

**ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN UN ESPACIO DE
DISTRIBUCIONES**

MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018**

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN UN ESPACIO DE DISTRIBUCIONES

MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA

Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

*Dedicado a:
Mi familia, en especial a mi madre.*

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios, porque a él le debo todo, y porque creo profundamente que me ha acompañado siempre y ha sido mi guía en cada uno de mis pasos.

A mi madre, Nubia Amanda Fontecha Medina y mi padrastro Luis Cordero, quienes me han apoyado desde el primer momento en que tomé la decisión de estudiar matemáticas, sus incontables sacrificios y esfuerzos por hacer que me formara como profesional hoy tienen una recompensa.

A mi papá José Salvador quien me ayudó al inicio de mi carrera y cuyo aporte fue determinante para poder continuar con mis estudios.

Al profesor Dr. Élder Jesús Villamizar Roa, quien además de motivarme a continuar con mis estudios, ha sido un excelente director, me ha orientado, corregido y ha sido una excelente guía en la realización de este trabajo.

A mi hermano Fredy Alexander y mi cuñada Nini Johana, gracias, mil gracias porque ustedes hicieron que este sueño fuera posible; por haberme alojado en su casa y brindarme todas las condiciones para que pudiera cumplir este objetivo, por su apoyo incondicional y desinteresado.

A mi hermano Jairo Fabián Cepeda cuya ayuda económica y su apoyo desinteresado, fueron vitales para que yo pudiera desarrollar mi carrera en la universidad.

A todos mis compañeros de carrera, quienes de un modo u otro, con su apoyo y su orientación, hicieron un poco más fácil mi recorrido por la universidad, en especial, a Gerardo y Ludwing, quienes me acompañaron desde primer se-

mestre, así como los que estuvieron conmigo desde Moderna y Análisis; nuestro compañerismo nos hizo fuertes y nos aclaró el camino para llegar a la meta.

A cada uno de los profesores que contribuyó en mi formación como matemático, desde los profesores de ciclo básico hasta los de último nivel de carrera; todos, además de enriquecer mi gusto por las matemáticas, hicieron aportes fundamentales en mi formación como un futuro profesor de matemáticas.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	14
1 PRELIMINARES	19
1.1 ESPACIOS DE LEBESGUE	19
1.2 EL ESPACIO DE SCHWARTZ Y LAS DISTRIBUCIONES TEMPERADAS ...	21
1.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER	23
1.4 DERIVADA DE FRÉCHET	26
2 EL MODELO NAVIER-STOKES	28
2.1 EL MODELO	28
2.2 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA	30
2.3 DERIVADA MATERIAL Y TEOREMA DEL TRANSPORTE	32
2.4 CONSERVACIÓN DE MASA	36
2.5 CONSERVACIÓN DE MOMENTUM	37
2.6 SISTEMA DE NAVIER-STOKES	40
3 EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL	41

3.1	ESPACIO DE PSEUDOMEDIDAS $\mathcal{P}M^a$	41
3.2	EL PROYECTOR DE LERAY	49
3.3	FORMULACIÓN INTEGRAL	51
3.4	ESTIMATIVAS LINEALES Y NO LINEALES	54
3.5	UN RESULTADO DE EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES	61
3.6	SOLUCIONES AUTO SIMILARES	66
	REFERENCIAS	69
	BIBLIOGRAFÍA	71

RESUMEN

TÍTULO: ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN UN ESPACIO DE DISTRIBUCIONES.¹

AUTOR: MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA.²

PALABRAS CLAVES: ECUACIONES DE NAVIER-STOKES, DISTRIBUCIONES TEMPERADAS, TRANSFORMADA DE FOURIER, ESPACIO DE PSEUDOMEASURAS, TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA, PROYECTOR DE LERAY, SOLUCIONES AUTO SIMILARES

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo está dirigido al estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Además de hacer una breve deducción del sistema Navier-Stokes, analizamos la existencia de solución global del problema de Cauchy asociado, en un espacio de distribuciones temperadas construido a partir de la transformada de Fourier, denominado el espacio de las pseudomeasuras.

Iniciamos con una breve introducción, en la cual, hablamos de las dos maneras de enfrentar el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes. En el primer Capítulo, introducimos algunos conceptos y resultados relevantes usados en el desarrollo del trabajo. En el Capítulo 2, realizamos una descripción del origen físico del modelo de Navier-Stokes, a partir de las leyes clásicas de la mecánica newtoniana, como lo son la Ley de conservación de la masa y la Ley de conservación del momento.

En el Capítulo 3, mostramos que el espacio de las pseudomeasuras es un espacio de Banach, revisamos algunas de sus propiedades funcionales básicas y verificamos algunas propiedades del producto de funciones en estos espacios. Seguido de esto, revisamos el proyector de Leray y posteriormente, presenta-

¹Trabajo de grado.

²Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander.
Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. en Matemáticas.

mos la formulación integral asociada al problema de Cauchy asociado al modelo Navier-Stokes. Se verificaron algunas estimativas lineales y no lineales, a partir de las cuales, demostramos la existencia de solución global de las ecuaciones de Navier-Stokes con datos iniciales en el espacio de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$, vía el teorema de la función implícita.

Finalmente, estudiamos la existencia de soluciones auto similares en los espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$.

ABSTRACT

TITLE: NAVIER-STOKES' EQUATIONS IN A SPACE OF DISTRIBUTIONS.³

AUTOR: MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA.⁴

KEYWORDS: NAVIER-STOKES' EQUATIONS, TEMPERED DISTRIBUTIONS, THE FOURIER TRANSFORM, SPACE OF PSEUDOMEASURE, IMPLICIT FUNCTION THEOREM, LERAY'S PROYECTOR, SELF SIMILAR SOLUTIONS.

DESCRIPTION:

The present work is directed to the study of Navier-Stokes' equations. In addition to making a brief deduction of the Navier-Stokes system, we analyzed the existence of a global solution of the associated Cauchy problem, in a space of tempered distributions constructed from the Fourier transformation, called the space of the pseudomeasures.

We started with a brief introduction, in which, we talked about the two ways to face the Cauchy problem associated with the Navier-Stokes equations. In the first chapter, we introduced some relevant concepts and results used in the development of the work. In Chapter 2, we performed a description of the physical origin of the Navier-Stokes model, based on the classical Newtonian mechanics, such as the law of conservation of mass and the law of conservation of the moment.

In Chapter 3, we showed that the pseudomeasure space is a Banach space, we reviewed some of its basic functional properties and verified some properties of the product of functions in these spaces. Following this, we reviewed the Leray projector and later, we presented the integral formulation related to the Cauchy problem associated with the Navier-Stokes model. Some linear and non-linear estimates were verified, from which we demonstrated the existence of a global solution of the Navier-Stokes equations with initial data in the pseudomeasures

³Degree work.

⁴Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander.
Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. en Matemáticas.

space $\mathcal{P}\mathcal{M}^{-1}$, via the theorem of the implicit function.

Finally, we studied the existence of similar auto solutions in spaces $\mathcal{P}\mathcal{M}^{-1}$.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Navier-Stokes están conformadas por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales describen el movimiento de un fluido viscoso incompresible. Se entiende por fluido a un agregado de partículas que se deforma en forma continua ante cualquier fuerza que actúe sobre él. La resistencia de un fluido a las deformaciones producidas por las tensiones corresponde a la viscosidad, y la incompresibilidad corresponde a la propiedad de algunos fluidos de preservar el volumen bajo efectos de presión.

En forma vectorial, el sistema de Navier-Stokes es dado por el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$ y $p = p(\mathbf{x}, t)$ son las incógnitas que denotan, respectivamente, el campo velocidad y la presión mecánica del fluido en el instante $t > 0$ y en la posición $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n = 2, 3$. La función \mathbf{f} denota un campo dado de fuerzas externas y ν representa la viscosidad cinemática del fluido. Se asume, sin pérdida de generalidad, que la densidad del fluido es constante e igual a 1. El sistema (0.0.1) se complementa con condiciones iniciales \mathbf{u}_0 y de frontera; en particular, comúnmente se consideran condiciones de Dirichlet $\mathbf{u} = 0$ sobre la frontera $\partial\Omega$.

Desde su formulación, en la primera mitad del siglo XIX, las ecuaciones de Navier-Stokes han atraído el interés de muchos investigadores de la comunidad científica mundial; ese interés se debe al hecho de que estas ecuaciones son

usadas en el estudio de problemas físicos relacionados con la meteorología, la aeronáutica, la oceanografía, la ingeniería hidráulica, entre otros, y también desde el punto de vista matemático debido a la dificultad en el análisis cualitativo del modelo y a una variedad de problemas abiertos que existen en la actualidad. En efecto, es bien conocido que uno de los siete problemas del milenio, propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas, corresponde justamente con el problema de existencia de solución global clásica de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso tridimensional [5].

Hasta el momento se conocen dos maneras de enfrentar el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes. La primera de ellas es debida a Jean LERAY [15, 16, 17] quien introdujo el concepto de soluciones débiles (turbulentas), y la segunda es debida a Tosio KATO [13] que permite obtener la existencia y unicidad de soluciones (blandas) globales y regulares, bajo condiciones de pequeñez de los datos iniciales y de las fuerzas externas que actúan sobre el fluido. El concepto de solución débil introducido por Leray permite el análisis de soluciones en espacios mas grandes a los espacios clásicos para describir el movimiento de un fluido; más aún, una de las motivaciones planteadas por Leray era la de considerar una clase de soluciones permitiendo que el rotacional de la velocidad tienda a infinito en tiempo finito: El problema que Leray planteó sobre la ocurrencia de singularidades en fluidos turbulentos en el caso 3D, se mantiene como un problema abierto. Leray estudió la posible existencia de singularidades y notó que el conjunto $\{t \in [0, T] : \|\text{rot} \mathbf{u}\|_{L^2} = \infty\}$ tiene medida de Lebesgue cero, más aún, medida $1/2$ -Hausdorff cero; También, demostró que el complemento de este conjunto en $[0, T]$ es una unión numerable de intervalos semi cerrados $[a_i, b_i)$. En esta dirección, es importante remarcar un resultado de Caffarelli, Kohn y Nirenberg [2] el cual extendió considerablemente el trabajo de Leray sobre singularidades, estableciendo que el conjunto de puntos de posibles singularidades posee medida de Hausdorff unidimensional cero.

La formulación débil introducida por Leray se obtiene multiplicando la ecuación

(0.0.1) por funciones *test* $v \in \mathcal{V}$ e integrando sobre Ω , siendo

$$\mathcal{V} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \operatorname{div} v = 0\},$$

donde $C_0^\infty(\Omega)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables que poseen soporte compacto en Ω . Consideremos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ de las funciones en $L^2(\Omega)$ que poseen primeras derivadas distribucionales en $L^2(\Omega)$, por $H_0^1(\Omega)$ el subespacio de las funciones en $H^1(\Omega)$ que se anulan en $\partial\Omega$, y por V la clausura de \mathcal{V} en la norma de $H_0^1(\Omega)$. Entonces, la formulación débil de (0.0.1) consiste en hallar una función $u : (0, \infty) \rightarrow V$ tal que para casi todo $t > 0$, se verifique (en el sentido de distribuciones sobre $(0, \infty)$) que:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + ((u \cdot \nabla)u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V, \quad (0.0.2)$$

$$u(0) = u_0. \quad (0.0.3)$$

En el marco de la teoría L^2 , usualmente se denominan soluciones débiles a funciones vectoriales que pertenecen al espacio $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H(\Omega))$, para todo $T > 0$, y que verifican la formulación (0.0.2)-(0.0.3), donde H denota la clausura de \mathcal{V} en la norma $L^2(\Omega)$. Adicionalmente, se denominan soluciones fuertes a aquellas funciones vectoriales que verifican (0.0.2)-(0.0.3) y que pertenecen al espacio $L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$, para todo $T > 0$, siendo $D(A) = V \cap H^2(\Omega)$. Aquí, H^2 representa el espacio de Sobolev formado por las funciones que poseen derivadas (en el sentido de las distribuciones) hasta de orden 2 en $L^2(\Omega)$. Los resultados de existencia y unicidad dependen de la dimensión; en resumen, en el caso bidimensional, la teoría de existencia en el contexto de los espacios L^2 es satisfactoria, más exactamente, se conoce la buena colocación en el sentido de Hadamard: existencia y unicidad de soluciones débiles; existencia y unicidad de soluciones fuertes desde que los datos, y el dominio, sean suficientemente regulares; y la dependencia continua de las soluciones respecto a los datos. En el caso tridimensional, solo se tienen resultados parciales; se tiene la existencia y unicidad de soluciones fuertes en algún intervalo $(0, T^*)$ con T^* dependiendo de los datos. También se tiene la existencia de soluciones débiles sobre $(0, \infty)$. La

unicidad de soluciones débiles, así como la existencia global de soluciones fuertes se mantienen como problemas abiertos. Todos los resultados anteriormente mencionados constituyen la columna vertebral de la teoría L^2 de las ecuaciones de Navier-Stokes, y pueden ser consultados en las referencias [8, 14, 19].

Una segunda manera de enfrentar el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes es debida a Kato [13]. El abordaje de Kato se basa en la teoría de semigrupos y técnicas de punto fijo, permitiendo demostrar la existencia y unicidad de soluciones blandas (*mild solutions*), que de hecho son regulares, bajo condiciones de pequeñez sobre los datos y las fuerzas externas; sin embargo, la técnica de Kato no permite considerar soluciones singulares a priori, imposibilitando obtener conclusiones sobre su existencia. El método de Kato permite estudiar posibles soluciones singulares cuando éste se aplica en algunos espacios especiales de funciones, como por ejemplo, los espacios de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$. Un espacio crítico (asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes) se entiende como un espacio de Banach X cuya norma es invariante bajo la relación de escala $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x})$, para todo $\lambda > 0$. Esta relación de escala permite ver diferencias estructurales sobre la ecuación de Navier-Stokes en el caso 3D comparado con el caso 2D; mientras que en el caso bidimensional la energía cinética $E(\mathbf{u}) = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2$ se preserva por el scaling, esto es $E(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}_\lambda)$, en el caso tridimensional se tiene que $E(\mathbf{u}) = \lambda E(\mathbf{u}_\lambda)$, lo que lleva a que $E(\mathbf{u}_\lambda) \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, es decir, hay un mal comportamiento de la energía en pequeñas escalas. Lo anterior naturalmente motiva el estudio de soluciones que sean invariantes por el scaling, a saber, las llamadas soluciones auto similares.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, nos planteamos el objetivo principal de esta disertación que consiste en analizar la existencia de soluciones para el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio n -dimensional, con datos iniciales en espacios de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$.

Buena parte del contenido de la presente disertación se basa esencialmente en el artículo [3], con algunas variaciones en la prueba del teorema de existencia, y

desarrollando con más detalle los resultados preliminares y estimativas lineales y no lineales. Para la prueba del teorema de existencia haremos uso del teorema de la función implícita en lugar de la técnica de punto fijo de Banach usada en [3], lo cual garantiza necesariamente la dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales y fuerzas externas. Otras referencias que han soportando esta disertación son [8, 20]. En la referencia [8] se estudia un sistema acoplado de las ecuaciones de Navier-Stokes con una ecuación de temperatura (sistema de Boussinesq) en espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^{\alpha}$, mientras que la referencia [15] ofrece una buena aproximación a la deducción física del modelo.

El contenido de la presente disertación se ha organizado de la siguiente manera: en el segundo capítulo, se introducen algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos introduciendo la definición de los espacios de Lebesgue y algunas desigualdades importantes que satisfacen las funciones que pertenecen a estos espacios. En la segunda sección, hablamos del espacio de las distribuciones y también del espacio de las distribuciones temperadas. Seguido de esto, damos la definición de la transformada de Fourier y enunciamos algunas de sus propiedades más importantes. En la última sección de este capítulo, abordamos las nociones básicas de la derivada de Fréchet, y enunciamos el Teorema de la función implícita, el cual será usado para demostrar un teorema de existencia de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el Capítulo 3, presentamos el modelo de Navier-Stokes y damos una breve deducción de este modelo a partir de la Ley de conservación de la masa y la Ley de conservación de la cantidad de movimiento. En el Capítulo 4, introducimos un espacio de distribuciones temperadas sobre el cual queremos demostrar la existencia de solución para el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes. Este espacio es conocido en la literatura como espacio de pseudomedidas; demostramos que éste es un espacio de Banach, y mencionamos algunas de sus propiedades fundamentales. Seguido de esto, revisamos el proyector de Leray y posteriormente, presentamos la formulación integral asociada

al problema de Cauchy asociado al modelo Navier-Stokes. Demostramos la existencia de solución global de las ecuaciones de Navier-Stokes con datos iniciales en el espacio de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$, vía el teorema de la función implícita, y finalmente, estudiamos la existencia de soluciones auto similares en estos espacios.

Capítulo

1

PRELIMINARES

En este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados preliminares que nos facilitarán el entendimiento del contenido del presente trabajo; se inicia con la definición de los espacios de Lebesgue L^p , y a continuación mencionaremos algunas de sus propiedades. Posteriormente, enunciaremos la definición y propiedades del espacio de Schwartz y el espacio de las distribuciones temperadas; luego, recordaremos la definición de la transformada de Fourier y enunciaremos algunas de sus propiedades. Finalmente, haremos una breve revisión de la derivada de Fréchet y enunciaremos el teorema de la función implícita. Los resultados preliminares presentados en este capítulo pueden ser encontrados en Folland [9], Grafakos [10].

1.1 ESPACIOS DE LEBESGUE

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.1.1)$$

El funcional (1.1.1) define una norma en $L^p(\Omega)$, con lo cual, $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ es un espacio de Banach. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Los espacios L^p de funciones vectoriales $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ serán denotados por \mathbf{L}^p , es decir,

$$\mathbf{L}^p = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in L^p, \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

en cuyo caso, la norma está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otra parte, cuando $p = \infty$, el espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess } |u(\mathbf{x})| < \infty. \quad (1.1.2)$$

Los espacios $L^\infty(\Omega)$ de funciones vectoriales $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son denotados por $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$, con norma $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|u_i\|_{L^\infty}\}$, donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$.

El funcional (1.1.2) define una norma en $L^\infty(\Omega)$, con la cual, $(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty})$ es un espacio de Banach. Para $p \in (1, \infty)$, el espacio dual de $L^p(\Omega)$ es dado por $L^{p'}(\Omega)$, con p' verificando

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Además, el dual de $L^1(\Omega)$ corresponde con $L^\infty(\Omega)$. Se denota por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, al conjunto de funciones $f \in L^p(\overline{\Omega'})$, para todo $\Omega' \subseteq \Omega$ abierto y acotado. Algunas desigualdades importantes que se verifican en los espacios $L^p(\Omega)$ son: la desigualdad de Minkowski, Hölder e Young.

- Desigualdad de Minkowski: Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g \in L^p(\Omega)$, entonces

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (1.1.3)$$

- Desigualdad de Hölder: Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$, entonces

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \quad (1.1.4)$$

- Desigualdad de Young: Sea $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ la convolución $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y vale que

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad (1.1.5)$$

donde

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

1.2 EL ESPACIO DE SCHWARTZ Y LAS DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

A continuación definimos el espacio de las funciones de Schwartz. Este espacio guarda buenas propiedades en relación a la transformada de Fourier y es la base para la definición de las distribuciones temperadas.

Antes de dar esta definición, introducimos algunas notaciones que son necesarias para entender el contexto. Cuando una función es de varias variables usaremos convenientemente una notación compacta para las derivadas parciales de ordenes superiores. Un multiíndice es una n -upla de enteros no negativos. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multiíndice, denotamos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Por otra parte, el espacio de las funciones reales definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, cuyas derivadas de orden $k \in \mathbb{Z}^+$ son continuas, es denotada por $C^k(\Omega)$ y el espacio de todas las funciones reales infinitamente diferenciables por $C^\infty(\Omega)$. El

espacio de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω es denotado por $C_0^\infty(\Omega)$.

El espacio de las funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$ sobre un abierto Ω de \mathbb{R}^n , corresponde al conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dotado de la siguiente noción de convergencia: Dada una sucesión $\{\varphi_m\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, se dice que φ_m converge a φ si se verifica que:

- (i) Existe un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que los soportes de φ_m y φ están en K , para todo $m \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para cada α multiíndice, la sucesión $\{D^\alpha \varphi_m\}$ converge uniformemente a $D^\alpha \varphi$, cuando m tiende a infinito.

El conjunto de las distribuciones (o funciones generalizadas) en Ω , denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, comprende el conjunto de funcionales lineales y acotados definidos sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ es lineal y continuo}\}.$$

La continuidad de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es entendida en el siguiente sentido: si $\{\varphi_m\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es tal que $\varphi_m \rightarrow \varphi$, entonces $\langle T, \varphi_m \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, cuando $m \rightarrow \infty$, o equivalentemente, $\langle T, \varphi_m \rangle \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, para toda sucesión $\{\varphi_m\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ que converge a cero en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Por otra parte, el espacio de Schwartz, denotado por \mathcal{S} , consiste de las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que, junto con sus derivadas, decaen en el infinito más rápido que cualquier potencia de $|x|$. Más precisamente, para cualquier entero no negativo N y cualquier multiíndice α , se define

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty \mid \|f\|_{(N, \alpha)} < \infty, \text{ para todo } N, \alpha \right\},$$

donde

$$\|f\|_{(N, \alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^N) |\partial^\alpha f(x)|.$$

Claramente, el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$; sin embargo, esta contención es estricta; en efecto, la función $f(x) = e^{-|x|^2}$ pertenece a \mathcal{S} pero no es un elemento de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

La noción de convergencia en el espacio \mathcal{S} está dada de la siguiente manera:

Sea $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, entonces $\varphi_i \rightarrow \varphi$ en \mathcal{S} , si

$$\|\varphi_i - \varphi\|_{(N,\alpha)} \rightarrow 0, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Una distribución temperada T es un funcional lineal continuo definido sobre \mathcal{S} ; el conjunto de todas las distribuciones temperadas es denotado por \mathcal{S}' ; se usa la misma notación utilizada en las distribuciones para indicar la acción de una distribución, es decir, si $F \in \mathcal{S}'$ y $\varphi \in \mathcal{S}$ denotaremos el valor de F sobre φ por $\langle F, \varphi \rangle$. El conjunto \mathcal{S}' es dotado de la topología natural dada por la convergencia puntual, es decir, dada una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{S}'$, se dice que f_n converge para $f \in \mathcal{S}'$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$, para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Dos distribuciones $f, g \in \mathcal{S}'$ son iguales, si y solamente si, $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 1.1. *Cualquier función real $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, define una distribución temperada; en efecto, como la función $(1 + |\mathbf{x}|)^{-\beta} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, donde $1/p + 1/q = 1$, desde que $\beta > n/q$, entonces, por la desigualdad de Hölder se tiene que $(1 + |\mathbf{x}|)^{-\beta} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y en consecuencia, la aplicación $F_f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi$, define una distribución temperada.*

Dado un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $f \in \mathcal{S}'$, la derivada distribucional de f , de orden α , es dada por la distribución $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'$, la cual es definida por

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

1.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier es una herramienta fundamental para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes

kes que es el que nos ocupa, usaremos la transformada de Fourier para definir un espacio de distribuciones en el cual es posible obtener la existencia global de soluciones para el problema de Cauchy asociado. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de f se define como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \quad (1.3.1)$$

De la definición anterior se sigue que $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Además \widehat{f} es continua [9]; así $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow BC(\mathbb{R}^n)$, donde $BC(\mathbb{R}^n)$ denota el espacio de funciones continuas y acotadas definidas en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.2. (Proposición 8.24 de [9]) Si $a > 0$ y $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, entonces, se sigue que $\widehat{f}(\xi) = a^{-n/2}e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

Algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier son resumidas en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. Supongamos $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

(1) $\widehat{(f * h)} = \widehat{f}\widehat{h}$.

(2) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha \widehat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge$.

(3) Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, y $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k - 1$, entonces $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$. Aquí $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, denota el espacio de las funciones continuas en \mathbb{R}^n que se anulan en el infinito.

(4) (Lema de Riemman Lebesgue) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(5) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

(6) Si $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}h$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada inversa de Fourier, denotada por \check{f} o $\mathcal{F}^{-1}(f)$, está definida por

$$\check{f}(x) = \widehat{f}(-x) = \int f(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3.2)$$

Teorema 1.4. (El teorema de inversión de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\check{\widehat{f}})^\wedge = f$ c.t.p.

Como corolario del Teorema 1.4, se tiene que \mathcal{F} define un isomorfismo de \mathcal{S} en \mathcal{S} .

Teorema 1.5. (Teorema de Plancherel) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}|_{(L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n))}$ se extiende unicamente a un isomorfismo unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como consecuencia del Teorema de Plancherel, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.6. (La desigualdad de Hausdorff-Young) Sea $1 \leq p \leq 2$ y q el exponente conjugado de p . Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$.

Lema 1.7. Si $f, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\widetilde{f\check{h}})^\wedge = f * h$.

La transformada de Fourier se extiende al espacio de las distribuciones temperadas de la siguiente manera: Dada $f \in \mathcal{S}'$, se define la transformada de Fourier \widehat{f} , y la transformada de Fourier inversa de f , a través de las expresiones

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \check{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$. Con esta definición, la transformada de Fourier define un isomorfismo continuo de \mathcal{S}' en \mathcal{S}' [12].

Finalmente, se establece una relación entre la transformada de Fourier y las derivadas distribucionales a través de las siguientes expresiones

Proposición 1.8. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice y $f \in \mathcal{S}'$. Entonces se tiene que

$$\xi^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha f)^\wedge, \tag{1.3.3}$$

$$\partial^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\mathbf{x}^\alpha f)^\wedge, \tag{1.3.4}$$

donde los productos $\xi^\alpha \widehat{f}$ y $\mathbf{x}^\alpha f$ son entendidos como $\langle \xi^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle \widehat{f}, \xi^\alpha \varphi \rangle$ y $\langle \mathbf{x}^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \mathbf{x}^\alpha \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, respectivamente.

1.4 DERIVADA DE FRÉCHET

Recordemos que dado un espacio de Banach X , su dual topológico X' corresponde con el conjunto de funcionales lineales y acotados de X en \mathbb{R} . La norma en X' es dada por

$$\|F\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle F, x \rangle|.$$

Definición 1.9. Sea X un espacio de Banach, U un subconjunto abierto de X y $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que J es fréchet diferenciable en $u \in U$, si existe $A \in X'$ tal que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Si J es diferenciable (Fréchet) en todo $u \in U$, se dice que J es Fréchet diferenciable.

Si J es fréchet diferenciable se tiene que

$$J(u+v) = J(u) + Av + o(\|v\|),$$

cuando $\|v\| \rightarrow 0$, para algún $A \in X'$. Se sigue de la definición que si J es Fréchet diferenciable en u , entonces J es continuo en u . Además, se tiene que si J es fréchet diferenciable el funcional A es único, y es comunmente llamado la diferencial de Fréchet de J en u y denotado por $J'(u)$.

Definición 1.10. Sea X un espacio de Banach, $U \subset X$ abierto. Si $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable, la aplicación $J' : U \rightarrow X'$ tal que a cada $u \in X$ le asigna $J'(u) \in X'$ es llamada la derivada de Fréchet de J .

En general, J' es una aplicación no lineal. Si $J' : U \rightarrow X'$ es continua se dice que J es de clase C^1 sobre U y se escribe $J \in C^1(U)$.

Los ejemplos más sencillos de funcionales diferenciables son los funcionales lineales acotados $J : X \rightarrow \mathbb{R}$, esto es, $J \in X'$, siendo X un espacio de Banach. En este caso J es Fréchet diferenciable en X y $J'(u) = J$, para todo $u \in X$.

Un ejemplo más interesante de funcional Fréchet diferenciable es dado por funcionales de la forma $J : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto a(u, u), \end{aligned}$$

donde $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde a una forma bilineal y continua definida sobre un espacio de Banach X . En este caso se tiene que J es Fréchet diferenciable sobre X y vale que

$$J'(u)v = a(u, v) + a(v, u), \text{ para todo } u, v \in X,$$

o lo que es lo mismo,

$$J'(u) = a(u, \cdot) + a(\cdot, u).$$

Teorema 1.11. *(Teorema de la función implícita) Sean X, Y, Z espacios de Banach, $U \subset X$ y $V \subset Y$ vecindades de x_0 y y_0 respectivamente, además, sea $F : U \times V \rightarrow Z$ continua y continuamente diferenciable con respecto a y . Suponga también que $F(x_0, y_0) = 0$ y $F_y^{-1}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Entonces existen bolas $\overline{B}_r(x_0) \subset U$, $\overline{B}_\delta(y_0) \subset V$ y exactamente una aplicación $T : B_r(x_0) \rightarrow B_\delta(y_0)$ tal que $Tx_0 = y_0$ y $F(x, Tx) = 0$ en $B_r(x_0)$. Esta aplicación T es continua.*

Capítulo

2

EL MODELO NAVIER-STOKES

El objetivo de este capítulo es presentar el modelo de Navier-Stokes y hacer una breve deducción de las ecuaciones diferenciales parciales que lo conforman, a partir de la Ley de conservación de masa y la Ley de conservación del momento. Iniciamos presentando el sistema de ecuaciones y describimos cada uno de los términos que las conforman. La descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes que presentamos aquí, ha sido tomada esencialmente de las referencias [4], [7] y [20].

2.1 EL MODELO

Las ecuaciones de Navier-Stokes están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi = \mathbf{F}, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$ y $\pi = \pi(\mathbf{x}, t)$ son las incógnitas que denotan, respectivamente, el campo velocidad y la presión del fluido en el instante $t > 0$ y en la posición $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n = 2, 3$. Además, $\nabla \pi$ representa

el gradiente de la presión π . La función \mathbf{F} denota un campo dado de fuerzas externas, μ representa la viscosidad dinámica y ρ es la densidad del fluido. El operador Δ corresponde al operador Laplaciano definido como la suma de las segundas derivadas parciales, esto es, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, con lo cual, siendo \mathbf{u} un campo vectorial,

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2} \right).$$

El término $\operatorname{div} \mathbf{u}$ representa la divergencia del campo vectorial \mathbf{u} , y está definido por

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Finalmente, el término no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ es definido por $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$. Si se asume que la densidad del fluido es constante, podemos dividir la primera ecuación en (2.1.1) por ρ , y obtener el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde ahora $\nu = \mu/\rho$ denota la viscosidad cinemática, $p = \pi/\rho$ es la presión cinemática y $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$ es la densidad de masa de las fuerzas externas.

En el desarrollo del Capítulo 4, será conveniente usar una reescritura del término no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, también llamado término convectivo, como se muestra a continuación. Si $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, entonces se denota por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ a la matriz

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Así, por la definición de la divergencia y por la regla del producto, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} \partial_x(u_1 v_1) + \cdots + \partial_z(u_1 v_n) \\ \vdots \\ \partial_x(u_n v_1) + \cdots + \partial_z(u_n v_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_1(\partial_x v_1 + \cdots + \partial_z v_n) \\ \vdots \\ u_n(\partial_x v_1 + \cdots + \partial_z v_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \partial_x u_1 + \cdots + v_n \partial_z u_1 \\ \vdots \\ v_1 \partial_x u_n + \cdots + v_n \partial_z u_n \end{pmatrix} \\
 &= (\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

En el caso $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, con $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, se sigue que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}). \quad (2.1.4)$$

El sistema (2.1.1) es completado con condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

donde \mathbf{u}_0 denota el dato inicial. La condición $\mathbf{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$ se denomina condición de no deslizamiento.

2.2 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA

Denotamos por $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ a la región que ocupa una porción de un fluido en el instante de tiempo $t = 0$, y por Ω_t el dominio ocupado por el fluido en el tiempo t . Dado un punto $\mathbf{y} \in \Omega_0$, podemos considerar la curva $t \rightarrow \Phi(\mathbf{y}, t)$ la cual describe la trayectoria de la partícula que en el instante $t = 0$, ocupa la posición \mathbf{y} . Así, la descripción del movimiento del fluido queda completamente determinada si calculamos la función $\Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ tal que $\Phi_t(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}, t)$. Las variables independientes son la posición inicial \mathbf{y} , y el tiempo t . Por definición del

campo de velocidades, tenemos que

$$\mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \Omega_0, \quad (2.2.1)$$

con lo cual, invirtiendo la función Φ_t se obtiene que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{x}), t).$$

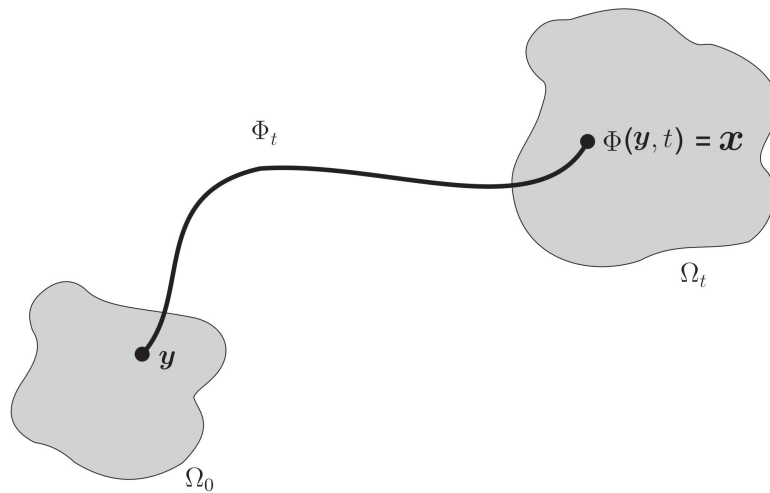


Figura 1: Representación del movimiento de partículas.

Naturalmente, se requieren de algunas hipótesis de regularidad sobre Φ_t ; más exactamente, se asume que Φ_t es suficientemente suave y define un difeomorfismo entre Ω_0 y Ω_t . A esta descripción se le denomina descripción Lagrangiana en honor a Joseph Louis LAGRANGE, y a los puntos de Ω_0 se les denomina *coordenadas materiales*. A pesar de que esta formulación es bastante visual y geométrica, no es muy útil para trabajar. En lugar de ello, se plantea la denominada descripción Euleriana, la cual, en lugar de seguir el movimiento de cada partícula del fluido, considera la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de la partícula que en el instante t , ocupa la posición \mathbf{x} . Si se conoce la expresión de \mathbf{u} en función de \mathbf{x} y t , podemos hallar las trayectorias $\Phi(\mathbf{y}, t)$, para cada $\mathbf{y} \in \Omega_0$, resolviendo el problema

de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

y definiendo $\Phi(\mathbf{y}, t)$ como el valor de la solución \mathbf{x} de (2.2.2) en el tiempo t . Si \mathbf{u} es un campo de clase C^1 se obtiene una única solución $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ definida en un cierto intervalo de tiempo. En conclusión, en la descripción euleriana, en lugar de fijar la atención en lo que sucede con cada una de las partículas por separado, se centra en lo que sucede en un punto \mathbf{x} , sea quien sea la partícula de fluido que llegue a estar en esa posición fija de la trayectoria.

2.3 DERIVADA MATERIAL Y TEOREMA DEL TRANSPORTE

Como mencionamos en la sección anterior, la descripción euleriana es la más cómoda a la hora de describir el movimiento de un fluido; sin embargo, para comprender los fenómenos de los fluidos, se hace necesario un uso simultáneo del enfoque euleriano y lagrangiano. En cada caso, los conjuntos de las variables independientes son distintos, pero relacionados por la aplicación $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$.

Así, dada una función $f(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega_t$, y una trayectoria $\Phi(\mathbf{y}, t)$, nos preguntamos por la relación entre la derivada de f con respecto a t (para un \mathbf{x} fijo) con la derivada temporal de f a lo largo de la trayectoria de la partícula que en el instante t , ocupa la posición $\mathbf{x} \in \Omega_t$, es decir, la relación entre $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$, donde $F(\mathbf{y}, t) = f(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{y}, t) &= \nabla f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ &= \left(\mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Se define entonces la derivada material de f como

$$\frac{Df}{Dt} = (\mathbf{u} \cdot \nabla f) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.3.2)$$

La función f puede representar diversas grandezas físicas; en particular, f puede ser una densidad o un campo de velocidades $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, en cuyo caso,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \left(\frac{Du_1}{Dt}, \dots, \frac{Du_n}{Dt} \right).$$

Teorema 2.1. (Teorema del Transporte) Sea Ω_0 un dominio acotado, abierto y conexo de \mathbb{R}^n y $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$, con Φ_t un difeomorfismo. Si f es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.3.3)$$

Demostración. Aplicando el cambio de variables $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y})$ en la integral del lado izquierdo de (2.3.3), obtenemos que

$$\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} f(\Phi_t(\mathbf{y}), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (2.3.4)$$

donde J es el jacobiano de la transformación Φ_t . Como por hipótesis Φ_t es siempre invertible, entonces $J \neq 0$; además como el jacobiano es continuo y $J(\mathbf{y}, 0)$ es igual a 1 para todo $\mathbf{y} \in \Omega_0$, entonces dicho determinante siempre es positivo, con lo cual, no es necesario tomar el valor absoluto de J en (2.3.4). La integral que resultó del cambio de variables tiene dominio de integración independiente del tiempo, podemos, por tanto, intercambiar el orden de derivación e integración. Por tanto, por la regla del producto, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [f(\Phi(\mathbf{y}, t), t)] J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} + \int_{\Omega_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}. \quad (2.3.5)$$

Tratemos ahora la primera integral del lado derecho de la igualdad anterior. Note que la derivada en el integrando es la derivada de f calculada a lo largo de una trayectoria, esto es, la derivada material que definimos en la sección anterior. Obtenemos que esa primera integral es igual a

$$\int_{\Omega_0} \frac{Df}{Dt}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

y aplicando de nuevo el cambio de variables $x = \Phi_t(\mathbf{y})$, vemos que la integral anterior, es igual a

$$\int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Ahora, nos concentramos en la segunda integral del lado derecho de la igualdad en (2.3.5). Debemos calcular la derivada del Jacobiano,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

en el punto (\mathbf{y}, t) . Conmutando derivadas, usando (2.2.1) y la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, t) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(\mathbf{y}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} [\mathbf{u}_i(\Phi(\mathbf{y}, t), t)] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_k}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j}(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Así, aplicando las propiedades usuales de los determinantes, tenemos que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \\ + \dots + \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

El primero de estos sumatorios de determinantes es igual al producto $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1}\right) J$, pues los términos correspondientes desde $k = 2$ hasta $k = n$ son iguales a $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_k}\right)$ multiplicado por un determinante con líneas repetidas; haciendo un razonamiento análogo, esta afirmación vale para los sumatorios restantes. Así, obtenemos que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} \mathbf{u},$$

donde el Jacobiano y su derivada son calculados en el punto (\mathbf{y}, t) y el divergente $\operatorname{div} \mathbf{u}$ en el punto $(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$. Por tanto,

$$\int_{\Omega_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) [(\operatorname{div} \mathbf{u})(\Phi(\mathbf{y}, t), t)] J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

que mediante el cambio de variable $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y})$ es igual a

$$\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Así, al sustituir los dos resultados anteriores en la expresión (2.3.5), se concluye la demostración del teorema. ■

2.4 CONSERVACIÓN DE MASA

La primera ley fundamental de la mecánica de los medios continuos es la Ley de la conservación de la masa, la cual establece que la materia no se crea ni se destruye. En el contexto de los fluidos, la materia se entiende como la sustancia que compone el fluido, con lo cual, la conservación de la masa establece que la cantidad de materia contenida en una cierta región del espacio en un momento dado, no varía en el flujo. Asumamos que para cada tiempo t , el fluido tiene una densidad de masa bien definida $\rho(\mathbf{x}, t)$. Por tanto, la masa del fluido en Ω_t , en el tiempo t , está dada por

$$m(\Omega_t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.4.1)$$

Luego, por la Ley de la conservación de la masa, tenemos que $m(\Omega_0) = m(\Omega_t)$, es decir,

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Así, por el Teorema del transporte aplicado a $f = \rho$, se obtiene que

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.4.2)$$

Como la ecuación (2.4.2) es válida para cualquier región Ω_t , entonces,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.4.3)$$

Esta relación es llamada la ecuación de continuidad. Por la definición de la derivada material y la identidad $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}$, se tiene que (2.4.3) se reescribe como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0. \quad (2.4.4)$$

Si la densidad del fluido es constante, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ y entonces de (2.4.4),

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

y por tanto, al dividir por ρ obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.4.5)$$

es decir, la divergencia del campo velocidad es nula. Los fluidos que satisfacen la ecuación (2.4.5) se denominan incompresibles. Note que la condición (2.4.5) equivale a decir que la transformación Φ_t preserva volúmenes, es decir, $\operatorname{vol}(\Omega_t) = \operatorname{vol}(\Omega_0)$. En efecto, como $\operatorname{vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} d\mathbf{x}$ y $\operatorname{vol}(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} d\mathbf{x}$, entonces, $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = 0$. Por el Teorema del transporte aplicado a la función 1, se tiene que $\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0$, válido para todo Ω_t , de donde, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Recíprocamente, si $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, entonces $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = 0$, es decir, $\operatorname{vol}(\Omega_t) = \operatorname{vol}(\Omega_0)$.

2.5 CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

La segunda ley de Newton expresa que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él y es inversamente proporcional a su masa; explícitamente,

$$\mathbf{F}_{total} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt}. \quad (2.5.1)$$

El producto de la masa y la velocidad de un cuerpo se denomina momento lineal o cantidad de movimiento. Así, la segunda ley de Newton expresada en la ecuación (2.5.1) también se puede enunciar como sigue: la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre él.

En nuestro contexto, el momento lineal de una porción de fluido que, en el instante t ocupa la región Ω_t , es dada por la integral

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.5.2)$$

Por la segunda Ley de Newton, la derivada con respecto al tiempo de esta canti-

dad es igual a la fuerza neta actuando en Ω_t . Por tanto,

$$\mathbf{F}_{total} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.5.3)$$

La fuerza \mathbf{F}_{total} representa la actuación en conjunto de todas las fuerzas que actúan el fluido, es decir, es la suma de las fuerzas externas (peso, gravedad o las mismas fuerzas electromagnéticas) y de fuerzas internas, ejercidas sobre Ω_t , por el resto del fluido. Supongamos que conocemos la suma de las fuerzas externas por unidad de masa, y denotémosla por $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Note que al decir "por unidad de masa" sólo se está tomando el sumatorio de dichas fuerzas en un pequeño diferencial de masa. Por tanto, de (2.4.1), la fuerza externa total que actúa sobre la porción de fluido, que, en el instante t , ocupa la región Ω_t es dada por

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Respecto a las fuerzas internas, suponemos que son fuerzas de contacto o tensiones; por tanto, no consideramos las fuerzas a distancia entre las partículas del fluido, sino que suponemos que existe un *campo de tensiones* $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ que da la fuerza de contacto por unidad de área actuando en una superficie perpendicular a \mathbf{n} en el punto \mathbf{x} , en el instante t . Luego la fuerza ejercida por el resto del fluido en la porción de fluido que en el instante t , ocupa la región Ω_t , acotada por la superficie $\partial\Omega_t$, es dada por

$$\int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x,$$

donde \mathbf{n} denota el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega_t$. Si el fluido satisface la segunda Ley de Newton, como es el caso del fluido que estamos analizando, $\boldsymbol{\tau}$ depende linealmente de \mathbf{n} [11], es decir, existe una función matricial \mathcal{T} tal que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathcal{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. Por tanto, la segunda Ley de Newton (2.5.3), se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathcal{T} \mathbf{n} dS_x. \quad (2.5.4)$$

Aplicando el Teorema del transporte a $f = \rho \mathbf{u}$, podemos expresar la integral del lado izquierdo de (2.5.4) como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.5.5)$$

Por tanto, sustituyendo (2.5.5) en (2.5.4) y a su vez, aplicando el Teorema de la divergencia para convertir las integrales de superficie en integrales de volumen, obtenemos:

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathcal{T} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x}.$$

Así, por la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} - \rho \mathbf{F} - \operatorname{div} \mathcal{T} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.5.6)$$

Por otra parte, afirmamos que

$$\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}. \quad (2.5.7)$$

En efecto, se sigue de la identidad $\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ y la regla del producto que

$$\begin{aligned} \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + (\rho \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u})) + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \\ &= \mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (2.4.3), se concluye la afirmación. Así, al sustituir la igualdad (2.5.7) en (2.5.6) y, teniendo en cuenta que (2.5.6) es válida para todo Ω_t , obtenemos la *ecuación de conservación del momento*

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathcal{T}. \quad (2.5.8)$$

2.6 SISTEMA DE NAVIER-STOKES

En esta sección, nuestro objetivo es describir la forma de la matriz \mathcal{T} en (2.5.8) y determinar así la ecuación de conservación del momento lineal para un fluido incompresible viscoso. Siguiendo [11], párrafo 16, se tiene que la matriz \mathcal{T} en (2.5.8) está dada por

$$\mathcal{T} = -\pi I + \mu'(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t),$$

donde π es la presión, I es la matriz identidad, μ e μ' son constantes, mientras que $(\nabla \mathbf{u})^t$ denota la transpuesta de $\nabla \mathbf{u}$. Ahora, si suponemos que el fluido es incompresible, entonces, como vimos en la sección anterior, el divergente de \mathbf{u} es nulo. Esto implica $\mu'(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0$. Además, se tiene que

$$\operatorname{div} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) = \Delta \mathbf{u}.$$

Por lo tanto, de la linealidad del operador divergencia, tenemos que

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.6.1)$$

Así, sustituyendo (2.6.1) en (2.5.8), obtenemos que

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{F} - \nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u},$$

que es la primera ecuación del sistema (2.1.1). Entonces, al dividir por ρ a ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (2.6.2)$$

la cual es conocida como la *ecuación de Navier-Stokes*, en honor a Claude NAVIER (1785-1836) y George STOKES (1819-1903).

Capítulo

3

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL

En este capítulo introducimos la definición de un espacio de distribuciones temperadas en el cual obtendremos solución del problema de valor inicial asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes. Este espacio ha sido denominado en la literatura *espacio de pseudomedidas* y su construcción es basada en la transformada de Fourier. Probamos que éste es un espacio de Banach, y seguidamente estudiamos algunas estimativas de decaimiento temporal para el semigrupo del calor en \mathbb{R}^n . Sobre esta base, presentamos la formulación integral para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes vía el principio de Duhamel. Finalmente, probamos el teorema de la existencia de solución global usando principalmente el teorema de la función implícita.

3.1 ESPACIO DE PSEUDOMEDIDAS $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$

En esta sección introducimos los espacios de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ considerados en [3] para analizar la existencia de soluciones singulares para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso tri-dimensional. Una característica importante de los espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es que ellos contienen funciones singulares de grado $a - n$, como veremos más adelante.

Definición 3.1. Para cada $0 \leq a < n$, el espacio de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ está definido por

$$\mathcal{P}\mathcal{M}^a \equiv \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{S}' \mid \hat{\mathbf{u}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a |\hat{\mathbf{u}}(\xi)| < \infty \right\}. \quad (3.1.1)$$

La notación $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ proviene del término *pseudomeasure*. El espacio clásico de pseudomedidas corresponde al conjunto de distribuciones temperadas cuyas transformadas de Fourier son acotadas, esto es, el caso ($a = 0$). De la Definición 3.1 y de las propiedades de la transformada de Fourier, es inmediato ver que $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Proposición 3.2. El espacio $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ dotado con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \equiv \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a |\hat{\mathbf{u}}(\xi)| < \infty,$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Es fácil ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}$ define una norma. Veamos que con esta norma, $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es completo. Sea $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ una sucesión de Cauchy. Por definición de la norma $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ se tiene que $(|\xi|^a \widehat{\mathbf{u}}_m(\cdot))_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora bien, como $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es completo, existe $\mathbf{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $(|\xi|^a \widehat{\mathbf{u}}_m(\cdot)) \rightarrow \mathbf{v}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| (|\xi|^a \widehat{\mathbf{u}}_m) - \mathbf{v} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (3.1.2)$$

Sea $f(\xi) = \frac{1}{|\xi|^a} \mathbf{v}(\xi)$, $\xi \neq 0$ y consideremos $\mathbf{u} = \check{f}$. Veamos que $\mathbf{u} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$; en efecto,

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}'$.

Dada $\phi \in \mathcal{S}$, por la desigualdad de Hölder, y teniendo en cuenta que

$0 \leq a < n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^a} v(\xi) \phi(\xi) d\xi \right| &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} |v(\xi)| d\xi + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \left(\|\phi\|_{(0,0)} + \|\phi\|_{(N,\alpha)} \right), \end{aligned}$$

para N adecuado. Entonces $f \in S'$. Por tanto, la aplicación $u = \check{f} : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle$, donde $\varphi \in S$, es un elemento de S' .

- $\hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Note que $\hat{u} = f(\xi)$. Así, dada la bola $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |\hat{u}| d\xi &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^a} |v(\xi)| d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |v(\xi)| \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi \\ &= \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi \\ &< \infty, \end{aligned}$$

desde que $0 \leq a < n$.

- $\|u\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} < \infty$.

Por definición de la norma en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a |\hat{u}(\xi)| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a \left| \frac{1}{|\xi|^a} v(\xi) \right| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |v(\xi)| \\ &= \|v(\xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

puesto que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Resta probar que, efectivamente, la sucesión de Cauchy $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a dicha función \mathbf{u} . En efecto, de la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} |\xi|^a \left| (\widehat{\mathbf{u}_m - \mathbf{u}})(\xi) \right| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} |\xi|^a \left| \widehat{\mathbf{u}_m}(\xi) - \widehat{\mathbf{u}}(\xi) \right| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} |\xi|^a \left| \widehat{\mathbf{u}_m}(\xi) - \frac{1}{|\xi|^a} \mathbf{v}(\xi) \right| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} \left| (|\xi|^a \widehat{\mathbf{u}_m}(\xi)) - \mathbf{v}(\xi) \right| \\
&= \| (|\xi|^a \widehat{\mathbf{u}_m}(\xi)) - \mathbf{v}(\xi) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (3.1.2), concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} = 0.$$

■

Una propiedad importante de los espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es la invarianza de su norma por la aplicación (*scaling de la norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}$)

$$\mathbf{u} \mapsto \lambda^{n-a} \mathbf{u}_\lambda, \quad (3.1.3)$$

donde \mathbf{u}_λ es la aplicación definida por $\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x})$. Para demostrar esta propiedad, en primer lugar, observe que si \mathbf{u} es una función integrable y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces el teorema del cambio de variable implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \phi_{\lambda^{-1}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.1.4)$$

y a partir de ello, podemos extender (3.1.4) al contexto de las distribuciones temperadas a través de la relación

$$\langle \mathbf{u}_\lambda, \phi \rangle = \lambda^{-n} \langle \mathbf{u}, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle, \quad (3.1.5)$$

y también podemos relacionar la transformada de Fourier de la distribución \mathbf{u}_λ a través de la igualdad

$$(\mathbf{u}_\lambda)^\wedge = \lambda^{-n}(\widehat{\mathbf{u}})_{\lambda^{-1}}. \quad (3.1.6)$$

Volviendo a la propiedad de la invarianza de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}$ por la relación de escala (3.1.3), de (3.1.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\lambda\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} &= \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\boldsymbol{\xi}|^a |\widehat{\mathbf{u}}_\lambda(\boldsymbol{\xi})| \\ &= \lambda^{a-n} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^a |\widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi})| \\ &= \lambda^{a-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

A continuación, introducimos un resultado técnico sobre la convolución de funciones homogéneas, el cual permitirá analizar el producto de distribuciones en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$.

Lema 3.3. (Teorema 5.9 de [18]) *Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$ con $0 < \alpha + \beta < n$. Entonces*

$$\left(|\mathbf{x}|^{\alpha-n} * |\mathbf{x}|^{\beta-n}\right)(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^{\alpha-n} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\beta-n} d\mathbf{y} = K(\alpha, \beta, n) |\mathbf{y}|^{\alpha+\beta-n}.$$

Para analizar el termino cuadrático de la ecuación de Navier-Stokes en el contexto de los espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$, se hace necesario analizar el producto de funciones que están en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$. Para ello, dadas $\mathbf{u} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$, $\mathbf{v} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^b$, se define el producto uv de u por v como siendo la distribución tal que

$$\widehat{uv}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\mathbf{u}} * \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Entonces, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Sean $\mathbf{u} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$, $\mathbf{v} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^b$ con $0 < a, b < n$ tales que $n < a + b < 2n$. Entonces $uv \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{a+b-n}$.*

Demostración. En primer lugar veamos que $uv \in \mathcal{S}'$. Sea $\phi \in \mathcal{S}$, entonces, ha-

ciendo uso del Lema 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{u}\mathbf{v}, \phi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mathbf{u}} * \widehat{\mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}) \check{\phi}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y})| |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}|^{-a} |\mathbf{y}|^a |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{y})| |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{-b} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^b |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y})| |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}|^{-a} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{-b} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^{n-a-b} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq C \|\phi\|_{(N, \alpha)}.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sea $r > 0$. Entonces con la ayuda del Lema 3.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} |\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi} &\leq \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}|^{-a} |\mathbf{y}|^a |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{y})| |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{-b} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^b |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}|^{-a} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{-b} \, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq K \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} \int_{B(0,1)} |\boldsymbol{\xi}|^{n-a-b} \, d\boldsymbol{\xi} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\|\mathbf{u}\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{a+b-n}} < \infty$. Nuevamente, usando el Lema 3.3 se obtiene

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\xi}|^{a+b-n} |\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})| &= |\boldsymbol{\xi}|^{a+b-n} |(\widehat{\mathbf{u}} * \widehat{\mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi})| \\
&\leq |\boldsymbol{\xi}|^{a+b-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{y})| |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\
&\leq |\boldsymbol{\xi}|^{a+b-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{y}|^{-a} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{-b} \, d\mathbf{y} \\
&\leq K |\boldsymbol{\xi}|^{a+b-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} |\boldsymbol{\xi}|^{n-a-b} \\
&= K \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^b} < \infty.
\end{aligned}$$

■

Para analizar la existencia de solución del problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes, debemos trabajar en un espacio de funciones que involucren las variables tiempo y espacio, y tengan valores en el espacio $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$. Más exactamente, consideramos el espacio vectorial mixto $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$ formado por las funciones $\mathbf{u} : [0, T) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ que son débilmente continuas y tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)} = \sup_{t \in [0, T)} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} < \infty,$$

con $0 < T \leq \infty$ y $0 \leq a < n$.

Resaltamos que una función $\mathbf{u} : [0, T) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ se dice que es débilmente continua en $s \in [0, T)$ si

$$\lim_{t \rightarrow s} \langle \mathbf{u}(t), \phi \rangle = \langle \mathbf{u}(s), \phi \rangle, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{S}.$$

Si \mathbf{u} es débilmente continua en todo $s \in [0, T)$, se dice simplemente que \mathbf{u} es débilmente continua.

Proposición 3.5. *El espacio $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$, $0 < T \leq \infty$, es un espacio de Banach, con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)}$.*

Demostración. De la definición, se sigue fácilmente que $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$ es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)}$. Como $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es de Banach, se tiene que $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$ es completo.

En efecto, sea $(\mathbf{v}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$ una sucesión de Cauchy. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, k \geq k_0$, entonces

$$\sup_{t \in [0, T)} \|\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_m(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} < \epsilon. \quad (3.1.8)$$

Por lo tanto, para $t \in [0, T)$ fijo, $(\mathbf{v}_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$. Como $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ es completo, existe \mathbf{v}_t tal que $\mathbf{v}_k(t) \rightarrow \mathbf{v}_t$ en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$, para cada $t \in [0, T)$. Sea $\mathbf{v} : [0, T) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ definida por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_t$. Entonces, pasando el

límite en (3.1.8) cuando m tiende a infinito, se tiene que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} < \epsilon, \text{ para todo } k > k_0,$$

es decir, $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v}$ en $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$.

Veamos finalmente la continuidad débil del límite \mathbf{v} de la sucesión de Cauchy $(\mathbf{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)$. Sea $s \in [0, T]$. Entonces para cada $\phi \in \mathcal{S}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s), \phi \rangle| &\leq |\langle \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_k(t), \phi \rangle| + |\langle \mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_k(s), \phi \rangle| + |\langle \mathbf{v}_k(s) - \mathbf{v}(s), \phi \rangle| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, t) - \widehat{\mathbf{v}}_k(\boldsymbol{\xi}, t)| |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} + |\langle \mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_k(s), \phi \rangle| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbf{v}}_k(\boldsymbol{\xi}, s) - \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, s)| |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^a |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, t) - \widehat{\mathbf{v}}_k(\boldsymbol{\xi}, t)| |\boldsymbol{\xi}|^{-a} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} + |\langle \mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_k(s), \phi \rangle| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^a |\widehat{\mathbf{v}}_k(\boldsymbol{\xi}, s) - \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}, s)| |\boldsymbol{\xi}|^{-a} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Usando la desigualdad de Hölder y la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)}$, de (3.1.9) se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s), \phi \rangle| &\leq 2 \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k\|_{\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^a)} \left(\|\check{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0;1)} |\boldsymbol{\xi}|^{-a} d\boldsymbol{\xi} + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\quad + |\langle \mathbf{v}_k(t) - \mathbf{v}_k(s), \phi \rangle|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow s} |\langle \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s), \phi \rangle| = 0.$$

■

3.2 EL PROYECTOR DE LERAY

Para analizar el problema de Cauchy asociado al sistema de Navier-Stokes, usamos el camino estándar de eliminar la presión de la ecuación del momento, para trabajar solamente con la velocidad. La presión se recupera *a posteriori*. Para ello, debemos tener en cuenta la descomposición de Helmholtz-Hodge y del proyector de Leray. Dado un campo vectorial diferenciable $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la descomposición Helmholtz-Hodge establece que existe una única descomposición de \mathbf{v} como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, donde \mathbf{v}_1 es un campo de divergencia nula y $\mathbf{v}_2 = \nabla\psi$ para alguna función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ver por ejemplo [1]). Como la descomposición es única, se puede definir el operador proyector de Leray como $\mathbb{P}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \nabla\psi$. Dado que $\operatorname{div}(\mathbf{v} - \nabla\psi) = 0$, entonces $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta\psi$ y así, aplicando el laplaciano inverso, se tiene que

$$\mathbb{P}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \nabla(\Delta^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{v})). \quad (3.2.1)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en cada componente del campo (3.2.1), usando la Proposición 1.8, obtenemos la expresión

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi}) - \sum_{k=1}^n \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|^2} (\xi_k \widehat{v}_k(\boldsymbol{\xi})). \quad (3.2.2)$$

con lo cual

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j(\boldsymbol{\xi}) = \left(\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi}),$$

donde $\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi})$ es la matriz con entradas

$$\left(\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right)_{j,k} = \delta_{j,k} - \frac{\xi_j \xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|^2},$$

y la cual verifica que

$$\max_{1 \leq j \leq k} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left| \left(\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right)_{j,k} \right| = 1.$$

Si consideramos los operadores pseudodiferenciales $R_j (j = 1, \dots, n)$, llamados transformadas de Riesz, definidos en términos de la transformada de Fourier

como

$$\widehat{R_j f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}),$$

obtenemos que

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j = v_j + \sum_{k=1}^3 R_j R_k v_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.2.3)$$

cuya transformada de Fourier es justamente (3.2.2). La anterior representación, permite mostrar la continuidad del proyector de Leray $\mathbb{P} : \mathcal{P}\mathcal{M}^a \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$. Para ello, basta probar la continuidad de la transformada de Riesz R_j ($j = 1, 2, \dots, n$) de $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$.

Lema 3.6. *El proyector de Leray \mathbb{P} es un operador lineal y continuo de $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$.*

Demostración. En primer lugar, debemos verificar que en efecto, \mathbb{P} va de $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ en $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$. Sea $\mathbf{v} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ y veamos que $\mathbb{P}\mathbf{v} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$; en efecto,

- $\mathbb{P}\mathbf{v} \in \mathcal{S}'$.

Como $\mathbf{v} \in \mathcal{S}'$, de la representación (3.2.3), basta ver que $R_k \mathbf{v} \in \mathcal{S}'$. Para ello, sea $\phi \in \mathcal{S}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle R_k \mathbf{v}, \phi \rangle| &= \left| \langle \widehat{R_k \mathbf{v}}, \check{\phi} \rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \frac{i\xi_k}{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}), \check{\phi} \right\rangle \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|} \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \check{\phi}(\boldsymbol{\xi}) \right| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^a |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})| |\boldsymbol{\xi}|^{-a} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^{-a} |\check{\phi}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \left[\|\check{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} |\boldsymbol{\xi}|^{-a} d\boldsymbol{\xi} + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right] \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} \left[\|\check{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\check{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right], \end{aligned}$$

es decir $R_k \mathbf{v} \in \mathcal{S}'$, y en consecuencia, $\mathbb{P}\mathbf{v} \in \mathcal{S}'$.

- $\widehat{\mathbb{P}\mathbf{v}} \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Como $\widehat{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para cualquier $B(0, r)$, $r > 0$, se tiene que

$$\int_{B(0,r)} |\widehat{R_k v}(\xi)| d\xi = \int_{B(0,r)} \left| \frac{i\xi_k}{\xi} \widehat{v}(\xi) \right| d\xi \leq \int_{B(0,r)} |\widehat{v}(\xi)| d\xi < \infty,$$

es decir, $\widehat{R_k v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, y por tanto, $\widehat{\mathbb{P}v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

■ $\|\mathbb{P}v\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} < \infty$.

Como $v \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$, es inmediato, pues,

$$\begin{aligned} \|R_k v\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a \left| \widehat{R_k v}(\xi) \right| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a \left| \frac{i\xi_k}{|\xi|} \widehat{v}(\xi) \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^a |\widehat{v}(\xi)| \\ &= \|v\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^a}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Además, note que (3.2.4) prueba la continuidad de la transformada de Riesz, y de la representación (3.2.3), se sigue directamente la continuidad de $\mathbb{P} : \mathcal{P}\mathcal{M}^a \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$. ■

3.3 FORMULACIÓN INTEGRAL

En esta sección queremos encontrar una forma integral para el sistema de Navier-Stokes (2.1.2) en $\Omega = \mathbb{R}^n$. Asumiendo que, formalmente $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ y considerando, sin pérdida de generalidad, que el coeficiente de viscosidad ν es igual a 1, el sistema (2.1.2) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad del fluido, $\text{div } \mathbf{u} = 0$, al aplicar el proyector de Leray en la primera ecuación de (3.3.1),

se obtiene que

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \mathbb{P} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbb{P} \mathbf{f}. \quad (3.3.2)$$

Note que en (3.3.2) fue usado que $\mathbb{P}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{u}_t$ y $\mathbb{P}(\Delta \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$, gracias a que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Observe que aplicando el operador divergente en la primera ecuación de (2.1.2) obtenemos la ecuación $\Delta p = -\operatorname{div}(-\mathbf{f} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))$. Por lo tanto, conocida la velocidad, se recupera la presión a través de la expresión

$$\begin{aligned} \nabla p &= -\nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f}) \\ &= (\mathbb{P} - I)(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Observe que el problema lineal asociado a (3.3.1) es dado por el siguiente problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Sea $g(\mathbf{x}, t)$ el núcleo de Gauss-Weierstras dado por

$$g(\mathbf{x}, t) = (4t\pi)^{-n/2} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}, \quad \text{para todo } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

La transformada de Fourier de g es dada por

$$\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}, t) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} = e^{-4\pi^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 t}. \quad (3.3.4)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (3.3.3), formalmente obtenemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) + 4\pi^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0 \\ \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

La solución de (3.3.5) es dada por $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) = e^{-4\pi^2 |\boldsymbol{\xi}|^2 t} \widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})$. Por lo tanto, de (3.3.4)

tenemos que $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \widehat{g}(\boldsymbol{\xi}, t) \widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})$. Así por la Proposición 1.3, se tiene que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) * \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (3.3.6)$$

La solución (3.3.6) define una familia de operadores a un parámetro $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, dado por $S(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, t) * \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, conocido en la literatura como *semigrupo del calor*.

A continuación derivamos la formulación integral asociada al sistema (3.3.1). Sea $G(\tau) = S(t - \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, donde $S(t)$ es el semigrupo de calor. Dado que $G(\tau) = g(\mathbf{x}, t - \tau) * \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$, derivando con respecto a τ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} (g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)) + g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)) \right\} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Un cálculo directo permite ver que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)) = -\Delta (g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)). \quad (3.3.8)$$

De (3.3.7) y (3.3.8), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta (g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)) d\mathbf{y} \\ &= S(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)) - \Delta S(t - \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \\ &= S(t - \tau) (\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - (\mathbb{P} \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbb{P} \mathbf{f})) - \Delta S(t - \tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \\ &= -S(t - \tau) (\mathbb{P} \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbb{P} \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior de 0 a t , y recordando que $G(0) = S(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ y $G(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, se obtiene que

$$G(t) - G(0) = - \int_0^t S(t - \tau) (\mathbb{P} \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbb{P} \mathbf{f}) d\tau,$$

es decir,

$$\mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0 - \int_0^t S(t-\tau) (\mathbb{P} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbb{P}\mathbf{f}) d\tau. \quad (3.3.9)$$

Queremos encontrar soluciones $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})$ de (3.3.9), esto es, un campo \mathbf{u} tal que para cada $t > 0$, $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$. Para ello, necesitamos aclarar el sentido en el que es entendida la formulación integral (3.3.9). Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad (3.3.9), diremos que una solución con dato inicial $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ es un campo vectorial $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$ con cada componente u_i perteneciendo al espacio de funciones vectoriales $\mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})$, $0 < T \leq \infty$, y tal que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) &= e^{-4\pi^2 t |\boldsymbol{\xi}|^2} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, 0) - \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau) |\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) i \boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}})(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau) |\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

3.4 ESTIMATIVAS LINEALES Y NO LINEALES

Para probar la existencia global de solución para el sistema (3.3.9) (o (3.3.10)) necesitaremos ciertas estimativas lineales y no lineales, las cuales analizaremos a continuación.

Lema 3.7. Si $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$, entonces $S(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$.

Demostración. En efecto, sabemos que $S(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, t) * \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Entonces,

$$\widehat{S(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x})} = \widehat{g(\mathbf{x}, t) * \mathbf{u}_0(\mathbf{x})} = \widehat{g(\mathbf{x}, t)} \widehat{\mathbf{u}_0(\mathbf{x})}.$$

Por la definición de la norma en $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ y por (3.3.4), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|S(t)\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} |\widehat{S(t)\mathbf{u}_0}(\xi)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} |\widehat{g}(\xi, t) \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} |e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)| \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} |\widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)| \\
&= \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}},
\end{aligned}$$

así, $S(\cdot)\mathbf{u}_0 \in L^\infty([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$. A continuación demostramos la continuidad débil con respecto a t . Por la propiedad de linealidad del semigrupo $\{S(t)\}_{t>0}$, basta demostrar la continuidad débil para $t = 0$. Así, para cada $\phi \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|\langle S(t)\mathbf{u}_0 - S(0)\mathbf{u}_0, \phi \rangle| \\
&= \left| \langle (S(t)\widehat{\mathbf{u}_0} - \widehat{\mathbf{u}_0}), \check{\phi} \rangle \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{S(t)\mathbf{u}_0}(\xi) - \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)) \check{\phi}(\xi) d\xi \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{g}(\xi, t) - 1) \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi) \check{\phi}(\xi) d\xi \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1) \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi) \check{\phi}(\xi) d\xi \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| (e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1) \frac{4\pi^2 t |\xi|^2}{4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{\mathbf{u}_0}(\xi) \check{\phi}(\xi) \right| d\xi \\
&= 4\pi^2 t \int \left| \frac{e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1}{4\pi^2 t |\xi|^2} \right| |\xi|^{n-1} |\widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)| |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&\leq 4\pi^2 t \int \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1}{4\pi^2 t |\xi|^2} \right| \\
&\quad \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} |\widehat{\mathbf{u}_0}(\xi)| \right) \left(|\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| \right) d\xi \\
&\leq 4\pi^2 t \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} - 1}{4\pi^2 t |\xi|^2} \right| \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\xi|^{3-n} \check{\phi}(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $t \rightarrow 0^+$. Por tanto, queda demostrado el Lema 3.7. ■

Proposición 3.8. Si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})^n$, entonces

$$\mathbf{N} \equiv \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n,$$

además, $\|\mathbf{N}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})^n}$.

Demostración. De la definición de la norma en $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$, la representación de la transformada $S(t - \tau)\widehat{\mathbb{P}\mathbf{f}(\tau)}$, y la continuidad del proyector de Leray, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \left| |\xi|^{n-1} \int_0^t \widehat{S(t - \tau)} \widehat{\mathbb{P}\mathbf{f}(\tau)}(\xi) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \int_0^t |\xi|^{n-1} e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} |\widehat{\mathbf{f}}(\xi, \tau)| d\tau \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \int_0^t |\xi|^2 e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-3} |\widehat{\mathbf{f}}(\xi, \tau)| d\tau \\ &= \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \frac{(1 - e^{-4\pi^2 t |\xi|^2})}{4\pi^2} \\ &\leq C \sup_{\tau \geq 0} \|\mathbf{f}(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}}. \end{aligned}$$

Para completar la demostración, resta verificar la continuidad débil de $\mathbf{N}(t)$, para cada $t \in [0, \infty)$. Sea $s > 0$. Entonces, para cada $\phi \in \mathcal{S}$, usando la continuidad de $\mathbb{P} : \mathcal{P}\mathcal{M}^a \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}^a$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{N}(s), \phi \rangle| &\leq \left| \left\langle \int_0^s S(s-\tau) \widehat{\mathbb{P}f(\tau)}, \check{\phi} \right\rangle \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} \left| \widehat{\mathbb{P}f(\tau)}(\xi) \right| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{n-3} |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \sup_{\tau \geq 0} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} |\xi|^2 |\xi|^{1-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \left(\sup_{\tau \geq 0} \|f(\tau)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \right) \| |\xi|^{1-n} \check{\phi}(\xi) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

De (3.4.1), teniendo en cuenta que $\| |\xi|^{1-n} \check{\phi}(\xi) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$, tomando el límite cuando s tiende a cero por la derecha, se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} |\langle \mathbf{N}(s), \phi \rangle| = 0,$$

lo que demuestra la continuidad débil de $\mathbf{N}(t)$ en $t = 0$. Ahora sea $t > 0$. Debemos demostrar que $|\langle \mathbf{N}(t) - \mathbf{N}(s), \phi \rangle|$ converge a cero, para todo $\phi \in \mathcal{S}$. Sin pérdida de generalidad asuma que $s < t$. Note que

$$\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}(s) = \int_0^s S(t-\tau) \mathbb{P}f(\tau) d\tau + \int_s^t S(t-\tau) \mathbb{P}f(\tau) d\tau - \int_0^s S(t-\tau) \mathbb{P}f(\tau) d\tau.$$

Entonces, como antes, teniendo en cuenta la representación de $S(t-\tau) \widehat{\mathbb{P}f(\tau)}(\xi)$ y la continuidad del proyector de Leray, para cada $\phi \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{N}(t) - \mathbf{N}(s), \phi \rangle| &\leq \left| \left\langle \int_0^s (S(t-\tau) - \widehat{S}(s-\tau)) \mathbb{P} \mathbf{f}(\tau), \check{\phi} \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \left\langle \int_s^t (S(t-\tau)) \mathbb{P} \mathbf{f}(\tau), \check{\phi} \right\rangle \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s \left| \left(e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} - e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} \right) \widehat{\mathbb{P} \mathbf{f}(\tau)}(\xi) \right| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t \left| e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P} \mathbf{f}(\tau)}(\xi) \right| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s \left| e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} - e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} \right| |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&:= J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Ahora acotamos cada una de las integrales J_1, J_2 . Teniendo en cuenta que

$$\int_0^s |\xi|^2 e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} d\tau \leq 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} \left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right| |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} \frac{\left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right|}{|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |\xi|^2 e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} |\widehat{f}(\xi, \tau)| |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} \frac{\left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right|}{|\xi|^2} \left(\sup_{\tau > 0} \|f(\tau)\|_{\mathcal{D}, \mathcal{M}^{n-3}} \right) \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^s |\xi|^2 e^{-4\pi^2(s-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \right) \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} \frac{\left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right|}{|\xi|^2} \left(\sup_{\tau > 0} \|f(\tau)\|_{\mathcal{D}, \mathcal{M}^{n-3}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \\
&\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} 4\pi^2(t-s) \frac{\left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right|}{4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \\
&= 4\pi^2(t-s) C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} \frac{\left| e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} - 1 \right|}{4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow s^+.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} \frac{|\xi|^{n-3}}{|\xi|^{n-3}} \widehat{f}(\xi, \tau) |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&= \|f\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\tau d\xi \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_s^t |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\xi d\tau \\
&= (t-s) \|f\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{3-n} |\check{\phi}(\xi)| d\xi \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow s^+.
\end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye la demostración de la proposición 3.8. ■

A continuación queremos acotar el término no lineal de la formulación (3.3.9). Con el objetivo de simplificar la notación, denotamos ese término cuadrático por

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) = - \int_0^t S(t-\tau) (\mathbb{P} \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})) (\tau) d\tau, \quad (3.4.2)$$

Para acotar este término en la norma de $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$, haremos uso del Lema 3.3.

Proposición 3.9. *El operador Bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es continuo en $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$, se verifica que*

$$\|B(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n}.$$

Demostración. De (2.1.3), sabemos que el producto $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ es la matriz con entradas

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{k,j} = (u_k(x, t)v_j(x, t)).$$

Entonces, en la formulación de Fourier (3.3.10) se entiende $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ como:

$$\widehat{(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}(\xi, t) = (\widehat{u}_k(\xi, t) * \widehat{u}_j(\xi, t))_{k,j}.$$

Es decir, si $\mathbf{u} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^a$, $\mathbf{v} \in \mathcal{P}\mathcal{M}^b$, el producto \mathbf{uv} es tal que

$$\widehat{\mathbf{uv}}(\boldsymbol{\xi}) = (\widehat{\mathbf{u}} * \widehat{\mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}).$$

Teniendo en cuenta lo anterior,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) i\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}, \tau) \right| &\leq \left| \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right| \sum_{k,j} |\xi_j| (\widehat{u}_k(\tau) * \widehat{v}_j(\tau))(\boldsymbol{\xi}) \\ &\leq \sum_{k,j} |\xi_j| (\widehat{u}_k(\tau) * \widehat{v}_j(\tau))(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Usando el Lema 3.3, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\xi_j| (\widehat{u}_k(\tau) * \widehat{v}_j(\tau))(\boldsymbol{\xi}) &= |\xi_j| \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}_k(\mathbf{y}, \tau) \widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq |\boldsymbol{\xi}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{n-1}} |\mathbf{y}|^{n-1} |\widehat{u}_k(\mathbf{y}, \tau)| \\ &\quad |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{n-1} |\widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}, \tau)| d\mathbf{y} \\ &\leq |\boldsymbol{\xi}| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{n-1} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{n-1}} d\mathbf{y} \right) \|u_k\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_j\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= |\boldsymbol{\xi}| (K |\boldsymbol{\xi}|^{1+1-n}) \|u_k\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_j\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= K |\boldsymbol{\xi}|^{3-n} \|u_k\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|v_j\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) i\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}, \tau) \right| \leq K |\boldsymbol{\xi}|^{3-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}. \quad (3.4.3)$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.4.3), probamos que la forma bilineal es acotada en el espacio $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})^n$; en efecto,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) i\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t \left| e^{-4\pi^2(t-\tau)|\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) i\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}, \tau) \right| d\tau \\ &\leq \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\boldsymbol{\xi}|^2} (K |\boldsymbol{\xi}|^{3-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}) d\tau \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} d\tau \right) K |\xi|^{3-n} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{-1} \left| \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}})(\xi, \tau) d\tau \right| \\ &\leq K \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \left(\int_0^t |\xi|^2 e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} d\tau \right) \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}}, \end{aligned}$$

puesto que $\int_0^t |\xi|^2 e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} d\tau \leq C$.

Resta ver la continuidad débil de $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Esto se sigue de manera análoga a la demostración de la continuidad débil del operador $\mathbf{N}(t)$ en la Proposición 3.8 junto con las estimativas del producto $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ obtenidas anteriormente. ■

3.5 UN RESULTADO DE EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES

En esta subsección procedemos a enunciar y demostrar el teorema que garantiza la existencia de una solución global en el tiempo para las ecuaciones de Navier Stokes, con datos iniciales en espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$.

Teorema 3.10. Sean $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ y $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})$, tales que

$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})} < \delta$, para algun $\delta > 0$. Entonces existe una solución de (2.1.1) en el espacio $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})$. Esta solución es única en una bola centrada en $\mathbf{0}$ y de radio r , $B_r(\mathbf{0})$.

Demostración. Para demostrar el Teorema 3.10 haremos uso del teorema de la función implícita. Sea $X = X_1 \times X_2$, donde $X_1 = \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ $X_2 = \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})$ con la norma $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})\|_X = \|\mathbf{u}_0\|_{X_1} + \|\mathbf{f}\|_{X_2}$, $Y = \mathcal{C}_w([0, T]; \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})$ y $F : X \times Y \rightarrow Y$, definida por $F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u}) := U$, donde

$$U(t) = \mathbf{u}(t) - S(t)\mathbf{u}_0 + \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}(\text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) d\tau - \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

(i) La aplicación F es continua de $X \times Y \rightarrow Y$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|U\|_Y &= \|\mathbf{u}(t)\|_Y + \|S(t)\mathbf{u}_0\|_Y + \left\| \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) d\tau \right\|_Y \\ &+ \left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau \right\|_Y. \end{aligned}$$

Analicemos cada uno de los términos del lado derecho de la igualdad anterior:

- De la definición de la norma en el espacio solución Y y de la primera parte de la prueba del Lema 3.7, tenemos que

$$\|S(t)\mathbf{u}_0\|_Y \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{M}^{n-1}}.$$

- De la Proposición 3.9 se sigue que

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) d\tau \right\|_Y \\ &= \sup_{t>0} \left\| \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) d\tau \right\|_{\mathcal{M}^{n-1}} \\ &\leq \sup_{t>0} C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}^{n-1}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= C (\|\mathbf{u}\|_Y)^2. \end{aligned}$$

- Finalmente, de la proposición 3.8, sabemos que

$$\left\| \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau \right\|_Y \leq \|\mathbf{f}\|_{X_2}.$$

De lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \|F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u})\|_Y &\leq \|\mathbf{u}\|_Y + \|\mathbf{u}_0\|_{X_1} + \|\mathbf{f}\|_{X_2} + C (\|\mathbf{u}\|_Y)^2 \\ &\leq \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})\|_X + C \|\mathbf{u}\|_Y (1 + \|\mathbf{u}\|_Y), \end{aligned}$$

lo que implica que $F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u}) \in Y$. Note también que si $((\mathbf{u}_0^k, \mathbf{f}^k), \mathbf{u}^k)_{k \in \mathbb{N}}$

es una sucesión en $X \times Y$ tal que

$$((\mathbf{u}_0^k, \mathbf{f}^k), \mathbf{u}^k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow ((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u}) \text{ en } X \times Y,$$

entonces, tomando la diferencia $F((\mathbf{u}_0^k, \mathbf{f}^k), \mathbf{u}^k) - F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u})$, siguiendo el raciocinio anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} & \|F((\mathbf{u}_0^k, \mathbf{f}^k), \mathbf{u}^k) - F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u})\|_Y \\ & \leq \|(\mathbf{u}_0^k - \mathbf{u}_0, \mathbf{f}^k - \mathbf{f})\|_X + C \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}\|_Y (1 + \|\mathbf{u}^k\|_Y + \|\mathbf{u}\|_Y) \rightarrow \mathbf{0}, \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow \infty$.

(ii) $F((\mathbf{0}, \mathbf{0}), \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, se sigue de la definición de F .

(iii) Para cada $(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \in X$, la aplicación $F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \cdot)$ es de clase C^1 de Y en Y .

Para cada $\mathbf{u} \in Y$, defina la aplicación lineal $L_{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{U}$ sobre Y dada por

$$\bar{U}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \int_0^t S(t - \tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}})) d\tau + \int_0^t S(t - \tau) (\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u})) d\tau. \quad (3.5.1)$$

Defina $\mathcal{U} \equiv F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) - F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u}) - L_{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})$. Debemos probar que

$$\lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{U}\|_Y}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y} = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) + \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}))(\tau) d\tau \\
&\quad - \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau - \mathbf{u}(t) - \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t S(t-\tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau - L_u(\bar{\mathbf{u}}) \\
&= \bar{\mathbf{u}}(t) + \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}))(\tau) d\tau \\
&\quad - \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))(\tau) - L_u(\bar{\mathbf{u}}) \\
&= \bar{\mathbf{u}}(t) + \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}))(\tau) d\tau - L_u(\bar{\mathbf{u}}) \\
&= \bar{\mathbf{u}}(t) + \int_0^t S(t-\tau) (\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}))(\tau) d\tau \\
&\quad - \bar{\mathbf{u}}(t) - \int_0^t S(t-\tau) \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}})(\tau) d\tau - \int_0^t S(t-\tau) \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u})(\tau) d\tau \\
&= \int_0^t S(t-\tau) \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{U}\|_Y}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y} &= \lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} \frac{\|F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) - F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \mathbf{u}) - L_u(\bar{\mathbf{u}})\|_Y}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y} \\
&= \lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} \frac{\left\| \int_0^t S(t-\tau) \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})(\tau) d\tau \right\|_Y}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y} \\
&\leq \lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} \frac{C(\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y)^2}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y} \\
&= \lim_{\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y \rightarrow 0} C(\|\bar{\mathbf{u}}\|_Y) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de Fréchet de la aplicación F es $L_u(\bar{\mathbf{u}})$.

(iv) Biyectividad de $L_0(\bar{\mathbf{u}})$.

Es claro que de la definición dada en (3.5.1) que la aplicación $L_0(\bar{\mathbf{u}})$ es inyectiva. Supongamos que $L_0(\bar{\mathbf{u}}_1) = L_0(\bar{\mathbf{u}}_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
L_0(\bar{\mathbf{u}}_1) - L_0(\bar{\mathbf{u}}_2) &= (\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2) + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P} \operatorname{div}(\mathbf{0} \otimes \bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2)(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{0})(\tau) d\tau \\
&= \bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{0}$, con cual se concluye que $L_0(\bar{\mathbf{u}})$ es 1-1. Ahora, para demostrar la sobreyectividad, debemos probar que para $\mathbf{u}_{0*} \in Y$, existe $\mathbf{u} \in Y$ tal que $L_0(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{u}_{0*}$; note que esto se verifica facilmente tomando $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_{0*}$, pues $L_0(\bar{\mathbf{u}}) = L_0(\mathbf{u}_{0*}) \doteq \mathbf{u}_{0*}$.

Por tanto, por el teorema de la función implícita, existe una aplicación Γ de clase C^1

$$\Gamma : B_{\delta_1}(\mathbf{0}) := \{(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \in X : \|\mathbf{u}_0\|_{X_1} + \|\mathbf{f}\|_{X_2} < \delta_1\} \rightarrow \tilde{B}_{\delta_2}(\mathbf{0}) := \{\mathbf{u} \in Y : \|\mathbf{u}\| < \delta_2\},$$

para algunos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $\Gamma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $F((\mathbf{u}_0, \mathbf{f}), \Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})) = \mathbf{0}$, para todo $(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \in B_{\delta_1}(\mathbf{0})$, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) - S(t)\mathbf{u}_0 + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(\operatorname{div}(\Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \otimes \Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}))) d\tau \\
&\quad + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Así, si definimos $\mathbf{u} = \Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$, tenemos que \mathbf{u} verifica:

$$\mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0 - \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) d\tau + \int_0^t S(t - \tau) \mathbb{P}\mathbf{f}(\tau) d\tau,$$

en Y , desde que $\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})\|_X < \delta_1$. La unicidad de la solución $\mathbf{u} \in Y$ con norma pequeña es consecuencia de la existencia de la aplicación $\Gamma : B_{\delta_1} \rightarrow \tilde{B}_{\delta_2}$ de clase C^1 . ■

A continuación mostramos un resultado de estabilidad global de las soluciones bajo perturbaciones de la condición inicial y de las fuerzas externas.

Teorema 3.11. Sean $\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ y $\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})$ tales que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})} < \delta \quad \text{y} \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})} < \delta,$$

para algún $\delta > 0$, y sean $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}$ soluciones de (2.1.1) en $\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})$ dadas por el Teorema 3.10, con datos iniciales $\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0$ y funciones externas \mathbf{f} y $\tilde{\mathbf{f}}$ respectivamente. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} + \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})} < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})} < \epsilon.$$

Demostración. La demostración del Teorema 3.11 es una consecuencia directa de la continuidad de la aplicación $\Gamma : B_{\delta_1}(\mathbf{0}) \rightarrow \tilde{B}_{\delta_2}(\mathbf{0})$. ■

3.6 SOLUCIONES AUTO SIMILARES

Considere que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \lambda^3 \mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$ es una función suave y $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))$ es una solución clásica del problema (3.3.1). No es difícil ver que el par

$$(\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}, t), p_\lambda(\mathbf{x}, t)) := (\lambda \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t), \lambda^2 p(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)),$$

con $\lambda > 0$, también es solución de (3.3.1). Las soluciones de (3.3.1) que verifican que

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)) = (\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}, t), p_\lambda(\mathbf{x}, t)), \quad \forall \lambda > 0, \forall t > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.6.1)$$

se denominan *soluciones auto similares*. Podemos observar que tomando formalmente el límite $t \rightarrow 0^+$ en (3.6.1), el dato inicial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ debe ser una función homogénea de grado -1 . Este hecho sugiere que un espacio conveniente para encontrar soluciones auto similares para (3.3.1) debe ser un espacio de Banach que contenga funciones homogéneas con ese exponente -1 . Como el espacio $\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$ contiene funciones homogéneas de grado -1 , se encuentra una razón adicional para el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes en esta clase de espacios de distribuciones.

En esta sección presentamos un resultado de existencia de soluciones auto similares en espacios $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$.

Teorema 3.12. *Sea $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}$. Asuma que \mathbf{u}_0 es una función vectorial homogénea de grado -1 , esto es, $\mathbf{u}_0(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y todo $\lambda > 0$. Si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-3})$ y verifica la relación de escala*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \lambda^3 \mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}, \lambda t),$$

entonces la solución dada por el Teorema 3.10 es auto similar, esto es, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \lambda \mathbf{u}(\lambda\mathbf{x}, \lambda^2 t)$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y todo $\lambda > 0$.

Demostración. Verifiquemos que $\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}, t) = \lambda \mathbf{u}(\lambda\mathbf{x}, \lambda^2 t)$ satisface la formulación (3.3.10). En primer lugar, teniendo en cuenta (3.1.6) y la hipótesis de que $\mathbf{u}_0(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda S(\widehat{\lambda^2 t} \mathbf{u}_0)(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda e^{-\lambda^2 4\pi^2 t |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbf{u}_0}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}) \\ &= \lambda e^{-\lambda^2 4\pi^2 t |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \lambda^n \widehat{\mathbf{u}_0}(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda e^{-\lambda^2 4\pi^2 t |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \lambda^n \lambda^{-1} \widehat{\mathbf{u}_0}(\mathbf{x}) \\ &= e^{-\lambda^2 4\pi^2 t |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \lambda^n \widehat{\mathbf{u}_0}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \lambda^n e^{-4\pi^2 t |\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbf{u}_0}(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Además, observe que

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^{\lambda^2 t} S(\lambda^2 t - \tau) (\mathbb{P} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))(\lambda\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &= \lambda \int_0^{\lambda^2 t} e^{-4\pi^2(\lambda^2 t - \tau) |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}) i \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \tau) \otimes \widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \tau)) d\tau \\ &= \lambda^3 \int_0^t e^{-4\pi^2(\lambda^2 t - \lambda^2 s) |\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}) i \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \lambda^2 s) * \widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \lambda^2 s)) ds \\ &= \lambda^3 \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s) |\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}) i \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi} \cdot (\widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \lambda^2 s) * \widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}, \lambda^2 s)) ds \\ &= \lambda^3 \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s) |\boldsymbol{\xi}|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}) i \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}\mathbf{y}, \lambda^2 s) \widehat{\mathbf{u}}(\lambda^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}), \lambda^2 s) d\mathbf{y} \right\} ds \end{aligned}$$

$$= \lambda^n \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi \cdot (\widehat{u}_\lambda * \widehat{u}_\lambda)(\xi, s) ds.$$

De manera análoga, usando que $f(x, t) = \lambda^3 f(\lambda x, \lambda^2 t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{\lambda^2 t} S(\lambda^2 t - \tau) (\widehat{\mathbb{P}f}(\lambda x, \tau)) d\tau &= \lambda \int_0^{\lambda^2 t} e^{-4\pi^2(\lambda^2 t - \tau)|\lambda^{-1}\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\xi) \widehat{f}(\lambda^{-1}\xi, \tau) d\tau \\ &= \lambda^3 \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\lambda^{-1}\xi) \widehat{f}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^2 s) ds \\ &= \lambda^3 \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) \lambda^n \widehat{f}(\lambda x, \lambda^2 s) ds \\ &= \lambda^n \int_0^t e^{-4\pi^2(t-s)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) \widehat{f}(\xi, s) ds. \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\lambda(\xi, \tau) &= e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) - \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) i\xi (\widehat{u}_\lambda \otimes \widehat{u}_\lambda)(\xi, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\tau)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}}(\xi) \widehat{f}(\xi, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\lambda\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})} &= \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}_\lambda(t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= \sup_{t \geq 0} \|\lambda \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1}} \\ &= \sup_{t \geq 0} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} \lambda |\mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t)| \right) \\ &= \sup_{t \geq 0} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\xi|^{n-1} \lambda \lambda^{-n} |\widehat{u}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^2 t)| \right) \\ &= \sup_{t \geq 0} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\lambda^{-1}\xi|^{n-1} |\widehat{u}(\lambda^{-1}\xi, \lambda^2 t)| \right) \\ &= \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}_w([0, \infty); \mathcal{P}\mathcal{M}^{n-1})}, \end{aligned}$$

entonces, se concluye que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\lambda$, para todo $\lambda > 0$, lo que concluye la demostración del teorema. ■

REFERENCIAS

- [1] Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V. & Bremer, T. (2013). *The helmholtz-hodge decomposition-a survey*, IEEE Transactions on visualization and computer graphics, 19(8), 1386-1404.
- [2] Caffarelli, L., Kohn, R. & Nirenberg, L. (1982). *Partial regularity of suitable weak solutions of the navier-stokes equations*, 35(6), 771–831.
- [3] Cannone, M. & Karch, G. (2004). *Smooth or singular solutions to the Navier–Stokes system?*, J. Differential Equations, 197, 247–274.
- [4] Cengel, Y. A. & Cimbala, J. M. (2001). *Mecánica de fluidos, fundamentos y aplicaciones*, McGraw Hill, 1-461.
- [5] Clay Mathematics Institute. Navier–Stokes Equation. [en línea]. (Recuperado en 24 de febrero de 2018). Disponible en <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation>.
- [6] Constantin, P. & Foias, C. (1988). *Navier-Stokes equations*. Lectures in Mathematics, University of Chicago Press.
- [7] Chorin, A. & Marsden, J. (1979). *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Spring Verlag, New York .
- [8] Ferreira, L.C.F.& Villamizar-Roa, E.J. (2008). *Existence of solutions to the convection problem in a pseudomeasure-type space*, Proc. R. Soc. A, 464, 1983-1999.

- [9] Folland, G. (1999). *Real analysis: modern thecnics and their applications*, Jhon Wiley & sons, inc., 235-308.
- [10] Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier Analysis*, Springer, 85-172.
- [11] Hughes, T. & Marsden, J. (1957). *A short course in fluid Mechanics*, Publish or Perish.
- [12] Iorio, R. J. & De Magalhães, V. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press.
- [13] Kato, T. (1984). *Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications*, Math. Z., 187, 471-480.
- [14] Ladyzhenskaya, O. (1969). *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach .
- [15] Leray, J. (1933). *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl, 12, 1-82.
- [16] Leray, J. (1934). *Sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl, 13, 193–248.
- [17] Leray, J. (1934). *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math, 63, 193–248.
- [18] Lieb, E. H. & Loss, M.(2001). *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 123-132.
- [19] Temam R. (1979). *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [20] Toscano, S. & Moura, F. (1991). *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1-461.

BIBLIOGRAFÍA

Cannone, M. & Karch, G. (2004). *Smooth or singular solutions to the Navier–Stokes system?*, J. Differential Equations, 197, 247–274.

Folland, G. (1999). *Real analysis: modern thecnics and their applications*, Jhon Wiley & sons, inc., 235-308.

Toscano, S. & Moura, F. (1991). *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1-461.