ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO ALEATORIO Y LA COMPETENCIA RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE 4º y 5º PRIMARIA: UN ACERCAMIENTO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS.

HENRY FLÓREZ CALDERÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO ALEATORIO Y LA COMPETENCIA RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE 4º Y 5º PRIMARIA: UN ACERCAMIENTO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS.

HENRY FLÓREZ CALDERÓN

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGISTER EN PEDAGOGÍA

DIRECTOR
FERNANDO DURÁN FLÓREZ
MAGÍSTER EN FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION 15
1. CONTEXTUALIZACION DEL PROBLEMA...18
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. 27
2. JUSTIFICACIÓN 40
3. OBJETIVO GENERAL 46
3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS. 46
4. MARCO TEORICO 47
4.1 ANTECEDENTES INTERNACIONALES. 47
4.2 ANTECEDENTES NACIONALES. 55
4.3 ANTECEDENTES LOCALES 60
4.4 FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL...62
4.4.1 La alfabetización probabilística: conexiones entre lenguaje cotidiano y especializado. 62
4.4.2 Noción de aleatoriedad 65
4.4.3 La idea de probabilidad y relaciones en el ámbito escolar. 68
4.4.4 Aproximación al razonamiento probabilístico. 75
4.4.5 Heurísticos y Sesgos en el razonamiento probabilístico. 76
4.4.6 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) Gay Brousseau.............................83
4.4.7 Competencia matemática: el razonamiento y la argumentación. 92
4.4.8 El pensamiento aleatorio y la competencia razonamiento. 94
4.4.9 El pensamiento aleatorio en la enseñanza de primaria 97
4.4.10 Algunos tópicos sobre aleatoriedad y probabilidad. 99
5. REFERENTE LEGAL..102
6. METODOLOGIA 105
6.1 EL ENFOQUE. 105
6.2 DISEÑO METODOLÓGICO...106
6.3 FASES DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN. 109

6.3.1 Fase uno: Identificación y formulación del problema: diagnóstico y reflexión. 110
6.3.2 Fase dos: Diseño e implementación de la estrategia didáctica...................111
6.3.3 Fase tres: Reflexionar críticamente sobre lo que sucedió...........................112
6.4 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN. 115
6.4.1 Técnicas de recolección:...115
6.4.2 Instrumentos de registro de información 122
6.5 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES. 124
6.5.1 Estructura y entorno educativo 124
6.5.2 Ámbito social...125
6.5.3 Ámbito familiar y económico. 125
6.5.4 Ámbito educativo 126
6.5.5 Escenario y participantes. 127
6.5.6 Criterio para la selección de participantes 128
6.5.7 Validez interna de los resultados. 128
6.5.8 Principios éticos. 129
7. ANÁLISIS DE RESULTADOS...130
7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS: ACTIVIDAD DE CARACTERIZACIÓN. 131
7.1.1 Situación 1: “botones seguros”. 132
7.1.2 Situación 2: “amigos al azar”...137
7.1.3 Situación 3: “ruletas”. 141
7.1.4 Situación 4: “urnas y balotas”..144
7.1.5 Situación 5: “la apuesta de Pedro Julio”. 146
7.1.6 Situación 6: “caras y sellos”. 149
7.1.7 Situación 7: “balotas blancas y negras”. 152
7.1.8 Situación 8: “la apuesta del dado”..155
7.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS: PROPUESTA DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA. 158
7.2.1 Planeación general de la Unidad Didáctica...160
7.2.2 Planeación de la sesión N° 1. 162

7.2.3 Análisis de la sesión N° 1. 170
7.2.4 Planeación de la sesión N° 2 175
7.2.5 Análisis de la sesión N° 2 182
7.2.6 Planeación de la sesión N° 3. 186
7.2.7 Análisis de la sesión N° 3 194
7.2.8 Planeación de la sesión número 4. 201
7.2.9 Análisis de la sesión N° 4. 210
7.2.10 Planeación de la sesión N° 5 215
7.2.11 Análisis de la sesión N° 5..227
7.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS: PRUEBA PEDAGÓGICA DE CIERRE. 233
7.3.1 Experiencia aleatoria 1..234
7.3.2 Experiencia aleatoria 2..237
7.3.3 Experiencia aleatoria 3..241
7.3.4 Experiencia aleatoria 4..243
7.3.5 Experiencia aleatoria 5..246
7.3.6 Experiencia aleatoria 6..249
7.3.7 Experiencia aleatoria 7..252
7.3.8 Experiencia aleatoria 8..255
7.4 CONTRASTE ENTRE LA PRUEBA PEDAGÓGICA DE CIERRE Y LA PRUEBA DIAGNÓSTICA. 258
8. CONCLUSIONES 281
9. RECOMENDACIONES...286
BIBLIOGRAFÍA...289
ANEXOS..293

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Puntajes y porcentajes de estudiantes colombianos. Prueba PISA. 21
Tabla 2. Competencias y componentes evaluados en matemática 3º (fortalezas y debilidades) 30
Tabla 3. Competencias y componentes evaluados en matemática 5º (fortalezas y debilidades) 30
Tabla 4. Matriz de referencia. Competencias evaluadas prueba Saber matemáticas 3º. 32
Tabla 5. Matriz de referencia. Competencias evaluadas prueba Saber matemáticas 5º. 33
Tabla 6. Matriz de referencia: aprendizajes y evidencias en matemática 3º y 5º. 35
Tabla 7. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad. 74
Tabla 8. Objetos específicos de evaluación del pensamiento aleatorio en 5° grado. 101
Tabla 9. Ventajas y limitaciones del grupo focal. 120
Tabla 10. Correlación entre técnicas e instrumentos proceso de recolección de información. 123
Tabla 11. Respuestas situación 1 “botones seguros” 134
Tabla 12. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 134
Tabla 13. Respuestas Situación 2: “amigos al azar”. 139
Tabla 14. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 139
Tabla 15. Respuestas Situación 3: “ruletas”. 142
Tabla 16. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 143
Tabla 17. Respuestas Situación 4: “urnas y balotas”. 145
Tabla 18. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 146
Tabla 19. Respuestas Situación 5: “la apuesta de Pedro Julio”. 148
Tabla 20. Respuestas Situación 6: “caras y sellos”. 150
Tabla 21. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 151

Tabla 22. Respuestas Situación 7: “balotas blancas y negras”. 153
Tabla 23. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 154
Tabla 24. Respuestas Situación 8: “la apuesta del dado”. 157
Tabla 25. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 157
Tabla 26. Planeación general de la unidad didáctica. 160
Tabla 27. Planeación sesión de clase N°1 162
Tabla 28. Análisis sesión de clase N°1. 170
Tabla 29. Planeación sesión de clase N°2 175
Tabla 30. Análisis sesión de clase N°2 182
Tabla 31. Planeación sesión de clase N°3 186
Tabla 32. Análisis sesión de clase N°3 194
Tabla 33. Planeación sesión de clase N°4 201
Tabla 34. Análisis sesión de clase N°4 210
Tabla 35. Planeación sesión de clase N°5 215
Tabla 36. Análisis sesión de clase N°5 227
Tabla 37. Respuesta: experiencia aleatoria 1. 234
Tabla 38. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 235
Tabla 39. Respuestas experiencia aleatoria 2. 238
Tabla 40. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 239
Tabla 41. Respuestas experiencia aleatoria 3. 241
Tabla 42. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 242
Tabla 43. Respuestas: experiencia aleatoria 4. 244
Tabla 44. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 244
Tabla 45. Respuesta: experiencia aleatoria 5 247
Tabla 46. Respuesta: experiencia aleatoria 6 250
Tabla 47. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 250
Tabla 48. Respuesta: experiencia aleatoria 7 253
Tabla 49. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 253
Tabla 50. Respuesta: experiencia aleatoria 7 255
Tabla 51. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos. 256

LISTA DE GRÁFICOS

Grafico 1. Porcentaje de estudiantes ICFES, saber 11 (2006-2013) 23
Grafico 2. Porcentaje de estudiantes ICFES, Saber 3º, 5º y 9º matemáticas. 24
Grafico 3. Puntaje prueba Saber 5° matemáticas (2009 – 2014) 25
Grafico 4. Porcentajes históricos, niveles de desempeño en matemáticas 3º. 28
Grafico 5. Porcentajes históricos, niveles de desempeño en matemáticas 5º. 29
Grafico 6. Comparación de probabilidades. Situación 2. 260
Grafico 7. Comparación de probabilidades. Situación 3. 262
Grafico 8. Comparación de probabilidades, situación 4 264
Grafico 9. Percepción de independencia de sucesos, situación 6 268
Grafico 10. Estimación frecuencial de la probabilidad, situación 7 270

LISTA DE IMÁGENES

Imagen 1. Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica.	90
Imagen 2. Ruleta: valores equiprobables.	95
Imagen 3. Urnas con fichas de colores.	96
Imagen 4. Espiral de autorreflexión de la Investigacion-accion.	108
Imagen 5. Espiral de autorreflexión de la Investigacion-accion.	109
Imagen 6. Momentos propuestos según el enfoque metodológico.	114
Imagen 7. Modelo de secuenciación de contenidos en unidad didáctica.	119
Imagen 8. Discos aleatorios	141
Imagen 9. Urnas y balotas	144
Imagen 10. Arreglos en diagramas de árbol.	224
Imagen 11. Diagrama de árbol combinaciones producto 1.	225
Imagen 12. Diagrama de árbol combinaciones producto 2.	226
Imagen 13. Urna con botones	234
Imagen 14. Ruletas y superficies	241
Imagen 15. Discos y premios	252
Imagen 16. Dados ganadores	255

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Instrumento Diagnóstico. 293
Anexo 2. Unidad didáctica 297
Anexo 3. Prueba pedagógica de cierre. 307
Anexo 4. Consentimiento informado. 310
Anexo 5. Instrumento Diario de campo. 311

RESUMEN

TITULO: ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO ALEATORIO Y LA COMPETENCIA RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE 4º y 5º PRIMARIA: UN ACERCAMIENTO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS[*]

AUTOR: HENRY FLÓREZ CALDERÓN[**]

PALABRAS CLAVES: Alfabetización probabilística, aprendizaje, enseñanza, estrategia didáctica, lenguaje probabilístico, situación aleatoria

DESCRIPCION:

En la vida, las personas están expuestas a interactuar con situaciones que implican la interpretación o generación de mensajes probabilísticos y que afectan las decisiones bajo la incertidumbre. De ahí que, es fundamental iniciar un proceso de alfabetización probabilística desde tempranas edades, de una forma gradual y progresiva hasta lograr consolidar mejores aprendizajes en cada etapa escolar. Esta investigación tiene como objetivo principal, implementar una estrategia didáctica que implique movilizar, en los estudiantes de 4º y 5º de primaria, los conocimientos previos necesarios para consolidar su lenguaje cotidiano con el especializado y para que éste se constituya en el instrumento que permita "desarrollar los conocimientos, capacidades y actitudes necesarias para desenvolverse adecuada y críticamente en situaciones de incertidumbre"[1]. Ésta tarea se convierte en la oportunidad para que los estudiantes construyan aprendizajes genuinos y significativos a partir de sus experiencias cotidianas.

Desde esta lógica, la investigación se estructura tomando como base la metodología cualitativa, bajo un enfoque de investigación - acción, con un diseño metodológico que propone abordar la situación problémica caracterizando los presaberes asociados al concepto de probabilidad simple, para después realizar la intervención en el aula mediada por la unidad didáctica, cerrando con una prueba de contraste para conocer los avances en el proceso de alfabetización. Los resultados muestran que hay mayor claridad en los estudiantes a la hora de hacer uso de la intuición, demostrando una mejora significativa de las nociones y presaberes probabilísticos, pues es notorio el uso adecuado de expresiones y de términos para cuantificar la incerteza o para describir estrategias de solución a la situación aleatoria propuesta.

---

[*]Trabajo de grado

[**]Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Director: Ferndndo Durán Flórez, Magíster en Física

[1] VASQUEZ, Claudia. ALSINA, Ángel. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. p. 2. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291250692022.pdf

ABSTRACT

TITLE: DIDACTIC STRATEGY IN ORDER TO ENHANCE RANDOM THOUGH AND THE REASONING SKILL ON STUDENTS FROM 4º AND 5º ON PRIMARY SCHOOL: A CLOSER LOOK FROM THE DIDACTIC SITUATIAONS THEORY[*]

AUTHOR: HENRY FLOREZ CALDERÓN[**]

KEY WORDS: Literacy probabilistic, learning, teaching, didactic strategy, probabilistic language, random satiation.

DESCRIPTION:

In life, people are exposed to interact with situations that involves construe and generation of probabilistic messages that affect their decisions under the uncertainty. Instead, it is fundamental to start a probabilistic literacy process from young ages, in a gradual and progressive way until we can reach better apprentices in each scholar stage. This investigation has as its main goal to implement a didactic strategy who implies mobilizes students in students from 4° and 5° grade in primary school, the necessary previous knowledge in order to consolidated their daily language with an specialized one, so this can be the instrument that allow "develop the knowledge capacities and attitudes need it to critically and adequately uninvolved on uncertainty situations"[2]. Therefore this task becomes an opportunity for the apprentices to build significant and valuable knowledge from their daily experiences.

From this logic, the investigation is structured taking as a base the qualitative methodology, under an investigation-action approach, with a methodological design that propose to tackle the problematic situation by characterizing the previous knowledge associated to the simple provability concept, thus we can make the intervention in a didactic unit classroom. Closing with a contrast test, to know the advances in the literacy process. The result shows that there is more brightness in apprentices when they are using their intuition, proving a significant enhance in their notions and probabilistic previous knowledge. Besides it is notable the adequate use of expressions and terms to quantify uncertainty, or to describe solution strategies to a random answer situation.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Faculty of Human Sciences. School of Education. Master in Pedagogy. Director: Fernando Durán Flórez, Magíster en Física

[2] VASQUEZ, Claudia. ALSINA, Ángel. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. p. 2. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291250692022.pdf

INTRODUCCION

En un principio, en ésta investigación se describe el recorrido propuesto para hacer la contextualización del problema de investigación. Es decir, el ejercicio preliminar se focalizó en la revisión de los documentos que el ICFES construye para dar a conocer los resultados de las pruebas externas aplicadas a los grados de 3°, 5°, 9° y 11°. Además, ésta revisión documental buscó establecer conexiones y regularidades que emergen de cada aplicación de la prueba. Este ejercicio también implicó revisar los resultados que obtienen los estudiantes colombianos en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés). De lo anterior, se logró identificar el nivel de desempeño que alcanzan los estudiantes del país en relación a las competencias evaluadas y también se pudo verificar lo que ocurre con los aprendizajes en el área de matemáticas, grado 3° y 5° de primaria.

Una vez se cuenta con un panorama general de los aprendizajes evaluados por las prueba externas en el área de matemáticas, entonces la acción se focalizó en identificar los aprendizajes que merecen especial énfasis para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento, igualmente en reconocer la competencia que menor nivel de desempeño muestra y también el pensamiento matemático donde se da el mayor porcentaje de respuesta incorrectas, en cuanto al grado 5°. En este sentido, en el análisis a los resultados que ofrecen las pruebas externas se concluye que los estudiantes evaluados presentan dificultades para dar solución a situaciones donde se valoran conocimientos que implican un saber de tipo probabilístico. Por consiguiente, hay necesidad de verificar las nociones que tienen los estudiantes en relación al concepto de probabilidad y para ello, se presenta a la clase un cuestionario que busca mediante la solución de ocho experiencias aleatorias, reconocer los heurísticos y sesgo que se manifiestan al hacer razonamientos en contextos de incertidumbre. De igual modo, se pretende con éste cuestionario conocer el significado de la probabilidad que se conecta con las expresiones o el lenguaje empleado por los estudiantes a la hora de dar tratamiento y solución a los experimentos planteados.

La caracterización de las dificultades de aprendizajes en los estudiantes de primaria permitió sumar elementos nuevos a los ya encontrados en los resultados de las pruebas externas. Con esta nueva información, se formula la pregunta problémica la cual pretende, indagar por las tareas y estrategias necesarias o pertinentes para lograr movilizar en los estudiantes los conocimientos asociados al razonamiento y la alfabetización probabilística.

Ante lo ya expuesto, el siguiente momento de esta investigación plantea la construcción de una secuencia de enseñanza, en la que se busca movilizar los aprendizajes de los estudiantes en relación al concepto de probabilidad simple. Por ende, hay que señalar que la propuesta se sustenta en lo que propone la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, lo cual se asume como metodología de trabajo para posibilitar la construcción del conocimiento en el estudiante.

En cuanto a la metodología adoptada en este estudio, se resalta que la misma exige que el estudiante coloque en escena su saber previo y como tal se involucre en la solución de la situación a-didáctica presentada por el docente. Para ello, el estudiante debe interactuar con el problema y poner en juego las estrategias que se acoplen a su solución. Es decir, desde ésta metodología se demanda que el estudiante a partir de las estrategias adoptadas como válidas, pueda explicar a su par o al grupo de la clase, el porqué de su solución y de ante mano haga uso de sus razonamientos y del lenguaje pertinente para que sus interlocutores validen su estrategia, presenten contraejemplos o simplemente pidan que se realicen ejemplificaciones.

Retomando lo ya expuesto sobre la secuencia de enseñanza hay que señalar que este ejercicio implicó la construcción de una unidad didáctica denominada: *El cultivo* *de cacao: Una oportunidad para la enseñanza de la probabilidad.* Con el desarrollo de esta unidad de aprendizaje se pretende alcanzar una mayor apropiación del lenguaje asociado a los fenómenos de incertidumbre y por consiguiente focalizar un trabajo más concienzudo que conlleve a desarrollar en el estudiante las habilidades que le permitan alcanzar un mayor nivel de competencia y de paso enriquecer su alfabetización en el campo de la probabilidad.

En cuanto al cierre de la intervención en el aula, se contempló que los estudiantes presenten una prueba de opción múltiple unica respuesta. La actividad consiste en dar solución a ocho situaciones de tipo aleatorio y en las que se pide que en cada respuesta se dé un argumento o explicación que justifique su elección. La actividad pedagógica de cierre, genera información de interés, que a la hora de establecer un enlace o un contraste entre los hallazgos determinados en el diagnóstico previo y los avances dados durante la intervención en el aula permite llegar a las conclusiones de este estudio.

El proceso agotado en el momento anterior conlleva a contrastar las ideas expuestas en los referentes teóricos con aquellas que emergen del proceso de intervención. También, en éste proceso de análisis, los hallazgos nos conducen a la elaboración de conclusiones sobre el impacto o no de la estrategia y por consiguiente la presentación de recomendaciones para estudios a posteriori.

1. CONTEXTUALIZACION DEL PROBLEMA.

Es pertinente afirmar que la educación como elemento sustanciador en el proceso formativo de las personas conlleva, entre otras funciones, a desarrollar un proyecto de vida personal, social y profesional en el individuo, del cual se espera, otorgue mayores posibilidades de éxito y de satisfacción al sujeto; sin embargo, al hacer un ejercicio de caracterización sobre el tipo de educación que reciben los individuos en nuestro país, ya sea en el ámbito familiar, social o escolar; seguramente, se encuentre que a nivel de la sociedad o de su unidad básica, la formación que se ofrece contiene vacíos y presenta un panorama desesperanzador; nada diferente ocurre con las expectativas que se tienen de la formación que ofrece la escuela; por ejemplo, la enseñanza en muchos casos no responde a las exigencias del mundo actual, son escazas las experiencias que se desarrollan a partir de situaciones significativas para llegar a aprendizajes duraderos, en el aula pocas veces los estudiantes tienen oportunidad de exponer o sustentar sus ideas; es decir, las prácticas de aula hoy en día en su mayoría son obsoletas y los métodos de enseñanza están en desuso o no responden a las demandas cognitivas de las estudiantes; esto ocurre porque aun predominan las clases donde el docente trasmite el conocimiento al niño o donde se transcribe del texto al cuaderno, lo anterior solo por dar algunos ejemplos que la cotidianidad escolar refleja.

Como bien se señala, es evidente que la enseñanza vista como la práctica del docente, es hoy en día motivo de análisis y de evaluación. Y es que la crisis en el sistema educativo conduce a reflexionar sobre factores y procesos que profundizan esta situación. Por ejemplo, la enseñanza se enriquece cuando esta correlacionada con el conocimiento didáctico disciplinar o cuando ésta se apoya en una metodología para responder a las particularidades de los estudiantes o cuando se complementa con herramientas y recursos pedagógicos que hoy en día son necesarias para desarrollar una práctica de aula efectiva.

Ante los anteriores elementos expuestos, se espera, en particular del proceso de enseñanza que éste propenda porque el estudiante desarrolle habilidades y competencias para asumir los desafíos que hoy propone la sociedad del conocimiento, los retos de un mundo globalizado o para enfrentar las situaciones que le presenta el mismo contexto local, lo cual se interpreta como el ejercicio de ofrecer una propuesta de enseñanza contextualizada y pertinente.

Se pretende entonces, que la propuesta de enseñanza se enlace con las nuevas tecnologías de la información y comunicación y desde este escenario se concrete como producto de una reflexión, que no solo ocurran con el docente sino que a ella se vincule la familia y la misma sociedad en función de responder a los retos que enfrentan los niños y jóvenes en un contexto caracterizado por la innovación, el progreso científico, el cambio climático y en particular por los retos para lograr una convivencia pacífica y armónica.

En este sentido, desde la política educativa del país se definen tareas que expresan la necesidad de "superar la concepción de una educación centrada en la transmisión de conocimientos para consolidar prácticas pedagógicas orientadas al desarrollo de las competencias de los estudiantes. Este cambio implica pasar de un aprendizaje de contenidos y de una formación memorística y enciclopédica a una educación pertinente y conectada con el país y el mundo"[3]. Cabe señalar, que durante el desarrollo y evolución de la educación en Colombia se han conservado prácticas pedagógicas contraproducentes que conllevan hacer el sistema educativo obsoleto e impiden avanzar en la calidad de los proceso de enseñanza y aprendizaje en las aulas. No obstante, la reflexión de esta y otras problemáticas que vive la educación colombiana ha permitido que se plantee una estrategia de mejoramiento de la

[3] Ministerio de Educación Nacional. Acciones y lecciones educativas. Revolución Educativa 2002 – 2010. MEN. p. 141. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-241342_memorias_RE.pdf

calidad educativa. La cual tiene como propósito lograr medir y valorar periódicamente los resultados de los procesos pedagógicos.

Desde luego, la evaluación externa que ha empezado a implementarse en el sistema educativo promueve un cambio de enfoque al pasar de evaluar conocimientos a una evaluación por competencias. También hay que señalar que desde que se aplican las pruebas externas a los estudiantes, surgen preocupaciones a raíz del bajo desempeño en el desarrollo de las competencias evaluadas asociadas a los resultados obtenidos en las áreas de ciencias, lenguaje y matemáticas. Según Ayala y García[4], los desempeños mínimos que a nivel de país se han obtenido en los resultados de las evaluaciones externas permiten afirmar que los esfuerzos no han sido suficientes para alcanzar los estándares deseados, igualmente, evidencian que no ha habido una mejora en la calidad educativa para el caso específico de las matemáticas, pues persisten los bajos resultados en cuanto al desarrollo de las competencias de los estudiantes.

Para dar una mirada, en mayor detalle a los resultados de las pruebas y en particular para observar el comportamiento y desarrollo de la competencia matemática, se acude en primer lugar al más reciente informe que el ICFES[5] ha entregado sobre los resultados de la participación de Colombia en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA[6]), en el año 2012. En él se concluye que: "… los desempeños alcanzados por los estudiantes colombianos son insuficientes para enfrentar los retos que exigen las sociedades modernas, de forma particular los asociados a la resolución de problemas inesperados, no rutinarios y de contextos

---

[4] AYALA – GARCIA, Jhorland. Evaluación externa y calidad de la educación en Colombia. Documentos de trabajo sobre economía regional. Banco de la república. p. 4 Disponible en: http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/archivos/dtser_217.pdf

[5] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

[6] PISA: Programa para le Evaluación Internacional de los alumnos. Estudio que se realiza cada tres años sobre los conocimientos y las destrezas de los alumnos de 15 años en los principales países industrializados, a través de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

poco familiares"[7]. Es decir, en los aprendizajes evaluados no se refleja que se esté logrando un impacto o se esté desarrollando una competencia desde lo que se trabaja en la cotidianidad del aula regular.

Al indagar por las razones de la anterior afirmación, el informe referido señala que en el área de matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y solo un 18% lo alcanzó. Para ilustrar esta situación, imaginemos un colegio con 1000 estudiantes que han presentado la prueba (PISA). A 740 de ellos los tendríamos que ubicar en el nivel 1, el más bajo de clasificación. A 180 de los estudiantes restantes los situamos en el nivel 2 (básico). Quedan solamente 80 para ubicar por encima de estos dos niveles. Indudablemente, con este panorama la realidad es muy alarmante a nivel de resultados y permite entender por qué Colombia hace parte del grupo de países con el menor puntaje en el componente de matemáticas.

En la siguiente tabla se muestran los puntajes promedio en las tres últimas evaluaciones, en las que el país ha participado, y los porcentajes de estudiantes ubicados en los niveles de competencia mencionados.

Tabla 1. Puntajes y porcentajes de estudiantes colombianos. Prueba PISA.

	Matemáticas				Lectura				Ciencias			
	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)
2006	370	0,4	18,2	71,9	385	0,6	25,2	55,7	388	0,2	27,2	60,2
2009	381	0,1	20,3	70,4	413	0,6	30,6	47,1	402	0,1	30,2	54,1
2012	376	0,3	17,8	73,8	403	0,3	30,5	51,4	399	0,1	30,8	56,2

Fuente: OCDE, 2013

[7] Informe, Colombia en PISA 2012. ICFES. p. 18. Disponible en: Disponible en: http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/2304/2/BeltranCastroArietaCecilia2015.JPG.pdf

En la anterior información se refleja la tendencia de los resultados en las tres áreas evaluadas, desde la primera participación de Colombia en PISA, en 2006. En este informe, se menciona que los resultados para el indicador de variabilidad se muestran estables, lo que significa un alto grado de homogeneidad entre los estudiantes e igualmente no se destaca un crecimiento estadísticamente significativo. Así mismo, el informe concluye que los estudiantes evaluados en el caso de matemáticas solo pueden "*hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa"*[8]*.* Es decir, aquellas preguntas referentes a problemas matemáticos que exijan establecer relaciones indirectas a otros contenidos, conjeturar, hacer inferencias o conectar aprendizajes asociados a otras disciplinas no alcanzan a tener una comprensión acertada por los estudiantes. Es importante decir que, ese tipo de situaciones son las que merecen ser estudiadas y trabajadas desde la práctica de aula con un sentido riguroso pero procurando que se otorgue la dimensión significativa para el estudiante.

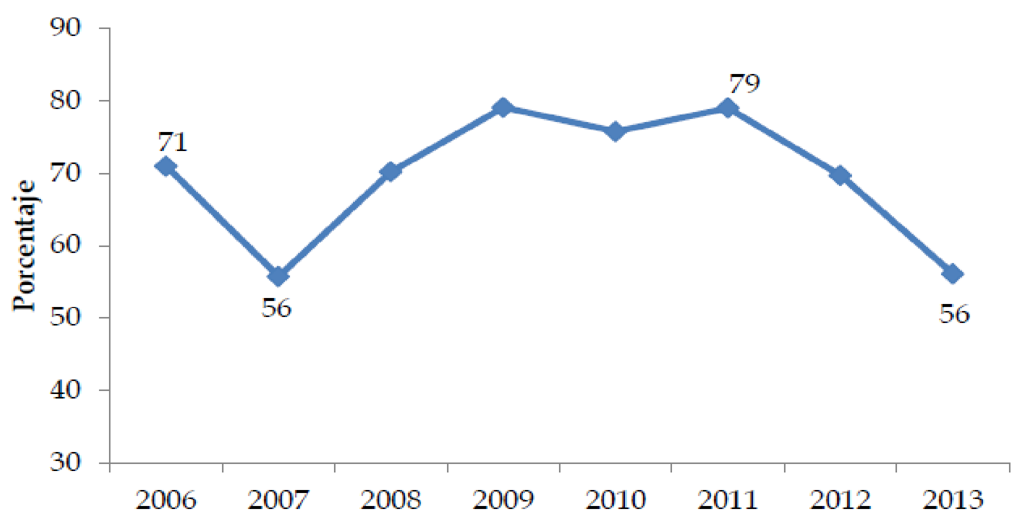
Cabe señalar, que la prueba de matemáticas es la de menor desempeño de las tres áreas evaluadas por PISA. Y que al medir el progreso en los puntajes se encuentra que se mantiene estable, es decir, "no ha habido una mejora en la calidad educativa para el caso específico de las matemáticas, pues persisten los bajos resultados en cuanto al desarrollo de las competencias de los estudiantes"[9]. La invariabilidad en los resultados de la prueba se asume como consecuencia de la inercia en los proceso de enseñanza y aprendizajes en la matemáticas.

Desde el contexto nacional, la dinámica mostrada por los resultados de la prueba Saber 11, se considera como un insumo para evidenciar el nivel de competencia

[8] Ibíb., p. 8.
[9] AYALA. Op. Cit., p. 5

alcanzado en el respectivo proceso de enseñanza y de aprendizaje que se da al finalizar la educación de secundaria y media. En este sentido, Ayala y García[10], expresan que durante los últimos años en la prueba censal se muestra que no hay mejoría en el porcentaje de estudiantes que alcanzan a desarrollar un nivel básico en la competencia matemática. El histórico de esta prueba revela que, entre el año 2006 y el 2013, disminuyó el porcentaje de estudiantes (71% al 56%) que se ubicaron en los niveles de logro medio y alto en el componente de matemáticas. En el siguiente gráfico se presenta el promedio alcanzado en el nivel de competencia antes mencionado.

Grafico 1. Porcentaje de estudiantes ICFES, saber 11 (2006-2013)



Fuente: SNIEE – ICFES

El análisis que hacen los autores citados, en relación a lo que ocurrió en el año 2013 en esta prueba, señala que en promedio el 56% de los estudiantes evaluados alcanzaron el nivel medio o alto, lo que permite entender que el 44% se ubicó en el nivel bajo, lo cual significa que un poco menos de la mitad de los estudiantes colombianos finalizan la secundaria con un bajo desarrollo de las competencia

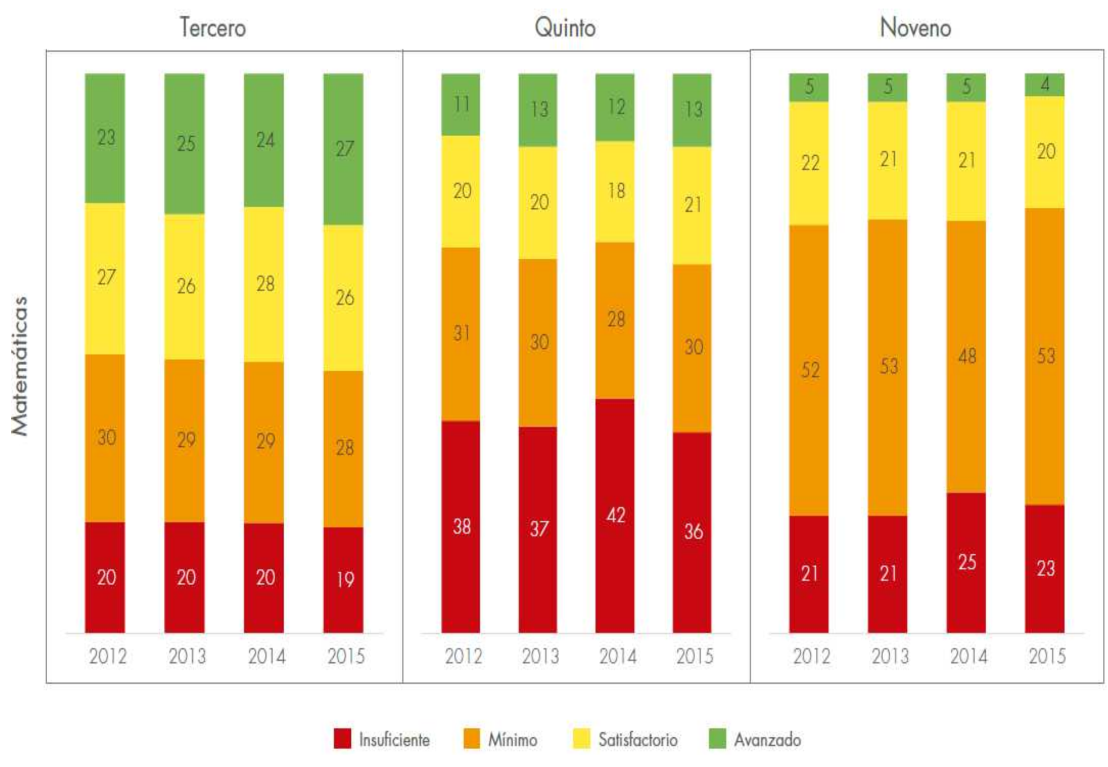
[10] Ibíd., p.15.

matemáticas, situación que probablemente afectará el desempeño de los mismos en la sociedad.

En el escenario de evaluaciones censales encontramos las pruebas Saber 3°, 5° y 9°, el contenido de esta prueba para cada grado evaluado está delimitado por los aprendizajes que plantean los Estándares Básicos de Competencia para cada nivel. En esta lógica, el lineamiento curricular regula la prueba y ésta a su vez expresa los aprendizajes en los que no se alcanza un nivel de desarrollo satisfactorio de la competencia.

Para ejemplificar mejor los resultados de los estudiantes en las pruebas censales, en la siguiente gráfica se muestra el porcentaje obtenido en matemáticas desde el año 2012 hasta el 2015.

Grafico 2. Porcentaje de estudiantes ICFES, Saber 3º, 5º y 9º matemáticas.

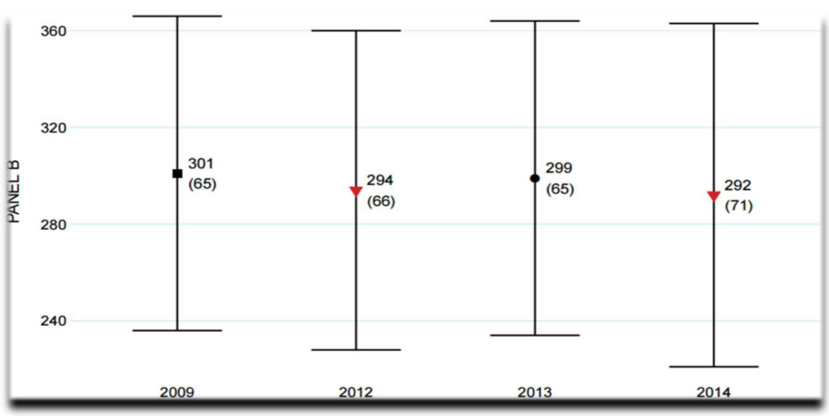


Fuente: ICFES, 2016

El punto a resaltar en esta información es que, mientras en el grado tercero la distribución de los estudiantes entre los niveles de desempeño está relativamente equilibrada, por supuesto que no es lo deseable, en quinto y noveno la población está agrupada en mayor medida en el nivel mínimo y se observa que aumenta el porcentaje de estudiantes con menores desempeños entorno al grado noveno. Puntualizando en el grado 5°, dado nuestro interés, los estudiantes que no superan las preguntas de menor complejidad en la prueba oscila entre el 36% y el 42%, aproximando estos valores por exceso traducen, que 4 de cada 10 estudiantes contesta de manera incorrecta las preguntas de la prueba.

La siguiente grafica muestra el puntaje promedio y, en paréntesis, la respectiva desviación estándar de los resultados alcanzados por los estudiantes evaluados. La desviación estándar es sumada y restada del puntaje promedio. Al observar estos dos valores podemos decir qué tanta heterogeneidad hay entre los estudiantes que conforman dicho resultado promedio. Un aumento en la desviación estándar es algo negativo debido a que es preferible tener estudiantes en niveles de aprendizaje similares.

Grafico 3. Puntaje prueba Saber 5° matemáticas (2009 – 2014)



FUENTE: ICFES, 2016

Según la anterior representación, los puntajes promedio de los estudiantes en el periodo analizado han disminuido y esta variación obedece principalmente a un aumento en el porcentaje de estudiantes en el nivel de desempeño insuficiente. Traduce igualmente que los resultados no son homogéneos e indica que están alejados del promedio. Así mismo se observa que la desviación estándar se ha incrementado lo cual permite concluir que el cambio en el puntaje promedio entre 2009 y 2014 es negativo y considerable.

En consecuencia, en el análisis antes descrito con relación a los desempeños de los estudiantes se guarda similar tendencia con los alcanzados en la prueba PISA. Así se describe en Informe Nacional de Resultados[11], el cual afirma que las pruebas censales en básica primaria y secundaria evidencian el mismo comportamiento que los mostrados en la evaluación PISA. Por ejemplo, en el área de matemáticas es donde se presenta mayor proporción de estudiantes que no responden las preguntas de menor complejidad de las prueba. Además, se concluye que a medida que aumenta el nivel de escolaridad, aumenta también el porcentaje de estudiantes que no responden las preguntas más sencillas de la prueba: Este hallazgo no quiere decir que los estudiantes de tercero están mejor que los de quinto o los de noveno, porque las competencias de cada grado y área son específicas. Lo que muestra este resultado es que a medida que aumenta el nivel del grado, los estudiantes en promedio, tienen más dificultad para alcanzar los estándares de su respectivo ciclo.

Acerca de los resultados en el contexto regional, para el departamento de Santander encontramos que los desempeños de los estudiantes, según el informe del ICFES[12], conservan la misma la dinámica que se presenta en los resultados nivel de país para el área de matemáticas en los grados 3°, 5° y 9°. En este sentido, los estudiantes de 3° evaluados en los años 2014 y 2015 corresponden al 36% de los

[11] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Informe Nacional: SABER 3°, 5° y 9° Resultados nacionales 2009 – 2014. 2016 p. 78
[12] ICFES, Informe de resultados por departamento. 2016. p. 1. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEntidadTerritorial.jspx

estudiantes que en matemáticas se ubican en los niveles *Insuficiente y Mínimo.* Es decir, en este comparativo no se presenta variabilidad, mientras que para grado 5°, las cifras si sufren variación y además hay incremento en los porcentajes que corresponden al nivel *insuficiente y mínimo*, 58% y 53% respectivamente. En cuanto al grado 9°, la tendencia se mantiene y los porcentajes expresados a continuación muestran como los resultados en los niveles más bajos de esta escala apuntan al crecimiento: 61% (2014) y 63% (2015). Se concluye que a medida que los estudiantes ascienden en la escolaridad presentan mayores dificultades para alcanzar un mejor nivel de desarrollo en las competencias evaluadas en cada grado.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Una vez realizada la contextualización de la situación problémica, es pertinente describir los aspectos que alertan sobre el comportamiento de los estudiantes objeto de estudio en relación a las pruebas externas en la que han participado. Inicialmente, se hace una revisión de los resultados alcanzados en las competencias y componentes, evaluados por el ICFES, para ello se adelanta un reconocimiento de los informes sobre las pruebas SABER y que se condensan en el reporte histórico para los años 2012 - 2013 - 2014 - 2015[13]. Posterior a ello, se estudia el reporte por colegio y la *matriz de referencia* correspondiente a la Institución objeto de estudio.

En lo que concierne a los resultados de los estudiantes de grado 3°, en el área de matemáticas, el porcentaje en el nivel de desempeño *Insuficiente* presenta la siguiente variación: el 1% en el año 2012, el 37% en el año 2013 y el 25% en el año 2015. Es notoria la variabilidad en los resultados, y genera preocupaciones el hecho

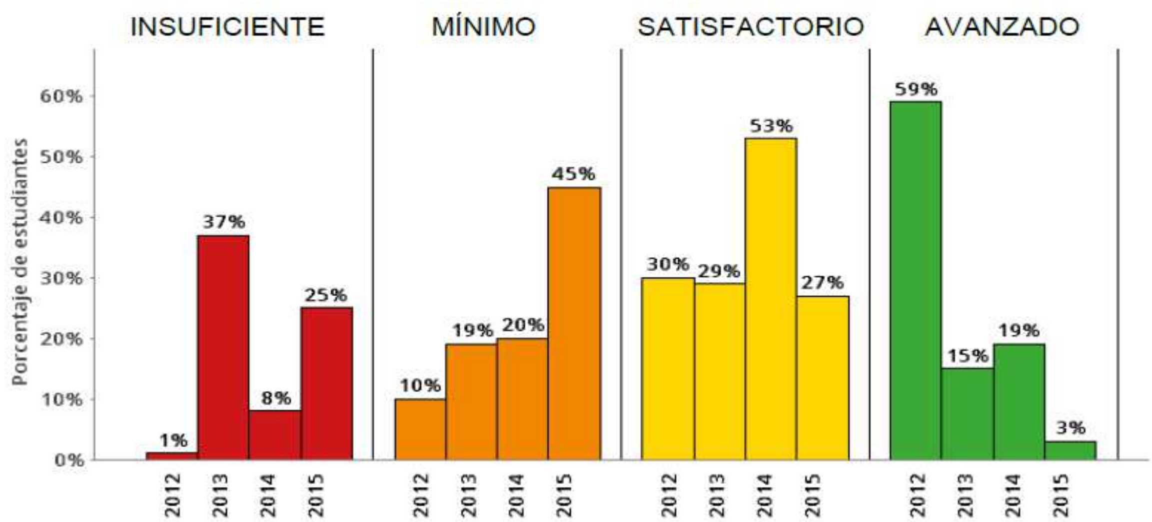
[13] ICFES. Saber 3°, 5° y 9°. Resultados Censales. 2016. p. 1. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jspx

de que con el transcurrir de cada prueba sea mayor el número de estudiantes que aparecen en el nivel bajo de esta escala.

A su vez, en el nivel avanzado el número de estudiantes disminuyen, y pasa de un 59% en el año 2012 a un 3% en el 2015. Es decir, el número de estudiantes que se esperan muestren un desempeño sobresaliente en las competencias evaluadas, se ha reducido significativamente.

En la siguiente gráfica se relacionan los porcentajes de estudiantes, en 3° grado, área de matemáticas para cada uno de los niveles de desempeño.

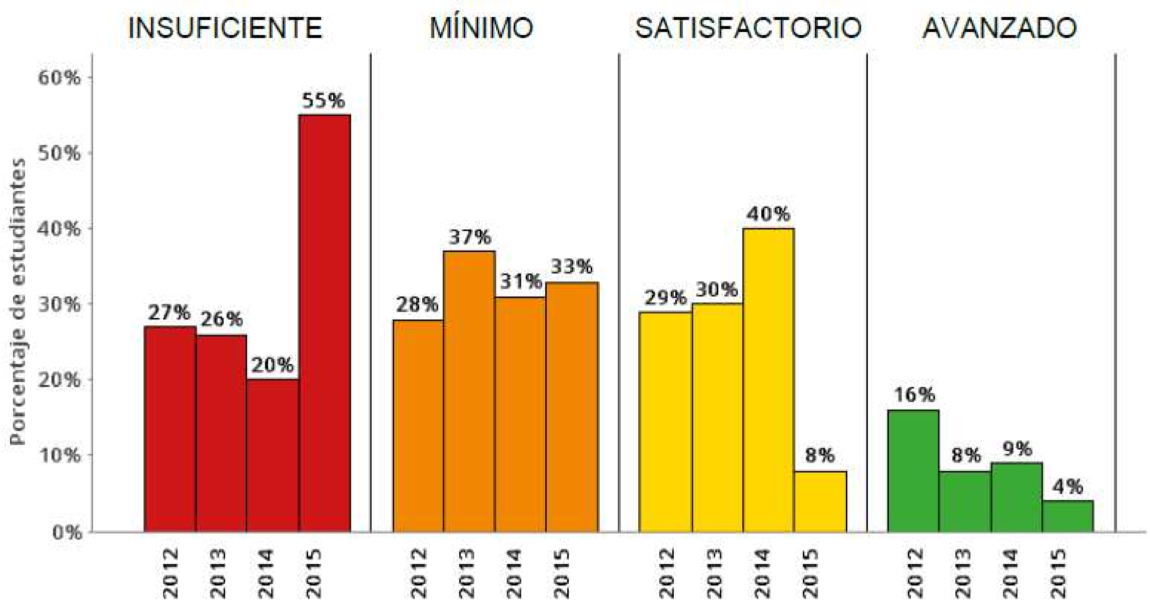
Grafico 4. Porcentajes históricos, niveles de desempeño en matemáticas 3º.



Fuente: ICFES 2016

En cuanto al grado 5º, el comparativo de los resultados a nivel de matemáticas refleja que el nivel de desempeño *Insuficiente*, en el año 2012, equivale al 27%, para el 2014 al 20% y para el 2015 corresponde al 55%. Esto informa que hay un incremento en el número de estudiantes que año a año presentan la prueba y no alcanzan a superar el nivel *mínimo.* Es probable que la mayoría de evaluados desconoce o no interpreta adecuadamente el contenido de la prueba o puede significar que en los procesos de enseñanza y aprendizajes los contenidos evaluados no se trabajan significativamente. Considerando ahora los porcentajes alcanzados por los estudiantes en los niveles *satisfactorio* y *avanzado* se observa que se reducen de manera alarmant año tras año. A continuación se ejemplifica mediante una gráfica la indicada variabilidad.

Grafico 5. Porcentajes históricos, niveles de desempeño en matemáticas 5º.



Fuente: ICFES 2016

Otro aspecto que se verifica en los resultados a nivel Institucional, es el comportamiento de éstos y el respectivo comparativo entre el Establecimiento Educativo objeto de estudio y las instituciones con características similares en área y grado evaluado. A continuación se destacan las fortalezas y debilidades en las *competencias* y *componentes* evaluados por la prueba Saber en 3° y 5° grado.

Tabla 2. Competencias y componentes evaluados en matemática 3º (fortalezas y debilidades)

COMPETENCIAS				
AÑOS	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	Nº de estudiantes evaluados
2012	Débil	Débil	Similar	16
2013	Fuerte	Muy Débil	Muy Fuerte	17
2014	Débil	Muy Fuerte	Similar	19
2015	Similar	Fuerte	Débil	15
COMPONENTES (PENSAMIENTOS)				
AÑOS	Numérico-Variacional	Geométrico-métrico	Aleatorio	Nº de estudiantes evaluados
2012	Muy Fuerte	Muy Débil	Débil	16
2013	Fuerte	Similar	Débil	17
2014	Muy Fuerte	Débil	Fuerte	19
2015	Fuerte	Débil	Débil	15

Tabla 3. Competencias y componentes evaluados en matemática 5º (fortalezas y debilidades)

COMPETENCIAS				
AÑOS	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	Nº de estudiantes evaluados
2012	Fuerte	Muy Fuerte	Fuerte	20
2013	Fuerte	Débil	Fuerte	33
2014	Débil	Fuerte	Muy Fuerte	22
2015	Similar	Muy Débil	Fuerte	20
COMPONENTES (PENSAMIENTOS)				

AÑOS	Numérico-Variacional	Geométrico-métrico	Aleatorio	Nº de estudiantes evaluados
2012	Similar	Fuerte	Muy Fuerte	20
2013	Fuerte	Fuerte	Débil	33
2014	Fuerte	Débil	Fuerte	22
2015	Débil	Muy Fuerte	Débil	20

La información consignada en las anteriores tablas señala que el comportamiento que muestra este historial de resultados, es fluctuante. Es decir, en algunos años se supera los colegios de referencia pero en otros años se está por debajo de estos. En este sentido, se destaca el comportamiento *fuerte* que presenta para el grado 3° la competencia *Comunicación, representación y modelación.* Algo similar ocurre en el grado 5°, pero para este caso, es la competencia *Planteamiento y resolución de problemas* la que denota un comportamiento fuerte y constante en el historial que corresponde a las competencias evaluadas.

Otro aspecto plasmado en las tablas corresponde a los *componentes matemáticos* que evalúa la prueba Saber. Para el componente *Numérico-Variacional* se observa que en el grado 3° los resultados se mantiene en desempeño superior año a año. Panorama similar ocurre con el componente *geométrico métrico* para grado 5°. Por consiguiente, las debilidades se presentan para el grado 5° en las competencias de *razonamiento y argumentación,* y en la de *comunicación*, y para el componente donde se concentran los bajos resultados es el *aleatorio*.

Otro punto que enmarca este análisis de resultados a nivel Institucional, es el informe por colegio, documento que el ICFES en conjunto con el Ministerio de

Educación Nacional entregan para el desarrollo de la actividad Día E[14]. En este informe se pormenoriza los resultados por área, componentes, competencia y aprendizajes que evalúa la prueba Saber. A continuación, se relacionan los porcentajes de estudiantes que en el grado 3º *no contestaron correctamente* los ítems correspondientes a la competencia y aprendizajes evaluados.

Tabla 4. Matriz de referencia. Competencias evaluadas prueba Saber matemáticas 3º.

<table>
<tr><th colspan="4">COMPETENCIAS EVALUADAS. GRADO 3°</th></tr>
<tr><th>COMUNICACIÓN</th><th colspan="2">RAZONAMIENTO</th><th>RESOLUCIÓN</th></tr>
<tr><td>El 22% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia.</td><td colspan="2">El 28% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia.</td><td>El 32% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia</td></tr>
<tr><th>COMPONENTE</th><th colspan="3">APRENDIZAJES POR MEJORAR (C. RESOLUCIÓN)</th></tr>
<tr><td>NUMERICO - VARIACIONAL</td><td colspan="3">El 58% de los estudiantes no resuelve y formula problemas sencillos de proporcionalidad directa.</td></tr>
<tr><td>ALEATORIO</td><td colspan="3">El 53% de los estudiantes no resuelve situaciones que requieren estimar grados de posibilidad de ocurrencia de eventos</td></tr>
<tr><td>ALEATORIO</td><td colspan="3">El 53% de los estudiantes no resuelve problemas a partir del análisis de datos recolectados.</td></tr>
</table>

En el consolidado anterior, se encuentra que los aprendizajes que merecen prioridad para implementar acciones pedagógicas son los que están asociados a la

[14] Ministerio de Educación Nacional. Siempre Día E. Informe por colegio, pruebas Saber 3°, 5° y 9°. MEN. 2016. p. 25 Disponible en: https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/268101000136.pdf

competencia *resolución,* en el componente *numérico-variacional* y en el componente *aleatorio.* Así mismo, se presenta a continuación los porcentajes de estudiantes que en el grado 5º *no contestaron correctamente* los ítems correspondientes a la competencia y aprendizajes evaluados.

Tabla 5. Matriz de referencia. Competencias evaluadas prueba Saber matemáticas 5º.

COMPETENCIAS EVALUADAS. GRADO 5°		
COMUNICACIÓN	**RAZONAMIENTO**	**RESOLUCIÓN**
El 35% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia.	El 42% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia.	El 33% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a esta competencia

COMPONENTE	**APRENDIZAJES POR MEJORAR (C. RAZONAMIENTO)**
ALEATORIO	El 77% de los estudiantes no conjetura y argumenta acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
NUMÉRICO - VARIACIONAL	El 64% de los estudiantes no usa ni y justifica propiedades (aditiva y posicional) del sistema de numeración decimal.
GEOMÉTRICO - MÉTRICO	El 47% de los estudiantes no construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.

En este consolidado, nuevamente se identifican los aprendizajes que merecen mayor prioridad para implementar acciones pedagógicas, los cuales se asocian a la competencia *razonamiento* en el componente *aleatorio.* Allí se encuentra que, más del 70% de los estudiantes que presentaron la prueba de matemáticas, en el año 2015 no contestaron correctamente las preguntas asociadas a la competencia y el componente señalados. De acuerdo a lo anterior, tanto para el grado 3º como para 5º grado hay evidencia que señala que los aprendizajes referidos a la competencia *razonamiento* y el componente *aleatorio* son los de menor apropiación o consolidación en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de los estudiantes evaluados. Es decir, que para lograr resolver situaciones que evalúan estos conocimientos no se cuenta con las herramientas cognitivas o los saberes necesarios que permitan tener éxito a la hora de darles solución. Por lo tanto, es importante identificar los aspectos y factores que influyen a la hora de construir un aprendizaje significativo en los estudiantes e igualmente, es válido hacer una reflexión en torno al tipo de enseñanza que se organiza como respuesta a las necesidades de los mismos.

En este sentido, lo que se expone desde el lineamiento curricular, precisamente desde los Estándares Básicos de Competencia de Matemáticas[15], señala que para los niveles de 1°- 3° y de 4° - 5° han de abordarse los siguientes aprendizajes mínimos, desde al pensamiento *aleatorio.*

- *Explico "desde mi experiencia" la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos,*
- *Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro,*
- *Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos,*
- *Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.*

Según lo anterior, las actividades y tareas propuestas desde la enseñanza han de estar alineadas con los aprendizajes mínimos antes expuestos y en particular, el componente aleatorio, en este nivel de escolaridad, ha de estar asociado con al con el *significado intuitivo y clásico* de la probabilidad. Es decir, el propósito del

---

[15] Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. Primera edición. Ed. MEN, 2006. p. 83 Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

lineamiento, además de buscar movilizar los aprendizajes haciendo uso de las experiencias cotidianas y cercanas al estudiante, también propone que a la hora de dar solución a situaciones problema, se potencie el *razonamiento probabilístico,* de manera que se involucre al aprendiz en la formulación de predicciones y conjeturas, las cuales lo faculten para tomar decisiones y resolver problemas con base en razonamientos mejor elaborados.

El documento *Matriz de referencia*[16]*,* el cual presenta los aprendizajes y las evidencias que el ICFES contempla a la hora de construir las preguntas asociadas a las competencias evaluadas, permite identificar los aspectos evaluados para el componente *aleatorio* y las competencias *comunicación, razonamiento y resolución,* grado 3° y 5°*.* Así se describen en la siguiente tabla:

Tabla 6*.* Matriz de referencia: aprendizajes y evidencias en matemática 3º y 5º.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">COMPETENCIA: RAZONAMIENTO Y RESOLUCIÓN - 3°</td></tr>
<tr><td rowspan="4">COMPONENTE - ALEATORIO</td><td>Aprendizaje</td><td>Evidencia</td></tr>
<tr><td>Establece conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.</td><td>Reconoce eventos posibles e imposibles en un experimento aleatorio.

Describir si un evento aleatorio, es seguro, imposible, más o menos o igualmente posible que otro.</td></tr>
<tr><td>Resolver una situación problema, calculando datos extraídos de dos formas de representación.</td><td>Determinar cuál es el evento más favorable o menos favorable en un experimento aleatorio.

Tomar la decisión más acertada a partir del grado de posibilidad de uno o más eventos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">COMPETENCIA: COMUNICACIÓN, RAZONAMIENTO Y RESOLUCIÓN - 5°</td></tr>
</table>

[16] ICFES. Matriz de referencia Matemáticas. 2016. p. 5. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jspx

	Expresar grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias y razones.	Describe eventos como posibles, más posibles, menos posible igualmente posible o imposible. Asociar a la fracción el significado de razón en contextos de probabilidad.
	Establecer, mediante combinaciones o permutaciones sencillas, el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio	Reconocer en contextos cotidianos (juegos, deportes, compras, entre otros.) el número total de combinaciones o permutaciones en problemas sencillos. Listar combinaciones o permutaciones que cumplan con condiciones dadas en un contexto aleatorio.
	Conjeturar y argumentar acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos	Discutir la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos relacionados con experiencias cotidianas. Interpretar la posibilidad de ocurrencia de un evento a partir de un análisis de frecuencias.
	Resolver situaciones que requieren calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos.	Estimar la probabilidad de un evento para resolver problemas en contexto de juego o eventos cotidianos a partir de una representación gráfica o tabular. Calcular la probabilidad de un evento a partir de la descripción de un experimentos aleatorio sencillo.

Los aprendizajes que consigna la *Matriz de Referencia*, evalúa en la prueba Saber 3º y 5º grado los conocimientos que implican el manejo de aspectos propios del significado intuitivo, clásico (laplaciano) y frecuencial de la probabilidad. Además, propone aprendizajes para evaluar un nivel básico del razonamiento combinatorio.

Teniendo en cuenta que los estudiantes participantes en las pruebas externas evidencian en sus resultados un desarrollo mínimo de la competencia matemática y en vista que tal desempeño, se mantiene cada vez que éstas se aplican, entonces se hace necesario revisar qué factores asociados al aprendizaje de los estudiantes están influyendo en esta problemática. Así, por ejemplo, no se descarta que tal situación esté ocurriendo por un desajuste en los aspectos motivacionales y emocionales de los estudiantes. Es también probable, que las condiciones socioeconómicas de las familias estén influyendo o muy seguramente, el escaso acompañamiento de parte de los padres sea otro de las causales que este ocasionando esta disyuntiva. Pero, hay algo del cual no podemos apartarnos en esta reflexión y es el rol que el docente cumple en este proceso. Para el maestro, es clave configurar una propuesta de enseñanza que asegure no solo actividades mecanicistas o de transferencia de conocimiento, sino que se soporte en un sustrato de tipo didáctico y metodológico, el cual le dote de herramientas para responder pedagógicamente a los desafíos que implica movilizar los aprendizajes en los estudiantes.

Por todo esto, se encuentran suficientes motivos para pensar que en el desempeño de los estudiantes a nivel de pruebas externas, están presentes factores endógenos y exógenos, los cuales muestran cuál es el posible origen de las causas que están afectando el desarrollo efectivo de la competencia matemática en los estudiantes.

Acorde con lo expuesto, uno de los conceptos a abordar en el plan de enseñanza es de la probabilidad. Al respecto, Alsina y Vásquez[17] afirman, en los currículos de educación primaria de los diferentes países se vienen promoviendo e incorporando aprendizajes propios del pensamiento aleatorio, pues es una necesidad iniciar el estudio de la probabilidad desde tempranas edades. Lo anterior lo confirma Chamorro[18], al expresar que son varias las razones que llevan a concluir que es

---

[17] ALSINA, Ángel. VASQUEZ, Claudia. La probabilidad en educación primaria: de lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 2016, núm. 71, p. 47. Disponible en:* *https://dugidoc.udg.edu/bitstream/handle/10256/12167/LaProbabilidadEduPrimaria.pdf?sequence=1&isAllowed=y*

[18] DEL CARMEN CHAMORRO, María. Didáctica de las Matemáticas para Primaria, Pearson Educación, Madrid, 2003. p. 338.

pertinente abordar la enseñanza de lo aleatorio en los niveles iniciales. Una de ellas, justifica que se deben reconocer las situaciones presentes en el contexto social del estudiante, ya que en su entorno inmediato se encuentran numerosas situaciones de tipo aleatorio, las cuales pueden aprovecharse como insumo básico para establecer una conexión entre los presaberes del estudiante y el nuevo conocimiento. También se aduce, que en las matemáticas hay una tendencia marcada a trabajar solamente situaciones de tipo determinista y por ello es imperioso que se conecten a la enseñanza de la matemática, en el nivel de básica primaria, elementos como el componente aleatorio buscando la pertinencia y complementariedad del pensamiento matemático en todas sus dimensiones.

En correspondencia a la perspectiva anterior y frente a la problemática antes descrita, se considera importante plantear para éste estudio, la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo articular al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, una estrategia didáctica que implique movilizar, en los estudiantes de 4º y 5º de primaria, los conocimientos previos necesarios para avanzar en el proceso de alfabetización probabilística?

Con base en la pregunta de investigación y con el propósito de delimitar los aspectos a trabajar en la misma, se expresan a continuación las siguientes preguntas orientadoras:

a) ¿Qué dificultades emergen en el razonamiento probabilístico de los estudiantes a la hora de resolver situaciones de tipo aleatorio?

b) ¿Cómo consolidar un proceso de alfabetización probabilística en los estudiantes para lograr una mejor toma de decisiones a la hora de resolver situaciones de incertidumbre?

c) ¿Qué significados y sesgos de la probabilidad están presentes en los razonamientos y en las estrategias que emplean los estudiantes a la hora de dar solución a experiencias de tipo aleatorio?

d) ¿Qué aprendizajes asociados a la probabilidad simple se pueden movilizar en los estudiantes a partir de la implementación de una estrategia matemática basada en la Teoría de Situaciones Didácticas?

2. JUSTIFICACIÓN

A menudo se escucha que las matemáticas están presentes en la mayoría de las tareas cotidianas y que éstas se utilizan, entre otras cosas, para dar explicación del porqué suceden los fenómeno naturales. A partir de esta premisa, se ha logrado entender que el saber matemático se materializa y se hace más significante cuando a través de otras ciencias (física, química, economía, biología) sirve como instrumento para modelar situaciones y hechos de la vida cotidiana. Es decir, las matemáticas mediante su lenguaje permiten analizar, interpretar y comprender con mayor certeza la realidad presente en la naturaleza y la sociedad. También hay que señalar, que tal lenguaje ha cumplido un papel preponderante en el desarrollo tecnológico y en los avances científicos que ha logrado la sociedad actual. Y es a causa de ello, que hoy día se cuenta con una creciente disponibilidad de información, probablemente es por eso que muchos afirman que el conocimiento matemático está inmerso en la en todas las acciones y dinámicas de la vida.

Desde esta lógica, se observa que los individuos han buscado modelar y dar solución a problemas que se enmarcan en un enfoque determinístico o aleatorio. Esta tarea, ha llevado a que los sujetos a la hora de experimentar se cuestionen sobre el método indicado para encontrar la solución a algunos problemas; por ejemplo, las personas han encontrado que es posible conocer a priori el resultado de lo que ocurre cuando se introduce una hoja de papel al fuego o lo que pasa si soltamos un plato en el aire para ver si cae al suelo; sin embargo, frente a experiencias en donde la tarea es predecir el tipo de imagen que aparece en la pantalla del televisor, apenas éste se enciende o cuando es necesario pronosticar el resultado que sale antes de hacer girar una ruleta, se encuentra que en estos fenómenos las personas proponen diferentes posibilidades de ocurrencia, todas válidas; por ello, para conocer con certeza el resultado se debe esperar a que éste suceda. Así las cosas, hay una clara diferencia entre modelar fenómenos deterministas y abordar experiencias de tipo aleatorio. En los primeros, es menos complejo descubrir los principios que lo fundamentan y de hecho, es posible conocer a priori la solución o resultado, pero en los segundos la inmensa complejidad en la que están inmersos hace que exista incertidumbre o no hay seguridad para determinar el resultado, sin que se deba primero efectuar la experiencia. Tal vez por ello, en la práctica escolar los fenómenos deterministas han recibido mayor atención. Ante esta realidad Chamorro[19], plantea la necesidad de abordar situaciones aleatorias en la escuela dado que hay numerosas experiencias del entorno del niño donde se refleja la aleatoriedad (juegos infantiles y escolares, juegos de apuestas de su entorno inmediato, predicciones meteorológicas). Además, no es conveniente formar al estudiante solo con la visión determinista, pues las matemáticas buscan modelizar también el funcionamiento de lo incierto, de lo plausible y de lo probable. En este sentido, Pino y Estrella[20], afirman que el ciudadano se enfrenta diariamente a situaciones en las que hay incerteza y debe tener una actitud crítica frente a las informaciones erróneas o interpretaciones sesgadas que muchas veces aparecen en los medios de comunicación. De ahí la importancia de alcanzar una formación en el sujeto que propenda por el desarrollo de la alfabetización probabilística y que se fortalezca mediante la modelación de experiencias proveniente de diversas fuentes. Por ejemplo, situaciones relativas a resultados en el deporte, en la medicina, las elecciones por votación, las predicciones meteorológicas y todo tipo de situaciones que encierren un grado de incertidumbre para los estudiantes.

Se reconoce que la alfabetización probabilística está inmersa en los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas. Los referentes recomiendan acercar a los estudiantes a situaciones donde no solo este presente la determinístico, sino que la

[19] Ibit., p. 338

[20] DEL PINO, Guido y ESTRELLA, Soledad. Educación Estadística: relaciones con la matemática. En: Revista de Investigación Educación Latinoamericana. Enero, 2012. Vol. 49, no. 1, p. 57. Disponible en: https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=http://pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/483/public/483-2227-1-PB.pdf

enseñanza contemple abordar situaciones de incertidumbre y azar, y que estos problemas sean el pretexto para movilizar los conocimientos previos relativos a conceptos como la aleatoriedad y la probabilidad. Igualmente, se resalta la necesidad de promover la curiosidad y la investigación alrededor de problemas asociados a las ciencias, los cuales son factibles de modelar y con base en la experiencia aleatoria generar aprendizajes. Hay que señalar entonces, que en los estándares se promueve al pensamiento aleatorio como el componente que "ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos"[21]. Se comprende que para alcanzar un desarrollo del pensamiento aleatorio es preciso participar de variadas tareas donde se busca una toma de conciencia de parte de los estudiantes para que a través de la experiencia y de la modelación puedan hacer estimaciones intuitivas al relacionar sus ideas previas con los nuevos aprendizajes.

De acuerdo al anterior enfoque, se plantea la necesidad de aprovechar aquellas situaciones aleatorias asociadas al entorno del escolar y no basarse solamente en las que desarrollan una idea determinista. Es decir, es importante que en la propuesta de enseñanza se logre articular tanto un modelo como el otro, y de esta forma plantear un trabajo de aula más cercano a aquellas experiencias de tipo azaroso o eventual; lo cual se interpreta como la oportunidad para dar un mayor énfasis a la alfabetización probabilística del estudiante. Según Díaz y Batanero[22], la razón principal para lograr este propósito es que el azar se encuentra inmerso en nuestro entorno, lo cual hace factible que a la hora de planificar la enseñanza puede

[21] Estándares Básicos de competencia de matemáticas, MEN. Op. Cit., p. 64.
[22] DIAZ, Juan y BATANERO, Carmen. Análisis de datos y su didáctica. Universidad de Granada. 2001. p.13. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Apuntes.pdf

hacerse una conexión entre los aspectos asociados al lenguaje y las situaciones presentes en la realidad.

En cuanto al lenguaje, los autores afirman que los individuos hacen uso de una variedad de expresiones para referirse a la idea de azar; por cierto, el hecho de emplear una o varias palabras para dar solución a una situación, refleja el significado o la concepción que los sujetos han construido desde su misma experiencia con lo incierto; es decir, la forma de interpretar una situación aleatoria conlleva a que los sujetos posiblemente tomen decisiones sesgada o erradas dado que se ignoran algunas variables o no se cuenta con el conocimiento necesario para llegar a un razonamiento que se acerque al resultado esperado. El anterior fenómeno no solo ocurre con la población adulta, sino que también es evidente en los ejercicios que desarrollan los niños en su cotidianidad.

En cuanto a conectar realidad y azar, los autores en mención, afirman que los fenómenos aleatorios se pueden caracterizar en categorías (biológico, físico, social y político), las cuales se considera los campos de aplicación de la estadística. Dado que lo campos nos aportan un amplio espectro de experiencias de incertidumbre, es posible, entonces que la enseñanza se nutra de situaciones aleatorias significativas que se constituyen en un factor positivo, pues es necesario evidenciar la aplicabilidad de las matemáticas al mundo real; además, es un ejercicio que conlleva a ejecutar procesos cognitivos en el alumno para poder analizar y comprender los significados que están inmersos en la incertidumbre; es decir, es importante conocer si el lenguaje empelado para abordar situaciones azarosas es pertinente y favorece la toma de decisiones acertadas, de lo contrario hay necesidad de alfabetizar al sujeto en la aleatoriedad.

A manera de síntesis, se encuentra que los sujetos a menudo en su contexto enfrentan situaciones de tipo fortuito, eventual e inesperado y que si bien, éstos toman sus propias decisiones de acuerdo a su conocimiento; es factible que tales miradas no recojan con certeza las posibles soluciones. En consecuencia, el saber previo en cada individuo requiere conectarse con saberes más elaborados y rigurosos, esto para consolidar su aprendizaje a la hora de buscar soluciones pertinentes al problema que se estudia. Se busca así, que su acervo de conocimiento sufra una transformación y para ello se plantea entrar en el plano de la alfabetización probabilística; puesto que, para que el saber adquiera el carácter riguroso es necesario que el individuo pase por un proceso de enseñanza aprendizaje; así lo plantea Fischbein, citado por Godino[23], cuando expresa que las intuiciones primarias en los niños les permiten desarrollar el conocimiento inicial de lo aleatorio y que las intuiciones secundarias de los fenómenos aleatorios se forman como consecuencia de la enseñanza principalmente en la escuela; quiere decir, que cuando el niño construye su conocimiento desde la cotidianidad; por ejemplo, cuando éste interactúa en un contexto como los juegos de azar, entonces sus intuiciones primarias le otorgan la capacidad de elegir la opción con mayor posibilidad. En consecuencia, cuando el estudiante pasa a su etapa escolar, el autor considera que se da un proceso de aprendizaje donde se construyen las intuiciones secundarias; éstas una vez consolidadas, dotan al estudiante de herramientas y conocimientos las cuales le permiten empezar a superar concepciones erróneas y sesgadas en la toma de decisiones en el campo de lo azaroso; en tal sentido, el alumno está inmerso en un proceso de aprendizaje que se considera lo lleva a una comprensión gradual y progresiva de la situación problema.

Ahora bien, al reflexionar sobre lo que caracteriza las práctica de aula en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra que el énfasis está en desarrollar actividades que fortalecen en la mayoría de los casos el pensamiento

---

[23] DIAZ GODINO, Juan. Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Proyecto Edumat - Maestros. Universidad de Granada. Granada. 2004. P .433. Disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

numérico, en privilegiar contenidos diferentes a los propuestos en el pensamiento aleatorio, en obviar la posibilidad de articular mediante situaciones de aprendizaje conceptos transversales a todos los pensamientos matemáticos, en desconocer o ignorar la importancia de fundamentarse disciplinariamente en el pensamiento aleatorio asumiendo el desafío, como docente de investigar y formarse primeramente en ello y, en aquello tan tradicional en la enseñanza, como es pasar mucho tiempo de la clase transcribiendo del libro de texto al cuaderno. Estas y otras acciones, permiten ver que es necesario desde el currículo y en particular desde la didáctica de las matemáticas responder al desafío de formar a los sujetos en la alfabetización probabilística.

En efecto, en esta investigación se hace un aporte para responder al reto de visibilizar el componente aleatorio en las prácticas de aula. Tal propuesta, está fundamentada en la didáctica de las matemáticas; lo que significa, que con base en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau se implementa una unidad didáctica, la cual toma como pretexto o elemento significativo el cultivo de cacao, para presentar a los estudiantes, objeto de estudio, situaciones de aprendizaje inmersas en el concepto de probabilidad simple; igualmente, toma como punto de partida los conocimientos previos (nociones sobre lo incierto, lo posible e imposible, lo seguro, los términos y palabras para designar la probabilidad en una experiencia azarosa, entre otros), y pretende conectarlos en el proceso de enseñanza que sumado al esfuerzo y motivación de los estudiantes logre consolidar los conocimientos de lo aleatorio y de paso mejorar el nivel de desarrollo en la competencia de razonamiento, esperando traducir lo anterior en dar un paso para avanzar hacia el proceso de alfabetización probabilística de los mismos.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar, con base en la Teoría de Situaciones Didácticas, una estrategia matemática para caracterizar los presaberes y las nociones de los estudiantes de 4º y 5º grado en relación al concepto de probabilidad e implementar una secuencia de enseñanza para potenciar el razonamiento y la alfabetización probabilista.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

a) Caracterizar las dificultades que presentan los estudiantes de 4° y 5° grado en relación a los aprendizajes asociados a la probabilidad simple.

b) Diseñar situaciones didácticas que ayuden a consolidar en los estudiantes los aprendizajes asociados a la probabilidad simple.

c) Valorar los avances y la apropiación que han tenido los estudiantes en relación a los aprendizajes abordados en la estrategia didáctica.

d) Analizar los razonamientos y las estrategias que aplican los estudiantes para dar solución a las situaciones didácticas, con base en el marco teórico y de acuerdo a los hallazgos generados a partir de la implementación de la estrategia didáctica.

4. MARCO TEORICO

Es bien conocido que para dar forma y enriquecer una propuesta de investigación, es necesario contar con la referencia de estudios e investigaciones similares o cercanas en cuanto a los propósitos que se persiguen. En consecuencia, ante la necesidad de articular y de paso fundamentar el trabajo de investigación y a su vez encontrar puntos comunes o aspectos básicos que otros han profundizado o tal vez, que han abordado desde otro punto de vista, se describen a continuación estudios que en cierta forma abordan tópicos como son el tratamiento de lo aleatorio y del concepto de la probabilidad e igualmente se describen algunos estudios que focalizan su metodología en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. Es necesario también acotar, que al referenciar las investigaciones se busca plasmar propuestas que se han desarrollado a nivel internacional, nacional y local.

4.1 ANTECEDENTES INTERNACIONALES.

Gómez, E[24]. En su tesis para obtener el título de Doctor en ciencias de la educación, "Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesares de educación primaria" acude al "enfoque ontosemiótico" de la cognición e instrucción matemática para hacer un análisis de las configuraciones epistémicas asociadas al significado intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático de la probabilidad.

Para concretar la propuesta anterior, la investigadora adelanta en un primer ejercicio la revisión de los decretos oficiales en la educación española y aplica un estudio a dos series de libros de texto de primaria para determinar los objetos matemáticos

[24] Gómez, Emilse. "Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesares de educación primaria". Trabajo de grado para optar el título: Doctor en ciencias de la educación. Granada. Universidad de Granada, 2014. 355 p. Disponible en: http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/34020/23535301.pdf?sequence=1&isAllowed=y

abordados y los significados de la probabilidad en ese currículo. Además, evalúa mediante un cuestionario a una muestra de 157 futuros profesores de educación primaria sobre el conocimiento común, ampliado y especializado de los principales objetos matemáticos ligados a los diferentes significados de la probabilidad. Al cierre de la actividad diagnostica, la docente investigadora y los futuros profesores acuerdan hacer una socialización de las respuestas dadas y de las estrategias empleadas para dar solución a las situaciones propuestas. Agotado el momento anterior, se plantea un segundo cuestionario que retoma las situaciones del primero pero con el criterio de escoger los problemas donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad y con base en algunas de las respuestas dadas por estos y con la adición de otras posibles respuestas dadas por estudiantes ficticios se planteó un trabajo donde se debía evaluar la opción más cercana a la posible solución de la situación aleatoria.

Respecto al análisis realizado del cuestionario inicial para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad en futuros profesores, la autora expresa que la valoración de los resultados no arroja un buen panorama en cuanto al conocimiento ampliado y el especializado del objeto de estudio. En cambio, frente al conocimiento común del contenido se alcanza un mejor nivel en las respuestas, dado que los profesores en formación tienen un conocimiento previo de tales situaciones, ya que éstas han sido construidas pensando en que las solucionen estudiantes del nivel de primaria, secundaria o al comienzo de la educación superior. Así mismo, se puede ver que frente a los argumentos dados por los estudiantes al explicar los procedimientos o al construir estrategias para llegar a una posible solución de la situación se evidencia que hace falta una mayor elaboración de las ideas y de los razonamientos lo cual permita considerar que el nivel de competencia con respecto al conocimiento ampliado y especializado del contenido en los estudiantes es bajo y se puede calificar como pobre o escaso con relación a los resultados obtenidos en investigaciones previas. Sin embargo, se debe precisar que la población objeto de estudio en tales investigaciones en su mayoría han recibido instrucción previa sobre la probabilidad.

De la aplicación del segundo cuestionario, donde se tomaron 4 ítems desarrollados en el cuestionario 1 y se trabajó sobre la valoración que hacen los profesores en formación (submuestra de 87 integrantes) sobre las supuestas respuestas dadas por niños a las situaciones aleatorias se encuentra que la hipótesis referida al efecto que se genera en el estudiante después de una actividad de resolución y de discusión colectiva, así como de actividades de simulación contribuye a mejorar el conocimiento común y ampliado del futuro profesor se ha podido confirmar teniendo en cuenta el alto porcentaje de respuestas correctas.

Con respecto a la hipótesis 2, que trata de observar el conocimiento especializado de la probabilidad se evidencia que los futuros profesores muestran un nivel aceptable para identificar los objetos matemáticos de manera a priori, especialmente en lo que responde al significado clásico y aún menos en el frecuencial y subjetivo de la probabilidad. El anterior avance se aduce fue producto de las actividades formativas realizada pero la investigadora sugiere que no fue suficiente lograr un mayor nivel en la competencia del docente, por lo tanto se sugiere buscar alternativas para desarrollar el conocimiento ampliado dad que su carencia dificulta algunas de las actividades que realiza el docente en su proceso de enseñanza.

En cuanto a la tercera hipótesis que trata de observar en los participantes un conocimiento de la probabilidad y el estudiante aceptable en relación a los contenidos seleccionados se evidencia que esta se confirma en la mayoría de los futuros profesores. Se destaca los avances para el significado frecuencial y se encuentra que hay dificultas para abordar lo referido razonamiento probabilístico, juego equitativo y significado clásico. Además, hay necesidad de fortalecer la capacidad de argumentación y el conocimiento con las fuentes de error en relación con los contenidos evaluado.

Finalmente la investigadora sugiere mejorar el proceso de formación a los futuros docentes y para ello propone que se socialicen los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad pero ese ejercicio se debe acompañar de una adecuada trasposición didáctica. También sugiere que se debe presentar una muestra de situaciones experimentales contextualizadas en la práctica de aula y que el trabajo de socializar y simular de manera previa las situaciones terminan siendo una manera de confrontar al estudiante con sus propios sesgos e intuiciones incorrectas.

Ruiz, K[25]. En su tesis para obtener el grado de Magister en Didáctica de la Matemáticas, "Análisis de recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria", centra su investigación en localizar, clasificar y analizar recursos disponibles en Internet que sean útiles en la enseñanza de la probabilidad. Estos deben ser asequibles a los estudiantes y docentes y que complementen las directrices del currículo.

Para contextualizar su propuesta presenta un resumen de la organización curricular de países como España, Chile y los NTCM de Estados Unidos, así como el Proyecto GAISE que son referentes importantes para la enseñanza de la probabilidad en primaria.

Con relación al currículo Español, la probabilidad se encuentra conectada a situaciones que implican a otras áreas de conocimiento y lo que se busca es incidir

---

[25] RUIZ REYES, Karen. Análisis de recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Trabajo de grado para optar el título: Magister en Didáctica de la Matemáticas, Granada. Universidad de Granada, 2013. 98 p. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/karen.pdf

de forma significativa en la comprensión de la información presente en los medios de comunicación para que los estudiantes interactúen con los conocimientos estadísticos y tomen decisiones acertadas. Respecto a la probabilidad se señala que los juegos de azar son ejemplos que permiten introducir al aula las nociones de aleatorio y de incertidumbre ya que la principal finalidad es que los estudiantes interpreten fenómenos ambientales y sociales de su entorno a través de la matemática y en especial de la estadística y la probabilidad.

El currículo Chileno está dispuesto por ejes temáticos y uno de ellos corresponde a los Datos y Probabilidades. Así lo organizó la reciente Ley General de Educación de 2009. En esta organización de los conocimientos es importante que los estudiantes recolecten información mediante encuestas y cuestionarios y que formulen preguntas relevantes, basadas en sus intereses y experiencias y que luego de registrar los resultados, hagan predicciones partiendo de sus hallazgos. Para la parte de probabilidad se busca que se realicen experimentos aleatorios para comparar la posibilidad de ocurrencia de eventos y que llegue a conocerse sin calcular.

La realidad de los estándares americanos (EE.UU), es particular, dado que el estudio de la probabilidad se inicia desde el nivel K2, ósea desde los 5 años de edad y continúa a lo largo de toda la escolaridad. Lo acontecido en este currículo es corroborado por las investigaciones que se dan en los organismos como la American Statistical Association (ASA) y el mismo Proyecto GAISE.

Según los NTCM[26] la enseñanza actual debe tener como propósito la alfabetización estadística, y que desde los primeros niveles escolares se apoye y oriente al

[26] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), es una organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes.

estudiante en el desarrollo de la habilidad en los datos y que puedan razonar con ellos, comprender y explicar la variación de los mismos.

El proyecto GAISE[27] propone en el primer nivel, se aborden las ideas básicas de la probabilidad, que comprenda qué ésta, es una medida de la posibilidad de que algo va a suceder. Ya para los siguientes niveles los estudiantes sacan conclusiones y conocen el papel que desempeña la aleatoriedad en la toma de decisiones.

En esta investigación merece mención particular la *simulación.* Dado que las propiedades de un fenómeno aleatorio pueden ser estudiadas mediante la simulación a través del ordenador y que es factible modelar experiencias para potenciar el aprendizaje ya que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían más abstractos y poco prácticos reproducirlos.

Las etapas centrales de este trabajo consistían en buscar *y seleccionar materiales didácticos disponibles en Internet*, *pensados para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.* Agotado este momento se pasó a *Clasificar los materiales encontrados en categorías: juegos, exploración de conceptos, problemas, lecciones o libros de texto virtuales, videos tutoriales y preparar listados de estos recursos, con las direcciones donde están disponibles*. La intención de un tercer momento fue hacer corresponder con lo contemplado en el currículo cada uno de los recursos y simulaciones clasificadas como valiosas para la enseñanza, y a continuación se seleccionaron solo tres recursos de cada categoría para realizarle un análisis epistémico de los objetos matemáticos involucrados en dicho recurso. Finalmente

[27] Guidelines for assement and Instruction in Statistics Education (GAISE), es una guía para la instrucción y evaluación en educación Estadística. Fue creado por la Asociación Americana de Estadística en 2003 y contiene recomendaciones para enseñar y evaluar tópicos estocásticos, especialmente los aspectos conceptuales y el razonamiento estadístico, desde los niveles escolares iniciales.

se valoró la *idoneidad didáctica de los mismos y las posibles dificultades a priori que se pueden dar en su utilización para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria.* De lo anterior se concluye que los recursos valorados presenta una alta Idoneidad Afectiva pues favorecen la motivación y el interés de los estudiantes por su manipulación y además presentan una forma más atractiva que le permite al alumno tener un rol más activo en su proceso de aprendizaje.

Esta propuesta aporta para la investigación las siguientes conclusiones:

- Para continuar el análisis de los recursos didácticos en Internet relacionados con la probabilidad, se puede considerar el desafío de diseñar unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria que incorpore estos recursos y con la intensión de valorar si presentan alguna mejora en la adquisición de los conceptos probabilísticos, o si estos materiales pueden servir como una estrategia para fomentar el aprendizaje autónomo por parte del estudiante y así estimular su interés por los temas de probabilidad.

JIMÉNEZ, J[28]. En su trabajo para obtener el título de grado en educación primaria, "Diseño y Planificación de la noción de Azar y Probabilidad en Educación Primaria", hace énfasis en la importancia de desarrollar nociones probabilísticas en los estudiantes durante los primeros años de escolaridad. En su estudio implementó una propuesta didáctica para el desarrollo de la noción de azar y probabilidad y,

[28] JIMÉNEZ VARGAS. Josué. "Diseño y Planificación de la noción de Azar y Probabilidad en Educación Primaria". Trabajo de grado para obtener el título en educación primaria. Cádiz. Universidad de Cádiz. 2014. 64 p. Disponible en: http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/16628/Disen%CC%83o%20y%20Planificacio%CC%81n%20de%20la%20nocio%CC%81n%20de%20Azar%20y%20Probabilidad%20en%20Educacio%CC%81n%20Primaria%20%28TFG%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y

para ello tuvo en cuenta el contexto del estudiante para la realización y aplicación de la estrategia.

En éste trabajo de investigación se alude de manera reiterada a los planteamientos que autores como Fischbein, Freudenthal, Godino, Batanero y Cañizares, entre otros, han aportado al desarrollo de la enseñanza de la probabilidad y las razones por las que es importante potenciar el pensamiento aleatorio mediado por situaciones de juegos de azar o situaciones relativas a contextos cercanos al niño como por ejemplo el mundo biológico, físico, social y político.

Así mismo, en esta propuesta de grado se hace un aporte desde lo teórico para mostrar cómo debería ser la enseñanza del azar y la probabilidad en el aula primaria. Al respecto, se presenta las pasos que implica según Bruni y Silverman, el uso de materiales manipulativos y resolución de problemas para relacionarlos con los concepto de fracciones y proporciones que son conexos con la probabilidad. Los cuatro momentos son:

- Introducir el modelo: Consiste en una discusión para elaborar el vocabulario.
- Establecer un sistema de registro: En este paso los alumnos deben de realizar una trascripción de las experiencias a tablas, diagramas y gráficos.
- Reflexión sobre la experiencia: Trata sobre la identificación de posibles modelos, la síntesis de información y el planteamiento de nuevos interrogantes.
- Generación de nuevas experiencias: Los alumnos deben explorar actividades relacionadas.

Cabe resaltar que en este estudio se pone de manifiesto que la teoría más completa y que no puede descartarse en la enseñanza de la probabilidad es la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Afirma que los tipos de situaciones a-didácticas se deben abordar como punto de partida para que todo proceso de enseñanza-aprendizaje matemático sea contextualizado y el alumno pueda construir su propio conocimiento.

4.2 ANTECEDENTES NACIONALES.

Pinzón, D.[29] en su tesis para obtener el grado de Magister en Educación, “Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de móviles”, revela que dentro de sus hallazgos, después de implementar una propuesta de aula, se evidencia el efecto de trabajar con la tecnología en especial con aplicaciones para dispositivos móviles a nivel de la enseñanza en el aula. Su propósito se enfocó en establecer las implicaciones que podría tener el proceso de creación de aplicaciones móviles para manejo de sistema de datos, en las habilidades de pensamiento aleatorio en el contexto de la investigación escolar.

Buscando aprovechar el potencial didáctico y reconociendo lo significativo que resulta ser para los estudiantes el hecho de trabajar con la tecnología. Se aprovechó la circunstancia para implementar una secuencia didáctica en la que se dé el manejo básico de sistemas de datos y de esta manera se pueda indagar por las posibles implicaciones en las habilidades de pensamiento aleatorio en los estudiantes de educación media de una Institución Educativa pública del municipio de Marinilla, Antioquia.

La investigación resalta la necesidad de potenciar los aprendizajes de los estudiantes en la enseñanza de la estadística, aprovechando el auge que se da por

---

[29] Pinzón, D. “Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles. Un estudio exploratorio en semilleros de investigación escolar en la educación media. Tesis de maestría en educación. Medellín. Universidad de Antioquia, 2015. 211 p. Disponible en: http://200.24.17.68:8080/jspui/bitstream/123456789/2114/1/JC0220_Diegofernandopinz%C3%B3n.pdf

parte de los éstos al uso de herramientas tecnológicas y que imperan en la cultura digital del momento. En este sentido se adopta la didáctica basada en las TIC, como una manera atractiva, eficaz y pertinente de generar nuevos conocimientos. Y a su vez se convierte en un ámbito formativo indispensable para ejercitar en los estudiantes la comprensión de información estadística, el uso de nociones de azar y probabilidad y la aprehensión de instrumentos afectivos y cognitivos que, como ciudadanos, les permita desenvolverse en un mundo caracterizado por la incertidumbre y por la saturación de información en variados medios y de diversas tipologías.

Esta investigación presentó un enfoque cuantitativo de corte cuasi experimental y de tipo exploratorio donde el grupo control y el experimental se conformaron de manera aleatoria entre los integrantes del semillero de investigación de la institución foco de estudio. A ambos grupos de estudiantes se les aplicó una prueba de razonamiento estadístico “antes” y “después” de la implementación de la secuencia didáctica.

En cuanto a los hallazgos que surgieron después de finalizada la intervención la investigación encontró que existe una variabilidad significativa en el grupo experimental con respecto al grupo control, específicamente en la habilidad para interpretar probabilidades correctamente. Lo anterior se evidencia al analizar los diagramas de caja para el grupo experimental y encontrar que estos son simétricos, lo cual traduce que en esta habilidad mejoró después de la secuencia didáctica. Se encuentra que para el grupo control en esta habilidad si hay desmejoramiento y que un reducido número de estudiantes presenta mejoras en el desempeño.

Hecho el análisis de la habilidad, comprender la probabilidad como razón, de nuevo se encuentra una diferencia que beneficia al grupo experimental aunque en este caso solamente es porque presenta menos valores atípicos en sus valores extremos de ambas distribuciones.

Con respecto a la habilidad para comprender la variabilidad muestral, ahora es el grupo control que evidencia mejor desempeño al encontrarse que se da una tendencia a la mejora con respecto al grupo experimental.

A manera de conclusión en este estudio se encuentra que si existen diferencias significativas en los datos extremos de los grupos y que se reflejan en al menos dos habilidades de razonamiento estadístico o pensamiento aleatorio. Estas afectaciones favorable en las habilidades de "interpretar probabilidades correctamente" y "ley de los grandes números" son susceptibles de mejora y desarrollo en el semillero de investigación a través del proceso de diseño y programación de aplicaciones móviles para el manejo de sistema de datos.

LONDOÑO, H.[30] en su trabajo de grado para optar el título: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, bajo el título "Diseño de una unidad didáctica lúdica para mejorar la habilidad de pensamiento aleatorio y probabilístico", plantea que a través del juego como herramienta lúdica, motivadora e interactiva se pretende mejorar el proceso de enseñanza y de aprendizaje del concepto de probabilidad en un grupo de 22 estudiantes de un décimo grado, en una Institución Educativa privada del municipio de Villa María (Caldas).

En esta investigación se plantea que la probabilidad, si bien cuenta con un soporte teórico desarrollado desde el siglo XVI, para el caso de los niveles de educación básica aun no es claro ni es completamente abordada por los docentes en las aulas. Se expresa que el mayor énfasis se ha dado en los niveles superiores de formación

[30] LONDOÑO, H. "Diseño de una unidad didáctica lúdica para mejorar la habilidad de pensamiento aleatorio y probabilístico". Trabajo de grado para optar el título: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Manizales. Universidad Nacional de Colombia, 2016. 111 p.

y en los ámbitos de investigación relativos a tesis doctorales y de maestrías entre otros.

El diseño metodológico de este trabajo partió de aplicar una prueba de entrada donde se pretende conocer los posibles errores y obstáculos que los estudiantes pueden evidenciar en sus nociones previas del concepto de probabilidad. A partir de los resultados de la prueba se implementa la unidad didáctica que pretende mejorar los conocimientos en este tema en particular. En la medida que se iba trabajando en la unidad de aprendizaje también se aplicaron pruebas para indagar el nivel de conocimiento adquirido durante la enseñanza. Ya para cerrar la intervención se hizo una prueba final la cual indagaba sobre el manejo conceptual y numérico de los aprendizajes en los estudiantes.

Su estrategia didáctica está orientada a la resolución de problemas ligados a la participación y diseño de juegos de mesa y sus respectivas reglas. Su objetivo consiste alcanzar un aprendizaje significativo, divertido y profundo mediante la acción de jugar. Igualmente es la misma actividad se pretende evaluar la adquisición de los conocimientos en la probabilidad.

Esta propuesta resalta el valor del juego para alcanzar el aprendizaje y lo asocia con el medio que culturalmente emplea el adulto para inconscientemente adelantar procesos de socialización en el niño y también lo referencia como instrumento para apoyar los procesos de formación integral en la misma escuela. A su vez, en el referente teórico hace alusión a teorías psicológicas que sostienen la idea de desarrollar la inteligencia, la emocionalidad y su componente cognitivo mediante el juego. También destaca el papel del juego en el aprendizaje de la matemática, resalta que su aporte al conocimiento de esta área se genera cuando las personas han pasado tiempo pensando y creando acertijos, problemas ingeniosos, rompecabezas geométricos y los mismos cuadrados mágicos, entre otras acciones lúdicas.

La intervención didáctica de este trabajo de investigación, con enfoque cuantitativo-descriptivo, quiso mostrar que la mayor cantidad de temas que se trabajan en el aula, especialmente en la aritmética, el álgebra y la estadística (probabilidades), son susceptibles de enseñarse desde el juego y desde planteamientos fundamentados en la lúdica.

Hecho el análisis de resultados de las pruebas trabajadas se hace mención de los siguientes hallazgos producto de esta experiencia:

- La prueba de entrada identificó que los estudiantes de grado 11 del colegio granadino presentan grandes falencias en el manejo conceptual y analítico de azar, probabilidad y aleatoriedad.

- Los ejercicios lúdicos aplicados muestran como el estudiante ve con mayor claridad las nociones y conceptos básicos de la probabilidad. También se aprecia, como ganancia, la eficacia de la unidad didáctica para desarrollar la habilidad de pensamiento aleatorio. Así mismo, los resultados de la prueba de salida sustenta que los estudiantes mejoraron sustancialmente su conocimiento en el pensamiento aleatorio.

Como recomendaciones esta investigación sugiere las siguientes acciones:

• Es necesario trabajar con atributos de cosas o personas, de manera que la frecuencia de que ocurra un evento no se confunda con el evento mismo.

• El docente puede proponer actividades de contraejemplos para asegurarse que el estudiante está entendiendo el concepto o proceso.

• Las actividades lúdicas promoverán un aprendizaje significativo del concepto azar, aleatoriedad y probabilidad, por lo tanto, se recomienda aplicar la Unidad Didáctica, y al utilizar las TIC, se pueden obtener mejores resultados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.3 ANTECEDENTES LOCALES

En cuanto al ámbito local y en consonancia con algunos tópicos particulares de esta propuesta, se reconoce el trabajo de CARREÑO, J[31] quien en su tesis para optar el título de magister en pedagogía, "Las situaciones didácticas aplicadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en el aprendizaje de estudiantes de noveno grado" refiere que los educadores deben apropiarse de estrategia y metodologías efectivas para poder dar respuesta y ser pertinentes con las exigencias que demanda la sociedad moderna de la educación. En este sentido propone la Teoría de Situaciones de Didácticas de Guy Brousseau como estrategia para potenciar los aprendizajes en los estudiantes asociados a los sistemas de ecuaciones.

De otro lado, en este trabajo se plantea abordar la enseñanza mediante el desarrollo de una unidad didáctica mediada por la Teoría de Situaciones y en este sentido se convierte en una referencia importante para esta propuesta. Las razones de ello se concretan dado que con en base a situaciones didácticas de *acción, formulación y validación* involucra a los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de enseñanza para lograr movilizar los aprendizajes y así poder verificar si se reconoce avances en relación a la prueba inicial y final plasmadas en los objetivos de investigación.

El autor encuentra que la estrategia implementada evidencia alcances para superar las dificultades presentes en los estudiantes en relación a la adquisición de

[31] CAREÑO BELTRAN, Jorge Iván. Las situaciones didácticas aplicadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en el aprendizaje de estudiantes de noveno grado de una institución oficial de Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander, 2016. Tesis: obtener título de maestría. Publicada. P.237

aprendizajes referidos a sistemas de ecuaciones lineales. Es decir hay señales que permiten ver que los estudiantes se desempeñaron con mayor fluidez a la hora de implementar sus ideas para elaborar sus conocimientos e igualmente la implementación de las Situaciones Didácticas permitió ganar confianza y revela que los estudiantes en su desempeño actitudinal mostraron cambios positivos.

Un segundo trabajo de investigación a nivel local, se desarrolló en el año 2016 en la Universidad Industrial de Santander, y se titula: "Intervención didáctica enfocada en el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de sexto grado en la comprensión de graficas estadísticas" cuyo autor es: Maira Alejandra Martínez Avendaño[32].

El objetivo que de este estudio buscó determinar en los estudiantes la evolución de los niveles de pensamiento mediante la implementación de una estrategia didáctica basada en las situaciones didácticas de acuerdo a la taxonomía SOLO aplicada al análisis de graficas estadísticas.

En esta tarea investigativa de enfoque cualitativo y con diseño de investigación acción la autora plantea abordar desde una estrategia didáctica la interpretación y análisis de graficas estadísticas para fortaleceré los niveles de pensamiento en los estudiantes. Lo anterior lo sustenta la investigadora desde el análisis realizado a los resultados de las pruebas externas en las que la institución objeto de estudio ha participado. En este sentido el interés lo determina las dificultades que evidencian los estudiantes en relación a la competencia *razonamiento y argumentación* y al pensamiento *aleatorio.* Cabe señala que la competencia y el componente matemático se determinan de manera semejante y desde las mismas necesidades

[32] MARTINEZ AVENDAÑO, Maira Alejandra. Intervención didáctica enfocada en el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de sexto grado en la comprensión de graficas estadísticas. Tesis, Maestría. Universidad Industrial de Santander. 2016. P. 188

que evidencian los estudiantes en consonancia con el estudio que pretende desarrollar esta investigación.

La autora, desde su propósito investigativo enmarca su intervención en el aula partiendo de un cuestionario diagnóstico inicial, que de acuerdo a los hallazgos permite orientar el diseño y desarrollo de la secuencia didáctica basada en las Situaciones Didácticas y concluyen esta etapa con un cuestionario de cierre. Desde este escenario la obtención y análisis de la información lo aborda la investigadora por medio de instrumentos de registro como el diario de campo, protocolo de cuestionario y de secuencia didáctica. Y posterior a ello se realiza el análisis y discusión de resultados, lo cual permite hacer la discusión entre los hallazgos y la teoría que regula este estudio.

Desde el apartado que corresponde a la discusión de resultados y las conclusiones la investigadora contrasta los hallazgos con el objetivo planteado. Para ello se exponen las principales dificultades que presentaron los estudiantes a la hora de *describir y representar datos* en la parte inicial con el diagnóstico y después de la intervención, con la prueba de cierre. Esta categorización estuvo regulada por el marco teórico que sustenta la propuesta. Del mismo modo, se establece que la estrategia basada en la teoría e situaciones se considera una oportunidad para reflexionar y analizar el desempeño de los estudiantes en actividades grupales e individuales para alcanzar un nivel desarrollo de la competencia razonamiento y argumentación.

4.4 FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

4.4.1 La alfabetización probabilística: conexiones entre lenguaje cotidiano y especializado. Los seres humanos, desde temprana edad tienen contacto con situaciones en las cuales está inmersa la incertidumbre y el azar.

Tal exposición, a esos problemas del contexto hace que muchas personas se interesen por conocer con más detalle su propiedades y para ello, necesariamente deben movilizar nociones y creencias específicas que conlleven a contar con nuevos conocimientos para responder las demandas de la situación. Si dado el caso, los sujetos carecen oportunidades para desarrollar ciertas habilidades y aprendizajes, entonces su desempeño ante los desafíos de carácter aleatorio o azaroso, probablemente incurre en errores o equivocaciones a la hora de tomar sus decisiones. Al respecto Laplace, citado por Vásquez y Alsina[33] dice: "*el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación*". La vigencia de tal premisa en el mundo actual, exige redefinir y fortalecer la enseñanza de este concepto para dotarlo de significado en el proceso de aprendizaje que alcance el estudiante.

En este sentido, el propósito de la educación en estadística es llegar a alfabetizar probabilistamente a las personas. De acuerdo a este presupuesto, Gal, citado por Vásquez y Alsina[34], resalta la importancia de educar al ciudadano en el sentido de ampliar su conocimiento para que esté en la capacidad de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real. Lo cual sugiere estar preparado para la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones. En consonancia con tal recomendación, los NTCM incluyen en el currículo formal el componente de datos y azar, esto con la idea de desarrollar programas para consolidar conocimientos, capacidades y actitudes necesarias para desenvolverse adecuada y críticamente en situaciones de incertidumbre. Las posturas antes expuestas, recomiendan que al inicio de la escolaridad los estudiantes aborden de manera progresiva una propuesta de enseñanza que

---

[33] Vásquez

[34] VASQUEZ, Claudia. ALSINA, Ángel. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Bolema, Rio Claro. 2017. P. 2. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0454.pdf

propenda, en primer lugar por la adquisición del lenguaje probabilístico y a medida que se avance en la misma, se puedan consolidar habilidades y conocimientos para alcanzar una alfabetización probabilística pertinente.

En la consecución de este propósito, se hace relevante la formación del profesorado, pues según los autores, las oportunidades de aprendizaje se potencian si los maestros ofrecen una enseñanza de calidad, donde se coloquen en escena los conocimientos y preparación para enseñar. También se afirma, que la fundamentación del docente conlleva a centrar el interés en la didáctica de las matemáticas dado que es necesario otorgar una formación inicial y continua que permita enseñar, de manera idónea, la probabilidad y que a la vez impulse el desarrollo de la alfabetización probabilística.

Desde luego, que el plus requerido para dar un impulso a la enseñanza es de carácter didáctico y en esta lógica, para incorporar progresivamente un lenguaje pertinente y avanzar hacia la construcción del conocimiento probabilístico se hace obligante que los estudiantes estén expuestos a situaciones de aprendizaje, donde para dar una solución deban conectar su lenguaje cotidiano con un lenguaje especializado. Según Vásquez y Alsina[35], para que el estudiante pueda transitar e interiorizar de un lenguaje común a un léxico propio y preciso a la hora de comunicar el azar y la probabilidad se requiere conjugar el elemento cognitivo con otro elemento de tipo disposicional. Es decir, un comportamiento alfabetizado de la probabilidad en el sujeto se manifiesta cuando se está en la "la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real”[36]. Lo recomendado en este enfoque es que los estudiantes tengan experiencias que ayuden a apreciar el poder y la precisión del lenguaje probabilístico.

---

[35] Ibit. Vázquez y Alsina

[36] Ibit. Vásquez y Alsina

Ahora bien, ante la idea de que los estudiantes aprendan gradualmente la noción de probabilidad y simultáneamente asimilen el lenguaje probabilístico exige también conocer elementos asociados al razonamiento que despliega el estudiante a la hora de resolver problemas en contexto de incertidumbre. En este sentido, los conceptos, nociones y aspectos relevantes del razonamiento probabilísticos a describir son los siguientes:

4.4.2 Noción de aleatoriedad. Se reconoce que para trabajar el cálculo de probabilidades es necesario empezar por hacer un acercamiento a la noción de aleatoriedad y a la idea de probabilidad, así lo expresa Batanero y Serrano[37] al considerar que es el punto de partida para poder llegar a una reflexión epistemológica que permita hacer una interpretación de los elementos básicos referidos a la naturaleza de los objetos que lo representan. Igualmente existe un interés, según estos autores de intensificar en los currículos de matemáticas, para los niveles de educación básica el estudio de los fenómenos aleatorios.

Lo anterior es un complemento a lo que se percibe tanto en las expresiones usadas en el lenguaje cotidiano, como en los libros de texto escolares; pero igualmente advierten que se ha creado cierta dificultad de comprensión en los estudiantes en relación al significado mismo que encierra esta entidad abstracta, dado que "*no queda unívoca y nítidamente determinado*"[38]. Es decir, al significar un objeto matemático en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje es necesario evitar reducirlo a su mera definición matemática dado que las personas en distintos momentos históricos y desde distintas intuiciones han interpretado e intentado dar solución a las diversas situaciones problémica en donde interviene el concepto. En este sentido la noción de aleatoriedad hasta el día de hoy se resiste a recibir una

[37] BATANERO Carmen; SERRANO Luis. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. 1995. P. 1. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf
[38] Ibit., p. 1.

definición sencilla que permita determinar con facilidad "*si un suceso o una secuencia de sucesos es o no aleatoria*"[39].

Para intentar dejar una idea que sintetice el significado de aleatoriedad y a su vez, permita explorar y conocer las diferentes relaciones con conceptos adyacentes y, en esta lógica se pueda hacer un aporte en el momento de la enseñanza a las ideas primarias que presenten los estudiantes objeto de estudio se recoge las siguientes precisiones:

En un primer momento los autores Batanero y Serrano[40] de acuerdo a las acepciones encontradas asocian el concepto a fenómenos como la suerte y el azar, entendido desde una óptica de la causalidad. Para ejemplificarlo, explican que lo aleatorio es diferente a aquello de lo que se conocen sus causas ya sean naturales, humanas o divinas. Es decir, aquellas situaciones desligadas de los fenómenos determinísticos y, atribuyen al azar esa causa posible, la cual "*suprimía la posibilidad de que la voluntad, inteligencia o conocimiento humano influenciara la decisión o el destino*"[41]. Desde otra perspectiva, lo aleatorio podría asumirse como *todo fenómeno que tiene una causa ya sea por alguna razón o necesidad.* Por lo tanto, no hay inferencia del azar y si ha de usarse, es debido a que se desconocen las causas del fenómeno. En palabra de los autores, es la ignorancia del sujeto la que genera la aparición del azar y por ende lo aleatorio adquiere un carácter subjetivo.

Poincare, citado por Batanero y Serrano encuentra la anterior definición insatisfactoria y aduce que existen fenómenos considerados como deterministas de los cuales ignoramos sus leyes y también se reconocen fenómenos con causas conocidas explicados por leyes probabilísticas. De lo dicho, se concluye que causas

---

[39] Ibit., p. 1.
[40] Ibit., p. 1.
[41] Ibit., p. 2.

pequeñas provocan efectos considerables, resultando imposible su predicción y en otros casos es la complejidad de las causas lo que determina el resultado aleatorio. En consecuencia, es independiente el nivel de conocimiento sobre el fenómeno para considerar que se pierde la validez como fruto de la ignorancia.

Otra dimensión a la que se puede acudir para seguir abordando la idea de aleatoriedad, es asociarla a la noción de equiprobabilidad. Esto es, considerar que cuando ninguna razón favorece un evento frente a los demás, se asigna la misma probabilidad a los dos eventos, es decir tenemos que ser "indiferentes" (principio de indiferencia). En este sentido Bennett, citado por Batanero y Serrano[42] Indica que para conseguir que el desplazamiento de situaciones aleatorias se enmarque no solo en los juegos de azar sino también en los fenómenos naturales se introduce a comienzos del siglo XIX el concepto de "independencia", el cual permite asegurar la aleatoriedad de un suceso en repetidos experimentos.

Cabe señalar que en la actualidad la idea de aleatorio es una noción que para su comprensión requiere de la probabilidad y más precisamente del significado que se le otorga a esta. Por ejemplo, frente al significado clásico un suceso es aleatorio *si la probabilidad es similar a la de cualquier otro suceso de su misma clase.* Lo anterior, conlleva a que se consideren solo clases finitas dado que habría dificultad para discernir cuando un evento es o no aleatorio en una clase dada. Y por ende aparecen los siguientes cuestionamientos ¿Cómo saber si una moneda o un dado están sesgados? O ¿qué ocurriría para los sucesos elementales no equiprobables? Sin embargo, el acercar la aleatoriedad a la idea de equiprobabilidad es productivo para casos como "*definir las muestras aleatorias, todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, o la asignación aleatoria de sujetos a los experimentos, cada sujeto tiene la misma probabilidad de ser asignado al grupo experimental o al control"[43].* Pero al conectar estas ideas a situaciones del mundo

[42] Ibit., p. 2
[43] Ibit., p. 3

físico o natural, ya sea grupo sanguíneo o un carácter hereditario se presentan obstáculos de tipo teórico como son el decidir la cantidad de experimentos a realizar para que sea suficiente conocer el carácter aleatorio del objeto.

Como salida a esta coyuntura de interpretación Kyburg, citado por Batanero y Serrano[44], no están de acuerdo con este enfoque y propone asumir la aleatoriedad desde los siguientes términos:

- el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase,
- el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo),
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada,
- el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

4.4.3 La idea de probabilidad y relaciones en el ámbito escolar. El empleo de la palabra probable o probabilidad en el lenguaje cotidiano permite observar que es una expresión de uso constante y de aparición espontanea a la hora de referirse a situaciones que en muchos casos se asocian a la incertidumbre y en otros, a eventos que las personas no pueden determinar su resultado con facilidad. Lo anterior hace pensar que su uso extendido se da porque hay una buena comprensión del concepto o de sus significados y desde luego habría confianza para apropiarlo. Pero también puede tomarse como un ejercicio exagerado y descontextualizado de las situaciones en las que se emplea. En tal sentido hay una manifiesta intensión por conocer más de cerca el concepto como tal y los diversos significados atribuidos a la hora de resolver problemas del contexto aleatorio.
De acuerdo a lo anterior, en el campo de la investigación y en el ámbito educativo la probabilidad en los últimos años ocupa un lugar de privilegio a la hora de analizar las implicaciones que ésta tiene en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta

[44] Ibit., p. 4

medida, investigaciones como la Batanero, Henry y Parzysz, citadas por Díaz[45] señalan que el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad no ha estado ajeno a los desafíos y debates que ofrecen resistencia para que se posicione como contenido matemático que permita dar respuestas a las situaciones problema en los niveles iniciales de la educación básica. Sin embargo esta aceptación se hadado de manera gradual y a lo largo del currículo escolar.

Según la autora, la probabilidad se manifiesta con Cardano alrededor de 1660 como tema inherente a problemas vinculados con los juegos de azar, aunque se destaca que el surgimiento de este tópico se remonta a prácticas de juegos de azar en las civilizaciones de la antigüedad. Por supuesto durante diferentes épocas de la historia, el concepto de probabilidad ha estado vinculado a significados como: *"algo merecedor de aprobación", "lo probable es lo que usualmente ocurre", "fue asociado a lo pagano", "aprobación o aceptabilidad de algo por parte de personas inteligentes" "probabilidad como evidencia de aprobación de proposiciones".* Pero, es realmente con Cardano que hay un argumento teórico para hacer cálculos y dar solución a problemas concretos. En efecto, esto si ayuda para que más adelante se dé inicio a la formulación de una teoría clásica de la probabilidad.

El desarrollo de este concepto continúa dándose con el paso del tiempo y muchas veces se asocia a situaciones de carácter subjetivo, como son los grados de prueba trabajados por Leibniz en situaciones vinculados al derecho o como lo propone Huygens al centrarse en el tema de esperanza matemática en donde los problemas son de tipo aleatorio y con enfoque frecuentista.

Posterior a estos teóricos, la autora destaca los aportes que Bayes imprime a la concepción subjetiva de la probabilidad. En el sentido en que se formaliza la teoría probabilística al avanzar desde la concepción de medida hacia el estudio en una

[45] VÁSQUEZ, Óp., cit., p. 44.

idea de tipo condicional. Es decir, se pasa de entender la probabilidad como magnitud que determina la frecuencia de ocurrencia de un suceso particular, y se llega a asumir el suceso aleatorio, en términos a-priori. Lo que quiere decir que primeramente se evalúa el riesgo para luego conocer la posibilidad de ganar. De ahí que esta concepción se conozca como bayesiana.

Cabe resaltar en este recorrido, los aportes que Laplace presenta según la autora para destacar la definición clásica de probabilidad. Esta idea se formaliza entendiendo que el experimento está delimitado a un número finito de suceso y en este contexto la probabilidad se define como "*la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables*"[46]. Cabe señalar que esta interpretación es empleada para marcar diferencia con el enfoque bayesiano, posibilitando que se destaque la corriente frecuentista como significado opuesto. No obstante advertir, que en este enfoque clásico queda por definir la probabilidad para suceso no equiprobables.

Como consecuencia de la inconsistencia anterior, la autora expresa que se surgen nuevas interpretaciones de la probabilidad, tal es el caso de la teoría lógica que busca responder al grado de creencia racional para evaluar una proposición según la información que aporte otra proposición. En oposición a este enfoque frecuentista surge la corriente subjetiva que postula la existencia de un grado de creencia personal asociado a la experiencia de cada sujeto y desde allí se determina la validez de una determinada proposición.

En conclusión todas aquellas contribuciones a lo largo de la historia se convirtieron en la base para poder comprender el proceso de construcción y consolidación de los significados vinculados a la interpretación de la probabilidad.

---

[46] Ibit., p. 53

A continuación se realiza un recorrido somero por los significados que se consideran relevantes para abordar las situaciones aleatorias en la matemática escolar.

4.4.3.1 Significado intuitivo. Las ideas intuitivas asociadas al razonamiento probabilístico se caracterizan por emplear un lenguaje en donde se *"utiliza la probabilidad sin formalización y sin llegar a una asignación numérica, es decir, en forma cualitativa"*[47]. El uso de términos como *posible, previsible, chance, presumible, factible, viable*, entre otros hacen referencia al lenguaje de uso común para expresar un grado de creencia, cuantificar situaciones relativas a los juegos de azar y en general a sucesos de carácter aleatorio.

La aparición de este significado en las ideas matemáticas está asociado a los ejercicios cotidianos que las personas, que tanto adultas como niños han practicado y conservado en sus culturas durante muchos años. De acuerdo a lo que expresa Batanero[48], este significado de la probabilidad puede emerger de personas que no estén alfabetizadas en este objeto matemático, sin embargo el hecho de estar ligados a situaciones como las apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y el concepto de juego equitativo exige que los sujetos elaboren o construyan un conjunto de palabras que son usados de manera coloquial en tales actividades y que les otorgan un apoyo o solución para tomar decisiones o llegar a acuerdos entre los que participan de la situación. Así este significado está más asociado a las creencias y por ello se identifica más con el aspecto subjetivo que con cálculos que requieren de una mayor elaboración matemática.

---

[47] GÓMEZ, Emilse; GARCÍA, José Miguel Contreras. Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, 2014, vol. 31, no 87, p. 3. Disponible en: http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/%5Bfield_volumen-formatted%5D/epsilon87_2.pdf

[48] BATANERO, Carmen. Significados de la probabilidad en la educación secundaria: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 2005. P. 253 Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302

4.4.3.2 Significado laplaciano o clásico. Se entiende que esta definición de probabilidad es la más extendida y aceptada en el contexto escolar. Es decir, hay evidencia de un uso prolongado y en ocasiones generalizado para calcular la probabilidad de cualquier situación. En este sentido, la interpretación que demarca su aplicación considera la probabilidad de un suceso como "*la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables*"[49]. Y por ende se restringe a espacios muéstrales finitos, excluyendo aquellos experimentos con infinitas posibilidades o los finitos no simétricos.

Según Batanero[50], el significado clásico siempre estuvo implícito en los problemas y trabajos que surgieron en los comienzos de la formalización de la probabilidad, pero es con De Moivre que se define una expresión matemática la cual se materializa en una fracción de cuyos elementos constitutivos (denominador y numerador) se pueden asociar respectivamente al total de chances de la ocurrencia del suceso y el número de chances favorables. La autora también precisa que esta definición la delimita Laplace cuando afirma que la expresión matemática se cumple cuando el número de suceso en la experiencia aleatoria es finito y además si cada suceso cuenta con igual posibilidad de ser elegido.

De acuerdo a la anteriormente expresado se encuentra que el algoritmo planteado para definir este significado no satisface la pregunta de qué es en si la probabilidad, pensándose entonces que este significado apenas puede aplicarse al contexto de los juegos de azar ya que fuera de este hay situaciones a las que no es posible evaluar una medida de la probabilidad empleando solamente este algoritmo.

---

[49] ALSINA, Op, cit., p. 7.
[50] BATANERO, Op, cit,. p. 8

4.4.3.3 Significado frecuencial. Este significado en parte se configura debido al conflicto que presenta la anterior concepción. Según Vásquez[51], Bernoulli es quien plantea la probabilidad de un suceso considerando la frecuencia relativa generada en un elevado número de repeticiones del experimento. Es preciso aclarar que las condiciones deben ser las mismas en la experimentación, lo que se torna contraproducente y difícil de alcanzar. Está también asociada a la ley de los grandes números y en consecuencia para observar cierta regularidad en los resultados del experimento, se debe alcanzar un alto número de repeticiones.

4.4.3.4 Significado subjetivo. Desde este enfoque, la probabilidad es dependiente de quien la aplique. Es decir, es la confianza que expresa el sujeto sobre la validez que éste tiene o concibe del suceso en estudio. De acuerdo con Gómez, Batanero y Contreras[52], el carácter subjetivo lo establece el sistema de creencias de la persona y se concibe, que quien asigna la probabilidad fundamenta su interpretación en una información previa del suceso observado, lo cual le da ventaja para tomar decisiones. En este contexto el empleo de los datos que aporta la situación se traslada al teorema propuesto por Bayes. Es decir, se puede ofrecer una expresión numérica que represente el grado de ocurrencia a partir de la definición de probabilidad condicional.

4.4.3.5 Significado matemático-axiomático. De acuerdo a los matices que implica su estudio este significado de la probabilidad se aleja un tanto de los contenidos y las situaciones que se abordan en el nivel de básica primaria. Sin embargo, para

Batanero, Henry y Parzyzs, citados por Alsina[53] se recomienda adoptar desde la enseñanza una postura que permita integrar los diferentes significados de la

[51] VÁSQUEZ. Op. cit., p. 61
[52] GÓMEZ. Op. cit., p. 28.
[53] VÁSQUEZ ORTIZ, Claudia Alejandra; ALSINA, Angel. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación

probabilidad y desde esta óptica se complemente y ofrezca una comprensión adecuada del concepto. En este sentido, la idea que enmarca este significado se construye según Vásquez[54], aproximando la teoría de medida, trabajada por Borel y la teoría de conjuntos empleada por Kolmogorov para proponer axiomas que permiten describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios.

La siguiente tabla, propuesta por Batanero, muestra los elementos sustanciales que caracterizan los significados de la probabilidad:

Tabla 7. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad.

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	Sorteos Adivinación	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas, etc.	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible, creencia	Suerte Destino
Laplaciano	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar.	Combinatoria Proporciones Análisis *a priori* de la estructura del experimento.	Triángulo aritmético Listado de sucesos Formulas combinatorias	Cociente de casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones.	Registros de datos estadísticos *a posteriori* Ajuste curvas matemáticas Análisis matemático simulación	Tablas y gráficos estadísticos Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Limite de las frecuencias relativas Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	Teorema de Bayes	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribución *a priori* y *a posteriori*
Matemático-Axiomático	Cuantificación de incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	Teoría de conjuntos Álgebra de conjuntos Teoría de la medida	Símbolos conjuntitas	Función medible	Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

Fuente Batanero. 2005.

El consolidado antes descrito, permite asumir que en cuanto se necesite elaborar un razonamiento probabilístico se cuenta con panorama ampliado y ejemplificado

Primaria. *Bolema: Mathematics Education Bulletin, 2017, vol. 31, núm. 57, p. 459*. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0454.pdf

[54] VÁSQUEZ. Op. cit., p. 65

tanto para plantear contrastes como para alcanzar acercamientos entre los significados y desde allí propender por movilizar los aprendizajes en los estudiantes.

4.4.4 Aproximación al razonamiento probabilístico. Son diversas las situaciones en la vida cotidiana en donde las personas están ante la necesidad de hacer razonamientos para tomar decisiones, resolver problemas o dar puntos de vista sobre la ocurrencia de un fenómeno. Gran parte de estos razonamientos las personas los asocian a una medida numérica para asignar la probabilidad de una creencia. Lo cual condiciona, de cierta manera la propia vida o la de otros.

Según lo describe Díaz[55], hay un interés desde la investigación por conocer si las personas determinan cierta regla probabilística para hacer juicios en situaciones de incerteza. Con base a este cuestionamiento, es indudable que existen obstáculos de carácter ontogenético que se manifiestan cuando los sujetos "…*obvian en el marco global de decisión la serie aleatoria y evalúan en función del resultado siguiente, cuando se encuentra bajo condiciones de incertidumbre*"[56]*.* Por tanto, la evaluación que hace la persona lo induce a realizar juicios de probabilidad que recaen en ciertos errores (heurísticas) y que afectan la toma de decisiones en muchos campos de la vida del sujeto.

De acuerdo con Díaz[57], el maestro debe conocer que a la hora de abordar la enseñanza de la probabilidad el estudiante debe tomar conciencia de la presencia de estos heurísticos y sesgos en su razonamiento, además debe comprender la razón de los razonamientos intuitivos correctos e incorrectos en los estudiantes para

---

[55] DIAZ, Carmen. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. implicaciones para la enseñanza de la estadística. Universidad de Ganada. p. 2. Disponible en: http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/docs/Papers_IX_Seminario/apresentacao%20poster/P005_IASICarmenDiaz.pdf

[56] SERRADO, Ana. CARDEÑOSO, José Mª. AZCARATE, Pilar. Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. p. 9. Disponible en: https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf

[57] DIAZ. Op., cit., p.2.

gestionar una enseñanza efectiva que ayude a superar las dificultades en relación a lograr mayor precisión en los juicios probabilísticos de los estudiantes.

Acudiendo al planteamiento anterior se hace necesario conocer más de cerca el comportamiento de estos errores sistemáticos. Se procura a continuación hacer su descripción a manera de resumen.

4.4.5 Heurísticos y Sesgos en el razonamiento probabilístico. Son varios los factores que afectan el razonamiento lógico en las personas, según Díaz[58], estos errores ocurren por el desconocimiento de las leyes de la incertidumbre o por las limitaciones a la hora de hacer los cálculos. En consecuencia, los sujetos acuden al sentido común para dar solución a determinado problema. Lo cual traduce, que la persona acude a un conocimiento de tipo intuitivo, hecho que implica hacer uso de reglas confusas para emitir sus juicios o para dar respuesta a la situación. De acuerdo a lo anterior, en éste estudio se propone describir tres tipos de heurísticas que se consideran básicas para abordar la enseñanza de la probabilidad.

4.4.5.1 Heurística de la representatividad. Para Kahneman et al, citados por Serrano[59], éste sesgo ocurre porque las personas consideran que las muestras pequeñas producidas por cada serie de repeticiones en un experimento, reflejan o guardan con exactitud las mismas propiedades que se reproducen cuando se trabaja con toda la población. Es decir, hay una tendencia en los individuos a evaluar la probabilidad de un suceso teniendo como referencia la población a la que hace parte. Por tanto, se piensa que si el evento es más probable, entonces es más representativo que los menos probables. Por ejemplo, la gente considera más probable que salga el número 7629 en la lotería que el número 3333, y lo hace porque aduce que el valor con los dígitos repetidos no es evento de aparición

---

[58] DIAZ. Op., cit., p.3.

[59] SERRANO, Luis, et al. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 1998, vol. 10, no 1, p. 2 Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/1/03Serrano.pdf

frecuente en un sorteo, lo cual lo lleva a sesgar su razonamiento ignorando que hay poca representatividad.

Es de resaltar que los sujetos condicionados ya sea por la forma como acceden a la información o por el mismo proceso cognitivo empleado son inducidos a realizar estos atajos en sus mentes. Según Moreno y Vallecilos[60], haciendo alusión a la representatividad de una muestra, consideran que las personas se ven afectadas por sus creencias pues razonan equivocadamente al pensar que una muestra debe reflejar los mismos resultados y propiedades que se generan al trabajar con la población de donde el evento es originalmente tomado. Por ejemplo, cuando se le pide a un grupo de sujetos que predigan qué número (del 1 al 12) es más probable que salga en un sorteo, la mayoría elige valores centrales (6, 7, 8) y muy pocos eligen los valores extremos (1, 2, 11, 12). Para Vásquez[61], en la ilustración anterior ocurre que las personas toman como referencia otras situaciones donde al haber elegido un valor medio les hizo minimizar en error en su pronóstico, entonces se inclinan por trasladar ese mismo razonamiento a un problema como el ejemplificado. Entre los errores más frecuentes que aparecen en el uso de esta heurística están los siguientes:

● Insensibilidad al tamaño de la muestra.

Es un sesgo relacionado con el tamaño de la muestra. Para Gómez[62] se da cuando las personas consideran que todas las propiedades de la población se transfieren al proceso de obtener una pequeña secuencia de resultados y se pasa por alto el efecto que surge al trabajar con pocas repeticiones. Es como decir que hay unas

---

[60] MORENO, Antonio; VALLESILOS, Angustias. La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria. *Departamento de la Universidad de Granada, p. 3. Disponible en: http://edumat.uab.cat/contexto/postgrau/activitats/tutormates/5ad/webs/ajudes/jornadas%20europeas%20de%20estadistica2001.pdf*

[61] VAZQUES, Carmelo. Limitaciones y sesgos en el procesamiento de la información: más allá de la teoría del "hombre como científico". Northwestern University. Evanston, Illinois. 1985. p. 7 Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/65944.pdf

[62] GOMEZ. Op. cit., p. 130

reglas para las muestras con grandes números y unas leyes para las muestras con pequeños números. El siguiente problema ejemplifica un escenario donde los sujetos pueden incurrir en juicios de este tipo.

¿Cuál es la altura media más probable de una muestra de 3000 hombres elegidos al azar? ¿Cuál es la altura media más probable de una muestra de 10 hombres elegidos al azar?

De acuerdo a los interrogantes del problema, si la respuesta se orienta a buscar los valores medio de la altura de la población se está evaluando la probabilidad por representatividad. En este caso se estaría asumiendo que el resultado depende del tamaño de la muestra, desconociendo que el valor esperado lo configura el parámetro de la población, lo cual se relaciona con la falta de comprensión de la estabilidad de las frecuencias en el largo plazo.

● Concepciones erróneas de las secuencias aleatorias

Es común pensar que en el ejercicio de resolver una experiencia aleatoria unos pocos ensayos representen fielmente el proceso aleatorio. Por ejemplo, al escribir la secuencia producida al lanzar una moneda al aire, se obtiene una serie de secuencias pequeñas (**cara, sello, cara, sello, sello, cara**), (**sello, sello, sello, cara, cara, cara**), (**cara, cara, cara, cara, sello, cara**). En esta muestra, el proceso aleatorio está representado en su totalidad por unos pocos ensayos. Sin embargo, hay quienes suelen tomar la primera secuencia como más probable que las otras y suponer que "*secuencias relativamente ordenadas no parecen aleatorias y se espera frecuente alternancia de resultados*"[63]. El anterior juicio, se conoce como *recencia negativa* y puede interpretarse también, como el hecho de que al repetirse

[63] CAÑIZARES, María Jesús. Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 1997. p.49. disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CANIZARE.pdf

mucho un evento se espera que no vuelva a repetirse y empiece a salir el evento contrario. Igualmente sucede que las personas creen que si un evento aparece repetidas veces de manera consecutiva en un experimento aleatorio, entonces el siguiente resultado volverá a aparecer ese mismo evento. Esta creencia se conoce como *recencia positiva.* Según Fischbein, citado por Vásquez[64] en el sesgo de la recencia negativa y positiva es común que las personas la apliquen a situaciones aleatorias donde hay dos tipos de símbolo (p.e lanzar una moneda) lo cual informa que se desconoce la independencia de cada repetición y por ende se cree que el proceso tiene memoria.

● Falacia del jugador.

Este heurístico es consecuencia del anterior y según Serrado, Cardeñoso y Azcarate[65] se soporta sobre la idea equivocada de la neutralidad de las leyes de azar. Es decir, se cree erróneamente que los resultados obtenidos en un experimento aleatorio pueden afectar la probabilidad de sucesos futuros. Se observa igualmente que esta heurística la enmarca el enfoque frecuencial de la probabilidad y de no asimilarse su significado se constituye en un obstáculo para determinar la estabilidad de las frecuencias relativas pues se pasa a considerar que solo ocurre para series limitadas de números. A manera de ejemplo se presenta el caso donde en una experiencia aleatoria se hace girar una ruleta dividida en dos sesiones, si se han obtenido en determinado caso seis veces el mismo color (p.e rojo) entonces se considera que el otro color (blanco) es el que tiene más favorabilidad de salir. Es decir, se toma como un supuesto equilibrio que debe conservarse al interior del experimento.

---

[64] VÁSQUEZ ORTIZ, Claudia Alejandra. Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo. Tesis doctoral. Universidad de Girona. 2014. p. 79. Disponible en: http://dugi-doc.udg.edu:8080/bitstream/handle/10256/9749/tcavo.pdf?sequence=

[65] SERRADO. Op. cit., p. 9

Existen otras heurísticas asociadas a la representatividad como son *la falacia de la tasa de base y la falacia de la conjunción*. Pero en lo que atañe a esta investigación se expresan en una descripción somera dado que su campo de intervención está determinado a contenidos tratados en un nivel de educación superior. En este sentido la falacia de *la tasa de base* es un error propio del razonamiento lógico al pasar por alto el tamaño relativo de subgrupos en la población cuando se realiza un juicio de incerteza. En algunas situaciones se asocia al teorema de Bayes para su tratamiento y su significado está más cercano al axiomático. En cuanto a la falacia *de la conjunción* se aporta la siguiente situación tomado de Díaz[66] que dice: *"la probabilidad de que una persona sea mujer es mayor que la probabilidad de que la persona sea mujer de 30 años y ésta es mayor que la probabilidad de que sea una mujer india de 30 años.*" según esta autora estas relaciones de orden entre las probabilidades no se transforman en otras correspondientes de representatividad, sino que, en ocasiones, la representativa se incrementa cuando especificamos más nuestras condiciones.

4.4.5.2 Heurística de la Disponibilidad. Se trata de errores que se dan a la hora de evaluar la probabilidad de un acontecimiento. Esta tendencia según Tversky y Kahneman, citados por Vásquez[67] ocurre cuando la persona al realizar predicciones se inclina por acudir al grado de facilidad con la que se puedan construir o recordar los ejemplos de tal suceso, pues se piensa que son más probables aquellos resultados fácil de recordar. Esto se asocia también a la escaza capacidad del sujeto en relación al razonamiento combinatorio y por tanto la valoración tiende a ser subjetiva dado que su razonamiento está condicionado por la estructura cognitiva o en otros casos se debe a factores propios de la situación que se asuma. Los siguientes sesgos se asocian a la heurística de la disponibilidad.

---

[66] DÍAZ, Carmen. Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 2005, vol. 48, p. 2. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/FALACIA.pdf

[67] VÁSQUEZ. Op. cit., p. 79

● El sesgo de equiprobabilidad.

En la descripción de este sesgo Serrado, Cardeñoso y Azcarate[68] argumentan que esto ocurre al asignarle a los posibles resultados de un experimento el mismo valor de probabilidad y además se le atribuyen esta propiedad al azar. Según Lecoutre y colaboradores, citados por Díaz[69], esta creencia no es debido a la falta de razonamiento combinatorio en los sujetos, sino más bien a que los modelos combinatorios no se sincronizan fácilmente con las situaciones modelas por la incertidumbre. La siguiente situación fue tomada de Gómez[70], quien la adaptó de la investigación desarrollada por Lecoutre y evalúa el sesgo de la equiprobabilidad en experimento compuesto.

> *Cuándo lanzamos tres dados simultáneamente, ¿Cuál de los siguientes resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:*
> *a) Un 5, un 3 y un 6,*
> *b) Un 5 tres veces,*
> *c) Un 5 dos veces y un 3,*
> *d) Los tres resultados son equiprobables,*
> *e) Es imposible saberlo.*

Según el análisis de la autora en esta situación hay favorabilidad para la respuesta del numeral d. Los estudiantes evaluados deben reconocer el espacio muestral y las probabilidades de cada suceso y utilizar el razonamiento combinatorio. En este sentido, los casos favorables al primer suceso corresponden a tripletas en las cuales se obtiene un 5, un 3 y un 2; el suceso compuesto contiene $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ sucesos elementales. Aplicando la regla de Laplace, debido a que todas las tripletas son equiprobables, la probabilidad de este evento es 6/216. En el caso del segundo suceso los casos favorables corresponden a tripletas donde el suceso compuesto

[68] SERRADO. Op. cit., p. 9
[69] DIAZ. Op. cit., p. 7
[70] GOMEZ. Op. cit., p. 215

contiene $\frac{3!}{2!} = 3$ sucesos elementales y aplicando de nuevo la regla de Laplace la probabilidad es $\frac{3}{216}$. La tercera opción solo tiene un suceso elemental y su probabilidad es $\frac{1}{216}$. Por tanto, si un estudiante no alcanza a razonar estos procesos de razonamiento combinatorio entonces se aduce que está presente el sesgo de la equiprobabilidad cuando escoge la opción de los d.

● Enfoque en el resultado aislado.

En la caracterización de este sesgo Konold, citado por Díaz[71] describe que frente a una secuencia de experimentos repetidos las personas pasan por una serie de dificultades para llegar a la interpretación adecuada de una situación aleatoria. En este sesgo de enfoque frecuencial y en parte subjetivo, el autor expresa que el sujeto valora cada repetición del experimento de forma independiente, es decir no se reconocen relaciones entre los eventos anteriores ni con los posteriores. Como afirma Konold, citado por Vásquez[72] existen sujetos que interpretan la situación de forma no probabilística y razonan como si la probabilidad del evento algunas veces sucede y otras no. En conclusión la comprensión que el sujeto alcance para realizar juicios o razonamiento adecuados está ligada a considerar idénticos resultados a partir de extensas repeticiones de un experimento y desde esta interpretación calcular la frecuencia de cada suceso particular.

---

[71] DIAZ. Op. cit., p. 7
[72] VAZQUES. Op. cit., p. 80

4.4.5.3 Otros errores en el razonamiento probabilístico. Al continuar el análisis de otros tipos de sesgos, en Díaz[73], se pueden identificar aquellos asociados a los juicios que se dan al trabajar con frecuencias. Es decir hay errores a nivel de subestimar una frecuencia alta y sobrestimar las que presentan repeticiones bajas. Por ejemplo, se le resta importancia a los eventos muy probables como las coincidencias y, se expresa alta confianza en eventos muy poco probables como los accidentes en plantas nucleares. De otro lado la autora describe que las personas depositan mayor confianza cuando se trata de tomar decisiones que se sustentan en las propias creencias. Es decir, un juicio de probabilidad esta graduado si el valor dado coincide con datos que se sustentan en la realidad. Lo anterior, es posible trasladarlo a la experiencia que viven los jugadores en los conocidos experimentos de azar, en donde ocurre que se confían tanto en que sus juicios naturales son correctos y sucede que periódicamente se equivocan dado que en las estimaciones probabilísticas sistemáticamente hay fallas.

4.4.6 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) Gay Brousseau. Desde esta propuesta de investigación se busca aportar algunas ideas que permitan apoyar y fundamentar al docente en la gestión de su enseñanza para facilitar la construcción de los conocimientos en los estudiantes. Se propone entonces, explicar a grandes rasgo los aportes que entrega la didáctica de la matemática a la enseñanza y por tanto, conocer lo que plantea esta disciplina sobre el proceso de elaboración de los aprendizajes en el estudiante; así pues, en adelante se expone lo que Guy Brousseau[74] denominó la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS)[75].

---

[73] DIAZ. Op. cit., p. 7

[74] Guy Brousseau fue alumno de la escuela Normal y después maestro durante 10 años, iniciando sus estudios universitarios en Burdeos. En 1965, creo el CREM (Centro de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática, que se convertiría en el IREM en 1969) y en 1971 comienza un trabajo sistemático de observación en una escuela primaria: intenta hacer una escuela “para la investigación”. La escuela Jules Michelet de Talence se crea oficialmente como “Escuela para la observación” en 1975. Este mismo año, obtiene en Burdeos y, al mismo tiempo en Paris y Estamburgo, un D.E.A. de Didáctica de las Matemáticas. Desde hace 20 años, experimenta los objetos de enseñanza que él produce con la ayuda de la teoría de la trasmisión de los conocimientos

Según gascón[76], es pertinente comprender los alcances que se han generado a partir de las ideas básicas de la *teoría de las situaciones didácticas* (TDS). Para conseguir en parte este objetivo se busca interpretar algunos rasgos originales en el desarrollo de esta teoría. Al momento de su génesis el interés de la TSD era construir una *ciencia didáctica en parte autónoma*, con objeto de estudio definido y en el que la noción de *fenómeno didáctico* (esto es, los fenómenos que emergen en las actividades de producción y difusión de las matemáticas, por ejemplo, el efecto Topaze[77]), se reconozca por tener el papel central y por ende se constituya en el objeto primario de la investigación de la didáctica.

Este autor destaca igualmente, que el nacimiento de la didáctica de las matemáticas está caracterizado como *epistemología experimental,* por hacer énfasis en la necesidad de *construir modelos epistemológicos propios* para los problemas didácticos de los diferentes ámbitos de las matemáticas. En este sentido, la TSD construye su versión diferenciada del modelo que considera pertinente para abordar los problemas didácticos de cada conocimiento matemático. Por ejemplo, la TSD cuestiona los modelos epistemológicos relativos a los números decimales, al conteo, a la medida de magnitudes, a la geometría o a la relación entre la estadística y la probabilidad, y para cada uno de ellos formula en términos de *situaciones* su propio modelo epistemológico.

---

matemáticos que ha ideado, que enseña, y que continúa construyendo: la didáctica de las matemáticas.

75 La teoría de situaciones de BROUSSEAU (1986, 1998) trata de aproximarse, bajo un modelo teórico, al problema del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de adaptación al medio. Por ello, proporciona herramientas muy potentes para interpretar los fenómenos específicos que se producen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

76 GASCON. Josep, La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática. 2013. No. 3, p. 3. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/2070/1/AIEM_n%C2%BA_3._J._Gasc%C3%B3n.pdf

77 En el efecto Topaze, el maestro propone de forma explícita determinadas cuestiones al alumno, pero es él quien toma a su cargo, bajo su responsabilidad, lo esencial del trabajo. Si el alumno fracasa, en un afán de ocultar la incapacidad de este para encontrar la respuesta, el enseñante negocia una respuesta a la baja; para ello, añade sucesivamente informaciones suplementarias reductoras de sentido, indicios que le ayuden a encontrar la respuesta, y así hasta que esta se produce.

De acuerdo a lo anterior, la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, según Gascón,

> …postula que un *conocimiento matemático* está definido por las *situaciones* que lo determinan, esto es, por un conjunto de situaciones para las que dicho conocimiento es idóneo porque proporciona la solución óptima en el contexto de una institución determinada. Las situaciones contienen la "razón de ser" del conocimiento que definen, esto es, las cuestiones que le dan sentido, así como las restricciones que limitan su uso en una institución determinada y las aplicaciones potenciales del mismo[78].

Cabe señalar que en las TSD la actividad matemática escolar es siempre una actividad en situación y por ende no se consideran los conceptos aislados sino la actividad matemática como un todo. Gascón[79] afirma, que la TDS transformó los principios del objeto primario de investigación en la matemática y considera que han sido sustituidos por las siguientes cuestiones, de diferente naturaleza:

- ¿Qué condiciones debe satisfacer una situación para poner en funcionamiento los conocimientos específicos que la propia situación modeliza?
- ¿Cuáles son los efectos previsibles de dicho funcionamiento sobre los protagonistas y sobre sus producciones (fenómenos didácticos)?
- ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado?

[78] Ibít. p.11
[79] Ibít. p.13

Es preciso resaltar, que ahora el comportamiento característico de una *situación* está enmarcado por los requerimientos asociados a generar un conocimiento que está inmerso en sí misma, a su vez debe responder a unas exigencias previstas por quien la modelizó y factibles de ser identificadas por quien ejerce una acción en ella. Igualmente se evidencia, que quien establece una relación con la situación le siguiere hacerse responsable y determinar un nivel de autonomía e interés por conocer, elaborar y socializar el nuevo conocimiento.

Con el objetivo de listar el tipo de *situaciones* que deben estar presentes a la hora concretar la enseñanza de la matemática. Acudimos a Brousseau, citado por Godino[80], el cual propone diseñar situaciones didácticas del siguiente tipo:

• *Acción*, en donde el alumno explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de *acción* deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los estudiantes, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.

• *Formulación / comunicación*, cuando el alumno pone por escrito sus soluciones y las comunica a otros niños o al profesor; esto le permite ejercitar el lenguaje matemático.

• *Validación*, donde debe probar que sus soluciones son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación.

---

[80] DIAZ. Op., cit. p. 72.

• *Institucionalización*, donde se pone en común lo aprendido, se fijan y comparten las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas.

Es necesario precisar que en este contexto, la organización de la enseñanza adquiere un papel central, dado que ahora la tarea consiste en diseñar *situaciones* que ofrezcan al alumno, la posibilidad para que reconozca el escenario que le permite elaborar su propio conocimiento matemático. Según Chamorro[81], El profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los propios estudiantes.

Cabe notar que el punto de quiebre en este proceso se da cuando el estudiante identifica la estrategia más acertada para resolver la *situación,* y sabemos que esto ocurre porque se ha producido un nuevo conocimiento en el alumno. Sin embargo, en este camino se configuran muchos obstáculos, así lo confirma Brousseau, citado por Chamorro[82], *el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.*

La concepción de aprendizaje que acá expresa Brousseau comparte conceptos similares a los planteados por Piaget, en su teoría sobre aprendizaje por descubrimiento. Al respecto Piaget, citado por Batanero, descubre que:

---

[81] CHAMORRO. Op., cit. p. 56.
[82] Ibíd. p. 55

> El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un "conflicto cognitivo" o "desequilibrio" en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes. Para reaccionar a este desequilibrio se requiere un proceso de "equilibración" que consiste en los pasos de asimilación y acomodación. La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos La acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes[83].

Al intentar encontrar similitudes entre estas concepciones de aprendizaje puede razonarse que el *conflicto cognitivo* es semejante a lo que Brousseau propone como “factor de contradicción, de dificultades y desequilibrios”. Para el proceso de “equilibración” de Piaget, lo próximo en la Teoría de Situaciones es lo que se plantea como el fruto de la adaptación manifestada en las respuestas nuevas.

De esta manera se entiende, que si el estudiante aprende es porque se da una adaptación al *medio*, en este caso a una situación de aprendizaje, por cierto retadora para el alumno, y que sí ha ocurrido aprendizaje es porque ésta adaptación, ha generado una nueva respuesta u ofrece una estrategia diferente a la que inicialmente se propuso para resolver la situación didáctica.

Acosta, Monroy y Rueda[84] al intentar describir el proceso que se da al interior de una situación didáctica expresan lo siguiente:

---

[83] Piaget, J., e Inhelder, B. La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France. 1951. Citado por: BATANERO. Carmen, Didáctica de la Estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada. 2001. p. 66. Disponible en: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf

[84] ACOSTA. Martin, MONROY. B. Lilian y RUEDA. G. Karol, Situaciones a-didácticas para

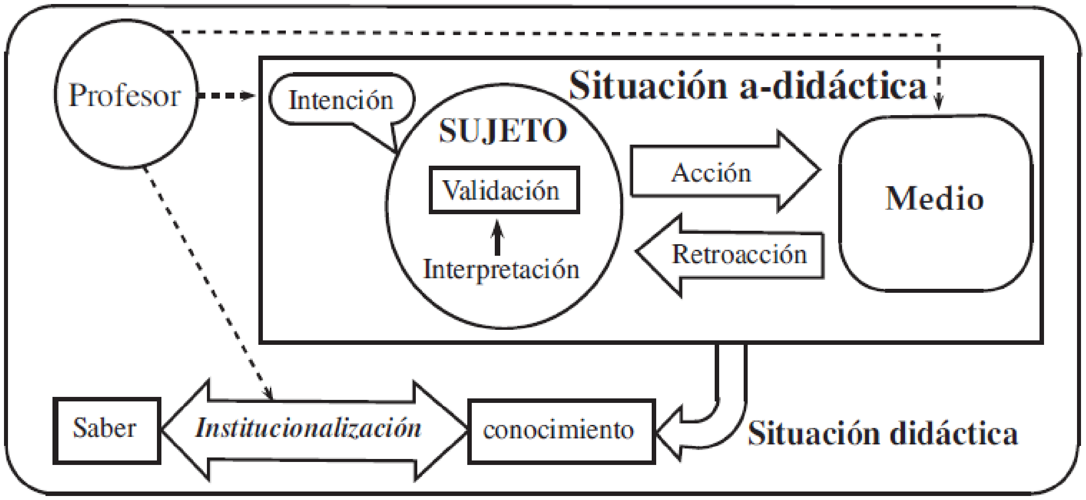
> La función principal del profesor es la de preparar la situación a-didáctica: seleccionar cuidadosamente el medio y el problema que planteará a los alumnos. Mientras se lleva a cabo la situación a-didáctica, el profesor se abstiene de comunicar el saber a los alumnos, pues de esa manera impediría que se realice un aprendizaje por adaptación. Esto no quiere decir que el profesor no deba intervenir durante la situación a-didáctica, sino que su intervención debe limitarse a animar al alumno a resolver el problema, hacerle tomar conciencia de las acciones que puede realizar y de las retroacciones del medio, pidiéndole que sea él mismo quien decida si resolvió o no el problema (validación). Este proceso recibe el nombre de devolución. Una vez terminada la situación a-didáctica, el profesor retoma su responsabilidad de enseñar, explicitando las relaciones entre el conocimiento construido en la situación a-didáctica y el saber que desea comunicar (fase de institucionalización).

La siguiente grafica ilustra las relaciones que se establecen al interior de una situación didáctica.

---

la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración. Universidad Industrial de Santander. 2010. Vol. 28. N° 2. p. 5 ubicado en: http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol28N2/V28N2-6Acosta.pdf

Imagen 1. Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica.



Fuente: ACOSTA. Martin y otros.

En el esquema es evidente que una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor retoma su responsabilidad de enseñar, su intervención está orientada a clarificar las relaciones entre el conocimiento construido en la situación a-didáctica y el saber que se propuso comunicar. Para Brousseau está la fase se conoce como de institucionalización del saber.

Según Chamorro[85] esta fase cobra relevancia, una vez el alumno ha encontrado la solución al problema planteado. Las respuestas del alumno ahora están a cargo del docente y deben ser transformadas, por éste, mediante un proceso de redescontextualización y redespersonalización para que los conocimientos puedan ser convertidos en saberes integrados y consecutivos del *saber a enseñar,* reconociendo en ellos un saber cultural reutilizable, con carácter universal.
Una vez el conocimiento aparece en el proceso personal de alumno y además, se cuenta con las referencias del contexto de su descubrimiento, entonces el docente debe intervenir en un proceso análogamente inverso. Es decir, ahora que se ha

[85] CHAMORRO, Op., cit. p. 88

alcanzado el objetivo de aprendizaje, se necesita que la resolución descubierta sea institucionalizada y para ello el enseñante debe intervenir en la elaboración de un camino, según Chamorro, "rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y parones que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su *transposición didáctica* de manera lo más rigurosa posible"[86]

Ilustrar mejor la *transposición didáctica* del saber, nos ayuda según Chamorro a conocer la transformación que sufre un saber a efectos de ser enseñado. Igualmente nos permite medir las disparidades existentes entre el **saber-sabio**[87] y el saber-enseñado. En este sentido, el sistema social y educativo encarga al profesor que enseñe parte del denominado saber-sabio**,** pero este conocimiento no es enseñable directamente, requiere de ciertas modificaciones para poder ser enseñado en un nivel dado y ello, porque como vamos a ver, las características de unos y otros saberes son bien distintas.

Lo diferente entonces entre el saber sabio y el saber enseñado se da cuando un investigador, por ejemplo publica sus hallazgos a la comunidad científica. En la reflexión que comunica se encuentra un saber *despersonalizado*, dado que se omite o no se cuenta esa experiencia inicial, los detalles, experiencias y muchos de los errores o caminos equivocados que se siguieron hasta hacer el hallazgo. También ese saber que comunica es *descontextualizado* ya que desaparece toda referencia y circunstancia del contexto en el que dio el descubrimiento. Por ello, la importancia asignada al rol del profesor cuando se encuentra en la fase de institucionalización del saber. Quiere decir que el maestro debe nuevamente pasar por el proceso de despersonalizar y descontextualizar el saber así como lo modela el investigador.

[86] Ibíd., p. 89

[87] El saber sabio designa el conjunto de resultados admitidos por verdaderos por la comunidad científica de referencia, los matemáticos en nuestro caso, en tanto el saber enseñado es la parte de las matemáticas que son enseñadas finalmente, de forma efectiva en un nivel escolar determinado.

4.4.7 Competencia matemática: el razonamiento y la argumentación.

La escuela es uno de los principales escenarios para fomentar en los estudiantes el proceso de razonamiento y argumentación matemática. Según, los lineamientos curriculares, "el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas"[88].

En este sentido, desde la práctica pedagógica hay que facilitar estrategias que favorezcan la actuación natural del niño, permitiendo que elabore y plantee sus propias conjeturas y argumentos, que defienda sus posturas e ideas y que progresivamente pueda llegar a conclusiones que potencien la construcción de conocimientos nuevos. Al respecto, los lineamientos curriculares[89] expresan que razonar en matemáticas tiene que ver con:

- *Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.*
- *Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.*
- *Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.*
- *Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.*
- *Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.*

En ese contexto, el aula de clase y el entorno inmediato del estudiante es el espacio privilegiado donde éste, puede manifestar su curiosidad, creatividad, su sentido crítico y propositivo y, hacer propia la reflexión de su desempeño en el proceso de

---

[88] Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. 1998. p. 54. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
[89] Ibíd. p. 54

aprendizaje. Según Batanero[90], "los niños aprenden no sólo en la escuela, sino en su entorno familiar y social, y su razonamiento se modifica gradualmente, a partir de sus experiencias y de la interacción con los objetos y el mundo que les rodea".

En relación al cambio gradual que ocurre en el razonamiento del niño es necesario precisar que ellos, inicialmente asumen la veracidad de las situaciones que ocurren a su alrededor porque ven que así ha sucedido antes o porque su experticia del hecho así se lo ratifica. Sin embargo, ante una tarea que requiera de la aplicación de conceptos matemáticos, estas conjeturas podrían llevarlo al error y, frente a algo obvio y aparentemente fácil de resolver, resultaría errando. En este sentido, en los NCTM se afirman que los niños "…deberían aprender que varios ejemplos no bastan para establecer la verdad de una conjetura, y que deben usarse contraejemplos para refutarla. Y también, que al considerar una serie de ejemplos, pueden razonar sobre las propiedades generales y las relaciones que encuentren"[91].

Por tal razón, la actividad del alumno en este contexto no puede apreciarse como una acción pasiva, privada de la reflexión o sujeta a lo que el profesor establezca en sus reglas básicas de enseñanza. Al respecto los NCTM, ejemplificando esta situación muestran que:

> El razonamiento matemático se desarrolla en las clases donde se anima a los alumnos a exponer sus ideas para que sean debatidas. Los profesores y los alumnos deberían ser receptivos a las preguntas, reacciones y elaboraciones de los demás. Los alumnos necesitan explicar y justificar que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y

---

90 BATANERO. Carmen, La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación?, P. 1 Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/1Batanero.pdf

91 NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas, Capítulo 5, p. 42

> a criticar el pensamiento de otros. Para aplicar sus habilidades de razonamiento y para justificar su pensamiento, necesitan tener abundantes oportunidades de intervenir en las discusiones sobre matemáticas. Para desarrolla la capacidad para construir argumentos válidos y para evaluar los de otros, necesitaran tiempo, muchas y variadas experiencias y una guía[92].

Cabe destacar que las variables a potenciar en este proceso de razonamiento son las que atañen al tiempo y a la frecuencia en las que intervienen los estudiantes para expresar sus ideas. Tampoco puede olvidarse que en este escenario donde se privilegia el pensamiento inductivo, la gestión asertiva del docente es fundamental y a su vez requiere que éste se prepare para orientar debates y preguntas tocantes a muchas situaciones que incluso podrían ser ajenas a la actividad matemática.

4.4.8 El pensamiento aleatorio y la competencia razonamiento. El razonamiento evidentemente es una competencia transversal que permea todas las dimensiones del conocimiento matemático. Sin embargo, para conocer mejor el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, se acude a lo que dice Piaget, citado por Cisneros y otros autores,

> …el niño tiene un pensamiento irreversible, que le permite colocar una barrera en la comprensión de la aleatoriedad debido a que no puede diferenciar entre acontecimientos reversibles y fortuitos, originados por mezclas de causas irreversibles. Tal motivación lleva al niño hasta la etapa de las operaciones concretas en la que pueden claramente aparecer factores de caracterización de los fenómenos causados y poder adquirir en forma intuitiva el significado de aleatoriedad[93].

---

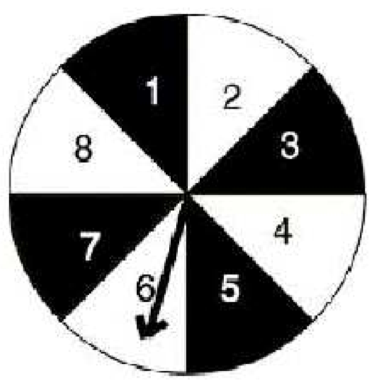
[92] Ibíd. p. 42.

[93] PIAGET, J. e Inhelder, B. (1951). La gènese de l'idèe de hasard chez l'enfant. Paris. Presses Universitaires, citado por

Es indudable que no es posible manipular los fenómenos aleatorios para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. En el siguiente ejemplo, aportado por Batanero[94]., se nos permite ver con mejor panorama el planteamiento de Piaget:

> "si hacemos girar la aguja en la ruleta mostrada en la Figura 7, desde la posición inicial (número 6), impulsándola hacia la derecha, no sabemos con seguridad qué número resultará. Supongamos que la ruleta se para en el 1. Si giramos a continuación la aguja en sentido contrario al anterior (hacia la izquierda) no es seguro que vuelva al número 6. Por otro lado, aunque los 8 números en la ruleta tienen la misma probabilidad, no podemos asegurar (e incluso sería difícil) que en ocho giros sucesivos obtengamos una vez cada uno de los números".

Imagen 2. Ruleta: valores equiprobables.



Según Batanero[95], la carencia de reversibilidad de los experimentos aleatorios es una razón que influye en el desarrollo tardío de las nociones de probabilidad, sin olvidar que los niños poseen ideas intuitivas del fenómeno aleatorio.

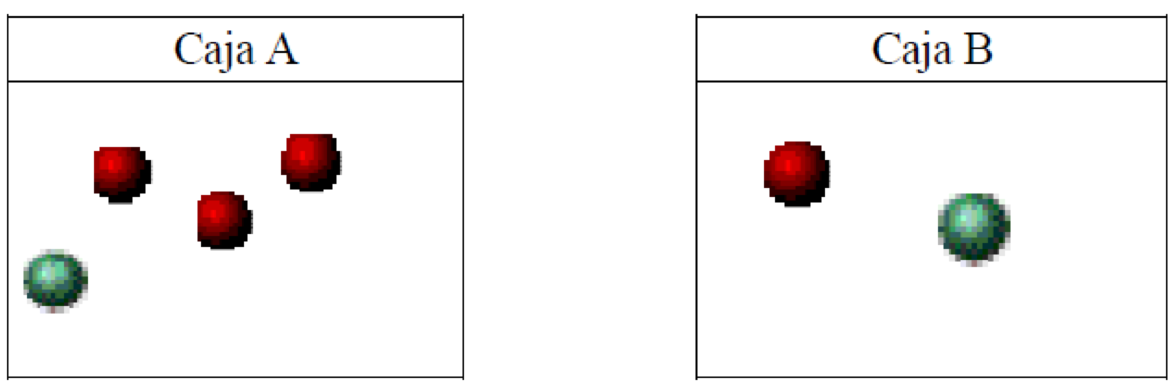
94 BATANERO. Op,. cit. p. 2
95 ibíd. P.6

En alusión a las experiencias probabilistas por las que pasan los estudiantes en sus primeros años, Kerkhofs[96], en mención a Fischbein, dice:

> "…a edad temprana, la enseñanza de la probabilidad y de la estadística puede evolucionar a partir de las estructuras intuitivas y de las operaciones mentales fundamentales. Y esto puede lograrse…haciendo que los niños realicen toda clase de experiencias en las que la estadística y la probabilidad aparezcan estrechamente relacionadas. Además, y mientras se hace el relevamiento de posibilidades, puede explorarse, también, cuestiones de combinatoria".

Según Fischbein, citado por Batanero[97], la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años. Para ilustrar esta idea se plantea el siguiente ejemplo: si preguntamos al niño, en cuál de las dos cajas A y B (Figura 8) es más fácil sacar una bola roja con los ojos cerrados, el niño es capaz de acertar si el número de casos desfavorables es igual y el número de casos es pequeño.

Imagen 3. Urnas con fichas de colores.



Fuente: Batanero.

---

[96] KERKHOFS. Wim, Estudios en educación matemática, la enseñanza de la estadística. P. 78.
[97] BATENERO, Op,. cit. p.6.

Se entiende que estas situaciones son posibles dado que la mayoría de niños en esa edad, ya tiene contacto o les es familiar los contextos donde hay contenido aleatorio, por ejemplo, los programas de concurso y sorteos en la televisión o las mismas apuestas que utilizan en sus juegos cotidianos les permite elaborar hipótesis para ir "instalando en la mente, la idea de que hay experimentos para los cuales no es posible decir, con toda seguridad, lo que se va a verificar"[98].

4.4.9 El pensamiento aleatorio en la enseñanza de primaria. Hay que precisar que desde los primeros años de vida, el niño tiene contacto permanente con experiencias de incertidumbre, de azar y probabilísticas. Además, es necesario decir que una vez el niño está inmerso en los proceso de aprendizaje escolar, los conocimientos matemáticos en los que el profesor hace mayor énfasis son los relativos al desarrollo del número y de las operaciones básicas. La experiencia nos muestra que estos conocimientos no se abordan de manera integrada o trasversal, casi siempre son estudiados por separado ocasionando que finalizado el año lectivo, varios de estos conocimientos básicos no se alcanza a trabajar con los estudiantes.

Uno de esos pensamiento del que poco los estudiantes tienen la oportunidad de aprender, es el *aleatorio.* Al respecto del énfasis en el desarrollo de este conocimiento básico, los *Lineamientos Curriculares* expresan:

> El desarrollo del pensamiento aleatorio, mediante contenido de la probabilidad y la estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto

[98] CHAMORRO. Óp., cit. p. 351

> de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas[99].

Desde ese punto de vista lo aleatorio se constituye en una ayuda fundamental y en un fenómeno muy atractivo para los intereses del docente y el estudiante. Chamorro[100], justifica la introducción de este pensamiento no determinista al currículo de matemáticas en primaria, pues piensa que en el entorno del niño existen numerosas situaciones de tipo aleatorio, (juegos infantiles y escolares, de apuestas en su entorno familiar, predicciones sobre el clima,…) que deben aprovecharse para formar de manera más completa al estudiante. También argumenta que el desarrollo del pensamiento lógico matemático del alumno se potencia complementando su formación desde el tratamiento de lo incierto, de lo probable y no solamente desde lo determinista.

Cabe señalar que la experiencia cotidiana del niño confirma que tanto lo determinista como lo aleatorio es posible de comprenderse, sin embargo, en la escuela la tendencia es solo a reconocer lo determinista dado que la propuesta de enseñanza del docente así lo configura. En este orden de ideas es importante cuestionarnos sobre la percepción que tiene el niño sobre los fenómenos aleatorios.

Al respecto Green[101], admite que suponemos comprender el concepto de aleatoriedad, pero definirlo, no es una cuestión fácil. Este autor aclara que la aleatoriedad en más que una intuición pues éstas en algún momento pueden fallar. Plantea así cinco formas de concebir este concepto:

---

[99] Lineamientos curriculares de matemáticas. Op,. cit. p. 47
[100] CHAMORRO. Op,. cit. p. 330
[101] GREEN. David, Estudios en educación matemática, la comprensión de la aleatoriedad por los alumnos escolares. p. 31

- *como una propiedad intrínseca de la naturaleza, como puede serlo el bombardeo de la tierra con ondas electromagnéticas o la emisión de partículas por un elemento radio activo.*
- *una propiedad intrínseca de los sistemas o de los objetos construidos por el hombre. Un ejemplo es el lanzamiento de un dado en el que se pretende que la aleatoriedad es, en buena medida, una propiedad del dado como lo es, por ejemplo, su densidad.*
- *Una característica de un experimento diseñado por el hombre, como por ejemplo una disposición de objetos realizada al azar, un mazo de cartas barajadas libremente,*
- *una falta de correlación entre dos series.*
- *un acontecimiento es al azar si, dadas algunas condiciones previas, no se tiene la certeza de que ocurra ni la certera de que no ocurra, por ejemplo, que llueva en Londres el 1° de abril del año próximo.*

Finalmente, recomienda la oportuna intervención del maestro durante la enseñanza para que los estudiantes logren una mejor comprensión de estas ideas sobre aleatoriedad.

4.4.10 Algunos tópicos sobre aleatoriedad y probabilidad. Para Wilde y otros autores[102], conveniente antes de ingresar a los conceptos de probabilidad dejar claro algunas nociones de este campo de las matemáticas.

• Experiencia aleatoria.

Experiencia cuyo resultado depende del azar. Son experiencias aleatorias el lanzamiento de una moneda, el de un dado, o la extracción de una carta de una baraja. Los elementos de una experiencia aleatoria se llaman sucesos aleatorios o, simplemente, sucesos.

102

● Experiencia aleatoria compuesta.

Se puede considerar como el resultado de concatenar dos o más experiencias simples. Así, extraer tres cartas de una baraja es una experiencia que se puede considerar compuesta por tres experiencias sencillas consistentes cada una de ellas en extraer una carta.

● Fenómeno aleatorio.

Esto es cuando un fenómeno es reproducible en las mismas condiciones, aunque presente diferentes resultados pero sin saber con certeza lo que ocurrirá en una experiencia particular, por ejemplo, no sé con seguridad el tiempo que demora un ciclista en recorrer 100km.

● Situación contingente.

Fenómeno que no es repetible bajo las mismas condiciones, así en él esté presente el azar, por ejemplo cuando se va por una calle y ocurre un accidente de tránsito.

● Probabilidad frecuencialista.

Proceso aleatorio en el cual la frecuencia relativa converge a un valor, al repetir un experimento un número grande de veces.

● Probabilidad según la regla de Laplace.

Espacio muestral finito para la ocurrencia de *n* sucesos elementales en el cual ninguno de ellos puede ocurrir con mayor frecuencia que los otros, en tal caso la probabilidad de estos sucesos es *1/n*., en este sentido, las probabilidades de un suceso que se descompone en *k* sucesos elementales puede calcularse como *k/n*. en síntesis es: una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y el denominador el número de todos los casos posibles.

Como ejercicio final se presenta la siguiente tabla que nos señala los conceptos, procesos cognitivos y situaciones generadoras que se deben evaluar el pensamiento aleatorio en 5° grado.

Tabla 8. Objetos específicos de evaluación del pensamiento aleatorio en 5° grado.

Conceptos	Procesos Cognitivos	Situaciones	Representaciones simbólicas
Azar	Reversibilidad Causalidad (múltiples factores combinados) Proporcionalidad Heurísticas	Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios	Textos y gráficas
Combinatoria	Asociaciones Análogos Categorización	Relacionar objetos mediante asociaciones	Textos y gráficas
Estimación	Asociaciones Proporcionalidad	Estimar Cualitativamente la ocurrencia de sucesos	Textos y gráficas
Distribución	Inferencias Clasificación Interpretación Modelizaciones sencillas	Interpretación de datos presentados gráficamente	Textos y gráficas

FUENTE: Serie cuadernos de evaluación, pruebas Comprender.

La enseñanza del pensamiento aleatorio en la escuela primaria es una puerta de entrada al conocimiento matemático del estudiante, desde allí se pueden explorar los diferentes conceptos y tópicos de esta área y es la oportunidad para desarrollar una estrategia que permita al alumno formarse integralmente. Además, al abordar situaciones propias de otras disciplinas que para su tratamiento y solución emplean los saberes de la matemática se logra hacer lo aleatorio transversal y con mayor significado en la actividad matemática.

5. REFERENTE LEGAL

En el contexto de la educación Colombiana se resalta la evolución en las políticas educativas gestadas en las últimas décadas. Un momento a destacar es cuando se materializa la Constitución Política de 1991. Según Cajiao[103], el escenario que motiva esta promulgación jurídica es la adopción que hace la Asamblea General de las Naciones Unidas de los Derechos del Niño, en 1989. Además, para los finales del siglo XX este proceso se realimenta de los acuerdos a nivel internacional dentro de los cuales se aprueba la Declaración Mundial de Educación para Todos. En este documento se destaca de manera urgente la necesidad de un cambio en la percepción de la educación en el ámbito de cada país y dentro de su misma sociedad para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje.

Respecto al contexto interno de nuestro país, Cajiao[104] expresa, que a partir de la Asamblea Constituyente de 1991 un grupo de académicos, subcomisionados trabajan sobre la temática “Derecho a la educación, fomento a la cultura, la ciencia y la tecnología”, y es, desde luego el abordaje de este tópico el que promueve en la Constitución Política, el (art. 27)[105], el cual destaca la libertad de investigación. Cabe señalar que esta propuesta adquiere la pertinencia necesaria a partir del anterior numeral. Además, se consagra en la carta magna el (Art. 67) que considera a la educación como servicio público de gratuidad y por ende se convierte en un derecho fundamental y obligatorio para la niñez en Colombia (Art. 44).

[103] CAJIAO, Francisco. La concertación de la educación en Colombia. *Revista iberoamericana de educación*, 2004, vol. 34, p. 9
[104] Ibit,. P 9
[105] Colombia, Ministerio de Educación, 1994a, Leyes, Ley 115 de 1994, Ley General de Educación. Diario oficial, Bogotá, Imprenta Nacional, 8 de febrero.
2002a, Decretos, Decreto 0230 de 2002 por el cual se dictan normas en materia de currículo, evaluación de los educandos y evaluación institucional, Diario oficial, Bogotá, Imprenta Nacional, 11 de febrero.

En correspondencia a este pacto social y jurídico, Cajiao[106] resalta el significado para la educación el contar con una nueva Constitución Política. Este escenario conlleva a que se concreta la elaboración de la Ley General de Educación (115) de 1994. En esta nueva disposición educativa se destaca la necesidad de involucrar a la comunidad y sus actores principales entorno a la dirección de la Institución Escolar, y a su vez que como agentes activos participen en la construcción del Proyecto Educativo Institucional, (Art. 6). De igual manera, se busca que los objetivos de la educación básica estén atendidos desde las áreas fundamentales y obligatorias (Art. 23). En lo que corresponde al área y nivel educativo el (Art.11) se toma como el marco para determinar el área de matemáticas y el nivel educativo, básica primaria en el grado 4° y 5° como el escenario para el desarrollo de este estudio. Lo anterior está también reglamentado en el (Art. 5) del decreto 1860 de 1994.

Durante los años siguientes, en el proceso de establecer nuevas normas educativas queda definido el carácter de autonomía para las Instituciones escolares. Así se describe en el artículo 77 de la ley 115 y en el artículo 15 del decreto 1860. Este hecho permite que las instituciones construyan sus propios PEI y deja al Ministerio de Educación Nacional como ente regulador del proceso. Así se evidencia en el (art. 33) del decreto en mención. Desde esta óptica queda regulada la formulación de los lineamientos curriculares para las áreas fundamentales, hecho que también se contempla en la resolución 2343 de 1996 (Art. 3). En consecuencia, a partir de estos referentes curriculares se da la orientación de los pensamientos y procesos matemáticos trabajos desde esta propuesta. Lo cual hace que el pensamiento aleatorio y la competencia razonamiento (proceso de razonamiento y argumentación) se establezcan como el eje regulador que otorgan validez a los aprendizajes trabajos durante la intervención en el aula.

[106] Ibit,. P 11

Otro aspecto que se reglamenta en el sistema educativo del país es la evaluación escolar. De manera general en el (Art. 80) de la ley 115 se designa al MEN para que realice la verificación de los aprendizajes en los estudiantes y vele por la calidad educativa que ofrece la escuela. Igualmente se pide que opere en coordinación con el Sistema Nacional de Pruebas del ICFES. Desde esta tarea compartida y mediante el esfuerzo de los Gobernantes de turno por aportar a la calidad educativa se genera en el país la promulgación de la ley 715. Según Garcés y Jaramillo[107], a nivel Latinoamericano se gestaron acciones que consideran la evaluación prioritaria y por consiguiente se postula principios como la aplicación de pruebas estandarizadas, la comparación internacional según los resultados y la aplicación de cuestionarios de factores asociados a resultados. Es en este contexto que surge la ley 715 y que de paso integra al proceso el cumplimiento de estándares, desempeño, eficacia y eficiencia. Un componente legal adicional es el decreto 0230 (Art. 2) en donde se clarifica que el currículo a nivel institucional ha de ajustarse a parámetros como los estándares de calidad. De manera similar el decreto 1290 de 2008 en el (Art. 1) expresa los ámbitos y contextos en que se aplicara la evaluación a los estudiantes, determinando que se hará a nivel internacional, nacional e institucional.

Cabe señalar que este trabajo investigativo parte de un componente ya mencionado, las evaluaciones estandarizadas (PISA y SABER 3°, 5°, 9° y 11°), las cuales se aplican a los estudiantes para hacer seguimiento al desarrollo de sus aprendizajes. En este sentido los resultados que se generan han sido el insumo base de análisis y posterior formulación del problema a investigar. |

[107] GARCÉS GÓMEZ, Juan Felipe; JARAMILLO J, Inés. De la autonomía a la evaluación de calidad: gestión educativa, reformas legislativas e investigación de los maestros y las maestras en Colombia (1994-2006). 2008.

6. METODOLOGIA

6.1 EL ENFOQUE.

Para el desarrollo de esta investigación se optó por un enfoque cualitativo. Desde esta perspectiva se concibe el trabajo de indagación como un proceso ordenado a través del cual el investigador aborda un fenómeno de la realidad para realizar un ejercicio permanente de observación y de reflexión sobre la problemática y por consiguiente, implementar acciones en determinados momentos, y desde este esfuerzo probablemente generar condiciones para construir un conocimiento que conlleve a dar respuestas al problema que se investiga. Al respecto Hernández y otros[108], señalan que la perspectiva cualitativa es implícitamente inductiva y se adopta cuando se desea comprender la manera en que los personas responden a situaciones y circunstancias cotidianas, la manera como asumen los desafíos y en general la forma como se interesa por conocer las opiniones y significados que le otorgan a la realidad, ya sean al momento de explorar o profundizar en fenómenos propios de su ambiente natural o en las relaciones que se posibilitan en su contexto.

De acuerdo con esta perspectiva de investigación y atendiendo a su finalidad, Bartolomé[109] expresa el siguiente cuestionamiento: *¿qué pretendemos comprender en la investigación cualitativa?* Acorde con el interrogante, se expresa que se busca comprender los fenómenos educativos, y ya localizados, en este ámbito se busca conocer principalmente las conductas naturales para descubrir leyes, situaciones sociales identificadas por (el lugar, los actores y las actividades), significado de textos/acciones, procesos sociales y cognitivos, patrones culturales y de interacción social. Entendida así, la metodología cualitativa se asume como una estrategia para acercarse a la realidad, para reconocer las relaciones entre los sujetos en procura

[108] HERNANDEZ SAMPIERI, Roberto; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Pilar Baptista. Metodología de la investigación. *Edición McGraw-Hill*, 1996. p. 364.
[109] BARTOLOMÉ, PINA. Margarita, investigación cualitativa en educación; ¿comprender o transformar? Revista investigación educativa. P. 19.

de transformar su práctica. Acá conviene subrayar que el rol de la investigación cualitativa, en un contexto educativo permite reconocer las situaciones que generan retos e interés en los sujetos y desde luego, según el nivel de complejidad y relevancia, actuar de manera que los individuos que se encuentran en contextos y situaciones desafiantes puedan encontrar respuestas y alternativas de solución que aporten a su formación o desarrollo integral en la comunidad y sociedad.

Desde la óptica cualitativa, es posible que la investigación ofrezca respuestas y alternativas que permitan transformar la realidad de quienes interactúan en determinado contexto. Por consiguiente, en este estudio el escenario retador consiste en superar los bajos niveles de desempeño de los estudiantes en las competencias matemáticas evaluadas en las pruebas externas. Al respecto, esta propuesta busca implementar acciones de mejoramiento mediante el diseño de una estrategia de enseñanza basada en las Situaciones Didácticas, lo cual implica trabajar en una unidad didáctica que pretende movilizar los aprendizajes y significados del contenido probabilidad simple.

6.2 DISEÑO METODOLÓGICO

Ver la perspectiva cualitativa como el enfoque que delimita esta propuesta nos conduce a apropiar la *investigación-acción* (I–A) como el diseño pertinente para orientar el desarrollo de este estudio. Esta forma de indagación contempla diversas definiciones y por tanto se utiliza con variedad de usos y sentidos. Según Latorre[110], la (I–A) se utiliza para describir un conjunto de actividades que realiza el docente en su práctica pedagógica, y su propósito es desarrollar el currículo, progresar en la parte profesional, mejorar la planeación del área y concretar la planificación de la clase, entre otros. El anterior proceso, según el autor, proporciona autonomía y poder a los actores involucrados, lo cual implica reconocer su propia realidad y

[110] LATORRE. Antonio, La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Ed. Grao. Barcelona p.23

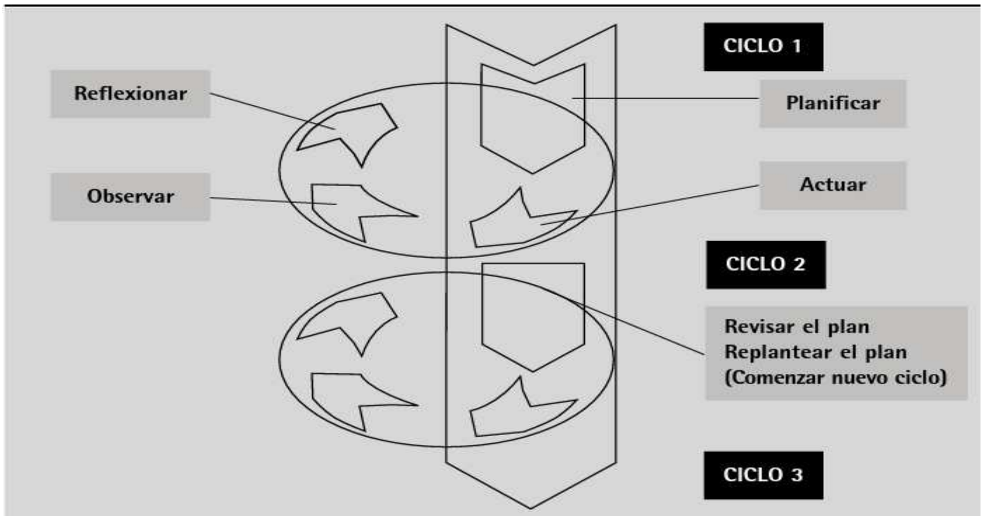
enfocar la acción principalmente en ella, para generar cambio social y un conocimiento educativo entre los participantes.

En relación al diseño de investigación planteado para esta propuesta, Kemmis, citado por Latorre[111], lo expresa como el más pertinente a la hora de implementar un proceso de enseñanza. En tal sentido, el autor señala que la (I–A) se organiza sobre dos ejes principalmente: uno estratégico, constituido por la acción y la reflexión, y otro organizativo, compuesto por la planificación y la observación. La interacción entre estos dos ejes contribuye a dar respuesta a los problemas y a comprender las prácticas que tienen lugar en el contexto donde se investiga. Es decir, si el contexto es educativo entonces la acción de reflexionar sobre el quehacer pedagógico implica por ejemplo, asociar el contenido objeto de estudio, probabilidad simple con aquellas situaciones y vivencias del estudiante en relación a su entorno, lo cual constituyen conectar sus presaberes en ese contenido matemático, y por consiguiente, asumir que tales nociones son la base para desarrollar el proceso de aprendizaje.

Según el autor, el proceso de investigación está integrado por cuatro momentos convenientemente interrelacionados. Desde esta lógica, cada fase del proceso oscila entre información inicial y la obtenida recientemente para interpretarla y hallar su significado. Quiere decir, que durante cada fase el investigador docente efectúa una mirada retrospectiva, y una intensión prospectiva sobre el proceso de indagación. A modo de síntesis, la investigación-acción forma conjuntamente una espiral autoreflexiva de conocimiento y acción y está constituida por las siguientes fases: *planificación, acción, observación y reflexión.* En la siguiente gráfica se ilustran cada una de estos momentos.

[111] Ibit,. p 35

Imagen 4. Espiral de autorreflexión de la Investigacion-accion.



Fuente: Carr y Kemmis (1988)

Desde esta mirada el ciclo de investigación se aborda sistemáticamente agotando sus fases. Por consiguiente hay necesidad de clarificar qué comportamientos y qué acciones se dan desde cada una de ellas. Según Kemmis[112], la mirada a cada momento de la investigación-acción se subraya así: *planificar* incluye el diagnóstico del problema o idea general de investigación, el momento de *actuar* se refiere a la implementación del plan de acción, el de *observar* comprende una evaluación de la *acción* mediante el empleo de técnicas pertinentes, y el *reflexionar* significa deliberar sobre los resultados de la evaluación y sobre la acción en general. Al cerrar el ciclo luego de revisar y replantear el plan, seguramente emergen nuevas situaciones que dan inicio a un nuevo ciclo en la "espiral autoreflexiva". La siguiente gráfica ilustra en detalle el recorrido que propone el autor para cada momento del ciclo de investigacion-accion.

[112] LATORRE, Op,. p. 40

Imagen 5. Espiral de autorreflexión de la Investigacion-accion.

		DIMENSIÓN ORGANIZATIVA	
DIMENSIÓN ESTRATÉGICA		**Reconstructiva**	**Constructiva**
	Discurso entre participantes	4. *Reflexionar* Retrospectiva sobre la *observación.*	1. *Planificar* Prospectiva para la *acción.*
	Práctica en el contexto social	3. *Observar* Prospectiva para la *reflexión.*	2. *Actuar* Retrospectiva guiada por la *planificación.*

Fuente: Carr y Kemmis (1988)

En conclusión, la I-A sugiere indagar la realidad educativa o social, y además propone abordar un fenómeno de estudio comenzado por una “situación o problema practico, se analiza y revisa el problema con la finalidad de mejorar dicha situación, se implementa el plan o intervención a las vez que se observa, reflexiona, analiza y evalúa, para volver a replantear un nuevo ciclo”[113]. Desde luego, éste ejercicio implica que el investigador se apropie y alcance un conocimiento suficiente de la realidad a estudiar. Igualmente, debe desarrollar las habilidades propias de quien está inmerso en el trabajo campo y lograr desempeñarse acertadamente mediante las relaciones que establece con los integrantes de la comunidad a estudiar.

6.3 FASES DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN.

Como ya se ha mencionado en la I-A se consideran unos momentos claves que determinan el desarrollo de la investigación. En este sentido, las fases que se han

[113] LATORRE, Op,. cit, p.39

organizado para cumplir con los objetivos de esta propuesta guardan puntos de común con lo que Escudero, citado por Latorre[114] expresa a continuación:

- *Identificación inicial de un problema, tema o propósito sobre el que indagar (analizar con cierto detalle la propia realidad para captar cómo ocurre y comprender por qué).*
- *Elaborar un plan estratégico. Etapa que pretende crear las condiciones para llevarlo a la práctica y realizarlo, controlar el curso, incidencias, consecuencias y resultados de su desarrollo.*
- *Reflexionar críticamente sobre lo que sucedió, intentando elaborar una cierta teoría situacional y personal de todo el proceso.*

A partir del planteamiento de este autor, en esta propuesta de investigación se establece una correspondencia con sus fases y por consiguiente, los puntos en común se describen a continuación en los momentos y acciones planteados para cada una de las siguientes fases.

6.3.1 Fase uno: Identificación y formulación del problema: diagnóstico y reflexión. En esta primera instancia se buscó describir y focalizar la situación-problema objeto de estudio. Para ello la indagación se orientó a la revisión y el análisis de los resultados en las pruebas externas (SABER 3°, 5°, 9° y 11° - pruebas PISA). De acuerdo a este ejercicio se logró identificar el *componente* y la *competencia matemática* de menor nivel de desempeño y en la que los estudiantes evaluados tienen mayores dificultades para alcanzar los aprendizajes.

Igualmente se agotó una revisión documental al plan de área de matemáticas y en particular al plan de aula en básica primaria. Además, a partir del acompañamiento y el apoyo a las prácticas de aula que hace el docente investigador, en su rol de

[114] Ibíd. P. 40

tutor del Programa Todos a Aprender se logra hacer un análisis y posterior reflexión para describir algunas de las razones sobre el por qué ocurre el problema y las causas que lo están generando.

Luego de haber focalizado el *componente y la competencia matemática* de menor nivel de desarrollo en las pruebas externas, se implementó en esta fase un diagnóstico que buscó, de un lado identificar en los estudiantes los presaberes en relación a los aprendizajes asociados al pensamiento aleatorio, y de otro lado se buscó conocer el significado y los sesgos que tienen los estudiantes en relación al contenido de la probabilidad. En este sentido, los ítems que componen el cuestionario se retomaron de Velásquez[115] quien a su vez hace una adaptación de los ítems a partir de los cuestionarios que se construyeron en investigaciones previas sobre nociones de probabilidad. Las fuentes de donde fueron tomadas las situaciones propuestas en el instrumento diagnostico así como los contenidos evaluados en cada pregunta corresponden a autores como Fishbein y Gazit, Albert, Green y Cañizares.

A partir del panorama que ofrece el análisis y la reflexión de la información en la anterior fase se diseñó y desarrolló el plan de acción que conduce a implementar una estrategia didáctica que busca movilizar en los estudiantes los aprendizajes asociados a la probabilidad simple.

6.3.2 Fase dos: Diseño e implementación de la estrategia didáctica. En correlación a este momento de la investigación se diseñó e implementó una estrategia didáctica, que a partir de los hallazgos del diagnóstico permita mejorar el nivel de desarrollo de la competencia *razonamiento* y desde luego buscar superar

---

[115] VELAZQUEZ GOMEZ, Mónica. Secuencia didáctica: Introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria. Tesis para optar el título de Magister en ciencias naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2014.

en los estudiantes las dificultades relativas a los aprendizajes asociados al pensamiento *aleatorio.* Por consiguiente, la estrategia didáctica contempla la construcción y desarrollo de una unidad didáctica, basada en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau) y conectada con un contexto próximo a los estudiantes como es el cultivo de cacao. Cabe señalar, que paralelo a esta tarea se acude a instrumentos de registro y recolección de información para sistematizar la observación y fundamentar la reflexión que realiza el docente investigador en base a los desempeños y productos de aprendizaje de los estudiantes participantes. Al cierre de esta fase se contempló la valoración de los aprendizajes a través de una prueba escrita, conformada por 10 ítems recogidos de las diferentes pruebas Saber que el ICFES ha propuesto para los grados 3° y 5°. Desde luego esta fase se caracteriza porque el docente investigador desarrolla una intervención en el aula, y en esta medida se aborda el proceso de enseñanza y de aprendizaje con los estudiantes pero a su vez se analiza información, se reflexiona sobre los hallazgos y se incluyen cambios o mejoras a la estrategia didáctica.

La actividad que prosigue se considera paralela a cada momento de la investigación. Es decir, la reflexión sobre lo que va ocurriendo y su inherente análisis de los hallazgos que emergen son transversales y complementan la fase inicial como también el plan de acción.

6.3.3 Fase tres: Reflexionar críticamente sobre lo que sucedió. El proceso de Investigación-Acción está condicionado a la permanente reflexión sobre la acción. Es decir, quien indaga recurre a los detalles de cada situación y está atento a la información que emerja, dado que se considera valiosa y clave para el logro de los objetivos.

Sin embargo, el investigador al observar y reflexionar debe apoyarse en técnicas e instrumentos que faciliten la recolección y análisis de información. En consecuencia las técnicas a desarrollar son la observación participante, la unidad didáctica, el cuestionario, la entrevista a grupo focal y la revisión documental. Cabe señalar que se ha decidido el uso del video como recurso para captar información al momento del trabajo con los estudiantes en la unidad didáctica y de antemano como complemento para enriquecer la descripción en los instrumentos ya mencionados.

Es necesario precisar que la anterior actividad comprende el momento en el cual el docente investigador hace su síntesis reflexiva para construir la discusión que se establece entre los postulados teóricos y los hallazgos obtenidos como producto del desarrollo de la estrategia didáctica plasmada en la intervención en el aula.

En lo que corresponde a la síntesis reflexiva merece precisarse que tal tarea se concreta o materializa en cada uno de las etapas que se agotan en el proceso de investigación. Es decir, el investigador aprovecha cada escenario, cada momento y cada particularidad del proceso para ejercer una mirada bidireccional, la cual conlleve a ejercer una acción retrospectiva y prospectiva del fenómeno de estudio, ello significa que de un lado se hace una revisión y reflexión de las tareas ya agotadas, y de acuerdo a las bondades o desaciertos del recorrido, se orienta un plan de mejoramiento para las tareas futuras.

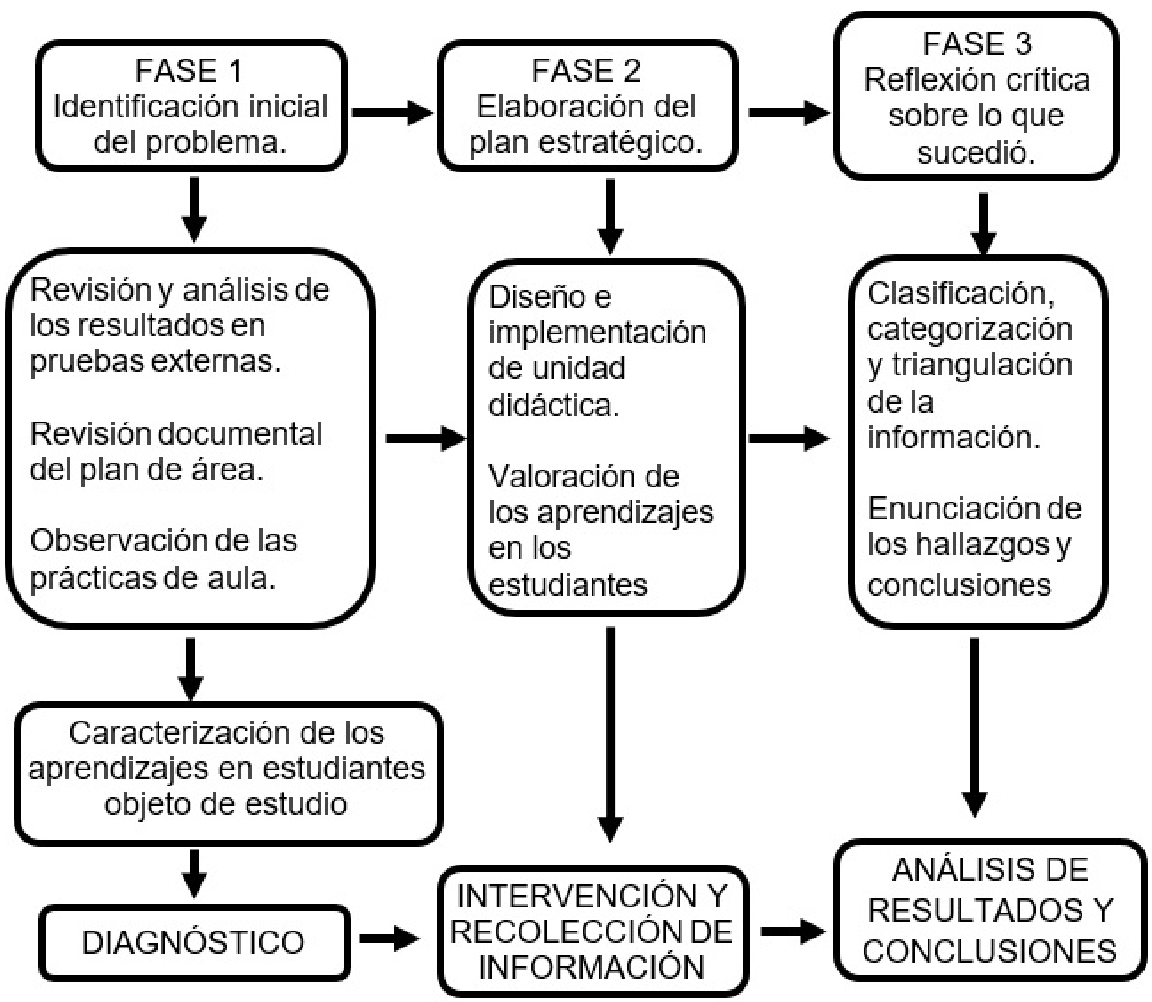
La dinámica de indagación antes descripta, desde luego exige al investigador docente hacer esfuerzos notables que permitan llevar registros confiables mediante el uso de técnicas pertinentes, igualmente obliga a desarrollar una observación sistemática y objetiva alrededor del fenómeno de estudio, también conlleva a agotar un análisis e interpretación de la acción que junto a la acción de reflexionar sobre los hallazgos y la posterior confirmación de las teorías conduce a "…indagar el significado de la realidad y alcanzar cierta abstracción o teorización sobre la misma"[116]. El recorrido antes descrito, se hace factible una vez el investigador localice información de interés con la cual agota el proceso de codificación, categorización y reducción de la misma, una vez localice nuevos conceptos o

[116] LATORRE, Ibít. p. 83.

establezca relaciones con los presentados a priori, y una vez se puedan representar tales ideas en esquemas o gráficos los cuales permitan hacer una lectura inferencial que permita contrastar esa nueva información ya sea con la base teórica aportada o con la misma realidad del contexto donde se desarrolla la investigación.

El siguiente diagrama ejemplifica los tres momentos que se proponen para implementar esta propuesta de investigación.

Imagen 6. Momentos propuestos según el enfoque metodológico.



6.4 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.

6.4.1 Técnicas de recolección: De acuerdo a la propuesta de investigación y según el diseño de la estrategia didáctica se adoptaron las siguientes técnicas de recolección de información:

6.4.1.1 La observación participante. Cabe señalar que en éste estudio, la observación se constituye en una guía para supervisar el proceso de indagación, y en esa tarea de orientar la acción se consigue documentar el proceso a través del empleo de procedimientos que permiten ver lo que está ocurriendo. Igualmente se precisa que ésta técnica permite de un lado controlar la acción y de paso permite hacer un registro sistemático que conlleva al mejoramiento de la práctica docente. Según Latorre[117], los datos que emergen de la observación se constituyen en la base para identificar evidencias, para comprender si la intervención es efectiva o debe ajustarse, y particularmente la observación permite reflexionar sobre lo que se descubre para generar planes de mejora en la práctica profesional.

Desde esta óptica, *la observación participante* según McKernan[118], es la técnica más acertada a la hora de hacer investigación-acción y la de mayor uso cuando se trata de estudiar la realidad escolar y el curriculum. En consecuencia, esta técnica es favorable pues permite ser muy preciso en la narrativa de lo observado y por consiguiente se pueden contrastar ideas a priori por medio de observaciones reales. En relación al ejercicio de observar la acción, el investigador debe ser sistemático en el registro objetivo de los hechos o acontecimientos ocurridos, para ello puede emplear entrevistas, llevar diarios o notas de campo, también puede incluir sus puntos de vista y sensaciones a partir de la reflexión que hace desde el rol de investigador.

---

[117] LATORRE, Ibít. p. 83
[118] MCKERNAN, James. Investigación-acción y curriculum: métodos y recursos para profesionales reflexivos. Ediciones Morata, 1999. Capítulo 3. p. 8

Al contextualizar la función que cumple la observación en ésta investigación se encuentra que desde que el docente investigador inicia el trabajo de campo se requiere hacer observación a muchos elementos presente en el contexto. En este sentido merecen ser examinadas la práctica de aula, la cultura institucional, la idiosincrasia de la comunidad educativa, entre otros. Pero en particular el investigador focaliza para su objeto de estudio lo que ocurre en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje, los obstáculos y aciertos de esa actividad, así como la manera de asumir la evaluación escolar.

De otro lado la observación también se extiende al momento de la intervención en el aula. Para este caso la actividad consiste en auto-observarse ya que el propósito es comprender, apoyado en el recurso del video y en las notas de campo si la práctica de aula confiere significado a los estudiantes para poder movilizar sus aprendizajes previos en relación al contenido probabilidad simple. Igualmente la observación le confiere importancia a la eficacia de la estrategia didáctica y se constituye en un apoyo para ejercer una reflexión que conlleve tomar decisiones para realimentar las sesiones de clase futuras. Según Latorre[119], el investigador docente, recoge información sobre la intervención para prever qué consecuencias o efectos tiene la estrategia de acción implementada, es decir el investigador debe ser sistemático en el registro objetivo de los hechos o acontecimientos ocurridos, para ello puede emplear entrevistas, llevar diarios o notas de campo, también puede incluir sus puntos de vista y sensaciones como resultados de la reflexión que hace desde el rol de investigador.

6.4.1.2 El cuestionario. En esta investigación, se asume el cuestionario como técnica de recolección de información dada la necesidad de describir y analizar los aprendizajes que durante el proceso de enseñanza han vivenciado los estudiantes en relación al contenido probabilidad simple. Desde esta óptica, el cuestionario propuesto buscaba reconocer mediante preguntas de tipo mixto (abiertas y cerradas) asociadas a situaciones-

[119] LATORRE., Op cit., p. 53.

problema (experimentos aleatorios) qué tipo de significados asocian los estudiantes al momento de hacer razonamientos probabilísticos y a su vez qué sesgos o heurísticos emergen cuando plantean soluciones a la situación presentada.

Para León y Montero[120], el cuestionario se configura como el ejercicio de indagar a los sujetos por información relevante, de interés y con preguntas previamente establecidas para que las personas elijan o argumenten su elección con base a su conocimiento previo. Desde esta lógica, el proceso de recolección de información para el ejercicio de diagnóstico, en la presente investigación se demarca según McKernan[121], por la técnica conocida como *cuestionario administrado* en grupo, pues como ya se mencionó el ejercicio consistió en citar a los estudiantes al aula, presentarles la tarea y en función de las respuestas dadas hacer el respectivo análisis. Cabe señalar que los ítems seleccionados para este cuestionario fueron retomados y adaptados de Velásquez[122], quien a su vez los tomó de investigaciones adelantadas por autores como Fishbein y Gazit, Albert, Green, entre otros. Finalmente, se precisa que el primer cuestionario se desarrolla con el propósito de identificar los presaberes de los estudiantes y de acuerdo a ello fundamentar la propuesta de intervención en el aula. Después de concretar el proceso de enseñanza y de aprendizajes, se plantea un segundo cuestionario y para ello se construye un instrumento que intenta corroborar con situaciones alineadas a las del cuestionario inicial para verificar los avances y la consolidación de los aprendizajes en los estudiantes.

6.4.1.3 Unidad didáctica. En lo que refiere a la unidad didáctica, la cual es el recurso adoptado para contextualizar y desarrollar la estrategia de enseñanza, se describen a continuación aspectos propios de su conceptualización. Según

[120] LEON, MONTERO…
[121] McKernan, J. Investigacion-accion y currículo. Madrid: Morata, 1996. p. 84
[122] VELAZQUEZ GOMEZ, Mónica. Secuencia didáctica: Introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria. Tesis para optar el título de Magister en ciencias naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2014.

Ibáñez[123] la estructura que enmarca su formalización es de carácter flexible y casi siempre el docente investigador de acuerdo a su propósito, al contexto o realidad a indagar, es quien la adapta o delimita. Sin embargo, la autora resalta la necesidad de que en la programación de contenidos exista coherencia y se responda al desarrollo curricular planteado en la Institución. Además, señala que aparte del carácter dinámico y sistemático en relación a la temporalización o a la integración de los componentes didácticos, en ésta se busca que en la programación se articulen las actividades propias del proceso de enseñanza.

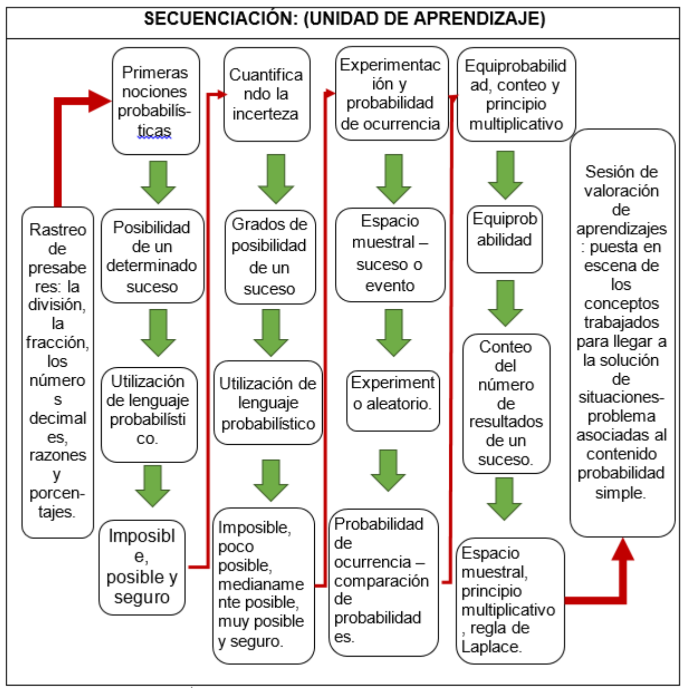
En lo que concierne al diseño de la unidad didáctica, en particular a la planificación de las actividades que respondan a los objetivos de esta propuesta, se ha orientado la enseñanza mediante un tópico familiar a los estudiantes. Es decir, la programación está basada en situaciones- problema que se enmarcan en el cultivo de cacao, lo cual permite de un lado hacer significativa la secuencia de enseñanza y de otro exige que la planificación responda a "…los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un período de tiempo determinado"[124]. En tal sentido, la unidad didáctica se ha estructurado en seis sesiones que inician con la exploración de presaberes o prerrequisitos de los estudiantes en relación al contenido probabilidad simple y finaliza con una sesión de valoración de los aprendizajes. Puede señalarse que las demás sesiones se hacen corresponder con el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, las cuales promueven cuatro momentos o situaciones (*acción – formulación – validación e institucionalización)* en los que se busca elaborar o movilizar el aprendizaje en el estudiante.

Según la autora, los elementos básicos que concretan una programación de enseñanza plasmada en una unidad didáctica va desde la descripción del tema

[123] IBÁÑEZ, Gloria. Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formalización. Aula de innovación educativa, 1992, no 1, p. 1
[124] Ibit., p.1

principal y contenidos, luego los objetivos de cada sesión, las estrategias metodológicas y actividades, los agrupamientos, la temporalización, los recursos didácticos y la evaluación. Desde luego la unidad propuesta para esta investigación tiene como base la estructura antes descrita y en particular el desarrollo o secuenciación de los contenidos se determinan u orientan según Rodríguez[125], por el siguiente diagrama:

Imagen 7. Modelo de secuenciación de contenidos en unidad didáctica.



Autor: Rodríguez. 2008

6.4.1.4 La entrevista. Se reconoce que esta técnica es una de las mejores opciones para acceder y registrar información, pues la entrevista favorece el ejercicio de indagar sobre un tópico o de profundizar en un determinado tema. De acuerdo a ello, para esta investigación se planteó hacer conversatorios e indagar a varios estudiantes para conocer el avance en los aprendizajes trabajados, así como

[125] RODRÍGUEZ, J. M. Algunas teorías para el diseño instructivo de unidades didácticas. Unidad didáctica:“ El alfabeto griego”(en línea). 2008.

también para identificar aspectos débiles y plantear mejoras en las siguientes sesiones de enseñanza. Para esta investigación se adopta la técnica de *entrevista a grupo focal, e*n ella, según Prieto y Cerdá[126] se establece un guion y mediante preguntas se busca la interacción entre los participantes para generar información. Es decir, se conforma un grupo de personas (entre 4 y 10) y se realizan preguntas en profundidad para conocer lo que opinan y hacen en la tarea e igualmente se genera el espacio para que los entrevistados expliquen o argumenten el porqué de sus opiniones y sus acciones.

A continuación, se presenta en el siguiente cuadro los aspectos relevantes y aquellas limitaciones que se asumen en la implementación de la técnica de entrevista a grupo focal.

Tabla 9. Ventajas y limitaciones del grupo focal.

VENTAJAS	*LIMITACIONES*
La interacción en grupo estimula la generación de ideas creativas y la espontaneidad.	La presión del grupo puede coartar a algunos participantes y limitar la confidencialidad.
Muy útil para temas complejos sobre los cuales se dispone de poca información.	Se trata de preguntas abiertas no aplicables a la medición de fenómenos.
Ofrece flexibilidad para explorar nuevos aspectos y dimensiones de un problema.	Requiere experiencia del moderador para no perder el rumbo de la investigación.
Se obtiene información de varias personas a la vez	Está limitada la posibilidad de obtener mucha información de cada participante.
Ofrece información de alta validez subjetiva.	Los datos no tienen el carácter de representatividad estadística.
Es relativamente rápida y menos costosa que otras técnicas.	La formación de un grupo homogéneo puede resultar difícil y el análisis de datos complejo.

Fuente: Prieto y Cerdá.

[126] RODRÍGUEZ, MA Prieto; CERDÁ, JC March. Paso a paso en el diseño de un estudio mediante grupos focales. *Atención primaria*, 2002, vol. 29, no 6, p. 366-373.

En cuanto a la logística que se desarrolló para implementar esta técnica, en primer lugar se trabajó con una muestra de estudiantes elegidos de manera no aleatoria. Para ello el docente investigador tuvo en cuenta los siguientes criterios: la muestra estará integrada por niños y niñas de 4° y 5° grado, los estudiantes se seleccionan de acuerdo al desempeño en las sesiones abordadas, destacados y no destacados. En segundo lugar, el grupo de estudiantes participó junto con el docente en un conversatorio demarcado por el desarrollo de una guía de entrevista semiestructurada. Las preguntas planteadas buscan conocer y verificar los avances o dificultades presentes en los estudiantes a la hora de responder cuestiones asociadas a situaciones de incertidumbre e igualmente se busca identificar en los razonamientos los significados y sesgos (errores) que están presentes en los estudiantes. Finalmente, la entrevista tuvo lugar una vez abordada la sesión que trabaja *la cuantificación de la incerteza,* ya que para este momento era importante conocer las dificultades o las ventajas de implementar la estrategia didáctica.

6.4.1.5 Análisis de documentos. El propósito al hacer uso de esta técnica es poder básicamente reconocer información que generan los estudiantes como producto del desarrollo de las guías de trabajo propuestas en la unidad didáctica. Desde esta óptica para Sánchez[127] y Vega, transformar o convertir información documental consiste en desarrollar un conjunto de operaciones, actividades, estudio, procedimiento o técnicas para organizar, buscar, recuperar y difundir la información. Esto significa que el investigador docente a medida que avanza el proceso de enseñanza revisa en los escritos, procedimientos y respuestas dadas por los estudiantes las evidencias que reflejen el avance o las dificultades al construir el conocimiento en relación con el objeto de estudio. Esta tarea se hace relevante para la investigación pues según Hernández y otros[128], la información que emerge está

[127] DÍAZ, Marlery Sánchez; VEGA-VALDÉS, Juan Carlos Freddy. Algunos aspectos teórico-conceptuales sobre el análisis documental y el análisis de información. *Revista Ciencias de la Información*, 2003, vol. 34, no 2, p. 49-60.
[128] SAMPIERI, Roberto Hernández, et al. *Metodología de la investigación*. México: Mcgraw-hill, 1998.

relacionada con elementos producidos en el “lenguaje” propio de los estudiantes, son ideas seguramente subjetivas pero de importancia para ellos, y si resulta complejo analizarlo, lo valioso es que son fuentes ricas en datos.

Cabe precisar, que esta técnica constituyó el primer acercamiento al ámbito de investigación. Desde este punto de entrada se permitió identificar y formular el problema a indagar y en consecuencia desde esta estrategia se logró hacer el análisis y reflexión de los siguientes documentos: los resultados de pruebas externas (SABER Y PISA) y plan de área y de aula de matemáticas. Sin embargo el acento en el empleo de la técnica está en la revisión de los documentos generados por los estudiantes en la actividad de clase. Al respeto el análisis estuvo enfocado en reconocer las estrategias que los estudiantes aplican a la situación-problema presentada en la secuencia de enseñanza. Del mismo modo se analizaron las preguntas y los ejemplos, así como los mensajes que cada grupo de estudiantes formalice durante el trabajo en equipo y también en el momento en que se haga efectiva la situación de formulación y de validación propias de la estrategia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas.

6.4.2 Instrumentos de registro de información. Los instrumentos que apoyaron el registro y análisis de la información y que se adoptaron para este estudio son: *el diario de campo, la guía o protocolo de cuestionario, de secuencia didáctica, de entrevista* y *de análisis documental*. En el primero se registró la información producto de las observaciones dadas en el momento de intervención, pero en especial se registra aquellas ideas o referentes que se consideren valiosos en el desarrollo de toda la investigación.

En el segundo, se plasmaron los ítems para el diagnóstico inicial y la prueba de salida propuestos en la estrategia didáctica. En relación al protocolo de unidad didáctica fue necesario desglosar cada sesión de enseñanza en los momentos presupuestados para el desarrollo de una clase, igualmente a los estudiantes se les posibilitó fichas de trabajo que contenían las situaciones y actividades que posibilitan el abordaje y asimilación de los aprendizajes. Así mismo en la unidad didáctica se contempla los propósitos, desempeños, estrategias, recursos y evaluación de cada sesión de clase. En cuanto al contenido de la guía de entrevista se precisa que esta se elaboró con preguntas asociadas al desarrollo de las actividades y situaciones que se plantean en las sesiones de clase, es decir, las preguntas se enfocaron a reconocer y profundizar en las ideas que los estudiantes han elaborado a trabajar con el contenido de probabilidad simple. Por consiguiente la información obtenida busca realimentar las siguientes sesiones de clase propuestas en la unidad didáctica. Finalmente se hizo análisis documental de los textos producidos por los estudiantes al abordar la solución de las situaciones propuestas, ello significa que el análisis documental se enfocó en reconocer las estrategias de solución y los razonamientos que los estudiantes asignas a las situaciones probabilísticas trabajadas durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

El siguiente cuadro condensa las técnicas, los instrumentos y los participantes de acuerdo a la etapa y el proceso de investigación.

Tabla 10. Correlación entre técnicas e instrumentos proceso de recolección de información.

Técnica de recolección	**Registro e instrumento**	**Participantes.**
Análisis de documentos	Guía de análisis	Docente investigador.
Cuestionario	Protocolo de cuestionario (prueba diagnóstica y de salida)	Todos los estudiantes participantes (4°- 5°)
Entrevista a grupo focal.	Guía de entrevista (semiestructurada)	Seis estudiantes de acuerdo a los criterios establecidos.
Observación participante.	Diario de campo – video	Todos los estudiantes durante el desarrollo de las clases.
Unidad didáctica.	Protocolo de la unidad didáctica.	Docente investigador y estudiantes de 4° y 5°.

6.5 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES.

A razón de ofrecer un panorama de la realidad y de determinadas dinámicas que ocurren en torno a la Institución Educativa se describen a continuación aspectos para contextualizar este trabajo de investigación.

6.5.1 Estructura y entorno educativo

Nombre:	Instituto Agropecuario Santa Rosa.
Municipio:	Bolívar
Departamento:	Santander
Metodología:	Escuela Nueva y Escuela Graduada.
Estrato:	Las familias de los estudiantes en su mayoría (95%) están en el nivel 1 del SISBEN y un 5% en el nivel 2.
Número de estudiantes:	345 estudiantes matriculados.
Énfasis:	Agropecuario
Niveles Educativos:	Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Técnica (Articulación SENA)
Básica Primaria:	Son diez las sedes que corresponden a la modalidad Escuela Nueva: Santa Rosa, El Cruce, Alto del Tigre, Genderales, El Limón, Choroló bajo, San Marcos, Villa Alicia, San Vicente, La Guacharaca.
Secundaria y media:	Solo se ofrece en la sede principal Santa Rosa y allí se presta el servicio educativo desde los grados Sexto a Undécimo. Existe solo un grupo por grado.
Número de docentes:	20 docentes.

6.5.2 Ámbito social. El corregimiento de Santa Rosa, municipio de Bolívar, departamento de Santander debe su creación a su ilustre fundador señor Marco Aníbal Ariza, él es quien ha donado el terreno donde se construyó, allá por el año de 1960, la primera escuela con el propósito de educar a los niños y jóvenes que en ese entonces se radicaban con sus familias en la región. La principal ocupación de los pobladores se debe actividades propias de la agricultura, entre ellas el cultivo de cacao, maíz, aguacate, bananito y también la ganadería. En su momento, la región estuvo marcada fuertemente por la presencia de grupos al margen de la ley cuyas actividades de sostenimiento se debían al cultivo, procesamiento y comercialización de estupefacientes y del cual la gran mayoría de sus habitantes hicieron parte.

En sus comienzos, la escuela fue construida en madera y palma de Jender. La cual albergaba estudiantes de primaria, orientados por la primera docente de la región, la profesora Aida Sánchez Traslaviña. El nombre inicial de la institución educativa era escuela rural La Ballena y su nombre se debe a la hermosa quebrada localizada dentro del mismo corregimiento. En años posteriores, se implementa el servicio educativo para los grados sexto y séptimo, autorizado por la Secretaria de Educación de Santander y de paso la razón social cambia a "Instituto Agropecuario Santa Rosa". Dos años más tarde se implementan la cobertura educativa hasta el grado once. Esta gestión ocurre siendo gobernador de Santander el Dr. Miguel De Jesús Arenas Prada.

6.5.3 Ámbito familiar y económico. En la actualidad las familias y pobladores de esta región se sobreponen a su trágico pasado conformado asociaciones para organizar y recibir del estado apoyo en torno a cultivos como el banano, aguacate y el cacao. También reciben acompañamiento estatal del programa de víctimas del conflicto. Pero la acción de mayor impacto en la comunidad es la que ofrece el colegio, el cual propende por formar y educar a los jóvenes y niños de esta región.

Hay que señalar que el sustento económico de las familias obedece en su mayoría al cultivo de cacao y banano y se supone que hay solvencia económica pero se observa que la mayoría de familias se encuentran en condiciones de abandono y precariedad en sus viviendas, pues muchas de estas evidencian condiciones deplorables, por falta de los servicios básicos y de salubridad. Es notorio que un buen número de familias son disfuncionales y que el rol de padres lo ejercen los abuelos pues los progenitores viven en regiones o ciudades distantes.

6.5.4 Ámbito educativo. En cuanto a las relaciones de familia y escuela, hay que señalar que es escaza la articulación entre las partes para apoyar a los estudiantes . En relación a los padres de familia esta tarea se hace compleja dado que el nivel educativo de muchos acudientes es de uno o dos años de escolaridad. Desde la escuela no se evidencian acciones significativas para apoyar a los estudiantes en su formación y esto es notorio al observar las prácticas de aula, pues estas están enfocadas a desarrollar tareas trasmisioncitas y tradicionales; es decir, no hay una apuesta por contextualizar la educación con las necesidades reales de las familias o de la región. Por ejemplo, el énfasis del colegio es agropecuario y son escazas las experiencias donde se encuentra una relación o aplicación de la teoría con la práctica. En general, puede afirmarse que la escuela no responde a las expectativas de los estudiantes y las familias y por ello se denota un incremento en la deserción año a año.

Es necesario señalar que para los docentes y en particular para la enseñanza es un reto enfrentar la carencia de equipos de cómputo o la pésima conexión a internet. También es un desafío, contar con el apoyo de las familias para que ejerzan un rol de complemento a las tareas académicas y formativas. E igualmente se considera un esfuerzo enorme el que los docentes se deban desplazar grandes distancia para estar con sus familias los fines de semana. Otra dinámica que se observa, es la rotación de los docentes por causas como amenazas o traslados que obedecen a no estar a gusto en su trabajo y por ello llegan nombrados en propiedad y apenas pueden se hacen trasladar, lo cual afecta el proceso de enseñanza y de aprendizaje ya que el nombramiento de un nuevo docente implica la gestión y los tramites de rigor en el tiempo.

6.5.5 Escenario y participantes. La investigación se ha realizado en una Institución Educativa de carácter oficial y para el año 2016 la matricula en transición y primaria era de 110 estudiantes, que pertenecían a 9 sedes rurales, y 126 estudiantes matriculados en la sede principal de la institución en los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y media.

La metodología de enseñanza adoptada para las sedes educativas donde se ofrece la básica primara es la de Escuela Nueva. La modalidad es multigrado y en muchas ocasiones los docentes deben atender 6 grupos de estudiantes (0°,1°, 2°, 3°, 4°y 5°) en una misma aula y de esta manera orientar las áreas obligatorias del currículo. Es conveniente decir que el colegio viene siendo acompañado por el Programa Todos a Aprender (PTA) desde el año 2012. Inicialmente el acompañamiento busca fortalecer las condiciones básicas y apoyar a los docentes de básica primaria desde formaciones situadas para fundamentarlos en estrategias didácticas en las áreas de lenguaje y matemáticas. Desde el año 2015 el programa se enfocó principalmente en el acompañamiento al docente en el aula. En esta actividad, primero se generan espacios para realizar la planeación de la clase de manera conjunta entre el docente y el tutor. Posterior a ese momento se programa una fecha para hacer la observación en el aula y una vez se hace efectiva se da un espacio para realizar la realimentación al docente acompañado. Desde el programa se establecen los instrumentos de observación con los criterios definidos, en los que se plasman los compromisos y las acciones mejorar de acuerdo a las debilidades presentadas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

6.5.6 Criterio para la selección de participantes. Los estudiantes participantes de la investigación se eligieron de acuerdo a los criterios que establece el programa becas para la excelencia del Ministerio de Educación Nacional donde se especifica que para el caso de los docentes tutores se debe seleccionar un grupo de estudiantes de educación básica primaria del colegio focalizado por el programa PTA. Otro criterio fue elegir la sede que geográficamente permitiera un acceso rápido en cuanto al desplazamiento.

Atendiendo a los anteriores criterios de selección se elige la sede principal de la institución objeto de estudio. En esta sede se encuentran las siguientes particularidades: La modalidad que se determina para este grupo es multigrado, es decir, en el aula encontramos 11 estudiantes de 4° grado (4 niños y 7 niñas) y 16 estudiantes de 5° grado (5 hombres y 11 mujeres). Las edades de estos estudiantes oscilan entre 9 y 14 años. Cabe resaltar que en lo que va corrido del 2016 este grupo de estudiantes ha sido orientado por tres docentes en momentos diferentes.

6.5.7 Validez interna de los resultados. Alcanzar la validez interna de la información requiere de estrategias que permitan establecer la certeza de su calidad. Según Latorre129, toda investigación está respaldada por criterios regulativos, los cuales hacen fiable y permiten valorar la veracidad del proceso. Al respecto una estrategia para lograr esta validez, es la triangulación, la cual permite realizar un control cruzado entre diferentes fuentes de datos: personas, instrumentos, documentos o la combinación de ellos.

Para esta investigación se precisa hacer triangulación con los datos obtenidos a partir de la aplicación de técnicas como la observación participante, las entrevistas a informantes claves y la aplicación del diagnóstico de presaberes.

---

129 LATORRE,. Ibit,. P. 91

6.5.8 Principios éticos. Teniendo en cuenta que según McKernan[130] existen principios éticos en los que se debe fundamentar un proceso de investigación, para esta este estudio se tienen en cuenta los siguientes:

● Solicitar autorización al directivo de la institución, objeto de estudio, para realizar el proceso de investigación.
● Informar y solicitar los permisos necesarios para que los acudientes de los estudiantes autoricen la participación de los mismos en el desarrollo de la investigación.
● Se considera pertinente asignar códigos a los estudiantes participantes para evitar divulgar la identidad de los mismos.
● La información recogida durante los diferentes momentos de la indagación se clasifica como confidencial.
● La comunidad educativa estará informada sobre los avances dados durante el proceso de investigación.
● Los resultados alcanzados serán de uso pedagógico y de antemano serán un referente para promover cambios en la práctica de aula de los docentes y, cuando no favorezcan pedagógica o didácticamente servirán para evitar cometer errores en la misma práctica de enseñanza.
● El investigador docente propende por mantener una actitud reflexiva, respetuosa y asertiva con los actores implicados en el proceso de investigación.

[130] MCKERNAN,. Op,.cit. p. 261

7. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la investigación cualitativa los fenómenos a estudiar permanentemente están bajo la observación del investigador, A veces se cree que los pequeños detalles no ofrecen información significativa, pero con una apropiada metodología es posible sintetizar información que permita tener una mejor mirada del problema u objeto de estudio. En este sentido, Hernández[131] afirma que el análisis cualitativo es iterativo y recurrente en sus diferentes fases y que éste proceso se aborda teniendo en cuenta variados métodos para recabar los datos. También afirma que la sistematización de la información es clave y ello implica tareas como organizar, transcribir y codificar datos para que al final, se realice una conexión entre los conceptos y los datos analizados. Otra interpretación de este proceso es la expuesta por Latorre, quien afirma que: *"el análisis de datos se entiende como el conjunto de tareas, -recopilación, reducción, representación, validación e interpretación- con el fin de extraer significados relevantes, evidencias o pruebas en relación con los efectos o consecuencias del plan de acción"*[132]. Dadas estas interpretaciones, cabe señalar que el proceso de análisis no sigue un camino único o estandarizado y desde luego, las dinámicas son propias en cada estudio.

De acuerdo a lo ya expuesto, en ésta investigación el proceso de análisis implicó en primer lugar conocer y valorar los resultados obtenidos del ejercicio de caracterización. En un segundo momento, se analizó lo ocurrido en la intervención en el aula, materializada esta, en el desarrollo de la unidad didáctica. Y al final, el análisis se concentró en valorar y contrastar la información obtenida en la prueba de cierre con la información que entregó tanto la caracterización de presaberes como el desarrollo de la unidad didáctica. Al cierre, se plasman las conclusiones del estudio, sobre las cuales se afirma si hay o no evidencia de un avance en cuanto a la consolidación de los aprendizajes en el concepto de probabilidad y también, si se

[131] HERNANDEZ, Sampieri. P. 438
[132] LATORRE, Antonio, p. 83

reconocen avances en el proceso de alfabetización probabilística de los estudiantes.

7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS: ACTIVIDAD DE CARACTERIZACIÓN.

La fase diagnostica, materializada en la actividad de caracterización, se debe a la implementación de ocho experiencias de tipo aleatorio. Para el desarrollo de las mismas, es necesario interactuar y proponer una solución que implique poner en escena las nociones y los presaberes en relación al concepto de probabilidad y de paso conocer el conocimiento de los estudiantes frente al azar y la incertidumbre. En este sentido, el propósito es identificar palabras o expresiones que están inmersas en el lenguaje cotidiano de los estudiantes y que corresponden a una terminología pertinente para llegar a una solución del problema propuesto. Del anterior ejercicio, también emergen errores o sesgos a la hora de hacer predicciones o pronósticos de la ocurrencia de un evento. Por lo tanto, en éste estudio se pretende valorar y conectar ese tipo de razonamientos producto de la toma de decisiones con los expuestos en las investigaciones previas, e igualmente se busca identificar en los razonamientos de los estudiantes los significados de la probabilidad que emergen cuando estos presentan una estrategia de solución al problema planteado. Las situaciones de aprendizaje abordadas en la actividad de caracterización evalúan los siguientes conocimientos en el concepto de probabilidad:

- *Comprensión del concepto de suceso seguro y noción de combinatoria*
- *Comparación de probabilidades*
- *Independencia y percepción de la propiedad pérdida de memoria.*
- *Evaluación de la percepción de independencia de sucesos.*
- *Estimación frecuencial de la probabilidad.*
- *Juego equitativo.*

Así, el camino que se aborda para el análisis de cada situación de aprendizaje implica las siguientes tareas: identificación y análisis a priori de la experiencia aleatoria, clasificación y tabulación de los datos generados en el desarrollo de la situación e interpretación de los datos con base en la tabulación lo cual significa hacer uso de las categorías y de la teoría para presentar las conclusiones de cada problema abordado.

En lo que sigue, se hace el análisis de las experiencias aleatorias propuestas. En la primera situación se evalúa la *comprensión de suceso seguro y la noción de combinatoria* e igualmente el propósito es identificar los términos o expresiones cotidianas que ligadas al lenguaje especializado propio del concepto abordado.

7.1.1 Situación 1: "botones seguros". Los estudiantes en este experimento visualizan una caja que contiene 5 botones rojos, 4 botones verdes y 3 botones azules. Luego se permite que tres estudiantes de la clase pasen y extraigan de la caja un botón respectivamente sin devolverlo a esta. Los tres resultados de la extracción se registran. Ahora la composición de la caja se normaliza, es decir vuelve al estado inicial y se pasa a agregar un nuevo botón, en este caso un botón blanco. La tarea consiste en predecir la cantidad de botones a extraer de la urna para estar seguros que se ha sacado un botón de cada color.

Esta situación fue tomada de la investigación de Cañizares[133], quien a su vez la tomó de los estudios realizados por Fischbein y Gazit[134], en ella se ha dado una ligera adaptación en la composición del espacio muestral y en los generadores aleatorios (uso de botones en lugar de balotas).

7.1.1.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado*: Comprensión del concepto de suceso seguro y distinción entre éste y el suceso probable. Interpretación del espacio muestral. De igual modo,

[133] Op,it. Cañizares. P. 62
[134] Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15, 1-24.

se analiza la capacidad combinatoria del alumno, quien debe enumerar las distintas posibilidades que se presentan para extraer botones de una urna.

● *Contexto:* Extracción de botones de una urna. Es un contexto discreto. Puede considerarse como una sucesión de extracciones sin reemplazamiento, por lo que los sucesivos experimentos serían dependientes y harían cambiar la composición de la urna.

● *Espacio muestral:* Consta de 4 sucesos elementales no equiprobables por razón de la composición de la urna: E = {rojo, verde, azul, blanco}. En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales.

● *Posible sesgo (estrategia):* El alumno puede comprender erradamente la pregunta e interpretar que se pide el número mínimo de botones para que sea posible obtener uno de cada color, confundiendo las nociones de posible y seguro (esto llevaría a la respuesta “cuatro botones”). Según Fischbein y Gazit[135], la noción de suceso seguro muestra mayores dificultades en su comprensión, que la de suceso probable. De otro lado, se pone a prueba el razonamiento combinatorio del alumno, que puede no ser capaz de enumerar todas las posibilidades y por ende no logra dar una interpretación correcta del experimento lo que lo llevaría a considerar un espacio muestral incorrecto.

[135] Fischbein, E. y Gazit, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics. 15. 1984. p 1-24

7.1.1.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 11. *Respuestas situación 1 "*botones seguros*"*

Códigos: alumno	**Numero de botones a extraer**	**¿Qué entiendes por un evento seguro?**
EH3	4	"para mi saldrá verde"
EH10	4	"es cuando yo elijo el azul y me sale el azul"
EM11	4	"es cuando yo elijo el azul y me sale el azul"
EH11	7	"porque puede caer ese color"
EH1	7	"es que un evento seguro es un botón blanco"
EH6	4	"que uno está seguro es diciendo algo que haga"
EH5	4	"porque puede salir"
EM3	4	"porque puede salir"
EH2	4	"porque es jugando con ficha es seguro"
EM5	4	"es porque uno juega en algo y uno juega y se gana"
EM6	4	"es como una moto o un carro con papeles"
EH4	4	"para mí un evento seguro una moto con papeles"
EH8	4	"porque es muy divertido y bonito un evento seguro"
EM10	4	"es cuando digamos una pelea de toros tienen que verificar que los toros no se salten las gradas"
EM4	4	"por ejemplo cuando uno quiere ir para una fiesta y pues uno no está seguro de ir"
EH9	4	"no se"
EM2	4	"no se"
EH7	4	"yo no sé"
EM8	4	"yo no sé"
EM1	13	"yo no sé"
EM7	13	"no se"
EM9	13	"yo no sé"

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 12. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Extracciones necesarias	Numero de respuestas	Porcentaje (descripción)
4	17	El 72,3% de los estudiantes considera que se debe extraer de la urna un número equivalente en botones a los elementos del espacio muestral.
7	2	El 9% de los estudiantes afirma que se deben hacer siete extracciones.
13	3	El 13,6% considera oportuno hacer 13 extracciones, ósea la totalidad de los botones de la caja.

7.1.1.3 Interpretación de los datos con base en la tabulación. En cuanto a las respuestas entregadas por los estudiantes frente a la pregunta, *¿Qué entiendes por un evento seguro?,* se observa que sus argumentos están inclinados a describir situaciones cotidianas donde se requiere hacer uso del término *seguro* pero con un enfoque más deterministas. Por ejemplo, mencionan eventos como contar con un *seguro* para un vehículo o motocicleta, también hacen alusión a situaciones cotidianas donde se debe evaluar que tan *seguro* es participar de ellas sin que se corra el riesgo de sufrir un accidente o proponen casos donde se debe decidir si se está seguro de asistir o no a una celebración.

En este ejercicio no solo se reconocen argumentos enfocados en lo determinístico, también están presentes respuestas que expresan ideas referidas a la noción de aleatoriedad. Por ejemplo, hay alusión a situaciones en donde existe alguna posibilidad de ganar al participar de un juego, lo cual les lleva a concluir que en estos casos si se cumple o aplica el evento *seguro*.

De otro lado afirmaciones como, "*puede salir o caer ese color de botón"* evidencia que otorgan a la posibilidad de elegir un evento (un color de botón) la equivalencia con el evento *seguro*. También se afirma que al tratarse de un objeto físico (botones) entonces no hay riesgo que al hacer la experiencia esta falle. Finalmente, es necesario señalar, que aproximadamente **un tercio** de los estudiantes no entregan ningún respuesta a la pregunta formulada.

De acuerdo a la interpretación de los resultados, puede afirmarse que en las ideas y respuestas dadas por los estudiantes no hay claridad en la noción de evento seguro. En consecuencia, lo que para ellos es un evento seguro puede estar relacionado con lo que se conoce como un evento probable. Por ejemplo, en afirmaciones como: "*porque puede salir", "porque puede caer ese color", "es porque uno juega en algo y uno juega y gana",* se identifica que relacionan el evento seguro con la posibilidad de que un evento ocurra. Es decir, sí es probable que aparezca, entonces es un evento seguro. Por tanto, no hay claridad en la noción de suceso seguro pues no se acude a evaluar si hay un 100% de seguridad en la ocurrencia.

En cuanto a la comprensión de la tarea, es decir en cuanto a informar la cantidad de extracciones necesarias para estar seguro que se cuenta con un color de cada botón, los estudiantes responden en su mayoría que hay que extraer 4 botones. Esto informa, que hay una relación entre los elementos del espacio muestral y la cantidad de veces que consideran se debe extraer un botón. En este sentido, se asume que no está presente en el estudiante la capacidad de combinatoria. Por ejemplo, no se comprende que existe la posibilidad de que primero aparezcan los botones que corresponden a un solo color y luego los de otro color. Lo que conlleva a tener que extraer 13 veces para estar seguro que ya se ha extraído un botón de cada color.

Al verificar los demás argumentos que expresan los estudiantes se evidencia que estos hacen alusión a situaciones cotidianas y desligadas del contexto de la situación. En este sentido, en la investigación de Cañizares[136], se resalta que los juicios que hacen los estudiantes tienen una fuerte tendencia al *razonamiento probabilístico subjetivo,* donde aparecen factores no aleatorios, creencias arraigadas o previas que influencian el resultado de la experiencia aleatoria. En otras palabras, este fenómeno se da cuando los sujetos no tienen en cuentan los datos y deciden guiarse por las creencias previas para hacer sus predicciones.

En cuanto al razonamiento, donde los estudiantes afirman tener que extraer todos los botones de la urna para estar seguros de obtener un botón de cada color y al verificar la configuración de los eventos posibles, se encuentra como dato curioso que los estudiantes registran varias veces el suceso “botón blanco”. Se sabe que solo hay uno de éstos en la urna, lo cual advierte que no hay claridad en cuanto a

[136] Ibit. Cañizares. P. 86

la noción de combinatoria. De acuerdo al análisis que presenta Cañizares[137], los resultados muestran que la mayoría de estudiantes aducen la necesidad de sacar 8 elementos de los 9 para estar seguros de contar con lo que señala el espacio muestral; en nuestro caso, solo 3 estudiantes de 22 piensan que se requieren de 13 las extracciones para cumplir con el criterio del problema. Ante esto, no es posible asegurar que los estudiantes han comprendido la importancia de configurar todas las combinaciones para estar seguros de la efectividad de la estrategia propuesta, aunque si es ejemplo de que existe un acercamiento con la nocion evaluada ya asocian al suceso seguro el tener que extraer la totalidad de eventos posibles.

Otro grupo de estudiantes, predice que la cantidad de extracciones es un número que esta entre 4 y 13 botones, lo cual muestra que hay cierta confusión entre las nociones de evento *seguro* y *probable.*

A continuación, se aborda el estudio de tres experiencias aleatorias en la que se pretende conocer el conocimiento previo de los estudiantes en relación a la *comparación de probabilidades.*

7.1.2 Situación 2: "*amigos al azar".* El grupo de 4° y 5° grado ha decidido organizar una actividad para celebrar el mes de amor y amistad. Los estudiantes han escrito su nombre en un trozo de papel y se depositan una bolsa. A la anterior cantidad se le adiciona el nombre de tres docentes con los cuales se conformada por un total de 14 hombres y 11 mujeres. Ahora cada estudiante debe predecir el posible género (hombre o mujer) que considera sacaría al extraer un papel de la bolsa y desde luego, explicar las razones que lo hacen tomar esa decisión.

Esta experiencia aleatoria fue extraída de la investigación de Cañizares[138], quien a su vez la tomó de los estudios realizados por Green[139], para la cual se implementan

---

[137] Ibit. Cañizares. P 79
[138] Op,it. Cañizares. P. 62
[139] Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough

las siguiente variaciones: ajustar el número que corresponde a los estudiantes participantes y en particular cada participante en el juego debe llegar a una conclusión una vez compare la predicción con el resultado obtenido en la extracción.

7.1.2.1 Análisis a priori de la tarea.

• *Conocimiento evaluado*: los conceptos y/o propiedades que los estudiantes deben poner en juego para hacer una predicción acertada son: noción de aleatoriedad y equiprobabilidad, cálculo de probabilidades de suceso no equiprobables, comparación de probabilidades en extracciones con reemplazamiento y desarrollo de competencias de cálculo.

● *Contexto:* Situación de muestreo usando papeles con nombre de niño/niña (14 niños/11 niñas), realizando una extracción al azar.

● *Espacio muestral*: E = {niño, niña}. Se precisa comparar dos sucesos simples que no son equiprobables por razón de la composición del dispositivo aleatorio.

● *Posibles sesgos*: Según Vásquez[140], dentro los posibles errores o dificultades que pueden presentar los estudiantes, está la de realizar una generalización incorrecta de la regla de Laplace a partir del espacio muestral y pensar que hay igual probabilidad de elegir el nombre de una niña o niño. Para contestar correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar cantidades absolutas. La respuesta errónea también podría indicar que el alumno considera un espacio muestral diferente, cuyos elementos serían cada uno de los estudiantes de la clase (24 sucesos elementales equiprobables) y que interpreta la pregunta, como obtener la probabilidad que tiene cada uno de los niños y niñas de la clase.

---

[140] VAZQUES ORTIZ, Claudia A. Tesis doctoral: Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de ecuación primaria en activo. Universidad de Girona, España. 2014. p. 265

7.1.2.2 Clasificación y tabulación de los datos.

*Tabla 13. Respuestas Situación 2: "*amigos al azar".

Código: alumno	Predicción /resultado.		Argumentos de acuerdo a la predicción y al resultado.
EM5	H	M	"que uno puede sacar más un hombre"
EM1	H	H	"es más posible que salgan más hombre, eso aprendí"
EM2	H	H	"cuando hay más hombre la posibilidad es que salen hombres"
EM3	H	M	"fallé en la conclusión dije hombre y me salió mujer"
EH8	H	M	"que no tengo buena conclusión"
EH4	H	H	"tengo una buena conclusión porque soy pupatio"
EM10	H	H	"yo si tengo conclusión porque si saque lo que dije".
EM9	M	H	"yo no tengo conclusión porque no saqué lo que escribí"
EH1	H	M	"yo no tengo cálculo, creí sacar un hombre y me saque una mujer"
EM6	H	M	"me equivoque, hice bien los cálculos pero sale mujer por ser más poquitas"
EM11	H	H	"yo tengo cálculo que salía hombre porque hay más hombre y menos mujeres, por eso salió hombre"
EH3	H	M	"es más probable sacar una mujer"
EH7	M	M	"que uno aprendió que es probable que hubiera salido mujer"
EH2	H	H	"mujer porque me salió hombre, es posible que me caiga mujer"
EM8	H	M	"Mujer, porque me saco hombre, es probable que caiga mujer"
EH9	H	H	"yo aprendí que no hacer"
EH5	H	M	"no dio argumentos"
EH10	H	H	Yo aprendí que si le sale hombre que no es eso sino que es la suerte.
EH11	H	H	Yo quería que cayera hombre y cayó
EH6	H	H	Yo pensaba que me cogía de diferentes, pero me salió mi propio género.
EM4	M	H	Yo quería que saliera mujer porque los hombres son molestones.
EM7	M	H	yo quería que me saliera mujer y hay 14 hombres y 11 mujeres

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 14. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Predicción dada	Numero de respuestas	Porcentaje (descripción)
HOMBRE	18	El 81,8 % de los estudiantes afirman que saldrá el nombre de un HOMBRE
MUJER	4	El 18,2% de los estudiantes afirman que obtendrán el nombre una MUJER.

7.1.2.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. Inicialmente, se encuentra que de los nueve estudiantes que consideran como más probable que resulte el evento del género femenino, solo EH7 evidencia estar razonando con base en la comparación de probabilidades pues deduce de la predicción y del resultado que hay un porcentaje alto de sacar el nombre de una mujer. Los demás estudiantes, muestran un razonamiento más subjetivo ya que se inclinan por intereses personales o por factores asociados a un error en la predicción.

Hay que señalar que algunos estudiantes asumen la palabra *conclusión* como *predicción.* Por ende, al obtener un evento opuesto al pronosticado aducen que carecen de tal habilidad y lo asumen como un error en su cálculo. En tal sentido, se comprende que el razonamiento del alumno se ve afectado por creencias y habilidades personales, lo cual le impide hacer una comparación entre el valor absoluto de cada evento para poder comparar o cuantificar la probabilidad. También se observa que el resultado de la extracción afecta la idea inicial del alumno, esto le ocurrió a EH3 pues asegura que *es más probable sacar una mujer,* cuando creía que era más probable obtener un hombre.

Ahora bien, el evento de mayor tendencia en las predicciones de los estudiantes es efectivamente el de hombre y ello informa que a nivel global los estudiantes están en la capacidad de comparar la probabilidad de cada uno de los suceso no equiprobables, además, se evidencia que su pronóstico se aleja de asumir la totalidad de eventos de la experiencia como equiprobables. Sin embargo, en algunos argumentos se hace alusión a la suerte como elemento que determina la posibilidad de aparición de los eventos, según Vásquez[141] ese error en el razonamiento se debe a una confusión entre las nociones de aleatoriedad y de equiprobabilidad, motivando al alumno a pensar que es en ultimas la suerte quien

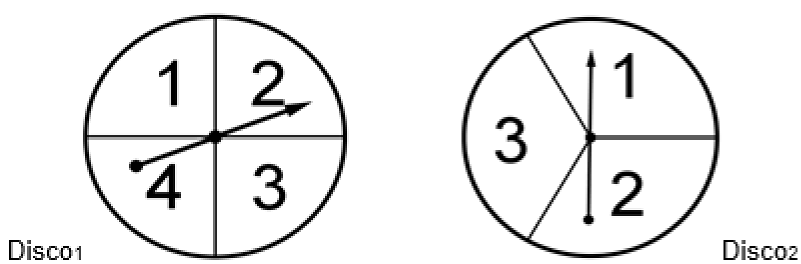
[141] Ibit. VASQUEZ. p. 264

decide y por tanto olvida que en los dos valores del espacio muestral hay mayoría para el elemento hombres.

Algunos errores o dificultades motivo de análisis en investigaciones previas, corroboran que al momento de dar solución a esta situación se evidencia que hay presencia del sesgo de la equiprobabilidad descrito por Lecoutre y Duran. En este sentido, en los argumentos ofrecidos por los estudiantes no hay referencia a insinuar que es igualmente probable que salga un hombre o una mujer, tampoco hay asomos de considerar el espacio muestral compuesto por 25 sucesos simples equiprobables.

7.1.3 Situación 3: *"ruletas".* Si contamos con dos mecanismos de juego aleatorio, como los de la imagen, en cuál de ellos es más fácil que al girar la aguja ésta señale la región donde está el numero 3?

Imagen 8. Discos aleatorios



Este experimento fue adaptado de Cañizares[142] quien a su vez lo tomó del estudio realizado por Green[143]. Se ha elegido, porque permite evaluar el sesgo de la equiprobabilidad y porque trabaja la comparación de probabilidades para el caso de dos espacios de sucesos equiprobables.

[142] Op, it. Cañizares. p. 56
[143] Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough

7.1.3.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado*: Se pide comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes. Cada uno de los experimentos consta de un número finito de sucesos equiprobables, aunque el número de sucesos no coincide en los dos experimentos.

● *Contexto*: Ruletas seccionadas con agujas giratorias, divididas en distinto número de sectores de igual área. Es un contexto contínuo en el que la probabilidad de los sucesos se determina mediante la relación del área de la parte al área total. Sin embargo, también puede aplicarse la regla de Laplace porque las áreas en que está divididas cada una de las ruletas son iguales.

● *Espacio muestral*: Dos espacios muestrales: E = {1, 2, 3, 4} y E' = {1, 2, 3}. Dos funciones de probabilidad: P_1: E→ [0,1] y P_2: E'→ [0,1]. Sucesos equiprobables por razón de simetría física: igual área ocupada por cada sector. El alumno ha de elegir el espacio probabilístico más conveniente para obtener el suceso dado.

● *Posible sesgo (estrategia):* El problema no se puede resolver correctamente sólo comparando cantidades absolutas, por lo que puede servir para detectar si el alumno hace este tipo de comparación. Al ser un contexto continuo (en dos dimensiones) hay que comparar las proporciones de áreas ocupadas por cada número o bien, aplicar la proporcionalidad al número de sectores favorables y posibles de cada ruleta.

7.1.3.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 15. *Respuestas Situación 3: "ruletas".*

Códigos: estudiante	Predicción	Argumentos sobre la cuestión, ¿Por qué el disco no elegido presenta mayor dificultad para obtener un tres?
EH11 – EH12	Disco 2	"porque tiene más números"

EM3 – EM4 EH3 – EH4 EM5 – EM6 – EM7 EH1 - EH2 EH10 – EM9 EH9 – EM8 EM1 – EM2 EH7 – EH8 EH5 – EH6		"porque hay más números" "Porque el disco 2 tiene menos números" "porque hay más números, es más difícil y en el 2 es más fácil" "no elegimos el disco 1 porque hay más cuadros y en la 2 puedo sacar 3" "porque estaba muy cerca del clip para que cayera" "porque donde están los 4 números son más pequeños los cuadros" "El disco 1 es más difícil porque tiene 4 números y hay menos espacio" "el número dos" No responden
EM3 – EM4	Disco 1	"porque está muy cerca y el clip gira y no cae"

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 16. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

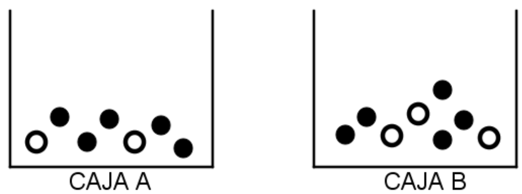
Predicción dada	Numero de respuestas (x parejas)	Porcentaje (descripción)
DISCO 2	10	El 91,3 % de los estudiantes afirman que en el disco 2
DISCO 1	1	El 8,7% de los estudiantes se inclinan por el disco 1

7.1.3.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. En primer lugar, se puede ver que los estudiantes basan su predicción por la cantidad de divisiones en cada ruleta. Es decir, a más sesiones menos posibilidad de caer en la región donde está el número 3. Lo anterior, hace pensar que a mayor espacio o área en la sesión se otorga más posibilidad de que el clip caiga en la sesión que contiene al número 3. También se contempla la cantidad de números en cada ruleta y evalúan que si son más números por ruleta hay menor posibilidad de que caiga el 3.

Los estudiantes justifican su predicción basados en el área o tamaño de cada sesión de la ruleta. Se encuentra cierta contradicción pues argumentan que el clip al girar difícilmente caería en la región del 3 por que se pasa con facilidad a otra sesión de la ruleta.

7.1.4 Situación 4: "urnas y balotas". La imagen muestra dos urnas con balotas de dos colores. La composición de la caja A presenta cinco balotas negras y dos blancas y la composición de la caja B presenta cinco balotas negras y tres blancas.

Imagen 9. Urnas y balotas



Antes de hacer una extracción, se pide predecir en cuál de las dos urnas hay mayor probabilidad de sacar una balota de color negro. Luego de hacer la predicción se debe argumentar los motivos de su elección.

Esta situación está reformulada a partir de la investigación de Cañizares[144], quien a su vez la tomó de los estudios realizados por Green[145]. En ella se evalúa los contenidos de cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables (por la composición de las urnas) en un experimento simple. Además, se observa una igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles.

7.1.4.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado*: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación de igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles.

[144] Op,it. Cañizares. P. 62
[145] Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough

● *Contexto*: Elección entre dos urnas con bolas negras y blancas (5n/2b; 5n/3b). Probabilidad de obtener negra. (Contexto discreto)

● *Espacio muestral*: Un espacio muestral E = {n, b} y dos funciones de probabilidad P_1: E → [0,1] y P_2: E → [0,1]. Los dos sucesos simples no son equiprobables en ningún caso por razón de composición de las urnas.

● *Posible sesgo (estrategia):* Puede obtenerse la respuesta correcta por la simple comparación de casos desfavorables, sin utilizar el razonamiento proporcional.

7.1.4.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 17. *Respuestas Situación 4:* “urnas y balotas”.

<table>
<tr><th>Códigos: estudiante</th><th>Predicción</th><th>Argumentos ¿Por qué razones considera que en esa urna hay más posibilidad de sacar un pimpón negro?</th></tr>
<tr><td>EH1</td><td rowspan="21">URNA B</td><td>“en la urna B hay más blancos”</td></tr>
<tr><td>EH2</td><td>“la urna B tiene más, tiene 3 y la otro 2”</td></tr>
<tr><td>EH3</td><td>“la urna B tiene más blancos”</td></tr>
<tr><td>EH4</td><td>“tiene más blancos”</td></tr>
<tr><td>EM1</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM2</td><td>“tiene más blancos”</td></tr>
<tr><td>EH5</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM3</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM4</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EH6</td><td>“hay más blancos que en la caja A”</td></tr>
<tr><td>EH7</td><td>“hay más posibilidades en la caja B, 5 negras y 3 blancas”</td></tr>
<tr><td>EM5</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM6</td><td>“hay más blancos”</td></tr>
<tr><td>EM7</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM8</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM9</td><td>“en la caja B hay más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EH8</td><td>“la caja B es más probable tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM10</td><td>“hay más pimpones blancos en la caja B que en la A”</td></tr>
<tr><td>EH9</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EH10</td><td>“en la caja B hay más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EH11</td><td>“tiene más pimpones blancos”</td></tr>
<tr><td>EM11</td><td>URNA A</td><td>“escribí en la urna A porque hay menos cantidad y en la caja B hay más negros y blancos”</td></tr>
</table>

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 18. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Predicción dada	Numero de respuestas	Porcentaje (descripción)
URNA B	21	El 95,4 % de los estudiantes afirman que la urna B entrega mayor posibilidad de obtener una balota de color negro.
URNA A	1	El 4,6% de los estudiantes se inclina a predecir que la posibilidad es mayor en la urna B.

7.1.4.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. La mayoría de estudiantes que realizaron esta experiencia expresan que la composición de la caja B es la que da mayor probabilidad de obtener una balota negro. Hay que señalar que los estudiantes hacen esta predicción basados en el número de pimpones blancos contenidos en las urnas. Es decir que su razonamiento les lleva a centrar la tencion en los casos desfavorables y por ser mayor esta composición en la urna B su apreciación los lleva a inclinarse por relacionar mayor probabilidad con mayor cantidad e casos desfavorables.

De otro lado se observa que los estudiantes para llegar a esa idea no recurren a comparar la razón entre los pimpones blancos y la totalidad que hay en las respectivas urnas. Es decir, su predicción solo se contempla uno de los dos eventos o elementos del experimento.

El estudio de la siguiente experiencia aleatoria, pretende conocer el conocimiento previo de los estudiantes en relación a *la independencia y percepción de la propiedad pérdida de memoria.*

7.1.5 Situación 5: "la apuesta de Pedro Julio". *Pedro Julio es un jugador acérrimo y semanalmente gasta mucho dinero en los juegos como la lotería. Él afirma, "he jugado los dos últimos meses el número 9341 y hasta ahora no he ganado nada". Sin embargo, el sigue apostando con ese mismo número porque piensa que el juego de lotería es cuestión de suerte, es decir a veces se gana y a veces se pierde, entonces como ha apostado muchas veces ese mismo número y hasta ahora no ha caído; nuevamente afirma, "estoy seguro que la próxima vez que juegue tendré más* *posibilidad de ganar que las anteriores veces". ¿Qué opinión le merece el razonamiento de Pedro Julio?*

Esta situación ha sido extraída del cuestionario de Cañizares[146], quien a su vez la tomó del test de Fischbein y Gazit. El propósito de esta experiencia es evaluar el razonamiento probabilístico de los estudiantes en relación a la comprensión de independencia de sucesos. además, por medio de este problema se pretende evidenciar el sesgo de la recencia negativa, en las respuestas de los estudiantes, producto de la heurística de la representatividad, definida en la literatura por Kahneman, Slovic y Tversky, citados por Cañizares[147], lo cual los llevaría a pensar que si el apostador ha perdido las veces anteriores, ya es tiempo de que gane, por lo que deduce que las posibilidades de ganar en la próxima jugada deben ser mayores (falacia del jugador), actitud que deja en evidencia que hay una incorrecta comprensión de la independencia de sucesos en el asignación de probabilidades.

7.1.5.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado:* Comprensión, por parte de los estudiantes, de la idea de independencia y percepción de la propiedad de pérdida de memoria. También se evalúa la diferenciación entre muestreo con y sin reemplazamiento.

● *Espacio muestral:* Sólo se hace mención implícita. El espacio muestral (resultados en la lotería) es finito, con sucesos equiprobables y con gran número de elementos.

● *Posible sesgo:* Esta experiencia evalúa la creencia en la posibilidad de control sobre los mecanismos aleatorios. La recencia negativa induciría a creer que, puesto que Pedro no ha ganado, sus posibilidades de ganar aumentan en la próxima jugada.

---
[146] Ibit. Cañizares p. 10.
[147] Ibit. Cañizares. p 100

7.1.5.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 19. *Respuestas Situación 5: "*la apuesta de Pedro Julio*".*

Cód. estudiante	**Argumentos a pregunta:** *¿Qué opinión le merece el razonamiento de Pedro Julio?*
EH1 – EH2	"si él le sigue echando hartas veces pues alguna vez le cae"
EM5 – EM6	"creo que si uno tira más veces uno puede ganar"
EH3 – EH4	"algún día corre el día de suerte y puede ganar"
EH11 – EH12	"yo opino que un día corre suerte"
EH5 – EH6	"si no gana o pierde"
EM7 – EM8 – EM9	"hay gente que gana y gente que pierde, un día cogí una pistola de juguete y le dispare a una bomba y me gane un peluche"
EH9 – EM10	"Un día fuimos a la feria y nos ganamos $10.000"
EM1 – EM2	"un día fuimos y nos ganamos $10.000"
EM3 – EM4	"le tire una vez en la máquina y me gane dos mil"
EH7 – EH8	"poquitas oportunidades de ganar" (puede referirse a que con un # tiene mínima posibilidad de ganar)
EM11 – EH10	"no responden"

7.1.5.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. El objetivo de trabajar con esta experiencia aleatoria es conocer si los estudiantes perciben o cuentan con la noción de independencia de sucesos y percepción de la propiedad perdida de la memoria. En este sentido, ocurre que una parte de los estudiantes consideran acertado la idea de continuar apostando porque eso le dará mayores posibilidades a su número elegido. Sin embargo, reconocen el factor de la suerte como elemento determinante a la hora de participar en los juegos de azar. Otro grupo de estudiantes dan ejemplos para mostrar que han tenido experiencias similares y que con algunos intentos ante un juego de azar han logrado ganar la apuesta. Pero han dejado de lado el razonamiento que se pedía analizar pues se espera un argumento frente a la experiencia de apostar con un número repetidas veces y cuanto más lo hace piensa que mayor posibilidad tendrá de ganar con ese evento. También hay estudiantes que atribuyen a la experiencia, la propiedad de ganar o perder y lo ejemplifican con un caso personal.

También se observa que no destacan la idea de apostar repetidas veces para poder conocer la posibilidad de ocurrencia de ese evento y lo afirman porque en sus experiencias con los juegos de azar, han tenido éxito.

Es importante destacar que en los saberes previos de los estudiantes la tendencia es a relacionar y conectar con la estructura formada desde el pensamiento determinístico ya que es notable la distancia con nociones como la independencia de sucesos; es decir, es escaza la evidencia para señalar que los estudiantes comprenden que en experiencias azarosas, con sucesos equiprobables, los resultados ya conocidos no afectan las predicciones futuras. En cuanto a los ejemplos dados por los participantes, se intenta decir que es la suerte del sujeto y no el componente del azar el que hace factible que un evento tenga igual ocurrencia o diferente medida de la probabilidad. Así, la idea planteada por Pedro, es aceptada mayoritariamente, lo que indica que el sesgo de la recencia positiva está presente en el razonamiento del alumno, es decir el significado, que en este caso es el frecuencial se obvia a la hora de tomar una decisión.

El propósito de trabajar con la siguiente experiencia aleatoria, es conocer el conocimiento previo de los estudiantes en relación a la e*valuación de la percepción de independencia de sucesos*

7.1.6 Situación 6: "*caras y sellos*". *Los estudiantes toman una moneda y de acuerdo a su turno, hacen cinco lanzamientos, se deben registrar los respectivos resultados, cara (c), sello (s) y con base en estos, se predicción el resultado de lanzar nuevamente la moneda.*

Esta cuestión se encuentra formulada en el cuestionario de Cañizares[148], quien a su vez la tomó del test de Green. El propósito primeramente, es evaluar la comprensión de la independencia de sucesos y del significado laplaciano y frecuentista de la probabilidad. Para nuestro caso, son los estudiantes quienes

---

[148] Ibit. Cañizares. P 10

obtienen la secuencia de resultados y a partir de allí, observar si el mismo influye a la hora de predecir el evento del siguiente lanzamiento.

7.1.6.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado*: Evalúa la percepción de la independencia de ensayos repetidos en las mismas condiciones.

● *Contexto*: Lanzamiento de monedas. Se indica que se han efectuado varios lanzamientos y el resultado obtenido en ellos.

● *Espacio muestral:* Es finito, E = {C, X}. Consta de dos sucesos simples equiprobables por razón de simetría física.

● *Posible sesgo (estrategia):* Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación. Es posible detectar efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones a partir del trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Kahnemman, Slovic y Tversky (1982).

7.1.6.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 20*. Respuestas Situación 6: “*caras y sellos*”.*

Cód. estudiante	**Predicción**	**Argumentos: razones por las cuales consideran que puede salir ese resultado.**	**Sesgo**
EH1 – EH2	Cara	“Porque ya cayó sello ahora cae cara”	Recencia negativa
EM1 – EM2	Sello	“porque me salió muchas veces”	Recencia positiva
EM7 – EM8 – EM9	Cara	“porque cayo más cara”	
EM3 – EM4	Cara	“porque imaginamos que puede caer”	Significado Subjetivo
EH9 – EM10	Cara	“porque nos sentimos seguros con este número”	

EM5 – EM6	Cara	"porque la moneda es más rápida y puede caer cara"	Propiedades físicas del generador aleatorio
EH7 – EH8	Cara	"porque si uno lo tira no sabe si cae cara o sello"	Aleatoriedad
EH11 – EH12	Cara	"porque cayo cara y sello"	
EH3 – EH4	Sello	"creo que cayó sello cara y cayo sello ya a lo último"	
EH5 – EH6	Cara	"no responden"	
EM11 – EH10	Cara	"no responden"	

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 21. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Predicción dada	Numero de respuestas (x parejas)	Porcentaje (descripción)
CARA	9	El 82,6 % de los estudiantes expresa que en el siguiente lanzamiento de la moneda, cae *CARA*
SELLO	2	El 17,4% de los estudiantes expresan que cae SELLO.

7.1.6.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. El hecho de anticipar un resultado, después de conocer algunos, producto de lanzar una moneda varias veces, permite evaluar en los estudiantes la percepción de independencia de sucesos. Es decir, esta experiencia informa si los estudiantes comprenden que al ensayar con generadores aleatorios (dado o moneda) la probabilidad de pronosticar un evento se desliga de los resultados anteriores.

Algunos de las predicciones hechas muestran que la experimentación no afectó o condicionó la decisión que tomada por el estudiante. Esto se confirma en la misma justificación dada *("porque si uno lo tira no sabe si cae cara o sello")*. Por ello, en el argumento se identifica que la noción de equiprobabilidad está asociada a los eventos CARA Y SELLO. En otro caso, se evidencia que la predicción del próximo resultado está asociado a causas físicas. Es decir, a una propiedad física de la moneda. Algunos estudiantes más, muestran que su razonamiento está afectado por la manifestación del sesgo de recencia positiva. En cambio, otros relacionan el evento CARA con un valor numérico y expresan favorabilidad hacia un evento. Se encuentra también que cuando el experimento entrega de manera aleatoria un resultado, entonces predicen que un evento posible es uno de los dos sucesos del espacio muestral.

El argumento dado está tomado con base en una de las secuencias obtenidas y evidencia el sesgo de la recencia positiva.

La siguiente experiencia busca conocer el aprendizaje previo del estudiante en cuanto a la *estimación frecuencial de la probabilidad.*

7.1.7 Situación 7: "balotas blancas y negras". Se le presenta a los estudiantes una bolsa en la hay algunas balotas de color blanco y de color negro. Luego se informa que en un ensayo previo, un alumno sacó de la bolsa una balota, anotó su color y la volvió a depositar en ella. Se volvieron a mezclar las balotas y el alumno repitió el ejercicio por tres veces más y siempre se obtuvo una balota de color blanco. De acuerdo a lo sucedido en la experiencia, ¿De qué color piensa que es la balota en una siguiente extracción? Explica las razones que lo llevan a hacer esa predicción.

Esta experiencia ha sido extraída del cuestionario de Cañizares[149], quien a su vez la tomó del test de Green. En ella se trabaja el muestreo y la estimación.

7.1.7.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Contenido evaluado:* Hay que inferir la composición de la bolsa a partir de los datos de una muestra. Estimación frecuencial de la probabilidad.

[149] Ibit. Cañizares. P 63

● *Contexto:* Bolsa con balotas blancas y negras, cuya composición es desconocida. Se pide la probabilidad de extraer balota negra en un contexto frecuencial.

● *Espacio muestral:* E = {n, b}. Dos sucesos simples no equiprobables por razón frecuencial.

● *Posible sesgo (estrategia):* Se pretende saber si el hecho de que el número de balotas blancas y negras sea desconocido, influye en las respuestas de los sujetos. Si el estudiante utiliza la información frecuencial proporcionada, debe dar más peso a la obtención de balota negra (probabilidad frecuencial o experimental). Los que responden "blanca" ignoran la información proporcionada y olvidan que no conocen la composición de la bolsa. Algunos suponen, sin motivo, igualdad en las cantidades de balotas, o manifiestan el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Duran, 1998) y contestan la misma probabilidad. No hay cálculo de probabilidad, pero si comparación.

7.1.7.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 22. *Respuestas Situación 7: "*balotas blancas y negras*".*

Código estudiante	**Predicción**	**Argumentos: razones por las cuales lo eligen o no lo eligen.**	**Sesgos**
EH11 EH1 (EH2 – EM8) EH3 EM1 EM2 EH5 EH10 EH6 EH4	Blanca	"porque salía blanca, blanca cae blanca" "Porque él seguía sacando blanca" "porque ha salido hartas veces entonces caerá de nuevo" "porque había salido 4 veces blanca" "porque como ya sacó blanca le puede salir blanca" "porque como ya han sacado blanco le puede salir blanco" "porque esa vez salía blanca" "porque siempre sale blanca" "porque en todas las oportunidades le salió" "porque siguió saliendo blanca"	Recencia positiva (cree que el experimento tiene memoria)
EM3 EM4 EM5	Negra	"porque de pronto sale negra" "creo que sale negra porque si" "porque uno puede ver"	aleatoriedad
EH7	Blanca	"porque es posible que salga blanca o negra"	Aleatoriedad

EM11 EH8 EM6 EM7	Blanca	"yo escribí blanca porque hay más cantidad de blancas que de las negras" "porque hay más blancas que negras" "porque ha salido más blancas y menos negras" "porque hay más repetidas"	Comparación de probabilidades. Recencia positiva
EM9 EH9	Blanca	"porque esta de suerte" "porque está de más suerte"	subjetivo
EM10	Negra	"porque ya salió muchas veces blanca"	Recencia negativa ¿?

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 23. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Predicción dada	Numero de respuestas.	Porcentaje (descripción)
BLANCA	18	El 82,6% considera que el color de balota en la siguiente extracción es, blanca.
NEGRA	4	El 17,4% afirma que el color de la balota en la siguiente extracción es, negra.

7.1.7.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. La estimación frecuencial de la probabilidad tiene sus primeros asomos a edades tempranas, pues los niños a partir de 4 años evidencian, según Yost citado por Cañizares[150], que aprecian una estimación intuitiva de las posibilidades, sin que ello signifique contar con una comprensión completa del concepto de probabilidad. En consonancia con lo anterior se evidencia que los estudiantes infieren de acuerdo a los resultados, hasta el momento obtenidos, que lo más probable es que vuelva a repetirse el mismo evento. A pesar de que no se conoce el número de elementos de cada color de balota los estudiantes consideran que no hay equiprobabilidad en los eventos y que la cantidad de pimpones de color negro es mayor.

[150] Ibit. CAÑIZARES P.

En consecuencia puede enunciarse que los estudiantes en su mayoría presentan el sesgo de la *recencia positiva* la cual le asigna a un evento que se repite durante un experimento la posibilidad de seguir repitiéndose.

Un pequeño grupo de estudiantes aducen que el resultado puede cambiar y que es hora de que salga un pimpón de color blanco**.** Esto se conoce como el sesgo de *recencia negativa*. Algún estudiante deja abierta la posibilidad y argumenta que hay posibilidad de que caiga uno de los dos colores dado el carácter de aleatorio que tiene el experimento.

En la última situación de la actividad de caracterización, se evalúa el conocimiento previo de los estudiantes en cuanto al *juego equitativo.*

7.1.8 Situación 8: "*la apuesta del dado*". Agrupados en parejas, cada estudiante lanzan un dado cinco veces, se toma nota de cada número que muestre el dado. Enseguida, y con base en los resultados a priori, la pareja de estudiantes elige cada uno, tres de los seis números que contiene un dado regular. Posteriormente se pacta el valor a apostar y se escoge $500 o $600 como valor a recibir si sus números elegidos caen al lanzar nuevamente el dado. Una vez se haya participado del juego los participantes deben explicar si éste juego es equitativo o no.

Este juego aleatorio, ha sido adaptado del ítem propuesto en el cuestionario por Cañizares[151] y en el test implementado por Gómez[152]. En él, se evalúa las intuiciones que manifiestas los estudiantes cuando se enfrenta a un juego no equitativo. Con esta situación se desea también determinar si los estudiantes tienen en cuenta la equiprobabilidad de los sucesos simples para que con esa información deduzcan si alguno de ellos lleva ventaja a la hora de escoger una de las cantidades de dinero para apostar o por el contrario, que consideren que ciertos números en el

[151] Ibit. Cañizares. p. 102
[152] GOMEZ, Emilse. Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria

dado determina ventaja y por ello decidan asignar el menor o mayor valor de dinero buscando así, que el juego sea equitativo.

7.1.8.1 Análisis a priori de la tarea.

● *Conocimiento evaluado*: La experiencia evalúa la comprensión intuitiva y procedimental del juego equitativo, además en esta situación se enmarca el significado clásico de la probabilidad (previsión de probabilidad en juegos de azar) y se abordan los conceptos juego de azar, juego equitativo, experimento compuesto, dependencia e independencia de sucesos.

● *Espacio muestral*: E_1 = {#a, #b, #c, $500}. E_2 = {#d, #e, #f, $600}. La composición de cada subconjunto del espacio muestral implica tomar esta situación como compuesta, además está condicionada al resultado favorable de cada subconjunto del espacio muestral. Cabe señalar que los dos jugadores eligen tres elementos equiprobables y la razón de probabilidad es igual a $P = 3/6$ o $P = 1/2$

● *Posible sesgo*: Los contenidos evaluados en la situación están ligados con el concepto de probabilidad simple, equiprobabilidad de sucesos y la idea de juego equitativo. En cuanto a los posibles sesgos que emergen de la experiencia aleatoria puede presentarse que los estudiantes toman como referencia los resultados obtenidos a priori para evaluar el espacio muestral del experimento, lo cual les hace concluir que algunos eventos tienen mayor probabilidad de ocurrencia que otros, por lo se considera que su razonamiento está regulado por el sesgo de la equiprobabilidad.

7.1.8.2 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 24. *Respuestas Situación 8: "*la apuesta del dado*".*

Cód. estudiante	**Números elegidos**	**Valor apostado**	**Argumentos: razones por las cuales consideran el juego equitativo o no.**	**Sesgos**
EH3 – EH4	5 – 5 – 5 1 – 5 – 6	\$600 \$500	"en este juego puedo ganar o perder"	Noción de aleatoriedad
EM3 – EM4	6 – 1 – 3 4 – 2 – 5	\$500 \$600	"este juego es favorable porque aprendemos"	Noción de juego equitativo subjetividad
EH7 – EH8	2 – 3 – 4 6 – 5 – 1	\$600 \$500	"el juego es favorable para mi"	
EM5 – EM6	1 – 4 – 6 2 – 3 – 5	\$600 \$500	"es favorable porque le da más plata"	
EH9 – EM10	2 – 5 – 1 6 – 3 – 4	\$600 \$500	"es favorable porque es divertido y es un juego en el que se utiliza la mente"	
EH11 – EH12	4 – 6 – 5 6 – 3 – 5	\$600 \$500	"no sé pero es la suerte"	subjetivo
EM7 – EM8 – EM9	1 – 4 – 6 5 – 2 – 3	\$600 \$500	"es hermoso lo que jugamos"	Creencias personales
EM1 – EM2	3 – 1 – 2 6 – 5 – 4	\$500 \$600	"es muy divertido despeja la mente y nos distrae"	
EH5 – EH6	6 – 5 – 4 1 – 2 – 3	\$500 \$600	No argumentan.	Ausencia de la noción de juego equitativo
EH1 – EH2	4 – 2 – 6 2 – 3 – 1	\$600 \$500		
EM11 – EH10	3 – 1 – 2 6 – 5 – 4	\$500 \$600		

La siguiente tabla, sintetiza los datos anteriores y ofrece una interpretación estadística de la misma.

Tabla 25. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Distribución de los números	Numero de respuesta.	Porcentaje (descripción)
Distribuyen los 6 números equitativamente.	16	El 72,72% de los participantes distribuye equitativamente los 6 números del dado.
No distribuyen los 6 números equitativamente.	6	El 27,27% de los estudiantes no distribuyen equitativamente los 6 números del dispositivo aleatorio.

7.1.8.3 Interpretaciones de los datos con base en la tabulación. En esta experiencia se verifica la noción que los estudiantes han desarrollado sobre el concepto de juego equitativo. En correspondencia a esta constatación, se orienta a los estudiantes para que lanzan un dado varias veces y luego entren a contrastar sus intuiciones con los valores obtenidos e igualmente que se pueda verificar que al lanzar un dado los eventos posibles tiene igual posibilidad de salir. Posterior a esta verificación, cada integrante de la pareja elige tres de los seis números del dado y una de dos cantidades ($500 - $600) para volver a realizar la experiencia y en este sentido conocer si caen los números elegidos y así sumar el valor en pesos que ha decidido a tomar.

Al revisar los números escogidos y el valor en pesos adoptado por cada estudiante hay una tendencia a configurar el #5 y el #6 con el valor $600. Por lo tanto los números que en el dado son menores en esa cardinalidad se configuran con el valor $500. Lo anterior hace pensar que los estudiantes asignan mayor favorabilidad o probabilidad a números mayores en este juego aleatorio. Sin embargo, en los argumentos dados sobre lo equitativo o no del juego, las ideas que expresadas no sustentan un argumento a favor de los números con mayor cardinalidad en el espacio muestral de la experiencia. Se destaca que los participantes mencionan estar cautivados por el juego lo cual les permitió divertirse. También se encuentra que algunas parejas reconocen que al recrear el juego, en éste se *puede perder o ganar* y que ello depende de *la suerte*, es decir asocian la propiedad o carácter aleatorio a esta experiencia, lo cual vuelve irrelevante el que se escoja o no los números mayores del dado.

7.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS: PROPUESTA DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA.

En esta investigación, concretamente en la metodología se propone organizar la intervención en el aula desde la implementación de una unidad didáctica (U.D), la cual se ha denominado: *El cultivo de cacao, una oportunidad para la enseñanza de la probabilidad.*

Desde luego, la temática adoptada para la (U.D) pretende conectar y hacer significativa la actividad económica más relevante en la comunidad con el concepto matemático de probabilidad simple. En este sentido, es pertinente la implementación de una secuencia de enseñanza que permita en primer lugar, caracterizar los presaberes de los estudiantes respecto al concepto de probabilidad. En una segunda instancia, el plan pretende involucrar a los estudiantes en la solución de situaciones de aprendizaje, para que estos, con base en los momentos propuestos desde de la Teoría de Situaciones Didácticas (*momento de acción, de formulación, de validación y de institucionalización del saber),* se involucren en un proceso de aprendizaje que conlleve a la consolidación de los conocimiento asociados al pensamiento aleatorio y en general sea una oportunidad para avanza en el proceso de alfabetización probabilística de los mismos.

En lo que sigue, se realiza la descripción y el análisis de la (U.D) tomando como base el enfoque que propone Pérez citado por Martínez[153], el cual plantea dos momentos para su estudio: el primero considera resaltar la planeación general de la (U.D), y el segundo se refiere a la sistematización de las actividades propuestas para cada sesión de clase.

[153] Pérez. A. Mini curso – Taller: Fundamentación, diseño y análisis de Situaciones didácticas para el trabajo en aula en el campo del lenguaje. Bucaramanga, primer semestre académico. 2012. 12 p.

7.2.1 Planeación general de la Unidad Didáctica.

Tabla 26. Planeación general de la unidad didáctica.

Titulo	*El cultivo de cacao, una oportunidad para la enseñanza de la probabilidad.*
Resultados esperados en relación con los aprendizajes de los estudiantes.	A partir de esta (U.D), se busca introducir a los estudiantes en una colección de situaciones de aprendizaje que permitan familiarizarlos con el lenguaje probabilístico, conocer los grados de posibilidad de un evento y experimentar con dispositivos aleatorios para llegar a la cuantificación de la incerteza. De acuerdo a lo anterior, cada actividad está planeada para que durante la enseñanza los participantes consoliden los aprendizajes mediante la verificación e interpretación de información, la implementación de estrategia y la puesta en escena de los saberes previos para resolver afectivamente las situaciones plateadas.
Referentes teóricos, metodológicos, pedagógicos y/o didácticos.	● Estándares Básicos de Competencia, Matriz de Referencia, Derechos Básicos de Aprendizaje de matemáticas. ● Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (momentos de acción, formulación y validación) ● Institucionalización del saber y valoración de los avances o las dificultades en el proceso de aprender.
Secuencia de actividades por sesión (acciones)	La primera sesión de la (U.D) se enfocó en conocer y activar en los estudiantes los saberes previos necesarios para iniciar un proceso de alfabetización probabilística.

	Las sesiones de enseñanza 2, 3, 4 y 5 están pensadas para abordar respectivamente las siguiente tópicos: Primeras nociones probabilísticas, Cuantificando la incerteza, Experimentación y probabilidad de ocurrencia, Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo. En la sesión de cierre se presenta un ejercicio de evaluación de los aprendizajes en relación a la probabilidad simple. Para lo cual cada estudiante tendrá la oportunidad de trabajar con ocho situaciones aleatorias donde se espera ponga en práctica los conocimientos que elaboró durante la experiencia de aprendizaje en el aula.
Producto académico y rutina de cierre.	● Desarrollo de fichas de trabajo para cada sesión de clase. ● Trabajo individual y en equipo para proponer estrategias de solución a las situaciones propuestas y en donde se manipulan dispositivos aleatorios para generar secuencias que permitan hacer predicciones. ● Exposición y sustentación de las estrategias sugeridas para dar solución al problema abordado.
Mecanismos previstos para la evaluación y el seguimiento de los aprendizajes.	● Evaluación: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. ● Evaluación formativa. ● Ejercicios de realimentación y reflexión sobre las actividades y las experiencias propuestas.

7.2.2 Planeación de la sesión N° 1.

Tabla 27. *Planeación sesión de clase N°1*

Recurso 1. Planeación de la sesión de clase.		
● Sesión de clase:	● Fecha de implementación:	● Nombre de la actividad:
Primera	04 - 06 de julio de 2017	Rastreo de presaberes
● Listado y descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos/formativos)	El interés en la actividad de apertura consiste en rastrear y activar los conocimientos necesarios y útiles a la hora de resolver situaciones de aprendizaje asociadas con el concepto de probabilidad. En este sentido, el propósito del ejercicio consiste en movilizar los saberes de los estudiantes los siguientes aspectos: - Hacer uso de la división para estimar números decimales y de la multiplicación para calcular porcentajes. - Resolver situaciones de reparto equitativo mediante el empleo de fracciones. - Fraccionar un objeto en partes iguales y cuantificar el tamaño de las partes mediante fracciones. - Realizar equivalencias entre las expresiones dadas en fracciones y expresiones decimales o porcentajes. - Predecir y cuantificar eventos que emergen de una situación aleatoria.	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">La implementación de la actividad exige de los estudiantes cooperación y un ejercicio que implica recordar conceptos antes estudiados para poder intervenir en la situación presentada. Tal desempeño busca que los estudiantes logren movilizar sus aprendizajes previos y desde luego se puedan fortalecer las competencias a nivel cognitivo, procedimental y actitudinal.</td></tr>
<tr><td>● Descripción de la actividad, según la propuesta de enseñanza. Tareas abordadas por los estudiantes y gestión del docente.</td><td>● Lo que se espera de los estudiantes</td><td>● Consignas del docente y posibles intervenciones</td></tr>
<tr><td>Situación acción.
El docente socializa la situación de aprendizaje a los estudiantes, luego estos reciben la ficha de trabajo y hacen nuevamente la lectura del problema.

La tarea consiste en plasmar en un recuadro de la ficha de trabajo la consigna propuesta (divide equitativamente el terreno en cuatro lotes y señale o coloree uno de ellos)</td><td>La primera sesión de clase busca que los estudiantes hagan uso de sus saberes previos tales como el concepto o la noción que tengan de fracción su representación numérica y gráfica. También que cuantifique las representaciones gráficas y realicen comparaciones entre estas. Además, se busca que convierta estas expresiones en sus equivalentes, usando los decimales o porcentajes. La tarea también exige verificar a qué tipo de</td><td>Previo al inicio del trabajo con la actividad matemática se realizó un ejercicio de reflexión con los estudiantes donde se socializo un instrumento llamado “comportometro” el cual ayuda a regular y gestionar acuerdos que conlleven a asumir comportamientos y posturas pertinentes con</td></tr>
</table>

La segunda parte de la tarea consiste en dividir en ocho partes iguales otro terreno y señalar o colorear uno de los lotes que resultan. Luego el alumno comunica (en la ficha de trabajo) si se presentaron o no dificultades a la hora de repartir el terreno según se pedía (4 u 8 partes iguales). Finalmente el alumno cuantifica la relación que se da entre el lote coloreado y el terreno base (inicial), enseguida da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué cantidad de terreno, en relación al lote inicial han decidido cultivar cada uno de los hermanos? Se espera que los estudiantes propongan el uso de fracciones para cuantificar los terrenos a cultivar o que se cuestione si los números que ellos conocen son los apropiados para hacer la representación del terreno seleccionado	procedimientos acuden los estudiantes para transformar una fracción en decimal o en porcentaje. Posibles preguntas que emergen de la tarea: - ¿Cómo se lee una expresión fraccionaria? - ¿Qué nombre recibe los términos de una fracción? - ¿Qué se entiende por superficie o área de un terreno? - ¿Qué es cuantificar y como se aplica a las partes en que se divide el terreno?	la actividad prevista para la clase. También se desarrolló una actividad de integración y de rompehielos la cual permite que los estudiantes y docente se motiven y logren tomar confianza para iniciar la actividad académica. El docente invita a oír y después a leer la situación problema para luego interactuar con la ficha de trabajo de manera individual.

(coloreado). Igualmente se les pide reflexionar en lo siguiente: ¿Considera que los divisiones realizadas (en 4 y en 8) en el terreno inicial son iguales, es decir la superficie es la misma o alguno de ellos es mayor que el otro?		
Situación de formulación. Al iniciar el desarrollo de la actividad se pide a los estudiantes que se agrupan en parejas mientras que el docente socializa una segunda parte del problema inicialmente planteado. Además, se les plantea hacer un trabajo de equipo para desarrollar las tareas propuestas. La tarea consiste en hacer corresponder o superponer las bolsas que contiene el paquete sobre un rectángulo dibujado en la ficha de trabajo. Luego se pide que el alumno observe el arreglo y responda: ¿Qué cuantificación resulta	Para este segundo momento, la tarea se enfoca en relacionar el número de elementos de un conjunto (paquete de bolsas) con la extensión del rectángulo como unidad. Y después que se construye el arreglo los estudiantes deben cuantificar y comparar cada cantidad con el total representado. Los estudiantes deben hacer uso de las operaciones en los números naturales para lograr plasmar el	El maestro invita a agruparse en parejas y nuevamente le pide oír y luego leer la continuación de la situación problema. También se pide que entre los dos estudiantes se complementen y se apoyen para aportar ideas al desarrollo de la actividad.

adecuada para comparar el número de bolsas de cada color con el total que hay en el paquete? Enseguida, los estudiantes plasman sus ideas en una tabla contenida en la ficha de trabajo, lo cual exige, para completarla, describir el color de cada bolsa, la cantidad de las mismas y las formas de expresar o representar esas relaciones. La idea es inducir a los estudiantes para que represente tales relaciones con expresiones matemáticas pertinentes (fracciones, números decimales y porcentajes). Además, que propongan procedimientos para convertir un número fraccionario en uno decimal o porcentaje.	proceso de conversión entre la fracción, el decimal y el porcentaje. Posibles preguntas que emergen de la tarea: ¿Cuántas bolsas contienen cada paquete? ¿Qué espacio deben ocupar las bolsas en rectángulo? ¿Qué operación matemática me sirve para convertir una fracción en decimal o en porcentaje?	El rol del docente para este momento es hacer rondas por las mesas de trabajo para orientar y despejar dudas formuladas por los estudiantes.
Situación de validación. El desarrollo de esta actividad implica que se conformen agrupaciones de tres integrantes para luego socializar la continuación de la situación de aprendizaje. En ésta se presenta una experiencia	Este momento de la clase está pensado para que se dé un trabajo cooperativo entre los integrantes del equipo. Es decir, pueden complementarse en sus saberes para aprender entre ellos aquellos	En este punto el docente nuevamente pide oír y leer la continuación del problema pero también solicita que hagan

aleatoria y los estudiantes deben predecir y cuantificar la incerteza de sacar al azar una bolsa de un sobre que las contiene. La ficha de trabajo presenta una tabla donde se debe plasmar la formas de expresar verbal, fraccionaria, decimal y en porcentaje cada relación que se establece entre el total de bolsa y el número de cada color. Se finaliza dando respuesta al siguiente cuestionamiento: Si extraemos una bolsa de las depositadas en el sobre, ¿cuál es la expresión numérica que representa la posibilidad de que salga una bolsa de color azul? Es mayor, menor o igual esa posibilidad al compararla con el evento de sacar una bolsa verde?	procesos que aún no tienen bien consolidados. Al igual que los momentos anteriores deben hacer uso de las nociones que tiene de fracción, decimal, porcentaje para responder a las demandas de la tarea. La situación presentada exige que los estudiantes se desenvuelvan en un contexto aleatorio, por consiguiente se espera que salgan a flote las nociones sobre probabilidad y los grados de incerteza (probable, seguro, imposible) Posibles preguntas que emergen de la tarea: - ¿Qué es una situación aleatoria?	agrupaciones de tres integrantes. Igualmente pide que le trabajo se de en un ambiente cooperativo para que tengan la oportunidad de hacer aportes y de aprender entre ellos. El decente además de orientar y despejar dudas, permanentemente está formulando preguntas a los estudiantes para que cuestionen sus respuestas o para invitarlos a pensar y evaluar las ideas que

	- ¿Qué es predecir un evento? - ¿Cómo se cuantifica una predicción?	surgen de la actividad académica.
Realimentación de la actividad, rastreo de presaberes.		
Institucionalización del saber. En este punto se propone hacer la socialización y realimentación de las respuestas entregadas por los estudiantes en la ficha de trabajo y como tal en el desempeño en la sesión de clase. Del mismo modo se plantea hacer un ejercicio de reflexión con los estudiantes para buscar superar las dificultades encontradas y para propiciar un ambiente de motivación y de expectativa por querer aprender más y mejor en las experiencias de clase venideras. La tarea de socializar y de realimentar el trabajo o el producto que se generó en la clase exige retomar lo plasmado por los estudiantes en la ficha de trabajo y hacer la respectiva puesta en escena. Para ello el docente, previamente ha seleccionado algunas respuestas encontradas en la ficha de trabajo, las presenta a la clase y desde allí se evalúa lo propuesto como solución, lo cual implica contrastar para sugerir otras soluciones o para validar como acertada la respuesta dada. El anterior ejercicio, conlleva a verificar los aprendizajes que ha alcanzado cada estudiante y de paso reformular o realimentar, según sea el caso. En cuanto a los obstáculos que evidencian los estudiantes para concretar las demandas de las tareas propuestas se plantea que el docente recree ejemplos y procesos matemáticos que ayudan a aclarar dudas en los procedimientos o en las nociones que tienen del concepto de fracción, de número decimal y de porcentaje. Al igual		

se deben presentan situaciones orientadas a fortalecer el cálculo numérico y las operaciones básicas en los números naturales.

Esta sesión finaliza con el ejercicio de introspección sobre el desempeño mostrado por los estudiantes en la clase de rastreo de presaberes y se complementa con un conversatorio sobre la necesidad de plantear acciones que conlleven a consolidar los aprendizajes que abordar el trabajo con el concepto de probabilidad. en consecuencia se plantean a los estudiantes cuestiones como las siguientes:

- ¿Cómo lograr que los estudiantes puedan interiorizar y mejorar su habilidad para dar solución a problemas donde se emplean las operaciones básicas con números naturales?
- ¿Qué tipo de actividades facilitan la consolidación del concepto de fracciones en las cuales logren hacer representaciones como también puedan operar con ellas?
- ¿Mediante qué tareas los estudiantes aprenden con facilidad las equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes?
- ¿Qué se requiere para que los estudiantes puedan articular las nociones que tienen sobre el azar y la incertidumbre con la meta que establece hacer predicciones y cuantificar la incerteza empleando un lenguaje acertado y pertinente?

Las respuestas a los anteriores cuestionamientos y la reflexión hecha alrededor del desempeño mostrado por las estudiantes, señalan que éstos deben estar más expuestos a situaciones que les exija asumir el rol natural de solucionadores de problemas. Es decir, asumir un rol en el cual su tarea sea plantear estrategias de solución a un

problema y en esa dinámica emplear los conceptos matemáticos para verificar la eficacia o no de las estrategias propuesta. Por consiguiente, se plantea que la enseñanza de las matemáticas opte por abandonar paulatinamente la mera mecanización o ejercitación en procedimientos algorítmicos y se traslade a un escenario donde se exija establecer razonamientos para argumentar o concluir qué caminos ofrecen o se ajustan a una solución óptima del problema estudiado.

7.2.3 Análisis de la sesión N° 1.

Tabla 28. Análisis sesión de clase N°1.

Recurso 2. Análisis de la sesión de clase implementada.	
Descripción de las variaciones en la implementación de la actividad.	La implementación de la primera sesión (rastreo de presaberes) implicó hacer uso de **cuatro horas** de clase distribuidos en dos momentos. En esta primera experiencia de clase, los momentos que se aplicaron no respondieron a lo planteado inicialmente (acción, formulación y validación) en cambio se hizo una intervención que responde a un inicio, un desarrollo y un cierre. Esta variación obedece a la necesidad de evocar y conectar los presaberes de los estudiantes con el concepto de probabilidad y para ello se implementó un ejercicio más cercano a la exploración y ejercitación de proceso y operaciones aritméticas.

Resultados de aprendizajes esperados y no esperados. (descripción, documentación y codificación)	Esta sesión de clase centró su propósito en identificar la apropiación o no de los conocimientos matemáticos, prerrequisito para abordar el concepto de probabilidad. En tal sentido, del desempeño de los estudiantes se recogieron las siguientes evidencias: ● Dividen respectivamente dos figuras geométricas (rectángulos) en 4 y 8 sesiones de igual tamaño. **Observaciones:** Algunos estudiantes responden positivamente al ejercicio, mientras que otros deben esperar a que sus compañeros hagan el reparto para guiarse, se evidencia falta de iniciativa para responder rápidamente a la tarea. Algunos estudiantes (dos) requieren que el docente o un compañero les oriente y ayude pues no logran dividir el terreno según lo indicado. A partir del producto que surge de la tarea se encuentra que no solo hay una forma de dividir el terreno pues hay soluciones de tipo horizontal, vertical y diagonal. Aunque estas últimas son las que más distantes están de cumplir con el criterio de *repartir en partes iguales.* Se encuentra que varios estudiantes hicieron uso de instrumentos como la regla para medir las dimensiones del rectángulo y con esos datos aportar una solución acertada.

	● Representan gráficamente una fracción y la cuantifican usando expresiones verbales o numéricas. **Observaciones:** El alumno EH1, afirma que el ejercicio de hacer repartos en cuatro u ocho sesiones es muy sencillo pues a partir del arreglo (cuatro sesiones) se divide en dos cada una y así se obtienen las ocho partes. En cuanto a la necesidad de cuantificar la cantidad de terreno a cultivar en cacao con relación al lote inicial, el estudiante EH3 aduce que prefiere tomar el terreno que resulta de dividir el rectángulo en cuatro partes que el de ocho. Cuando se pide cuantificar con expresiones numéricas la parte del terreno que se va a cultivar comparando con la totalidad de lote, las respuestas ofrecidas revelan que el significado de fracción (parte-todo) aún no se ha construido pues enuncian números enteros como el dos, cuatro u ocho. ● Comparan dos expresiones fraccionarias para decidir cuál de ellas representa mayor superficie. **Observaciones.**

	Ante la tarea de definir si un cuarto y un octavo son expresiones equivalentes se encuentra que es mínima la comprensión del concepto de fracción ya que sus respuestas las toman comparando números enteros por lo regular basados en el denominador. Frente a la tarea de hacer corresponder el número de bolsa en el paquete con la superficie del rectángulo propuesto se encuentra que los estudiantes solo representan los tres colores de la bolsa u ocupan con las seis bolsas una parte de la figura geométrica. Es decir no completan la unidad. En otros casos el alumno EH4, asocia el paquete de bolsas propuesto con algunos paquetes de bolsa que ellos conocen, por ejemplo paquetes de 100 unidades. ● Expresan una fracción en sus equivalentes decimales o porcentajes. **Observaciones.** Es evidente que en la mayoría de estudiantes hay confusión y ausencia de procedimiento para encontrar equivalencias entre una expresión fraccionaria y un decimal o porcentaje. Lo anterior se aduce dado que las experiencias con estos contenidos matemáticos revelan que la enseñanza carece de los elementos esenciales para lograr un aprendizaje real y significativo. ● Hacen pronósticos o predicciones en contextos aleatorios. **Observaciones.**

	Ante el ejercicio de ejemplificar una situación aleatoria haciendo uso de balotas de diferentes colores, emergen comentarios para intentar definir el azar. Por ejemplo, el alumno EH7 expresa que azar es *elegir al que caiga*; HE4 dice, *es echar a la suerte* y EH8 enumera los diferentes colores presentes en la pepas ósea se acerca a la noción de espacio muestral. La actividad que conlleva a expresar verbal o numéricamente un evento de la situación ofrece las siguientes respuestas: el alumno EH7 afirma que *hay más poquitas verdes,* a su vez EH6 expresa que *las bolsas azules son más grandes que estas*, refiriéndose a las de color verde. En general, las apreciaciones de los estudiantes están condicionadas por un razonamiento más cercano a los modelos enteros que racionales. Ante la tarea de explorar en los estudiantes nociones sobre la probabilidad se encuentra que en estos existe un afán por acertar su pronóstico, es decir consideran que ante la primera extracción en la experiencia aleatoria debe salir su evento pronosticado, de no ocurrir así, entonces aducen que no los acompaño la suerte, otros se inclinan por sesgar la extracción pues intentan escoger de los eventos el que han seleccionado previamente. Por ejemplo el alumno EH4 describe lo que haría para acertar en una extracción. *Si uno cierra un ojo pero mira por el otro así puede ganar.* En general hay manifestaciones en los estudiantes que evidencian estar influenciados por el pensamiento determinista, lo cual se refleja cuando estos justifican sus desaciertos o aciertos frente a la experiencia aleatoria. Puede pensarse que estos argumentos son más subjetivos y están regulados por el contacto con su contexto.

7.2.4 Planeación de la sesión N° 2

Tabla 29. *Planeación sesión de clase N°2*

Recurso 1. Planeación de la sesión de clase.		
● Sesión de clase:	● Fecha de implementación:	● Nombre de la actividad:
Segunda	11- 13 de julio de 2017	Primeras nociones probabilísticas
● Listado y descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos/formativos)	La implementación de la segunda sesión de clase establece dar continuidad a la situación inicialmente planteada y desde esta lógica, invitar a los estudiantes para que exploren diferentes estrategias que permitan dar solución al problema propuesto. Igualmente hay expectativa por identificar los términos y el lenguaje empleado para caracterizar la incertidumbre. Al cierre, se propone reflexionar sobre el uso de términos y expresiones para asignar probabilidades y por tanto conectar esas ideas con la asimilación de un lenguaje pertinente que conlleve a consolidar la construcción del concepto de probabilidad. La sesión de clase está pensada para que los estudiantes trascurran por las siguientes tareas: - Hacer predicciones sobre la ocurrencia de un evento en contextos de incerteza, a partir de la información con que cuenta. - Proponer estrategias para llegar a la solución del problema. - Presentar a los compañeros de clase las estrategias de solución al problema y explicar los razonamientos que sustentan su adopción y pertinencia.	

	El objetivo de aprendizaje de esta sesión busca que los estudiantes conecten las nociones sobre la probabilidad en situaciones del contexto para poder identificar la posibilidad e imposibilidad de eventos en un experimento aleatorio. En general esta sesión se enfatizan el uso del lenguaje propio de la probabilidad para consolidar un lenguaje pertinente y contextualizado, el cual indique un avance hacia la alfabetización probabilística del alumno.	
● Descripción de la actividad, según la propuesta de enseñanza. Tareas abordadas por los estudiantes y gestión del docente.	● Lo que se espera de los estudiantes	● Consignas del docente y posibles intervenciones
El docente presenta a los estudiantes una situación de aprendizaje que se desprende del problema inicial, presentado en la clase anterior. El propósito es que tanto el abordaje, análisis y comprensión de la misma se realice de manera individual. (*Anexo 1. Situación 3: la recolección de mazorcas)* **Situación acción.**	Las tareas propuestas están orientadas a familiarizar al alumno con situaciones de tipo aleatorio. Se espera que se puede discriminar entre una experiencia de tipo determinístico y una con incertidumbre. Además, en tal ejercicio emergen palabras y expresiones a la hora de pronosticar o predecir un evento. El alumno hace uso del recurso presentado en la ficha de trabajo. Primeramente lo construye de manera individual, es decir colorea según las	El docente invita a oír y después a leer la situación problema para luego interactuar con la ficha de trabajo de manera individual.

Cada estudiante se acerca a la solución de la situación proponiendo sus propias estrategias e igualmente verificando si sus modelos de disco cumplen con las condiciones dadas en la situación de aprendizaje. En la ficha de trabajo están los modelos de disco (ruletas) para desarrollar la actividad. La actividad conlleva a que el estudiante diferencie una experiencia de tipo aleatorio de una determinista. Lo expresado antes se vivencia cuando se construya un disco para el evento seguro o uno para el evento probable. Es decir, se espera que de la experiencia se concluya que el fenómeno aleatorio se da cuando no conocemos a priori cuál de los posibles resultados es el que va a ocurrir.	demandas de la tarea y luego prueba usando un clip para confirmar que la ruleta es funcional para hacer la experiencia aleatoria. Posibles preguntas que emergen de la tarea: - ¿Cuántos colores debo aplicar al disco para que sea imposible que salga el evento propuesto? - ¿Es necesario colorear la totalidad del disco? - ¿Cuántos disco se necesitan colorear? - ¿Cuántos lanzamientos se deben hacer para comprobar que cumple con los criterios de la tarea? - ¿Qué es un evento? - ¿Qué es un evento seguro o imposible?	Se desarrolla una lectura que permita al alumno tener una mejor comprensión de lo leído. Se invita a los estudiantes a comprobar con el uso del clip si la forma de colorea el disco es acertada para que se cumpla lo que demanda la situación.

Una vez se han construido los discos, es necesario verificar si cumple las condiciones que planea la situación, además se presenta ejemplos que ayuden a hacer la comprobación.		
Situación de formulación. Los estudiantes se agrupan de cuatro integrantes e interactúan para socializar sus estrategias. Es importante que se atienda a la exposición de cada idea y una vez se hayan intercambiado los mensajes entre los estudiantes, estos deben definir una estrategia de solución común que permita dar respuesta satisfactoria al problema planteado. En este momento la mediación del docente consiste en orientar mediante la formulación de preguntas como:	Al estar agrupados los estudiantes pueden asumir posturas donde se les dificulta exponer sus estrategias a los compañeros o lo contario algunos ejercen un control para que se sobreponga su idea. También puede suceder que exista apatía para desarrollar el trabajo de manera cooperativa o simplemente no adelantan ninguna actividad. En cuanto al producto que se espera socialicen a los compañeros hay la posibilidad de que los estudiantes hayan coloreado todos los discos y en últimas ninguno cumple con el criterio de la tarea. Es probable que los colores aplicados se repitan en todos los discos y estos correspondan a los colores de la mazorcas (verde, roja y amarilla)	El rol del docente para este momento es hacer rondas por las mesas de trabajo para orientar y despejar dudas formuladas por los estudiantes. Reforzar las ideas que presentan los estudiantes con ejemplos

- ¿Cuáles son los resultados posibles? - ¿Es posible que la flecha giratoria no caiga en todos los colores durante el experimento? - ¿Cuál es la posibilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos? - ¿Qué mazorca tiene más posibilidades de salir? Para cerrar este momento se requiere verificar si las soluciones aportadas cumplen con las condiciones del problema, luego de pasar por el momento de consenso donde se planea y se organiza la exposición ante la plenaria.	También puede suceder que el grupo no llegue a un consenso para adoptar una estrategia de solución y a la hora de socializarla a los demás compañeros entonces cada uno quiera dar a conocer su trabajo que realizo individualmente. El docente puede apoyar el desarrollo del momento de formulación con ideas como: - Establezcan un orden de intervención y mientras alguien expone los demás atienden. - Formulen preguntas al compañero que expone para aclarar dudas o pida que ejemplifica o haga demostraciones. - Lleguen a un consenso sobre la estrategia que mejor se ajusta al criterio de la tarea.	similares o complementar su propuesta de solución a la tarea.
Situación de validación. En este momento de la clase los equipos de trabajo ponen en consideración de los demás las afirmaciones propuestas. Para	A la hora de socializar a la plenaria las estrategias los estudiantes pueden hacer uso de los dispositivos aleatorios o de otro recurso que así lo exija la estrategia de solución adoptada.	El rol del docente es de moderador de la exposición

ello, explican a los compañeros la estrategia de solución adoptada y si se requiere experimentan con los dispositivos aleatorios (ruletas), esto con el fin de entregar evidencia que sustente si la estrategia lleva la solución del problema. Se espera que los estudiantes oyentes estén en la capacidad de "sancionar" la estrategia, es decir, de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas u oponer otras aserciones. E igualmente se espera que los expositores estén en la capacidad de argumentar y sustentar sus procedimientos y resultados. El turno le corresponde ahora a los otros grupos y en esa dinámica la plenaria de estudiantes expone sus estrategias de solución al problema.	Algunos estudiantes pueden tomar la vocería en la exposición y a su vez dar los respectivos argumentos y respuestas a las preguntas de los compañeros. Dada la poca experiencia o la mínima exposición que los estudiantes han tenido con el ejercicio de hacer una presentación de sus idea, lo pertinente es que el docente guie e intervenga mientras los estudiantes toman confianza y alcanza propiedad en sus intervenciones. El momento de validación de la estrategia es un ejercicio que aporta a despejar dudas o ayuda a complementar las ideas que individualmente se han construido, o realmente no aporta mucho a la construcción del concepto trabajado. Sin embargo, la actividad genera pautas para que los estudiantes se interesen por mejorar la calidad de sus ideas y la forma de trasmitirlas o de sustentarlas. Lo anterior	de cada grupo de estudiantes. También modera las intervenciones y apoya mediante ejemplos o simulaciones las explicaciones dadas por algún alumno.

	aporta a la consolidación de la competencia razonamiento y argumentación.	
Institucionalización del saber.		
En este punto el docente retoma las ideas abordadas por los estudiantes e inicia la formalización de los conceptos a partir de las inquietudes, observaciones y aportes que surgieron de cada una de las fases. En consecuencia el momento de institucionalización del saber se concreta de la siguiente manera: Al iniciar, el docente presenta a los estudiantes un disco unicolor (verde), el cual hace girar, pero antes pide que hagan predicciones. Luego de conocer el evento que sale, se presenta una imagen con la escala de probabilidad. y se formula la siguiente pregunta. ¿Qué tan posible es que al girar la ruleta la flecha apunte a un color azul? De acuerdo a las respuestas se intenta reforzar con el razonamiento hecho para llegar a esa conclusión. A continuación se hace el registro de la actividad en una tabla que se presenta en la ficha de trabajo. La idea es iniciar con la representación verbal explicando que solo tenemos un color posible y que no hay la posibilidad que caiga otro color. Es decir, la posibilidad es 0 de 1 (suceso imposible). Se asume que el único evento en el disco corresponde al evento seguro y se apoya con la representación en la tabla de razón, numero decimal y porcentaje.		

7.2.5 Análisis de la sesión N° 2

Tabla 30. Análisis sesión de clase N°2

Recurso 2. Análisis de la sesión de clase implementada.	
Descripción de las variaciones en la implementación de la actividad.	Inicialmente se programó desarrollar la sesión en dos bloques de clase de dos horas efectivas pero fue necesario tomar una hora más de clase de la siguiente sesión para agotar el momento de institucionalización del saber. Los momentos denominados de *acción, de formulación y de validación* fue posible evidenciarlos en el trabajo que se desarrolló en el aula. Es decir, se logró propiciar un acercamiento para la elaboración del conocimiento desde la estrategia de situaciones didácticas de Brousseau.
Resultados de aprendizajes esperados y no esperados. (descripción, documentación y codificación)	La propuesta de clase pretende que los estudiantes con base en sus experiencias y nociones acerca de la incertidumbre puedan presentar estrategias de solución a la situación de aprendizaje. Igualmente, se busca que los estudiantes consoliden su intuición primaria relativa a la diferenciación entre situaciones deterministas y aleatorias para luego enfocar su trabajo en la identificación del evento seguro e imposible. Al cierre se espera que los estudiantes aborden determinadas tareas para validar la posible estrategia que entrega una solución al problema planteado. **Situación acción.**

	A continuación se presentan las posibles estrategias y argumentos que dan estudiantes a la hora de interactuar con la situación de aprendizaje. - Aplicar tantos colores al disco como tipo de mazorcas seleccionadas. - Elegir tantos discos como tipos de mazorca para aplicar los colores respectivos sin que las superficies coloreadas sean equivalentes. - Elegir tantos discos como tipos de mazorca para aplicar los colores respectivos intentando que las superficies coloreadas sean equivalentes. - Aplicar dos de los tres colores al disco descartando el color del tipo de mazorca que no ha de seleccionarse. - Aplicar un solo color al disco cuidando de no elegir el que cumple con el criterio que pide la situación. La situación de aprendizaje plantea la necesidad de construir una ruleta (disco) donde sea posible que al hacer un giro de la aguja, ésta señale el color rojo o amarillo y que sea imposible que caiga el color verde. Ante la tarea los estudiantes expresan los siguientes argumentos: El estudiante EH8, afirma: “*se debe colorear la ruleta y luego al girarla me ayude a elegir mazorcas que sirvan para hacer el semillero de cacao”.*

	La participante EM3, dice: "*se debe colorear un disco por los colores del cacao",* luego decide usar el clip para verificar cual ruleta es la indicada. El estudiante EH1, expresa: "*si la ruleta no tiene el color verde, pues nunca va a caer verde".* **Situación formulación.** Este momento contempla que los estudiantes socialicen a sus pares las ruletas construidas y argumenten la estrategia adoptada. EH3 informa, *"me cayó verde al hacer girar el clip".* Ante éste resultado los compañeros no verifican si se cumple la condición o si al girar una o muchas veces el resultado es el mismo. EH1 afirma, "*encontré la ruleta que sirve para escoger todas las mazorcas menos las verdes".* Sin embargo, los compañeros de grupo no advierten su propuesta ya que muestran estar desinteresados en la tarea y por ello no se percatan sobre la manera de distribuir los colores para presentar esa estrategia como válida. **Situación validación.** El momento que implica socializar a la plenaria el acuerdo grupal para dar a conocer una solución al problema permitió conocer las siguientes estrategias:

	Los estudiantes EH1, EH4, EM4 y EH10 en su exposición presentan dos modelos de ruleta una en la cual es imposible que caiga el color verde y otra donde al girar el clip, es más probable que salga el color amarillo. El equipo de los participantes EH11, EH8 y EH9 presentan una ruleta donde es igualmente probable que salga el color rojo o amarillo, y concluyen que ese disco cumple con la condición del problema. Al cierre otro equipo de participantes presentó una ruleta coloreada solamente de verde y otro disco con los colores amarillo y rojo pero los distribuyeron en varias regiones y con diferente cantidad de superficie. En cuanto a cuantificar o comparar la región coloreada en el disco para llegar a asignar un valor numérico al evento seguro o al evento imposible se evidencia que no hay respuestas cercanas a los valores cero o uno. En el caso de la ruleta que está divida en dos regiones iguales fácilmente asociaron los valores 50 y 50 para cada color.

7.2.6 Planeación de la sesión N° 3.

Tabla 31. *Planeación sesión de clase N°3*

Recurso 1. Planeación de la sesión de clase.		
● Sesión de clase:	● Fecha de implementación:	● Nombre de la actividad:
Tercera	18 – 20 de julio de 2017	**Cuantificando la incerteza. Un primer paso: los grados de posibilidad**
● Listado y descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos/formativos)	La finalidad de esta sesión es continuar consolidando en el estudiante los aprendizajes asociados al uso del lenguaje propio de las probabilidades. Al respecto, el docente aporta situaciones de aprendizaje que en un primer momento emplea la escala de probabilidad para trabajar eventos como son: Imposible, poco posible, medianamente posible, muy posible y seguro; mientras que en una segunda instancia, el ejercicio exige la representación de la probabilidad a través del lenguaje verbal, en forma de razón, en forma de decimal y en porcentaje. Cabe resaltar que mientras se abordan las situaciones de aprendizaje, tanto estudiantes como docente formulan preguntas y realizan ejemplificaciones que permiten aclarar las dudas o que ayudan a verificar si los razonamientos que surgen de las estrategias propuestas tiene un sustento en los argumentos que expresan los estudiantes. La sesión de clase está pensada para que los estudiantes discurran por las siguientes tareas:	

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">
- Evocan mediante el ejercicio de repaso las nociones de evento seguro, probable e imposible abordados en la sesión anterior.
- Prueban mediante simulaciones con dispositivos aleatorios que la estrategia se ajusta a las condiciones del problema.
- Intercambian mensajes para validar las estrategias planteadas como solución.
- Completan cuadros y tablas como producto de aprendizajes.
- Exponen a sus compañeros de clase la estrategia adoptada como solución al problema.

El objetivo de aprendizaje de esta sesión busca que los estudiantes realiza conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de un evento para decidir si es más, menos o igualmente posible que otro. Lo previsto es que los estudiantes interioricen términos propios del lenguaje probabilístico para que la hora de hacer pronósticos, acudan a estos y alcance una pertenencia en su uso.
</td>
</tr>
<tr>
<td>● Descripción de la actividad, según la propuesta de enseñanza. Tareas abordadas por los estudiantes y gestión del docente.</td>
<td>● Lo que se espera de los estudiantes</td>
<td>● Consignas del docente y posibles intervenciones</td>
</tr>
<tr>
<td>El docente presenta a los estudiantes una situación de aprendizaje que tiene conexión con el problema planteado al inicio, en el cual se</td>
<td>Los estudiantes suman a su vocabulario términos y expresiones de uso frecuente a la hora de resolver situaciones en contexto</td>
<td>El docente invita a oír y después a leer la situación</td>
</tr>
</table>

emplaza al alumno para que implemente acciones como es explorar, analizar y construir un significado sobre la misma. (*Anexo 1. Situación 4: El semillero de cacao)* **Situación acción.** Cada estudiante hace la lectura y el análisis de la situación de aprendizaje. Paso a seguir implementa una estrategia que permita resolver el desafío planteado. Es decir, cada alumno puede elegir algún tipo de material concreto para verificar su estrategia de solución. Por ejemplo, puede realizar un experimento con 10 balotas de cuatro colores para simular las 10 bolsas con los materiales mencionados en la situación. Es importante apoyarse en la ficha de trabajo para registrar las respuestas ya sea construyendo una tabla o dibujando el posible número de bolsas para cada condición.	aleatorio. La oportunidad para apropiar estos términos se da cuando el alumno propone estrategias de solución al problema, logrando así consolidar su competencia matemática. Posibles preguntas que emergen de la tarea: - ¿Qué cantidad de bolsas se llenaron en total? - ¿*Muy posible*, significa que la mayoría de las bolsas hacen parte de esa categoría? - ¿Cuántas bolsas debo retirar del montón y cuantas quedan? - ¿Es menor la cantidad de bolsas que se tienen cuando digo *igualmente posible* que *muy posible*? - ¿*Poco probable*, significa que nunca ocurre? - ¿*Poco probable*, es menos de una bolsa del paquete?	problema para luego interactuar con la ficha de trabajo de manera individual. Se desarrolla una lectura que permita al alumno tener una mejor comprensión de lo leído. Se invita a los estudiantes a comprobar con el uso del clip si la forma de colorea el disco es acertada para

		que se cumpla lo que demanda la situación.
Situación de formulación. Los estudiantes conforman grupos de cinco integrantes para luego interactuar y socializar las estrategias a sus pares. La actividad requiere que los estudiantes opten por seleccionar una estrategia que cumpla los criterios expuestos en el problema. Como evidencia de ello los aprendices deben preparar ya sea una experiencia aleatoria con material concreto o un esquema que permita explicar a los compañeros su posible solución. Es importante que se atienda a la exposición de cada idea y una vez se hayan intercambiado los mensajes entre los estudiantes, éstos establecen un debate para optar por la estrategia más económica a la solución del problema planteado.	En esta fase los estudiantes refinan sus ideas elaboradas en el trabajo individual. Por tanto se espera que éstos evidencien en su trabajo la construcción de esquemas, dibujos o representaciones como parte del proceso de seleccionar las diferentes clases de elementos (bolsas) contenidos en el conjunto inicial. Se espera que los estudiantes mediante ensayo error, un dibujo o una representación propongan una determinada cantidad de elementos (bolsas) en el conjunto universal. Es decir, especular con cierta cantidad de elementos de cada tipo de bolsa y a partir de allí evaluar si se cumplen las siguientes condiciones del problema:	El rol del docente para este momento es hacer rondas por las mesas de trabajo para orientar y despejar dudas formuladas por los estudiantes. Reforzar las ideas que presentan los estudiantes con ejemplos similares o complementar su propuesta de

El rol del docente en este punto es mediar y orientar los debates grupales a través de las siguientes preguntas: - ¿Cuál es la bolsa que tiene mayor posibilidad de salir? - ¿Cuál es el evento que tiene menos posibilidad de ocurrir? Es decir, el material contenido en la bolsa que tiene menos posibilidad de salir ¿Por qué? - ¿Es más o menos posible que salga una bolsa con arena? - ¿Qué relación hay entre el número de bolsas con material y el número de bolsas de cada uno de estos? Para cerrar este momento se requiere verificar si las soluciones aportadas cumplen con las condiciones del problema, luego de llegar al	- Al hacer una extracción del conjunto de bolsas debe cumplirse que sea **muy probable** que salga una que contenga tierra. - Al hacer una extracción del conjunto de bolsas debe cumplirse que sea **igualmente probable sacar** una bolsa con abono o una con arena. Al hacer una extracción del conjunto de bolsas debe cumplirse que sea **poco probable** que salga una bolsa que contenga cal. Se requiere que el docente regule el desarrollo de esta fase formulando preguntas para orientar la discusión y promoviendo los criterios propios del trabajo cooperativo. Es decir que los integrantes del equipo desarrollen la capacidad de escuchar, que se respeten los turnos de	solución a la tarea.

consenso se planea y organiza la exposición ante la plenaria.	intervención y que se sumen las ideas para alcanzar la meta en común.	
Situación de validación. Para esta etapa, el grupo de estudiantes someten a consideración de los demás las afirmaciones propuestas; es decir, explican a los compañeros su estrategia de solución y entregan evidencia de cómo ella es suficiente para dar respuesta al problema. Esta evidencia puede sustentarse modelando la experiencia aleatoria apoyados en ruletas, balotas o mediante un esquemas que ilustre la situación y su solución. Se espera que los estudiantes realicen intervenciones para "sancionar" la estrategia presentada. El ejercicio de validar consiste en aceptar, rechazar, pedir pruebas o hasta presentar contraejemplos en busca de su	En este momento se espera que los estudiantes vayan tomando confianza y desplegando capacidades para dar a conocer sus ideas, también se espera que los espectadores se animen a validar las estrategias que cada grupo expone y que se logre ejemplar y argumentar los razonamientos construidos a partir de la solución del problema. En este punto los estudiantes pueden hacer uso de la pizarra y representar las ideas construidas generadas en el trabajo de grupo. Puede ser que otros grupos hagan uso de material concreto o de dispositivos aleatorios que modelen la situación y desde	El rol del docente es de moderador de la exposición de cada grupo de estudiantes. También modera las intervenciones y apoya mediante ejemplos o simulaciones las explicaciones dadas por algún alumno.

<table>
<tr><td>validación. También se considera que los estudiantes estarán a la expectativa de poner a prueba los aportes o ajustar la estrategia de acuerdo a las sugerencias. O por el contrario de argumentar por qué no es válida para la solución de la situación los cambios o información nueva que proponen los compañeros.</td><td>allí den a conocer sus estrategias de solución.

En últimas algunos grupos pueden terminar elaborando su estrategia basados en las exposiciones iniciales y con ello lograr rediseñar su propuesta.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Institucionalización del saber.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acá, el maestro lidera un ejercicio de reflexión y de realimentación en cuanto a los momentos anteriores. Para ello, se parte de las inquietudes y dudas surgidas durante la actividad. El propósito es acercar a los estudiantes casa vez más al conocimiento formal de la probabilidad y desde luego, seguir consolidando la alfabetización en torno a este concepto.

En este sentido, el docente presenta a la clase el dispositivo aleatorio disco o ruleta y partir de éste se desarrollan las siguientes tareas:

a. Reconocer que la superficie del disco está dividida en dos regiones equivalentes.
b. Experimentar con la ruleta.
c. Plantear las siguientes cuestiones:</td></tr>
</table>

¿Qué tan probable es que la flecha apunte al color rojo o a un color del arcoíris? Se esperan mensajes como *poco posible o muy posible.*

d. Continuar los lanzamientos con la ruleta y hacer notar la equivalencia entre las superficies coloreadas. Se espera que los estudiantes lleguen a emplear el término *igualmente posible.*

e. Presentar una tabla para completar en ella la equivalencia del evento igualmente posible. La idea es llegar a representaciones verbales y numéricas.

f. Presentar un nuevo disco o ruleta (esta vez la superficie coloreada no es equivalente para los dos colores)

Se busca diferenciar las características del nuevo disco y se formulan preguntas como:

- ¿Qué tan posible es que caiga el color rojo? Y ¿Qué tan posible es que caiga el color amarillo?

Se continúa con la tarea de completar la tabla. En este caso, se espera emerjan expresiones como *poco probable y muy probable.* También se espera que los estudiantes puedan cuantificar la superficie coloreada con valores como 25% y 75%.

Al cierre se hace un ejercicio de valoración que consiste en presentar tres discos que permiten asociar las nuevas expresiones del lenguaje probabilístico y también el ejercicio lleva a plantear la necesidad de expresar numéricamente las posibilidades en cada ruleta.

7.2.7 Análisis de la sesión N° 3

Tabla 32. *Análisis sesión de clase N°3*

Recurso 2. Análisis de la sesión de clase implementada.	
Descripción de las variaciones en la implementación de la actividad.	En esta sesión se genera en primer lugar un espacio para cerrar el momento de institucionalización pendiente por recrear de la clase anterior. Es decir, el primer bloque de clase solo cuanta con la mitad del tiempo propuesto. Hay que señalar que después de vivenciar algunas sesiones de trabajo con los estudiantes, éstos evidencian empezar a acoplarse positivamente a los momentos de *acción, de formulación y de validación.* En las anteriores fases, los estudiantes ponen en juego sus saberes previos, luego los confrontan con los de un grupo pequeño y finalmente los socializan y validan con el grupo grande. Es decir, lentamente los estudiantes se acoplan a la ruta metodológica, la cual permite ligar unos saberes o estrategias personales, luego establecer una discusión grupal donde se presentan las estrategias para reformularlas o afinarlas y una vez afinadas se hace la puesta en común a toda

	la plenaria para sustentar y argumentar que la estrategia asumida es una solución validad para la situación de aprendizaje.
Resultados de aprendizajes esperados y no esperados. (descripción, documentación y codificación)	Al comenzar, los estudiantes exploran la situación de aprendizajes, la releen hasta alcanzar un mejor comprensión del problema. El trabajo en esta fase de acción se sume individualmente. **Situación acción.** De la interacción entre estudiante y situación de aprendizaje es posible que emerjan las siguientes estrategias. - Estimar cantidades numéricas y mediante ensayo y error verificar si se ajustan a las demandas de la situación. - Hacer un esquema donde se representa cierta cantidad de elementos (bolsas) y a partir de allí verificar si es *muy posible* extraer uno (bolsa) que contenga tierra. - Dibujar símbolos como (rayitas, bolitas) para construir un conjunto universal que contenga cierta cantidad de elementos (bolsas) correspondientes al tipo de material contenido en éstos.

	- Hacer sumas con las cantidades de elementos (bolsas) que considera debe contener cada tipo material o el proceso inverso, hacer restas para descontar de una cantidad mayor de elementos aquellos que pertenecen al tipo de material respectivo. La situación de aprendizaje exige conformar un conjunto con cierta cantidad de elementos (bolsas) donde al extraer uno de ellos sea *muy posible* que salga uno con tierra. En este sentido, los estudiantes para concretar la tarea manifiestan algunas ideas que evidencian el progreso o no en relación a la construcción del concepto. Por ejemplo, El EH2 empieza, por hacer diferencia entre el número de objetos (bolsas) en cada agrupación y para ello asigna un rótulo que distingue el contenido de cada una. La anterior acción fue resaltada por el docente dado que se observaba que muchos estudiantes no comprendían o no se arriesgaban a proponer un camino para la solución del problema. Otro aporte en esa dirección se observa cuando EH1 dice: *profe a uno le coloco 8, a otro 6 y la otra 4 y la otra 5.* A la hora de explicar mejor al docente la idea, éste puntualiza su razonamiento expresando que de **arena 8, de humos de lombriz 4, de cal 6 y de tierra 14.** En seguida se oye del alumno EH8 lo siguiente: *pues ahí debe salir tierra porque hay más, y de cal debo colocar poquitas porque…*

	En consideración a lo propuesto por los estudiantes, puede pensarse que estos otorgan a las cantidades de elementos (bolsas) una diferenciación, donde se encuentra que si se amplía el valor numérico al elemento (bolsas con tierra), para que éste corresponda al criterio *muy* posible, entonces se carece del componente de comparación para valorar si la cantidad propuesta es suficientemente amplia de manera que pueda superar en cardinalidad a las otros componentes del conjunto universal. La EM3 presenta la siguiente configuración: **tierra 17, cal 4, arena 2 y humos de lombriz 6.** la alumna aduce que las bolsas con tierra deben representar una cantidad mayor que las demás agrupaciones. Estableciéndose una idea sobre cómo se puede configurar el arreglo dentro del conjunto para que se cumpla la condición de *muy probable*, ahora la tarea es proponer valores para verificar la condición *igualmente probable.* En este sentido, el EH3, dice que el número *debe ser 8 de humus y 8 de arena*. La anterior idea no sobrepasa la cantidad que se propone para bolsas con tierra, pero deja un margen muy reducido para la otra agrupación. Es decir, la cantidad de bolsas con cal sería una, así lo afirma el EH8. Al intentar guiar e ir consolidando las diferentes configuraciones de bolsas con los materiales, el docente pregunta a los estudiantes sobre **¿Cuántos elementos deben contener la agrupación grande de bolsas para que se muy posible extraer una con tierra?** el EH8 dice: *tiene que*

	haber (bolsas) más que las otras para que sea muy posible. Aunque algunos estudiantes dicen expresiones que representan cantidades grandes. Por ejemplo, millones. **¿Cuántas bolsas deben empacarse con humos de lombriz o con arena para que sea igualmente posible extraer una de ellas?** El EH1 dice: *pues dos números iguales*. Por ejemplo (3 y 3), Luego el EH2 dice: (6 y 3) y el docente les pregunta a todos que si están de acuerdo con lo que propone EH2. Aseguran que NO, y EH4 dice: que no porque *la una tiene más y la otra menos*. Al preguntar a las alumnas por una posible cantidad la EM2 dice: 10 y 10. Otras alumnas dicen 20 y 20. En las anteriores intervenciones es notorio que algunos estudiantes han movilizado sus conocimientos y en consecuencia pueden diferenciar entre los términos muy probable e igualmente probable. Es decir, estos eventos los pueden ejemplificar al proponer configuraciones para dar solución a la tarea. Al cierre de este momento de acción, los estudiantes asumen que el evento *poco posible* en una colección finita de elementos va a estar muy cerca de la cantidad uno o dos. Aunque se encuentra que hay estudiantes que proponen que sea cero elementos. Sin embargo, los compañeros al oír esta apreciación intervienen y afirman que en el caso de ser *cero,* se cumple es el evento *imposible.*

	Al final se encuentra que la EM3 propone que el número total de elementos deben ser 52 bolsas. Empero otros estudiantes no presentan una cantidad que permita verificar cada condición. **Situación formulación.** Este momento contempla que los estudiantes socialicen a sus pares la configuración que proponen y discriminen cómo ese arreglo cumple con los criterios que exige la tarea. En un primer grupo se presenta la cantidad 31 elementos como valor total de ese conjunto y con base en ellos desarrollar la tarea, pero al indagarse por la cantidad de bolsas con tierra informan que son 52. Lo cual hace que se evalúe la coherencia de esa propuesta. El desempeño de los estudiantes estuvo orientado por la constante validación del docente y las propuestas presentadas siempre se pedían que las explicaran con el material concreto o con algún esquema, dibujo, entre otros. **Situación validación.** Los estudiantes inician su exposición presentando al grupo de compañeros su estrategia (arreglo). Una experiencia propuso 41 elementos para la agrupación de bolsas de las cuales informan que

	24 contienen tierra para que cumpla la condición de *muy probable*. El EH1 dice que si *porque es más grande*. Refiriéndose a que 24 es mayor a la mitad de 41. En cuanto a la verificación de las cantidades para los eventos *igualmente probable* el grupo expositor propone que sea 8 y 13 elementos respectivamente. El alumno EH1 asegura que NO están las cantidades correctas porque una es mayor que otra. En cuanto al número de elementos para las bolsas con cal, hay confusión y lo presentado como estrategia de solución no encuadra dentro de los criterios de la tarea. De acuerdo a las propuestas de los estudiantes en esta fase se evidencia que al trabajarse con agrupación de elementos, estos hacen corresponder la cantidad correcta para el evento *igualmente posible.* Se encuentran casos donde se asocia con facilidad los elementos para el evento *muy posible* y donde hay mayor dificultad es para el evento *poco posible.* En general, los estudiantes asumen los eventos en la escala de probabilidades como una manera de graduar la posibilidad para situaciones inciertas o aleatorias. Lo anterior, puede valorarse como el avance hacia la asimilación de expresiones que permiten cuantificar la probabilidad y en este contexto tomar una decisión frente a una situaciones que demande tal conocimiento.

7.2.8 Planeación de la sesión número 4.

Tabla 33. *Planeación sesión de clase N°4*

<table>
<tr><th colspan="3">Recurso 1. Planeación de la sesión de clase.</th></tr>
<tr><td>● Sesión de clase:</td><td>● Fecha de implementación:</td><td>● Nombre de la actividad:</td></tr>
<tr><td>Cuarta</td><td>25 – 27 de julio de 2017</td><td>Experimentación y probabilidad de ocurrencia.</td></tr>
<tr><td>● Listado y descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos/formativos)</td><td colspan="2">La sesión de clase plantea hacer uso de dispositivos aleatorios para que mediante la experimentación se generen algunas secuencias aleatorias las cuales permitan a los estudiantes construir una idea sobre el comportamiento del fenómeno estudiado y en este sentido puedan verificar sus predicciones para lograr asignar una cierta probabilidad de ocurrencia de un determinado evento.

Desde esta lógica, el enfoque de la clase busca que el significado frecuencial y clásico de la probabilidad se reconozcan como otras formas, a parte del intuitivo para cuantificar la incerteza. Además, se espera que mientras se abordan las situaciones de aprendizaje, tanto estudiantes como docente formulan preguntas y realizan ejemplificaciones que permiten aclarar las dudas y ayudan a verificar si los razonamientos que surgen de las estrategias propuestas tiene un sustento en los argumentos que expresan los estudiantes.</td></tr>
</table>

	La sesión de clase está pensada para que los estudiantes discurran por las siguientes tareas: - Colocar en conocimiento del compañero lo que se consultó sobre las posibles enfermedades que afectan el cultivo de cacao y el nombre de los tipos de cacao que se cultivan en el país. - Simulación y registro de información que se genera a partir de la experimentación con dispositivos aleatorios. - Hacer predicciones y/o establecer conjeturas a partir de la información obtenida en las secuencias aleatorias. - Sacar conclusiones sobre la posibilidad que se dan en cada dispositivo aleatorio para escoger una variedad de cacao. Las tareas planteadas en la sesión se enfocan en la predicción sobre la ocurrencia de un evento a partir de la información con la que se cuenta. Es decir, el alumno verifica la certeza de su pronóstico basado en la información que entrega el ejercicio de experimentación. A su vez, su análisis parte de las secuencias aleatorias generadas en la experiencia y en particular de la observación que implica comprender las regularidades presentes en los eventos del fenómeno estudiado. Por consiguiente, se espera que el alumno en su desempeño construya

	la noción de probabilidad por medio de experiencias de tipo experimental y logre identificar la probabilidad como una relación entre dos números.	
● Descripción de la actividad, según la propuesta de enseñanza. Tareas abordadas por los estudiantes y gestión del docente.	● Lo que se espera de los estudiantes	● Consignas del docente y posibles intervenciones
Se invita en primer lugar a conocer lo que plantea la situación de aprendizaje, para ello se un espacio donde se pueda leer y destacar algunas variantes que se presentan en esta oportunidad. En este primer momento los estudiantes van a estar agrupados por parejas, los cuales harán un reconocimiento del problema para después entrar a describir el material concreto que se usara para modelar y hacer extracciones que les permita concluir la proporcionalidad de elementos correspondiente a un tipo de cacao o aun tipo de enfermedad que aqueja ese cultivo (*Anexo 1. Situación 5: La selección de semillas de cacao)*	El trabajo en parejas permite que los estudiantes se dispongan a recrear las tareas que propone la situación de aprendizaje. Por ejemplo, inician con las extracciones de la primera bolsa donde se debe concluir después de varios ensayos la forma en que se configura la cantidad de balotas que representan las enfermedades del cacao y la cantidad para simbolizar los tipos de cacao. Esta tarea se replica igualmente con los demás dispositivos aleatorios (bolsas) hasta reconocer su conformación.	El docente invita a oír y después a leer la situación problema para luego interactuar con la ficha de trabajo de manera individual. Se desarrolla una lectura que permita al alumno tener una mejor

Situación acción. En esta oportunidad las agrupaciones corresponden a parejas de estudiantes para que juntos exploren y comprendan la situación de aprendizaje, así como para que realicen la tarea de experimentación con dispositivos aleatorios. A la hora de experimentar, los estudiantes cuentan con dispositivos aleatorios (bolsas) que contienen los elementos que representan los tipos de semilla de cacao y los nombres de enfermedades de este cultivo. En el momento de hacer extracciones de las bolsas es necesario hacer los registros respectivos en la ficha de trabajo. En este sentido, se requiere completar una tabla que ayuda al estudiante a realizar comparaciones para concluir la forma en que está configurado	Posibles preguntas que emergen de la actividad de experimentación: - ¿Cuál es la composición (cantidad de balotas de cada tipo) presente en cada dispositivo aleatorio? - ¿Cuál es el dispositivo que da más posibilidades para extraer una balota que representa las enfermedades del cacao? - ¿A partir de cuántas extracciones se puede identificar la bolsa que tiene mayor probabilidad de obtener una balota que representa una enfermedad del cacao? - ¿Es la misma configuración (número de balotas y de colores) para los dos dispositivos aleatorios? - ¿Qué tipo de representación me sirve para expresar las posibilidades que hay en cada dispositivo aleatorio?	comprensión de lo leído. Se invita a los estudiantes a comprobar con el uso del clip si la forma de colorea el disco es acertada para que se cumpla lo que demanda la situación.

cada dispositivo y en cuál de estos hay posibilidad de extraer una enfermedad que afecta al cultivo de cacao.	A partir de los registros la pareja de estudiantes concluyen la posibilidad que hay en cada bolsa ya sea del tipo de cacao o del tipo de enfermedad y determina aquella que favorece o que otorga mayor probabilidad.	
Situación de formulación. Cada pareja de estudiantes se reúne con otra y hacen las respectiva socialización de sus hallazgos en la tarea. Por ejemplo, explican la configuración de cada bolsa y de paso presentan la que entrega más posibilidades a la hora de elegir el evento focalizado. La tarea se complementa cuando cada pareja socializa y expone las formas de representar la posibilidad de un evento frente al espacio muestral. En este punto, el docente presenta a los diferentes grupos de estudiantes una variación de la situación y los invita a tener en cuenta el	La socialización que ocurre entre los compañeros del grupo de trabajo sobre las diferentes maneras de llegar a la solución del problema constituye la oportunidad para reflexionar y validar las diferentes posturas y formas de asumir una tarea. Ello se considera una experiencia de enorme valor a la hora de consolidar un aprendizaje. Es decir, los diferentes puntos de vista y la realimentación que ocurre al interior del grupo, hace que los estudiantes redefinan sus propuestas de solución o ratifiquen las ideas antes expuestas. Lo cual se considera pertinente para alcanzar una mayor comprensión del concepto estudiado.	El rol del docente para este momento es hacer rondas por las mesas de trabajo para orientar y despejar dudas formuladas por los estudiantes. Reforzar las ideas que presentan los estudiantes con ejemplos

ejercicio y las conclusiones de la experiencia anterior para proponer estrategias de solución. En este sentido, se lanza las siguientes preguntas: - Si se requiere extraer una balota que represente una enfermedad asociada al cultivo de cacao, ¿cuál dispositivo aleatorio me otorga la posibilidad más alta de obtener tal evento? - ¿Cómo se interpreta que los dos dispositivos tienen igual cantidad de balotas para representar las enfermedades que afectan al cacao? - ¿Cuántas balotas hay que agregar o quitar a cada bolsa y de qué tipo (nombre de enfermedad o variedad de cacao) para que en las dos bolsas exista la misma posibilidad de sacar una balota con el nombre de una variedad de cacao?	Es importante que los estudiantes consideren la discusión y el debate de las ideas expuestas como el espacio donde se reafirman o se rediseñan las estrategias que satisfacen las demandas de la situación. Entre las consignas a desarrollar está la de conocer la forma de representar las posibilidades que aparecen en cada dispositivo y una vez se conozcan, es decir una vez se pueda cuantificar la probabilidad se exige llegar a la comparación para entregar la solución esperada. De acuerdo a las demandas de la tarea anterior el docente presenta ejemplos o hace preguntas que aporten a la discusión y al ejercicio de reflexión sobre la actividad de experimentación. Las cuestiones a presentar por el docente son las siguientes:	similares o complementar su propuesta de solución a la tarea.

Para cerrar este momento de aprendizaje se invita a los estudiantes a verificar si las estrategias aportadas como solución al problema cumplen con las condiciones y demandas del mismo. Después de esa evaluación se pide que se establezca un consenso para organizar la forma de exponer y de socializar el producto del trabajo desarrollado.	- ¿Cómo llegar a la composición de la bolsa mediante los resultados obtenidos en las extracciones? - ¿Cuáles son las evidencias que permiten sugerir que un dispositivo aleatorio entrega mayor posibilidad que el otro a la hora de hacer una extracción? - ¿Qué indica la totalidad de balotas en la bolsa, y que indica el número de balotas de un solo color? ¿Cómo esos dos valores se configuran para que equivalgan a la posibilidad esperada de un evento en la experiencia?	
Situación de validación. En esta etapa de la situación didáctica se propone que los estudiantes socialicen a la plenaria el progreso y las ideas que emergen del	A la hora de exponer sus trabajos, los estudiantes pueden ejemplificar la situación y pueden presentar otras perspectivas del problema. También pueden acudir al uso de	El rol del docente es de moderador de la exposición de cada grupo de estudiantes.

abordaje de la situación. Es decir, la exposición debe orientarse a explicar los hallazgos a medida que experimentaban y para cerrar los estudiantes presentan las conclusiones a las que llegaron. Cada exposición se convierte en una oportunidad para que los estudiantes validen sus ideas o reformulen sus conclusiones. Al respecto los estudiantes a través de sus intervenciones "sancionan" la estrategia presentada por el grupo, lo cual permite llegar a consensos y construir una estrategia con mayor significado para dar solución al problema de estudio.	otro tipo de material que mediante simulación posibilite llegar a la estrategia de solución. Se espera que emerjan formas de cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un evento y por ende que se propongan varias formas de representación de tal incertidumbre. Por ejemplo, pueden ofrecer una solución muy descriptiva o algunos pueden acudir a las expresiones matemáticas y a conceptos como las fracciones para presentar su estrategia de solución.	También modera las intervenciones y apoya mediante ejemplos o simulaciones las explicaciones dadas por algún alumno.
Institucionalización del saber.		
Al cierre de la sesión, el docente busca acercar al estudiante a la noción del significado frecuencial y del significado clásico de la probabilidad. Es decir, mediante el ejercicio de simulación con dispositivos aleatorios se espera obtener muestras pequeñas de secuencias aleatorias y con ello promover en los estudiantes el contraste entre los pronósticos respecto al evento que consideran más probable que ocurra, con la tabulación y el análisis frecuencial que emerge de la experimentación. En esta experiencia aleatoria los estudiantes podrán conectar nociones y		

conocimientos previos relacionados con la estadística en particular con las tablas de frecuencia y con el conteo de datos para elaborar conclusiones frente al comportamiento de una situación de incertidumbre una vez esta se somete a una serie de repeticiones que muestran la aparición mas o menos frecuente de un evento.

El docente a partir de las ideas y estrategias que los estudiantes vivenciaron en el desarrollo de la tarea presenta un dispositivo aleatorio (urna) y las respectivas balotas para que estos pronostiquen sobre qué posibilidad hay de obtener algunos de los eventos del espacio muestral del experimento. La predicción que hagan los estudiantes se pide la expliquen o argumenten su respuesta.

Ahora se hace una variación en la configuración de los colores de balotas (2 rojas, una verde y una amarilla) y se hacen las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasará ahora al sacar una mazorca de la caja sin ver?
- ¿Será más probable sacar una mazorca roja que una de las otras? ¿Por qué?
- Si repetimos el experimento 20 veces devolviendo cada vez la mazorca extraída a la caja, ¿Qué mazorca (balota) tendrá más posibilidades de aparición?

La actividad a seguir implica que los estudiantes verifiquen sus respuestas (predicciones) mediante la construcción de una tabla donde se registran los resultados obtenidos de extraer (con reemplazamiento) veinte veces las balotas que representa en esta ocasión las mazorcas de cacao. Luego, se elabora una representación gráfica (barras) de la

información y se pide hacer una interpretación de ésta. El propósito es que los estudiantes contrasten sus predicciones y establezcan un analices que les conduzca a concluir lo que ocurre con las muestras aleatorias y su comportamiento en la experimentación y de paso asocien tal probabilidad con una expresión matemática, ya sea fracción, decimal o porcentaje.

7.2.9 Análisis de la sesión N° 4.

Tabla 34. *Análisis sesión de clase N°4*

Recurso 2. Análisis de la sesión de clase implementada.	
Descripción de las variaciones en la implementación de la actividad.	Al iniciar la sesión se generó un espacio en el cual los estudiantes socializan lo que conocen de las enfermedades que afectan al cacao y también lo que consultaron sobre los tipos o variedades de cacao existentes en la región. Las tareas propuestas en esta sesión implican que los estudiantes hagan uso de su conocimiento (expresiones propias del lenguaje probabilísticos – expresiones numéricas para cuantificar la incertidumbre) para establecer conexiones con el significado frecuencial y clásico presente en la situación de aprendizaje.
Resultados de aprendizajes esperados y no esperados. (descripción,	Los estudiantes asumen la rutina establecida (leer y preguntar) al momento de presentar la situación de aprendizaje. Una vez se agota la fase de exploración y comprensión del problema, el docente presenta un dispositivo aleatorio (urnas) y con base en su composición se formulan algunas preguntas que exigen del alumno hacer sus respectivas predicciones.

documentación y codificación)	**Situación acción.** De la interacción entre estudiante y situación de aprendizaje se recogen las siguientes ideas o razonamientos. Según la composición de las urnas, ¿En cuál de ellas hay mayor posibilidad de extraer una balota que representa una enfermedad de cacao? El estudiante, EH7 dice que es igual la posibilidad en ambas bolsas, pero luego algunos estudiantes como EH4 y EH8 dicen que es la bolsa uno. Y otros que en la dos. En este último caso, la decisión posiblemente está motivada porque los estudiantes hacen el conteo de las balotes de color negro y dado que es igual en ambos dispositivos entonces aducen tal respuesta como la predicción que responde a las demandas de la tarea. Ante la diversidad de respuestas en esta tarea algunos estudiantes expresan otros argumentos. Por ejemplo, se encuentra que el estudiante EH8 dice, *profe pero en la bolsa$_1$ hay dos balotas y en la bolsa$_2$ hay tres balotas.* Luego EM9 dice: *yo creo que es en la uno porque en ella hay menos variedad de cacao y en la bolsa$_2$ hay más variedades.* Lo anterior lo reafirma el EH4 cuando expresa… *en la caja uno porque en ella hay más poquita de variedad…* En este debate se observa que los estudiantes EH7 y EM7 se sostienen con la idea que son las dos cajas y esto les hace sentir incomodos pero el docente les refuerza la idea que ellos pueden estar haciendo un mejor razonamiento que los demás.

	Lo anterior permite también resaltar lo que algunos estudiantes han notado frente a que la composición de los dispositivos no es la misma. Por lo que seguramente en una de ellas exista mayor posibilidad que en la otra. **Situación formulación.** La siguiente actividad implicó generar una serie de resultados, ocho en particular de cada dispositivo y a partir de tales secuencias aleatorias verificar si la predicción inicialmente propuesta sigue siendo válida o por el contrario no se cumple. Del anterior ejercicio es importante notar que los estudiantes se sorprenden por los resultados que se obtienen a partir de la experimentación. Esto pasa porque puede ocurrir que en las ocho extracciones sale solo un color de balota, ya sea la que corresponde al tipo de cacao o al tipo de enfermedad. Ante esta circunstancia, los estudiantes no encuentran una correspondencia entre la composición de la bolsa y los resultados obtenidos y por tanto esta situación difiere de la predicción formulada de manera empírica. Cabe señalar que en el terreno frecuencial de la probabilidad esa situación se contempla dentro de las posibilidades y es a partir de la cantidad de extracciones que la secuencia aleatoria empieza a tomar características de la probabilidad esperada empíricamente. Es decir, la probabilidad con enfoque clásico se acerca a la del enfoque frecuencial solo cuando ésta toma la ley de los grandes números para encontrar esa medida. Por

	ende, cuando los estudiantes reflexionan a partir de un pequeño número de extracciones y advierten que no concuerda con su pronóstico inicial entonces en importante que los aprendizajes se movilicen para reconocer las características y diferencias entre muestra pequeñas y grandes. En cuanto al ejercicio de exponer a los estudiantes a otra método de cuantificar la incertidumbre y pedir que reflexionen sobre el papel de la experimentación en la generación de secuencias aleatorias puede que sea una experiencia en la cual para este nivel de escolaridad se tenga presente que hay mucho terreno por recorrer. Es decir, ese primer acercamiento lo que busca es activar y consolidar las nociones primarias de los aprendices para que mediante la enseñanza se gestione efectivamente y se llegue a un mejor desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes, lo cual se traduce en avances importantes a la hora de alfabetizar en el leguaje de la incerteza.. **Situación validación.** La progresión en la construcción de una estrategia para socializar al grupo grande de compañeros permite ver que los estudiantes EH7, EM7 y EM12 aducen que en las dos cajas hay igual probabilidad de sacar una balota que representa la enfermedad del cacao. Pero al revisar los resultados los estudiantes se dan por entendidos que en la bolsa uno (5 negras – 3 blancas) se ve que hay mayor posibilidad de extraer una balota negra, lo cual, les lleva a concluir que en muchos casos las predicciones que el sujeto hace de un evento no siempre son acertadas dado

	que hay unas circunstancias en el conocimiento del alumno que hace que al evaluar un evento se sesgue y determine una estrategia de solución menos económica para el problema. Ahora bien, estudiantes EH6, EH3, EM11, EM9 explican que después de conocer la composición de la secuencia aleatoria, entonces se puede identificar la cantidad de eventos correspondientes a balotas negras y blancas y ello les lleva a pensar que en la bolsa uno es donde hay más posibilidades de extraer una balota negra. Finalmente, se encuentra que la alumna EM5 concluye que en la bolsa uno hay más posibilidad porque hay *más enfermedad que variedad. Entonces nosotros decimos que es la bolsa uno.* La estudiante enfoca su estrategia al conteo de elementos en dispositivo aleatorio y partir de allí establece comparaciones con base en la cardinalidad de cada evento y de manera muy nocional hace uso del significado clásico para concluir que la razón entre los casos favorables y los posibles es mayor en el dispositivo uno. *Hallazgos: muchos de los obstáculos que los estudiantes presentan en la resolución de problemas aritméticos tienen efectos en la construcción del concepto de probabilidad. Es decir si en un problema aritmético los* estudiantes *aducen que de la parte todo se quita una parte, esto mismo lo aplican a la hora de cuantificar el azar pues del espacio muestral se refiere a sacar un elemento del dispositivo y restar ese elemento de los que quedan en la caja.*

7.2.10 Planeación de la sesión N° 5

Tabla 35. Planeación sesión de clase N°5

Recurso 1. Planeación de la sesión de clase.		
● Sesión de clase:	● Fecha de implementación:	● Nombre de la actividad:
Quinta	01 – 03 de agosto de 2017	**Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo**.
● Listado y descripción de los resultados de aprendizaje esperados de los estudiantes (didácticos/formativos)	Las tareas y acciones a implementar en la penúltima sesión de intervención están pensadas para que los estudiantes a partir de la simulación con experimentos aleatorios compuestos hagan uso de posibles estrategias para llegar a su solución. Por ejemplo, se espera que acudan al uso de los diagramas de árbol y de las tablas de contingencia para poder contrastar sus predicciones de acuerdo a los procedimientos y a la forma de organizar los datos del problema que les permita cuantificar la probabilidad de un evento en particular. El anterior proceso implica que los estudiantes enumeren los resultados que componen el espacio muestral del experimento compuesto y a partir de esa información hagan uso de algoritmos como la regla de Laplace o el principio de la multiplicación para calcular probabilidades de un suceso asociado a una experiencia de incertidumbre. Los aprendizajes esperados conllevan a que los estudiantes identifiquen las posibles combinaciones que surgen a partir de agrupar y contar los elementos de un conjunto. También	

	se busca que asocien la multiplicación como operación inmersa en situaciones aleatorias de conteo. Además, se espera que mientras se abordan las situaciones de aprendizaje, tanto estudiantes como docente formulan preguntas y realizan ejemplificaciones que permiten aclarar las dudas y que ayudan a verificar si los razonamientos que surgen de las estrategias propuestas tiene un sustento en los argumentos que expresan los estudiantes. La sesión de clase propone a los estudiantes el desarrollo las siguientes tareas: - Lectura y ejercicio de comprensión de la situación de aprendizaje. - Interacción con el material concreto (fichas) para establecer los diferentes arreglos que se construyen a partir de los elementos que componen el conjunto de fichas. - Experimentar con los elementos del conjunto y aportar una solución al reto que presentan los personajes de la situación. - Presentar estrategias que permitan simplificar el conteo de los arreglos o que facilitan hallar el número total de parejas (fichas) - Identificar en algunos grupos de fichas los elementos repetidos para descartarlos a la hora de configurar los arreglos que hacen parte de la estrategia de solución. En relación al desempeño esperado, los estudiantes a partir del trabajo en equipo resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidades aplicando el principio de la multiplicación y la regla de Laplace.

● Descripción de la actividad, según la propuesta de enseñanza. Tareas abordadas por los estudiantes y gestión del docente.	● Lo que se espera de los estudiantes	● Consignas del docente y posibles intervenciones
La invitación inicial es para que el estudiante explore la situación de aprendizaje propuesta y realice preguntas sobre las dudas que emerjan. Una vez se vivencie lo referente a la comprensión de la situación los estudiantes se agrupan en parejas e inician la exploración del material concreto y presentan los posibles arreglos que se configuran a partir de la composición de las fichas. (*Anexo 1. Situación 6: La conferencia del técnico de cacao)* **Situación acción.** Los estudiantes reciben las fichas que están clasificadas según el tipo de enfermedades asociadas al cacao y las que simbolizan el tipo de sombra de este cultivo. Enseguida desarrollan con las fichas el conocido juego de memoria e inician a	El trabajo en parejas implica que los estudiantes recreen las tareas que propone la situación de aprendizaje. Por ejemplo, inician a conformar parejas de fichas que respondan al criterio (tipo de sombra y de enfermedad asociada al cacao) y una vez conozcan la diferentes formas de combinar la cantidad de fichas pasan a construir un arreglo en forma de diagrama de árbol o mediante una tabla de contingencia. Hay que especificar que la mitad de parejas en el aula cuentas con material concreto donde sus fichas elementos repetidos y la otra mitad de parejas han recibido el número completo de fichas. Lo anterior se considera como el uso de la variable aleatoria *cantidad de material* (fichas).	El docente invita a oír y después a leer la situación problema para luego interactuar con la ficha de trabajo de manera individual. Se desarrolla una lectura que permita al alumno tener una mejor comprensión de lo leído.

asociar pares de fichas que aludan a las dos categorías antes mencionadas. Luego de hacer varios ensayos los estudiantes debe configurar todas las posibles parejas que se conforman y de paso proponer una forma sencilla de enumerar los arreglos que se producen en el desarrollo del juego. Se pretende que los estudiantes se acerquen a conceptos como espacio muestral de un experimento compuesto, que comprendan el principio de la multiplicación y el de combinatoria mediante la técnica de diagrama de árbol y de tablas de contingencia. En este sentido, la situación de aprendizaje demanda que se den respuesta a las siguientes cuestiones: *¿Cuáles son las diferentes parejas de fichas (árbol de sombra - tipo de enfermedad) que puedo conformar a la hora de realizar el juego de memoria?*	Posibles preguntas que emergen de la actividad de experimentación: - ¿Es irrelevante que en los dos conjuntos de fichas exista diferente cantidad de las mismas? - ¿Puede asociarse de varias formas una ficha de una categoría con las demás fichas de la otra categoría? - ¿se deben sumar las cantidad de fichas de cada categoría para encontrar el número total de parejas a conformar? - ¿Cuántas veces se puede repetir una ficha de una categoría con una ficha de la otra clase? - ¿Son infinitas las parejas que se pueden conformar o existe un criterio para delimitar la conformación de las mismas?	Se invita a los estudiantes a comprobar con el uso del clip si la forma de colorea el disco es acertada para que se cumpla lo que demanda la situación.

¿Qué tipo de representación ayuda a organizar las diferentes parejas de fichas que se pueden conformar? *¿Habrá una forma más fácil de saber cuántas posibilidades hay de combinar los dos tipos de cartas?*	En colaboración con el docente los estudiantes aclaran las anteriores dudas y presentan una forma de enumerar las posibilidades en el experimento.	
Situación de formulación. En este punto de la clase, los estudiantes se agrupan cuidando que las parejas a las que les correspondió fichas repetidas de cada categoría se agrupen con otra pareja que tenga la misma variable didáctica. Las tareas que siguen en esta fase implican que los estudiantes socialicen a la otra parte las representaciones o las estrategias que les favorece para encontrar la solución al problema planteado. El propósito para este momento busca que exista consenso en la cantidad de arreglos o configuraciones que emergen de las combinaciones y que se	Si los estudiantes optan por aprender de los aportes del otro, entonces cuando se expresan las formas de interpretar la situación o cuando se reconoce la novedad en la estrategia de solución se crea un clima de intercambio de ideas y de razonamientos que implica validar y contrastar los puntos de vista de cada expositor. Es decir, los mensajes que acá se intercambien representan el vehículo que los lleva a consolidar mejores aprendizajes pues aquello en lo que estoy dudando o aun no comprendo fácilmente un compañero puede hacerlo entendible. También puede ocurrir que al sumar ideas, estas no representen un aporte en la dirección que demanda la situación y por tanto la estrategia	El rol del docente para este momento es hacer rondas por las mesas de trabajo para orientar y despejar dudas formuladas por los estudiantes. Reforzar las ideas que presentan los estudiantes con ejemplos

concluya cuál es la forma de representar la estrategia de solución a la situación. Una vez el docente observe que los estudiantes han consolidado una estrategia para llegar a la solución, entonces les plantea la siguiente variación en la variable *magnitud de los números presentes* para que estos propongan una solución al siguiente interrogante: ¿Cuántas fichas se requieren de cada categoría (árboles para sombra – enfermedades del cacao) para contar con un número suficiente de parejas de manare que se pueda entregar un par de cartas a cada estudiante del salón? De acuerdo al anterior cuestionamiento el docente plantea a los estudiantes tener en cuenta el número de integrantes del grupo grande, también que la cantidad de fichas en cada categoría no necesariamente debe	adoptada no se considere la más económica a la hora presentar la solución esperada. Entre las consignas esperadas por los estudiantes puede ocurrir que estos construyan listados de parejas de fichas o que sencillamente sumen la cantidad de elementos de cada categoría. También se puede presentar que la no equivalencia en la cantidad de fichas de cada clase se tome como una barrera para que el juego no finalice, o se crea que algo está mal comparándolo con el juego tradicional de memoria. Esto último los lleva a tener un conflicto en la construcción de su aprendizaje los cual se interpreta como la oportunidad para que el docente a través de ejemplos o de situaciones similares incentive a pensar nuevas aristas para interpretar el problema y en este sentido los estudiantes logren superar su dificultades a la hora de construir una estrategia eficiente para el problema.	similares o complementar su propuesta de solución a la tarea.

ser igual o que no es relevante si los arreglos propuestos sobrepasan un poco el número de estudiantes presentes en el aula. Es decir, lo importante es que comprendan que al variar la cantidad de fichas en cada categoría las parejas que se conforman aumentan o disminuyen. Para cerrar este momento de aprendizaje se invita a los estudiantes a verificar si las estrategias aportadas como solución al problema cumplen con las condiciones y demandas del mismo. Después de esa evaluación se pide que se establezca un consenso para organizar la forma de exponer y de socializar el producto de aprendizaje a la plenaria.	Algunas de las consignas que el docente ofrece para aportar al análisis son: - ¿Cuántas parejas de fichas resultan de agrupar cada tipo de categoría? - ¿existe sola una manera de configurar los arreglos en el problema? - ¿hay un método más sencillo para encontrar el total de arreglos que resultan de hacer corresponder las fichas de cada categoría?	
Situación de validación.	Cada grupo de estudiantes hace uso de recursos para socializar sus ideas. En esta ocasión se les ha pedido que hagan uso del tablero y sinteticen sus	El rol del docente es de moderador de la exposición

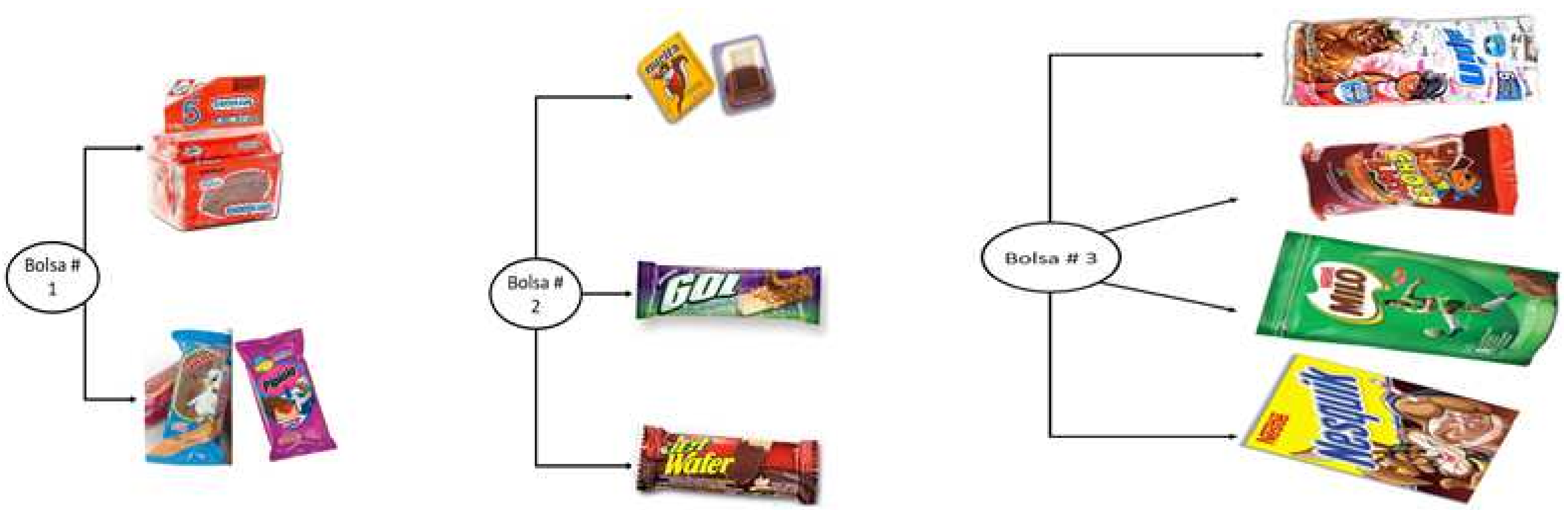
El desarrollo de la situación didáctica consiste en socializar rápidamente a los compañeros del grupo grande las posibles soluciones al problema. También se pide que argumenten sus conclusiones sobre la manera de implementar una estrategia que permita enumerar la cantidad de parejas resultantes. Un segundo momento en la fase de validación implica presentar a cada grupo de trabajo una variación del problema inicialmente planteado. Entre otras cosas se busca que los estudiantes implementen la estrategia de solución presentada en un problema nuevo. (*Anexo 1. Situación 6.1 La conferencia del técnico de cacao).*	esquemas de solución (diagrama de árbol – tablas – dibujos) para ofrecer una respuesta al problema. Como la situación demanda pronosticar la cantidad total de parejas que se forman entonces los estudiantes acuden a construir arreglos ya sea haciendo dibujos o símbolos de cada par de elementos o representando en forma de ramas de árbol sus ideas hasta concluir que se puede asociar a cada elemento de una categoría no solo un elemento de la otra categoría, sino que es posible hacer corresponder varios de estos. Se espera que al final de esta situación de validación se concluya que basta con multiplicar el cordial de cada categoría con el cardinal de las otras categorías de elementos y así llegar a cuantificar el total de arreglos posibles en el problema. En cuanto a la variación presentada para el problema inicial los estudiantes hacen uso de las estrategias ya	de cada grupo de estudiantes. También modera las intervenciones y apoya mediante ejemplos o simulaciones las explicaciones dadas por algún alumno.

La actividad conlleva a que los estudiantes transfieran al problema el nuevo conocimiento construido. Se espera que rápidamente se llegue a la solución dado que es posible hacer uso de técnicas como el principio de multiplicación o si desean ser más específicos a los diagramas de árbol.	validadas para ofrecer sin demora la respuesta a la cantidad de combinaciones posibles. Es decir, se establece un camino más corto el cual significa que se ha apropiado un nuevo conocimiento para solucionar este conjunto de situaciones didácticas.	
Institucionalización del saber.		
Se ha planeado para este punto presentar a los estudiantes una experiencia aleatoria para conectar un ejercicio cotidiano como es el consumo de productos a base de chocolate con el concepto de combinatoria mediante el uso de técnicas como el diagrama de árbol y principio de la multiplicación. La situación a desarrollar conlleva a buscar las combinaciones de tres tipos de alimentos a base de chocolate (bebidas, chocolates en barra y ponqué recubiertos) para que los estudiantes asocien sus nuevos aprendizajes y pronostiquen las posibles combinaciones presentes en la experiencia con relación a un tipo de alimento. Es decir que los estudiantes puedan predecir cuántas posibilidades se tiene a la hora de elegir un combo donde aparezcan los tres tipos de alimentos. Los estudiantes conocen que la cantidad de elementos en cada conjunto de alimentos no es la misma. Por ello deben recurrir a los arreglos para cuantificar el total de ternas resultantes y posterior a ello los estudiantes hacen el		

recuento de cuántas de esas ternas contiene uno de los alimentos a base de chocolate. Por ejemplo, si la preferencia para alguien es el producto *milo*, y cada conjunto está conformado respectivamente por 2, 3 y 4 elementos diferentes entonces, el estudiantes enumera todos las combinaciones posibles y luego identifica aquellas que contiene el producto elegido; para luego, hacer uso de la regla de Laplace y cuantificar la probabilidad que tiene de extraer al azar ese alimento a base de chocolate.

En relación a permitir que la actividad resulte significativa para los estudiantes se propuso contar con los empaques de los productos a base de chocolate. Esta actividad también se apoya en el uso de imágenes proyectadas donde se visualizan los siguientes arreglos en forma de diagrama de árbol.

Imagen 10. *Arreglos en diagramas de árbol.*



Partiendo de estos arreglos básicos los estudiantes visualizan una imagen que presenta las posibles configuraciones de los tres tipos de productos. A continuación se muestra los diagramas de árbol que hace corresponder cada elemento del primer conjunto con los que contienen las otras categorías.

Imagen 11. Diagrama de árbol combinaciones producto 1.

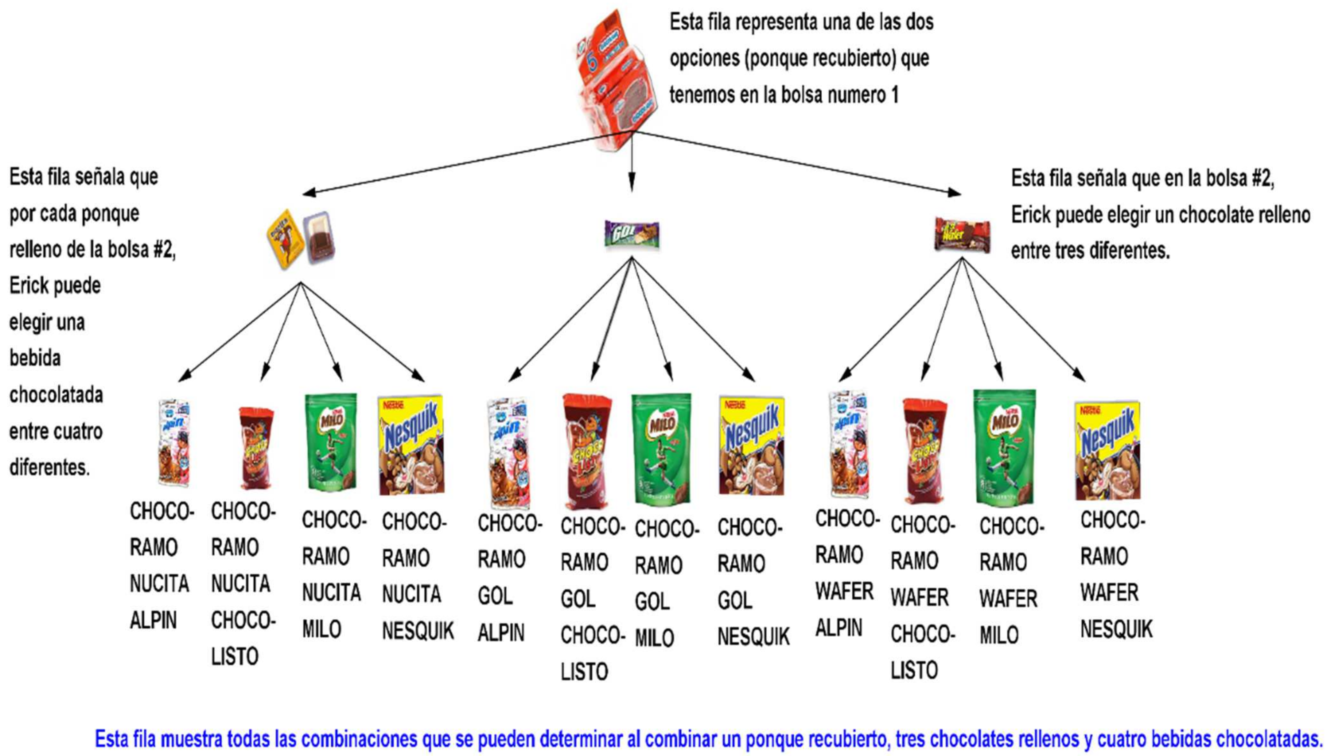
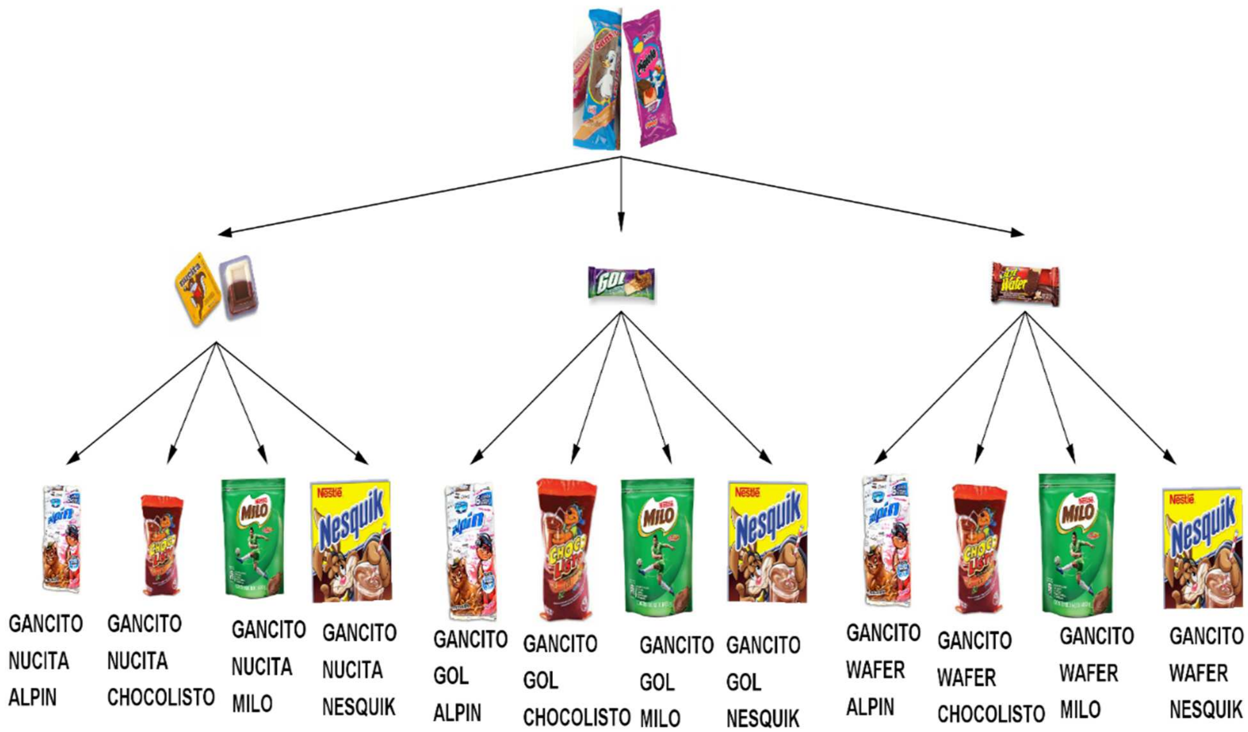


Imagen 12. Diagrama de árbol combinaciones producto 2.



Los anteriores esquemas se analizan con base a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuántas clases de chocolates recubiertos hay?
- ¿Cuántas clases de chocolates rellenos hay?

• ¿Cuántas bebidas chocolatadas diferentes hay? ¿Cuántas posibilidades se dan al combinar un tipo de ponqué recubierto de chocolate con un tipo de chocolate relleno? ¿En cuántos combos diferentes puede salir Gansito? ¿Cuántas opciones tienen Milo o Nesquik? Finamente se pide a los estudiantes que reflexionen sobre las siguientes tareas: Realiza una estimación de las posibilidades que tiene un sujeto a la hora de ofrecer un combo de tres productos para el detalle que quiere entregar a sus familiares. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular el número de posibilidades?

7.2.11 Análisis de la sesión N° 5

Tabla 36. *Análisis sesión de clase N°5*

Recurso 2. Análisis de la sesión de clase implementada.	
Descripción de las variaciones en la	Para el desarrollo de esta sesión se presentaron factores que afectaron lo que inicialmente se propuso. Por ejemplo, los estudiantes manifestaron no comprender las tareas presentadas ya sea por el escaso conocimiento sobre concepto de combinatoria o porque simplemente no se disponen

implementación de la actividad.	ni tienen el interés por aprender. Según lo anterior y dada la premura en el tiempo para cerrar el proceso de intervención en el aula se evidenció que los estudiantes querían rápidamente trascurrir por cada momento de la sesión pues piden que el docente explique y de las respuestas a la situación.
Resultados de aprendizajes esperados y no esperados. (descripción, documentación y codificación)	Al interior de cada pareja de trabajo se explora la situación de aprendizaje, se aclaran las dudas y se entrega el material (fichas) para simular con éste el juego de *memoria.* **Situación acción.** Una vez los estudiantes se familiarizan con el material concreto (fichas), es decir apenas ellos comprendan la mecánica del juego, entonces el docente les solicita enfocarse en presentar una estrategia donde se concreten los arreglos posibles de acuerdo a las posibles combinaciones que se pueden construir. Los estudiantes están tras la respuesta sobre la siguiente cuestión: *¿Cuáles son las diferentes parejas de fichas (árbol de sombra - tipo de enfermedad) que puedo conformar a la hora de realizar el juego de memoria?* Por ejemplo la pareja de estudiantes EM4 y EM9 expresan: *10 porque hay 4 de sombra y 6 de enfermedad,* las cuales se enumeran en la ficha de trabajo. En un principio se piensa que los estudiantes están sumando las fichas de cada agrupación pero al observar la enumeración y el

	registro hecho se encuentra que conformaron efectivamente diez parejas de fichas. De otro lado los estudiantes (EH2 - EH5) y (EM7 – EM1) afirman que *salen cuatro y que se forma una más* pero con ficha repetida (enfermedad del cacao) y concluyen que *unas salen repetidas y otras no*. También se encuentra que son varias las parejas de estudiantes que solo llegan a conformar tres tipos de arreglos con las fichas propuestas. Ante la tarea de sintetizar el anterior procedimiento las alumnas EM7 y EM1 afirman: *se puede echar en una bolsa y sacar las cartas*. De lo anterior, se observa que es una forma validad para hallar las posibles parejas pero no un proceso corto o diferente para llegar a la solución de la tarea. Hay que señalar que para desarrollar las tareas de este momento de la situación los estudiantes tienen dificultad a la hora de configurar las diferentes formas de organizar las parejas de fichas. Por tanto el juego de *memoria* se tomó lúdicamente y no como pretexto para conformar distintas parejas a las que se obtienen por simple observación o las que salen de la relación uno a uno, la cual establece buscar parejas entre las cuatro primeras fichas de ambas categorías y descartar las sobrantes. Puede verse así, que los estudiantes muestran una noción primaria sobre la idea de combinación, lo que impide llegar a generalizar el procedimiento con una estrategia de solución donde se evidencie que el proceso de pensamiento puesto en escena otorga la capacidad de conformar arreglos tipo diagrama de árbol o llegar a hacer uso del principio de multiplicación.

	Situación formulación. La situación formulación implica hacer un intercambio de mensajes que no es más que socializar a la otra pareja de compañeros las soluciones o arreglos producidos en el juego y desde luego también validar aquellos que presenta los pares. Aunque este ejercicio se agotó, se encuentra que solo se conformaron los arreglos más evidentes entonces el docente a través de ilustraciones similares generó en los estudiantes nuevas formas de asumir el problema lo cual invita a que estos obtengan nuevas parejas con las fichas. Según lo anterior, los estudiantes empiezan a plasmar en la ficha de trabajo arreglos en forma de diagrama de árbol o en tablas donde es evidente que aparecen más parejas de las que inicialmente se obtuvieron. Por ejemplo, las alumnas EM5 y EM2 presentan una tabla con catorce posibles combinaciones que se dan entre los tipos de fichas. En cambio los estudiantes EH4 y EH9 enlistan quince combinaciones en las que el primer elemento se repite cinco veces con los correspondientes elementos de la otra categoría. Las demás parejas logran plasmar en forma de ramificaciones de árbol los tres elementos de una categoría con cada uno de los cinco elementos correspondientes a la otra agrupación. Es de resaltar que para este punto de la clase los estudiantes han logrado movilizar los aprendizajes y ahora por medio del conteo de cada arreglo se aproxima a la solución de la situación.

	Situación validación. En cuanto a la tarea propuesta para este momento de la situación los estudiantes trabajan con una variación del problema. Es decir, el docente propone a los estudiantes hallar las posibles combinaciones que resultan de configurar ternas a partir de tres conjuntos conformados por 3, 5 y 2 elementos respectivamente. En consecuencia se presenta el siguiente cuestionamiento: ¿Cuáles son las posibilidades que resultan de relacionar los elementos de los tres conjuntos propuestos? El alumno EH4 expresa que 30. Acá se evidencia que el estudiante recurre al principio de multiplicación para dar esa respuesta. Aunque los demás compañeros no se inquietan por conocer el proceso aplicado si manifiestan cantidades como solución. Por ejemplo, EH7 afirma que son 34 posibilidades y algunos estudiantes al intentar multiplicar 3 X 5 X 2, afirman que el resultado es 24 pues sus procedimientos muestran que han operado así: (3X5) + (3X2). Lo anterior evidencia que los estudiantes no has comprendido el propósito del principio de multiplicación, que consiste en multiplicar la cantidad de elementos de cada conjunto, lo cual puede interpretarse como una muestra de que el esquema de pensamiento de los estudiantes se encuentra en la solución de situaciones con estructura aditiva, por lo tanto se requiere de consolidar los aprendizajes asociados a las situaciones de estructura multiplicativa.

	Una vez ocurre realimentación por los mismos compañeros ocurre que los éstos mejoran sus cálculos. En este sentido, el alumno EH4 dice que el resultado es 30 combinaciones. La estudiante EM9 se animó a desarrollar el algoritmo en la pizarra y obtiene que 3 X 5 X 2 = 30

7.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS: PRUEBA PEDAGÓGICA DE CIERRE.

La actividad de cierre o prueba pedagógica de contraste, presentó a los estudiantes un cuestionario con ocho situaciones aleatorias que debían ser abordadas en un periodo de tiempo de dos horas. El propósito planteado para esta prueba, es el de verificar el uso de expresiones cotidianas que los estudiantes conectan y apropian a la hora de hacer predicciones o de proponer estrategias de solución a la experiencia aleatoria. También, se pretende conocer hasta qué punto los sesgos y heurísticos presentes en el razonamiento de los estudiantes afectan o condicionan la toma de decisiones al momento resolver una situación en contexto de incertidumbre. Es decir, se busca verificar de qué manera la implementación de la propuesta de enseñanza aportó en la consolidación de los aprendizajes asociados al concepto de probabilidad y en general al proceso de alfabetización probabilística en el estudiante.

Las situaciones acá expuestas han sido tomadas de Cañizares[154], Gómez[155] y Velásquez[156], los cuales fueron extraídas de las investigaciones desarrolladas por Fishbein y Gazit (1984), Albert (2003), Green (1983). En particular, las cuestiones que a continuación se presentan están enfocadas en identificar qué concepciones e ideas acerca del significado intuitivo y clásico de la probabilidad han sido consolidadas, e igualmente conocer qué sesgo y heurísticos se han logrado movilizar en cuanto al proceso de razonamiento probabilístico en los estudiantes.

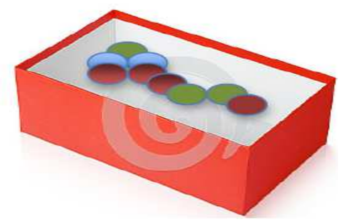
En la **primera experiencia** aleatoria de la actividad de caracterización se pretendía identificar si los estudiantes tienen una *comprensión adecuada del concepto de*

[154] CAÑIZARES,
[155] GOMEZ, Emilse
[156] VELAZQUEZ GOMEZ, Mónica. Secuencia didáctica: Introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria. Tesis para optar el título de Magister en ciencias naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2014.

suceso seguro y si había asimilación de la noción básica de combinatoria. La siguiente situación, se persigue el mismo propósito.

7.3.1 Experiencia aleatoria 1.

Imagen 13. Urna con botones



Al interior de una urna se han depositado 4 botones rojos, 3 botones verdes y 2 botones azules. La tarea consiste en sacar botones, sin mirar hasta que se esté seguro de haber extraído un botón de cada color. ¿Cuántos botones se deben sacar? ¿Por qué consideras que con esa cantidad es suficiente?

7.3.1.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 37. *Respuesta: experiencia aleatoria 1.*

Códigos: estudiante	¿Cuántos botones se deben sacar?	¿Por qué consideres que con esa cantidad es suficiente?
EM12	3	"porque solo hay 3 colores"
EH4	3 más probable	"porque no se puede más"
EM6	3	"porque puede sacar de todos los colores que hay"
EH3	De a 1	"para que sea igual y justo"
EM1	1 por 1	"porque saca 1 quedando dos en cada uno"
EH6	1	"puede ser más posible de que saque un botón rojo"
EM3	1 azul	"porque si"
EH9	Son los rojos	"no argumenta"
EM4	5 veces	"si porque toca hartas veces"
EH12	5 veces	"porque son 3 colores"
EM5	Rojo, son más	"porque hay más rojos que verdes y azules"
EH8	Rojo más posible	"porque hay más posibilidad de sacar un botón rojo"
EM8	Rojo	"porque quedan 2 en cada uno"
EM9	Rojo	"porque esta uno quedando en cada uno"
EM2	Rojo	"porque no se puede sacar todos a las vez"
EM7	9	"porque si se puede"
EM10	9	"porque toca sacarlos todos y sin mirar"
EH11	9 botones	"para sacar un botón de cada color"
EH5	2500	"porque tiene mayor"
EH7	Muchos botones	"para poder sacar de todos los colores"
EH10	Si de cada color	"porque yo quiero"
EM11	Si es posible	"porque hay bastantes de todos"
EH1	2 azules	"el azul es posible sacar"
EH2	De cada uno 4	"porque tiene que haber de cada uno 4, sacar de cada uno 1"

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos y se hace una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 38. *Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.*

¿Cuántos botones se deben sacar	Numero de respuestas	Porcentaje (descripción)
1	4	El 16,6% aducen que es posible y que así se equilibra el número de botones
2	1	El 4,16% afirma que el color azul es posible
3	3	El 12,5% destaca la cantidad que corresponde al espacio muestral de la experiencia.
4	1	El 4,16% destaca que las extracciones deben ser iguales para cada color.
5	2	El 8,32% resalta la necesidad de hace varias extracciones.
9	3	El 12,5% reconoce que esa cantidad de extracciones asegura obtener un botón de cada color.
El color rojo	6	El 25% se inclina por otorgar importancia al color de mayor cantidad como un suceso seguro.
Otras respuestas	4	El 16,6% ofrece respuestas que corresponde a otras interpretaciones.

7.3.1.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. En primer lugar, hay que señalar que algunos estudiantes evidencian tener dificultades a la hora de comprender el problema aleatorio. Lo anterior, es factible que ocurra por el mínimo nivel de comprensión lectora y tal vez esta razón impida alcanzar una interpretación adecuada del experimento. Un detalle más, es que en la actividad diagnostica, cada situación propuesta posibilitó la experimentación y manipulación de generadores aleatorios. Pero en esta oportunidad solo se hace la lectura de la situación y a partir de ese ejercicio se presenta una solución.

Al respecto y pese a estas limitaciones, se observa que el 12,5% de los estudiantes consideran que es necesario extraer un número de botones equivalente al espacio muestral. Otro 12,5%, aduce que se debe sacar la totalidad de botones para estar seguros de contar con un botón de cada color. En cambio, el 25% de estudiantes focalizan el color rojo como elemento de mayor cantidad en la urna y por ello lo ven como el evento que da mayor seguridad al extraer un botón. Otros estudiantes, el 16,6%, ven necesario extraer un solo elementos de la urna, ello con el interés de equilibrar la cantidad de botones de cada tipo. En este sentido, al analizar los resultados se evidencia que no hay claridad en los razonamientos donde se explique que es necesario hacer uso de la combinatoria para contemplar las diferentes opciones en cada extracción y así, concluir que son *ocho* las veces que hay que sacar un botón para estar seguros de contar con uno de cada color.

En otros aspectos revisados, los resultados muestran que los estudiantes ven la necesidad de resolver la situación manteniendo el equilibrio en la cantidad de elementos a extraer. Por ejemplo, el estudiante EH3 afirma que *dé a uno para* que *sea igual y justo.* También están, quienes aducen que para tener seguridad y extraer un elemento de la urna entonces se debe contar con *muchos botones para poder sacar de todos los colores.* Algunas respuestas más, manifiestan que es *probable, posible o que si se puede*, pero no se encuentra un razonamiento que explique cuantos elementos se deben extraer para estar seguros de contar con uno de cada color.

Muchas de las expresiones cotidianas que emplean los estudiantes para hacer pronósticos o para presentar una estrategia de solución a la experiencia aleatoria propuesta, están conectadas con los significados que los sujetos otorgan a la probabilidad o están supeditados a los sesgos o errores propios del razonamiento probabilístico de los estudiantes. Por ejemplo, en afirmaciones como *"para que sea igual y justo" o "porque toca sacarlos todos y sin mirar",* son ideas que evidencian la intención de realizar la experiencia con neutralidad, es decir sin afectar el carácter aleatorio de la misma. Al afirmar que se deben extraer todos los elementos de la urna, refleja que hay comprensión sobre la tarea y que está presente la noción de evento seguro.

Respecto a expresiones como, *"puede ser más posible de que saque un botón rojo", "porque hay más posibilidad de sacar un botón rojo",* se observa que son frases que guardan cierta conexión con el lenguaje propio que se emplea a la hora de cuantificar un evento aleatorio. Es decir, los estudiantes hacen uso apropiado de términos para referirse a la probabilidad de un evento. En este caso, el lenguaje empleado está conectado con expresiones propias del significado intuitivo de la probabilidad.

El siguiente bloque de situaciones tiene como prioridad evaluar la competencia de los estudiantes a la hora de *comparar probabilidades*. Desde luego, en cada ítem hay aspectos adicionales que se abordad en el desarrollo del experimento.

7.3.2 Experiencia aleatoria 2.

> En un grupo de estudiantes de 5° grado hay 13 niños y 16 niñas. Se va realizar el juego "amigo secreto" y para ello cada nombre de los estudiantes se escribe sobre un trozo de papel. Luego todos los trozos de papel se colocan en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. De acuerdo al experimento anterior señale la frase que considere correcta:
>
> (A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña.
> (B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño.
> (C) Es igual de probable que sea un niño que una niña.
> ¿Por qué razón escoge esa opción?

7.3.2.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 39. Respuestas experiencia aleatoria 2.

Códigos: estudiante	**Opción elegida**	**Argumentos, ¿Por qué razón escoge esa opción?**
EM10	C	"hay niñas y niños por lo tanto es igualmente probable"
EH3	C	"porque puede que sea niño o niña"
EM1	C	"porque hay niños y niñas"
EM4	C	"si porque puede ser que va caer una niña o un niño, no se sabe"
EH9	C	"porque el hombre tiene que darle a la niña"
EH1	C	"porque es más probable sacar un niño o una niña"
EH11	B	"porque hay más niñas que niños"
EM12	B	"porque hay más niñas"
EH10	B	"porque hay más niñas que niños"
EM11	B	"porque niñas hay más que niños"
EM9	B	"porque hay más niñas que niños"
EH6	B	"porque hay más niñas que niños, hay más posibilidad de que salga una niña"
EM2	B	"porque hay más niñas"
EH2	B	"porque hay más niñas que niños"
EH4	B	"porque esa opción si ocurre siempre. Es mejor que se escoja un nombre de un niño"
EM7	B	"porque se la puede sacar"
EH8	B	"si el profesor saca un papel es porque puede salir niña o niño"
EM3	B	"porque no se puede sacar 2 a la misma vez"
EH5 – EH7	B B	"no dan argumentos de su elección"
EM5	A	"porque tal vez haya más niños que niñas"
EM6	A	"porque hay más niños"
EM8	A	"porque es probable que salga niño"
EH12	A	"es más probable que salga una niña que un niño porque hay más"

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos y se hace una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 40. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

Según la experiencia, señale la frase que considere correcta:	Numero de respuestas	Porcentaje
Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña.	4	El 16,6%
Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño.	14	El 58,3%
Es igual de probable que sea un niño que una niña.	6	El 25%

7.3.2.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. En el análisis de la información se encuentra que un grupo de estudiantes reconoce fácilmente la diferencia numérica entre los eventos (sacar una *niña* o un *niño)*. Lo cual se asume, que son quienes tienen claridad frente a la tarea de comparar la probabilidad de cada evento, y además, que comprende que los eventos no son equiprobables. Se destaca, igualmente que no hay posiciones que afirmen como *muy posible* uno de los eventos frente al otro, sino que aprecian una ligera diferencia entre estos y lo traducen en su mayoría con la expresión *hay más.*

Los participantes que afirman "es igualmente probable que salga un *niño* o una *niña,* asumen la experiencia como aleatoria y que tanto uno como otro evento puede resultar elegido, pero al realizar la predicción no evalúa la diferencia en la cantidad absoluta de cada evento, esto le lleva a desconocer o ignorar la noción de sucesos no equiprobables presente en la situación planteada.

En cuanto a quienes expresan que, es más probable que el nombre sea de un *niño* que de una *niña* ven que la diferencia entre las cantidades absolutas no afecta las posibilidades para el evento con mayor representación. Ello indica, que sí comparan probabilidades, pero se contradicen a la hora de encontrar la diferencia entre el número de elementos de cada evento y por tanto se equivocan en su predicción.

En lo referente al uso de lenguaje común del estudiante para comparar probabilidades o para hacer predicciones a la situación aleatoria propuesta se resaltan las siguientes apreciaciones:

- *"si porque puede ser que va caer una niña o un niño, no se sabe"*

Acá se evidencia que el estudiante reconoce el fenómeno como aleatorio y que no es posible saber el resultado antes de hacer la extracción. También es evidente que no hay influencia de las creencias personales o subjetivas para hacer la predicción del evento. Sin embargo, no se hace notoria la comparación entre las cantidades absolutas de cada evento, por lo cual deja abierta la posibilidad de que sea uno u otro el resultado.

- *"porque hay más niñas que niños", "hay más posibilidad de que salga una niña", "es más probable que salga una niña que un niño porque hay más"*

En estas justificaciones es notorio que se privilegia la diferencia entre la cantidad de elementos de cada evento. Así, expresiones como "*hay más, más posibilidad, más probable, porque hay más*", son términos que reflejan el proceso a nivel cognitivo de la comparación que se ha realizado de cada evento.

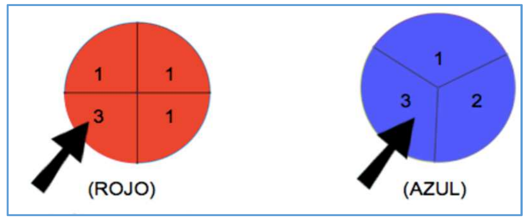
- *"porque esa opción si ocurre siempre. Es mejor que se escoja un nombre de un niño"*

La anterior justificación, refleja la presencia de creencias personales o subjetivas en el estudiante, ya que cree que la experiencia no es de carácter aleatorio y si lo es, entonces piensa que el hecho de que un evento ocurra repetidas veces es motivo para pensar que seguirá apareciendo. Es decir, en el razonamiento del participante está presente el sesgo de la recencia positiva, lo cual le hace tomar una decisión que no es la esperada para este tipo de situaciones.

7.3.3 Experiencia aleatoria 3.

En la imagen se observan dos discos (ruletas) en los cuales las agujas, una vez giradas apunta a un número.

Imagen 14. Ruletas y superficies



¿Con qué disco es más fácil obtener un 3?

Señala la respuesta correcta:

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3

¿Por qué razón escoge esa opción?

7.3.3.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 41. Respuestas experiencia aleatoria 3.

Códigos: estudiante	Opción elegida	Argumentos sobre la cuestión, ¿Por qué razón escoge esa opción?
EH1	C	“ellos juntos dan la misma posibilidad”
EM1		“porque en los dos puede salir 3, podemos dar las veces que queramos”
EH8		“porque en los dos es probable que salga 3”
EM6		“porque es la misma posibilidad”
EM12		“porque los dos tienen un 3”
EH7		“no argumenta”
EH12		“no argumenta”
EH2	B	“porque tiene 3 números y la otra tiene 4”
EM3		“porque tiene menos números”
EM5		“el otro tiene más números y el otro no”
EM7		“porque tiene tres formas”
EH10		“porque en la roja hay 4 números”
EM10		“porque en el rojo es más difícil, en la azul no”
EM9		“porque en el rojo está más pequeño el 3”
EH11		“porque hay más probabilidad”
EH4		“porque la opción es favorable”
EH5		“porque en la azul hay más posibilidad”
EM8		“porque es probable azul”
EH3		“porque no tiene los números repetidos”
EH9		No argumenta
EM2	A	“porque en el disco rojo la barra del 3 está más ancha”
EH6		“porque hay más rojo que azul y el otro *balón*”
EM4		“puede ser que caiga rojo o azul”
EM11		“porque es más probable que salga esa”

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos y se hace una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 42. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

¿En cuál disco es más fácil obtener un 3?	Numero de respuestas	Porcentaje
En el disco rojo	4	El 16,6%
En el disco azul	13	El 54,16%
Los dos discos dan la misma posibilidad	7	El 29,16%

7.3.3.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. En los argumentos que ofrecen los participantes, se muestra un interés por asociar la cantidad de superficie ocupada por cada evento, con la posibilidad que tiene el mismo al girar el disco. Así, se evidencia en las siguientes afirmaciones: *"porque en el rojo está más pequeño el 3", "porque en el disco rojo la barra del 3 está más ancha", "porque hay más rojo que azul y el otro balón* (disco)*"*. Igualmente, se hace alusión al número de partes en que está dividido el disco o a los números que se plasman allí, esto es lo que se observa en apreciaciones como, *"porque tiene 3 números y la otra tiene 4", "porque no tiene los números repetidos"*. En consecuencia, está de por medio un ejercicio de comparación de probabilidades en contextos continuos y a partir de eventos no equiprobables. Es decir, los estudiantes asocian su elección a la cantidad de números o de regiones en que se divide el disco y en cierta forma se compara esa cantidad para asignar la probabilidad.

Otras afirmaciones dadas por los participantes, muestran que se acude al significado intuitivo de la probabilidad para evaluar o hacer la predicción, tomando como base la escala: seguro, imposible y probable. Ello se refleja en las siguientes expresiones: *"porque en los dos es probable que salga 3", "porque en el rojo es más difícil, en la azul no", "porque la opción es favorable", "porque es más probable que* *salga esa", "ellos juntos dan la misma posibilidad".* Así, en las justificaciones se observa que los estudiantes acuden a cuantificar las posibilidades del evento, dando mayor relevancia al hecho de que en cada disco solo hay un 3, lo cual es suficiente para hacer la predicción. Acá se ignora, en parte la propiedad de ser un experimento en un contexto continuo y se asume la experiencia como equiprobable para los dos eventos en el disco, al igual que se asigna la noción de aleatoriedad como propiedad que se cumple en la situación.

En cuanto al lenguaje que emplean los estudiantes para realizar sus pronósticos y para establecer diferencias en la cuantificación de la probabilidad, se observa un aumento de frecuencia en el uso de expresiones como: *"misma posibilidad, es probable, es favorable, más probabilidad";* lo cual indica, que los participantes han apropiado positivamente las expresiones que consideran pertinentes a la hora de hacer sus predicciones o cuando se trata de plantear estrategias de solución para las situaciones aleatorias propuestas.

7.3.4 Experiencia aleatoria 4.

> En una caja de cartón se depositan 4 bombones rojos, 4 azules y 2 amarillos, y después se mezclan. Se sacan tres bombones fuera de ella, resultando que salieron 2 rojos y 1 azul. A continuación sacamos otro bombón sin echar las anteriores a la caja. ¿De qué color es más probable que salga?
>
> (A) El rojo tiene mayor probabilidad
> (B) El azul tiene mayor probabilidad
> (C) El amarillo tiene mayor probabilidad
> (D) Todos los colores tienen la misma probabilidad.
> ¿Por qué razón escoge esa opción?

7.3.4.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 43. Respuestas: experiencia aleatoria 4.

Códigos: estudiante	**Opción elegida**	**Argumentos sobre la cuestión, ¿De qué color es más probable que salga?**
EH1	A	"porque el rojo tiene más posibilidad"
EH3		"porque tiene más posibilidad que el amarillo"
EH6		"porque el rojo tiene más que las otras"
EM4		"es más probable porque si"
EM5		"porque el rojo es más rico"
EM6		"porque hay más bombombunes rojos"
EH8		"porque el rojo tiene más posibilidad"
EM9		"porque en el rojo hay más que en los otros"
EH10		"porque hay más bombones rojos"
EM11		"porque de los bombones hay más de color rojo"
EH11		"porque tiene más posibilidad"
EM2		"porque todos están con igual cantidad"
EH9		"no argumenta"
EH12	B	"porque queda más azules"
EM12		"porque hay más azul"
EH5		"porque hay más azules"
EH2		"porque tiene mayor azul"
EM1		"porque hay más azules"
EH7		"porque si sacaron 2 rojos quedan 2 y sacaron 1 azul así, que quedan 3"
EM7		"porque al rojo le sacaron más al azul menos"
		"porque hay 2 rojos y 1 azul y entonces ese se lo coge el azul"
EH4	C	"si porque no se puede más"
EM8		"si porque todos están con igual cantidad"
EM3	D	"porque todos son iguales"

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos y se hace una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 44. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

¿De qué color es más probable que salga?	Numero de respuestas	Porcentaje
Caramelo rojo	13	El 54,16%
Caramelo azul	8	El 33,3%
Caramelo amarillo	2	El 8,3%
Los tres colores de caramelo tienen la misma posibilidad.	1	El 4,16%

7.3.4.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. En cuanto a la respuesta que representa el 54,16% (caramelo rojo), es evidente que los estudiantes basan su predicción solamente comparando las cantidades absolutas iniciales y por ende, no contemplaron el cambio en la composición de la urna. Es decir, esta decisión es sesgada, pero para llegar a ella si se realiza una comparación de la probabilidad que corresponde a cada evento del espacio muestral. En las siguientes afirmaciones se confirma este hecho: *"porque el rojo tiene más que las otras", "porque el rojo tiene más posibilidad",* y en ellas se evidencia que no hay una comprensión como tal de las condiciones para realizar la predicción en la experiencia aleatoria.

En relación a quienes optan por realizar primero las variaciones exigidas en la situación y luego hacer el ejercicio de comprar los valores absolutos de cada evento, se encuentra que estos participantes asumen la nueva configuración de la urna como una situación donde no hay equiprobabilidad en todos los sucesos. Así se refleja en las siguientes respuestas: *"porque si sacaron 2 rojos quedan 2 y sacaron 1 azul así, que quedan 3", "porque al rojo le sacaron más, al azul menos", "porque queda más azules".* En este caso, es claro ver como este grupo de estudiantes está en la capacidad de comparar la probabilidad de ocurrencia de los eventos en una situación de incertidumbre.

Algunos participantes afirman que en la situación aleatoria se cumple la equiprobabilidad de los eventos y como sustento de ello aducen lo siguiente: *"si porque todos están con igual cantidad".* Es obvio que no hay comprensión de las condiciones presentadas o que realizan equivocadamente la diferencia entre la cantidad inicial y final de caramelos. También puede ocurrir que los estudiantes agrupan la totalidad de elementos (dulces), como un solo conjunto y a partir de esa colección realizan la operación de calcular la probabilidad de cada suceso.

Para cerrar se analiza lo que ocurre frente al lenguaje utilizado cuando sea bordan situaciones de tipo aleatorio. Es bastante recurrente, en esta experiencia, ver como la mayoría de afirmaciones están determinadas por el cuantificador **más.** Por ejemplo: *"más posibilidad que, tiene más que las otras, más probable, quedan más, hay más".* Es indudable que este término lleva a pensar que los participantes tienen mayor claridad a la hora de hacer predicciones o de comparar cantidades absolutas de eventos no son equiprobables.

En la siguiente situación, se valora el conocimiento de los estudiantes en relación a la noción de *independencia y percepción de la propiedad: pérdida de memoria.*

7.3.5 Experiencia aleatoria 5.

> Nicasio ha jugado semanalmente Baloto durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nada, pero decide continuar jugando pues piensa: "el Baloto es un juego basado en la suerte, a veces se gana, a veces se pierde. Dado que he jugado muchas veces y nunca he ganado, entonces cada vez estoy más seguro que antes, de que ganaré en un próximo sorteo de Baloto"
>
> ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento (lo que piensa) de Nicasio?
>
> Justifica.

7.3.5.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 45. *Respuesta: experiencia aleatoria 5*

Códigos: estudiante	Opinión sobre el razonamiento que hace Nicasio	¿Por qué razón opina así?
EH1	“él puede seguir jugando porque todas las veces él no va a perder”	“porque le puede ganar”
EM1	“que sí, sigue intentando alguna vez ganara”	“tendrá que ganar alguna vez”
EH6	“si porque alguno le puede ganar”	“puede estar seguro que la próxima va a ganar”
EH8	“si porque puede ganar si tiene confianza en ganar”	“porque tiene razón”
EM6	“que la próxima vez si gana”	“porque ya ha perdido muchas veces”
EM10	“bien porque ha confiado y eso le ayuda”	“porque la confianza es lo que le puede ayudar”
EM11	“que siga intentando a jugar, que tal que gane y no pierda”	“porque es posible que gane”
EM9	“puede ser que algún día ganara”	“si tira algo puede caer y puede ganar”
EH2	“si es verdad porque unas veces gana y otras veces pierde”	
EH3	“que él piensa que va a ganar, puede ser que gane o pierda”	
EH7	“que puede ser o no”	“por las oportunidades”
EM7	“hay veces que uno gana y hay veces que pierde”	“él dice que siempre le gana el dado y le puede perder”
EH10	“que esta vez podría ganar o sino podría perder”	“pienso yo”
EM12	“que si, a veces se gana y a veces se pierde”	“es verdad”
EH4	“eso es el de la suerte, que le caiga”	“se me ocurre que también es de la buena suerte”
EM3	“de pronto tiene suerte y gane”	“porque no se sabe”
EM4	“puede ser pero puede ganar, casi probable que gane eso es de suerte”	“ha ganado y ha perdido, casi probable”
EH11	“suerte, porque a veces gana y a veces pierde”	“él es de buenas”
EH12	“yo pienso que Nicasio tiene la razón”	“porque algún día tenga suerte de ganar”
EM2	“no tendría que seguir jugando porque seguirá perdiendo”	“si siguió jugando sigue perdiendo”
EM5	“no porque si no ha caído ni ha ganado creo que no”	“porque no ha ganado”
EH9	“el piensa que ganará y se va a jugar y apuesta y pierde a toda vez”	
EH5	“yo no digo nada”	No argumenta
EM8	“porque un seguro y dado”	

Las respuesta que se ofrecen en la situación anterior son de tipo descriptivo, es por ello que no se presenta una tabla para realizar la interpretación estadística.

7.3.5.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. Un primer grupo de argumentos se inclinan por asumir la experiencia o el juego de azar (baloto), como el ejercicio de ir aumentando la posibilidad de ganar cada vez que se incrementan la frecuencia de apostar. Es decir, ante un mayor número de veces apostadas se tendrá mayor posibilidad de ganar o al menos se estaría más cerca de ganar que en el intento anterior. Los participantes que así lo creen lo manifiestan de la siguiente manera: *""que la próxima vez si gana", "él puede seguir jugando porque todas las veces él no va a perder", "si porque puede ganar si tiene confianza en ganar".* Acá se refleja, que los estudiantes consideran que no hay pérdida de la memoria en el juego de azar, ósea que impera la creencia personal y el carácter subjetivo sobre la probabilidad real que se tiene al hacer este tipo de apuestas. Puede también pensarse, que los sujetos creen contar con la favorabilidad de determinados eventos y esto los lleva a no cambiarlos cada vez que apuestan. Por ejemplo, cuando juegan al chance, ellos lo hacen con un mismo número ya que argumentan que éste no ha salido en el sorteo por lo tanto, tendrá más favorabilidad de ser elegido.

En algunas apreciaciones, también se configura el sesgo conocido como recencia negativa. Es decir, hay estudiantes que creen que si lleva una racha donde viene perdiendo consecutivamente, entonces ya es hora de que el sorteo le dé la oportunidad de salir ganador. Por ejemplo los participantes aducen lo siguiente: *""que la próxima vez si gana porque ya ha perdido muchas veces", "que sí, sigue intentando alguna vez ganará".* En cuanto al sesgo de recencia positiva, también se encuentran ideas que confirman su presencia en el razonamiento de los estudiantes. Esto se denota en frases como: *"no tendría que seguir jugando porque seguirá perdiendo", "no porque si no ha caído ni ha ganado creo que no", "el piensa que ganará y se va a jugar y apuesta y pierde a toda vez".* Finalmente, están los argumentos a favor de la suerte y la causalidad. Estos participantes pueden comprender que la experiencia es aleatoria pero no pueden desligar de la situación, la idea que hay unas causas asociadas a lo que se conoce como la suerte. Así se refleja en los siguientes afirmaciones: *"“se me ocurre que también es de la buena suerte”, “de pronto tiene suerte y gane”, “suerte, porque a veces gana y a veces pierde”, casi probable que gane eso es de suerte”.* Es notable como la propiedad de ser un experimento aleatorio y de haber equiprobabilidad en los eventos es afectada por un razonamiento de tipo subjetivo y creencia personal.

Finalmente, están las interpretaciones que aducen o entregan la misma posibilidad para los eventos. Es decir, están quienes consideran que algunas veces ganará y otras perderá. Sin embargo, no hay evidencia de que alguno de ellos evalué el grado de posibilidad de ganar o de perder, por ende no hay estudiantes que entren a comparar las posibilidades a favor del evento apostado, con el número total de eventos que tiene el apostador cada vez que juega al baloto. En general, no hay presencia del significado clásico de la probabilidad en los razonamientos que entregan los estudiantes.

En la siguiente situación, se valora el conocimiento de los estudiantes en relación a la noción de *evaluación de la percepción de independencia de sucesos.*

7.3.6 Experiencia aleatoria 6.

> Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: CARA, SELLO, CARA, SELLO, SELLO, SELLO, SELLO, SELLO.
>
> Si lanza la moneda por novena vez, ¿Qué es más probable que salga?
>
> (A) La próxima vez es más probable que salga CARA.
>
> (B) La próxima vez es más probable que salga SELLO.
>
> (C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o SELLO.
>
> ¿Por qué razón escoge esa opción?

7.3.6.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 46. *Respuesta: experiencia aleatoria 6*

Códigos: estudiante	**Opción elegida**	**¿Qué es más probable que salga en la siguiente extracción?**
EH2 EH3 EM2 EM4 EH8 EH12 EM12 EM9	C	"porque uno no sabe y puede caer cara o sello" "porque a veces uno no sabe y que caiga cara o que caiga sello" "porque una de las dos tiene que caer" "porque de igual tiene que caer las dos" "porque a la suerte otra vez es probable que salga cara o sello" "porque uno no sabe cuál va a caer" "porque es igualmente probable" "porque no sé qué va caer"
EM1 EH5 EM5 EM7 EH9 EM11	B	"porque salieron muy repetidas (sello)" "sello sale más" "porque salió más sello que cara así que es poco posible que caiga cara" "porque hay más sello que no cara" "yo creo que sale sello" "porque es la que más sale y la otra es la menos sale"
EH6 EM3 EM6 EM8 EM10 EH10 EH11	A	"porque si está ahí es seguro que salga" "porque no pueden salir al mismo tiempo" "porque ya ha caído muchas veces sello" "si porque es probable que saque cara" "porque no ha caído muchas veces y probablemente caiga" "porque siempre cae sello" "porque es más probable que caiga cara"
EH1 EH4 EH7	A C C	No dan argumentos.

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos para poder hacer una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 47. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

¿Qué es más probable que salga en la siguiente extracción?	Numero de respuestas	Porcentaje
CARA	8	El 33,3%
SELLO	6	El 25%
IGUAL DE PROBABLE: CARA O SELLO	10	El 41,6%

7.3.6.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. El 41,6% de los estudiantes eligen la opción que corresponde a evaluar el evento cara y sello como igualmente probable. Desde esta perspectiva, los participantes aportan afirmaciones como las siguientes: "*porque uno no se sabe y puede caer cara o sello", "una de las dos tiene que caer", porque uno no sabe cuál va a caer".* Estas razones, evidencian que los estudiantes aceptan la existencia de la aleatoriedad en el experimento. Es decir, reconocen que son algunas propiedades del azar las que determinan los resultados. En los argumentos, *"porque de igual tiene que caer los dos", "porque es igualmente probable"* se reflejan que hay comprensión de la noción de equiprobabilidad de sucesos. Así como en la afirmación, *"porque a la suerte otra vez es probable que salga cara o sello"* se comprende que hay un significado personal o subjetivo en relación al razonamiento que el estudiante hace en su predicción. En general, se evidencia apropiación del lenguaje necesario para expresar grados de probabilidad en una experiencia aleatoria.

De otro lado, el 33,3% de los participantes consideran como *más probable* el evento *sello* para el siguiente lanzamiento y los enunciados ofrecidos para sustentar esta predicción son los siguientes: *"porque salió más sello que cara así que es poco posible que caiga cara"*, *"porque es la que más sale y la otra es la menos sale"*. Las anteriores afirmaciones, evidencian que el razonamiento del estudiante está regulado por el sesgo de la recencia positiva. Para Vásquez[157], este tipo de atajo cognitivos suelen ocurrir cuando los sujetos abordan un experimento aleatorio y en éste suele salir repetidas veces un mismo evento, entonces al pronosticar el siguiente resultado, el sujeto cree que éste vuelve a repetirse. Por ende, ese tipo de sesgos influye en la toma de decisiones y exige del participante hacer un ajuste en manera de evaluar la experiencia.

[157] Op. it. Vásquez, p. 79

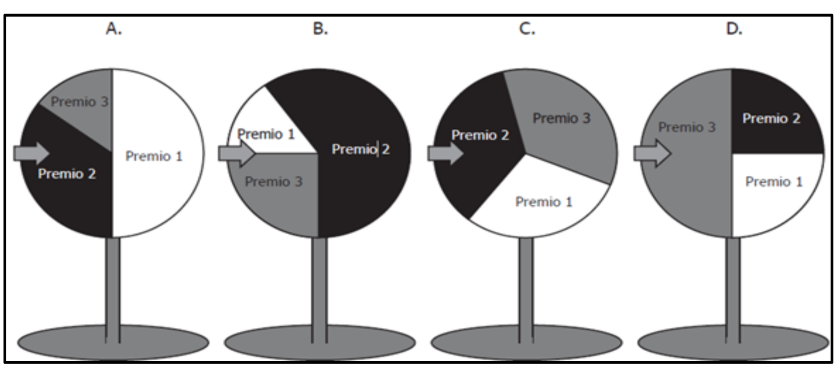
Las respuestas donde se asume el evento caer *cara* como el más probable concentra el 25% de los estudiantes. Ellos, en su ejercicio de sustentar la respuesta, ofrecen las siguientes ideas: *“porque ya ha caído muchas veces sello”*, *“porque no ha caído muchas veces y probablemente caiga”.* Del mismo modo, acá se evidencia que está presente en el razonamiento del estudiante el sesgo de la recencia negativa. Para Vásquez[158], esta decisión la toma el sujeto cuando interpreta erróneamente que el proceso aleatorio está representado en su totalidad por unos pocos ensayos, lo cual induce a pensar que el orden en algunas secuencias no es aleatorio, pues se cree que para que lo sea, los resultados deben estar alternados. Por consiguiente, al tomar decisiones bajo esta heurística el participante en la experiencia se deslinda de la comprensión adecuada de la aleatoriedad y de la noción de probabilidad.

En la siguiente situación, se valora el conocimiento de los estudiantes en relación a la noción de *estimación frecuencial de la probabilidad.*

7.3.7 Experiencia aleatoria 7

> Un juego consiste en girar una ruleta para obtener el premio 1, el premio 2 o el premio 3. ¿En cuál de las siguientes ruletas es más probable que un jugador obtenga el premio 1?

Imagen 15. *Discos y premios*



[158] Ibit. Vásquez, p 79

7.3.7.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 48. *Respuesta: experiencia aleatoria 7*

Códigos: estudiante	**Opción elegida**	**Argumentos,** ¿En cuál de las ruletas es más probable que un jugador obtenga el premio 1?
EH2	A	"porque hay más espacio en la A"
EH3		"porque hay mayor cantidad"
EM1		"porque tiene más opción"
EM2		"porque la barra del 1 es más grande"
EH5		"muy posible 1,2,3"
EM3		"porque es más grande"
EH8		"porque es probable que al girar la ruleta se gane el premio 1"
EM5		"porque es más probable sacarlo. porque donde está el 1 es más grande"
EM6		"en la primera porque tiene más probabilidad de sacar"
EM8		"porque la barra del 1 es más grande"
EM9		"porque es más probable que en las otras"
EH9		"porque las otras no tienen los tres números"
EM10		"porque la A tiene el premio 1 más grande"
EH12		"porque es más grande el pedazo que el otro"
EM12		"porque es más probable que salga esa"
EH6	C	"porque están igual a las otras partes entonces puede salir el premio 1"
EM4		"porque es a la suerte"
EM7		"la bolsa tres"
EM11		"si porque es más grande los cuadros"
EH1		No argumenta
EH7	B	"porque hay más probabilidad"
EH10		"porque tiene el número 3"
EH11	D	"en la D porque es más fácil"
EH4	D	"es más probable el tres"

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos para poder hacer una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 49. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

¿En cuál de las siguientes ruletas es más probable que un jugador obtenga el premio 1?	Numero de respuestas	Porcentaje
Disco A	15	El 62,5%
Disco B	2	El 8,3%
Disco C	5	El 20,8%
Disco D	2	El 8,3%

7.3.7.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. El 62,5% de los estudiantes eligen la opción que corresponde al disco que contiene la mayor superficie para el premio 1. En consecuencia, los argumentos ofrecidos como sustento a la respuesta hacen énfasis en la cantidad de superficie ocupada por el evento seleccionado en el disco (*más espacio – más grande – mayor cantidad)*. En cambio, otros argumentos acogen términos propios de la cuantificación de la probabilidad y proponen expresiones del siguiente tipo: *es más probable, tiene más probabilidad, muy posible.* En estas respuestas, el participante evidencia el uso de los grados de la probabilidad e intenta hacer una cuantificación del evento. Es decir, éstas justificaciones se basan en la comparación que se hace con los otros discos y aunque su intuición refleja un conocimiento de tipo empírico o basado en la experiencia es posible que su razonamiento se haya construido a partir de la movilización de los aprendizajes previos y que tal proceso ha permitido percibir el carácter impredecible de los posibles resultados.

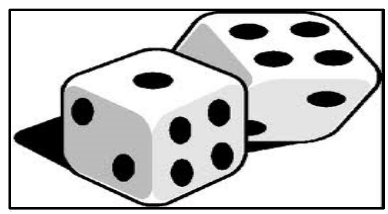
En la revisión de la predicción hecha sobre los demás discos, es notorio que el 37,5% de los estudiantes no alcanzan una comprensión adecuada del problema planteado. Es decir, sus justificaciones asociadas a aspectos como: *la suerte, igualdad en el tamaño de los sectores o el tipo de dificultad para obtener un evento en el disco,* señalan que el razonamiento hecho se construye a partir de ideas previas de carácter subjetivo o sobre creencias personales, e influyen para que el estudiante haga un pronóstico sesgado como respuesta a la solución del problema.

En relación al lenguaje empleado por los estudiantes para elegir el disco que muestra el evento más probable (premio 1), se encuentran expresiones como: *más espacio, mayor cantidad, más grande el pedazo que el otro;* las cuales indican que se ha realizado una comparación entre cada superficie de los discos para determinar el evento con mayor posibilidad. Este ejercicio, permite también observar que los estudiantes, además de hacer la comparación entre la cantidad de superficie ocupada por cada evento, también asocian la noción de equiprobabilidad al realizar predicciones y para ello afirman lo siguiente: *"porque están igual a las otras partes entonces puede salir el premio 1".* En cambio, en expresiones como: *"porque es probable que al girar la ruleta se gane el premio 1", "porque es más probable sacarlo porque donde está el 1 es más grande"* se observa que hay presencia del concepto de aleatoriedad y comparación de los grados de probabilidad. Así, puede afirmase que los estudiantes han movilizado sus saberes previos y su lenguaje cotidiano para ajustarlo a las exigencia de la situación aleatoria.

En la siguiente situación, se valora el conocimiento de los estudiantes en relación a la noción de *juego equitativo.*

7.3.8 Experiencia aleatoria 8

Imagen 16. Dados ganadores



María y Esteban juegan a los dados. María gana 1.000 pesos si el dado marca el **2** o el **3** o el **4** o el **5** o el **6**. Si resulta que el dado marca el **1,** Esteban gana 2.500 pesos. De acuerdo a las reglas puestas crees que el juego es equitativo (justo).

¿Por qué razón opinas así?

7.3.8.1 Clasificación y tabulación de los datos.

Tabla 50. Respuesta: experiencia aleatoria 7

Códigos: estudiante	¿Es equitativo el juego?	Argumentos, ¿Por qué razón crees que es o no es equitativo?
EH1 EH5 EH6 EM3 EM4 EM11 EH11	SI	"porque María tenía que ganar pero Esteban ganó" "porque si es posible que caiga 6" "porque es un juego de suerte" "si porque tira uno y cae" "si porque es un juego y es al que gane" "porque es más fácil para Esteban que saque ese puntaje" "para que no tiene un número más grande"

EH2		"porque ella gana $1000 si cae 2,3,4,5,6 y Esteban tiene que sacar 1 para que gane $2500"
EH3		"porque María tiene más posibilidades de ganar"
EM1		"porque María escogió la mayoría de los números"
EM2		"porque Esteban gana más que María"
EH7		"porque uno gana más que el otro"
EH8		"porque si cae 2 o 1 no es probable que gane"
EM5		"porque si a uno le sale 1 gana más"
EM6		"porque María gana menos plata y esteban gana más"
EM9	NO	"porque Esteban gana más que María"
EH9		"esteban solo tiene el 1"
EM10		"porque son muchos números y nunca pierde"
EH10		"porque quita plata y por eso es muy fácil"
EH12		"porque María cogió más números que el otro"
EM12		"porque si esteban gana $2500 y maría no"
EM7		"porque esos son mucho números y esos números no hay en el dado"
EM8		"porque el dado solo tiene 4"
EH4		"porque es mejor opinar eso"

La siguiente tabla se construye a partir de la clasificación de las diferentes respuestas que entregan los estudiantes como solución a la experiencia aleatoria. E igualmente se realiza un proceso matemático a los datos obtenidos para poder hacer una interpretación estadística de los mismos.

Tabla 51. Resumen e interpretación estadística de los datos obtenidos.

¿Es equitativo el juego?	Numero de respuestas	Porcentaje
SI	7	El 29,16 %
NO	17	El 70,83%

7.3.8.2 Análisis e interpretación de la información tabulada. El 29,16% de los estudiantes consideran que el juego es equitativo y para ello destacan aspectos de tipo subjetivo como es la *suerte,* también se hace alusión *al nivel de dificultad o favorabilidad* con que cuenta el evento asignado a uno de los jugadores (Esteban). Además, se refieren al componente aleatorio de la experiencia pues afirman que al "*ser un juego es al que gane"* y por lo tanto se entiende que no se pueden conocer el resultado sino hasta que se experimente con el dispositivo aleatorio.

En consecuencia, en los argumentos entregados no queda claro que la decisión de asumir el juego como equitativo sea el producto de evaluar y cuantificar la probabilidad de cada evento, más la comparación de esa favorabilidad con respecto a la cantidad de dinero apostado. Es decir, los estudiantes solo contemplan la propiedad de los eventos como aleatorios.

Respecto al 70,83% de los estudiantes que evalúan la experiencia como no equitativa, se encuentra que se resalta la diferencia o desigualdad entre la cantidad de eventos (números del dado) asignados a cada jugador. Así, lo corroboran las siguientes afirmaciones: "*porque ella gana $1000 si cae 2, 3, 4, 5, 6 y Esteban tiene que sacar 1 para que gane $2500", "porque María escogió la mayoría de los números", "porque son muchos números y nunca pierde".* Es decir, es un acierto que en primer lugar se entre a comparar la probabilidad que cada uno de los jugadores tiene en el juego y que posteriormente se considere la cantidad de dinero apostados. Sin embargo, algunos de los participantes solo contemplan esta última aserción del problema. Así se evidencia en los siguientes argumentos: *"porque uno gana más que el otro", "porque si esteban gana $2500 y maría no", "porque María gana menos plata y esteban gana más".* En resumen, se observa que los estudiantes en su mayoría acuden a la comparación ya sea de probabilidades o de los valores apostados y que en ningún caso alguno de ellos tomó su decisión con base en los dos criterios que aborda la situación.

La situación aleatoria permite que se evalué también la apropiación y uso del lenguaje que hacen los estudiantes a la hora de comparar y cuantificar probabilidades. Por ello, en las siguientes expresiones se concreta el uso de este lenguaje: *"porque si cae 2 o 1 no es probable que gane", "porque si es posible que caiga 6"* y aunque no son muchos los participantes que reflejan la implementación de este tipo de expresiones para realizar pronósticos, si es importante ver que los estudiantes han enriquecido su vocabulario con nuevas palabras que han emergido del trabajo en la unidad didáctica.

7.4 CONTRASTE ENTRE LA PRUEBA PEDAGÓGICA DE CIERRE Y LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.

Al cierre de la fase de análisis, se presenta un ejercicio de contraste entre los resultados obtenidos durante la implementación del instrumento de caracterización y los resultados que emergen de la prueba pedagógica de cierre. En consecuencia, los aspectos evaluados en la situación aleatoria se someten a verificación y se realiza una interpretación con base en los resultados previamente sistematizados.

a. En la **situación aleatoria 1**, "botones seguros", se evalúa la *comprensión del concepto de suceso seguro y noción de combinatoria*.

● La revisión a estudios previos, muestran que los estudiantes al predecir un resultado asocian esa respuesta con el número de elementos que contiene el espacio muestral de la experiencia aleatoria. En nuestro caso, para la actividad diagnostica se encuentra que el 72,3 % de estudiantes ven necesario extraer la cantidad de *elementos* correspondientes al espacio muestral de la situación. En la prueba de cierre, esta decisión la toman solamente el 12,5% de los participantes.

Según lo anterior, se presenta una disminución significativa en cuanto al número de estudiantes que evidencian este tipo de razonamiento. Es decir, la situación ha sido interpretada teniendo encuenta otras estrategias, ya que la idea de extraer un representante de cada elemento del espacio muestral (color botón) no tiene mayor acogida. Por lo anterior, se considera que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje se dio lugar a una movilización de ese concepto (suceso seguro), pues los participantes seguramente han comprendido que tal cantidad de extracciones no asegura una predicción correcta en la situación planteada.

En cuanto a otras estrategias de solución, los estudiantes ven necesario extraer la totalidad de los elementos de la urna para conseguir responder a la tarea efectivamente. Así, los porcentajes que corresponde a estas respuestas son el 13,6% (prueba de cierre) y el 12,5% (caracterización). Desde luego, que hay equivalencia en los porcentajes y ello informa que los estudiantes no toman ésta decisión basados en la posibles combinaciones que resultan de extraer elementos de la urna. Así que se infiere, que aún no se ha creado en la estructura cognitiva del estudiante una conexión que permita llegar a configurar los posibles arreglos y por ello la mínima comprensión para lograr responder a este tipo de tareas.

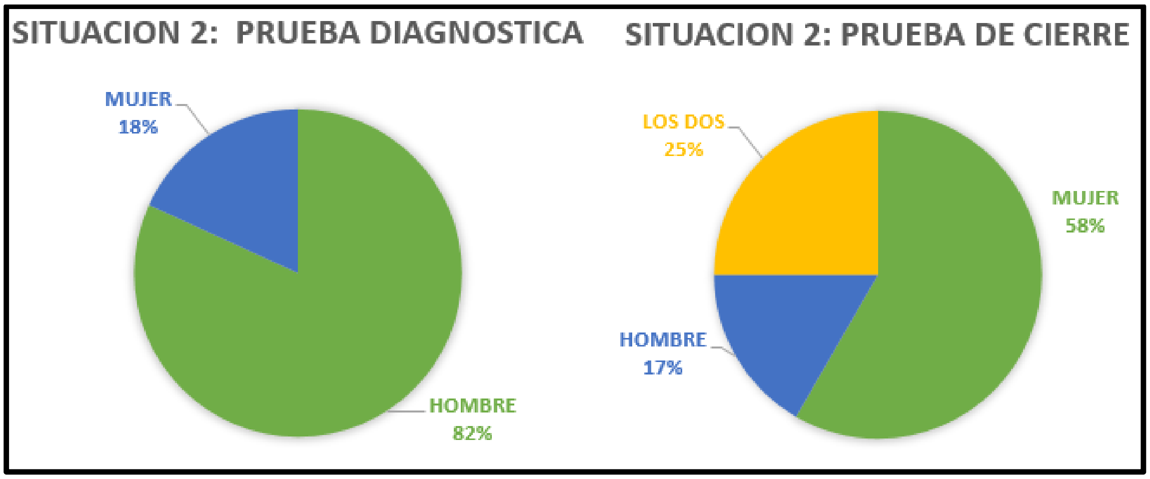
● Respuestas, particularmente las encontradas en la prueba de cierre, evidencian que los aprendices proponen soluciones conectadas con la noción de evento probable. Por ejemplo, en la situación se conoce que el color de botón con mayor número de elemento es el rojo. Por lo cual el 25% de los participantes afirma que estas son las extracciones necesarias para estar *seguros* de cumplir con la tarea. Es decir, relacionan el evento con mayor probabilidad de salir con el concepto de evento seguro, lo cual hace notar que hay un sesgo en el razonamiento de los estudiantes a la hora resolver el problema.

Es importante destacar que hay justificaciones donde se evidencia que los argumentos se conectan con palabras asociadas a la graduación de la probabilidad. Por ejemplo, aparecen expresiones para señalar que el evento tiene una posibilidad de ocurrencia entre el suceos imposible y el suceso seguro. Asi se evidencia en las siguientes afirmaciones: "*puede ser más posible de que saque un botón rojo",* "*el azul es posible sacar" "para que sea igual y justo hay que sacar de a uno", "si porque toca hartas veces".* Lo anterior evidencia, un reconocimiento de lo probable y de la aleatoriedad en el experimento pero a su vez informa que está presente la idea de hacer similar la nocion de probable o posible con la de seguro. Para cerrar se destaca que hay un número significativo de estudiantes a los que se les dificulta comprender la situación y ello hace que no sea posible lograr configurar los posibles arreglos que permitan responder la pregunta con una predicción acertada.

b. En el siguiente grupo de situaciones, la actividad de contraste está regulada por el tópico *comparación de probabilidades.*

● La experiencia 2 (*amigos al azar*), permite reunir información a partir de un evento cercano o familiar a los estudiantes. En este caso los participantes en el juego deben predecir que evento es mas probable (hombre o mujer) y para ello conocen el numero de elementos que contiene la urna. En la siguiente grafica se muestra con porcentajes los pronósticos de los estudiantes frente a la situación planteada:

Grafico 6. Comparación de probabilidades. Situación 2.



Cabe aclarar, que el suceso más probable en las dos situaciones abordadas no corresponde al evento del mismo género. Por ello, para la situación propuesta en la actividad diagnostica, el evento *hombre* es el que equivale al de mayor probabilidad y de acuerdo a la predicción hecha, éste equivale al 82% de los estudiantes. En la experiencia propuesta en la prueba de cierre, ocurre que el evento *mujer* es el asociado al de mayor probabilidad de salir y en este caso, el porcentaje de la predicción hecha corresponde al 58%. Desde luego, en esta última situación los estudiantes tuvieron que decidir entre tres opciones (hombre, mujer o ambos géneros) para saber cuál era más probable.

De acuerdo a lo anterior, se observa una disminución en el porcentaje de estudiantes que hacen un pronóstico acertado, producto de comparar las probabilidades de cada evento. Sin embargo, si verificamos el porcentaje de estudiantes que pronosticaron el evento opuesto, se encuentra que es muy similar en ambas situaciones, esto hace pensar que aún persiste la dificultad entre quienes no lograron comparar probabilidades de manera correcta en la primera experiencia.

Al constatar el aumento del porcentaje, en relación al número de estudiantes que no realiza correctamente la predicción del evento más probable, puede afirmarse que este viraje está asociado a lo que Vásquez[159] expresa como una respuesta errónea que se interpreta como la confusión que tiene el estudiante a la hora de definir el espacio muestral de la experiencia aleatoria. Es decir, es probable que el estudiante esté entendiendo que el espacio muestral lo componen la cantidad de elementos correspondiente al total de individuos participantes, esto 24 elementos, y por consiguiente no lo esta asumiendo como un conjunto donde solo hay 2 elementos (hombre – mujer). Así, cuando el participante asigna igual probabilidad a cada elemento sin importar que sea de uno u otro género pues lo que hace es escoger la opción de respuesta donde se cumple la equiprobabilidad de los eventos, consiguiendo actuar sesgadamente en la tarea propuesta.

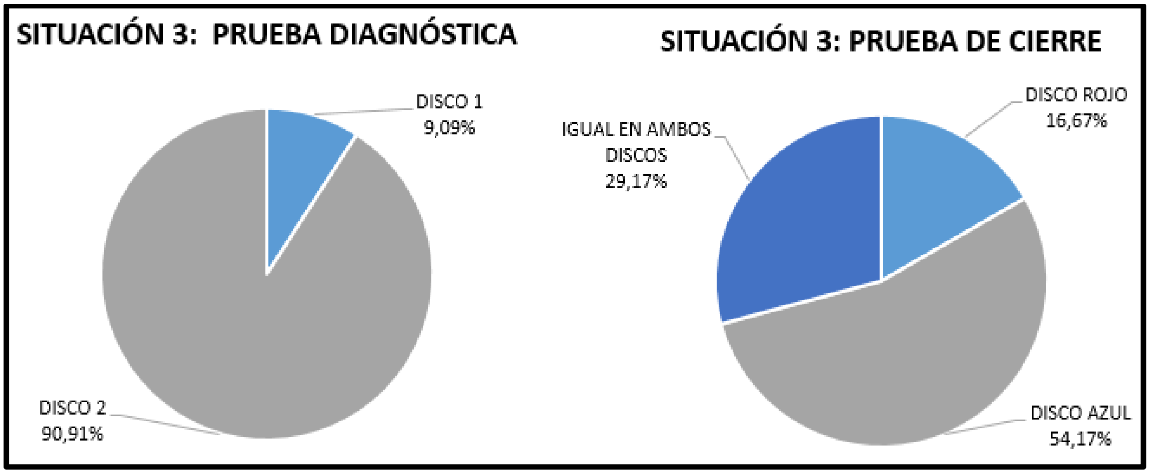
● Otra arista que se ha propuesto ara abordar el tópico comparación de probabilidades se plantea en la experiencia 3 (*las ruletas)*. En este caso, se va a abordar desde un contexto continuo, lo cual exige que se comparen eventos que ocupan proporciones de áreas o superficie en un disco.

En lo que sigue, se presenta de manera gráfica la información consolidada y sistematizada a partir de las respuestas entregadas por los estudiantes.

---

[159] Vázquez, op cit,. P. 265

Grafico 7. Comparación de probabilidades. Situación 3.



La información estadística para la prueba diagnóstica, muestra que el 9,09% de los estudiantes, interpreta como predicción correcta el disco 1. Es decir, el disco que contiene menor superficie para cada número. Las afirmaciones que justifican esta decisión por ejemplo son: "*porque está muy cerca y el clip gira y no cae".* En el argumento, se evidencia que hay confusión en los participantes, y seguramente ocurre por la mínima comprensión de la pregunta ya que esta pide explicar por qué el disco, no elegido es el de mayor dificultad para obtener el número 3. También se evidencia, que para tomar la decisión se compara el tamaño de la región que ocupa el evento en el disco y aunque su decisión fue tomada después de haber experimentado con el clip, si es posible que quienes piensan así estén asociando que hay favorabilidad por tratarse de que el disco elegido tiene más divisiones. Es decir, están comparando cantidades absolutas en cuanto a las divisiones de los discos.

En relación a la opción de respuesta, disco numero 2, la cual fue acogida por el 90,9% de los estudiantes, se observa que éstos comprenden, después de hacer la respectiva comparación de regiones que cada porción del disco entrega mayor probabilidad al hacer girar la ruleta. Ello es posible confirmarlo mediante los siguientes argumentos: "*porque donde están los 4 números son más pequeños los* *cuadros", "no elegimos el disco 1 porque hay más cuadros y en la dos puedo sacar 3".* También hay alusión a la proporcionalidad del número de sectores favorables de cada ruleta, por ejemplo: *"porque el disco 2 tiene menos números", "porque tiene más números"*, por tanto se detecta que los estudiantes tienen una correcta noción al comparar probabilidades en un contexto continuo.

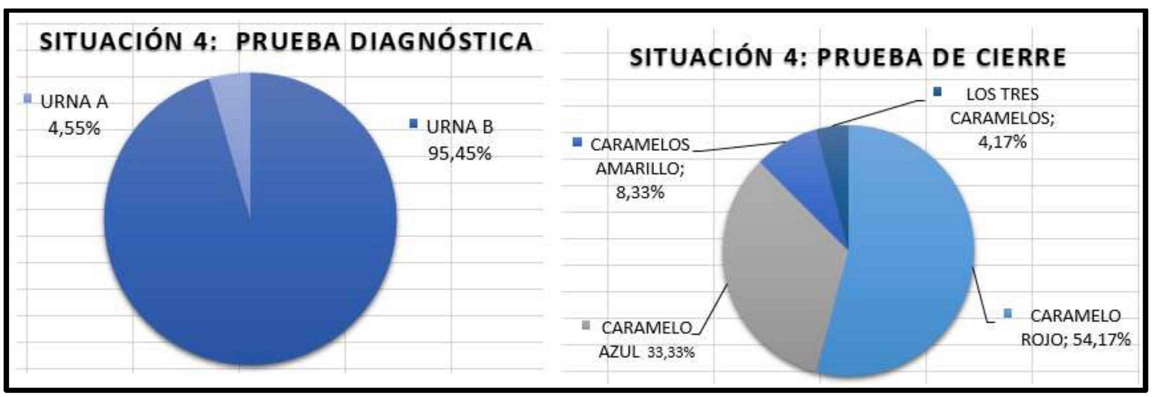
Al revisar lo que ocurre en la situación desarrollada para la prueba de cierre, se encuentra que el 29,17% de los estudiantes se inclinan por la opción, es equiprobable sacar un 3 en los dos discos. Esto lleva pensar, que la variable, tamaño de las regiones en el disco pasa desapercibida o es descartada por motivos como por ejemplo, que asignan el mismo valor absoluto a los eventos (hay un solo tres en cada disco). En los argumentos encontrados los estudiantes resaltan lo siguiente: "*porque en los dos es probable que salga 3", "porque es la misma posibilidad", "porque en los dos puede salir 3, podemos dar las veces que queramos".* Las anteriores afirmaciones, confirman que los estudiantes no tienen en cuenta la cantidad de región ocupada por el evento 3 en cada disco, sino que se enfocan en responder que es probable que salga tal evento.

De otro lado, otros participantes afirman que la opción disco de color rojo es la que entrega mayor posibilidad para obtener el evento tres, se evidencia, al igual que en la prueba diagnóstica que hay cierta confusión o mínima comprensión de la tarea como tal, ya que expresan por ejemplo: "*porque en el disco rojo la barra del 3 está más ancha" o " porque hay más rojo que azul"* notándose cierta subjetividad o también que su razonamiento se orienta es a ofrecer una respuesta si es o no probable que salga ese evento.

En cuanto a la respuesta acertada, este porcentaje disminuye en relación al obtenido en la prueba diagnóstica. Así, que solamente el 54,16% de los estudiantes infieren que el evento 3 es más probable que salga en el disco azul y de nuevo se encuentra que hay argumentos donde se contempla la cantidad de región que ocupa el evento en ambos discos, así como la proporción de eventos favorables en cada ruleta.

● Para cerrar el contraste con las situaciones propuestas para el tópico comparación de probabilidades, se trabaja con la experiencia aleatoria 4 (*urnas y caramelos).* En consecuencia, el experimento con urnas se caracteriza por comparar dos sucesos no equiprobables en cada generador aleatorio, al igual que se reconoce la igualdad de casos favorables y la desigualdad en los casos posibles. En la situación que se toma como referencia, primero se debe normalizar la composición de los elementos en el dispositivo aleatorio (bolsa), para luego pasar a hacer una predicción que permita hacer la selección de las opciones presentadas. Los siguientes gráficos se muestran los porcentajes que corresponden a cada respuesta entregada por los estudiantes.

Grafico 8. Comparación de probabilidades, situación 4



Los resultados que señala la experiencia implementada en la actividad diagnóstica, evidencian que los estudiantes tienen dificultades para hacer un contraste entre las posibilidades de cada urna, de acuerdo con su composición. Es decir, es mínima la comprensión del problema, pues cuando se trata de predecir posibilidades de un evento cuyo valor absoluto es el mismo en las dos urnas y donde la composición de las mismas muestran que los eventos no son equiprobables, entonces realizan predicciones equivocadas, argumentando que en esa urna hay mayor cantidad del otro elemento (pimpón blanco) con respecto a la otra urna. Así, lo muestran los siguientes justificaciones: *"la urna B tiene más, tiene 3 y la otro 2", "tiene más pimpones blancos", "la B es más probable tiene más pimpones blancos".* Desde luego que tales juicios revelan que los estudiantes aún tienen dificultades para construir la expresión matemática (regla de Laplace) que les permita hallar las probabilidades en cada urna y luego pasar a realizar una comparación de las mismas.

En cuanto a la situación propuesta para la actividad de cierre, en primer lugar se aclara que su estructura es diferente y por tanto la exigencia cognitiva para el estudiante cambia. Es decir, acá la situación permite maniobrar al estudiante de manera que solo basta con normalizar la composición de la "bolsa", una vez en esta se han realizado algunas extracciones y luego, pasar a comparar el número absoluto de cada elemento (color de caramelo) para entregar una predicción que permita conocer la mayor probabilidad.

En este sentido, los resultados de la predicción realizada muestran que el 54,1% de los participantes predice desacertadamente que el elemento "color rojo" es el que tiene mayor probabilidad de salir y solo un tercio de los estudiantes afirma que el elemento más probable es precisamente el de mayor valor absoluto después que normalizada la composición del dispositivo aleatorio. El sesgo presentado por los estudiantes permite ver en sus justificaciones que se detuvieron en la cantidad de elementos propuesto al inicio, pero no realizaron los cálculos y esa decisión es confirmada con los siguientes argumentos: *"porque el rojo tiene más posibilidad"*, *"porque hay más caramelos rojos".* En contraposición, los estudiantes que alcanzan a realizar sus cálculos y a predecir el elemento que recibe el mayor valor absoluto, son el 33,3%. Ellos aducen que el evento de mayor probabilidad es el "color azul" con las siguientes afirmaciones: *"porque quedan más azules", "porque si sacaron 2 rojos quedan 2 y sacaron 1 azul así, quedan 3", "porque al rojo le sacaron más al* *azul menos"*. Es importante notar, que los argumentos de los estudiantes antes referenciados, evidencian una consolidación en su aprendizaje, o como mínimo una comprensión pertinente de la experiencia. Lo cual les permite comparar acertadamente la probabilidad de un evento simple, hacer su pronóstico y tomar la decisión frente a la favorabilidad de los eventos analizados.

c. La actividad de contraste, también implicó conocer los resultados de la experiencia Nº 5 (*la apuesta de Pedro Julio)*, la cual evalúa *independencia de sucesos y percepción de la propiedad pérdida de memoria.*

En cuanto a la situación propuesta, en el ejercicio de caracterización es necesario puntualizar que los estudiantes presentan limitaciones a la hora de interpretar el razonamiento del apostador y a su vez, se evidencia que es notable el escaso conocimiento del contexto en el que está el problema. Es decir, los estudiantes evidencian dificultad para evaluar las posibilidades que entrega el numero apostado, e igualmente se evidencian obstáculos a la hora de identificar los elementos que conforman el espacio muestral; pues las cifras que componen el numero dado, implica cuantificar las combinaciones que se forman y de paso evaluar la probabilidad que tiene cada arreglo de salir favorecido en el sorteo. Así mismo, se encontró que los estudiantes ven acertado seguir apostando, pues ello disminuye los eventos en contra y otorga mayor posibilidad de ganar a medida que se participa en el juego de azar. Desde luego, éste razonamiento se considera como un sesgo, por lo que se aduce que los participantes asumen que no hay pérdida de memoria en el experimento y cada vez que se vuelve a apostar es más probable que salir favorecido.

Del mismo modo, se identifican argumentos que denotan presencia de elementos subjetivos asociados a la casualidad, ya que indican que cada sorteo está determinado por el fenómeno de la suerte, reconociendo en parte el componente aleatorio presente en la situación. Por ejemplo, los estudiantes EH3 y EH4 afirman:

“algún día corre el día de suerte y puede ganar”, “yo opino que un día corre suerte”. Se observa así, que se atribuyen el hecho de tener éxito en el juego a la influencia de un elemento de carácter subjetivo.

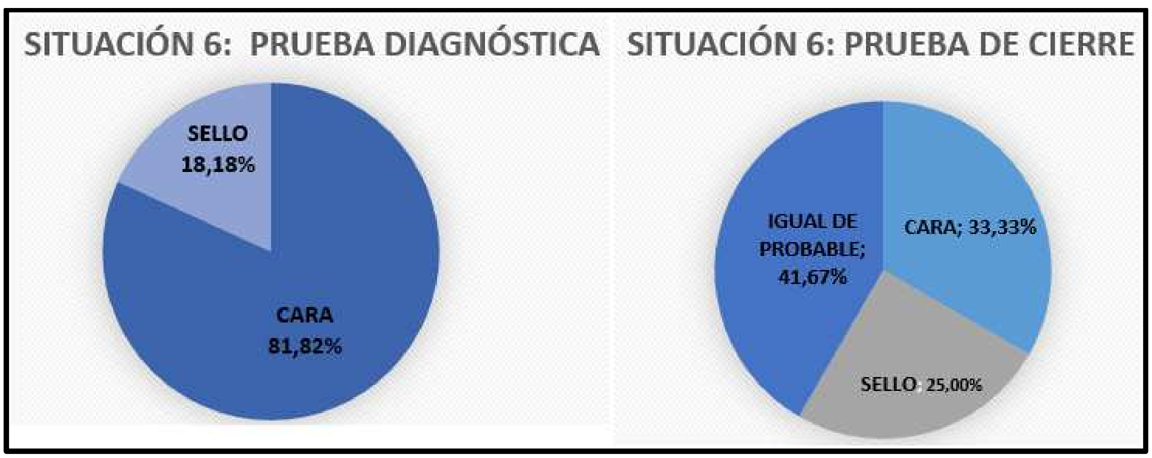
Otro aspecto que se identifica en los argumentos presentados, destaca que las posibilidades de ganar están determinadas por el número de ensayos o dicho de otra manera, la mayor cantidad de apuestas realizadas. Prueba de ello, se constata en las siguientes ideas: *“si él le sigue echando hartas veces pues alguna vez le cae”*, *“creo que si uno tira más veces uno puede ganar”.* De acuerdo a estas apreciaciones, es notorio que está implícito un sesgo en el razonamiento y tal decisión aduce desconocimiento para evaluar que en cada sorteo se cuenta con la misma posibilidad de ganar, ya que no importa el resultado anterior.

Por último, hay que señalar que en el argumento “*poquitas oportunidades de ganar”,* dado por los estudiantes (EH7 y EH8), se evidencia que han identificado que la experiencia muestra que las posibilidades de ganar son mínimas y por tanto no importa el número de ensayos o apuestas esa posibilidad mínima permanece, no cambia. Es decir, han reconocido la propiedad aleatoria del experimento y seguramente han identificado que cada apuesta tiene la misma posibilidad de aparecer sin importar los resultados anteriores.

En cuanto a lo encontrado en la experiencia de la *prueba de cierre*, es preciso señalar que de nuevo hay un grupo de estudiantes que consideran viable el argumento del apostador. Por ejemplo, proponen las siguientes justificaciones: “*él puede seguir jugando porque todas las veces él no va a perder”, “que siga intentando alguna vez ganará”*. En estos argumentos, se resalta la idea de no ignorar que el evento es imposible de obtener y en parte se evalúa que lo interpretan como poco probable que ocurra. Es notable, que algunos estudiantes le confieran la posibilidad de ganar a la confianza o insistencia que el apostador da al juego. Por ejemplo, los estudiantes EH8 y EM10 dicen: “*si porque puede ganar si tiene* *confianza en ganar", "bien, porque ha confiado y eso le ayuda", "que siga intentando a jugar, que tal que gane y no pierda".* Por ende estos argumentos reflejan el componente motivacional que todo sujeto le da a la experiencia de participar en un juego de azar, pero es llamativo que se desconozca la poca posibilidad de ser favorecido y por ende las consecuencias de tomar una decisión sin evaluar el componente aleatorio o la medida de probabilidad de tener éxito en la misma.

d. Para este punto, el contraste de resultados se realiza verificando lo ocurrido en el experimento aleatorio (*caras y sellos),* que está asociado al tópico *"evaluación de la percepción de independencia de sucesos".* En la siguiente representación gráfica se plasman los porcentajes de participantes y sus predicciones en torno a lanzar una moneda.

Grafico 9. Percepción de independencia de sucesos, situación 6



Es preciso comenzar, por notar que en la situación aleatoria propuesta en la prueba de cierre hay un importante avance en cuanto a reconocer que la probabilidad de lanzar una moneda, es la misma cada vez que se intenta predecir el evento que va a salir. Es así, como el 41, 67% de los participantes cree que es igualmente probable obtener cara o sello al lanzar una moneda.

Ahora bien, en la actividad diagnostica aparecen argumentos que señalan un reconocimiento de la noción de equiprobabilidad. Por ejemplo, algunos estudiantes afirman: "*porque imaginamos que puede caer", "porque si uno lo tira no sabe si cae cara o sello", "porque cayo cara y sello".* De otro lado y frente a respuestas que evidencian la presencia del sesgo de la recencia negativa, se resaltan argumentos como: *"porque ya cayo sello ahora cae cara", "porque y ha caído muchas veces sello", "porque no ha caído muchas veces y probablemente caiga".* Y frente a argumentos que denotan el sesgo de la recencia positiva los estudiantes señalan: *"porque me salió muchas veces", "porque salió más sello que cara así que es poco posible que caiga cara"*. Por tanto, en consideración de las anteriores justificaciones, se especifica que en la actividad diagnostica, el 100% de los estudiantes escoge uno de los dos eventos pero el 27,27% entrega argumentos que evidencian contar la noción de aleatoriedad a la hora de lanzar una moneda. En el caso de la prueba de cierre, puede apreciarse que hay una disminución en el porcentaje de estudiantes que presentan ya sea uno u otro sesgo, esta cantidad equivale al 58,3%, lo cual es significativamente menor a la que se obtiene en la primera prueba que es del 72,73%.

e. En lo que refiere al tópico *estimación frecuencial de la probabilidad*, a continuación se realiza la revisión de los aspectos que emergen del trabajo con las situaciones propuestas desde el ejercicio de diagnóstico y desde la prueba de cierre. La siguiente gráfica describe el porcentaje de estudiantes que consideran

Grafico 10. Estimación frecuencial de la probabilidad, situación 7

La situación expuesta en la actividad diagnóstica implica que los estudiantes infieran la posible composición del dispositivo aleatorio (bolsa). Es decir, que con base en los datos que entregan algunas extracciones (color de balota), se pronostique el color de la balota que saldrá en la siguiente extracción. En correspondencia a esta tarea, el 81,82% de los participantes se inclinan por el color del elemento (balota) que ha sido extraído previamente, es decir el color blanco. Desde luego, esa decisión muestra que hay una fuerte presencia del sesgo de la *recencia positiva* en el razonamiento de los estudiantes. Así lo evidencian, las justificaciones entregadas una vez los estudiantes hacen la predicción: *"porque ha salido hartas veces entonces caerá de nuevo", "porque en todas las oportunidades le salió" "porque había salido 4 veces blanca".* Observando las ideas anteriores se encuentra que los participantes no tienen en cuenta la información proporcionada y olvidan que no conocen la composición de la bolsa. Sin embargo, no todos los estudiantes razonan desde la misma noción, hay algunos que expresan otras ideas, por ejemplo afirman que eligieron el elemento de color blanco; *"porque es posible que salga blanca o negra", "escribí blanca porque hay más cantidad de blancas que de negras".* En las anteriores ideas, se denota que aunque no se está calculando la probabilidad, si está inmersa la comparación entre los dos eventos e igualmente se otorga, al experimento el componente aleatorio que lo constituye. También aparecen afirmaciones, las cuales les atribuyen significados propios de la causalidad.

Aseguran que es, *“porque esta más de suerte”* y conectan lo ocurrido en la situación, con creencias o con la subjetividad pues consideran que es la suerte la que determina el resultado.

En la otra opción de respuesta, se encuentran afirmaciones que soportan la predicción hecha para la balota de color negro y lo confirman con las siguientes apreciaciones: *“porque ya salió muchas veces la blanca”, “porque de pronto sale negra”.* Según lo anterior, es evidente que hay un intento de comparar la cantidad de eventos que ya ocurrieron con el próximo a salir, y si es así, ello indica que están teniendo en cuenta la información proporcionada y que no hay tendencia a considerar que en la siguiente extracción los eventos son equiprobables. Los estudiantes que interpretan así la situación, corresponde al 17,4% y son quienes comprenden la importancia de *estimar frencuencialmente la probabilidad* para poder hacer un pronóstico pertinente, pues alguien podría pensar lo contrario e inclinarse por razonar que solo hay balotas blancas o que el número es igual y por tanto, con una cantidad mayor de ensayos la probabilidad tendería a ser igual para los dos eventos.

La situación equivalente para la prueba de cierre, exige en primer lugar identificar en cuál de los cuatro discos propuestos la superficie asignada al color blanco representa mayor espacio. Luego de identificar el disco que contiene el mayor espacio representado con color blanco, entonces se debe entrar a comparar esa espacio con los demás y verificar si al hacer girar la ruleta éste tiene la mayor posibilidad de salir. Así, en esta situación, se contempla que el estudiante emprende una tarea en la cual debe distinguir que se trabaja en un contexto continuo en dos dimensiones, donde abordan tres espacios con sucesos no equiprobables y un espacio más con sucesos equiprobables. De esta manera, se encuentra que el 63% de los estudiantes realiza el pronóstico del evento de manera acertada y además, evidencia un conocimiento en el cálculo de probabilidades. En sus argumentos se plasman las siguientes ideas: *“porque es probable que al girar la ruleta se gane el* *premio 1", "porque es más probable sacarlo, porque donde está el 1 es más grande"*. Estas apreciaciones revelan que los estudiantes han asimilado de manera pertinente un lenguaje que permite calcular la probabilidad de un evento.

f. Al cierre de la actividad de verificación, se confronta la información que emerge al abordar la situación *"la apuesta del dado".* Es preciso notar, que los datos obtenidos conllevan a indagar los saberes de los estudiantes en relación al tópico *juego equitativo.*

En consecuencia, en la situación que se implementó durante la actividad diagnóstica hay presentes aspectos que merecen la atención. Por ejemplo, el 27,27% de los estudiantes decide tomar números repetidos y descartar algunos de los valores que contiene el dado. Lo anterior, indica que la comprensión de la tarea no es la esperada o que hay valores en el dado que les produce confianza y por tanto creen que estos tienen mayor favorabilidad a la hora de apostar. Sin embargo, al revisar las ideas que tiene los estudiantes sobre si el juego es equitativo o no, éstos no hacen alusión a tal pregunta, sino que argumentan desde su propia percepción ideas como las siguientes: *"en este juego puedo ganar o perder", "no sé pero es la suerte"*. En consecuencia, es notorio que se quiere informar que la experiencia es aleatoria y que hay factores como la suerte que influyen a la hora de jugar y ganar.

De otro lado, están quienes han elegido equitativamente los números en el dispositivo aleatorio (dado). Esta elección, hace pensar que los estudiantes tienen claridad frente a la ocurrencia de los eventos y por ello, asumen que son sucesos equiprobables. Atendiendo a esta particularidad, en ésta tarea, el interés pasa por conocer si los participantes valoran el juego como equitativo o no. Por tanto, en los que sigue, se plasman algunas ideas que permiten constatarlo: *"este juego es favorable porque aprendemos", "el juego es favorable para mí", es favorable porque le da más plata"*. Acá, el término *favorable,* se entiende como el detonador que advierte no estar conformes y por tanto no contar con las mismas garantías a la hora de jugar. Es decir, a pesar que se reconoce la equiprobabilidad de los eventos, hay otro componente en este caso, el valor apostado que hace inequitativa la situación.

Para el caso de la situación recreada en la prueba de cierre, se encuentra que son varios los estudiantes que califican el juego como equitativo. Esta cantidad representa el 29,16% y en sus apreciaciones consideran las siguientes ideas: *"porque si es posible que caiga el 6", "porque este juego es de suerte", "porque es más fácil para Esteban que saque ese puntaje", "porque no tiene un número más grande".* Desde estas afirmaciones, se puede ver que los estudiantes califican el juego como equitativo pero en sus justificaciones lo que ocurre es que le otorgan a la situación, la propiedad de ser aleatoria. En consecuencia, no hay evidencia que denote una comparación de probabilidades entre los eventos asignados tanto a uno como el otro jugador y lo que si ocurre es que evalúan las posibilidades de Esteban, argumentando que éste puede ganar por el hecho de tener solo es número.

Entre quienes reconocen que la experiencia no es equitativa, es decir el 70,83% de los estudiantes, están los que comparan la probabilidad de lanzar un dado con respecto a los eventos favorables para cada jugador. Para este grupo de participantes, la decisión esta soportada en las siguientes ideas: *"porque son muchos números y nunca pierde"*, *"porque María escogió la mayoría de los números", "esteban solo tiene el 1".* De acá se evidencia, que su decisión se focaliza en resaltar lo no equitativo del juego porque la probabilidad favorece a uno de los jugadores. En cuanto a las razones de quienes consideran, que es el monto apostado el que convierte al juego en inequitativo se encuentras las siguientes afirmaciones: *"porque Esteban gana más que María", "porque si a uno le sale el 1 gana más", "porque si Esteban gana $2500 y María no".* Acá, hay una notable inclinación por solo contemplar los montos apostados sin apreciar la variable que determina la probabilidad de cada evento. Sin embargo, se cuenta con un argumento el cual conjuga las dos condiciones y lo plasma de la siguiente manera:

"porque ella gana $1000 si cae 2, 3, 4, 5, 6 y Esteban tiene que sacar 1 para que gane $2500". Este razonamiento, muestra que la noción de juego equitativo no solo está regulada por factores que pueden distraer al jugador, sino que también se debe evaluar la probabilidad de cada uno de los eventos, de lo cual se concluye que para *María* se alcanza una notable ventaja.

7.4.1 Sistematización y análisis del tipo de expresiones verbales. Los elementos lingüísticos que emergen al momento de dar una explicación o cuando se exige dar razones para sustentar una estrategia de solución a una situación inmersa en un contexto de incertidumbre, informan que las personas acuden a un amplio lenguaje verbal, el cual se nutre muchas veces de términos y palabras coloquiales u otras veces, de acuerdo a la experiencia del sujeto con la aleatoriedad y el azar de expresiones más especializadas. Así lo encontró Shuard y Rothery en su estudio y que fue resaltado por Vázquez y Alsina[160]. Los autores, plantean agrupar en tres grandes grupos tal gama de expresiones. Por tanto, presentan las siguientes categorías:

■ Palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano;

■ Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, y

■ Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

A continuación en la siguiente tabla se organizan las expresiones extractadas de las ideas presentadas por los estudiantes en cada uno de las experiencias de aprendizaje vivenciadas durante el desarrollo de la estrategia didactica. El propósito es, en primer lugar, hacer corresponder el concepto o la noción abordada en la

[160] VAZQUES Claudia, ALSINA Ángel. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0454.pdf

situación problema con el significado otorgado a la probabilidad. Posteriormente, aparecen los términos que se consideran pertenecen a cada tipo de categoría antes descripta.

Tabla 52. Expresiones verbales incluidas en las respuestas de los estudiantes.

CONCEPTO	EXPRESIÓNES VERBALES. CARACTERIZACIÓN	SIGNIFICADO A QUE SE ASOCIA
Determinista	Si tengo conclusión (*predicción*) porque si saque lo que dije / no tengo **cálculo** (pronostico), creí sacar un hombre y me saque una mujer.	Intuitivo
	Es muy divertido y bonito un evento seguro (lo asocia a la experiencia en el juego)	Subjetivo
	Es cuando digamos una pelea de toros tienen que verificar que los toros no se salten las gradas. (lo asocia con la idea de cuidar la integridad de las personas)	Intuitivo
	Un evento seguro, una moto o un carro con papeles (lo asocia con documentos y reglamentación)	subjetivo
	Cuando uno quiere ir para una fiesta y pues uno no está seguro de ir (lo asocia a indecisiones o duda frente a una acción) *Que uno está seguro es diciendo algo que haga* (lo asocia con la toma de decisiones)	
Aleatoriedad	Fallé en la conclusión (**predicción**) dije hombre y me salió mujer / pensaba que me cogía de diferentes, pero me salió mi propio género / aprendí que si le sale hombre que no es eso sino que es la suerte / algún día corre el día de suerte y puede ganar / si no gana o pierde / hay gente que gana y gente que pierde	Intuitivo, clásico y subjetivo.

	Estaba muy cerca del clip para que cayera / está muy cerca y el clip gira y no cae. *Es jugando con ficha es seguro / es que un evento seguro es un botón blanco* (lo asocia a objetos concretos)	Intuitivo y subjetivo
	Uno juega en algo y uno juega y se gana / Es cuando yo elijo el azul y me sale el azul / Porque puede caer ese color / porque puede salir.	Intuitivo, frecuencial y clásico.
Probabilidad	poquitas oportunidades de ganar / me salió muchas veces / cayo más cara	
	Ya cayó sello ahora cae cara / imaginamos que puede caer / nos sentimos seguros con este número / la moneda es más rápida y puede caer cara / si uno lo tira no sabe si cae cara o sello / cayo cara y sello / en todas las oportunidades le salió / de pronto sale negra / es posible que salga blanca o negra.	Clásico Intuitivo y subjetivo
Espacio muestral	El disco tiene más números /tiene menos números / hay más números, es más difícil / hay más cuadros y en el disco 2 puedo sacar 3 / donde están los 4 números son más pequeños los cuadros / es más difícil porque tiene 4 números y hay menos espacio	Intuitivo y clásico.
	hay más cantidad de blancas que de las negras	Intuitivo.
Sucesos y tipos	En este juego puedo ganar o perder / este juego es favorable / no sé pero es la suerte	
	Me equivoque, hice bien los **cálculos** pero sale mujer por ser más poquitas / es probable que hubiera salido mujer / es posible que me caiga mujer / yo tengo **cálculo** que salía hombre porque hay más hombre y menos mujeres, por	Intuitivo.

Experimento aleatorio	eso salió hombre / quería que me saliera mujer y hay 14 hombres y 11 mujeres. En la urna B hay más blancos / tiene 3 y la otra 2 / hay más blancos que en la A / hay más posibilidades en la caja B, 5 negras y 3 blancas / la caja B es más probable / en la urna A porque hay menos cantidad.	Intuitivo, clásico.
Esperanza matemática	si él le sigue echando hartas veces pues alguna vez le cae / si uno tira más veces uno puede ganar / porque ha salido hartas veces (balota blanca) entonces caerá de nuevo	

En la clasificación anterior es notoria la aparición de expresiones asociadas o tendientes al pensamiento determinista, las cuales se producen en particular cuando se abordó la situación que evalua la noción de suceso seguro. Igualmente, los términos que más aparecen en la tabla colindan o se identifican con el significado intuitivo y subjetivo de la probabilidad. Esta tendencia, es también acompañada por expresiones en la que se considera términos para clasificar los eventos y las situaciones como aleatorias aunque en menor proporción a las expuestas en la clasificacion anterior. En general, los estudiantes en la actividad de caracterización acuden a un razonamiento probabilísticos de carácter o significado propiamente intuitivo y claramente se identifica con el conocimiento cotidiano del mundo de la incertidumbre. De por cierto, estas expresiones que están en el acervo de los estudiantes no son sufientes para avanzar o actuar frente a situaciones donde se requiere de un saber o una cultura probabilística que permita evaluar o tomar decisiones de manera acertada.

Tabla 53. Expresiones verbales incluidas en las respuestas de los estudiantes.

CONCEPTO	EXPRESIÓNES VERBALES. PRUEBA DE CIERRE	SIGNIFICADO A QUE SE ASOCIA
Aleatoriedad	*Uno no sabe cuál va a caer* *Ocurre siempre / **Seguro** /* Si está ahí es seguro que salga *Tiene más opción / Escogió la mayoría* *Si se puede / Puede que sea / No se puede más / Es **más difícil***	Intuitivo Intuitivo, clásico
Probabilidad	La próxima vez si gana / Es al que gane / Tenía que ganar / No ha caído / no ha ganado / Al seguir jugando seguirá perdiendo / **Apuesta** y pierde /Gana o pierde /Gana menos que / gana más que Es la **suerte** que caiga / Es a la suerte /Es juego de suerte / Es mejor opinar eso	Intuitivo, clásico y subjetivo. Intuitivo y subjetivo
Experimento aleatorio	Toca hartas veces / Dar la veces que queramos/ Una de las dos tiene que caer/ No se puede sacar todos a la vez / Sacarlos todos y sin mirar / Muchos números y nunca pierde Hay más espacio / Hay mayor cantidad	Intuitivo, frecuencial y clásico. Clásico
Espacio muestral	Solo hay tres colores / Tiene menos números / Poder sacar todos / Hay bastante de todos.	Intuitivo y subjetivo
Esperanza matemática	Todas las veces él no va a perder / Alguna vez ganará / Piensa que ganará /Puede ganar si tiene **confianza** en ganar / Ha confiado y eso le ayuda / Siga intentando a jugar para que gane	Intuitivo y clásico. Intuitivo.
Sucesos y tipos	Más posibilidades de ganar / Hay **más probabilidad** / Si es **posible** sacar / Es más fácil que saque ese puntaje / Es **favorable** / Hay más **posibilidad** / Hay más / queda más Siempre cae / **Probablemente** caiga / Es probable que salga	Intuitivo. Intuitivo, clásico.

Equiprobabilidad	Más / **es probable** / Más /**muy posible** / **Casi probable** / **Igualmente probable** / **Poco posible** que caiga Están igual / Tiene más o menos posibilidad / Dan la misma posibilidad / Igual y justo / Todos están con igual cantidad / Todos son iguales	

En la clasificación de expresiones ligadas a la aleatoriedad obtenida del ejercico agotado en la prueba pedagógica de cierre, se reconoce que los estudiante han apropiado un lenguaje y unos elementos linguisticos con mejor nivel de sofisticación para evaluar un evento o situacion de carácter aleatorio. Se evidencia como se distancia o desmarcan de términos y expresiones que en la prueba diagnóstica se enfilaban mas en lo determinístico. Un numero considerable de estudiantes se alinean con ideas y justificaciones de tipo causal cuando estos realizan razonamiento en contextos de incertidumbre. No son tantos los que aplican criterios como la imprevisibilidad para identificar la aleatoriedad.

Tabla 54. Expresiones verbales incluidas en las respuestas de los estudiantes.

CATEGORIAS	ACTIVIDAD DE CARACTERIZACIÓN	PRUEBA DE CIERRE
Expresiones verbales específicas		
Expresiones verbales vinculadas		*Seguro, números, confianza, probabilidad.*
Expresiones verbales comunes	Cálculo, evento seguro, suerte, gana o pierde, estaba muy cerca, no cae, más rápida, no sabe si cae, oportunidades, de pronto, es posible, favorable, es probable, tiene más números, hay mas cuadros, hay menos espacio, hay	Apuesta, posible, suerte, favorable, posibilidad, más/es probable, más/muy posible, Casi probable, Probablemente, Igualmente probable, Poco posible, más fácil,

	mas que, posiblidades, mas probable, muchas veces, hay mas cantidad, ha salido hartas veces, caera de nuevo.	

Como ejercicio de síntesis, en la tabla anterior se consignan las expresiones que encuentran asiento en las categorías propuestas por Shuard y Rothery. Los autores expresan que las expresiones cotidianas de los individuos a la hora de interactuar y razonar con situaciones de incertiudmbre se moviliza o adapta a tres tipos de lenguajes. En nuestro caso, los estudiantes evidencian que antes de tener contacto con una experiencia de enseñanza la mayoría de sus términos y palabras para designar la probabilidad, estas obedecen a significados expresiones verbales comunes. Es decir, el significado otorgado a los eventos aleatorios muestran un nivel muy nocional e intuitivo tal que la mayoría de términos pueden clasificarse como iguales o próximos en ambos contextos.

En consonancia con el ejercicio comparativo de la tabla anterior, se observan que las expresiones ofrecidas por los estudiantes en la prueba pedagógica de cierre se clasifican en dos de las categorías propuestas por los autores. Esto permite entender que hubo un avance, de por cierto no tan significativo, en la construcción de los argumentos a la hora de evaluar una situacion en contxto aleatorio.

8. CONCLUSIONES

El ejercicio de caracterización puede asumirse como el primer acercamiento que tiene los estudiantes con situaciones de incertidumbre a nivel de la experiencia de aprendizaje en el aula. Esta realidad produjo en ellos cierta apatía y confusión, pero en general el ejercicio entrega información válida para configurar una idea sobre los presaberes de los estudiantes en cuanto al concepto de probabilidad simple. Es decir, arroja pistas sobre el proceso de razonamiento en los estudiantes ya sea para identificar la presencia de algunos sesgos y heurísticos o para conocer el significado asociado en la tarea de resolver problemas de carácter aleatorio, que en ultimas permite valorar los aprendizajes con que cuentan los estudiantes en relación a la alfabetización probabilística.

De acuerdo a lo anterior, se observa que los estudiantes cuando hacen predicciones o pronostican la posibilidad que tienen un evento de ocurrir, evidencian que sus respuestas y argumentos están afectados por un pensamiento con marcado énfasis determinista. Por ejemplo, cada vez que se hace una extracción en una experiencia aleatoria ocurre que expresan frases como: *perdí, gané, no tengo suerte, me falló el cálculo* o simplemente intentan sesgar el resultado mirando al interior del dispositivo para poder escoger el evento elegido a priori. En este sentido, las actuaciones de los estudiantes revelan que su razonamiento predominante no es el probabilístico y por ende a la hora de evaluar o tomar decisiones su pensamiento obedece a ciertos sesgos que han recibido refuerzo dado la frecuente exposición de los estudiantes durante su aprendizaje al trabajo con situaciones que implican un razonamiento con eventos no aleatorios.

Desde esta óptica, Fischbein, citado por Gómez[161] reconoce que la consolidación de la intuición primaria del azar en el estudiante implica que éste pueda diferenciar

[161] Gomez, Emilsen. Resis doctoral. P. 119

entre un fenómeno determinista de uno aleatorio. El autor precisa, que hay elementos a considerar y por lo tanto el factor edad condiciona la comprensión que el sujeto hace del azar. Es decir, inicialmente el estudiante interpretar el azar como equivalente a la falta de predictibilidad; más adelante, cuando ocurre la organización de la estructura conceptual del estudiante, entonces se comprenden las cadenas causales de las que emergen los eventos impredecibles e igualmente se logra construir la idea de irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Desde esa lógica, los estudiantes objeto de estudio aún conservan elementos que impiden un desarrollo óptimo de la intuición primaria del azar, y de acuerdo con Fischbein la causa obedece a que la enseñanza del componente aleatorio o del azar ha estado ausente del aprendizaje escolar.

Otro elemento que suscita análisis en la actividad diagnostica tiene que ver con el uso de expresiones pertinentes a la hora de tomar decisiones en contextos de incertidumbre. Una adecuada interpretación de la situación aleatoria implica que el alumno haga uso de un lenguaje preciso como elemento para predecir eventos. La importancia de enriquecer el vocabulario en el campo del azar es un paso básico para que el estudiante logre aproximarse al significado intuitivo de la probabilidad. Según Batanero[162], tal aproximación ocurre cuando se emplean naturalmente frases o expresiones coloquiales para referirse al azar, para “cuantificar” un evento fortuito o para expresar el grado de creencia en ellos. La producción natural de expresiones que posibilita la conexión entre las demandas de la situación problema y la respuesta inherente que emerge del pensamiento del sujeto anuncia un avance en lo que se considera la consolidación del significado intuitivo de la probabilidad.

A la hora de evaluar el uso del lenguaje próximo del estudiante para pronosticar el comportamiento de un evento aleatorio, revela que ante el deseo de emplear nuevas palabras para ilustrar un razonamiento se cae en la ambigüedad o en la distorsión

[162] Batanero, Carmen. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Matemáticas Educativa, numero 8 (3) 2005, p.247

del significado del mismo. Así se evidencia cuando se intenta emplear los términos *predicción y conclusión.* Por supuesto, que no todos los estudiantes concluyen en esta misma medida y por tanto emergen expresiones muy lindantes al lenguaje pertinente para sustentar un razonamiento acorde con la predicción.

Para Batanero[163] términos como *posible, previsible, presumible, factible o viable* hacen parte de las expresiones empleadas por los sujetos para dar solución a situaciones de incertidumbre. En lo que concierne a las expresiones utilizadas por los estudiantes aparecen palabras como *sacar más, probable, posibilidad y posible*, las cuales se interpretan como evidencia favorable cuando se trata de cuantificar los eventos inciertos, es también una señal que informa sobre el trabajo a realizar desde la enseñanza para buscar ampliar el léxico requerido en relación a contar una mayor conocimiento en el significado intuitivo y en la alfabetización probabilística.

Un aspecto que también se revela a partir del análisis de la información generada en el diagnóstico es la presencia de sesgos o atajos en el razonamiento del alumno cuando se trata de buscar una respuesta al problema planteado

En el desarrollo de este estudio se plantea hacer un ejercicio de reflexión y evaluación de algunos factores que inciden en el razonamiento de los estudiantes a la hora de consolidar el aprendizaje del concepto de probabilidad. Por ello, la observación se ha centrado en conocer lo que ocurre cuando los estudiantes participan en juegos aleatorios o cuando dan solución a situaciones de incertidumbre. En primer lugar, se ha encontrado que los estudiantes ponen en escena un tipo de pensamiento que ha sido concebido desde un punto de vista determinista y por tal motivo, la toma de decisiones en tales escenarios está condicionada a la aparición de sesgos o errores en el razonamiento de los mismos. Cabe señalar, que la experiencia del estudiante en términos de resolver problemas

[163] Ibit, batanero p. 247

ha estado muy condicionada por situaciones de carácter determinista. Eso se evidencia, cuando en el ámbito escolar las tareas que se proponen tienden a simplificar el trabajo a sucesos que abordan relaciones de causa efecto y por lo regular si las condiciones implican repetir el fenómeno se tiene como predecir el resultado con total seguridad.

La interpretación determinista fue muy notable cuando los estudiantes abordaron las situaciones propuestas en la actividad de caracterización. Sin embargo, una vez los estudiantes hacen uso de sus ideas intuitivas para intentar resolver la experiencia aleatoria, entonces empieza a emerger en su léxico algunos términos muy ligados a la argumentación casual pero que evidencian un reconocimiento de la imprevisibilidad del fenómeno. Tal progreso o asomo de los primeros términos que conectan fácilmente con el lenguaje probabilístico se asume que es gracias al proceso colectivo entre intercambio de ideas con los compañeros como también al efecto que suscita la mediación de la enseñanza para movilizar los aprendizajes. En este sentido, Fischbein y Gazit citados por Vásquez[164], destacan la instrucción como el efecto positivo que permite el desarrollo de las intuiciones primarias y concepciones probabilísticas de los estudiantes, también enfatizan en la importancia de alcanzar ese avance para que gradualmente se llegue a tener una comprensión adecuada de la probabilidad la cierre de la etapa escolar.

Por ejemplo, se encuentra que los estudiantes acompañan sus expresiones cotidianas y causales con términos pertinentes para hacer una predicción o para pronosticar un suceso incierto. En este caso palabras como (…*uno está seguro, puede salir, uno puede sacar más, es más posible, cuando hay más la posibilidad es que salen más, para mí era probable,…)* señalan que los estudiantes ha empezado a incluir a su vocabulario términos más cercanos al leguaje probabilístico que permite ejercer una toma de decisiones y una solución al problema de manera

[164] Op.it, Vásquez. P. 457

más acertada. Es decir, el proceso intencionado que ocurre en la enseñanza cuando se trabaja en la resolución de problemas de incertidumbre, valida un escenario acertado a la hora de elaborar un conocimiento alineado con el razonamiento probabilístico.

9. RECOMENDACIONES

Al finalizar el proceso de investigación se plantean las siguientes recomendaciones:

- La construcción o elaboración del conocimiento que se da a partir de la experiencia de aprendizaje en la sujeto, implica un sin número de retos para los diferentes actores ligados a este proceso. En el caso del docente, éste está llamado a descubrir una gama de realidades por las que discurren los estudiantes cuando abordan su proceso de aprendizaje. Pero, desde la otra orilla, cuando se trata de aprender, es importante que el estudiante comprenda que es necesario deponer los prejuicios, las posturas y actitudes desfavorables hacia la experiencia de conocer y que afectan directamente los dispositivos básicos del aprendizaje (atención, memoria, motivación) los cuales están regulados por el cerebro y que sin ellos es difícil dotar de significado la actividad académica o en general tener éxito al momento de consolidar la aprehensión de un concepto estudiado.

Según lo anterior, en la experiencia de aula fue evidente que los estudiantes, objeto de estudio presentan dificultad para asumir una postura que les permita aprender con eficacia. Por ejemplo, se encuentra que los participantes en esta investigación reclaman acciones como estar escribiendo en el cuaderno permanentemente (trascribir de un libro de texto), ya que reconocen tal actividad como una rutina en el aula y por ende la asumen como la principal tarea que debe cumplir en la escuela. También ocurrió que la distracción está a la orden del día. Es decir, un comentario descontextualizado de un compañero, una agresión verbal o física que se transforma en una queja y en una discusión, son situaciones que el maestro debe sortear para evitar “hacer corto” en la secuencia de clase propuesta.

Por consiguiente, cuando se presenta la propuesta de enseñanza, que se plantea en ésta investigación, la cual enfatiza en aspectos como: la indagación del maestro hacia el estudiante, prioriza que el estudiante explique su idea para sustentar las respuesta dadas o conduce al estudiante para que comprenda una situación de aprendizaje y proponga estrategia de solución; entonces ocurre que se presenta una disparidad que conlleva a tener un conflicto cognitivo para lograr acomodarse a la nueva forma de asumir el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Desde esta lógica, la recomendación para el docente de aula es posibilitar durante la práctica de aula otras tareas y actividades que permitan movilizar las concepciones que los estudiantes tienen de aprender. Por ejemplo, es importante asumir la construcción del pensamiento matemático en el sujeto, desde la resolución de problemas, desde la actividad básica del sujeto, como cuando éste se pregunta o se cuestiona por lo que observa o lo que le sucede a su alrededor. Así, la indagación al estudiante para que este ejemplifique, explique y siendo optimistas argumente o justifique son acciones que se recomiendan para adelantar un proceso de enseñanza y de aprendizaje efectivo y significativo.

● La otra cara de la moneda, en este caso el rol del docente y como tal, su ejercicio de enseñar, también merecen ser analizados y por ende obliga a que se reflexione con el propósito de mejorar. Al respecto, se encuentra que es deficiente y escaso el conocimiento del docente frente a la didáctica de las matemáticas, al igual que es menos conocido por los docentes la literatura que proviene de los estudios hechos a partir del razonamiento probabilístico en el estudiante. Ya que esa, no es la única causa por la que los docentes en su planeación obvian o relegan a un último plano la enseñanza de lo aleatorio, pues hay otros motivos; lo que realmente es necesario, pasa por equiparar o entender que en el mundo real hay tantos fenómenos aleatorios como deterministas. Por tanto, la recomendación es a abordar situaciones que permitan a los estudiantes conocer esa otra arista del conocimiento matemático y del mundo físico e indudablemente que esa decisión debe pasar primero por profundizar en la didáctica propia del objeto matemático ya que es innegable que existe mucha tela que cortar y para lo cual los docentes aun necesitamos formarnos y aprender.

- Evaluar el conocimiento del docente frente al razonamiento probabilístico y frente a la didáctica pertinente para la enseñanza del objeto de estudio.

BIBLIOGRAFÍA

ACOSTA. Martin, MONROY. B. Lilian y RUEDA. G. Karol, Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista Integración. Universidad Industrial de Santander. 2010. Vol. 28. N° 2. p. 5. Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol28N2/V28N2-6Acosta.pdf

ALSINA, Ángel. VASQUEZ, Claudia. La probabilidad en educación primaria: de lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 2016, núm. 71, p. 47. Disponible en: https://dugidoc.udg.edu/bitstream/handle/10256/12167/LaProbabilidadEduPrimaria.pdf?sequence=1&isAllowed=y*

AYALA – GARCIA, Jhorland. Evaluación externa y calidad de la educación en Colombia. Documentos de trabajo sobre economía regional. Banco de la república. Disponible en: http://www.banrep.gov.co/es/dtser-217

BATANERO. Carmen, Didáctica de la Estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada. 2001. p. 66. Disponible en: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf

BATANERO, Carmen. Significados de la probabilidad en la educación secundaria: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 2005. P. 253 Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302

BATANERO Carmen; SERRANO Luis. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. 1995. p. 1. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Carmen_Batanero/publication/255762931_Aleatoriedad_sus_significados_e_implicaciones_educativas/links/00b49520a576048675000000.pdf

Bernal, R. "Diseño de una unidad didáctica lúdica para mejorar la habilidad de pensamiento aleatorio y probabilístico". Trabajo de grado para optar el título: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Manizales. Universidad Nacional de Colombia, 2016. 111 p.

CARREÑO BELTRAN, Jorge Iván. Las situaciones didácticas aplicadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en el aprendizaje de estudiantes de noveno grado de una Institución oficial de Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander, 2016. Tesis: obtener título de maestría. Publicada. P.237

CHAMORRO, María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas para Primaria, Pearson Educación, Madrid, 2003. p. 338

DEL PINO, Guido y ESTRELLA, Soledad. Educación Estadística: relaciones con la matemática. En: Revista de Investigación Educación Latinoamericana. Enero, 2012. Vol. 49, no. 1, p. 57. Disponible en: https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=http://pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/483/public/483-2227-1-PB.pdf

DIAZ, Carmen. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. Universidad de Ganada. p. 2. Disponible en: http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/docs/Papers_IX_Seminario/apresentacao%20poster/P005_IASICarmenDiaz.pdf

DIAZ GODINO, Juan. Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Proyecto Edumat - Maestros. Universidad de Granada. Granada. 2004. P .433. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

DIAZ, Juan y BATANERO, Carmen. Análisis de datos y su didáctica. Universidad de Granada. 2001. p.13. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Apuntes.pdf

GASCON. Josep, La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática. 2013. No. 3, p. 3. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/2070/1/AIEM_n%C2%BA_3._J._Gasc%C3%B3n.pdf

GÓMEZ, Emilse; GARCÍA, José Miguel Contreras. Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, 2014, vol. 31, no 87, p. 3. Disponible en: http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/%5Bfield_volumen-formatted%5D/epsilon87_2.pdf

ICFES. Informe, Colombia en PISA 2012. Disponible en: Disponible en: http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/2304/2/BeltranCastroArietaCecilia2015.JPG.pdf

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Informe Nacional: SABER 3°, 5° y 9° Resultados nacionales 2009 – 2014. 2016 p. 78. Disponible en: http://www.icfes.gov.co/en/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3579/guias-de-aplicacion-de-saber-3-5-y-9/informes-saber-3-5-y-9/2323-resultados-nacionales-saber-3o-5o-y-9o-2009-2014/file?force-download=1

ICFES, Informe de resultados por departamento. 2016. p. 1. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEntidadTerritorial.jspx

ICFES. Saber 3°, 5° y 9°. Resultados Censales. 2016. p. 1. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jspx

ICFES. Matriz de referencia Matemáticas. 2016. p. 5. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jspx

Gómez, Emilse. "Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesares de educación primaria". Trabajo de grado para optar el título: Doctor en ciencias de la educación. Granada. Universidad de Granada, 2014. 355 p. Disponible en:
http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/34020/23535301.pdf?sequence=1&isAllowed=y

JIMÉNEZ VARGAS. Josué. "Diseño y Planificación de la noción de Azar y Probabilidad en Educación Primaria". Tesis en educación primaria. Cádiz. Universidad de Cádiz. 2014. 64 p. Disponible en:
http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/16628/Disen%CC%83o%20y%20Planificacio%CC%81n%20de%20la%20nocio%CC%81n%20de%20Azar%20y%20Probabilidad%20en%20Educacio%CC%81n%20Primaria%20%28TFG%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MARTINEZ AVENDAÑO, Maira Alejandra. Intervención didáctica enfocada en el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de sexto grado en la comprensión de graficas estadísticas. Tesis, Maestría. Universidad Industrial de Santander. 2016. P. 188

Ministerio de Educación Nacional. Acciones y lecciones educativas. Revolución Educativa 2002 – 2010. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-241342.html

Ministerio de Educación Nacional. Informe nacional de resultados SABER 3°,5° y 9° 2016. p. 9. Disponible en: http://www.icfes.gov.co/en/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3579/guias-de-aplicacion-de-saber-3-5-y-9/informes-saber-3-5-y-9/3811-informe-nacional-de-resultados-saber-3-5-y-9-2009-2012-y-2016/file?force-download=1

Ministerio de Educación Nacional. Siempre Día E. Informe por colegio, pruebas Saber 3°, 5° y 9°. MEN. 2016. p. 25 Disponible en:

https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/268101000136.pdf

Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Primera Edición. Creamos alternativas Soc. Ltda., 1998. 54 p. ISBN: 958-691-067-9

Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. Primera edición. Ed. MEN, 2006. p. 82. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MORENO, Antonio; VALLESILOS, Angustias. La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria. *Departamento de la Universidad de Granada, p. 3. Disponible en: http://edumat.uab.cat/contexto/postgrau/activitats/tutormates/5ad/webs/ajudes/jornadas%20europeas%20de%20estadistica2001.pdf*

Pinzón, D. "Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles. Un estudio exploratorio en semilleros de investigación escolar en la educación media. Tesis de maestría en educación. Medellín. Universidad de Antioquia, 2015. 211 p. Disponible en: http://200.24.17.68:8080/jspui/bitstream/123456789/2114/1/JC0220_Diegofernandopinz%C3%B3n.pdf

RUIZ REYES, Karen. Análisis de recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Trabajo de grado para optar el título: Magister en Didáctica de la Matemáticas, Granada. Universidad de Granada, 2013. 98 p. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/karen.pdf

SERRADO, Ana. CARDEÑOSO, José Mª. AZCARATE, Pilar. Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. p. 9. Disponible en:
https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf

SERRANO, Luis, et al. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 1998, vol. 10, no 1, p. 2 Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/1/03Serrano.pdf

VAZQUES, Carmelo. Limitaciones y sesgos en el procesamiento de la información: más allá de la teoría del "hombre como científico". Northwestern University. Evanston, Illinois. 1985. p. 7. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/65944.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Instrumento Diagnóstico.

Experimento 1. (Parejas)

Agrupados en parejas los estudiantes toman una moneda y cada uno de ellos la lanza cinco veces. Mientras tanto el compañero registra los resultados obtenidos, por su par en el cuadro correspondiente:

LANZAMIENTOS	1	2	3	4	5	…
Estudiante _________						¿?
Estudiante _________						¿?

Finalizada la experiencia responden y argumentan en relación a los siguientes cuestionamientos:

Con base en los resultados que cada estudiante obtuvo en el experimento (ver tabla), y ante el caso de lanzar nuevamente la moneda, ¿cuál sería el posible resultado?
¿Por qué razón considera que puede salir ese resultado?

Experimento 2. (Parejas)

En esta experiencia los estudiantes agrupados en parejas reciben dos copias de boletos en los que se ofrece un número para participar en la rifa de un televisor. A continuación el docente explica que los boletos recibidos corresponden a un sorteo que consta de mil números, que van desde el número 000, luego el 001 y termina con el número 999, y que en este caso quedan solamente estos dos boletos para que los compren.

La pareja de estudiantes va a recibir dos boletos, uno con el número consecutivo (123) y el otro presenta sus dígitos alternados (371). Una vez se repartan los boletos los estudiantes deben explicar la razón por la cual prefieren comprar uno de los dos números y justificar porque el otro no lo comprarían.

Razones por las cuales compraría el número:
Justificar porque no compraría el número:

Experimento 3. (Grupal)

Para este experimento inicialmente se hace el conteo de alumnas y estudiantes presentes en la clase. Luego se explica que se va a realizar el juego de “amigo secreto”. Por lo tanto cada niño y niña escribe en un papel su nombre completo y después lo deposita en un recipiente (bolsa oscura).

De estudiantes hombres: _______ # de estudiantes mujeres: ______

A continuación cada estudiante, teniendo en cuenta el número de hombres y de mujeres presentes en el aula escribe el posible resultado (hombre o mujer) que saldría al sacar un papel del recipiente.

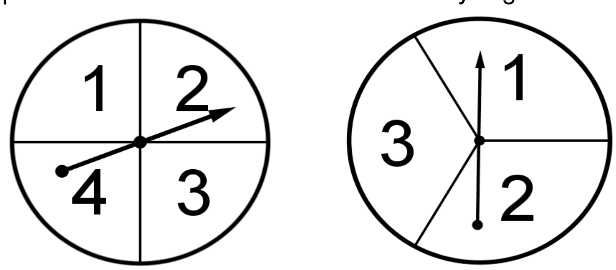
Lo que cree que saldrá	Lo que salió

Una vez escrito en el cuadro correspondiente su predicción, pasan los estudiantes por turno y escogen al azar un papel de la bolsa, lo abren, miran el nombre escrito y completan la tabla de acuerdo a lo encontrado. El papel se devuelve a la bolsa una vez cada alumno conoce lo que salió para que el siguiente estudiante realice la extracción y así ocurre hasta que todos tengan la oportunidad de participar.

Finalmente cada estudiante argumenta de acuerdo a su resultado la razón de su acierto o desacierto.

Experimento 4. (Parejas)

En este experimento los estudiantes agrupados en parejas reciben físicamente dos discos (ruletas) para que analicen en cuál de estos dos mecanismos de juego aleatorio es más fácil que al girar la aguja señale el 3. Una vez esté tomada la decisión los estudiantes la registran en el espacio correspondiente de la tabla y posterior a ello el docente entrega un clip para que realicen tres lanzamientos, que también serán registrados en el cuadro. Finalmente los dos estudiantes plasman la conclusión de la actividad y argumentan su respuesta.



<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Disco 1</th><th colspan="3">Disco 2</th><th>Momentos</th></tr>
<tr><td>Marca con una (X) el disco que consideran es más fácil para obtener un (3)</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td>Observación y análisis.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registra los resultados de los (3) lanzamientos</td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>l_3</td><td>l_1</td><td>l_2</td><td>l_3</td><td rowspan="2">experimentación</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Conclusión: (se registra en cuál de los dos discos es más fácil obtener un (3) y por qué razones eligieron esa ruleta?)

Experimento 5. (grupal)

Los estudiantes en este experimento visualizan una caja que contiene 5 botones rojos, 4 botones verdes y 3 botones azules. Luego se permite que tres estudiantes de la clase pasen y extraigan de la caja un botón respectivamente sin devolverlo a esta. Los tres resultados de la extracción se registran en la tabla.

R_1	R_2	R_3

La composición de la caja se normaliza y se agrega un nuevo color, en este caso un botón blanco. Ahora los estudiantes deben imaginar cuántos botones deben extraer para estar *seguros* que se ha sacado un botón de cada color (rojo – azul – verde – blanco). Para ello deben llenar la siguiente tabla haciendo predicciones de los posibles resultados (color de botones) que van a encontrar en la tarea propuesta.

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}

Finalmente se construye a manera de conclusión la idea que los estudiantes tienen sobre el significado de evento seguro

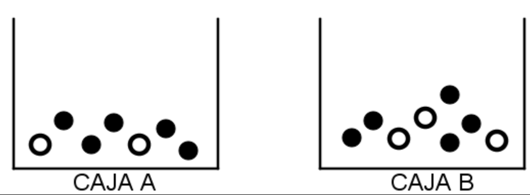
Experimento 6. (parejas)

Para el desarrollo de esta situación se plantea iniciar con un conversatorio sobre los juegos de azar como son el chance, la lotería y el baloto. Si el docente considera necesario explica la estructura y mecánica de estos juegos. A partir de esta orientación se pide que tres estudiantes narren lo que conocen de las personas que apuestan a menudo. Es decir, que intenten relacionar la periodicidad en que juegan las personas y las veces que han acertado y por tanto ganado el premio.

A continuación el docente pide a los estudiantes que atiendan a la siguiente historia. “Pedro Julio es un jugador acérrimo y gasta mucho dinero en los juegos como la lotería, el viernes anterior hablando con un amigo le contó que llevaba jugando el numero 9341 durante los dos últimos meses y por ahora no agarraba ni una cifra de ese número. Pero pedro julio dice que seguirá jugando ese mismo número pues como la lotería es un juego de suerte, donde a veces se gana y a veces se pierde, entonces como ha apostado muchas veces ese número y hasta ahora no ha caído, entonces cada vez está más seguro que la próxima vez ganará. Seguidamente el docente les pide a los estudiantes que den su opinión de lo que piensa Pedro Julio.

Experimento 7 (grupal/individual)

En cuanto al desarrollo de este experimento se plantea, en primer lugar presentar a toda la clase dos cajas que contienen pimpones de dos colores (negras y blancas). Para conocer la cantidad de balotas en las urnas,



el docente pide que los estudiantes pasen uno a uno a extraer los pimpones hasta sacarlas todas. Luego de que los estudiantes conozcan esa información pasaran a dibujar en las cajas, presentes en la guía de trabajo la cantidad de pimpones correspondiente. La composición de las cajas quedará de la siguiente manera.

Seguidamente los estudiantes guiándose por el ejercicio de extracción de balotas y por la composición de las cajas A y B. hacen predicciones y responden ¿Qué caja da la mayor posibilidad de extraer una balota de color negro?
Realizando desde luego la explicación de por qué razones eligen esa caja.

O si también argumentando la posibilidad que en las dos cajas se tiene igual probabilidad de sacar una balota de color negro.

Experimento 8 (grupal/individual)

Contrario al último experimento, en esta situación a los estudiantes se les señala un empaque (bolsa oscura) que contiene cierta cantidad de balotas blancas y de balotas negras. Además, se les informa que en un experimento anterior, un alumno extrajo una balota, anotó el color y la devolvió a la caja, mezcló bien las balotas y nuevamente se dispuso a sacar más balotas. Así lo hizo por cuatro veces en total y siempre obtenía una balota de color negro.

A continuación el docente les comunica a los estudiantes que en esa lógica quien está realizando el experimento se dispone a sacar por quinta vez una balota. Y que antes de que se conozca el color que saldrá se invita a los estudiantes para que hagan predicciones y expliquen qué color de los dos (blanco y negro) tendrá mayor probabilidad de salir en este intento.

Para lo cual completaran en la siguiente tabla los resultados obtenidos y el que probablemente tiene más posibilidad de salir.

<table>
<tr><td>Numero de extracciones</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Resultados (color de balota)</td><td>negro</td><td>negro</td><td>negro</td><td>negro</td><td>¿?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Explicación de por qué considera que ese color es el que tiene más posibilidad de salir.</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Anexo 2. Unidad didáctica

<table>
<tr><td colspan="4">UNIDAD DIDACTICA: AZAR Y PROBABILIDAD

DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA:

La presente unidad didáctica busca hacer un aprovechamiento pertinente de las situaciones próximas al alumno y para ello este instrumento se ha enmarcado en una práctica cotidiana de los estudiantes como es el cultivo del cacao. En tal sentido, se ha titulado a esta así: “EL CULTIVO DE CACAO: Una oportunidad para la enseñanza de la probabilidad”. A partir de esta propuesta se busca introducir a los estudiantes en una colección de situaciones de aprendizaje que permitan familiarizarlos con el lenguaje probabilístico, conocer los grados de posibilidad de un evento y experimentar para llegar a la cuantificación de la incerteza. Por lo anterior, cada actividad planeada durante la enseñanza busca elaborar aprendizajes donde el estudiante interprete una información, implemente una estrategia y verifique la efectividad para resolver afectivamente el problema planteado.</td></tr>
<tr><td>AREA</td><td>GRADO</td><td>MODALIDAD</td><td>ESTRATEGIA DIDÁCTICA</td></tr>
<tr><td>Matemáticas</td><td>4° y 5°</td><td>Multigrado</td><td>Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)</td></tr>
<tr><td colspan="4">UNIDAD DIDÁCTICA: EL CULTIVO DE CACAO: Una oportunidad para la enseñanza de la probabilidad.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estándares Básicos de Competencias:</td></tr>
<tr><td colspan="4">1° a 3° (PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS)

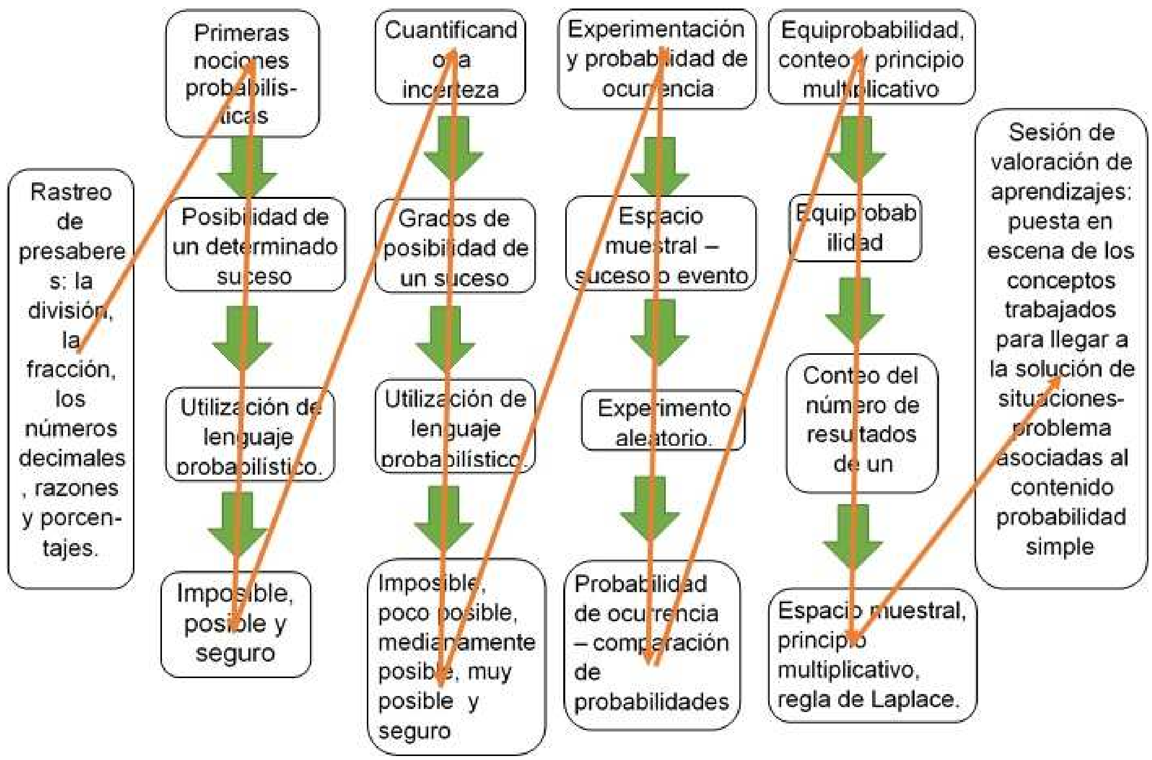
• Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
• Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.

4° a 5° (PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS)

• Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
• Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje: (<u>Matriz de Referencia</u>)</td><td colspan="2">Evidencia de Aprendizaje: (<u>cuatro – matriz de referencia</u>)</td><td>Competencia:</td></tr>
<tr><td>Establecer, mediante combinaciones o permutaciones sencillas, el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio.</td><td colspan="2">• Reconocer en contextos cotidianos (juego, deportes, compras, etc.) el número total de combinaciones o permutaciones en problemas sencillos.

• Listar combinaciones o permutaciones que cumplan con condiciones dadas en un contexto aleatorio.</td><td>Razonamiento</td></tr>
</table>

Conjeturar y argumentar acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	• Discutir la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos relacionados con experiencias cotidianas. • Interpretar la posibilidad de ocurrencia de un evento a partir de un análisis de frecuencias.	
Desempeños:	**CONTENIDOS: (Ejes temáticos)**	**Derechos Básicos de Aprendizaje**
Conocer y utilizar el vocabulario que permite distinguir y describir sencillos fenómenos aleatorios. Conocer y utilizar algunos métodos elementales del cálculo probabilístico, como la regla de Laplace y la asignación experimental de probabilidades, a partir de las frecuencias relativas de un suceso aleatorio. Analizar e interpretar informaciones y resolver situaciones problemáticas sencillas que puedan surgir en la vida cotidiana o en los medios de comunicación y que estén relacionados con situaciones propias del azar y del cálculo de probabilidades.	**Primeras nociones probabilísticas:** - Posibilidad de un determinado suceso. - Utilización de lenguaje probabilístico (Imposible, posible y seguro) **Cuantificando la incerteza.** - Grados de posibilidad de un suceso. - Utilización de lenguaje probabilístico (Imposible, poco posible, medianamente posible, muy posible y seguro) **Experimentación y probabilidad de ocurrencia.** - Espacio muestral – suceso o evento. - Experimento aleatorio. - Probabilidad de ocurrencia – comparación de probabilidades. **Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo.** - Equiprobabilidad. - Conteo del número de resultados de un suceso. - Espacio muestral, principio multiplicativo, regla de Laplace.	**3°** Plantea y resuelve preguntas sobre la posibilidad de ocurrencia de situaciones aleatorias cotidianas y cuantifica la posibilidad de ocurrencia de eventos simples en una escala cualitativa (mayor, menor e igual). **4°** Comprende y explica, usando vocabulario adecuado, la diferencia entre una situación aleatoria y una determinística y predice, en una situación de la vida cotidiana, la presencia o no del azar. **5°** Predice la posibilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los elementos del evento definido.
SECUENCIACIÓN: (UNIDADES DE APRENDIZAJE)		



Plan de Actividades: (Tiempo – objetivos específicos de la propuesta y/o variables a analizar, evidencia de aprendizaje, inicio, desarrollo y cierre) por cuadros

Microsecuencia 1: Rastreo de saberes previos.

Microsecuencia 2: Primeras nociones probabilísticas.

Objetivo: Acercar a los estudiantes a la noción de probabilidad e identificar la posibilidad e imposibilidad de eventos en un experimento aleatorio.	**Desempeño.** Cuando un estudiante ha logrado los aprendizajes propuestos, realiza actividades como las siguientes**:** Hace predicciones sobre la ocurrencia de un evento o situaciones cotidianas en contextos de incerteza, a partir de la información con que cuenta.

Momento de inicio:

El docente presenta a los estudiantes una situación a-didáctica que se desprende del problema inicial propuesta en la clase anterior y se busca que el abordaje, análisis y comprensión de esta se realice de manera individual.

Situación a-didáctica:

Erick, el hermano menor se encuentra con dos de sus obreros en un cultivo de cacao donde se les ha permitido recoger mazorcas maduras para seleccionar sus mejores semillas. Cada uno ha *elegido un color de mazorca a recolectar y luego de dos horas de búsqueda regresan al punto de encuentro. El obrero de mayor edad aporta 16 mazorcas amarillas, Erick trae 24 mazorcas rojas y el obrero más joven consigue 8 mazorcas verdes. Erick reconoce que no necesita toda esta semilla y propone seleccionarla construyendo discos, que hagan las veces de ruletas de manera que al hacerla girar les permita estar* ***seguros*** *de elegir varias de las mazorcas maduras recolectadas (color amarillo o rojo) y a su vez que sea* ***imposible*** *elegir una mazorca verde. También quiere que se construya un disco de manera que al girarlo sea* ***posible*** *elegir más mazorcas rojas que amarillas y a su vez que sea imposible elegir una mazorca verde.*

Actividad 1. (situación acción) Cada estudiante se acerca a la solución de la situación proponiendo sus propias estrategias e igualmente verificando si sus modelos de disco cumplen con las condiciones dadas en la situación de aprendizaje. Para ello cuenta inicialmente con papel, lápiz, colores e instrumentos geométricos para construir sus propios discos.

En esta experiencia se busca reconocer la existencia de dos tipos de situaciones donde los resultados se contraponen. Es decir, resultados de tipo determinista (evento seguro e imposible) dado que un disco al hacerlo girar se conoce con anterioridad que tipo de mazorca de cacao va a elegirse. También se trabajan experiencias aleatorias donde no es posible determinar un resultado dado. Por ejemplo, se espera construir un disco que antes de girarlo no se conozca con certeza qué tipo de mazorca nos va a salir.

De otro lado se espera que los aprendices identifiquen conceptos asociados al experimento aleatorio. Es decir, que comprendan que un evento aleatorio se da cuando no sabemos con seguridad si el evento ocurrirá o no.

Momento de desarrollo:

Actividad 2: (situación formulación) Ahora el docente pide que los estudiantes hagan agrupaciones de cuatro integrantes y como producto de la interacción y experiencia con la situación propuesta intercambien ideas y socialicen la estrategia que mejor se adapta a la posible solución del problema. Una vez se hayan intercambiado los mensajes entre los estudiantes, estos definen una estrategia de solución común que permita dar respuesta satisfactoria al problema planteado.

La mediación del docente está orientada a realizar preguntas del siguiente tipo:

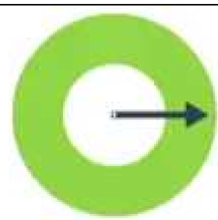
Dadas las sesiones en que está dividido el disco ¿Cuáles son los resultados posibles?
¿Es posible que la flecha giratoria no caiga en todos los colores durante el experimento?
¿Cuál es la posibilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos?
¿Qué mazorca tiene más posibilidades de salir?

Actividad 3: (situación de validación) En este apartado el grupo de estudiantes, someten a consideración de los demás las afirmaciones propuestas, es decir explican a los compañeros su estrategia de solución y entregan evidencia de como ella es suficiente para dar respuesta al problema. Se espera que los estudiantes oyentes estén en la capacidad de "sancionarlas", es decir, de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas u oponer otras aserciones. E igualmente se tiene la esperanza que los estudiantes exponentes estén en la capacidad de argumentar y sustentar sus procedimientos y resultados.

Momento de cierre:

Llegado a este punto de la clase el docente retoma lo efectuado por los estudiantes hasta el momento y de acuerdo a las inquietudes que surgieron en ellos durante la actividad, el maestro formaliza, aporta observaciones y clarifica los conceptos trabajados. El momento de <u>institucionalización</u> del saber se concreta de la siguiente manera:

Actividad 4:

<table>
<tr><td>Presenta a los estudiantes el siguiente disco:</td><td>
DISCO 1</td><td>Luego pide a los estudiantes que estén atentos al color que apunta la fecha y se aporta igualmente las posibilidades de la escala de probabilidad.</td><td>Enseguida se hace girar la ruleta y preguntamos ¿qué tan posible es que al girar la ruleta la flecha apunte a un color azul?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mientras se espera que respondan se señala hacia la escala de probabilidad para que identifiquen la posible respuesta.</td><td colspan="2">De acuerdo a las múltiples respuestas que proceso de comprensión con ejemplos de siguiente: Toda la región del disco es azul?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Si una respuesta dada es imposible, indagamos por qué dices eso? Se busca verificar si su adecuado y así corroborar que llega a la respuesta con argumentos no válidos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">El paso que sigue es construir el registro de la actividad. Se inicia con la representación verbal tenemos un color posible y que no hay la posibilidad que caiga otro color. Es decir, la posibilida imposible).
De igual forma se pasa a la representación de razón, numero decimal y porcentaje. También se ap el evento seguro. Así se evidencia en la siguiente tabla.</td></tr>
</table>

Evento	Tipo de evento	representación			
		Verbal	Razón	Decimal	Porcentaje
Caer en color azul	imposible	0 de 1	0/1	0.0	0%
Caer en color verde	seguro	1 de 1	1/1	1.0	100%

Microsecuencia 3: Cuantificando la incerteza. Un primer paso: los grados de posibilidad

Microsecuencia 4: Experimentación y probabilidad de ocurrencia

Microsecuencia 5: Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo.

Objetivo de aprendizaje:	Desempeño:
El estudiante reconoce las combinaciones como una técnica de conteo agrupando elementos de un conjunto de datos. El estudiante realiza agrupaciones teniendo como referencia dos conjuntos de datos. El estudiante identifica la multiplicación como una operación inmersa en situaciones aleatorias de conteo.	Hace una lista de todos los resultados posibles de un experimento utilizando el diagrama de árbol como herramienta para clasificar y contar. Multiplica la cantidad de posibilidades de los sub-eventos para encontrar el total de posibilidades. Reconoce que los resultados posibles en un experimento componen el espacio muestral y lo toma como base para aplicar la regla de Laplace. Resuelve problemas que involucran el cálculo de probabilidades, aplicando el principio de la multiplicación de probabilidades.

Momento de inicio.

Se espera que el estudiante encuentre las posibilidades de un evento compuesto, a partir de situaciones dadas, utilizando el conteo de cada una de las posibilidades que se presentan en las diferentes situaciones y que utilice el principio de multiplicación para encontrar el total de posibilidades.

Situación a-didáctica:

"Hacer un control efectivo de las enfermedades asociadas al cultivo de cacao es una tarea compleja pues para ello se requiere de llevar a cada planta un seguimiento y mantenimiento sistemático, y mucho casos aplicar insumos agrícolas para minimizar los efectos que causan tales enfermedades". Así inició una charla a la que asistieron Erick y Gustavo con la idea de aprender técnicas para el manejo y tratamiento de los males que sufre éste cultivo. Pero lo que más llamo la atención de Erick y Gustavo, es la información que recibieron sobre la relación que hay entre la temperatura y el padecimiento de enfermedades del cacao. En tal sentido, el técnico de la federación de cacaoteros del municipio para alcanzar un mayor aprendizaje les plantea la siguiente situación: Si decidimos sembrar uno de los siguientes cultivos alternos para que generen sombra: plátano, aguacate y cedro y conocemos que las posibles enfermedades que atacan al cacao son: La Moniliasis, La mazorca negra, Mal del machete, Antracnosis y Las bubas (escoba de bruja)). Entonces en un cultivo de cacao podría contarse con qué tipo de árbol para sombra y estarse padeciendo qué tipo de enfermedad? Para hacer vivencial la actividad a cada pareja de asistentes se le entrega tres cartas con los dibujos de los árboles para sombra, y cinco cartas con el nombre de las enfermedades. Pide colocarlas boca abajo en dos montones de acuerdo a su contenido y que luego ensayen a voltear varias veces las cartas, una de un montón y otra del otro montón para que luego respondan las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las posibilidades de parejas (árbol de sombra - tipo de enfermedad) que puedo sacar?
¿Cuántas parejas de cartas puedo formar?

¿Habrá una forma más fácil de saber cuántas posibilidades hay de combinar los dos tipos de cartas?

Actividad 1. (situación acción) Al inicio de la resolución de la situación conviene entregar a la mitad de parejas de estudiantes más cartas (repetidas) de las que se le va a entregar a la otra mitad de estudiantes (solamente una copia de cada carta). Cada grupo empezará a simular lo que le corresponde resolver a los personajes de la situación (Erick y Gustavo). El propósito es que se acerquen al concepto de combinatoria mediante la experimentación. Además, se debe dar respuesta a los interrogantes planteados por el técnico de asocacao e igualmente buscar una estrategia que permita simplificar el proceso de hallar las diferentes parejas.

Momento de desarrollo:

Actividad 2: (situación formulación) Para abordar este apartado de la clase, con anterioridad se han enumerado las parejas de estudiantes y aquellas que se les asignó un número par recibieron el material sin cartas repetidas y quienes les correspondió un número impar cuentan más cantidad de cartas. Esa variable didáctica, en el material se aprovecha para que se conformen grupos con números par e impar. Y dado que en este punto se busca socializar las representaciones o las estrategias que les favorece para encontrar las respuestas entonces se espera que ocurra que al sacar las conclusiones una de ellas sea definir las reglas de formación de cartas.

Como gestión de la variable *magnitud de los números presentes* se plantea a los estudiantes la siguientes variación de la situación anterior: ¿Cuántos tipos de árboles para sombra y cuantos tipos de enfermedades tendríamos que considerar para contar con el número suficiente de parejas (árbol – enfermedad) de manera que se pueda entregar un par de cartas a cada estudiante del salón?

Actividad 3: (situación de validación)

Al llegar a este punto de la sesión de clase los estudiantes preparan su socialización a la plenaria de manera que expongan sus conclusiones a la situación problema propuesta y las estrategias implementadas para responder las preguntas planteadas. Se espera que los estudiantes oyentes estén en la capacidad de “sancionarlas”, es decir, de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas u oponer otras aserciones. E igualmente se tiene la esperanza que los estudiantes exponentes estén en la capacidad de argumentar y sustentar sus procedimientos y resultados.

Se plantea que la siguiente variación de la situación inicial sea la que enmarque las socializaciones de los grupo en este momento de la clase:

Como actividad final de la reunión a la que asistió Erick y Gustavo se les pidió hallar las diferentes posibilidades que surgen de contar con ternas de cartas con los nombres de abonos orgánicos para el cacao, enfermedades que lo afectan y los árboles para sombra. E igualmente dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las posibilidades de las ternas (árbol de sombra - tipo de enfermedad – tipo de abono) que puedo obtener?
¿Cuántas ternas de cartas puedo formar?
¿Habrá una forma más fácil de saber cuántas posibilidades hay de combinar los tres tipos de cartas?

Momento de cierre:

Actividad 4: (situación de institucionalización del saber)

Para este momento de la sesión el docente a través de situaciones de aprendizaje busca que los estudiantes formalicen los conocimiento elaborados a partir del trabajo que realizaron con las situaciones a-didácticas abordadas en los momentos anteriores de la sesión, para ello presenta la siguiente situación-problema:

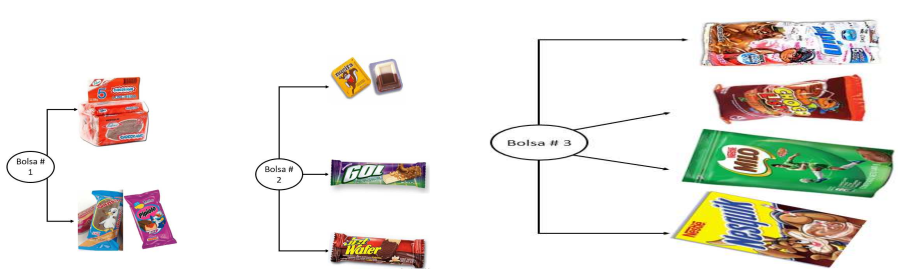
Situación de aprendizaje:

Erick quiere ofrecerle un detalle a su papá, su mamá y a su hermano Gustavo. Él sabe que los productos a base de chocolate son los preferidos por sus familiares. Y para ello les pide que participen del siguiente juego aleatorio: Extraer un producto al azar de tres bolsas en las que se han depositado respectivamente bebidas chocolatadas, ponqué recubierto y chocolates rellenos. El contenido de las bolsas es el siguiente:

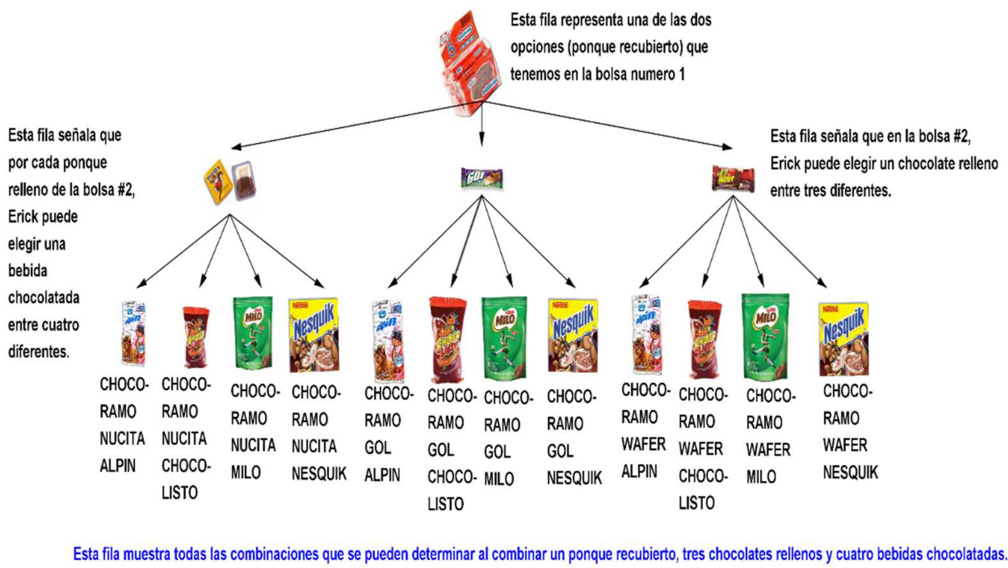
Bolsa #1: Gansito - Chocoramo
Bolsa #2: Nucita - Gol - Chocolatina
Bolsa #3: Alpin – Chocolisto - Milo - Nesquik

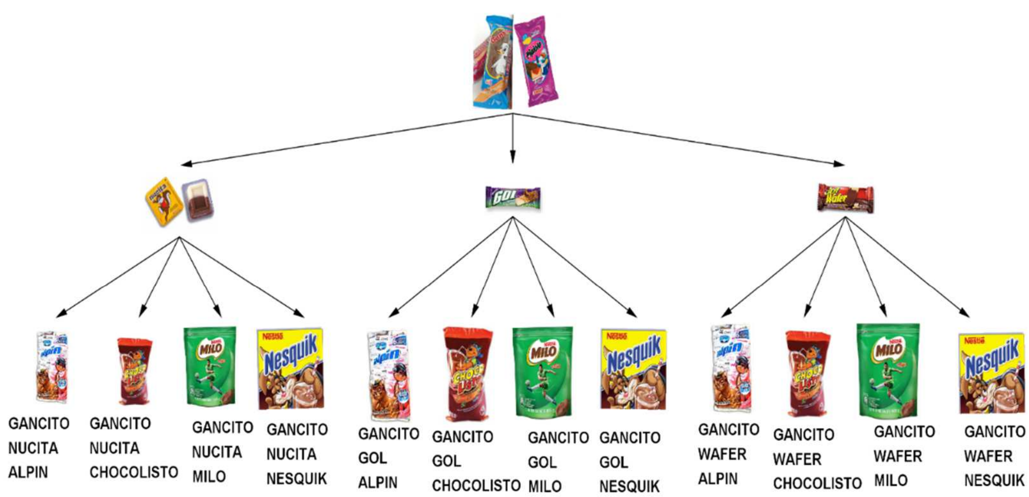
¿Cuántas posibilidades tienen los familiares de Erick para armar un combo de acuerdo los productos que contienen las bolsas?

La utilización de material concreto (empaques de productos) supone para los estudiantes una ventaja a la hora de visualizar y contar los resultados posibles. En este sentido, el alumno cuenta con un camino más sencillo para llegar a la representación, plasmarla en un diagrama y posteriormente determinar el espacio muestral y así establecer la probabilidad de sucesos equiprobables. Se considera práctico que se inicie pidiendo a los estudiantes que esquematicen el contenido de cada bolsa. A continuación se muestra un modelo del esquema:



Luego se pide que antes de realizar la experiencia conjeturen sobre los posibles productos que salen de cada una de las bolsas y que se arme un diagrama. Para ejemplificar los posibles resultados se construye el siguiente diagrama de árbol:





Se propone hacer un análisis del esquema elaborados mediante las siguientes cuestiones:

Identifica las opciones que tiene un familiar de Erick al extraer un producto de cada una de las bolsas.

- ¿Cuántas clases de chocolates recubiertos hay?
- ¿Cuántas clases de chocolates rellenos hay?
- ¿Cuántas bebidas chocolatadas diferentes hay?

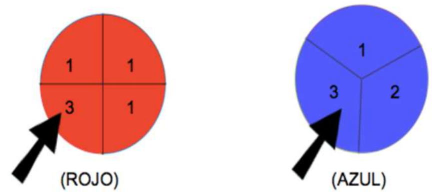
¿Cuántas posibilidades se dan al combinar un tipo de ponqué recubierto de chocolate con un tipo de chocolate relleno? ¿En cuántos combos diferentes puede salir Gansito? ¿Cuántas opciones tienen Milo o Nesquik? Realiza una estimación de las posibilidades que tiene Erick a la hora de ofrecer un combo de tres productos para el detalle que quiere entregar a sus familiares. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular el número de posibilidades?
Microsecuencia 6: Valoración de aprendizajes: puesta en escena de los conceptos trabajados para llegar a la solución de situaciones-problema asociadas al contenido probabilidad simple. Con el propósito de reconocer en los estudiantes el nivel de comprensión de la idea de probabilidad y sus nociones en relación al razonamiento combinatorio conviene iniciar esta sesión de valoración de aprendizajes con el planteamiento de situaciones que den lugar a una comparación de probabilidades.

Anexo 3. Prueba pedagógica de cierre.

PRUEBA PEDAGÓGICA DE CIERRE
NOMBRE DEL ESTUDIANTE Para poder dar solución a cada pregunta se debe hacer la lectura de la experiencia aleatoria, luego escoger una opción y finalmente expresar su opinión que explique el por qué ha marcado esa opción de respuesta. **1.** Erick y Gustavo van a comprar una boleta de la rifa de un televisor y solo quedan dos: una con el # 123 y otra con el # 479. Erick prefiere jugar con el primero porque dice que es más fácil que en un sorteo salgan los dígitos consecutivos (123). Gustavo, por el contrario, opina que jugar a la lotería es algo azaroso (incierto) y, por tanto, el numero 479 tiene mayor posibilidad de ganar. Cuál es tu opinión respecto a lo que dice Erick: Y que opina respecto a lo que dice Gustavo: **2.** Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: CARA, SELLO, CARA, SELLO, SELLO, SELLO, SELLO, SELLO. Si lanza la moneda por novena vez, ¿Qué es más probable que salga? A. La próxima vez es más probable que salga CARA B. La próxima vez es más probable que salga SELLO. C. La próxima vez es igual de probable que salga CARA o SELLO ¿Por qué razón escoge esa opción? **3.** Nicasio ha jugado semanalmente Baloto durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nada, pero decide continuar jugando pues piensa: "*el Baloto es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Dado que he jugado muchas veces y nunca he ganado, estoy cada vez más seguro que antes, de que ganaré en un próximo sorteo de Baloto*" ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento, es decir lo que piensa Nicasio? Justifica. **4.** En un grupo de estudiantes de 4° y 5° hay 13 niños y 16 niñas. Se va realizar el juego "amigo secreto" y para ello cada nombre de los estudiantes se escribe sobre un trozo de papel. Luego todos los trozos de papel se colocan en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. De acuerdo al experimento anterior señale la frase que considere correcta: A. Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña. B. Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño. C. Es igual de probable que sea un niño que una niña. Justifica. **5.** Erick tiene en una caja 10 pimpones blancos y 20 amarillos. Gustavo tiene en otra caja 30 pimpones blancos y 60 amarillos. Ellos deciden jugar a sacar pimpones al azar y colocan la siguiente regla: *gana quien saque primero un pimpón blanco, pero si ambos sacan a la vez un pimpón blanco o un pimpón amarillo, ninguno gana, devuelven los pimpones a las cajas y el juego continúa*.

Erick afirma que *el juego no es justo porque en la caja de Gustavo hay más pimpones blancos que en la de él*. ¿Cuál es tu opinión sobre lo que afirma Erick?

6. La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número.



¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

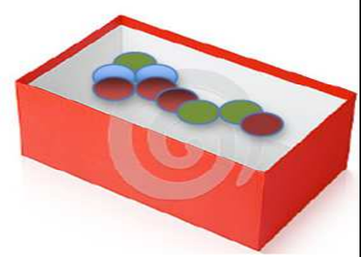
A. Es más fácil obtener 3 en el disco rojo.
B. Es más fácil obtener 3 en el disco azul.
C. Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3.
¿Por qué razón escoge esa opción?

7. María y Esteban juegan a los dados. María gana 1.000 pesos si el dado cae en **2** ó en **3** ó en **4** ó en **5** ó en **6**. Si resulta que cae un **1,** Esteban gana 2.500 pesos. De acuerdo a las reglas puestas crees que el juego es equitativo (justo)?
¿Por qué opinas eso?

8. En una caja de cartón se depositan 4 bombombunes rojos, 4 azules y 2 amarillos, y después se mezclan. Se sacan tres bombombunes fuera de ella, resultando que salieron 2 rojos y 1 azul. A continuación sacamos otro bombombum sin echar las anteriores a la caja. ¿De qué color es más probable que salga?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad.
(B) El azul tiene mayor probabilidad.
(C) El amarillo tiene mayor probabilidad.
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad.
¿Por qué razón escoge esa opción?

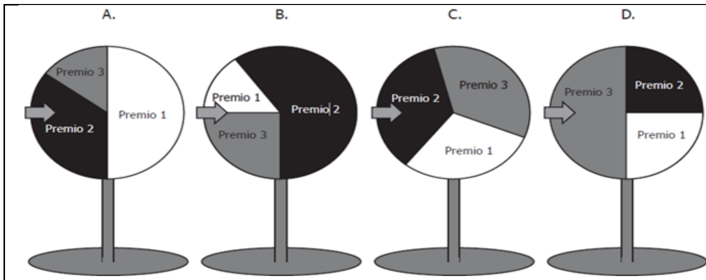
9. En una caja hay 4 botones rojos, 3 botones verdes y 2 botones azules. La tarea consiste en sacar los botones sin mirar. ¿Cuántos botones debe uno sacar para estar seguro de que ha extraído un botón de cada color?



¿Por qué dices que es necesaria esa cantidad?

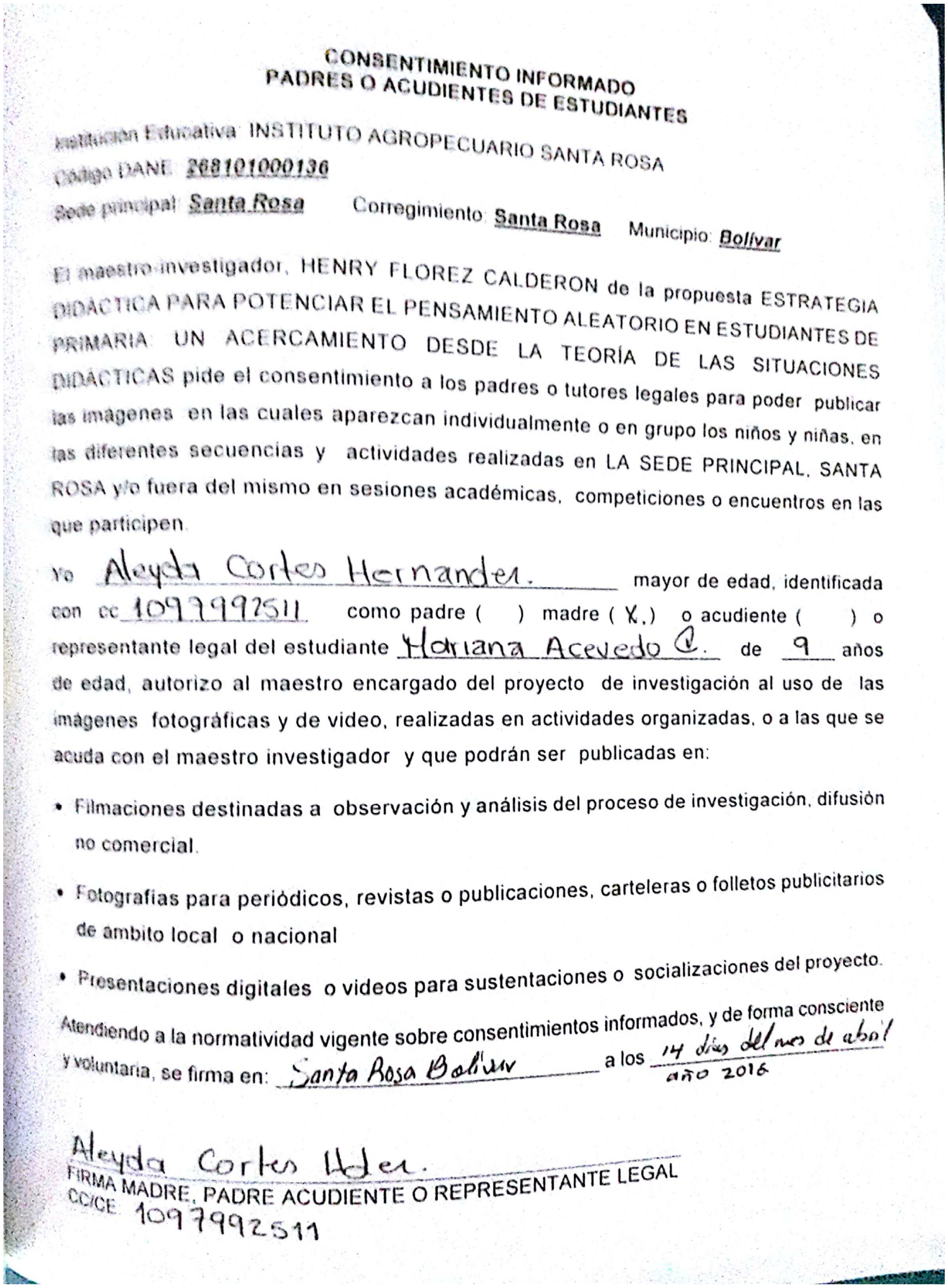
10. Un juego consiste en girar una ruleta para obtener el premio 1, el premio 2 o el premio 3.

¿En cuál de las siguientes ruletas es más probable que un jugador obtenga el premio 1?



¿Por qué razón escoge esa opción?

Anexo 4. Consentimiento informado.



CONSENTIMIENTO INFORMADO
PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTES

Institución Educativa: INSTITUTO AGROPECUARIO SANTA ROSA

Código DANE: ***268101000136***

Sede principal: ***Santa Rosa*** Corregimiento: **Santa Rosa** Municipio: ***Bolívar***

El maestro investigador, HENRY FLOREZ CALDERON de la propuesta ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO ALEATORIO EN ESTUDIANTES DE PRIMARIA: UN ACERCAMIENTO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS pide el consentimiento a los padres o tutores legales para poder publicar las imágenes en las cuales aparezcan individualmente o en grupo los niños y niñas, en las diferentes secuencias y actividades realizadas en LA SEDE PRINCIPAL, SANTA ROSA y/o fuera del mismo en sesiones académicas, competiciones o encuentros en las que participen.

Yo Aleyda Cortes Hernandez. mayor de edad, identificada con cc 1097992511 como padre ( ) madre (X) o acudiente ( ) o representante legal del estudiante Mariana Acevedo C. de 9 años de edad, autorizo al maestro encargado del proyecto de investigación al uso de las imágenes fotográficas y de video, realizadas en actividades organizadas, o a las que se acuda con el maestro investigador y que podrán ser publicadas en:

- Filmaciones destinadas a observación y análisis del proceso de investigación, difusión no comercial.
- Fotografías para periódicos, revistas o publicaciones, carteleras o folletos publicitarios de ambito local o nacional
- Presentaciones digitales o videos para sustentaciones o socializaciones del proyecto.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria, se firma en: Santa Rosa Bolívar a los 14 días del mes de abril año 2016

Aleyda Cortes Hdez.
FIRMA MADRE, PADRE ACUDIENTE O REPRESENTANTE LEGAL
CC/CE. 1097992511

Anexo 5. Instrumento Diario de campo.

<table>
<tr><td colspan="14">DIARIO DE CAMPO</td></tr>
<tr><td>Nombre del proyecto</td><td colspan="9">ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO ALEATORIO Y LA COMPETENCIA RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE PRIMARIA: UN ACERCAMIENTO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS.</td><td colspan="2">Nombre de la actividad</td><td colspan="2">SESION 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Institución Educativa</td><td colspan="7">INSTITUTO AGROPECUARIO SANTA ROSA</td><td colspan="2">Grado:</td><td colspan="2">CUARTO Y QUINTO</td></tr>
<tr><td colspan="14">CLASE # 7</td></tr>
<tr><td>Día de la Observa-ción:</td><td>18/07/2017</td><td>Sesión</td><td>Diagnóstico</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td colspan="2">Autor del registro :</td><td colspan="2">HENRY FLOREZ CALDERON</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la Sesión</td><td colspan="13">El estudiante realiza conjeturas acerca de posibilidad de ocurrencia de un evento para describir si es seguro, imposible más o menos o igualmente posible que otro.</td></tr>
<tr><td colspan="11">DESCRIPCIÓN</td><td colspan="3">INTERPRETACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="11">7:00 am
La sesión comienza agotando la etapa o momento de cierre de la situación didáctica (institucionalización). Acá el docente hace un ejercicio que el mismo ha planteado para recapitular el trabajo de los estudiantes en los momentos de acción, formulación y validación.

Desde esta lógica entonces se empieza por convocar al escenario la información puntual de la situación de aprendizaje, es decir se pide a los estudiantes que enumeren la cantidad de mazorcas según el color de estas y de acuerdo a las que resultaron recolectadas. También se pide que mencionen los términos o palabras puntuales que empelaron para cumplir con las condiciones que planteaba la situación.

El EH5 no pudo recordar el número de mazorcas de cada color, algo que sí hizo el EH4. Respecto a los términos o palabra claves para asignar la probabilidad (seguro e imposible) la EM4 las evoco una vez se les preguntó.

Se les presentó en software matemático (geogebra) las diferentes propuestas de ruleta que resultaron de cada grupo de trabajo. Esto les generó un poco de interés ya que el docente manipulaba el software para hacer la construcción de las ruletas.

7:15 am</td><td colspan="3">Mediante la simulación o experimentación con ruletas físicas o en formato digital los estudiantes visualizaron como este dispositivo aleatorio ayudaba a ilustrar un evento seguro y uno imposible.

Al parecer los estudiantes no se concentran a oír bien las demandas que hace el docente y lanzan aseveraciones sin evaluar correctamente lo que se está pidiendo como respuesta.

En el ejemplo de la moneda los estudiantes tuvieron dificultad para dar un evento que fuera imposible que saliera. Esta barrera puede obedecer a que están muy familiarizados con los dos eventos que para ellos es</td></tr>
</table>

Después de ilustrar los eventos con ruletas se plantea un conversatorio con los estudiantes para que ejemplifiquen situaciones donde se verifique el evento *seguro y el imposible.* La EM8 se le pidió que ejemplificara una situación cotidiana donde se observe que no es posible lograr materializar ese evento. La alumna interrogada no pudo dar un ejemplo, mientras que muchos estudiantes al unísono y de manera simultánea daban ejemplo algunos cercanos al evento imposible y otros distantes que se les ocurría. También se le pregunto al EH7 sobre el evento *imposible* y para ello se le planteo ejemplificar con el dispositivo aleatorio (dado) para este caso estudiantes como EH5, EH6 y EM6 para el evento imposible plantearon lo siguiente: *que caiga 14, que caiga cero que caiga siete.* **7:30 am** Dado que algunos estudiantes no habían estado en la sesión anterior entonces se le pidió que empezaran a intervenir de acuerdo a las ideas que se estaban desarrollando. Entonces a la EM9 se le explico que si se lanza una moneda al aire qué evento sería imposible que cayera? Varios estudiantes se alentaron a expresar que sería imposible que cayera **cara** y otros que cayera **sello.** También se trajo a colación el dispositivo aleatorio (baraja española) y se enumeraron los eventos que pueden salir. Luego se le preguntó al estudiantes EH12 que evento sería imposible que saliera al sacar una carta, el respondió que *una carta de cucharas. Otros que de pocillos.* **7:50 am** Ahora el turno es para ejemplificar con el evento **seguro**. Para ello la EM9 debió responder si se lanza un dado que evento es seguro que caiga, ella responde que *tres*, el docente pone en duda la respuesta y algunos estudiantes confirma con ejemplo que no es seguro sacar tres. El EH11 dicen los ejemplos que están dando son *posibles*, entonces el profesor refuerza esa idea y la resalta para que se vaya aclarando los eventos posibles de imposible y seguro. La EM10 dice que es seguro que caiga un número, y para ello el docente siguió conduciendo la construcción de la idea, llegando a enumerar los números que tiene el dado. Esta respuesta se recalcó hasta llegar a enunciar que *es seguro que caiga un número del 1 al 6*. Lo mismo se realizó para el caso de lanzar una moneda.	poco lógico que se hable de otros eventos y por lo tanto no se aventuran a proponer ideas nuevas que no están en ese espacio muestral. Cuando se pide a los estudiantes que ejemplifiquen con situaciones cotidianas los eventos seguro e imposible, los ejemplos que resultan permiten ver que aún no está consolidado el conocimiento de estos dos tipos de eventos**.** Frente a la pregunta de lanzar un dado y estar seguros del evento que va caer los estudiantes se le complejiza dar ejemplos. Es decir llagar a proponer que un evento seguro en este caso es el espacio muestral es decir un numero de 1 a 6. Al relacionar el evento seguro e imposible con valores numéricos los estudiantes de manera fácil establecieron que cuando la superficie de la ruleta esta toda coloreada significa el 100% y para un evento diferente a ese color entonces se refieren que 0% es el valor para ese color y por ello se asigna el evento imposible.

Se hizo énfasis al cerrar este momento de la situación didáctica sobre completar una tabla que asocia tanto el evento imposible como el seguro con otras manera de representar, es decir manera verbal como *uno de uno, cero de uno, 100%, 0%, 0,0 – 1,0*	
8:10 am Después de cerrar la segunda situación didáctica con el momento de institucionalización del saber se plantea a los estudiantes una nueva situación de aprendizaje. El título de la sesión se ha denominado: **Cuantificando la incerteza. Un primer paso: los grados de posibilidad.** La situación exige que los estudiantes lleguen a proponer un número de bolsas posibles con los diferentes ingredientes que se requieren para preparar la mezcla adecuada para hacer el semillero. Entonces se les pidió a los estudiantes que colocaran sobre la mesa los materiales que modelan las bolsas del semillero. Y la tarea consiste en primer lugar estimar un numero de objetos de manera que se pueda agrupar los diferentes ingredientes y que se cumpla que al elegir una bolsa de ellas es **muy posible** que se extraiga una con abono orgánico, o que sea **igualmente posible** que salga una bolsa ya sea de cal o de arena u otra opción debe cumplir que sea **poco probable** que salga una bolsa con tierra. Se encuentra que el EH2 empieza a hacer distinción en donde se diferencia tanto en número de objetos como de nombre del ingrediente de cada bolsa. Esa iniciativa permite que el docente lo tome como ejemplo para que los compañeros tomen la iniciativa y propongan sus propios arreglos. A la hora de entregar la ficha de trabajo para que en el momento de acción, es decir el momento de proponer estrategias de solución de manera individual, entonces muchos estudiantes no pueden llegar a una propuesta importante, o se estancan pensando o distrayéndose con los compañeros. Hay dificultad para pensar en salidas o estrategias que cumplan con los requerimientos de la situación.	Demandar de los estudiantes tareas como es hacer estimaciones o cálculos que les exijan romper las rutinas que consisten en entregar todos los datos y donde solo se limitan a manipular o hacer procedimientos es un ejercicio que a muchos estudiantes les genera confusión y los bloquea pues consideran que falta información y que el docente debe mostrarles el camino. Es así que pocas veces se evidencian desempeños de estudiantes que se aventuran a proponer estrategias o hacer planteamientos poco imaginados por otros. Es decir que los estudiantes están muy adoctrinados y pocas veces se salen del libreto, ósea hacen siempre lo mismo y con las mismas estrategias y cuando se les exige una tarea donde las condiciones para llegar a la solución son más flexibles y por ende los estudiantes se deben trabajar más con la creatividad, es decir hay más libertad para trabajar con un universos de información entonces el alumno considera que está a la deriva, que es un riesgo proponer una estrategia o un camino diferente.
8:30 am Cuando a los estudiantes se les relacionó la expresión **muy probable** para que estimaran el número que satisface esa posibilidad. Si hacen estimaciones y proponen algunos valores, por ejemplo el EH1 dice *profe a uno le coloco 8, a otro 6 y la otra 4 y la otra 5.* Cuando es interrogado por el docente entonces cambia los valores y dice: **de arena 8, de humos de lombriz 4, de cal 6 y de tierra 14.** Enseguida el EH8 hace su	En las propuestas que hacen los estudiantes se evidencia que si otorgan a las cantidades cierta diferenciación, y lo que se encuentra es que al elevar el número de bolsas para el ingrediente tierra lo que pasa es que no hay una comparación entre

interpretación y dice *pues ahí debe salir tierra porque hay más, y de cal debo colocar poquitas porque…* **8:50 am** Ahora la EM3 propone: **tierra 17, cal 4, arena 2 y humos de lombriz 6.** Concretado un número para las bolsas de tierra, ahora se debe hacer una propuesta para que se cumpla que **es igualmente probable** que al sacar una bolsa del montón esta salga de humus de lombriz o de arena. El EH3, dice que el número debe ser 8 de humus y 8 de arena. En cuanto a la condición de elegir una bolsa de cal y que sea **poco probable** al hacer la extracción. Entonces, el EH8 dice que debe ser una bolsa de cal. Entonces el docente hace el consolidado y les hace que visualice esas cantidades para que verifiquen si se cumplen las condiciones de la situación.	las cantidades de las otros ingredientes para valorar si es mayoría o al menos supera en número a las otras bolsas. En este ejercicio estuvieron pocos estudiantes interesados, dado que no se evidencia comprensión de la tarea y tan obstáculo se genera porque a los estudiantes les parece tedioso pensar y hacer propuestas para llegar a verificar si se cumplen las condiciones. También se debe a que se espera que alguien de los compañeros trabaje para luego hacer la copia.

CONVENCIONES	DESCRIPCIÓN
EH1 - EH2 – EH3 …	**E = estudiante H = hombre # = orden de aparición al hacer la intervención en la clase**
EM1 – EM2 – EM3 …	**E = estudiante M = mujer # = orden de aparición al hacer la intervención en la clase**