

**PROPUESTA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LOS
ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO**

MARCELA JAIMES MUÑOZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2004

**PROPUESTA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LOS
ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO**

Presentado por:

MARCELA JAIMES MUÑOZ

Director

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

Msc. en Enseñanza de la Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

A:

Dios que lo tengo presente en todo lo que hago.

Mi mamá y Alex por su cariño, compañía y apoyo.

Dieguito y mi papá, con quienes quise compartir este logro.

AGRADECIMIENTOS

A mi madre Guiomar por su sacrificio y confianza a lo largo de mi vida.

A mi padre Abelardo y mi hermano Diego, quienes me motivaron a alcanzar este logro y me acompañan desde el cielo.

A Alexander, por su colaboración y paciencia durante la mayor parte de mi vida.

A todos mis familiares quienes de una u otra forma han aportado en mi crecimiento personal y académico.

A mi director Jorge Enrique Fiallo Leal, por su valiosa participación en el proyecto y vida académica.

A todos mis profesores, quienes me aportaron muchos conocimientos y crecimiento humano en el transcurso de mi carrera.

A los integrantes del grupo “Educación Matemática”, por contribuir en mi formación personal, académica y profesional.

A mis amigos y compañeros con quienes he compartido muy gratos momentos de mi vida y me han ayudado a crecer como persona.

Al padre Carlos E. Guerra, por su colaboración y oportunidad brindadas en el Colegio Salesiano “San Juan Bosco”.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1. ANTECEDENTES.....	3
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	4
2.1 INICIOS DEL ÁLGEBRA Y CLASIFICACIÓN.....	4
El Álgebra Geométrica.....	8
2.2 EL USO Y SIGNIFICADO DE LAS LETRAS.....	13
Letras Evaluadas.....	14
Letras Ignoradas.....	14
Letras como Objeto.....	14
Letras como Incógnitas Específicas.....	14
Letras Generalizando Números.....	14
Letras como Variables.....	14
2.3 PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS.....	15
2.4 LA RESOLUCIÓN Y EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS.....	16
3. DISEÑO DE LA PRUEBA.....	19
4. APLICACIÓN DE LA PRUEBA.....	21
5. ANÁLISIS CUANTITATIVO Y CUALITATIVO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.....	22
5.1 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS ERRÓNEAS.....	22
5.2 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS ACERTADAS.....	36
Primer Criterio: Letras Evaluadas.....	36
Segundo Criterio: Letras Ignoradas.....	36
Tercer Criterio: Letras como Objeto.....	37
Cuarto Criterio: Letras como Incógnita Específica.....	37
Quinto Criterio: Letras Generalizando Números.....	37
Sexto Criterio: Letras como Variables.....	38
5.3 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS CON CASOS ESPECIALES.....	41
6. PROPUESTA METODOLÓGICA.....	44
6.1 TALLER 1.....	46
6.2 TALLER 2.....	50

6.3 TALLER 3.....	54
6.4 TALLER 4.....	59
CONCLUSIONES.....	64
RECOMENDACIONES Y COMENTARIOS.....	65
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	66
BIBLIOGRAFÍA.....	67
ANEXOS.....	68

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Tabulación de los Resultados de la Prueba.....	22
--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 1	22
Figura 2. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 2	24
Figura 3. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 3	25
Figura 4. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 4	26
Figura 5. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 5	27
Figura 6. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 6	28
Figura 7. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 7	29
Figura 8. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 8	30
Figura 9. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 9	32
Figura 10. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 10	32
Figura 11. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 11	33
Figura 12. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 12	34
Figura 13. Histograma de Frecuencias de las respuestas acertadas	36

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A – PRUEBA PRELIMINAR	68
ANEXO B – PRUEBA DEFINITIVA	75

TÍTULO:

PROPUESTA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO *

AUTOR:

JAIMES MUÑOZ, Marcela **

PALABRAS CLAVES:

Álgebra, uso y significado de las letras, enfoque de resolución de problemas, talleres.

RESUMEN:

Este trabajo toma como punto de partida el uso y significado de las letras, siendo éste uno de los problemas de mayor incidencia en los estudiantes de octavo grado. Inicialmente se aplican dos pruebas, una preliminar que nos da a conocer la cantidad de problemas y deficiencias que los estudiantes presentan, y otra definitiva que nos permite puntualizar el problema elegido.

Posteriormente se desarrolla un análisis de los resultados obtenidos en la prueba definitiva, teniendo en cuenta las seis categorías descritas por Küchemann, en las cuales está basado el diseño de la prueba y las opciones de respuesta en cada numeral, con los errores más frecuentes que presentan los estudiantes al terminar el año escolar.

Este análisis permitió detectar dichas deficiencias y presentar una propuesta que intenta corregir el problema, mediante talleres que se realizarán en el transcurso del año escolar, sin desconocer el aspecto formal que está presente en cada uno de ellos, deben ser complemento de los temas que abarcan y no reemplazar el desarrollo ordinario de éstos.

Estos talleres contemplan la historia del álgebra, buscando un acercamiento entre el estudiante y las antiguas civilizaciones con sus aportes al álgebra que conocemos en nuestros días; matemática recreativa que nos permite captar el interés del estudiante y reforzar temas indispensables para los estudios iniciales del área; material didáctico, que además de captar el interés del estudiante, permite vivenciar varios de los temas presentados en el contenido de la materia, a través de áreas y perímetros.

Todo esto mediante el enfoque de resolución de problemas, como una forma donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Licenciatura en Matemáticas. Director: JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL, Magister en la enseñanza de las Matemáticas.

TITLE:

PROPOSAL TO DEVELOP THE ALGEBRAIC THOUGHT IN THE STUDENTS OF EIGHTH DEGREE *

AUTHOR:

JAIMES MUÑOZ, Marcela **

KEY WORDS:

Algebra, use and meaning of the letters, approach of resolution of problems, factories.

SUMMARY:

This work takes as start point the use and meaning from the letters, being this one of the problems of greater incidence in the students of eighth degree. Initially two tests are applied, a preliminary that presents to us the amount of problems and deficiencies that the students present, and another definitive one that allows us to emphasize the chosen problem.

Then the results obtained in the definitive test was analyzed, considering the six categories described by Küchemann, on which is based the design of the test and the options of answer on each numeral, with the errors more frequent than the students present when finishing the scholastic year.

This analysis allowed to detect these deficiencies and to present a proposal that tries to correct the problem, trough tests that will be made in the course of the scholastic year, without unknown the formal aspect that is present in each one of them, must be complement of the subjects that include and not to replace the ordinary development of these.

These tests contemplate to the history of algebra, looking for an approach between the student and the old civilizations with their contributions to the algebra that we know in our days; mathematical recreational that allows us to catch the interest of the student and to reinforce subjects indispensable for the initial studies of the area; didactic material, that besides to catch the interest of the student, allows to verify several of the subjects presented in the content of the matter, through areas and perimeters.

All this by mean of the orientation of resolution of problems, as a form where the student continuously must develop diverse abilities and use different strategies in his mathematics learning.

*Monograph.

**Sciences Faculty, Degree in Mathematics. Director: JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL, Magister in Education of Mathematics .

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia se ha visto la necesidad de exponer nuestras ideas y de incorporar abstracciones de la realidad en nuestras mentes, para ello se ha conformado un lenguaje a través de elementos de comunicación que llamamos símbolos. Haciendo uso adecuado de dicha simbología se han logrado desarrollar estructuras universales para la propagación de los conocimientos, como es el caso de las matemáticas y particularmente del álgebra, en donde se vivencia la necesidad de contar con habilidades que nos permitan interactuar con nuestro medio de forma competente, apoyándonos en el uso y significado de las letras, la generalización y las que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas.

Consciente de la necesidad de detectar y fortalecer estas habilidades, en la propuesta se realizan dos pruebas (una preliminar y otra definitiva), que permitieran identificar los elementos pertinentes a evaluar, y así, a través de la definitiva promover un análisis puntual de las condiciones actuales de los estudiantes. Desafortunadamente se encontró con que los estudiantes de bachillerato manejan ligeramente conceptos básicos de la geometría y el álgebra, originando resultados en sus evaluaciones que indican que frecuentemente no son capaces de aplicar este conocimiento a situaciones de resolución de problemas, ni tampoco comprenden muchas de las estructuras que hay detrás de estos conceptos y habilidades; y para cubrir su falta de comprensión, los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos, llegando a creer que esta actividad es la esencia del álgebra. La gran mayoría piensa que las matemáticas están basadas en reglas, considerando que su aprendizaje está principalmente en la memorización, debido a que ésta es la idea del álgebra elemental que les han mostrado siempre, reduciendo su estudio a operar expresiones algebraicas, y

memorizar productos notables, casos de factorización etc., aunque esto es muy importante, los estudiantes no lograrán mejorar su pensamiento sólo con este conocimiento.

Lo anterior conlleva a proponer un trabajo enfocado hacia el fortalecimiento del uso y significado de las letras, mediante talleres basados en: la historia del álgebra, debido a la gran importancia de conocer sus fundamentos, transformaciones desde sus inicios hasta los métodos y simbología actual, en matemática recreativa y material didáctico, para captar el interés de los estudiantes, afirmando los requisitos y temas posteriores del álgebra, de una forma agradable y así lograr un ritmo de trabajo adecuado sin el rechazo acostumbrado. Todo esto mediante el enfoque de resolución de problemas, como una forma donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas.

1. ANTECEDENTES

En los últimos quince años se han realizado varias investigaciones sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra; algunos de ellos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra. Kieran y Filloy (1989) y Malisani (1993) presentan un resumen bastante completo sobre las principales investigaciones relativas a los errores que efectúan los alumnos cuando resuelven ecuaciones y problemas algebraicos y a los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

En España, Martín Manuel Socas junto con otros colegas, han desarrollado el material titulado “Iniciación al Álgebra”, proponiendo un acercamiento al álgebra de una forma no tradicional, contando sus experiencias en el aula y algunos casos en particular, proponiendo ciertas actividades bien estructuradas y sugerencias para combatir los problemas aquí descritos.

En Colombia el grupo PRETEXTO de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, publicó el texto “La Transición Aritmética-Álgebra”, en donde se presentan resultados del Proyecto de Investigación *La Variable en Matemáticas como Problema Puntual. Búsqueda de Causas en Octavo Grado*, cofinanciado por la misma Universidad y Colciencias [1]; los resultados llevan a plantear algunas consideraciones en torno a la comunicación en la matemática escolar, entendiéndolo desde la posibilidad de éxito que pueden tener los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En Santander son escasos los trabajos desarrollados en esta área, además sus contenidos no están estrechamente ligados con la temática de este trabajo.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1 INICIOS DEL ÁLGEBRA Y CLASIFICACIÓN

Según Manuel M. Socas, el álgebra está identificada por los procedimientos, que hacen uso de letras y expresiones literales en su metodología de trabajo aplicada en las operaciones. En general, cualquier proceso matemático lleva intrínsecos desarrollos algebraicos.

En las últimas décadas, el álgebra ha cobrado gran importancia. Sus aplicaciones han sido multiplicadas debido a problemas tecnológicos, al análisis y también a la física, que ha podido expresar cuestiones fundamentales de mecánica cuántica por medio de expresiones algebraicas.

Es necesario conocer el concepto de número para así tener una idea más clara acerca del inicio del álgebra. Los números eran percibidos por los antiguos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, propiedad que ellos no podían distinguir claramente. Más adelante, aparecen las operaciones con números como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos, y los hombres fueron descubriendo y asimilando las relaciones entre los números. Finalmente, a medida que la vida social se hizo más intensa y complicada, fueron apareciendo problemas más complejos que impulsaron a perfeccionar los nombres y “símbolos” de los números.

La primera etapa hacia los signos matemáticos y las fórmulas en general, la constituye la aparición de los símbolos numéricos, que aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura y que jugó un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Todavía en este tiempo, cualquier ley o la resolución de un problema matemático se expresa con palabras, pues la utilización de signos para las operaciones aritméticas y la designación literal para la incógnita tuvo lugar mucho

más tarde.

La palabra “álgebra” proviene del título de un libro *Al-jabr* (algunos usan *Al-gebr*) *w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 d. C., por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed hijo de Musa nativo de Khwarizm), que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados.

El título *Al-jabr w'al-muqabalah* significa “ciencia de la restauración y oposición” o “transposición y eliminación” o, como expresa Carl Boyer, la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación (*al-jabr*) y la cancelación de términos iguales en ambos miembros de la ecuación (*al-muqabalah*).

Así, dada la ecuación

$$x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$$

al-jabr da

$$x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x^3$$

y *al-muqabalah* da

$$x^2 + 5x = 4x^3$$

Esta obra fue traducida al latín en los primeros años del siglo XII por Juan de Sevilla y Gerardo de Cremona, y con el tiempo se le llamó simplemente Álgebra.

El origen del vocablo responde satisfactoriamente al contenido real de la ciencia misma. El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las “operaciones” que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números; es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracción de los números concretos.

La historia del álgebra se divide según su desarrollo en tres fases:

La primera fase, que comprende el periodo de 1700 a. C. a 1700 d. C., se

caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La Introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los “cálculos con cantidades de distintas clases” (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

Se señala en este periodo los trabajos de George Peacock (1791-1858), tendientes a fundamentar y justificar las operaciones con expresiones literales. A él se debe el “principio de permanencia” que decía:

“Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma, aunque particulares en su valor son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma.”

Distinguiendo entre álgebra aritmética, donde las letras representan los números naturales y los signos + y – tienen el significado aritmético ordinario, y el álgebra simbólica, donde siguen actuando las leyes del álgebra aritmética, pero se elimina la restricción a los naturales.

El principio de permanencia afirmaba que todas las reglas que se verifican con los naturales, por ejemplo, conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y distributiva de la multiplicación con respecto de la suma, seguían verificándose para todos los demás números u objetos representados por las letras. Así, la importancia del significado de los símbolos quedó relegada a un segundo término

ante la primacía de los símbolos por sí mismos y sus leyes de combinación; por ejemplo, la adición significará cualquier proceso que se ajuste a determinadas leyes.

Hasta este momento, finales del siglo XVIII y primera mitad del XIX, el álgebra era la ciencia de las ecuaciones y su problema fundamental radicaba en la teoría de resolución de ecuaciones algebraicas.

En la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra presentó un notable impulso debido a grandes matemáticos, entre los cuales destacamos las ideas de Galois (1801-1832) sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Teorías tales como la de grupos, determinantes y matrices, por citar algunas, alcanzaron un profundo desarrollo.

Todo esto favoreció el nacimiento del álgebra abstracta contemporánea (3ª fase), llamada algunas veces álgebra moderna. En este periodo se prescindir de los números, de ahí el nombre de abstracta, y los objetos utilizados pueden ser cualesquiera (matrices, vectores, tensores, etc.) sobre los cuales se definen ciertas operaciones que verifican unas determinadas propiedades, construyéndose el álgebra a partir de axiomas previamente definidos.

En la actualidad, la revolución de los ordenadores está creando nuevos problemas sobre la mecanización de los cálculos algebraicos, lo que lógicamente conducirá a un desarrollo aún mayor del álgebra.

La notación algebraica presenta también tres períodos claramente diferenciados:

- El periodo retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este periodo se extiende desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diofanto (250 d. C.).
- El periodo sincopado o abreviado, cuando empiezan a utilizarse algunas abreviaciones para simplificar la resolución de los problemas. Este periodo comienza con Diofanto y dura hasta comienzos del siglo XVI.

La ecuación $2x^3+8x-(5x^2+4)=44$ se escribía en notación de Diofanto así:

$$K \tilde{\beta} \quad s\eta \quad \wedge \quad \Delta \tilde{\cdot} \quad \varepsilon \quad \dot{M} \delta \quad \acute{\epsilon} \sigma \tau \xi \zeta \quad \mu \delta$$

$$x^3 2 \quad x 8 \quad x^2 5 \quad 1 \cdot 4 \quad = \quad 44$$

- El período simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total. Este periodo coincide con la 2ª fase anteriormente indicada que, como hemos señalado, está asociada al nombre de Viète, el cual comenzó a denotar por letras no sólo las incógnitas, sino números dados previamente.

Así, la ecuación

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

la escribía como

$$IQC - 14QQ + 85C - 225Q + 274N \text{ aequatur } 120$$

Nuestra notación moderna es debida a Descartes (1596 - 1650), con ligeras modificaciones posteriores

Citaremos $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$

De aquí tomaremos sólo el álgebra geométrica de los griegos, puesto que nos ofrece un aspecto fundamental para el desarrollo de algunas temáticas de nuestro trabajo.

El Álgebra Geométrica

Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios (métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades.

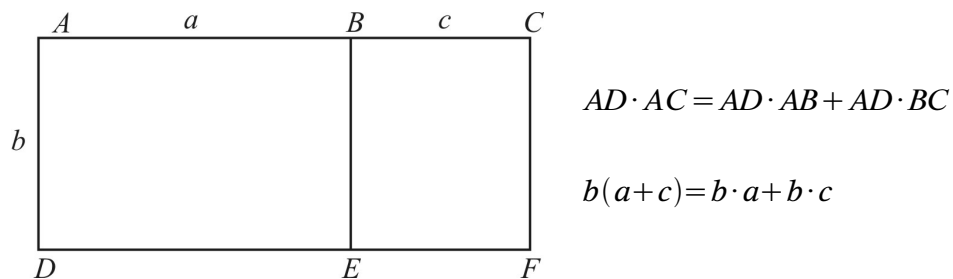
En el libro II de *Los Elementos* (Euclides, 300 a. C., el más corto de todos ellos), hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos. Actualmente, nuestra álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico del álgebra geométrica es importante.

Se cita a continuación la forma de probar la propiedad distributiva y resolver ecuaciones.

La proposición 1 dice:

“Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores.”

Esto es:

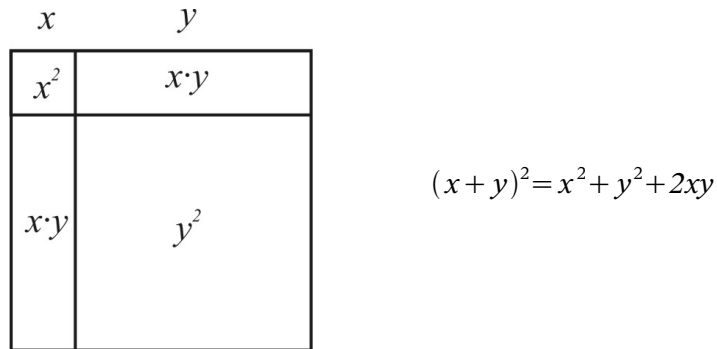


se puede ver, que es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. De forma análoga se demuestran las propiedades asociativa y conmutativa del producto.

La proposición 4 nos permite verificar la expresión

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

“Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos.

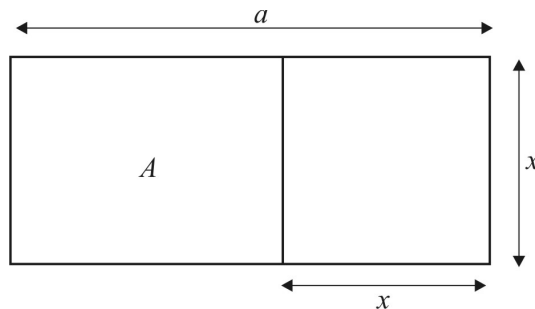


Con la misma habilidad eran capaces de resolver ecuaciones cuadráticas de los tipos $ax - x^2 = b^2$ y $ax + x^2 = b^2$.

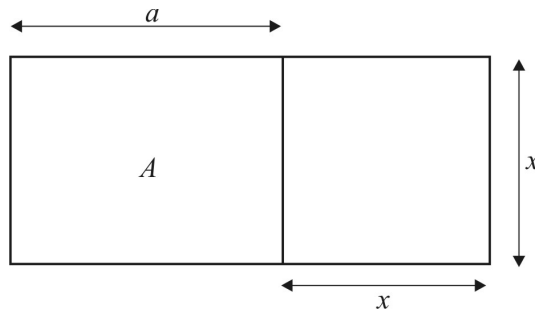
La representación geométrica de estas situaciones viene dada por la construcción sobre un segmento a , de un rectángulo cuya altura desconocida x , debe ser tal que el área del rectángulo considerado, exceda del área dada en el cuadrado de lado x , en el primer caso

$$ax - x^2 = b^2$$

con los segmentos a y b verificando la relación $a > 2b$.



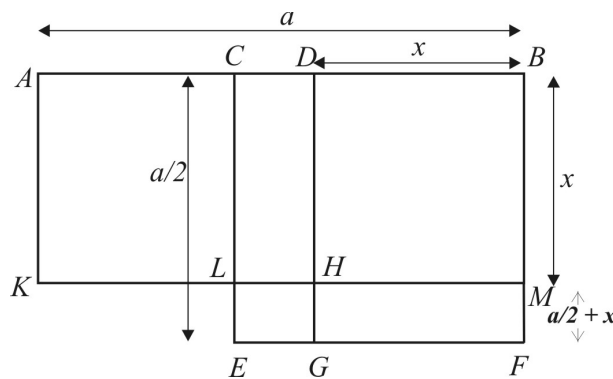
y en el segundo $ax + x^2 = b^2$, que se quede corto respecto del área A .



De esta forma, los griegos consiguieron resolver las ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de “aplicación de áreas”. He aquí cómo lo hacían en el primer caso. Se basaban en la proposición 5, que dice:

“Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total, junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad.”

En la notación actual, para resolver la ecuación de segundo grado $ax - x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB , determinamos un segmento $AB = a$ y construimos un rectángulo $ABMK$ de área $a \cdot x$. Fijando en este un cuadrado de lado x , $DBMH$, obtenemos un nuevo rectángulo $ADHK$ de área $ax - x^2$, que es igual al área de un cuadrado de lado b .



Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, $CBFE$, se deduce,

del uso de la proposición 5 que el cuadrado $CBFE$ de área $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ excede del rectángulo $ADHK$ de área $ax - x^2 = b^2$, en el cuadrado $LHGE$ de lado $\frac{a}{2} - x$; es decir,

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

Que permite solucionar la ecuación dada $ax - x^2 = b^2$, con

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

Nota: Los segmentos de a y b verifican la relación $a > 2b$

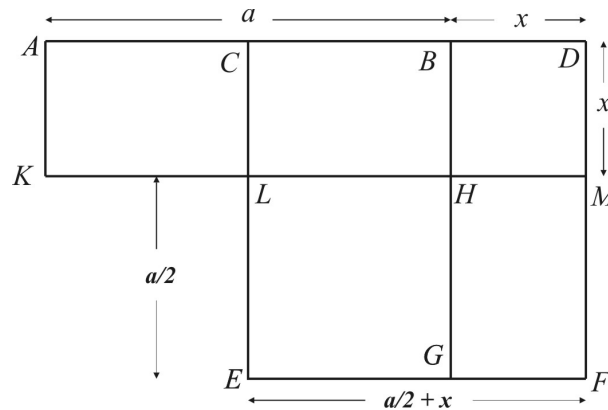
En el segundo caso se basaba en la proposición 6 que dice

“Si se corta en dos partes iguales una línea recta y se le añade (siempre en línea recta) otra línea recta, entonces el rectángulo contenido por el total (con la línea recta añadida) y la línea recta añadida, junto con el cuadrado construido sobre la mitad, es igual al cuadrado construido sobre la línea recta formada por la mitad y la línea recta añadida.”

Actualmente, para resolver la ecuación de segundo grado $ax + x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB , determinamos un segmento $AB = a$ y construimos por una parte, un rectángulo $ABHK$ de área $a \cdot x$, y de otra, por prolongación del segmento AB el rectángulo $ADMK$ de área $ax + x^2$, que exceda al rectángulo anterior en un cuadrado de área x^2 , y que es igual al área de un cuadrado de lado b , es decir,

$$ax + x^2 = b^2.$$

Completando ahora la figura con otro cuadrado $\frac{a}{2}$, $LHGE$ y con un rectángulo



de lados x y $\frac{a}{2}$, $HMFG$, tenemos de la proposición 1 que el área del cuadrado

$CDFE$ es igual $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 + ax$ donde la distancia $CD = \frac{a}{2} + x$ es igual a

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$ es decir, $\frac{a}{2} + x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$ que permite solucionar la ecuación

$$ax + x^2 = b^2 \quad . [2]$$

2.2 EL USO Y SIGNIFICADO DE LAS LETRAS

Según los autores Socas R. Martín Manuel y otros, el uso del concepto de variable en matemáticas es una práctica común, sin embargo los estudiantes más aptos son capaces de cometer el mayor de los errores. Parte de las dificultades proceden de que el álgebra en el colegio no desarrolla suficiente el sentido de variabilidad ligado a las letras. Esta práctica común ha servido más para oscurecer el significado del término mismo, que para mostrar la diferencia real con el sentido que pueden tener las letras.

Se consideran aquí los diferentes contextos en los que aparecen las letras en el álgebra dentro de la clasificación utilizada por Küchemann (1981). Interesa, más que la notación formal en sí misma, las ideas representadas por esas expresiones.

Küchemann describe seis categorías diferentes de interpretación y uso de la letra:

- a) Letras Evaluadas: Esta categoría es aplicada a las respuestas donde a las letras se les asigna un valor numérico desde el principio
- b) Letras Ignoradas: Aquí los estudiantes ignoran las letras, o algunas veces reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado.
- c) Letras como Objeto: Las letras son vistas como un objeto concreto (frutas, lados de un polígono, etc.), eliminando así el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real.
- d) Letras como Incógnitas Específicas: Los estudiantes consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente.
- e) Letras Generalizando Números: Los estudiantes ven las letras como una representación, o al menos son capaces de deducirlo, de varios valores numéricos antes que de uno exactamente.
- f) Letras como Variables: Las letras son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

El concepto de variable implica claramente el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores. Pero esto está más allá de la comprensión de las letras como incógnitas específicas y como generalización de números.

Señala Küchemann que este concepto es difícil de encontrar con toda exactitud debido a que la mayoría de los ítems que pueden dar idea de variable, a menudo son resueltos en un nivel de interpretación más bajo.

Incluso dentro de la resolución de un mismo problema, el estudiante cambia de interpretación, lo que genera gran dificultad no solamente al docente, sino también al mismo estudiante. [2]

2.3 PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

Según los lineamientos curriculares (1988), un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones entre los conceptos, procedimientos y métodos que permiten identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que

nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas, sin embargo aquí sólo se mencionarán los relacionados a nuestro tema principal, el álgebra.

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. Las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas. Tal como lo señala Demana (1990) la exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecen después del estudio del álgebra. [3]

2.4 LA RESOLUCIÓN Y EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. [3]

De acuerdo con los lineamientos curriculares (1981), se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.

Pero esto no significa que se constituya en un t3pico aparte del curr3culo, deber3 permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matem3ticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matem3ticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de m3s alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resoluci3n de problemas como una actividad muy importante para aprender matem3ticas, proponen considerar en el curr3culo escolar de matem3ticas aspectos como los siguientes:

- Formulaci3n de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matem3ticas.
- Desarrollo y aplicaci3n de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificaci3n e interpretaci3n de resultados a la luz del problema original.
- Generalizaci3n de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- Adquisici3n de confianza en el uso significativo de las matem3ticas (NCTM, 1988:71).

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matem3ticas ha originado algunas propuestas sobre su enseanza, entre las cuales las m3s conocidas son las de los investigadores Polya y Alan Schoenfeld.¹

Para Polya "resolver un problema es encontrar un camino all3 donde no se conoc3a

¹An3lisis sobre los trabajos de estos dos investigadores pueden consultarse entre otros en A. Perkins, 1994 y Luz Manuel Santos, 1992

previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”.

Polya describió las siguientes cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para avanzar en la resolución del problema, para utilizar el razonamiento heurístico, el cual se considera las estrategias para avanzar en problemas desconocidos y no usuales, como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás.

Aunque los matemáticos reconocen en los trabajos de Polya actividades que ellos mismo realizan al resolver problemas, también plantean que las estrategias de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el estudiante. [3]

3. DISEÑO DE LA PRUEBA

Inicialmente se ideó una prueba diagnóstica para conocer el nivel de los estudiantes al momento de finalizar el octavo grado. Al realizarse el estudio para dicha prueba, se presentaron un gran número de aspectos por analizar y que además eran tantas las dificultades en los estudiantes por tener en cuenta, que hacían desfavorable la generalización de los casos a estudiar.

Para el diseño de la prueba definitiva se tomaron en cuenta los inconvenientes presentados en la prueba preliminar, optando por desarrollarla en torno a una de las dificultades de mayor incidencia en los estudiantes del álgebra, es decir, el uso y significado de las letras. De esta forma, el estudio sería puntual y acorde a los objetivos propuestos.

Así, cada una de las preguntas está clasificada según las seis categorías que describe Küchemann, esto con la finalidad de conocer la manera en que los estudiantes usan e interpretan las letras en cada uno de los numerales de la prueba.

La prueba está conformada por doce preguntas, teniendo dos representantes de cada una de las seis categorías descritas por Küchemann, a su vez, cada una de de las preguntas consta de 4 posibles respuestas (selección múltiple con única respuesta). Las opciones de respuesta ofrecidas se eligieron buscando denotar los errores típicos cometidos por los estudiantes como: operaciones básicas con fraccionarios, simplificación, no expresan enteros en forma fraccionaria, siguen patrones errados, evalúan sólo una de las condiciones propuestas, presentan dificultades en operaciones básicas, conceptos de áreas y perímetros, definiciones del álgebra, de la geometría, interpretación de letras y resolución de problemas.

En el estudio de los resultados se percibieron algunas pequeñas fallas en la prueba,

en la pregunta 8 la gráfica no está lo suficientemente clara, puesto que no se acotó como es debido, sin embargo esto no desvió demasiado los resultados esperados, y en la pregunta 10, en uno de los ítems de respuesta (c), hubiese tenido más sentido colocar 1,2,3,4 ,así, verificaríamos si el estudiante obvió el 0 o no, sin desviarse de una vez a comprobar que el 5 no cumple con las condiciones, descartando así el ítem sin verificar el 0².

²Ver (P10E02) página 40

4. APLICACIÓN DE LA PRUEBA

La prueba definitiva se aplicó a 39 estudiantes de octavo grado en un colegio de Floridablanca, el día 11 de noviembre de 2003 en la jornada de la mañana, los estudiantes fueron instruidos en la forma que debían contestar la prueba, para poder contar con la información requerida del proceso de resolución de los problemas y no quedarse simplemente con la elección efectuada por el estudiante.

Se percibió gran inseguridad y preocupación por parte de varios estudiantes que manifestaron no tener manejo de los temas a diagnosticar. Los ítems de la prueba que mayor desconcierto causaron fueron los numerales 9, 10 y 12, situación reflejada en los resultados de la prueba.

5. ANÁLISIS CUANTITATIVO Y CUALITATIVO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

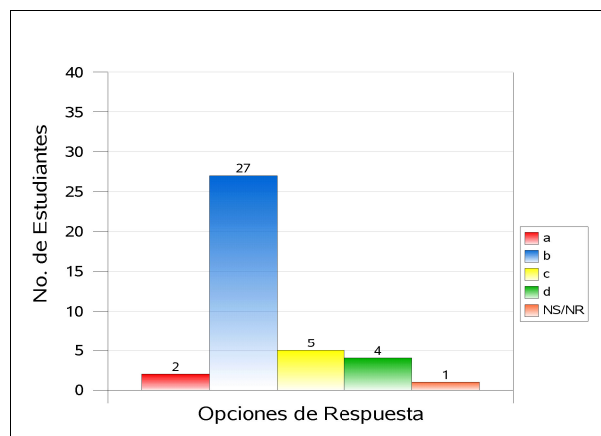
Cuadro 1. Tabulación de los Resultados de la Prueba

Pregunta No.	Opciones de Respuesta				
	a	b	c	d	NS/NR
1	2	27	5	4	1
2	1	24	1	11	2
3	3	9	20	5	2
4	4	23	3	7	2
5	4	9	17	7	2
6	20	2	13	2	2
7	24	3	8	4	0
8	5	16	17	1	0
9	15	9	11	1	3
10	14	4	4	17	0
11	12	6	11	9	1
12	7	18	11	3	0

5.1 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS ERRÓNEAS

A continuación se presentan los histogramas de frecuencias para cada una de las preguntas, observaciones acerca de los errores cometidos por los estudiantes, además de algunos ejemplos:

Figura 1. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 1



Sólo el 12,82% de los estudiantes contestó correctamente (caso c), el 69,23% eligió la respuesta b, indicando que los estudiantes tienen grandes dificultades en operaciones con fraccionarios, suman numerador con numerador y denominador

con denominador, siendo este el error más frecuente que cometen en estos casos (P01E20), en el caso citado (P01E01), se aprecia, a parte de utilizar el método de ensayo y error, que algunos sólo suman bien fraccionarios homogéneos. El 10,25% eligió la respuesta *d*, aquí tienen un criterio bien particular, suman los numeradores y el resultado lo dividen por el denominador que aparece, obteniendo una respuesta (P01E39) y el 5,12% la respuesta *a*, observando que no tienen en cuenta los denominadores, solo suman los numeradores. En general podemos deducir que además de lo descrito anteriormente, tampoco expresan valores enteros para resolver operaciones, ni reconocen enteros expresados en forma fraccionaria. El 2,56% no respondió.

1. Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de *a*?
P01E01

a. $\frac{2}{4}$

b. $\frac{2}{1}$

c. $\frac{17}{4}$

d. 17

*Yo digo que es kb. porque $\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = 5$ el valor de *a* es $\frac{2}{1}$*

P01E20

Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de *a*?

a. $\frac{2}{4}$

b. $\frac{2}{1}$

c. $\frac{17}{4}$

d. 17

$\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)$

$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)$ = respuesta

$\frac{17}{4} + \frac{3}{4} = \left(\frac{20}{4}\right)$

P01E39

1. Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de *a*?

a. $\frac{2}{4}$

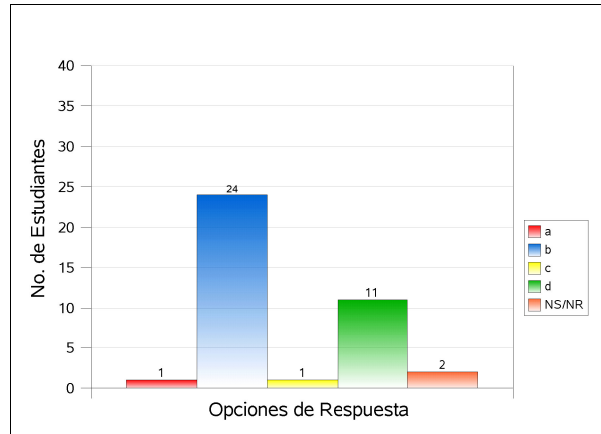
b. $\frac{2}{1}$

c. $\frac{17}{4}$

d. 17

$17 + \frac{3}{4} = 5$

Figura 2. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 2



El 61,53% de los estudiantes contestó correctamente con la opción *b*, el 28,20% eligió la opción *d*, lo que indica que evaluaron sólo una de las condiciones (P02E04), el 2,56% optó por la *c*, observando este ítem percibimos que el estudiante obvió el operador (\cdot) y reemplazó la letra por el número, quedando éste de tres cifras, obteniendo como operación simplemente una suma y otro tanto igual la opción *a*, que indica que evaluaron correctamente, pero a su vez, sumaron todos los resultados obtenidos. El 5,12% no contestó

P02E04

2. ¿Cuál es el valor de $15 \cdot a + 7$, cuando $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$?

a. 111

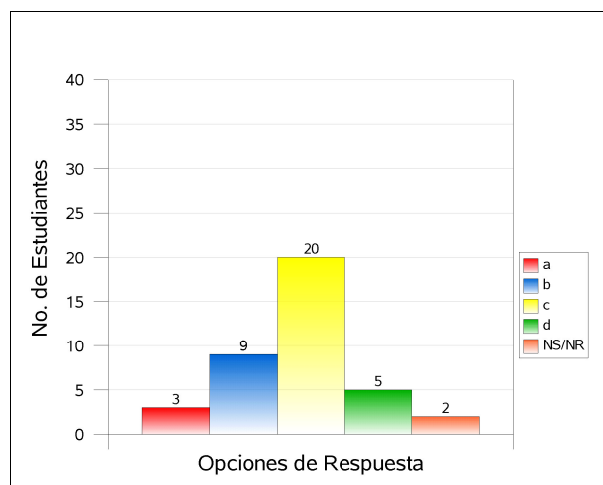
b. 22, 37, 52

c. 158, 159, 160

d. 22

$15 \cdot L = 15 + 7 = 22$

Figura 3. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 3



El 51,28% eligió la respuesta correcta, es decir la *c*, el 23,07% tomó la opción *b*, lo cual señala que el estudiante sigue un patrón errado, debido a que en la segunda igualdad se aumenta 3 unidades al sustraendo, supone que la respuesta también aumentaría en la misma proporción, sin darse cuenta que la operación es una resta y entre mayor sea el sustraendo, menor será la diferencia, en lugar de aumentar (P03E13), el 12,82 % escogió la opción *d*, aquí se centró sólo en el valor de la letra y operó de forma incorrecta la ecuación (P03E20) y el 7,69% optó por la opción *a*, centrándose sólo en obtener el valor de la letra, en forma correcta (P03E24). El 5,12% no contestó.

P03E13

3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$

a. 997

→ b. 755

c. 749

d. 507

$507 - 248 = 755$

2"

P03E20

3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$

a. 997

b. 755

c. 749

d. 507

$752 - 245 = 507$

P03E24

3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$

a. 997

b. 755

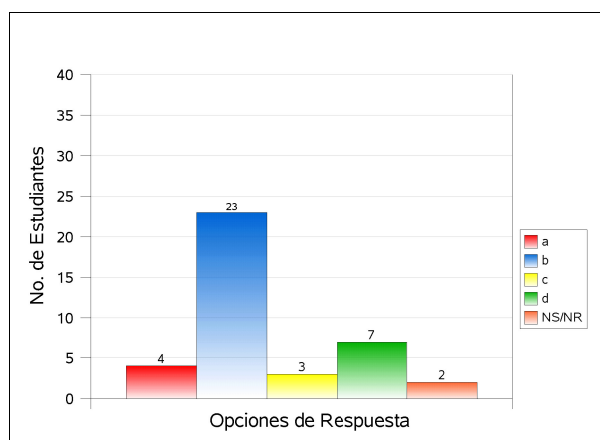
c. 749

d. 507

$$\begin{array}{r} 752 + \\ 245 \\ \hline 997 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 997 - \\ 245 \\ \hline 752 \end{array}$$

Figura 4. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 4



El 58,97% contestó correctamente con la opción *b*, el 17,94% eligió la opción *d*, basándose en la primera suma ($a+b=8$) sin tener en cuenta que al ser las letras diferentes, representaban diferentes valores, jugaron con combinaciones aleatorias hasta dar con el valor de la primera igualdad y luego reemplazaron (P04E17), 10,25% tomó la opción *a*, lo que nos muestra que algunos usaron criterios como suma de primos consecutivos y otros sumaron números arbitrarios (P04E21), el 7,69% escogió la opción *c*, aquí se observa que no tuvieron en cuenta la primera ecuación, solo su valor, y al pasar a la otra, sencillamente sumaron números

consecutivos que incluyera al 8 (6+7+8). El 5,12% no contestó.

P04E17

4. Si $a+b=8$, entonces $a+b+c=?$

a. 15

b. $8+c$

c. 21

d. 16

$3+5=8$ $3+5+8=16.$

P04E21

4. Si $a+b=8$, entonces $a+b+c=?$

a. 15

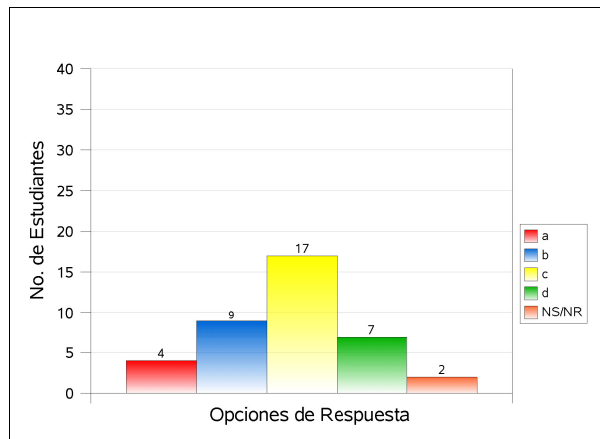
b. $8+c$

c. 21

d. 16

$6+2+7=15.$

Figura 5. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 5



Sólo el 23,07% contestó correctamente (opción *b*), el 43,58% escogió la opción *c*, observando que suman términos semejantes, pero no tienen en cuenta los signos (P05E04), el 17,94% eligió la opción *d*, limitándose a multiplicar cada uno de los de los coeficientes de los términos semejantes (P05E06) y el 10,25% optó por la opción *a*, aquí obviaron una de las variables y no multiplicaron bien la parte literal. El 5,12% no contestó.

P05E04

5. Al Simplificar $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - y$ nos da como resultado

a. $8x$

b. $6x + 2y$

c. $6x + 4y$

d. $8x - 3y$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot x \\ 4 \cdot x \\ \hline 6 \cdot x \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \cdot y \\ 1 \cdot y \\ \hline 4 \cdot y \end{array}$$

P05E06

5. Al Simplificar $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - y$ nos da como resultado

a. $8x$

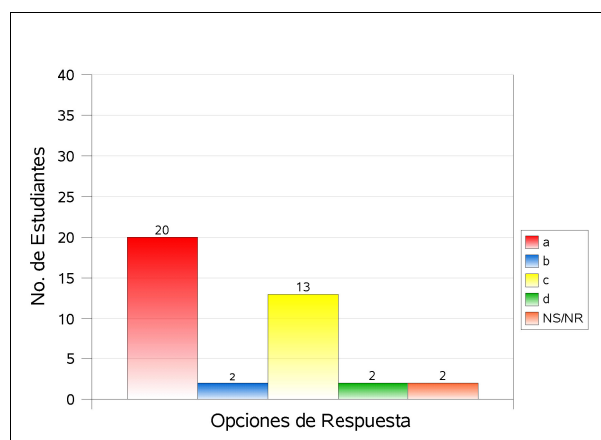
b. $6x + 2y$

c. $6x + 4y$

d. $8x - 3y$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y \\ 4x - y \\ \hline 8x - 3y \end{array}$$

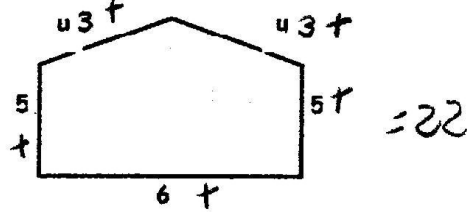
Figura 6. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 6



El 51,28% contestó correctamente con la opción a, el 33,33% eligió la opción c, al pedirles hallar el perímetro, suman los lados en los cuales hay números y lo multiplican por la suma de las letras (P06E16), el 5,12% señaló la opción b, tomaron las letras como número, y asociaron la figura a un rectángulo, ignorando las elevaciones de los segmentos de valor u (P06E07), otro tanto escogió la opción d, mostrando ahí que no tienen muy claro el concepto de perímetro. El 5,12% no contestó.

P06E07

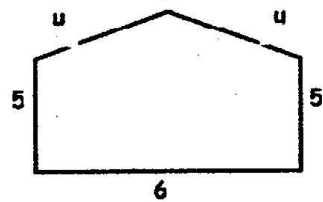
6. El perímetro de la siguiente figura es:



- a. $16+2u$
- b. 22
- c. $16\cdot 2u$
- d. $11+u$

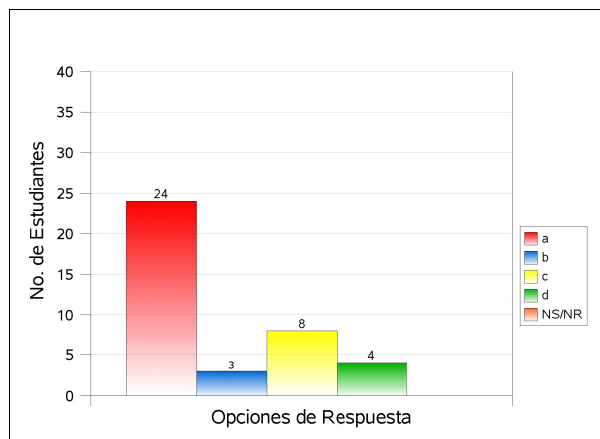
P06E16

6. El perímetro de la siguiente figura es:



- a. $16+2u$
 - b. 22
 - c. $16\cdot 2u$
 - d. $11+u$
- suma de los lados
 $6+5+5+u+u=16\cdot 2u$

Figura 7. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 7



Sólo el 20,51% contestó correctamente (opción *c*), el 61,53% eligió la opción *a*, mostrando que tienen claro el concepto “añadir”, pero sólo centran su atención en los números, la letra la acomodan sin tener en cuenta que no son términos semejantes (P07E01), el 10,25% eligió la opción *d*, éstos solo saben que deben hacer alguna operación como multiplicar y el 7,69% escogió la opción *b*, que suman omitiendo la letra (P07E21).

P07E01

7. ¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?

a. $7n$ $4+3n=7n$ la palabra añadir es de agregar no de multiplicar

b. 7

c. $3n+4$

d. $12n$

P07E21

7. ¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?

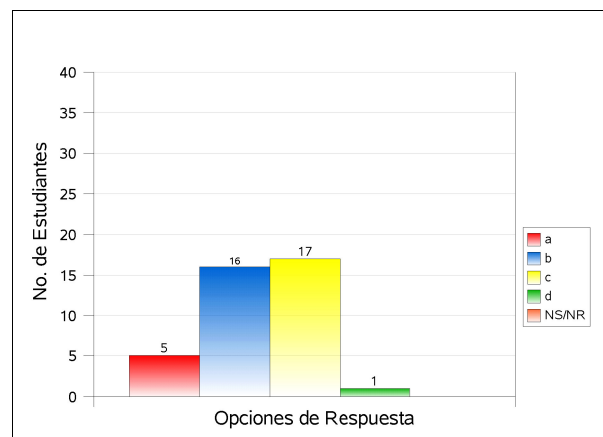
a. $7n$ por que $4 \text{ a } 3n = 7$

b. 7

c. $3n+4$

d. $12n$

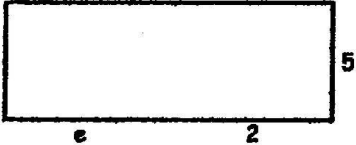
Figura 8. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 8



El 41,02% contestó correctamente (caso *b*), el 43,58% eligió la opción *c*, simplemente efectuando el producto de los valores dados, reconociendo que las

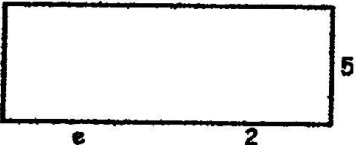
áreas son calculadas de esa forma pero sin identificar los factores (P08E01), además no utilizaron la fórmula correspondiente a la figura geométrica (P08E16), el 12,82% escogió la opción *a*, suman la base con la altura, no reconocen el concepto de área, el 2,56% con la opción *d*, ubican números y letras sin tener identificado que se debe realizar una suma y un producto, pero tampoco tienen claro el mismo concepto.

8. Calcule el área del siguiente rectángulo.
P08E01



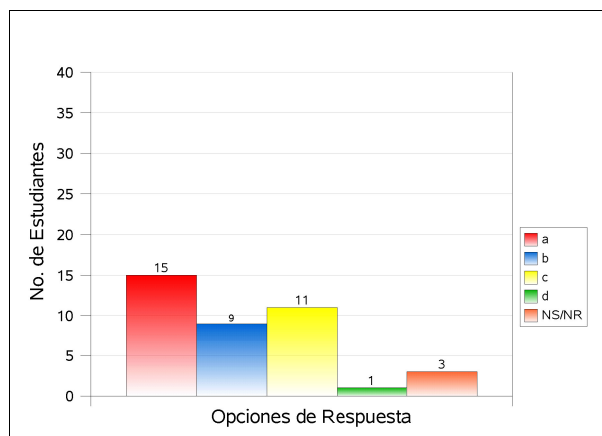
a. $e+2+5$ $5 \times 2 = 10e$
 b. $5(e+2)$ No puede ser $e+2+5$ porque no se suman
 c. $10e$ U: tampoco $(e+2)$ y mucho menos $(5e+2)$
 d. $5e+2$

8. Calcule el área del siguiente rectángulo.
P08E16



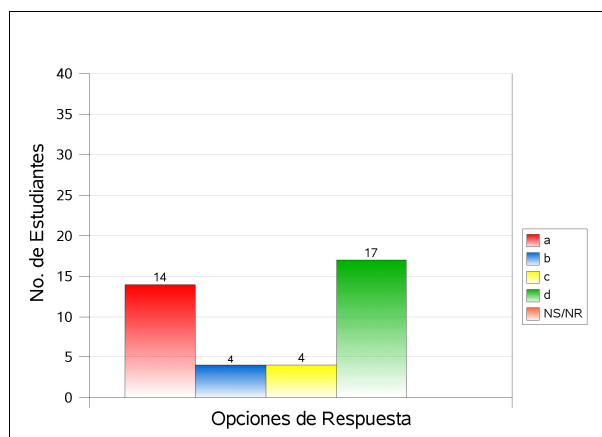
a. $e+2+5$ $b \times h =$
 b. $5(e+2)$ $\frac{\quad}{2}$
 c. $10e$
 d. $5e+2$ $\frac{2 \times 5 =}{2}$

Figura 9. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 9



El 38,46% contestó correctamente con la opción *a*, el 28,20% eligió la opción *c*, evalúan la letra correctamente, pero no tienen en cuenta que el cero también cumple con la desigualdad, el 23,07% eligió la opción *b*, se limitan a tener un sólo caso que cumpla con la condición, y el 2,56% optó por la opción *d*, donde se nota que los estudiantes no tienen claro el concepto de mayor que, y como al evaluar el número da 19, asumen que también la igualdad cumple la condición. El 7,69% no contestó.

Figura 10. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 10



El 35,89% contestó correctamente con la opción *a*, el 43,58% eligió la opción *d*,

aquí se percibe que algunos estudiantes, como no sabían el valor de la letra d , no podrían así mismo saber el valor de la letra c , otros se centraron en los extremos, verificaban con cero y decían que d no podía ser 10, ya que si lo fuera serían dos letras, otros simplemente no se fijaron en la condición de la igualdad (P10E22, P10E39), el 10,25% contestó la opción b , igual que el anterior, simplemente aquí no se tuvo en cuenta el cero y el otro tanto la opción c , señalando así que verificaron los valores, pero no se percataron que el número 5 no cumplía con la condición.

P10E22

10. ¿Qué valores toma c si $c+d=10$ y c es inferior a d ?

a. 0,1,2,3,4

b. 0,1,2,3,4,5

c. 1,2,3,4,5

d. Ninguna de las anteriores

Todos los resultados dan d mas que 9
y d es inferior en los casos o
respuestas

P10E39

10. ¿Qué valores toma c si $c+d=10$ y c es inferior a d ?

a. 0,1,2,3,4

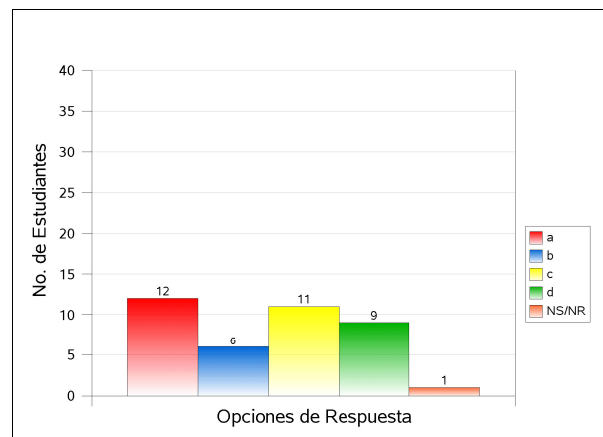
b. 0,1,2,3,4,5

c. 1,2,3,4,5

d. Ninguna de las anteriores

Si c fuera 0 + d , no es posible, pues d
tendría que ser 10 y no se puede de dos cifras.
Además si c es 5, d también tiene que ser
5, por lo tanto no pueden ser iguales las dos
letras. Entonces la respuesta es
ninguna de las anteriores.

Figura 11. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 11



El 30,76% contestó correctamente con la opción *a*, el 28,20% eligió la opción *c*, donde suman los coeficientes de la ecuación para multiplicarlos por el producto de las variables (P11E10), el 23,07% contestó la opción *d*, similar al proceso seguido en el anterior y acomodaron las letras arbitrariamente; el 15,38% optó por la opción *b*, no tienen claro los valores que se asignan en el enunciado. En todas las respuestas se notó que marcaron sin entender el enunciado del problema, sólo se limitaron a escoger la opción que más se acercaba a lo que ellos pensaban sin tener en cuenta los datos. El 2,56% no contestó.

11. Los lápices azules cuestan \$500 cada uno y los lápices rojos \$600 cada uno. Compré algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan \$4300.
Si *a* es el número de lápices azules y *r* el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedo escribir acerca de *a* y *r*?

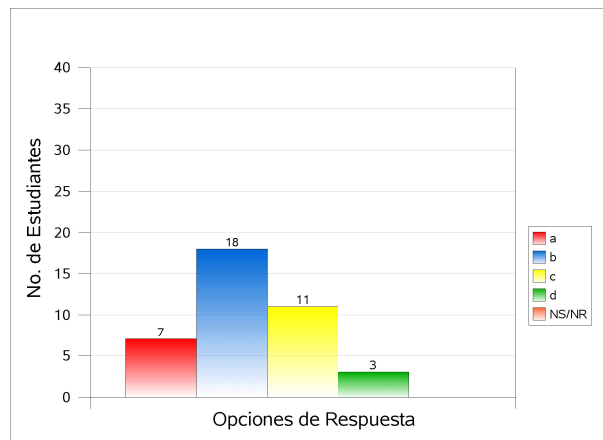
P11E10

a = \$500
r = \$600
1600

a = 3 *r* = 1000
1100 × 3 = \$ 3300 + 1000 = \$4300

a. $500a + 600r = 4300$
b. $500r + 600a = 4300$
c. $1100ar = 4300$
d. $1100a + r = 4300$

Figura 12. Histograma de Frecuencias de la Pregunta 12



Sólo el 7,69% de los estudiantes contestó acertadamente (opción *d*), el 46,15% eligió la opción *b*, donde sólo verifican para $n=2$ y algunos no tienen en cuenta los

operandos, interpretando que $2n=2+n$ (P12E13), el 28,20% contestó la opción c (P12E21) y el 17,94% escogió la opción a, donde sólo verifican si se cumplen algunos casos en particular y no tienen en cuenta que en este grado, ya han trabajado con números naturales y números enteros.

12. ¿Quién es más largo $2n$ o $2+n$? Explíquelo.
P12E13

a. $2n$

b. Iguales *los dos son iguales
Pues el mas no importa*

c. $2+n$

d. Ninguna de las anteriores

12. ¿Quién es más largo $2n$ o $2+n$? Explíquelo.
P12E21

a. $2n$

b. Iguales

c. $2+n$ *por que tendríamos que hacer 2 operaciones*

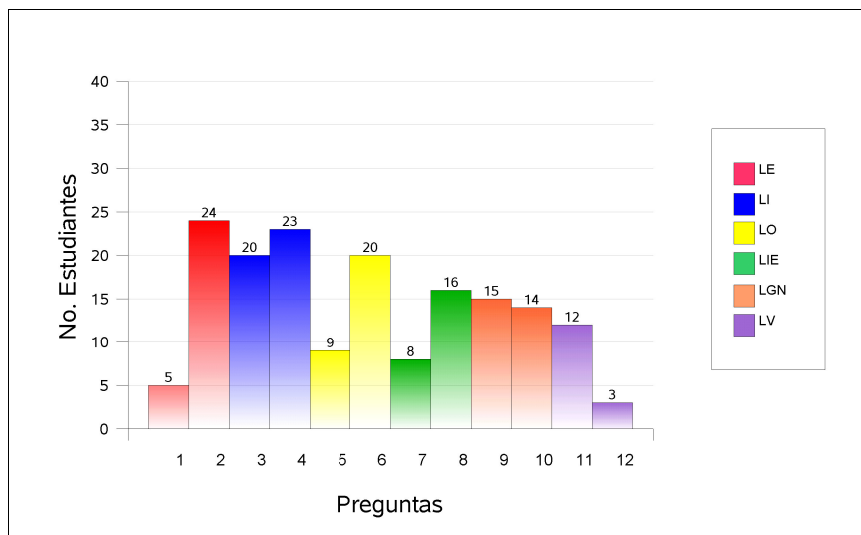
d. Ninguna de las anteriores

En este tipo de problemas, los estudiantes, saben que tienen que hacer operaciones, pero para ellos es muy difícil interpretar cada una de las letras que contempla el ejercicio.

5.2 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS ACERTADAS

A continuación se presenta el histograma de frecuencias, clasificadas en sus respectivas categorías:

Figura 13. Histograma de Frecuencias de las respuestas acertadas



De acuerdo con los datos expuestos en la gráfica ³ y las categorías mencionadas:

Primer Criterio: Letras Evaluadas

La pregunta en la cual más estudiantes acertaron fue la número 2, indicando que están familiarizados con asignar valor numérico a las letras, probablemente sea porque es el primer criterio que el estudiante posee en su trabajo previo con la aritmética. Con respecto a la pregunta 1, igual criterio, cabe especificar que aunque tuvo un número de aciertos muy bajo, se debe a inconvenientes de los estudiantes con los fraccionarios.

Segundo Criterio: Letras Ignoradas

Correspondiente a las preguntas 3 y 4, observamos que aunque aparezcan las

³Interpretación de Abreviaturas en 2.2 USO Y SIGNIFICADO DE LAS LETRAS

letras, los estudiantes pueden o no ignorarlas, ya que ellas no son resultado de alguna operación, pero para algunos el objetivo es alcanzar un resultado y no lo que realmente se pide.

Tercer Criterio: Letras como Objeto

Correspondiente a las preguntas 5 y 6, podemos observar que hubo una gran diferencia en la cantidad de respuestas correctas. En la pregunta 5, el criterio enuncia que las letras son como variables sobre un conjunto formado por objetos de alguna clase (colores, frutas, etc.), y no como una representación de números que pertenecen a algún conjunto numérico, facilitando así la suma o resta de términos semejantes, sin embargo los estudiantes no realizan esta asociación con más de una variable, incrementando un poco la dificultad, evidenciándose con el bajo rendimiento obtenido en la pregunta 5, a diferencia de la pregunta 6, donde las letras son observadas simplemente como el nombre de los lados (no como longitudes) y se pueden reunir, sin embargo como hay de por medio una “figura geométrica”, ellos fácilmente asocian y hacen operaciones porque pobremente recuerdan el concepto de perímetro.

Cuarto Criterio: Letras como Incógnita Específica

Contemplado en las preguntas 7 y 8, (siendo la 7 una de las más bajas) nótese aquí también el desfase entre las respuestas obtenidas. Aunque en la pregunta 7 la respuesta parezca tan fácil, no es contestada por muchos, ya que si n es considerada como incógnita, los estudiantes tienden a elegir 7 , $7n$ o $12n$ como respuesta, en la que los elementos tienen significado y (en este caso los números) son operados, mientras que las letras son ignoradas. Igualmente en el ítem 8, los estudiantes interpretaron la letra de forma correcta, pero al operarla, lo hicieron erradamente.

Quinto Criterio: Letras Generalizando Números

Correspondientes a las preguntas 9 y 10, observando que aunque menos de la mitad (ver figura 13) contestó correctamente, no hay mucha diferencia entre los resultados de dichas preguntas. En las dos preguntas, se observa que la mayoría de los estudiantes ven que la letra puede tomar varios valores y los operan de esa

forma. Otros estudiantes solo evalúan la desigualdad para solo uno de los valores.

Sexto Criterio: Letras como Variables

Éste es el más complejo de todos, ya que el concepto de variable implica tener conocimiento tanto de la incógnita como de sus posibles valores. Pero esto va más allá de la comprensión de la letras, ya que la idea de variable se presenta en casi todos los ítems de la prueba, aparte de esto, también pueden verse las letras generalizando números e incógnitas específicas, y además de presentar una relación entre sus valores.

En la pregunta 11, se observó que las letras pueden interpretarse como se dijo anteriormente, pero si llegara a formularse como pregunta abierta, en lugar de dar opciones a elegir, como ¿qué puedo decir acerca de a y r ?, se podría ver el caso de las relaciones que habrían entre cada una de las variables, comparando y evaluando se podrían tener muchas soluciones, asunto que se puede verificar en la pregunta 12, allí ellos tiene que evaluar las letras, mirando si hay una relación entre cada una de las expresiones (longitudes), reconociendo el tamaño de cada una de ellas para poder compararlas y obtener la respuesta correcta, debido al nivel de complejidad, este fue el de más bajo rendimiento de todos en la prueba.

A continuación algunos ejemplos de las pruebas acertadas:

P01E07
1. Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de a ?

a. $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4} = 0.75$ $5 - 0.75 = 4.25$
b. $\frac{2}{1}$ $\frac{17}{4} = 4.25$
c. $\frac{17}{4}$ $4.25 + \frac{3}{4} = 5$
d. 17

En esta prueba (P01E07), se observa que el estudiante prefiere expresar los fraccionarios como decimales, y aunque se rehusa a trabajar con ellos, es evidente que tiene claras las equivalencias. Convierte la fracción $\frac{3}{4}$ a decimal, y despejando

a lo utiliza para resolver la ecuación, luego identifica la fracción equivalente al decimal obtenido.

P02E13
 2. ¿Cuál es el valor de $15 \cdot a + 7$, cuando $a=1$, $a=2$, $a=3$?

a. 111
 b. 22, 37, 52
 c. 158, 159, 160
 d. 22

$15 \times 1 + 7 = 22$
 $15 \times 2 + 7 = 37$
 $15 \times 3 + 7 = 52$

Aquí el estudiante, hace el reemplazo de la variable en cada uno de los casos, llegando a la respuesta correcta de la forma más adecuada.

P03E10
 3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$

a. 997
 b. 755
 c. 749
 d. 507

$997 - 248 =$
 $n - 245 = 752$
 $n = 752 + 245$
 $n = 997$

P03E12
 3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$

a. 997
 b. 755
 c. 749
 d. 507

$+ 752$
 245
 $n = 997$ porque
 997
 $- 245$
 $\hline 752$

entonces
 997
 $- 248$
 $\hline 749$

En esta prueba (P03E10), el estudiante primero busca el valor de la incógnita mediante resolución de ecuaciones, para luego hacer la operación pertinente, siendo cuidadoso y entendiendo de antemano que la incógnita para los dos casos es la misma. En el otro ejemplo (P03E12), se utiliza el mismo criterio que en la anterior, pero en este caso él verifica que efectivamente las incógnitas tiene el mismo valor.

7. ¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?
 P07E06

a. $7n$
 b. 7
 c. $3n+4$
 d. $12n$

4, añadir $3n = 3n + 4$

En esta pregunta (P07E06), el estudiante entiende bien que el concepto “añadir” corresponde a una suma y como los dos términos no son semejantes, solo se puede enunciar la operación.

10. ¿Qué valores toma c si $c+d=10$ y c es inferior a d ?
 P10E02

a. $0,1,2,3,4$
 b. $0,1,2,3,4,5$
 c. $1,2,3,4,5$
 d. Ninguna de las anteriores

$c+d=10 = \overset{c}{1}+\overset{d}{9}, \overset{c}{2}+\overset{d}{8}, \overset{c}{3}+\overset{d}{7}, \overset{c}{4}+\overset{d}{6}$

En este caso (P10E02), el estudiante también verifica el valor de las letras teniendo en cuenta la condición del numeral, viendo aquí que la letra puede tomar varios valores. En esta prueba, no sabemos si el estudiante tuvo en cuenta el 0 o no, ya que al evaluar las letras con los respectivos ítems de respuesta, se da cuenta que solo sirve evaluar hasta el número 4, el 5 ya no cumpliría con la segunda condición y no hay más ítems de respuestas que contengan el número 4⁴.

11. Los lápices azules cuestan \$500 cada uno y los lápices rojos \$600 cada uno. Compro algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan \$4300. Si a es el número de lápices azules y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedo escribir acerca de a y r ?
 P11E18

a. $500a + 600r = 4300$
 b. $500r + 600a = 4300$
 c. $1100ar = 4300$
 d. $1100a + r = 4300$

$500a + 600r = 4300$
 total

⁴ Descripción completa en Diseño de la Prueba.

Aquí (P11E18) el estudiante asocia correctamente cada una de las letras a los elementos mencionados en el enunciado del problema

P12E12

12. ¿Quién es más largo $2n$ o $2+n$? Explíquelo.

a. $2n$

b. Iguales

c. $2+n$

d. Ninguna de las anteriores
 porque eso depende de el valor de n

En ésta apreciamos cómo el estudiante acertadamente identifica la situación que se le plantea, sin embargo no se nota que haya hecho las pruebas del caso y aparenta haberlas realizado mentalmente.

5.3 ESTUDIO DE LAS RESPUESTAS CON CASOS ESPECIALES

En estas pruebas, los estudiantes contestan acertadamente, pero el planteamiento no fue el más indicado. A continuación se presentan algunos ejemplos que hacen referencia a dichas situaciones.

P01E08

1. Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de a ?

a. $\frac{2}{4}$

b. $\frac{2}{1}$

c. $\frac{17}{4}$

d. 17

$\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$

$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$

$\frac{17}{4} + \frac{3}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$\frac{17}{1} + \frac{3}{4} = \frac{71}{4} = 17.75$

En esta prueba (P01E08), el estudiante usa un criterio muy “particular”, además de

proceder con ensayo y error, para sumar las fracciones multiplica en cruz y redondea, ya sea por exceso o por defecto las respuestas a números enteros, y en algunos casos multiplica erradamente.

P02E18

2. ¿Cuál es el valor de $15 \cdot a + 7$, cuando $a=1$, $a=2$, $a=3$?

a. 111

b. 22, 37, 52

c. 158, 159, 160

d. 22

$a=1, a=2, a=3$
 $22, 37, 52$
 $22 + 37 + 52 = 111$

En esta situación (P02E18), el estudiante reemplaza el valor de a para cada uno de los casos, además de comprobar que la suma de los reemplazos lo lleva a una de las respuestas erróneas, tal vez conduciéndolo a decidir cual respuesta selecciona o a analizar más la pregunta del problema.

P04E01

4. Si $a+b=8$, entonces $a+b+c=?$

a. 15

b. $8+c$

c. 21

d. 16

Yo supongo que $a+b=8$ y que $a+b$ te tendría que ser 12. Por que $a=4$ $b=4=8$ entonces la respuesta es $8+c$.

P04E27

4. Si $a+b=8$, entonces $a+b+c=?$

a. 15

b. $8+c$

c. 21

d. 16

$a=4$
 $b=4$
 $c = \text{No tiene valor}$
 RTA $8+c$

En estos dos ejemplos hay una particularidad, ambos asocian valores iguales a las letras, interpretando sólo una de las posibilidades en las cuales $a+b = 8$, pero en el caso de (P04E01), también supone que el valor de la tercera letra que aparece es el mismo que le había asignado a las demás en la segunda ecuación del enunciado, y en la otra (P04E27), para él c es solo una letra sin valor.

5. Al Simplificar $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - y$ nos da como resultado

P05E13

- a. $8x$
- b. $6x + 2y$
- c. $6x + 4y$
- d. $8x - 3y$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - y$$
$$\swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$6x + 2y + 2$$

Ahora se observa que el estudiante, aunque inicialmente parecía llevar un desarrollo correcto (P05E13), no es muy claro en su planteamiento al colocar esas flechas y el número adicional.

6. PROPUESTA METODOLÓGICA

TALLER N° 1

Este taller abarca algunos temas de la matemática recreativa, utilizando el enfoque de resolución de problemas, con el cual se pretende hacer un pequeño repaso de los temas en los cuales los estudiantes presentan mayores dificultades, como operaciones con fraccionarios, con enteros, geometría, análisis y resolución de problemas, ecuaciones, entre otros. También despejar dudas de los grados anteriores, para de forma agradable, introducirlos en el mundo del álgebra.

Se recomienda aplicarlo al inicio del año escolar, fundamentado simultáneamente con generalizaciones y formalidades para cada caso.

TALLER N° 2

Aquí tratamos de hacer un breve recuento de la historia del álgebra, los personajes y documentos que han contribuido en su avance, facilitando la comprensión por parte del estudiante del recorrido que ésta ha tenido, avances y gran importancia. Todo esto para que se interesen y conozcan acerca de la nueva materia en la que se ven iniciados.

Luego se presenta una serie de sencillos problemas históricos, que se pueden desarrollar aritméticamente (ayudado del pensamiento variacional y algebraico que hemos adquirido en grados anteriores).

TALLER N° 3

El objetivo de este taller, es mostrar al estudiante en forma concreta el concepto de variable, fundamental para el estudio del álgebra.

Aquí se enfatiza el entendimiento a través del concepto de áreas, cómo multiplicar

polinomios de una y dos variables, multiplicación de polinomios con coeficientes negativos, apoyándonos en el plano cartesiano.

Con este material se pueden abordar varios de los temas centrales del álgebra (operaciones con polinomios, productos notables, factorización y otros), y de manera implícita las transformaciones rígidas en el plano, como rotación, traslación y reflexión, todo en forma lúdica y agradable.

Como lo hemos dicho en los demás talleres, este material debe trabajarse en paralelo con los demás conceptos y la formalización de cada uno de los temas.

TALLER N° 4

El objetivo de proponer este taller es hacer entender y comprobar a los estudiantes de una forma lúdica, cómo multiplicar binomios (algunos productos notables), y de igual manera factorizar trinomios mediante el cálculo y suma de áreas.

Se pretende, por medio del cálculo de áreas que ellos observen que de una u otra manera, el tener el área expresada como producto de dos binomios o trinomios, permite deducir que la factorización y los productos notables, son procesos inversos y sean abordarlos de esa forma.

6.1 TALLER 1

¡PRUEBA TU INGENIO!

ALFAMÉTICAS

A continuación aparecerán una serie de “problemitas” que pondrán a prueba tu ingenio y sin darte cuenta repasaremos algunos temas de aritmética, con sus respectivas historias si las hay.

Etimológicamente, CRIPTO significa escondido, oculto. Así pues, la criptografía trata del arte de escribir con clave secreta y, algo críptico, es algo oscuro, enigmático.

La criptoaritmética, un rico capítulo de la Matemática Recreativa, trata el arte de reconstruir operaciones matemáticas. El objetivo es la reconstrucción completa de la operación original, realizando un análisis lógico y detallado, en el que se utilizan propiedades de los números al ser multiplicados.

En 1952, J. A. H. Hunter acuñó el término ALFAMÉTICA para referirse a un tipo especial de criptoaritméticas en las que las combinaciones de las letras crean palabras y el conjunto de palabras frases que tienen sentido. Una de las más famosas y que había aparecido mucho antes, está enmarcada en la siguiente historia:

Se debe tener en cuenta que cada palabra representa un número y cada letra un dígito, así si una letra se repite, está representando el mismo dígito.

<p>Un derrochador estudiante inglés le envía a su padre un telegrama en el que discretamente le comunica cuánto dinero necesita. El telegrama dice:</p> <p>No se sabe si el padre le envió el dinero solicitado, pero... ¿de cuánto se trataba?</p>	$\begin{array}{r} S E N D \\ + M O R E \\ \hline M O N E Y \end{array}$
---	---

$\begin{array}{r} A B \\ + \quad C \\ \hline D E \end{array}$ <p>A, B, C, D y E son dígitos seguidos, no se requieren en ese orden.</p>



$\begin{array}{r} B E E R \\ + \quad A N D \\ \hline S O D A S \\ E+A+R=20 \end{array}$

$\begin{array}{r} A B C \\ + \quad D C D \\ \hline C E A \\ B C C A \end{array}$ <p>El año de nacimiento de la matemática francesa Marie Sophie Germain, corresponde a la mayor suma posible en la siguiente criptoaritmética. ¡Descúbrela!</p>

CUADRADOS MÁGICOS

Sabías que:

Aparecieron en China cerca del año 2800 a.C. El cuadrado mágico más antiguo se llamó LO SHU y se consideró un amuleto de buena suerte.

Un cuadrado mágico es una disposición de números colocados sin repetición de tal forma que la suma de las filas, columnas y diagonales sean iguales.

Resuelve cada uno de los siguientes "problemas rápidos" y escribe la solución en la casilla correspondiente:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

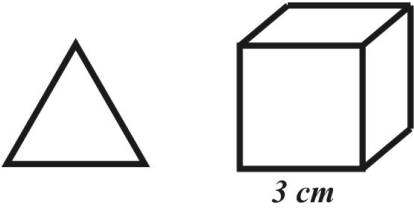
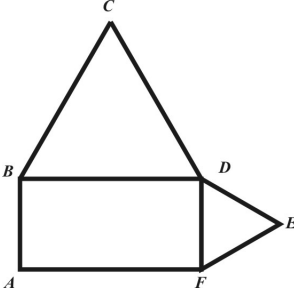
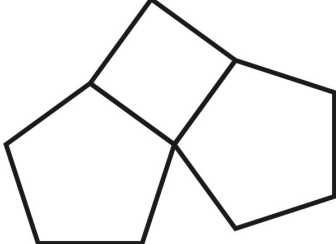
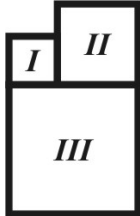
- A. Número de patas que tienen cuatro tigres juntos.
- B. Número de días que hay en dos semanas.
- C. Número de huevos que compró mi mamá si compró dos docenas.
- D. Número de fósforos que quedan en una caja de fósforos si tenía treinta unidades y se gastaron cuatro.
- E. El número de gallinas que hay en una granja si juntas tienen treinta y seis patas.
- F. El primer número de dos dígitos.
- G. Hora que indica la mitad del día.
- H. La mitad de la mitad de ochenta y ocho.
- I. El doble del doble de cinco.

Halle el valor de cada una de las siguientes expresiones numéricas y coloque el resultado en la casilla correspondiente:

- A. $-(3-5)^2$
- B. $-(-3)^3 \div 3$
- C. $2^3 - 2 \times 5$
- D. $4^2 - (3^2 + 2^2)$
- E. $(2^3 \times 3 - 5^2)^2$
- F. $2^3 - 3^2$
- G. $8^2 \div 2^4$
- H. $(6^2 - 3^0) \div (3 - 2^3)$
- I. $-(3 - 3^2)$

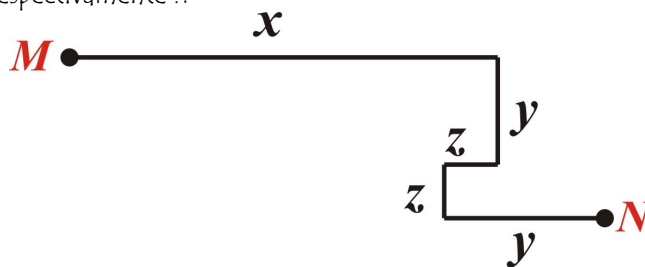
A	B	C
D	E	F
G	H	I

ÁREAS Y PERÍMETROS

<p>★ El perímetro del triángulo equilátero, es igual a la suma de las medidas de todas las aristas del cubo. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?</p> 	<p>★ En esta figura BCD y DEF son triángulos equiláteros, ABDF es un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho. Si el área del rectángulo es 72cm^2, ¿Cuál es el perímetro de la figura?</p> 
<p>★ La figura está formada por un cuadrado y dos pentágonos regulares. Si el área del cuadrado es 225cm^2, ¿Cuál es el perímetro de la figura?</p> 	<p>★ I, II y III son cuadrados. Si $A(I) = 36\text{ cm}^2$, $P(II) = 40\text{ cm}$. Entonces $A(III) = ?$</p> 

PROBLEMITAS

★ Z es la mitad de Y. Y es la mitad de X. Si el camino desde M hasta N mide 180 cm, ¿cuánto miden X, y Z respectivamente ?.



★ Dados 4 números, obtener el número de dos dígitos utilizando las 4 operaciones aritméticas: +, −, ×, ÷. No se puede repetir ningún número, ni es necesario utilizar todas las operaciones.

➤ 3 8 10 4 = 73

➤ 25 6 1 9 = 78

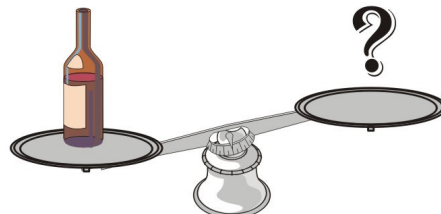
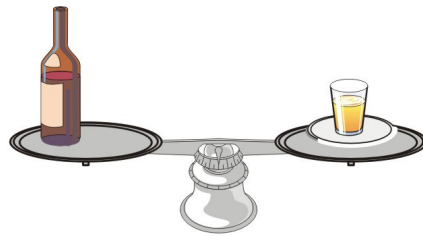
★ Si me divides por 2, el resto es 1. Si me divides por 5, el resto es 3. Si me divides por 7, el resto es 6. Si me divides por 8, el resto es 3.

★ En un taller fueron reparados 40 vehículos, entre coches y motos. El número total de ruedas de los vehículos reparados fue de 100. ¿Cuántos carros y cuántas motos se reparan?

★ Un paquete de panelas pesa 60 kilos. Si se retiran 6 panelas, el paquete queda pesando 9 kilos menos. ¿Cuánto pesa cada panela?. ¿Cuántas panelas había en el paquete?

BALANZA ENIGMÁTICA

¿Cuántos vasos equilibran una botella?



Tomado de los Nuevos acertijos de Sam Loyd

Algunos problemas presentados en este taller, fueron extraídos del material elaborado por el Laboratorio de Matemáticas "Colombia Aprendiendo".

6.2 TALLER 2

Curiosidades de la Historia del Álgebra

Veamos un breve recuento de lo que fue la historia del álgebra y conozcamos algo acerca de sus protagonistas mientras desarrollamos algunos divertidos problemas.

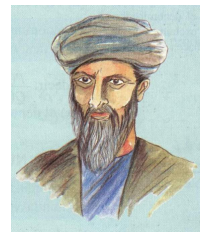


Portada Primer Tratado de Álgebra

Nacimiento del álgebra

El álgebra nació con el uso de jeroglíficos e ideogramas más o menos relacionados con la representación simbólica de nociones y operaciones matemáticas —como un pie orientado hacia adelante para indicar la suma y hacia atrás para indicar la resta— encontrándose rastros de ello en algunos papiros, tal como el de Rhind, donde hay algún problema que hoy resolveríamos por medio de una ecuación de primer grado, y en el de Kahum otro que depende de una de segundo, siendo de destacar que este último —dividir un terreno de cien unidades superficiales en dos cuadros cuyos lados tengan una razón dada— está inspirado por la geometría con estímulos análogos a los que inspiraron la construcción de la analítica.

Mohammed ibn Musa AlKhowarizmi de Bagdad y Damasco (murió hacia el 850 d. C.) produjo el primer tratado (hacia el 825) en que se presenta un equivalente de nuestra "álgebra"—al-jabr w'almuqabala, que significa "restauración y reducción", aludiendo a lo que ahora se llama transposición de términos negativos, para producir ecuaciones con todos sus términos positivos, y a la subsiguiente reducción simplificando los términos de igual potencia de la incógnita. Esto parece haber sido idea original de Al-Khowarizmi; la obra, en conjunto, está compuesta de resultados griegos e hindúes. Su principal progreso fue una aplicación de los nombres de los números hindúes a la solución numérica de las ecuaciones.



Periodos del álgebra

Iniciamos con el periodo retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este periodo se extiende desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diofanto (250 d. de C.). Posteriormente los números negativos se interpretan como corrimientos a lo largo de una recta en dirección opuesta a los positivos; Tartaglia resuelve la ecuación de tercer grado y Ferrari la de cuarto; Bombelli publica en 1572 un tratado que recoge todo lo que hasta entonces se sabía de álgebra e

inicia el cálculo literal que había de llegar con Viète a su perfección. Así, queda cerrado el período del álgebra sin copada y abierto el del álgebra simbólica en el que esta ciencia sale de la juventud para entrar en la edad madura, gracias a la notación con que la dotó el matemático francés, permitiendo redactar muchos problemas en un solo enunciado y resolverlos por medio de una fórmula única, encontrar afinidades entre cuestiones que se creían heterogéneas, dar a los problemas una generalidad insospechada y, sobre todo, descubrir el carácter lógico del álgebra que, a partir de entonces, queda sujeta a la férrea disciplina del silogismo y de las leyes del cálculo.

LA LABORIOSA CONQUISTA DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO



DIOFANTO

Casi a todos los estudiantes lo que más temor les causa de las matemáticas es su "extraño" lenguaje, su simbolismo artificial y complicado. Hasta el siglo XVI, no se utilizaba ningún simbolismo "especial", salvo los símbolos numéricos. El

primer matemático de toda la historia que introdujo un simbolismo especial para el cálculo algebraico fue el griego Diofanto (250 d. de C.), que escribía de esta manera "condensada":

$$K^y \bar{\eta} \wedge \Delta^y i\bar{F}' i\sigma K^y \bar{\alpha}$$

lo que nosotros escribimos casi igual de largo:

$$8x^3 - 16x^2 = x^3$$

Este simbolismo, para hacer cálculos, se perdió en la matemática árabe. En el Renacimiento, entre 1400 y 1600, se destacan los nuevos intentos para conseguir un simbolismo cómodo para calcular.

Veamos:

Luca Pacioli (1494): Trouame. l.n°. che gioto al suo drat° faciã. 2", que es:

$$x + x^2 = 12$$

Tartaglia (1556): "Trouame uno número cha azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe.6" que ahora escribimos:

$$x + \sqrt[3]{x} = 6$$

Buteo (1559): "IOP₆P₉ [IPOP₃P₂₄"]; que es igual a:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$$

Descartes (1637):

$$yy \alpha cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$$

¡Al fin!, porque salvo el caprichoso signo igual, y escribir yy en lugar de y², se ha conseguido la forma simplificada de escribir, usada actualmente en el álgebra.

Ahora que ya conoces algo de la historia del álgebra, te invito a que trates de resolver estos problemitas que han sido famosos a lo largo de la historia, y verás lo fáciles y entretenidos que son. ¡¡INTÉNTALO!!

Epitafio de la tumba de Diofanto

Esta tumba guarda los restos de Diofanto. ¡Oh, qué gran maravilla!
La tumba nos revela con exactitud la extensión de su vida: Ser niño le permitió Dios la sexta parte de su vida, y añadiendo la doceava parte de su vida, he aquí que su mejilla se cubrió con vellos; transcurrida otra séptima parte contrajo vínculos matrimoniales y cinco años después le fue obsequiado un hijo. Pero, ¡pobre el destino del niño!, habiendo alcanzado la mitad de la vida del padre, una tragedia se lo arrebató. Después de encontrar consuelo en la ciencia de los números durante cuatro años, Diofanto concluyó su vida.

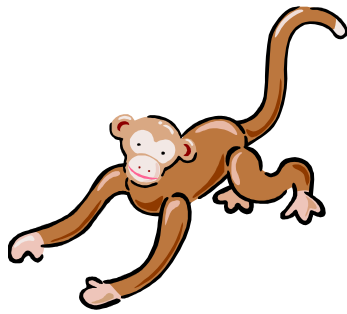
¿Qué edad alcanzó Diofanto?



PROBLEMA DE EULER

He aquí el problema de la introducción al álgebra de Euler, que tan fuerte impresión produjera en Stendhal: Dos campesinas llevaron en total 100 huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda "si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido \$15", la segunda contestó: si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú habría sacado de ellos \$6 $\frac{2}{3}$." ¿Cuántos huevos llevó cada una?

PROBLEMA INDÚ



Otro de los problemas indios puede ser presentado en verso tal y como fue traducido por Lébedev, autor del libro ¿Quién inventó el álgebra?

"Regocijense los monos divididos en dos bandos; en el bosque se solaza su octava parte al cuadrado. Con alegres gritos, doce atronando el campo están. Sabes ¿Cuántos monos hay en la manada, en total?"

NOBLE COMPRADOR



Un noble compró 30 aves y pagó 30 monedas. Por cada tres gorriones pagó una moneda, por cada dos palomas silvestres pagó también una moneda y por cada paloma mensajera dos monedas.

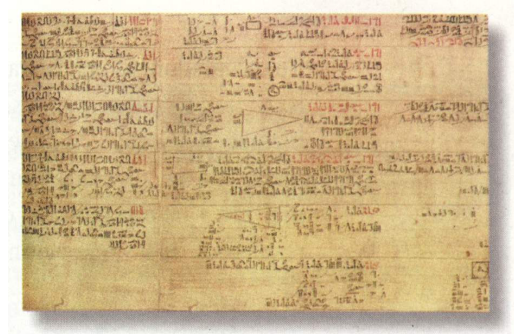
¿Cuántas aves de cada una compró este noble?

EL PAPIRO DE RHIND

Es uno de los documentos matemáticos más antiguos que existen (2000 – 1788 a. de C.). El papiro de Rhind lo compuso un escriba llamado Ahmés. Es un notable logro matemático, que plantea problemas, algunos de los cuales el hombre de inteligencia media del mundo moderno –38 siglos más inteligente, tal vez, que Ahmés– tendría dificultades para resolver.

El papiro de Rhind contiene 85 problemas, y muestra el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones simples, progresiones, la medición de áreas y de volúmenes.

Uno de los problemas del papiro, se ha interpretado de este modo:



En cada una de las siete casas hay 7 gatos; cada gato mata 7 ratones; cada ratón podría haberse comido 7 espigas de trigo; cada espiga de trigo podría haber producido 7 hekat de grano. ¿Cuánto grano se ha salvado gracias a los gatos de las 7 casas?

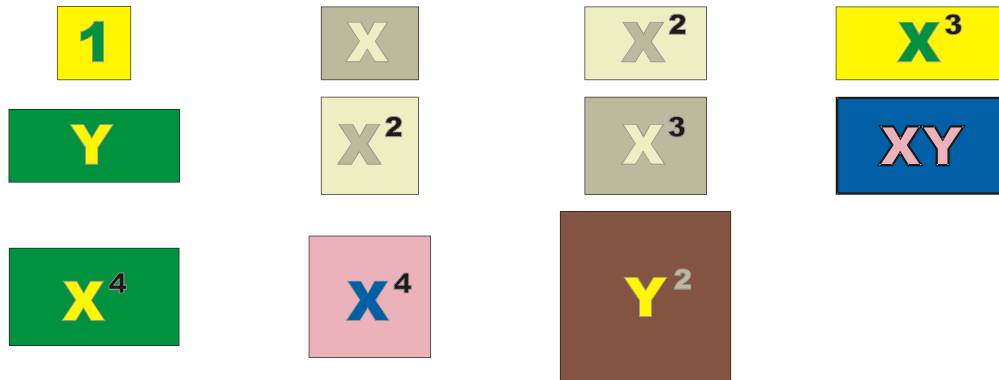
“Tu problema puede ser modesto; pero si desafía tu curiosidad y pone en juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios medios, entonces podrás experimentar la tensión y disfrutar del triunfo de un descubrimiento.”

GEORGE POLYA

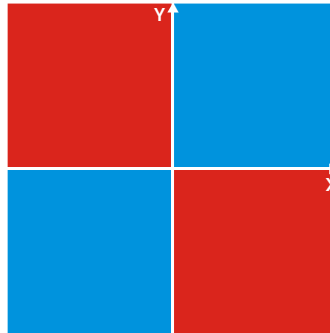
6.3 TALLER 3

TALLER DE POLINOMIOS

La caja de polinomios está conformada por 165 regletas, distribuidas en 15 piezas de cada uno de los siguientes motivos



y un plano cartesiano



El trabajo de Tabit ben Qurra el-Harrani, algebrista árabe, explica el uso de rectángulos que permiten multiplicar dos polinomios. Es el matemático árabe segundo en importancia después de Muhammad ben Musa al-Khwarizmi y antes de Omar Khayyam; Tabit murió en el año 901 de nuestra era y su nacimiento se ubica entre los años 824 al 836. Tabit ben Qurra es uno de los primeros en identificar una pequeña dificultad relacionada con la interacción entre las soluciones algebraica y geométrica de una ecuación cuadrática, dificultad que determina no sólo los orígenes del álgebra sino que también alumbra el camino de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática.

Al intentar solucionar problemas que ahora se representarían de la forma $x^2 + mx = n$, Tabit ben Qurra evidencia que no se puede igualar área con longitud, ni áreas y longitudes con números (objetos adimensionales), e introduce una unidad de medida (e), que le permite escribir la ecuación anterior como $x^2 + m(e)x = n(e)^2$.

Este mecanismo de introducir (e) se conoce como proceso de homogeneización y ha permitido elaborar una representación geométrica que se usa para factorizar, multiplicar, dividir, sumar y restar

expresiones cuadráticas de manera tangible mediante la utilización de fichas que se consiguen en sitios especializados, como las que se representan a continuación; x^2 x 1 ; estas fichas con la incorporación de la unidad de medida (e) se representa mediante rectángulos que concretizan ciertas medidas de áreas.

La interpretación geométrica de Tabit ben Qurra permite adoptar x^2 como un cuadrado de lado x , la variable x está representada por un rectángulo de lados x y 1 , y el 1 es un cuadrado de lado 1 . [4]

Manipulando las regletas, vamos a calcular las dimensiones de los rectángulos, tomando como patrones 1 , x y x^2 .

1	Base= _____ Altura= _____	x	Base= _____ Altura= _____	x^2	Base= _____ Altura= _____	x^3	Base= _____ Altura= _____
y	Base= _____ Altura= _____	x^2	Base= _____ Altura= _____	x^3	Base= _____ Altura= _____	xy	Base= _____ Altura= _____
x^4	Base= _____ Altura= _____	x^4	Base= _____ Altura= _____	y^2	Base= _____ Altura= _____		

Una vez tengamos las dimensiones y las áreas de cada uno de los rectángulos, formemos algunos rectángulos mayores sólo con las regletas de las variables x . Por ejemplo:

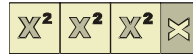
<p>tenemos el siguiente rectángulo</p>	<p>vamos a hallar su área,</p> <table border="0" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>x</td> <td>x</td> <td>x</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>x^2</td> <td>x^2</td> <td>x^2</td> <td>x^2</td> <td>x^2</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>x^2</td> <td>x^2</td> <td>x^2</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>x</td> <td>x</td> <td>x</td> <td>1</td> </tr> </table>		x	x	x	1	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x	x^2	x^2	x^2	x	1	x	x	x	1	<p>Sumando las dimensiones de las regletas que dan la base y la altura del rectángulo, tenemos:</p> <table border="0" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td colspan="4" style="text-align: center;">$3x + 1$</td> </tr> <tr> <td rowspan="3" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x^2</td> <td style="text-align: center;">x</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>		$3x + 1$				}	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x	x	x	x	1
	x	x	x	1																																				
x^2	x^2	x^2	x^2	x^2																																				
x	x^2	x^2	x^2	x																																				
1	x	x	x	1																																				
	$3x + 1$																																							
}	x^2	x^2	x^2	x^2																																				
	x^2	x^2	x^2	x																																				
	x	x	x	1																																				

La base del rectángulo es $3x+1$ y la altura x^2+x+1 , luego el área es: $A = (3x+1)(x^2+x+1)$. Teniendo en cuenta que no es requisito saber operar polinomios, podemos conocer el área, es decir el producto de los polinomios, desarmando el rectángulo y sumando cada una de las áreas que lo conforman (reducción de términos semejantes):

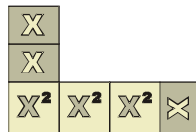
$$A = (3x+1)(x^2+x+1) = x^3 + x^3 + x^3 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x + x + x + x + 1 = 3x^2 + 4x^2 + 4x + 1$$

De esta forma, podemos ver que implícitamente al hallar el área del rectángulo, estamos multiplicando polinomios.

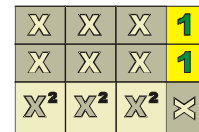
Ahora veamos cómo se calcula el producto de dos polinomios (problema inverso al anterior ejercicio), en este caso $(3x+1)(x+2)$, teniendo en cuenta que finalmente el método consiste en formar un rectángulo, tomamos un polinomio como base y el otro como altura, se construye la base con las regletas, teniendo en cuenta la regla de oro "Se deben siempre hacer coincidir dos lados contiguos de figuras vecinas", de la siguiente forma:



después se construye la altura, juntando rectángulos y buscando que sus lados contiguos coincidan con la longitud $(x+2)$ así:



Finalmente se completa el rectángulo sin olvidar la regla de oro, logrando la siguiente figura:



Ahora se dispone a contar las regletas; tenemos 3 regletas de x^2 , 7 de x y 2 unidades, es decir:

$$(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + 7x + 2$$

que fácilmente se comprueba con el criterio para multiplicar polinomios.

Ahora calcule los siguiente productos:

- $(x + 2)(x + 3)$
- $x(x + 3)$
- $(x + 1)(x + 5)$
- $(2x + 1)(x + 3)$
- $(2x + 3)^2$
- $(x + 3)^2$

Consideremos el caso con dos variables $(x$ e $y)$, hallemos el producto de los siguientes polinomios,

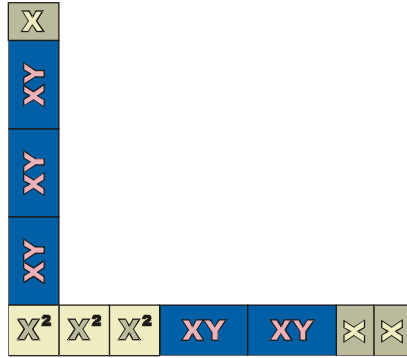
$$(3x + 2y + 2)(x + 3y + 1)$$

tomamos como base $(3x + 2y + 2)$ utilizando las siguientes regletas, 3 de x^2 , 3 de xy y 2 de x , de la siguiente forma,

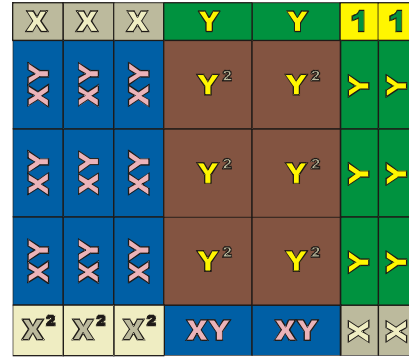


luego se construye la altura a partir de cualquier regleta de las que conforman la base armada, se sugiere empezar por alguno de los extremos, para así llevar una secuencia lógica.

En este caso se forma por el extremo izquierdo con las siguientes regletas, 3 de xy y 1 de x ,



Posteriormente completamos el rectángulo delimitado por la base y altura, quedando,



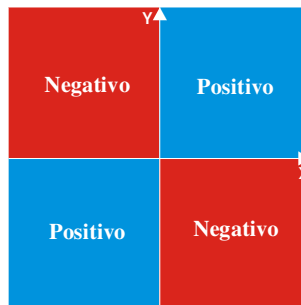
Pasando a contar las regletas: 3 de x^2 , 11 de xy , 5 de x , 8 de y , 6 de y^2 y 2 unidades, dando como resultado que

$$(3x + 2y + 2)(x + 3y + 1) = 3x^2 + 11xy + 5x + 8y + 6y^2 + 2$$

Calcular los siguientes productos:

- $(2x + y + 1)(2x + y)$
- $(x + 3y + 2)(x + 5)$
- $(x + 2y + 3)(2x + y + 1)$
- $(x + y + 1)^2$
- $(3x + 2)(2y + 5)$
- $(x + y)^2$
- $(3y + 4)(2x + y + 3)$
- $(2x + 2y + 1)^2$

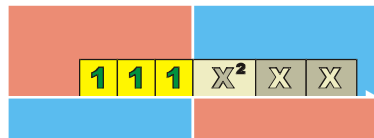
Si siguiendo por la línea de la multiplicación, procedemos a escoger algunos términos con coeficientes negativos. Ésto se trabaja con el plano cartesiano dado a conocer en el inicio del taller, donde se divide por cuadrantes, siendo el primero y el tercero positivos (color azul), y el segundo y el cuarto negativos (color rojo).



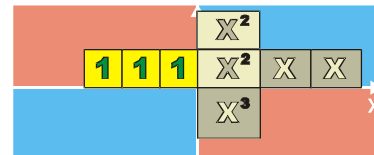
Ahora veremos cómo se halla el producto del siguiente polinomio: $(x^2 + 2x - 3)(2 - x)$, aquí también crearemos un rectángulo, aplicando el mismo método que en los ejemplos anteriores, pero en esta ocasión los ubicamos sobre el plano cartesiano, el primer polinomio (base), se sitúa en

el primer cuadrante, tomando como referencia el eje x y el punto de origen.

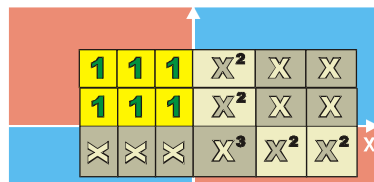
Utilizando las siguientes regletas, 1 de x^2 , 2 de x en el primer cuadrante, y 3 unidades en el segundo cuadrante, así:



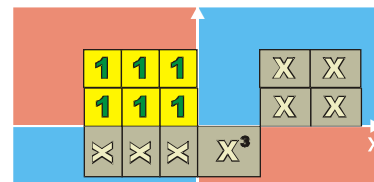
Procedemos a ubicar el segundo polinomio (altura), tomando como referencia el origen y el eje y , para tal finalidad utilizamos 1 regleta de x^2 y 1 de x^3 :



Aquí ya tenemos ubicadas las dimensiones del rectángulo y lo completamos de la siguiente forma:



Para facilitar la lectura (reducción de términos semejantes), se pueden retirar pares de fichas de idéntico valor ubicadas en cuadrantes de distinto color, aquí quitamos las regletas x^2 :



Fácilmente se puede comprobar efectuando el producto $(x^2 + 2x - 3)(2 - x) = -x^3 + 7x - 6$

Calcular los siguientes productos:

- $(x^2 + x - 1)(2x + 1)$
- $(2x^2 - x - 1)^2$
- $(x + 2y)(x - y)$
- $(x^3 + 1)(2x - 1)$
- $(2x^3 + x^2 - 2x - 3)(x - 1)$
- $(y - x)(x + y)$
- $(2x^2 + x + 1)^2$
- $(3 - 2x)(3x - 2)$

La elaboración de este taller se basó en el material didáctico "Caja de Polinomios", presentado por Libardo Jácome y Oscar Fernando Soto de la Universidad de Nariño

6.4 TALLER 4

REGLETAS DE FACTORIZACIÓN

El material incluye:

6 Cuadrados grandes azules



12 Rectángulos azules.



12 Rectángulos rojos.



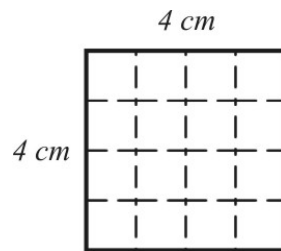
12 Cuadrados pequeños azules.



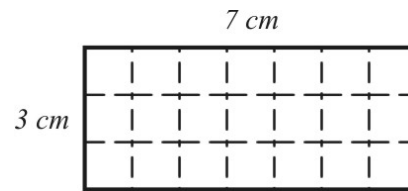
12 Cuadrados pequeños rojos.



Recuerde cómo calcular el área de los siguientes rectángulos:



A= _____




A= _____

• Deduzca el área de cada figura teniendo en cuenta que la regleta rectangular no cuadrada tiene como lado menor una unidad y lado mayor X unidades.

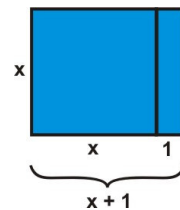
REGLETA	BASE	AL.TURA	ÁRFA
Cuadrado grande azul			
Cuadrado pequeño azul			
Cuadrado pequeño rojo			
Rectángulo azul			
Rectángulo rojo			

• Tome las regletas azules y forme rectángulos basándose en la regla de oro: "Se debe siempre hacer coincidir dos lados contiguos de figuras vecinas" y sin superponer regletas.

- Con cuadrados pequeños
- Con cuadrados grandes
- Con cuadrados y rectángulos

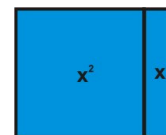
Supongamos que se quiere hallar el área del siguiente rectángulo , un método sería $(b \times a)$, el área será igual al producto de la base total por la altura total, dadas por las longitudes correspondientes de las regletas. Así,

$$\text{Área} = (x)(x+1) = x^2 + x$$



Otro método sería sumar cada una de las áreas de las regletas, que conforman el rectángulo:












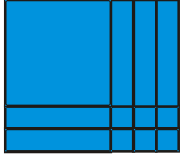
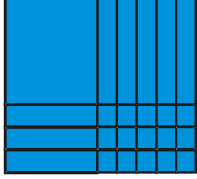
$$\text{Área} = x^2 + x$$



De las figuras que encontró en el punto anterior, halle su base, altura y área de la forma $b \times a$.

BASE	ALTURA	ÁREA

Expresé de las dos maneras mencionadas el área de los siguientes rectángulos.

 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____
 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____
 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____	 A= _____ A= _____		

● Según la actividad anterior. ¿Qué podemos decir de la representación de las áreas?

● Represente gráficamente las siguientes expresiones y escriba el área equivalente.

$$(x+3)(x+1)$$

$$(x+5)(x+1)$$

$$(x+3)^2$$

$$x(x+3)$$

$$x(3x+1)$$

$$(x+3)(2x+1)$$

$$(x+1)^2$$

● Con las regletas azules construya los rectángulos correspondiente a cada expresión y escriba su área.

$$x^2 + 2x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x^2 + 4x + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3x + 4x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3x^2 + 10x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$


$$x^2 + 7x + 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x^2 + 3x + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

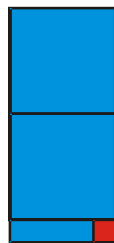
Teniendo en cuenta que las regletas azules representan áreas precedidas de signo positivo y las rojas representan áreas precedidas de signo negativo, y utilizando la siguiente regla: "Todo lo que quita (regletas rojas) debe estar sobre las regletas azules".

Hasta el momento las regletas azules representan áreas precedidas de signo positivo, ahora se introducen dos regletas rojas que representan áreas precedidas de signo negativo.

Supongamos que se quiere hallar el área de $(x-1)(2x+1)$, para esto se debe construir un rectángulo de base $(x-1)$ y altura $(2x+1)$, teniendo en cuenta la regla mencionada anteriormente ("Todo lo que quita (regletas rojas) debe estar sobre las regletas azules".)

Por ejemplo para construir la base $(x-1)$ se toma la regleta azul de área x y la regleta roja de área 1 

Ahora se construye la altura juntando rectángulos de tal manera que sus lados contiguos coincidan y su longitud sea $(2x+1)$ tomando dos regletas de área x^2 .



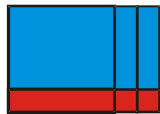
Finalmente completamos las dimensiones del rectángulo superponiendo dos regletas rojas de área x



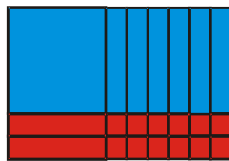
Luego se procede a contar las regletas teniendo en cuenta que una "regleta roja anula una regleta azul" siempre y cuando tengan la misma área (cancelamos la horizontal azul con una de las verticales rojas), luego de hacer eso, finalmente hay dos regletas de área x^2 , una regleta roja de área x y una regleta roja de área 1, es decir:

$$(x-1)(2x+1) = 2x^2 - x - 1$$

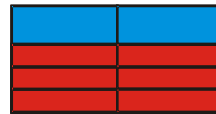
Basándose en el ejemplo anterior, encuentre de las dos maneras mencionadas el área de los siguientes rectángulos:



A= _____
A= _____



A= _____
A= _____



A= _____
A= _____



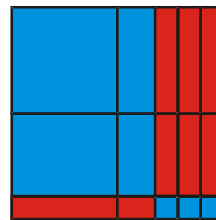
A= _____
A= _____



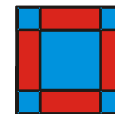
A= _____
A= _____



A= _____
A= _____



A= _____
A= _____



A= _____
A= _____

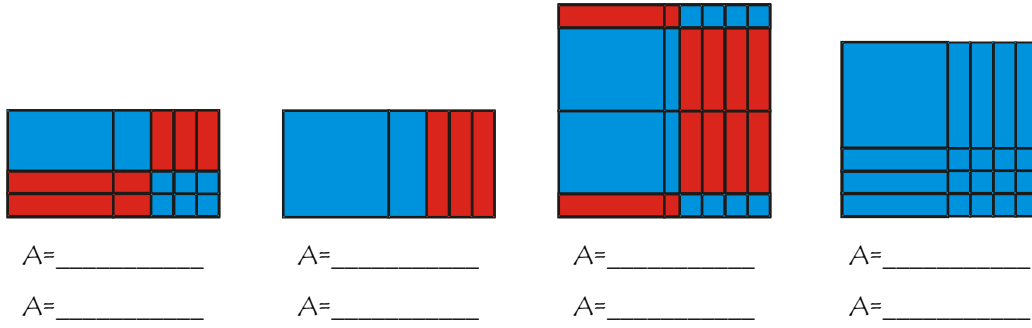
Basándose en lo anterior, resuelva las siguientes preguntas con ayuda de las regletas:

- ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x-2)$?
- ¿Cuál es el área del rectángulo de base $(x+3)$ y altura $(x-3)$?
- ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x-5)$?

Teniendo en cuenta que el lado menor del rectángulo puede tomar el valor de a . Halle el área de los siguientes rectángulos de acuerdo con cuenta los ejemplos:

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \Rightarrow A = xa = ax$$

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \Rightarrow A = a^2$$



● Según el ejercicio anterior, ¿A qué es igual $(x+a)^2$, $(x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$?

● Encuentre el producto equivalente:

$$x^2 + 8x + 7$$

$$(x-1)^2$$

$$4x^2 + 12x + 9$$

$$(x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$(x-1)(x-5)$$

$$x^2 - 6x + 5$$

$$(x+1)(x+7)$$

$$x^2 + 7x + 12$$

$$(x+3)(x+4)$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$(2x+3)(2x+3)$$

CONCLUSIONES

Aunque el pensamiento algebraico se va formando a medida que se avanza en la educación, se debe preparar a los estudiantes desde sus grados iniciales para disminuir la dificultad en la transición aritmética – álgebra.

A medida que se iba avanzando en el desarrollo de la prueba, implícitamente iba aumentando la complejidad en la interpretación de las letras, observando que los niveles más altos de respuestas acertadas corresponden a las primeras preguntas, notándose la mayor dificultad en los estudiantes cuando interpretan la letras como incógnitas específicas, generalización de números y variables, siendo este el más avanzado, ya que implican algunos de los criterios anteriores.

Debe hacerse buen énfasis en el uso y significado de las letras, porque aunque no es la única dificultad, es la que más conflictos causa, ya que el estudiante sólo trae como sistema de referencia el aritmético y no reconoce la generalización de la variable sino que la toma como algo particular.

Desafortunadamente, a parte del nivel bajo encontrado, se percibe que varias de las respuestas correctas fueron fruto del azar, puesto que aunque hayan elegido la respuesta correcta, carecen de sustentación, sin embargo se ha comprobado que algunas personas resuelven problemas manejando conceptos de forma correcta, sin tener la capacidad de expresar el proceso y menos de plasmarlo en el papel.

Las actividades aquí presentadas muestran aspectos pertinentes relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

La habilidad con que los educandos trabajen el álgebra marcará el éxito o fracaso en los niveles posteriores de educación matemática.

RECOMENDACIONES Y COMENTARIOS

Los talleres aquí propuestos, deben trabajarse conjuntamente con la generalización y la parte formal de cada uno de los temas.

Para utilizar los materiales sugeridos, se deben tener en cuenta:

- Los estudiantes deben tener una etapa de familiarización con el material antes de empezar cualquier actividad que conlleve a un aprendizaje.
- En el desarrollo de los talleres no es requisito tener conocimiento en operaciones con polinomios, reducción de términos semejantes, productos notables y factorización, sin embargo para un mejor desempeño, se recomienda aplicarlos simultáneamente al exponer dichos temas.
- Inicialmente se deben proponer ejercicios con solución definida y más tarde proponer ejercicios que lleven a la generalización, esto con la finalidad de que el estudiante no dependa del material para continuar con el aprendizaje.
- Las regletas no se trabajan para ampliar la idea de variabilidad del álgebra si no para manejar la parte operativa simbólica.
- Se debe tener en cuenta que no todos los polinomios con coeficientes enteros positivos son factorizables con el material, ya que pueden tener raíces no enteras y aún raíces complejas.
- El uso de este material depende de la necesidad y creatividad del docente, pues la gama de posibilidades es mayor a la que abordamos en estos talleres.

El maestro deberá formular otras actividades y motivar a los estudiantes para que ellos mismos presenten situaciones parecidas a las ya descritas o aporten cambios a las formuladas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] GRUPO PRETEXTO. La transición Aritmética-Álgebra. Proyectos curriculares: Posgrado en la Educación Matemática y Licenciatura en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas y COLCIENCIAS. Santa Fe de Bogotá. (1997)

[2] SOCAS, M. et. al. Iniciación al Álgebra. Madrid: Síntesis. (1996)

[3] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Lineamientos Curriculares. (1998).

[4] JÁCOME, L. SOTO O. Cartilla del material Didáctico “Caja de Polinomios”. Universidad de Nariño. (2000).]

BIBLIOGRAFÍA

CASAS, Esperanza. Juegos Matemáticos, La Magia del Ingenio. (1198).

GRUPO PRETEXTO. La transición Aritmética-Álgebra. Proyectos curriculares: Posgrado en la Educación Matemática y Licenciatura en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas y COLCIENCIAS. Santa Fe de Bogotá. (1997).

JÁCOME, L. SOTO O. Cartilla del material Didáctico “Caja de Polinomios”. Universidad de Nariño. (2000).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Lineamientos Curriculares. (1998).

SANTOS, Luz Manuel. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. (1997).

SOCAS, M. et. al. Iniciación al Álgebra. Madrid: Síntesis. (1996).

ZULUAGA, CARLOS. Laboratorio de Matemáticas “Colombia Aprendiendo”. Santa Fe de Bogotá.

ANEXOS

ANEXO A – PRUEBA PRELIMINAR



PRUEBA DIAGNÓSTICA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRADO 8º
Noviembre de 2002

Anexo a este cuadernillo encontrará, una hoja de respuestas y una para operaciones.

Observación: Contesta cada pregunta en la HOJA DE RESPUESTAS marcando con una X la respuesta correcta, según el análisis efectuado a la situación planteada.

El tiempo estipulado para el desarrollo de las preguntas es de 90 minutos.

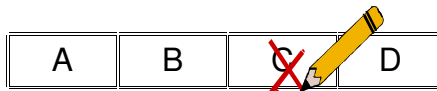
EJEMPLO

1. A la recreovía asisten niños en bicicleta o en triciclo. A determinada hora hay entre triciclos y bicicletas 91 y se contaron 220 llantas.

Las ecuaciones que permiten determinar el número de triciclos son

- a) $x + y = 91$ $3x + 2y = 220$
- b) $x + y = 91$ $3x - 2y = 220$
- c) $x - y = 91$ $3x + 2y = 220$
- d) $x - y = 91$ $3x - 2y = 220$

La respuesta correcta es la identificada con la letra a; por lo tanto, así es como deberías registrarla en tu HOJA DE RESPUESTAS.



“Todos los recursos que necesitamos están en nuestra mente”

Theodore Roosevelt



PRUEBA DIAGNÓSTICA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRADO 8º
Noviembre de 2002

HOJA DE RESPUESTAS

NOMBRES _____ APELLIDOS _____
EDAD _____ SEXO _____ FECHA _____

1. a b c d	11. a b c d
2. a b c d	12. a b c d
3. a b c d	13. a b c d
4. a b c d	14. a b c d
5. a b c d	15. a b c d
6. a b c d	16. a b c d
7. a b c d	17. a b c d
8. a b c d	18. a b c d
9. a b c d	19. a b c d
10. a b c d	

1. El colegio tiene entre balones de baloncesto y voleibol 24, si el número de balones de baloncesto es el quíntuple del número de balones de voleibol. ¿Cuántos balones hay en cada deporte?

- a. 8 de voleibol y 16 de baloncesto
- b. 9 de voleibol y 15 de baloncesto
- c. 4 de voleibol y 20 de baloncesto
- d. 20 de voleibol y 4 de baloncesto

2. El resultado de reducir la fracción $\frac{1+\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1+x}}$

- a. $\frac{1+x}{1-x}$
- b. $\frac{1-x}{1+x}$
- c. $\frac{1+2x}{1-2x}$
- d. 1

3. La suma de las raíces de una ecuación cuadrática es y su producto , la ecuación es:

- a. $x^2+5x+4=0$
- b. $x^2+3x-4=0$
- c. $x^2-3x+4=0$
- d. $x^2-4x+3=0$
- e. $x^2-4x+3=0$

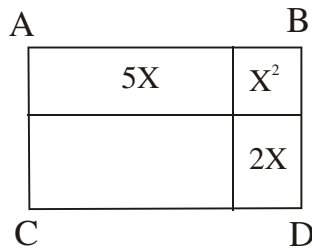
4. El producto de las fracciones algebraicas $\frac{(x^2+2x-15)}{(x^2-9x+18)} \times \frac{(x^2-2x-24)}{(x^2-2x-35)}$ es:

- a. $\frac{x-3}{x-7}$
- b. $\frac{x+5}{x-6}$
- c. $\frac{x+4}{x+5}$
- d. $\frac{x+4}{x-7}$

5. La ecuación $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$, siempre tiene como solución dos números reales y diferentes cuando:

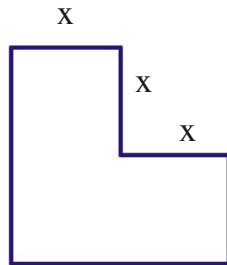
- a. $b^2-4ac > 0$
- b. $b^2-4ac < 0$
- c. $b^2 < 4ac$
- d. $b^2-4ac = 0$

6. Si las áreas de los rectángulos pequeños son $5x, x^2$ y $2x$, entonces la expresión algebraica que representa el área total del rectángulo ABCD es:



- a. $8x+10$
- b. $x^2+5x+10$
- c. $x^2+7x+10$
- d. $x^2-5x+10$

7. Un terreno consta de un cuadrado y de un rectángulo como se muestra en la figura. Es correcto afirmar que la ecuación



- a. x^2+xy representa el perímetro
- b. $3x+2y$ representa el volumen de la figura
- c. $5x+2y$ representa el perímetro de la figura
- d. x^2+xy representa el área del terreno

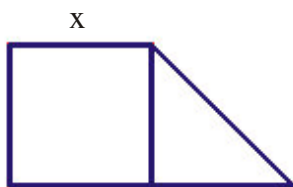
8. La expresión algebraica, $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$ es equivalente a la expresión:

- a. $x-y$
- b. $x+y$
- c. $\sqrt{x-y}$
- d. $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$

9. Si $\frac{x \times x \times x}{x + x + x} = 3$, entonces el valor de x que satisface la ecuación es:

- a. $\frac{1}{3}$
- b. 3
- c. 9
- d. 1

10. El área de la figura es de 24 cms^2 , si el triángulo es isósceles y el cuadrado tiene de lado x . El valor de x es:

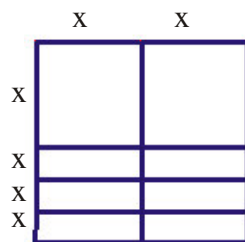


- a. 6 cm
- b. 5 cm
- c. 4 cm
- d. 3 cm

11. La suma de dos números es 60, y si el mayor se divide por el menor el cociente es 2 y el residuo es 9, los números son:

- a. 45 y 15
- b. 35 y 25
- c. 47 y 13
- d. 43 y 17

12. La fórmula asociada al área de la siguiente figura es:

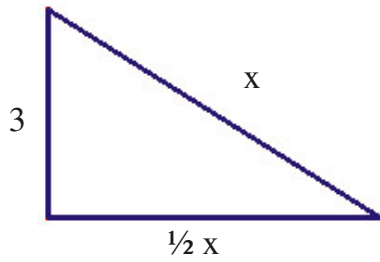


- a. $2x^2$
- b. $2x^2 - 3x$
- c. $2x^2 + 3$
- d. $2x^2 + 6x$

13. La expresión $4x^2 - 8x - 21$ tiene como factores:

- a. $(2x+7)(2x+3)$
- b. $(2x-7)(2x-3)$
- c. $(2x-7)(2x+3)$
- d. $(2x+7)(2x-3)$

14. En la siguiente figura el valor de x es:

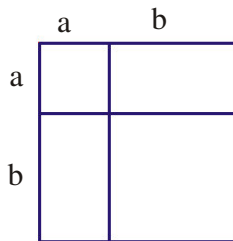


- a. $\sqrt{3}$
- b. $2\sqrt{3}$
- c. $\frac{3}{2}$
- d. 12

15. La suma de un número con su cuadrado es 30. ¿Qué números satisfacen esta condición?

- a. 5 y -7
- b. -6 y 7
- c. 6 y 5
- d. 5 y -6

16. El cuadrado de la suma de dos cantidades puede representarse gráficamente cuando los valores son positivos. Si se tiene la siguiente figura, ¿cuál de las siguientes expresiones la representa?

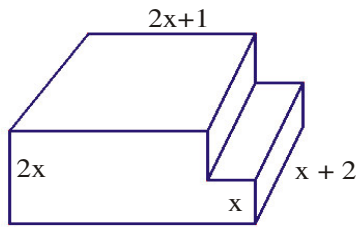


- a. $a^2 \times b^2$
- b. $2(a \times b)$
- c. $a^2 + ab + b^2$
- d. $a^2 + 2ab + b^2$

17. Alex le regala \$3000 a Diego para que los dos queden con igual cantidad de dinero, pero Diego no lo acepta y decide regalarle \$3000 a Alex para que éste tenga cinco veces lo que él tiene, pero Alex no lo acepta. Las ecuaciones correctas que representan las condiciones del enunciado son:

- a. $x + 3000 = 5(y + 3000)$
 $x - 3000 = y + 3000$
- b. $x - y = 3000$
 $x - 5y = -3000$
- c. $x + 3000 = y - 3000$
 $x - 3000 = y + 3000$
- d. $x - 5y = 18000$
 $y - x = 6000$

18. El polinomio que expresa el volumen de la figura es:



- a. $x(2x+1) \times (x+2) + (3x+1) \times (x+2) x$
- b. $2x(2x+1) \times (x+2) + x(x+2) x$
- c. $(2x+1) \times (3x+1) x + x(x+2) x$
- d. $(3x+1)2x \times x + (2x+1) \times (x+2)$

19. En el parque de los niños, entre hombres, mujeres y niños hay 70 personas. ¿Cuántas mujeres hay si el doble de niños es igual al triple de hombres y la suma de hombres y niños es igual al número de mujeres?

- a. 14
- b. 35
- c. 21
- d. 41

ANEXO B – PRUEBA DEFINITIVA



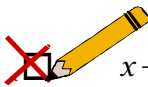
PRUEBA DIAGNÓSTICA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER GRADO 8º noviembre de 2003

Observación: Conteste cada pregunta en cada uno de los numerales, marcando con una **X** dentro del cuadro la respuesta correcta, según el análisis efectuado a la situación planteada.

El tiempo estipulado para el desarrollo de las preguntas es de 60 minutos.

EJEMPLO

1. A la recreovía asisten niños en bicicleta o en triciclo. A determinada hora hay entre triciclos y bicicletas 91 y se contaron 220 llantas.
Las ecuaciones que permiten determinar el número de triciclos son

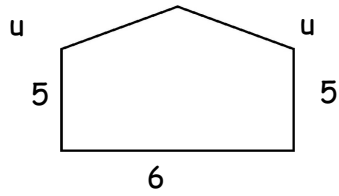
- a.  $x + y = 91$ $3x + 2y = 220$
- b. $x + y = 91$ $3x - 2y = 220$
- c. $x - y = 91$ $3x + 2y = 220$
- d. $x - y = 91$ $3x - 2y = 220$

La respuesta correcta es la identificada con la letra a; por lo tanto, así es como deberías registrarla en el numeral.

“Todos los recursos que necesitamos están en nuestra mente”
Theodore Roosevelt

1. Si $a + \frac{3}{4} = 5$, ¿Cuál es el valor de a ?
- a. $\frac{2}{4}$
 - b. $\frac{2}{1}$
 - c. $\frac{17}{4}$
 - d. 17
2. ¿Cuál es el valor de $15 \cdot a + 7$, cuando $a=1$, $a=2$, $a=3$?
- a. 111
 - b. 22, 37, 52
 - c. 158, 159, 160
 - d. 22
3. Si $n - 245 = 752$, $n - 248 = ?$
- a. 997
 - b. 755
 - c. 749
 - d. 507
4. Si $a + b = 8$, entonces $a + b + c = ?$
- a. 15
 - b. $8 + c$
 - c. 21
 - d. 16
5. Al Simplificar $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - y$ nos da como resultado
- a. $8x$
 - b. $6x + 2y$
 - c. $6x + 4y$
 - d. $8x - 3y$

6. El perímetro de la siguiente figura es:



- a. $16+2u$
- b. 22
- c. $16\cdot 2u$
- d. $11+u$

7. ¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?

- a. $7n$
- b. 7
- c. $3n+4$
- d. $12n$

8. Calcule el área del siguiente rectángulo.



- a. $e+2+5$
- b. $5(e+2)$
- c. $10e$
- d. $5e+2$

9. ¿Para qué valores de x en el conjunto $\{0,1,\dots,9\}$ se verifica $3x+1 \leq 19$?

- a. 0,1,2,3,4,5
- b. 5
- c. 1,2,3,4,5
- d. 6

10. ¿Qué valores toma c si $c+d=10$ y c es inferior a d ?

- 0,1,2,3,4
- 0,1,2,3,4,5
- 1,2,3,4,5
- Ninguna de las anteriores

11. Los lápices azules cuestan \$500 cada uno y los lápices rojos \$600 cada uno. Compro algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan \$4300.

Si a es el número de lápices azules y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedo escribir acerca de a y r ?

- a. $500a+600r=4300$
- b. $500r+600a=4300$
- c. $1100ar=4300$
- d. $1100a+r=4300$

12. ¿Quién es más largo $2n$ o $2+n$? Explíquelo.

- a. $2n$
- b. Iguales
- c. $2+n$
- d. Ninguna de las anteriores