta ocho del diagnóstico (Ver Anexo A) cinco estudiantes escogen el color rojo, argumentando que es el color que proporciona suerte.

Después de la experimentación física estos estudiantes cambian sus concepciones como se podrá observar en el análisis respecto al sesgo de equiprobabilidad.

Conclusión Respecto a la naturaleza de los experimentos aleatorios:

- A partir de las experimentaciones físicas con monedas, dados y bolas en una urna en general se puede decir que los estudiantes modificaron sus concepciones acerca de la predicibilidad de los experimentos aleatorios., Se puede pensar que las razones por las cuales esto ocurrió es que cuando los estudiantes trataban de controlar los resultados no lo podían lograr. Por ejemplo, cuando querían obtener un número del dado lanzándolo de una forma específica, tenían que hacer varios lanzamientos, y si lo lograban, al hacer otro lanzamiento ya no les era posible, por lo tanto esta forma perdía la credibilidad. Esto quiere decir que los estudiantes descartaron la posibilidad de hacer de los experimentos mencionados, experimentos determinísticos.
- En cuanto a los estudiantes que después de la experimentación física, creen todavía poder controlar los resultados, creo que se debe a que algunas veces el resultado que piensan coincide con el resultado que sale después del lanzamiento. Sin embargo, no están tan seguros de que ocurra como observamos en la respuesta de Dimas Alberto: *“El resultado que voy a obtener es sello por que si agarras la moneda por el lado de la cara puede voltear la moneda y caer sello”*, por consiguiente el deja la duda “puede que no”.

Respecto al sesgo de equiprobabilidad:

Durante todas las etapas de investigación, se presentaron a los estudiantes, experimentos aleatorios con bolas en una urna en las cuales, el espacio muestral no es equiprobable. En los resultados de la prueba diagnóstica (Ver Anexo A) se pudo constatar que la mayoría de estudiantes poseían el sesgo de equiprobabilidad, de hecho, Catorce estudiantes escogieron el color rojo por razones subjetivas y ocho estudiantes escogieron el negro por ser el color

predominante en la urna. La respuesta de Jean Maycol es un híbrido de los dos tipos de respuesta mencionados:

“El rojo porque es un color que me gusta aunque podría perder o ganar”

En el juego del rey los esclavos y caballeros (Ver Anexo C), los estudiantes antes de realizar la actividad, evidenciaron el sesgo de equiprobabilidad.

Durante la actividad, los estudiantes se vieron muy interesados, parte importante de la motivación fue el contexto en el cual se desarrollo, puesto que los estudiantes, querían ser elegidos caballeros, para poder someter a sus compañeros a realizar un ejercicio físico, algunos de ellos estaban convencidos de que gracias a su buena suerte iban a ganar, como se pudo constatar en algunas entrevistas realizadas a los estudiantes, un ejemplo de esta concepción es la entrevista realizada a Alexis Capacho:

Profesora: *¿Alexis usted qué cree que va a ser elegido mas veces esclavo o caballero?*

Alexis: *Pues, profesora yo creo que caballero, porque tengo muy buena suerte y esta vez voy a ganar.*

Profesora: *¿Está seguro?*

Alexis: *claro profe si uno se lo propone lo logra.*

Después de que los estudiantes terminaron la actividad me acerque a Alexis nuevamente y continúe con la entrevista:

Profesora: *¿Cómo le fue en el juego?*

Alexis: *Mal*

Profesora: *¿Por qué?*

Alexis: *Es que el rey es muy astuto*

Profesora: *¿cómo así?*

Alexis: *Pues, profesora el rey colocó más bolas en la urna de un color para que uno fuese elegido más veces esclavo y sacar la bola para caballero es muy difícil.*

Profesora: *¿Ahora qué piensa de su buena suerte?*

Alexis: *pues, es que uno no sabe que puede pasar si gana o no y en este caso menos porque hay desventaja.*

Profesora: *¿Usted cree que no es posible ser caballero?*

Alexis: *Si, es posible porque de todas maneras la bola verde está en la urna y a veces uno la saca, pero es más difícil.*

Profesora: *¿Qué cree que se podría hacer para que el juego sea justo?*

Alexis: *Meter otra bola verde en la urna.*

Después de que Alexis realizó la actividad, considero la impredecibilidad y variabilidad en los resultados, además los asocio cualitativamente con el espacio muestral, aspectos que antes de la experimentación, eran completamente ignorados. Por el estudiante, por lo tanto se puede constatar, el impacto tan importante que causa en las concepciones de los estudiantes, la experimentación física, si esta es planteada de tal forma que pueda lograr interés por parte del estudiante.

Después de la actividad 1, en las respuestas al apartado c, seis estudiantes ya no evidenciaron el sesgo de equiprobabilidad, puesto que ahora conciben que tienen más posibilidad de ser esclavos que caballeros por la diferencia de bolas en la urna. Los nueve estudiantes que no lo presentaban antes afianzaron sus concepciones.

En la actividad 2 el juego del rey los esclavos, soldados y caballeros (Ver Anexo C), tres estudiantes más modificaron el sesgo de equiprobabilidad ya que consideran que el rey no es justo puesto que tienen más posibilidades de ser elegidos esclavos que soldados y más posibilidades de ser elegidos soldados que

caballeros, argumentando que esto ocurre por la diferencia de bolas en la urna, por lo tanto se puede evidenciar que la mayoría de estudiantes modificaron el sesgo de equiprobabilidad después de realizar la experimentación física, creo que fue importante plantear las dos situaciones puesto que algunos de los estudiantes en la primera actividad no alcanzaron a modificar sus concepciones.

Después de la experimentación computacional (Ver Anexo E), cuatro estudiantes más modificaron sus concepciones, de hecho, 23 estudiantes escogieron el color negro en la pregunta 6 por ser el color predominante en la urna. Solamente un estudiante no modificó sus concepciones.

Conclusiones respecto al sesgo de equiprobabilidad:

- En el desarrollo de las actividades físicas y simuladas de los experimentos aleatorios, se pudo evidenciar un cambio importante en las concepciones de los estudiantes, quienes antes de realizar los experimentos consideraban igualmente probables los resultados, pero a medida que fueron realizando cada una de las actividades, empezaron a tener en cuenta la composición del espacio muestral y los efectos que causa en los resultados.
- Para poder lograr cambios importantes en las concepciones de los estudiantes es necesario involucrarlos en las actividades. Para que esto sea posible, deben ser planteadas de tal forma que sean de interés para ellos.
- Es muy importante el desarrollo de diferentes actividades, para que los estudiantes puedan corroborar lo que piensan y puedan modificar o fortalecer sus concepciones.

Relación entre el espacio muestral asociado a un experimento con la distribución de los datos empíricos:

Esta categoría permitió analizar si la estrategia aplicada fue útil para que los estudiantes advirtieran lo impredecible de un solo experimento y la relación entre la composición del espacio muestral y la distribución de los resultados al realizar varias repeticiones, intuyendo de esta forma el la ley de los grandes números.

Para observar si la estrategia aplicada dio resultado o no, se analizará la evolución de los estudiantes con respecto a cada uno de los experimentos desarrollados (con monedas, dados y urnas) en las etapas de investigación:

En cuanto a la experimentación con monedas:

En el taller 1 jugar para aprender 1: la pregunta d (Ver Anexo B) está relacionada con las concepciones de los estudiantes con respecto a la ley de los grandes números después de realizar la experimentación física con monedas.

- Se pudo observar que la mayoría de estudiantes conciben la impredecibilidad de los resultados de forma extrema, puesto que no advierten de la convergencia y predicibilidad de los patrones de resultados al hacer muchas repeticiones, por lo tanto no hacen ninguna aproximación.
- Nueve estudiantes no consideran la equiprobabilidad de los resultados.
- La estudiante Ángela Mayerly, fue la única que aproximó, pero lamentablemente no dio ninguna justificación, su respuesta fue la siguiente: “500 veces”.

Me permito hacer un paréntesis, para mencionar algunos aspectos que surgieron en el Taller 1 pero en relación a la experimentación con dados, debido a que estas situaciones llevaron a cambios importantes en la experimentación computacional, la cual será mencionada a continuación en relación a la experimentación con monedas.

En algunas observaciones y conversaciones con los estudiantes durante la experimentación física, me di cuenta que algunos de ellos alcanzaban a ver la regularidad en los resultados, pero no se atrevían a aproximar, debido a que consideraban que siempre que se hacen lanzamientos el resultado varía. Como ejemplo de estas concepciones está la conversación con Oliverio Capacho en cuanto a la respuesta dada a la pregunta h de la experimentación física con dados (Ver Anexo B):

Oliverio contestó a la pregunta h lo siguiente:

No se, porque pueden salir, varia veces o igual o menos

Profesora: *¿Qué quieres decir con esa respuesta?*

Oliverio: *Pues profesora es que los resultados son muy parejos, pero yo no puedo saber exactamente cuántas veces sale cada uno, porque como se vio en la tabla, en el grupo que hizo 77 lanzamientos unos números salieron 13 veces otros 12 y otros 14, pero pudo ser distinto, o sea el 1 en vez de salir 13 pudo salir 12 o así.*

En la respuesta de Oliverio se ve que concibe la estabilidad a largo plazo, pero sabe que no puede dar valores exactos, porque lo más probable es que se equivoque. A pesar de que la pregunta no pide valores exactos ellos lo toman de esa manera, lo que dificulta que puedan adquirir la idea de estabilidad después de muchas repeticiones conservando la idea de la inevitable variación en los resultados.

Para evitar que esta situación se siguiera presentando, tomé la decisión de cambiar las preguntas en los talleres siguientes, colocando la palabra aproximadamente, porque de lo contrario las respuestas a estas preguntas iban a ser solamente “no se puede saber”.

Además mantuve una conversación con todos los estudiantes en el taller de la simulación computacional, en la que les expliqué que era una aproximación, dando a entender que al aproximar no se piden valores exactos sino cercanos, como su nombre lo dice, aproximados. Los estudiantes entre ellos decían: *claro porque uno nunca sabe que va a caer exactamente, es imposible*. De esta forma se logró que los estudiantes después de la experimentación computacional se atreviesen a aproximar.

Retomando:

Después de que los estudiantes realizaron la simulación computacional con monedas en la etapa 3, debían responder las preguntas 2, 3, 4, 5 (Ver Anexo E). En sus respuestas se pudo observar lo siguiente:

- Cuatro estudiantes conciben la variabilidad de los resultados, pero no dan evidencia de la regularidad que existe en los resultados obtenidos después de varios lanzamientos.
- Cinco estudiantes no consideran la equiprobabilidad de los eventos, dando mas posibilidad de salir a la cara de la moneda, esto posiblemente se debe a que en la experimentación física la cara obtuvo más resultados que el sello, aunque la diferencia fue mínima.
- Tres estudiantes creen poder controlar los resultados.

- Once de los veinticuatro estudiantes, empiezan a concebir el patrón de resultados que existe después de realizar varios lanzamientos, seis de ellos no hacen aproximaciones numéricas, pero argumentan que pueden salir el mismo número de veces e inclusive que los resultados pueden quedar cerca unos de otros. Los otros cinco estudiantes dan aproximaciones numéricas donde evidencian sus concepciones. A continuación se presentan algunas:

Jean Maycol contestó lo siguiente:

En 1000 lanzamientos, más o menos saldría 450 sellos y 550 caras o sea más o menos la mitad.

En 5000 lanzamientos: 2580 y 2420 mas o menos la mitad.

En 100000 lanzamientos: Mas o menos la mitad 48000 sellos y 52000 caras.

Oliverio Capacho contestó lo siguiente:

En 1000 lanzamientos, no se porque se pueden emparejar cara 500 y sello 500

En 5000 lanzamientos, podría salir un promedio de 2500 caras y 2500 sellos

En 100000 lanzamientos, saldría un promedio de 50000 y 50000 porque se pueden emparejar

Everth Eduardo Villamizar contestó lo siguiente:

En 1000 lanzamientos, sería un 50% de que caiga cara y un 50% de que caiga sello.

En 5000 lanzamientos, creo que en 5000 lanzamientos saldrán 2500 caras y 2500 sellos porque no sé si podrían cambiar los resultados.

En 100000 lanzamientos, creo que saldrían la mitad de caras y la mitad de sellos, aunque en 100000 lanzamientos el futuro es incierto.

En la pregunta 2 de la evaluación (Ver Anexo F), se pudo observar lo siguiente:

- Cuatro estudiantes hicieron la distribución de frecuencias, de tal forma que los resultados correspondieran a la suma de los lanzamientos, por lo tanto no dan evidencia de la regularidad que existe en los resultados obtenidos después de varios lanzamientos.
- Ocho estudiantes hicieron la distribución de frecuencias, con respecto a sus malas concepciones, cinco de ellos no consideran la equiprobabilidad de los eventos, dando mas posibilidad de salir a la cara de la moneda, los otros tres estudiantes creen poder controlar los resultados de los experimentos, por lo tanto distribuyen las frecuencias, de tal forma que la mayor frecuencia la tenga el lado de la moneda que creen van a obtener.
- Once estudiantes, hicieron la distribución de frecuencias, concibiendo el patrón que existe al hacer varios lanzamientos, algunos de ellos hacen distribuciones exactas para los dos lados, dejando de lado la variabilidad. Algunas respuestas de los estudiantes se presentan a continuación:

Eider Fabián Martínez contesto lo siguiente:

En 100 lanzamientos 50 caras y 50 sellos.

En 600 lanzamientos 300 caras y 300 sellos.

En 1000 lanzamientos 500 caras y 500 sellos.

En 20000 lanzamientos 10000 caras y 10000 sellos.

Argumentando: porque los dos tienen las mismas posibilidades de salir por lo tanto el juego es parejo.

Lorena Villamizar contesto lo siguiente:

En 100 lanzamientos 50 caras y 50 sellos.

En 600 lanzamientos 350 caras y 250 sellos.

En 1000 lanzamientos 500 caras y 500 sellos.

En 20000 lanzamientos 11000 caras y 9000 sellos.

Argumentando: porque todos tienen la misma posibilidad de salir y por eso los resultados son casi iguales.

Everth Eduardo Villamizar contesto lo siguiente:

En 100 lanzamientos 45 caras y 55 sellos.

En 600 lanzamientos 295 caras y 305 sellos.

En 1000 lanzamientos 495 caras y 505 sellos.

En 20000 lanzamientos 9995 caras y 10005 sellos.

Argumentando: porque el sello y la cara tienen la misma oportunidad de salir.

Conclusiones en cuanto a la experimentación con monedas:

- Después de realizar la experimentación física y computacional con monedas, se observó un avance significativo de los estudiantes con respecto a sus concepciones, puesto que antes de realizar los experimentos, ni siquiera concebían la impredecibilidad de los resultados, lo cual se superó en la mayoría de los estudiantes durante la experimentación física. Sin embargo, es necesario aclarar que en esta etapa los estudiantes no alcanzaron a inferir la convergencia de los resultados, puesto que las repeticiones no son suficientes. Con la ayuda del software Probability Explorer, que permite hacer varios lanzamientos en corto tiempo, algunos estudiantes empezaron a percibir la relación que existe entre la distribución de los resultados y el espacio

muestral, sin dejar de lado la variabilidad, tal como se observa en sus predicciones y argumentos.

- Es importante la interacción con los estudiantes para poder saber qué piensan y por consiguiente observar si las preguntas que se realizan llegan a los estudiantes de la forma que uno espera, para así poder tomar decisiones y hacer los cambios necesarios para que las apreciaciones que se hagan sean lo más cercanas a la realidad.
- Los resultados obtenidos indican que la experimentación física y computacional son de gran ayuda en la construcción del concepto de probabilidad y de la ley de los grandes números.
- Algunos estudiantes, al percibir el patrón que existe en los resultados a largo plazo, empiezan a dar resultados exactos al distribuir las frecuencias, dejando de lado la variabilidad,

En cuanto a la experimentación con dados:

La pregunta 6 del diagnóstico (Ver Anexo A), está relacionada con la intuición de la ley de los grandes números, cuando se experimenta con dados. En las respuestas a esta pregunta se observa que la mayoría de estudiantes no dio una respuesta en la cual se evidenciara intuición acerca de la ley de los grandes números, algunos contestan que no se puede saber y otros “no se”. Solamente dos estudiantes, parece tener intuición acerca de la ley de los grandes números:

“20” (Eider Fabián).

“No sé porque podrían salir todos de a 20 veces cada uno o diferente” (Oliverio).

Después de la experimentación física, en la pregunta h del Taller 1(Ver Anexo A), se observó que veintidós estudiantes no hacen aproximaciones, algunos no advierten ningún patrón en los resultados después de realizar varios lanzamientos y otros aunque lo reconocen no se atreven a aproximar, pero consideran la variabilidad e impredecibilidad de los resultados. Siete estudiantes consideran que algunos números tienen más posibilidad de salir que otros, en este caso el 4, el 5 y el 2, puesto que en la experimentación física los números que obtuvieron mayor frecuencia fueron estos tres, aunque la diferencia fue mínima.

Solamente Eider Fabián parece intuir la relación entre el espacio muestral y los datos empíricos como se muestra en su respuesta: *“400 veces porque $400 \times 6 = 2400$ ”*

Después de que los estudiantes realizaron la simulación computacional con datos en la etapa 3, los estudiantes debían responder las preguntas 7, 8, 9, 10 (Ver Anexo E), las cuales se relacionaban con la ley de los grandes números.

En las respuestas de los estudiantes se observó lo siguiente:

- Diez estudiantes contestaron que no se puede saber, puesto que siempre da un resultado distinto, aceptando la variabilidad en los resultados, pero sin percibir la regularidad que existe en los resultados obtenidos.
- Seis estudiantes dan respuestas en las que demuestran sus malas concepciones, cinco respecto a la no equiprobabilidad en los resultados y una con respecto a la controlabilidad de los mismos.
- Cinco estudiantes no dan una aproximación numérica, pero en sus respuestas argumentan que pueden salir casi iguales los números, otros que deben

quedar cerca unos de otros, aparentemente conciben el patrón que hay al hacer varios lanzamientos.

- Tres estudiantes dan aproximaciones numéricas en las cuales se evidencia que conciben la equiprobabilidad y la regularidad en los resultados obtenidos lo que les permite hacer algunas predicciones. A continuación se presentan algunas de estas respuestas:

En 1200 lanzamientos: Cada número saldrá aproximadamente 200, porque según los cálculos es así aunque no exacto.

En 6000 lanzamientos: Creo que cada uno saldrá 1000 veces.

En 24000 lanzamientos: Creo que cada uno saldrá 4000 (Eider Fabián).

En 1200 lanzamientos: Cada número tendrá la misma posibilidad de salir, porque no se sabe con exactitud el resultado.

En 6000 lanzamientos: Creo que saldrá 1000 veces cada número.

En 24000 Creo que saldrá 4000 veces cada número (Everth Eduardo)

En 1200 lanzamientos: 200 veces cada número, escribí esto porque casi todos los números salen iguales.

En 6000 lanzamientos: mas o menos todos saldrán parejos o igual

En 24000 lanzamientos: 4000 (Jean Maycol).

Viviana, ¿no va a decir nada sobre las predicciones tan exactas de los estudiantes?

En la evaluación, la pregunta 5 se refería específicamente a la ley de los grandes (Ver Anexo F). De acuerdo a sus respuestas podemos clasificar a los estudiantes de la siguiente forma:

- Once estudiantes distribuyeron las frecuencias teniendo en cuenta que la suma correspondiera al total de lanzamientos, pero sus respuestas no muestran una proporcionalidad.
- Seis estudiantes distribuyen las frecuencias respecto a sus malas concepciones, cinco de ellos no consideran equiprobables los resultados y asignan más frecuencia a los números, que creen tienen más posibilidad de salir, el otro estudiante asigna más frecuencia al número que cree poder obtener más, al creer que puede controlar los resultados.
- Siete estudiantes distribuyeron equiprobablemente las frecuencias, manteniendo una proporcionalidad entre los resultados. Además estos estudiantes consideran la impredecibilidad y equiprobabilidad de los resultados como lo argumentaron en las respuestas a la pregunta 3 y 4 de la evaluación.

Conclusiones en cuanto a la experimentación con dados:

- Se pudo observar un avance significativo de los estudiantes con respecto a sus concepciones acerca de los experimentos aleatorios con dados y por ende en la intuición de la ley de los grandes números, desde sus respuestas en el diagnóstico hasta la evaluación.
- La experimentación física permite que la mayoría de estudiantes conciban la variabilidad, equiprobabilidad e impredecibilidad de los experimentos aleatorios con dados, pero la imposibilidad de hacer bastantes experimentos no permite que los estudiantes conciban la regularidad que existe en los resultados.
- La experimentación física en conjunto con la computacional, permite que algunos estudiantes, después de realizar varios lanzamientos, perciban la relación que existe entre la distribución de los resultados posibles en el

espacio muestral con respecto a los datos empíricos, sin dejar de lado la variabilidad., dando de esta manera un gran paso en la construcción del concepto de probabilidad y de la ley de los grandes números.

- En las respuestas de los estudiantes se puede ver que algunos de ellos al asignar frecuencias, en pocos lanzamientos presentan más variabilidad y en más lanzamientos las estabilizan. Además, ellos reconocen la variabilidad y por eso es que cuando, dan las frecuencias algunos tratan de colocar resultados no exactos, pero muy cercanos y si los colocan exactos en sus argumentos, dicen que es más o menos así o que los resultados no son exactos.
- Las concepciones que deja la experimentación física, son muy difíciles de modificar, como se puede observar en las respuestas de los estudiantes, que después de la experimentación creen que algunos números tienen más probabilidad de salir, a pesar de la simulación computacional no modifican este concepto.

En cuanto a la experimentación con urnas:

En el diagnóstico la pregunta 8 esta relacionada con la ley de los grandes números (Ver Anexo A). En las respuestas se puede observar que la mayoría presenta el sesgo de equiprobabilidad.

En cuanto a la experimentación física Taller 2: jugar para aprender parte II, La actividad 1 del apartado d está relacionada con la ley de los grandes números (Ver Anexo C).

Cuando se analizó el sesgo de equiprobabilidad en este capítulo, se observó que después de la actividad 1 seis estudiantes modificaron el sesgo de equiprobabilidad.

En las respuestas al apartado d se observa lo siguiente:

- Diez estudiantes contestaron que saldrán mas esclavos que caballeros, cinco de ellos hacen aproximaciones numéricas en las cuales el mayor número lo tienen los esclavos, pero sin relación con la distribución del espacio muestral.
- Los demás estudiantes contestaron “no sé” o “no se puede saber”.
- En la actividad 2 del Taller 2: Jugar para Aprender, parte II, el apartado d esta relacionado con la ley de los grandes números. (Ver Anexo C)
- De las respuestas a este apartado se puede decir lo siguiente:
 - Cinco estudiantes contestaron que no se puede saber, estos estudiantes presentan el sesgo de equiprobabilidad.
 - Nueve estudiantes considera que van a salir más esclavos que soldados y más soldados que caballeros, pero no hacen aproximación numérica.
 - Tres estudiantes hacen aproximaciones en las cuales obtienen mas resultados los esclavos que los soldados y los soldados mas que los caballeros, pero sin ninguna relación con el espacio muestral.
 - Siete estudiantes presentan aproximaciones numéricas en las cuales se observa alguna relación con el espacio muestral. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

“Seria 300 esclavos y 200 soldados y 100 caballeros porque ese creo que seria el resultado” Alexis

“Sería elegido muchas veces esclavo, mucho menos caballero y soldado esta entre el resultado de esclavo y caballero.

Esclavo = 600 veces entonces=300

Soldado= entre la mitad y la quinta parte= 110

Caballero=90, que es la tercera parte” Lorena

“Pues yo creo que mas veces esclavo porque hay mas bolas yo creo que 293 veces y soldado 207 veces porque hay 2 bolas y caballero 100 porque hay una bola. Mas o menos 293 veces porque es casi la mitad, 207 porque es otro poco mas y tiene mas oportunidad que caballero” Jean Maycol

“Aproximadamente 350 esclavos y 150 soldados y 100 caballeros, porque hay mas bolas para esclavos que para soldados y caballeros entonces tienen mas oportunidad los esclavos y los soldados que los caballeros” Dimas Alberto

“Esclavo = 293

Soldado= 109

Caballero=98

Porque siguiendo más o menos el patrón ese es el resultado aunque no exacto”.Eider Fabián

En la experimentación computacional las preguntas 12, 13, 14, 15 están relacionadas con la ley de los grandes números (Ver Anexo E). Clasificamos las respuestas de la siguiente forma:

- Doce estudiantes consideran que la bola roja saldrá mas veces, de los cuales seis hacen aproximaciones en las cuales no se evidencia relación con el espacio muestral.
- Una estudiante en su respuesta evidencia el sesgo de equiprobabilidad.

- Seis estudiantes dan aproximaciones numéricas en las cuales se observa alguna relación con la proporción de bolas en el espacio muestral. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:
- *Para 1200 extracciones: En 1200 extracciones saldría 800 veces el rojo y 400 el negro*
- *Para 6000 extracciones Aproximadamente cada color saldría el rojo 4000 y el negro 2000, aproximadamente”*
- *Para 24000 extracciones no contesto.*
- *Para 1200 extracciones: No se podría saber exactamente sería 800 y 400*
- *Para 6000 extracciones: saldría 4000 rojas y 2000 negras.*
- *Para 24000 extracciones: no contesto.*
- *Para 1200 extracciones: saldrán 800 rojas y 400 negras aproximadamente*
- *Para 6000 extracciones: 4000 rojas y 2000 negras*
- *Para 24000 extracciones: 16000 rojas y 8000 negras*

En cuanto a la pregunta 7 de la evaluación computacional se observó lo siguiente:

- Trece estudiantes completaron la tabla dando mayor frecuencia a la bola negra, teniendo en cuenta la relación cualitativa del espacio muestral (mayor cantidad de bolas negras que rojas) pero no la proporcionalidad entre las bolas de cada color.
- Una estudiante que presentaba el sesgo de equiprobabilidad, hizo la distribución de frecuencias, con respecto a sus malas concepciones, colocando diferentes frecuencias, en algunos casos mayor frecuencia a la bola roja, en otros a la negra y en algunos, dando igual frecuencia a los dos resultados.

En cuanto a la evaluación computacional apartado 8 (Ver Anexo F):

El primer ejercicio que se colocó a todos los estudiantes, se desarrolló de la siguiente manera: sin que los estudiantes estuviesen presentes, se introdujeron en cada urna dos bolas de un color y una de otro, después se procedió a ocultar la urna, gracias a una función del Probability Explorer, esto con el fin de que el estudiante no pudiera ver el contenido, luego los estudiantes debían inferir cuántas bolas habían en la urna.

Para poder validar las respuestas de los estudiantes, cuando estos manifestaban haber terminado el ejercicio, la profesora pedía a cada uno las explicaciones pertinentes, las cuales tenían que ser apuntadas en la evaluación, estuviesen bien o mal.

En las respuestas de los estudiantes se pudo observar lo siguiente:

- Nueve estudiantes dieron respuestas las cuales no coinciden con el espacio muestral, pero el color al que le colocaron más número sí corresponde con el que tiene dos bolas en la urna. Con lo cual se puede observar que los estudiantes solo tienen en cuenta una relación cualitativa: mayor frecuencia mayor cantidad de bolas, pero no asocian la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna.
- Dos estudiantes responden que hay más bolas negras que rojas pero no hacen una aproximación.
- Un estudiante no contestó.
- Diez estudiantes acertaron con el número real de bolas en el espacio muestral, en sus argumentos se puede observar que asocian la frecuencia de

los resultados con la proporción de bolas en la urna. Estos diez estudiantes llenaron la tabla del apartado 7 de forma correcta.

- Dos estudiantes más dieron respuestas acertadas, pero en el apartado 7 no llenaron la tabla de forma correcta y a pesar de eso en sus argumentos parece que comprenden la relación entre la composición del espacio muestral con los resultados.

A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes:

“Hay más bolas verdes que amarillas y creo que va por la mitad como dos con una o cuatro con dos, como lo muestran los resultados” (Rubén Darío)

“Hay mas bolas rojas que negras, bolas rojas hay dos y negras una porque el negro le da casi por la mitad al rojo entonces salen más rojas que negras” (Dimas Alberto).

“Depende de los lanzamientos de las veces que salga cada color. Porque cada color tiene un número de bolas en este caso fueron de 2 bolas azules y una negra, por ejemplo en uno salio 13 veces la azul y 7 la negra como por la mitad, porque en una habían más posibilidades de salir” (Yajaira Karina).

Debido a la cantidad de equipos disponibles y a la dificultad que presentaba, el hecho de estar sacando a los estudiantes del salón, para traer a sus otros compañeros, se seleccionaron ocho estudiantes, los cuales habían respondido acertadamente al primer ejercicio. Con el fin de realizar dos experiencias más y así constatar las respuestas de los estudiantes, con Jean Maycol realizamos un último ejercicio debido a que terminó primero que sus compañeros,

Los ejercicios se propusieron de la siguiente forma:

- Fueron introducidas dos bolas de distinto color.
- Fueron introducidas 3 bolas de un color y una de otro de la siguiente.
- Fueron introducidas 3 bolas azules, 1 negra y 1 amarilla.

En las respuestas de los ocho estudiantes se pudo constatar que asocian la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna, puesto que estas coinciden con el número real de bolas en el espacio muestral y los argumentos dados por los estudiantes son adecuados. A continuación se presentan algunas de las respuestas dadas por los estudiantes:

“Creo que salieron 1 blanca y 1 verde, por que la diferencia fue poca, había muy poca diferencia porque casi nada era la diferencia, es decir si hubiese 2 verdes y una blanca la diferencia habría sido el doble” Dennis Eliana.

“Creo que hay igual de bolas porque son casi iguales los resultados, 1 verde y 1 roja o 2 con 2” Rubén Darío.

“Hay 3 amarillas y una negra porque el amarillo lo trata a triplicar y cuando lo hice con 2 negras y una roja no era tanta la diferencia”. Jean Maycol

“Hay una negra y hay 3 bolas de color rojo, porque si hubiera la misma cantidad de bolas rojas y negras tenían la misma posibilidad de salir. Pero la diferencia es mucha, más de la mitad” Oliverio

En el último ejercicio la respuesta presentada por Jean Maycol fue la siguiente:

Hay 3 azules 1 negra y 1 amarilla porque el azul los trata a triplicar y la amarilla y la negra van muy parejas. Ejemplo: de 50 lanzamientos.

A=29

N= 10

A= 11

Con este estudiante mantuvimos una conversación en torno a su respuesta:

Profesora: *¿Maycol en que fundamenta sus respuestas?*

Maycol: *Profesora yo hice varios lanzamientos y a pesar de que los números varían siempre se ve lo mismo, mire:*

En ese momento el estudiante hace 100 lanzamientos y salen 62 amarillas, 25 Negras y 14 azules.

Profesora: *¿Qué puedes observar?*

Maycol: *Pues en este caso las negras y las azules están un poco disparejas, pero la amarilla siempre la trata a triplicar, voy a hacer otros lanzamientos para que se dé cuenta profesora.*

El estudiante hace 250 lanzamientos más y los resultados son 211 amarillas, 76 negras y 63 azules y dice:

-Profesora mire aquí también las amarillas las triplican y las otras pues tienen diferencia, pero no aumentó.

Profesora: *¿ Por qué dice que las triplica?*

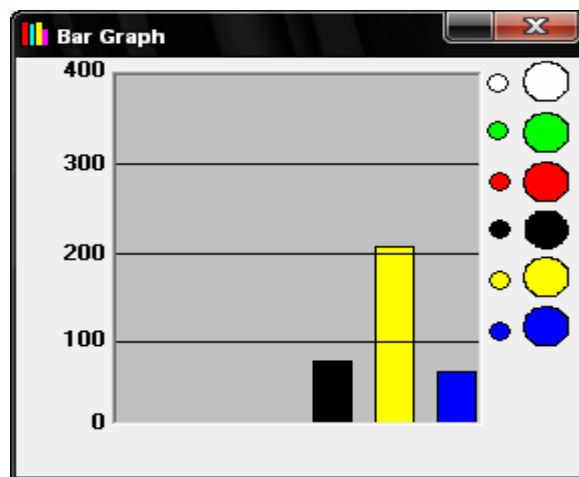
Maycol: *Pues fácil por qué siete por 3 es veintiuno y aquí es setenta y seis por tres, mas o menos 210.*

Profesora: *¿Usted todavía sigue creyendo que hay una bola negra y una azul con la diferencia en los resultados?*

Maycol: *Sí profesora, usted puede pensar que no, pero es que yo ahorita jugué y en algunos casos le gano la azul a la negra, es que toca mirar varias veces.*

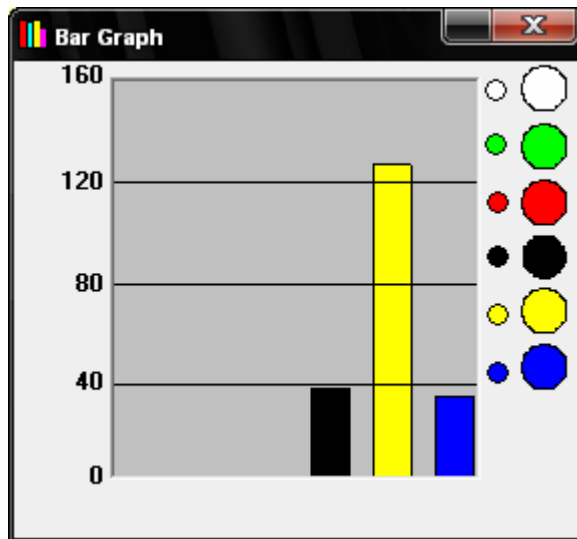
Profesora: *¿Cuántas veces?*

Maycol: *Hasta que uno vea el patrón, acuérdesese que cuando sabíamos la cantidad de bolas, no era exacto pero se veía al hacer lanzamientos. Además mire el diagrama de barras, la diferencia entre la azul y negra casi no se ve.*



Entonces el estudiante borra los lanzamientos y hace otros 200 lanzamientos los resultados son: 128 Amarillas, 38 negras y 34 azules y dice satisfecho:

-Mire ahora están más parejas.



Profesora: *¿Yo pienso que podían ser dos negras?*

Maycol: *No, profesora es que usted no entiende, si fueran dos, los resultados serían más dispares, la negra más o menos duplicaría a la azul, en este caso serían unas 60 negras contra las 34 y aquí la diferencia es cuatro no más.*

Profesora: *¿Por qué?*

Maycol: *Acuérdese de antes, cuando hacíamos las tablas se veía y siempre paso lo mismo hasta cuando jugamos.*

A pesar de mis intentos de confundirlo, las respuestas de Maycol fueron contundentes, claramente se observa que percibe la relación entre el espacio muestral y los resultados a pesar de la existencia de la variabilidad.

La evaluación computacional, fue retomada de Jaimes y Martínez (2007), por lo tanto haré un contraste de los resultados obtenidos en los dos casos.

La evaluación de Jaimes y Martínez (2007) solo fue realizada a dos estudiantes, Camilo y Gerardo.

Camilo aplica la ley de los pequeños números, al intentar descubrir el espacio muestral al simular pocas pruebas, esperando encontrar el valor de probabilidad estable en la distribución de frecuencias olvidando la conexión que existe con el número de pruebas, por lo tanto es necesario que el estudiante haga una retroalimentación, donde los profesores hacen un seguimiento a todas sus respuestas, consiguiendo que el estudiante construya un significado completo de la ley de los grandes números.

En el caso de camilo, dicen los autores el estudiante desde el principio ignora la relación entre el espacio muestral y el valor de probabilidad de los eventos, lo cual le dificulto inferir el espacio muestral, a pesar del seguimiento de los autores.

En el caso presente los estudiantes no utilizan la frecuencia relativa, ni el valor de probabilidad, por consiguiente solo utilizan las frecuencias absolutas de los resultados, con las cuales están muy familiarizados debido a la experimentación física y a la simulación computacional; para inferir el espacio muestral, me explico, si se hacen 60 lanzamientos y salen 33 amarillas y 27 rojas, los estudiantes toman estos resultados como pares, si salen 38 amarillas y 22 rojas, los estudiantes toman el resultado como casi el doble, o le da casi por la mitad. Teniendo en cuenta que cuando hacían la simulación computacional conociendo el espacio muestral, los resultados no eran exactos pero si muy aproximados.

La diferencia en las dos evaluaciones radica en que Jaimes y Martínez (2007) hacen un seguimiento exhaustivo a los estudiantes, para poder lograr que el estudiante construya un significado completo de la ley de los grandes números; en este caso los estudiantes construyen concepciones bastante fuertes acerca de la ley de los grandes números, pero les hace falta un referente teórico.

Conclusiones en cuanto a la experimentación con urnas:

- El cambio en las concepciones de los estudiantes se hizo evidente tanto en la experimentación física como en la computacional, puesto que prácticamente todos los estudiantes modificaron el sesgo de equiprobabilidad, ya que en sus argumentos se observa que concedían mayor probabilidad a las bolas del color mayoritario. . Algunos estudiantes, con la ayuda del software Probability Explorer, empiezan a inferir la convergencia de los patrones de resultados al realizar muchas repeticiones y la relación que tiene con la proporción del espacio muestral, lo que les permitió incluso proceder en sentido contrario, asociando la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna. Estos resultados evidencian la presencia de un significado fuerte de la ley de los grandes números y, por qué no decirlo, de cierta lógica inductiva.
- La motivación en los estudiantes durante la experimentación fue arte fundamental en el proceso, puesto que estos se pudieron mantener concentrados, lo cual produjo los resultados esperados en algunos de ellos.

La evolución conceptual de los estudiantes. La Taxonomía SOLO:

A continuación se hará una clasificación respecto a cada uno de los experimentos llevados a cabo en las etapas de investigación.

Los conceptos que son tenidos en cuenta para la clasificación de los estudiantes en los diferentes niveles, en cuanto a la experimentación con dados y monedas son: la equiprobabilidad, la variabilidad de los resultados, la impredecibilidad de los resultados, la estabilidad de los resultados al realizar varios lanzamientos con respecto a los componentes en el espacio muestral, sin dejar de lado la variabilidad.

Los conceptos que son tenidos en cuenta para la clasificación de los estudiantes en los diferentes niveles, en cuanto a la experimentación con bolas en una urna son: la no equiprobabilidad de los eventos del espacio muestral, la variabilidad en los resultados, la impredecibilidad de los resultados, la estabilidad de los resultados al realizar varios lanzamientos con respecto a los componentes en el espacio muestral, sin dejar de lado la variabilidad.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes antes de hacer la experimentación física con monedas y dados:

El 62.5% de los estudiantes esta en la etapa **preestructural**, puesto que presentan malas concepciones respecto a la naturaleza de los experimentos aleatorios o no consideran la equiprobabilidad de los resultados.

El 37.5% de los estudiantes se encuentra en la etapa **uniestructural** el estudiante considera solamente la impredecibilidad y variabilidad de los experimentos aleatorios, pero no da evidencia de la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes antes de hacer la experimentación física con bolas en una urna:

El 62.5% de los estudiantes se encuentra en la etapa **preestructural** puesto que evidencian el sesgo de equiprobabilidad.

El 37.5% de los estudiantes se encuentra en la etapa **multiestructural**, puesto el estudiante tiene en cuenta de alguna manera el espacio muestral al concebir que a mayor número de bolas mayor posibilidad, pero no dan evidencia de la proporción de número de bolas con los resultados.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes después de la experimentación física con monedas y dados:

El 37.5% de los estudiantes se encuentra en la etapa **preestructural**, algunos porque creen poder controlar los resultados de los experimentos aleatorios y otros porque no conciben la equiprobabilidad.

El 58.33% de los estudiantes se encuentra en la etapa **uniestructural** puesto que consideran la impredecibilidad y variabilidad de los experimentos aleatorios, pero no da evidencia de la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos.

El 4.16% de los estudiantes se encuentra en la etapa **multiestructural**, puesto que los estudiantes tiene en cuenta de alguna manera el espacio muestral al hacer predicciones acerca de los resultados del experimento aleatorio, dando igual frecuencia a los resultados y sin dejar de lado la variabilidad pero no dan una justificación que permita conocer claramente sus concepciones.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes después de la experimentación física con bolas en una urna:

El 20.83% de los estudiantes se encuentra en la etapa **preestructural**, puesto que presentan el sesgo de equiprobabilidad.

El 50% de los estudiantes están en la etapa **multiestructural**, puesto que el estudiante tiene en cuenta además de la variabilidad de los resultados, de alguna manera el espacio muestral al concebir que a mayor número de bolas mayor posibilidad.

El 29.16% de los estudiantes se encuentra en la etapa **relacional**, puesto que los estudiantes relacionan la proporción del espacio muestral con el resultado de los experimentos al hacer predicciones en las cuales tienen en cuenta la variabilidad.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes después de realizar la experimentación computacional con monedas:

El 33.33% de los estudiantes se encuentra en la etapa **preestructural**, puesto que algunos de ellos creen poder controlar los resultados y otros no consideran la equiprobabilidad de los experimentos.

El 16.16% de los estudiantes se encuentra en la etapa **uniestructural**, puesto que consideran la impredecibilidad y variabilidad de los experimentos aleatorios.

El 45.83 de los estudiantes se encuentran en la etapa **relacional** puesto que los estudiantes relacionan la proporción del espacio muestral (2 lados de la moneda) con el resultado de los experimentos al hacer predicciones donde distribuyen las frecuencias en igual proporción para cada uno de los dados, estos estudiantes consideran también la variabilidad.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes después de realizar la experimentación computacional con dados:

El 29.16% de los estudiantes se encuentra en la etapa **preestructural**, puesto que algunos de ellos no consideran la equiprobabilidad de los resultados y otros creen poder controlar los experimentos.

El 45.83% de los estudiantes se encuentra en la etapa **uniestructural** puesto que consideran la impredecibilidad y variabilidad de los experimentos aleatorios, pero no da evidencia de la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos.

El 29.16% de los estudiantes se encuentra en la etapa **relacional** puesto que los estudiantes relacionan la proporción del espacio muestral (6 caras del dado) con el resultado de los experimentos al hacer predicciones en las cuales distribuyen igual frecuencia a los resultados, en las cuales tienen en cuenta la variabilidad.

Clasificación en cuanto a las concepciones de los estudiantes después de realizar la experimentación computacional con bolas en una urna:

El 4.16% de los estudiantes esta en la etapa **preestructural**, puesto que presenta el sesgo de equiprobabilidad.

El 41.66% de los estudiantes esta en la etapa **multiestructural**, puesto que el estudiante tiene en cuenta además de la variabilidad de los resultados, de alguna manera el espacio muestral al concebir que a mayor número de bolas mayor posibilidad.

El 12.5% de los estudiantes esta en la etapa **relacional** puesto que evidencian intuición acerca de la ley de los grandes números al relacionar la proporción del espacio muestral con los resultados del experimento al hacer predicciones, sin dejar de lado la variabilidad.

El 41.66% de los estudiantes esta en la etapa de **abstracción extendida**, puesto que el estudiante maneja en forma abstracta la relación entre la proporción del espacio muestral con el resultado de los experimentos, por lo tanto es capaz de inferir el espacio muestral, partiendo desde los resultados del experimento y viceversa.

Conclusiones respecto a la evolución cognitiva de los estudiantes por medio de la Taxonomía SOLO:

- Esta clasificación nos ayuda a ver claramente el avance de los estudiantes en cada una de las etapas y las diferencias existentes en el comportamiento de los estudiantes, con respecto a diferentes experimentos aleatorios.
- El avance de los estudiantes en cada una de las etapas es evidente, en la experimentación física la mayoría de estudiantes considera la variabilidad e impredecibilidad de los experimentos, pero el avance más significativo se da cuando los estudiantes utilizan el software Probability Explorer, puesto que empiezan a ver la estabilidad que existe en los resultados al hacer varios lanzamientos, lo que demuestra una vez más que esta herramienta computacional es muy valiosa en la construcción del significado de la ley de los grandes números, utilizada conjuntamente con la experimentación física.
- En cuanto al avance en cada uno de los experimentos, es evidente que los estudiantes avanzan más rápidamente en los niveles cuando se experimenta con espacios muestrales no equiprobables, en este caso con bolas en la urna, creo que esto ocurre puesto que en los experimentos aleatorios es más fácil concebir la desigualdad que la igualdad.
- En cuanto a la experimentación con dados y la experimentación con monedas el número de estudiantes que percibe el patrón que existe en los resultados disminuye, una de las razones por las cuales creo que pasa esto es la cantidad de resultados posibles en el espacio muestral que es evidentemente mayor, por lo consiguiente se hace más difícil que los estudiantes al observar los datos se percaten de la regularidad que existe, pues para poder hacerlo tienen que tener una visión más abstracta de la realidad, por el contrario solo podrán

percatarse de la variabilidad que existe en los datos sin percibir la estabilidad a largo plazo.

- En el momento en que los estudiantes tengan una definición formal de probabilidad y asocien el número de elementos en el espacio muestral con las posibilidades de obtener dicho elemento, podrán asociar de forma compacta todos los experimentos, me explicó, será mas fácil para ellos inferir la distribución de las frecuencias de los resultados, de igual manera para las monedas, para los dados y las bolas en la urna. Al concebir de una mejor forma la estabilidad de los resultados al hacer varis lanzamientos.

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de la investigación, cuyo objetivo era identificar y analizar las concepciones de los estudiantes acerca de los juegos de azar y la probabilidad al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional. Las conclusiones se presentaran en cuanto a las dos categorías de análisis presentadas en la metodología.

MODIFICABILIDAD DE LAS CONCEPCIONES PREVIAS

- Las malas concepciones presentadas por los estudiantes en el diagnóstico, fueron modificadas por la mayoría de ellos mediante la experimentación física, otros estudiantes durante la misma experimentación obtuvieron malas concepciones, como es el caso en que dan mayor posibilidad a los resultados que obtuvieron más frecuencia en la experimentación física con monedas y con dados, lo cual deja ver claramente la importancia de someter a los estudiantes a actividades que sean de su interés, puesto que las concepciones obtenidas por los estudiantes en esta etapa, validan la simulación computacional y las malas concepciones difícilmente son modificadas.

RELACIÓN ENTRE EL ESPACIO MUESTRAL ASOCIADO A UN EXPERIMENTO, CON LA DISTRIBUCIÓN DE LOS DATOS EMPÍRICOS

- Un avance muy importante en esta concepción, se presenta cuando los estudiantes logran modificar las malas concepciones y sesgos aceptando la variabilidad e impredecibilidad de los resultados; esto es logrado en su mayoría en la experimentación física. En contraste los estudiantes en esta etapa no

evidencian la estabilidad de los resultados al realizar varias repeticiones, precisamente porque en la experimentación física se tienen muchas limitaciones y no se pueden hacer el número de lanzamientos necesarios.

- La simulación computacional, gracias a sus ventajas, posibilitando el realizar varios lanzamientos en poco tiempo, permite que algunos estudiantes empiecen a inferir la convergencia de los patrones de resultados al realizar muchas repeticiones y la relación que tiene con la proporción del espacio muestral, lo que les permitió incluso proceder en sentido contrario, asociando la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna. Estos resultados evidencian la presencia de un significado fuerte de la ley de los grandes números y, por qué no decirlo, de cierta lógica inductiva. Demostrando una vez más la importancia de el uso de las herramientas computacionales a favor de la construcción del significado de probabilidad y la ley de los grandes números.
- Cuando algunos de los estudiantes, conciben la variabilidad de los resultados se les hace difícil concebir la estabilidad de estos a largo plazo. Se centran de tal manera en la variabilidad, que a pesar de que realizan varios lanzamientos, no son capaz de inferir la estabilidad, por lo tanto no se atreven a hacer aproximaciones, considerando esto como algo imposible.
- Algunos estudiantes, después de que perciben la estabilidad en los resultados tienden a dejar de lado la variabilidad, donde se muestra una concepción errónea de la relación entre el espacio muestral y los resultados

Respecto a la evolución cognitiva de los estudiantes por medio de la Taxonomía SOLO:

- El avance de las concepciones de los estudiantes desde el diagnóstico hasta la evaluación, es evidente en cada una de las etapas, puesto que en el

diagnostico la mayoría de estudiantes se encontraban en los niveles preestructural y uniestructural y en el transcurso de las etapas algunos de ellos alcanzaron los niveles relacional y de abstracción extendida.

- En cuanto al avance en cada uno de los experimentos, es evidente que los estudiantes avanzan más rápidamente en los niveles cuando se experimenta con espacios muestrales no equiprobables, en este caso con bolas en la urna. La mayor parte de los estudiantes que alcanzaron los niveles relacional y de abstracción extendida lo lograron a partir de esta actividad.
- En cuanto a la experimentación con dados y la experimentación con monedas el número de estudiantes que se encuentra en el nivel relacional disminuye, una de las razones por las cuales creo que pasa esto es la cantidad de resultados posibles en el espacio muestral que es evidentemente mayor, por lo consiguiente se hace más difícil que los estudiantes al observar los datos se percaten de la regularidad que existe. Para poder hacerlo tienen que tener una visión más abstracta de la realidad, por el contrario solo podrán percatarse de la variabilidad que existe en los datos sin percibir la estabilidad a largo plazo.
- Un interrogante que se forma en cuanto a la situación planteada anteriormente, es ¿Por qué, si los estudiantes conciben la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos y la relación que tiene con el espacio muestral, en un experimento, no son capaz de asociar estos resultados con los demás experimentos?, pues se supone que si verdaderamente tienen clara la ley de los grandes números deberían tenerla igualmente clara para cualquier experimento que se les presente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Collis, K.F., & Biggs, J.B. (1991). Multimodal learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H.A.H. Rowe (ed) Intelligence Reconceptualization and Measurement(pp.57-75). New Jersey.

Jaimes, E., & Martínez, J., (2007). Probability Explorer: un socio cognitivo en la construcción de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional. Tesis de especialización en educación matemática, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Reátiga, A. (2004). Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en los niños de sexto grado. Tesis de especialización en educación matemática, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Tversky, A. & Kanheman, D. (1971). Belief in the law of small numbers ,76, 105-110.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probability thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Lecoutre, M.P. (1985). Judgments probabilistas chez les adultes: Pratique des jeux de Hazard et formación en théorie des probabilités. Bulletin de psychologie, 38, 891-899.

ANEXOS

ANEXO A. DIAGNÓSTICO

- 1) Imagina que lanzas una moneda al aire ¿cual crees es el resultado que vas ha obtener? ¿por qué?

- 2) Si un compañero te propone una apuesta de \$ 2000 a cara y sello y gana quien obtenga el resultado que escogió:
 - a) ¿Qué cara de la moneda escogerías?
 - b) Estarías seguro de ganar, si o no ¿Por qué?

- 3) Si en tu colegio hacen una rifa, gana quien al lanzar un dado obtenga el número tres, el juego tiene las siguientes condiciones: todos tienen la oportunidad de lanzar, aunque el tres le haya salido a otra persona, si más de una persona saca el número tres se reparten el premio.
 - a) Crees que es posible ganar si o no ¿por qué?
 - b) Si son 10 personas las que juegan, ¿cual crees que tiene más posibilidades de ganar? Justifica tu respuesta.
 - c) Si hacen otra rifa en la cual gana quien obtenga el número siete, crees que es posible ganar si o no y ¿por qué?

- 4) si lanzas un dado 120 veces. ¿Cuántas veces crees que saldrá cada resultado?

- 5) ¿crees que existe alguna forma de lanzar el dado para obtener un resultado específico?

6) En una urna se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja, suponga que vas a jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna, ganas si sacas el color que escogiste.

a) ¿Cuál color escogerías y por qué?

b) ¿El juego es justo? ¿Por qué?

c) Si en la urna se depositara otra bola roja ¿cuál color escogerías? ¿El juego es justo?



ANEXO B. TALLER 1: JUGAR PARA APRENDER I

1. Los invito a jugar, van a conformar grupos de 2 estudiantes, cada uno va a escoger un lado de la moneda, lancen la moneda 20 veces y registren los resultados en la siguiente tabla, gana quien al final obtenga mas resultados a favor.

Cada uno debe responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál lado de la moneda escogió? ¿Por qué?

b) ¿Cuál de los dos tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

CARA 	SELLO 

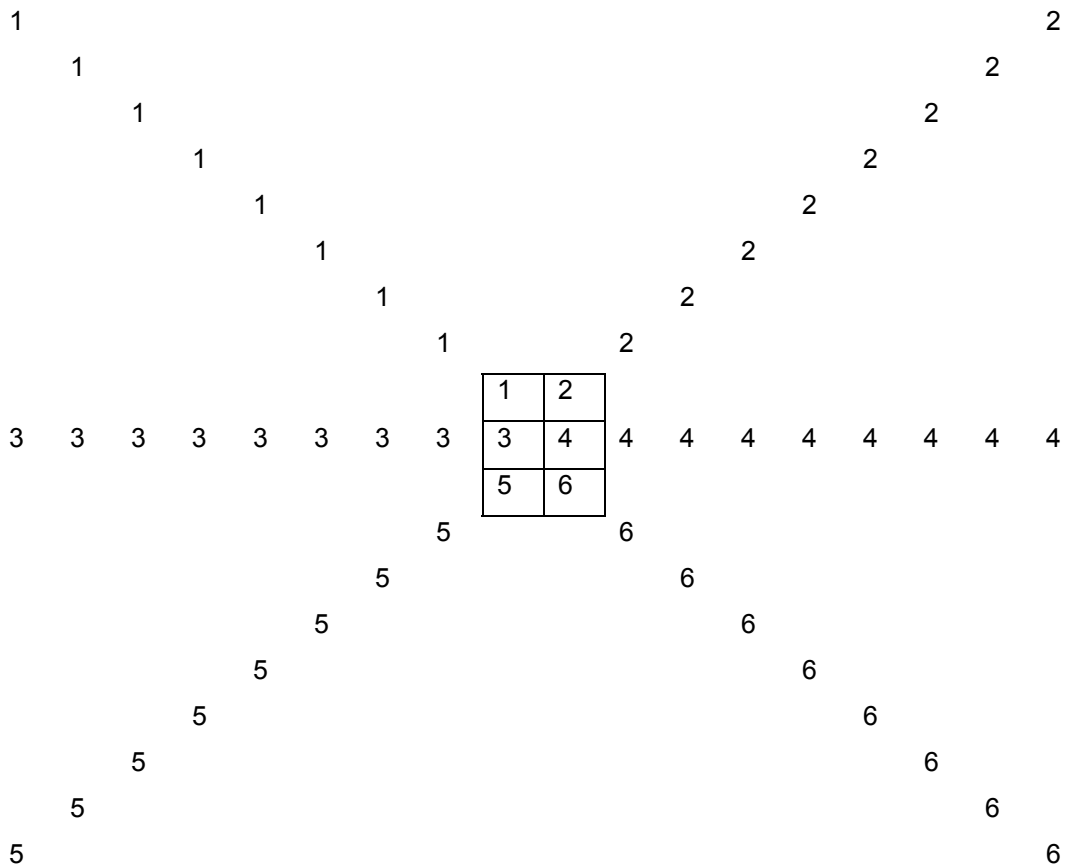


➤ Compara tus resultados con los de una pareja de compañeros, elabora una tabla con los datos de todo el grupo y responde las siguientes preguntas:

c) ¿Qué concluyes acerca del juego?

d) ¿Crees que puedes predecir los resultados que obtendrías al lanzar 1000 veces una moneda, sin tener que hacer el experimento manualmente? ¿Por qué?

2. En el siguiente juego se presenta un campo, en el centro del campo hay un tesoro, cada jugador debe escoger un número del dado, los jugadores pueden avanzar hacia el tesoro solamente sí al lanzar un dado se obtiene el número que escogió, sin importar quien lance los dados. gana el primero que llegue al tesoro.



Responde y realiza las siguientes actividades:

➤ Llena la siguiente tabla:

Resultado del lanzamiento	Número de veces que salio
1	
2	
3	
4	
5	
6	

a. Compara tus resultados con los de otros compañeros y da unas conclusiones.

b. Elabore una tabla con los resultados de todos tus compañeros

c. ¿Cual de los números tiene más posibilidad de salir? ¿Por qué?

d. ¿Crees que con el número que escogiste si vuelves a jugar es posible ganar, si o no? ¿Por qué?

e. ¿Crees que con el número que escogió tu compañero, si vuelve a jugar es posible que gane, si ó no? ¿Por qué?

f. Al lanzar los dados puedes predecir que número vas a obtener si ó no ¿Por qué?

g. ¿Existe alguna forma de lanzar un dado y obtener un número específico?

h. Si lanzas los dados 2400 veces, ¿cuantas veces esperas que salga cada uno de los números sin tener que realizar los lanzamientos? ¿Por qué?

ANEXO C. TALLER 2: JUGAR PARA APRENDER II

1. En el siguiente juego vamos a suponer que estamos en un reino en el cual cada año el rey escoge a sus esclavos y a sus caballeros. El rey utiliza un método muy curioso para escogerlos: En una urna deposita tres bolas dos de ellas del mismo color (eje: dos amarillas y una verde). Cada persona tiene que sacar una bola de la urna, si pertenece a las dos bolas del mismo color será esclavo, si es distinta será caballero. Cuando se es elegida cada persona la bola se vuelve a colocar en la urna. Las bolas son indistinguibles entre sí y la persona no puede verlas. Haz esta actividad con otro compañero, juega 20 veces, cuenta cuantas veces fuiste elegido caballero y cuantas esclavo en el reino, Después de que todos los grupos terminen la persona que fue elegida más veces caballero en el reino colocará a los esclavos un ejercicio físico.

Antes de jugar responde las siguientes preguntas:

a) ¿Crees que el rey es justo con las personas que viven en el reino? Explica tu respuesta

b) ¿Cómo esta planteado el juego crees que serás elegido más veces, esclavo o caballero? ¿Por qué?

c) Elabora una tabla para registrar el número de veces que salio cada color, llena la tabla con la inicial de tu nombre y la de tu compañero para poder saber cual persona obtuvo el resultado. Y responde la siguiente pregunta:

2 bolas																			
1 bola																			

❖ Con base en los resultados obtenidos, sigues pensando lo mismo que contestaste en la pregunta 1 b) ¿Por qué?

❖ Compara tus resultados con los de tus compañeros. Y elabora una tabla de todo el grupo para registrar cuantas veces salio cada color.

grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	total
1 bola																			
2 bolas																			

d) Si el rey hiciera esta actividad 180 veces en el reino, aproximadamente, ¿cuántas veces serias elegido esclavo y cuantas caballero? ¿por qué?

2. El rey ha decidido hacer un cambio en el reino, ahora va a clasificar a las personas en tres grupos, caballeros, soldados y esclavos. Con este fin deposita 6 bolas ejemplo: 1 roja, 2 amarillas y 3 azules. Las personas que saquen la bola roja serán caballeros, los que saquen la amarilla serán soldados y los que saquen la azul serán esclavos. (haz lo mismo pero con los colores que te correspondieron) juega 30 veces, cuenta cuantas veces fuiste elegido caballero, cuantas soldado y cuantas esclavo en el reino, Después de que todos los grupos terminen, la persona que fue elegida mas veces caballero en el reino, colocará a los esclavos un ejercicio físico, solamente se salvaran las tres personas que fueron elegidas mas veces soldados.

a) Registra en la siguiente tabla los datos obtenidos (escribe los colores que te correspondieron) llena la tabla con la inicial de tu nombre y la de tus compañeros, para poder saber cual persona obtuvo el resultado.

3 bolas														
2 bolas														
1 bola														

b) Compara los resultados con los de tus compañeros y elabora una tabla de todo el grupo para registrar cuantas veces salio cada color.

grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3 bolas												
2 bolas												
1 bola												

c) ¿Crees que el rey es justo con las personas que viven en el reino? ¿Por qué?

d) Si el rey hiciera esta actividad 600 veces en el reino, aproximadamente, ¿Cuántas veces serías elegido esclavo, cuántas soldado y cuántas caballero? ¿Por qué?

ANEXO D. EXPLORANDO EL PROBABILITY EXPLORER

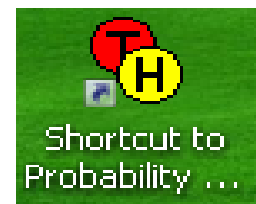
Probability Explorer es un programa creado por la inglesa Hollylynne Stolz, profesora de la universidad de Carolina del Norte (EE.UU.) como resultado de su trabajo de doctorado, el cual surgió por la necesidad de ofrecer en especial a los niños un micromundo computacional que permite al usuario visualizar e interactuar con simulaciones de algunos experimentos aleatorios comunes en la enseñanza de la probabilidad (lanzamiento de una moneda, dados, bolas, y otros definidos por el usuario) es un ambiente multirepresentacional que genera resultados a una velocidad definida por el usuario y con la posibilidad de realizar muchísimas pruebas en un solo instante.

Las representaciones disponibles en el micromundo Probability Explorer, son representaciones multi-enlazadas, que se actualizan simultáneamente cuando los eventos aleatorios son simulados. Estas representaciones incluyen representaciones de íconos móviles arrastrando con el cursor.

Además en él se pueden manipular el número de pruebas (de 1 en 1 o 20 pruebas seguidas, por ejemplo) las cuales se ejecutan con solo un clic en el icono: correr el experimento (Run Experiment) representado por un muñeco que corre.

1. ¿Cómo se abre el programa Probability Explorer?

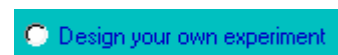
- Haga doble clic sobre el icono del escritorio que aparece como dos círculos, uno amarillo y otro rojo con las letras T y H, Con el nombre *Shortcut to Probability Explorer* (Acceso directo al Explorador de Probabilidad).



- Aparece una ventana con la presentación del programa, su autora y la versión. Haga clic sobre el letrero amarillo que dice: “siga”.

Let's Go!

- Aparecen dos ventanas, la mas pequeña con el nombre *choose an experiment* (elija un experimento), donde pregunta *¿what do you want to do today?* (¿Qué desea hacer usted hoy?) y presenta cuatro opciones para correr un experimento (*run experiment*):



- ❖ **Coins:** Para experimentar con monedas, donde **H** es cara y **T** es sello.
- ❖ **6-sided Dice:** Para experimentar con dados de seis caras (1, 2, 3, 4, 5,6).
- ❖ **Marbles in a bag:** Para experimentar con bolas en una bolsa.
- ❖ **Design your own experiment:** Para diseñar su propio experimento seleccione con el cursor el experimento que desee explorar y haga clic en OK.

- Aparece otra pequeña ventana, donde le pregunta *¿Cuántos a la vez? (¿how many at a time?)*, si son monedas entonces, *¿cuántas monedas quiere lanzar al mismo tiempo?*, y lo mismo con los demás eventos (dado, bolas, etc.); permite escoger hasta tres eventos al tiempo. Haga clic en el número de eventos deseados y clic en OK.



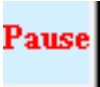
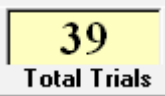


2. ¿Cómo funciona el programa Probability Explorer?









Se observa la ventana principal donde en la parte superior se muestra la barra del menú y la barra de herramientas del programa. En la barra de menú despliegue Archivo (*file*) y guarde su experimento (*Save as*), crea una carpeta con sus nombres y asígnele un nombre al archivo.

En la barra de menú también encontramos:

- **Menú Archivo:** Donde aparecen las funciones como: Nuevo experimento, Abrir, Cerrar, Guardar, Guardar como, Imprimir y Salir.
- **Menú opciones:** ofrece las posibilidades de modificar la velocidad de la simulación (baja, media y rápida). También ofrece la posibilidad de ocultar (*Hide*) ó mostrar (*Show*) los íconos de datos.

En la *barra de herramientas* encontramos varios íconos con una función específica:

- **Correr experimento:** Con solo hacer clic sobre éste icono se inicia la simulación del experimento, de acuerdo al número de pruebas asignadas. 
- **Número de pruebas:** En esta barra se escribe el número de pruebas (*trials*) ó lanzamientos que se desean ejecutar: de 1 en 1, de 2 en 2, 10 en 10, etc. Máximo pueden ser 500 pruebas en un solo clic, pero se pueden repetir de forma acumulada haciendo nuevamente clic en el primer icono. 
- **Pausa:** Haciendo clic en este icono se puede detener la simulación en el momento que desee el usuario, cuando el número de pruebas es grande. 
- **Total de pruebas:** Es una barra que controla el conteo del total de pruebas realizadas en el experimento, así se pueden ejecutar 10 pruebas, luego 20 pruebas, entonces en esta barra se muestra un total de 39 pruebas realizadas. 
- **Borrador.** elimina los datos obtenidos para repetir el mismo experimento desde cero pruebas. 
- **Correr hasta:** abre una ventana que permite escoger un evento para que el experimento corra hasta que salga determinado resultado. (Ej. Yo quiero que corra el experimento hasta que salga un sello). 

- **Balanza:** Abre un ventana que muestra las opciones que tiene cada evento de salir y permite simular una moneda ó dado cargado. (Se puede ocultar en el menú de opciones). 
- **Apilar columnas:** Tiene como función organizar los íconos que representan los datos del experimento (Ej. Los íconos que representan la cara ó sello de la moneda) en columnas a medida que corre la simulación. Cuando el numeral de pruebas es muy alto, las columnas se desbordan y se desordenan. 
- **Formar en orden:** Tiene como función presentar los íconos de resultado del experimento en el orden en que van saliendo, formando 10 columnas. 
- **Enumerar todos:** Tiene como función mostrar en una ventana el historial del experimento todos los resultados enumerados a medida que aparecen. 
- **Gráfico de torta:** (Pie Graph): Al hacer clic sobre el muestra un gráfico circular cuya apariencia depende de la proporción en los resultados. Cambia a medida que corre el experimento y muestra la escala de medida. Se puede copiar y pegar en el block de notas. 
- **Gráfico de barras:** (Bar Graph): Al hacer clic sobre la muestra un gráfico de barras cuya apariencia depende de la proporción en los resultados. Cambia a medida que corre el experimento y muestra la escala de medida. Se puede copiar y pegar en el bloc de notas. 
- **Tabla de datos:** (Data table): Muestra los resultados de la simulación clasificando los eventos, donde aparecen las cantidades como una cuenta (count) en forma de fracción (fraction), en forma decimal y en forma de porcentaje (percent). Cambia a medida que corre el experimento. Se puede copiar y pegar en el block de notas. 
- **Block de notas** (Note Bock): Permite al estudiante describir y recolectar las conclusiones a que puede llegar en uno o varios experimentos y pegar las tablas de resultados y gráficos. Pero tiene el inconveniente de que por el tamaño no se distingue claramente la información por 

eso es aconsejable usar el editor de texto (**Word**) para copiar y pegar gráficos y tablas de datos, así como describir las conclusiones relevantes.

3. ¿Como empiezo a simular un experimento?

- Para hacer lanzamientos o pruebas uno por uno, haga clic en el primer icono: “correr experimento” (run experiment). Haga clic para hacer 5 pruebas una por una.
- Para borrar los resultados y empezar de nuevo el experimento, haga clic en el icono “borrar”. Cerciórese que el contador del total de pruebas quede en 0.
- Para hacer 20 pruebas seguidas por primera vez, ubique el cursor en el icono “número de pruebas”, modifique el valor y haga clic en “correr experimento”.
- Para hacer 20 pruebas adicionales solo deben hacer clic nuevamente en el icono “correr experimento”, de tal forma que los resultados se suman a los obtenidos en las 20 pruebas anteriores.
- Para completar 100 pruebas en la misma simulación solo deben tener en cuenta el número “Total de pruebas” que ya se han realizado y escribir en la barra “Número de pruebas” el número que hace falta para completar.
- Para cambiar de experimento. Vaya al menú Archivo y haga clic en Nuevo Experimento. Aparece la ventana inicial donde puede seleccionar el experimento que desea trabajar.
- Para cambiar la velocidad de la simulación vaya al menú “opciones” y seleccione la velocidad deseada, por efecto aparece en velocidad media. Corra 100 pruebas adicionales y cambie la velocidad a rápida. (Fast).
- Para organizar los datos en columnas haga clic en el icono respectivo. Borre los resultados hechos hasta ahora y corra 40 pruebas organizadas en columna.
- Para cambiar la presentación de los datos conservando el orden en que aparecen haga clic en el icono “formación”. Corra 30 pruebas en formación.

- Para usar el historial de resultados haga clic en el icono “enumerar todos” sirve para buscar cual es el número más largo de eventos repetidos. Haga 50 pruebas y busque el número más grande de caras o sellos seguidos.
- Para usar los gráficos de barra. Corra 45 pruebas y observe como cambia la forma del gráfico.
- Para utilizar la tabla de datos. Borre las pruebas realizadas e inicie con 100 pruebas manteniendo abierta la ventana Data Table y observe como cambian los valores a medida que aumenta el número de pruebas, haga una pausa en cualquier momento y analice los valores que aparecen en ella. Para experimentos de dos o tres eventos al tiempo, aparece en la parte superior una opción para presentar los resultados de la simulación teniendo en cuenta el orden o lo contrario.
- Para copiar un gráfico o tabla de datos. El programa permite copiar solo ventanas en cuya parte superior aparece la palabra “Copy”, basta con hacer clic en éste y luego hacer clic en pegar dentro de la ventana del block de 3 notas. O bien dentro del procesador de texto Word. Copie una tabla de datos y un gráfico dentro del block de notas y en Word.

ANEXO E. TALLER 2: SIMULACIÓN Y JUEGO CON EL PROBABILITY EXPLORER

1. Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Probability Explorer para experimentar con una moneda. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:
- a) Haz 50 lanzamientos de una moneda en el Probability Explorer y registra en la siguiente tabla cuántas veces salió cara y cuantas sello.
 - b) Sin borrar el total de lanzamientos realiza otros 50 colocando el Probability Explorer en alta velocidad. Y registre cuantos lanzamientos lleva en total, cuántas caras y cuántos sellos.
 - c) Realiza 100 lanzamientos más y regístralos en la tabla.
 - d) Realiza otros 100 lanzamientos y regístralos.
 - e) Por ultimo Realiza 200 lanzamientos más y regístralos en la tabla.

Nº de lanzamientos	caras	sellos

2. En 1000 lanzamientos aproximadamente ¿cuántas caras y cuántos sellos saldrán? ¿Por qué?

3. Realiza 500 lanzamientos y súmelos con los 500 realizados anteriormente. Regístralos en la tabla ¿Cuántas caras y cuántos sellos obtuviste en total? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados. ¿Por qué?

4. En 5000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas caras y cuántos sellos saldrán? ¿Por qué?

5. En 100000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas caras y cuántos sellos crees que pueden salir? ¿Por qué?

6. Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Probability Explorer para experimentar con un dado de 6 caras. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:

- a) Haz 60 lanzamientos de un dado en el Probability Explorer y registra en la siguiente tabla cuántas veces salió cada número.
- b) Sin borrar el total de lanzamientos realiza otros 60 colocando el Probability Explorer en alta velocidad, y registre cuántos lanzamientos lleva en total, y cuántas veces ha salido cada número.
- c) Realiza 120 lanzamientos más y regístralos en la tabla.
- d) Realiza otros 120 lanzamientos y regístralos.
- e) Por último Realiza 240 lanzamientos más y regístralos en la tabla.

N° LANZAMIENTOS	1	2	3	4	5	6

7. En 1200 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces debe salir cada número? ¿Por qué?

8. Realiza 600 lanzamientos y súmelos con los 600 realizados anteriormente. Regístralos en la tabla ¿Cuántas veces salio cada número? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados ¿Por qué?

9. En 6000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá número?

10. En 24000 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada número?

11. Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Probability Explorer para experimentar con bolas en una urna. Introduce 2 bolas rojas y una negra. En cada apartado debes realizar el diagrama de barras y la tabla de datos la cual vas a guardar en Microsoft Word con tu nombre:

- a) Haz 60 extracciones y registra en la siguiente tabla cuantas veces salió cada color
- b) Sin borrar las 60 extracciones realiza otras 60 y registra en la tabla cuantas extracciones van en total y cuantas veces ha salido cada color.
- c) Realiza 120 extracciones más y regístralas.
- d) Realiza otras 120 extracciones más y regístralas.
- e) Por ultimo realiza 240 extracciones y regístralas en la tabla.

Nº de extracciones	Bolas rojas	Bolas negras

12. En 1200 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldría cada color?

13. Realiza 600 extracciones y súmelas con los 600 realizadas anteriormente. Regístralas en la tabla ¿Cuántas veces salio cada color? La respuesta que diste en el apartado anterior se aproxima a los resultados ¿Por qué?

14. En 6000 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color?

15. En 24000 extracciones aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color?

ANEXO F. EVALUACIÓN

1. Imagina que lanzas una moneda al aire ¿cuál resultado vas obtener? ¿Por qué?

2. Si lanzas una moneda determinado número de veces, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada resultado? Completa la siguiente tabla:

Número de lanzamientos	Cara	Sello
100		
600		
1000		
20000		

3. Al lanzar un dado cual número tiene más posibilidad de salir:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5
- f) 6
- h) Todos tienen la misma posibilidad de salir

4. Al lanzar los dados puedes predecir que número vas a obtener ¿por qué?

5. Si lanzas un dado determinado número de veces, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada resultado? Completa la siguiente tabla:

Numero de lanzamientos	1	2	3	4	5	6
60						
600						
1200						
2400						

6. En una urna se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja, suponga que vas a Jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna, ganas si sacas el color que escogiste.

a) ¿Cuál color escogerías Por qué? ¿El juego es justo? ¿Por qué?

b) Si en la urna se depositara otra bola roja ¿Cuál color escogerías? ¿El juego es justo?

7. Si en una urna se introducen 2 bolas negras y una roja, al hacer un determinado número de extracciones, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color? Completa la siguiente tabla:

Numero de lanzamientos	Negro	rojo
30		
300		
600		
1200		
60000		

8. Utilizando el Probability Explorer, tu profesor va a introducir una cantidad de bolas en una urna y tendrás que deducir cuántas bolas hay de cada color dentro de la urna. ¿Por qué?

ANEXO G. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN CON MONEDAS

Nº de lanzamientos	CARA	SELLO
20	9	11
40	20	20
60	31	29
80	41	39
100	51	49
120	61	59
140	73	67
160	84	76
180	95	84
200	105	95
220	113	109
240	124	116
260	137	143
280	146	134
300	154	146
320	164	156
340	174	166

ANEXO H. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN CON DADOS

	1	2	3	4	5	6	Total de lanzamientos
Grupo1	13	11	13	25	15	12	89
Grupo2	11	10	9	15	5	9	59
Grupo3	13	14	12	13	13	12	77
Grupo4	11	16	8	13	18	17	83
Grupo5	14	14	14	16	14	10	82
Total de salidas de cada número	62	65	56	82	65	65	380

**ANEXO I. TABLA GRUPAL DE LA EXPERIMENTACIÓN 1 CON BOLAS EN
UNA URNA**

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
1 bola	7	7	7	5	10	7	5	9	8	7	10	82
2 bolas	13	13	13	15	10	13	15	11	12	13	10	138
Total	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	220

ANEXO J. TABLA GRUPAL DE LA ACTIVIDAD 2 CON BOLAS EN UNA URNA

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
3 bolas	13	16	10	12	16	16	18	16	14	131
2 bolas	13	10	6	15	10	10	7	8	10	89
1 bola	4	4	14	3	4	4	5	6	6	50
total	30	30	30	30	30	30	30	30	30	270