

SIMULACIÓN NUMÉRICA DETALLADA EN RÉGIMEN TRANSITORIO DE FLUJO
COMPRESIBLE EN PERFIL DE TOBERA DE MOTOR DE COHETE DE
COMBUSTIBLE SÓLIDO

JESSICA TATIANA MUÑOZ ORTIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECHANICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2019

SIMULACIÓN NUMÉRICA DETALLADA EN RÉGIMEN TRANSITORIO DE FLUJO
COMPRESIBLE EN PERFIL DE TOBERA DE MOTOR DE COHETE DE
COMBUSTIBLE SÓLIDO

JESSICA TATIANA MUÑOZ ORTIZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero Mecánico

Director
Julián Ernesto Jaramillo
Ingeniero Mecánico, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2019

DEDICATORIA

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado. Una dedicatoria especial a quien ha sido un apoyo incondicional en estos años, mi buen amigo Sebastian.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por el apoyo que tuvieron para conmigo durante el desarrollo de mi carrera. También agradezco a mis amigos por su apoyo y por las vivencias de estos inolvidables años de universidad.

Un reconocimiento y agradecimiento importante lo realizo a mi director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi proyecto.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	8
1 OBJETIVOS	18
2 FUNDAMENTOS SOBRE COHETES	20
2.1 PARÁMETROS DE DESEMPEÑO	20
2.1.1 Flujo másico	21
2.1.2 Relación de áreas	21
2.1.3 Empuje y coeficiente de empuje	23
2.1.4 Velocidad de escape y velocidad efectiva	25
2.1.5 Impulso específico y total	26
2.2 TEORÍA DE TOBERAS CONVERGENTES- DIVERGENTES	27
2.2.1 Hipótesis de una tobera ideal	27
2.2.2 Geometrías y contornos de toberas	28
2.2.3 Formación de la pluma de escape	36
3 ESPECIFICACIONES DEL MOTOR	40
3.0.1 Curva de empuje	40
3.0.2 Geometría de la tobera	43
4 DESCRIPCION DE ECUACIONES GOBERNANTES	45
4.1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN	45
4.1.1 Hipótesis generales de dinámica de fluidos	45
4.1.2 Formulación del modelo matemático	46
4.1.3 Transformación de coordenadas	50

5 MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS	53
5.1 DISCRETIZACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO	54
5.1.1 Discretización de las ecuaciones	54
5.1.2 Condiciones iniciales y de frontera	60
5.2 GEOMETRÍA Y MALLADO NUMÉRICO	61
5.2.1 Construcción de la geometría	61
5.2.2 Generación del mallado	63
6 DESARROLLO DE CÓDIGO NUMÉRICO	67
6.1 DIFUSIÓN -CONVECCIÓN INCOMPRESIBLE TRANSITORIA	67
6.1.1 Descripción del problema	67
6.1.2 Análisis de Campos de flujo	69
6.2 DIFUSIÓN -CONVECCIÓN COMPRESIBLE TRANSITORIA	72
6.2.1 Descripción del problema	72
7 CASO DE ESTUDIO: TOBERA	78
7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS	78
7.1.1 Análisis de velocidades	78
7.1.2 Análisis de densidad	80
7.1.3 Análisis de presión y temperatura	80
8 CONCLUSIONES	84
9 RECOMENDACIONES	86
BIBLIOGRAFÍA	86
ANEXOS	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Variables en la tobera	20
Figura 2	Relaciones isentrópicas entre variables	23
Figura 3	Evaluación de las características de flujo para una misma relación de área	24
Figura 4	Diferentes configuraciones de toberas y efectos sobre el flujo de gases	29
Figura 5	Técnica basada en contorno ideal truncado de tobera TIC	31
Figura 6	Contorno de tobera de empuje optimizado TOC	32
Figura 7	Contorno parabólico de tobera de empuje optimizado TOP	33
Figura 8	Distribución del numero Mach en una tobera tipo cónica	34
Figura 9	Patrones de flujo.	36
Figura 10	Diagrama de la estructura de la pluma de escape	37
Figura 11	Componentes del cohete Super Loki Dart	40
Figura 12	Comparación de parámetros.	41
Figura 13	Datos técnicos sobre motor de cohete Cesaroni O25000	42
Figura 14	Componentes del cohete Super Loki Dart	42
Figura 15	Curva de empuje motor Cesaroni O25000	43
Figura 16	Tobera para motor de cohete	44
Figura 17	Volumen de control para un caso bidimensional de volúmenes finitos	55
Figura 18	Variable transitorio en función del tiempo según el esquema.	59
Figura 19	Plataforma de Usuario Salome Platform	62
Figura 20	Salome Platfrom. Geometría axialsimétrica de la tobera según plano -Contornos.	62

Figura 21	Salome Platfrom. Área axialsimétrica de la tobera según plano para estudio CFD.	63
Figura 22	Salome Platfrom. <i>Modulo de Malla</i> .	64
Figura 23	Salome Platfrom. Malla resultante sobre el área de la tobera.	64
Figura 24	Salome Platform. Información de malla.	65
Figura 25	Salome Platform. Ubicacion de los nodos sobre la malla de la tobera.	65
Figura 26	Salome Platform. Información de nodo de malla #274	66
Figura 27	Caso <i>Driven Cavity</i> . Geometría y condiciones de frontera.	67
Figura 28	Curvas de velocidad central para sus componentes u y v . $Re = 100$, mallas uniformes 129, 64, 31.	68
Figura 29	Campos de flujo para u y v . $Re = 100$, malla uniforme 129 x 129.	68
Figura 30	Curvas de velocidad central para sus componentes u y v . $Re = 1000$, mallas uniformes 129, 64, 31.	69
Figura 31	Campos de flujo para u y v . $Re = 1000$, malla uniforme 129 x 129.	69
Figura 32	Comparativa de convergencia del código para $Re = 100$ y $Re = 1000$. Malla uniforme 129 x 129.	70
Figura 33	tres	71
Figura 34	Distribución de presiones para $Re = 100$ y $Re = 1000$, malla uniforme 129 x 129.	71
Figura 35	Comparación de componentes de la velocidad $u(\bar{y})$ y $v(\bar{x})$. Resultados <i>Ghia et al.</i> y CMSIP.	75
Figura 36	Campos de velocidad. Compresible. $Re = 100$. Malla uniforme 31 x 31.	75
Figura 37	Campos de velocidad. Compresible. $Re = 1000$. Malla uniforme 31 x 31.	76
Figura 38	Distribución de presiones. Reynolds 1000 y 100. Malla uniforme 31 x 31.	76

Figura 39	Distribución de temperatura. Reynolds 1000 y 100. Condición de fronteras Neumann. Malla uniforme 31 x 31.	77
Figura 40	Distribución de temperatura. Reynolds 1000 y 100. Condición de fronteras Dirichlet. Malla uniforme 31 x 31.	77
Figura 41	Distribución de velocidades en perfil de tobera.	79
Figura 42	Distribución de numero Mach en perfil de tobera.	79
Figura 43	Distribución de densidad en perfil de tobera.	80
Figura 44	Distribución de presiones en perfil de tobera.	80
Figura 45	Distribución de temperatura en perfil de tobera.	81
Figura 46	Comportamiento de la velocidad a lo largo del eje axial simétrico.	81
Figura 47	Comportamiento de la presión a lo largo del eje axial simétrico.	82
Figura 48	Comportamiento de la densidad lo largo del eje axial simétrico.	82
Figura 49	Curva de empuje en la tobera.	83

LISTA DE ANEXOS

Anexo A	Ecuaciones de Conservación	91
Anexo B	Código Computacional Desarrollado	100

RESUMEN

TÍTULO: SIMULACIÓN NUMÉRICA DETALLADA EN RÉGIMEN TRANSITORIO DE FLUJO COMPRESIBLE EN PERFIL DE TOBERA DE MOTOR DE COHETE DE COMBUSTIBLE SÓLIDO

*

AUTOR: JESSICA TATIANA MUÑOZ ORTIZ **

PALABRAS CLAVE: FLUJO COMPRESIBLE, MOTOR COHETE, TOBERA, CFD.

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto de grado presenta el desarrollo numérico de un código computacional para simular el comportamiento del flujo compresible en una tobera bajo las condiciones de operación de un motor de cohete de propelente sólido. Aplicando teoría de Dinámica Computacional de Fluidos (CFD) se desarrolla un código computacional por Método de Volúmenes Finitos (MVF) sobre una malla estructurada en la geometría de la tobera. Esta geometría es definida previamente. El desarrollo del código comienza con la discretización de las ecuaciones gobernantes simplificadas bajo las condiciones de operación. Posteriormente se establece como método de solución un acoplamiento entre variables para una solución directa del sistema de ecuaciones. Una vez se validan los resultados con datos experimentales, se obtiene como resultado de las simulaciones, los contornos de las variables primitivas. Los parámetros de entrada para el código provienen de la curva de empuje del motor, y las propiedades del flujo desde la cámara de combustión. Posteriormente se validan los resultados con resultados experimentales y algunas aproximaciones en el caso compresible para el estudio de las variables balísticas que caracterizan el vuelo y el desempeño del motor. Se verifica el desempeño alcanzado por el motor por medio de la curva de empuje resultante de las simulaciones del código numérico desarrollado.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Julián Ernesto Jaramillo, Doctorado en Ingeniería Mecánica.

ABSTRACT

TITLE: NUMERICAL SIMULATION IN COMPRESSIBLE FLOW TRANSITORY REGIME FOR SOLID FUEL ROCKET ENGINE *

AUTOR: JESSICA TATIANA MUÑOZ ORTIZ **

KEYWORDS: COMPRESSIBLE FLOW, ROCKET ENGINE, NOZZLE, CFD.

DESCRIPTION:

This degree project presents the numerical development of a computational code to simulate the behavior of the compressible flow in a nozzle under the operating conditions of a solid propellant rocket engine. Applying Computational Fluid Dynamics (CFD) theory, a computational code is developed by Finite Volume Method (MVF) on a structured mesh in the geometry of the nozzle. This geometry is previously defined. Code development begins with the discretization of simplified governing equations under operating conditions. Subsequently, a coupling between variables is established as a solution method of the system of equations. Once the results are validated with experimental data, the contours of the primitive variables are obtained as a result of the simulations. The input parameters for the code come from the engine thrust curve and the flow properties from the combustion chamber. Subsequently, the results are validated with experimental results and some approximations in the compressible case for the study of ballistic variables that characterize flight and engine performance. The performance achieved by the motor is verified through the thrust curve resulting from the simulations of the numerical code developed.

*Bachelor Thesis

**Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Julián Ernesto Jaramillo, Doctorado en Ingeniería Mecánica.

INTRODUCCIÓN

Uno de los componentes de mayor importancia por su influencia sobre el rendimiento del motor y el sistema de propulsión es la tobera. Su diseño requiere del conocimiento total de los parámetros del motor, y su construcción implica un detallado proceso de manufactura.

La tobera provee la expansión y aceleración de los gases, soportando un ambiente severo de alta transferencia de calor y erosión para transformar la energía térmica de la combustión en energía cinética. Su operación se basa en la eyección de un gas a alta velocidad, que ha sido sometido a una expansión termodinámica. Si se descargará el flujo de gases directamente al exterior, se incurriría en pérdidas de la energía resultante de la combustión del propelente. Al aprovechar la compresibilidad de los gases, por medio de una adecuada relación de expansión isotrópica a través de la tobera, se logra incrementar la velocidad de salida. Su geometría influye notablemente en la velocidad de escape de los gases, y por tanto en el empuje y el impulso desarrollado por el cohete. Los procesos en la tobera, determinan el rendimiento general del cohete y muchos de los parámetros claves del sistema de propulsión.

Por medio de las herramientas de Dinámica de Fluidos Computacional -CFD, es posible observar el desempeño de cada una de las variables implicadas durante el proceso en la tobera. En el contexto de simulaciones de flujos turbulentos en toberas o canales cerrados, los modelos computacionales han alcanzado un gran desarrollo en los últimos años. Esto ha permitido desarrollar mejores aproximaciones a problemas de inestabilidad causados por acoplamientos termodinámicos causados por la expansión de gas en la tobera, tales como la separación de flujos, y las fuerzas asimétricas (cargas laterales) que limitan la vida no solo de la tobera sino de otros

componentes del motor ¹

Los métodos numéricos en transferencia de calor y flujo de fluidos son una herramienta poderosa para el diseño y optimización de sistemas térmicos. Los códigos CFD son usados en la mejora de equipos térmicos, por su adaptabilidad y reducción de costos y tiempo. Sin embargo, los códigos comerciales son poco y rara vez adaptables. La comunidad científica usualmente desarrolla sus propios códigos, obteniendo libertad completa para su manipulación.

Los programas usados para el diseño de toberas, se enfocan en el estudio de un parámetro en específico con el fin de mejorar el desempeño del sistema. Se diferencian en su objetivo, sin embargo, presentan en común la condición de flujo bidimensional y el uso de las propiedades de un gas real. Sea el análisis de los contornos de tobera, el nivel de empuje, los tiempos de operación, todos son basados en Dinámica de Fluido Computacional -CFD y relaciones básicas de Navier-Stokes. Algunos mas sofisticados incluyen las perdidas por erosión, o las perdidas por flujo multifase, así como los efectos de la viscosidad de la capa limite y la transferencia de calor a las paredes. En la literatura, se presenta el *Método de las Características -MOC* para el diseño geométrico de la tobera, y las técnicas de CFD para el análisis de las propiedades del campo de flujo dentro de la tobera.

La ecuaciones gobernantes, i.e., conservación de masa, momento y energía son necesarias para tratar matemáticamente los modelos físicos. Al solucionar las ecuaciones, se representa información detallada de los campos de flujo para la velocidad, la presión, y la temperatura.

Para la discretización de las ecuaciones se debe establecer el tipo de geometría, y la malla a desarrollar, a fin de proporcionar mayor precisión de los resultados. El malla-do axisimétrico, ofrece una concordancia en términos de discretización del dominio físico y robustas para el estudio de la geometría de la tobera, y la representación de

¹A. Shams y S. Girard y P. Comte, 'Numerical simulation of shock-induced separated flows in overexpanded rocket nozzles' En: Progress in Flight Physics 3 (2012), págs. 169-190.

los patrones de las variables de flujo en estudio.

El Trabajo de grado que se propone en este proyecto se enmarca en esta necesidad. Se tomaron los parámetros de diseño de una tobera definida previamente para el análisis del rendimiento de la tobera, y posteriormente se retro-alimentó el diseño preliminar. A partir del estudio del fenómeno transitorio de los campos de flujo en la tobera y la discretización de las ecuaciones gobernantes adaptadas a un sistema axisimétrico. Los datos usados para la evaluación de la tobera se obtuvieron por medio de la construcción de un código de simulación numérica aplicando Método de Volúmenes Finitos en Dinámica de Fluidos Computacional (CFD).

1. OBJETIVOS

Objetivo general

- Contribuir con la misión de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander en el propósito de formación de Ingenieros Mecánicos de alta calidad humana, ética, política, técnica y científica; Promoviendo una cultura orientada al uso de Dinámica de Fluidos Computacional, para resolver y analizar problemas de flujos, creando un código numérico para el análisis del flujo compresible en régimen transitorio sobre malla estructurada en una geometría con simetría axial, para los flujos de escape en una tobera de motor de cohete tipo O.

Objetivos específicos

- Definir los parámetros dependientes e independientes que gobiernan el motor de cohete de acuerdo a la teoría en diseño de motores de cohete.
- Definir la geometría interna de la tobera del motor de cohete Tipo O establecida previamente en función de la curva característica del motor requerida en la misión del cohete.
- Estudiar las formulaciones integro-diferenciales usando el método de volúmenes finitos sobre las ecuaciones gobernantes en flujo compresible para la estructuración del problema.
- Desarrollar una herramienta computacional en código de Dinámica de Fluidos Computacional para un flujo compresible en régimen transitorio considerando malla estructurada en una geometría con simetría axial.

- Elaborar un mallado estructurado adecuado a la geometría axisimétrica para análisis discreto de las ecuaciones de Navier Stokes.
- Elaborar un código de cálculo numérico que implemente el método de volúmenes finitos para simular la parte divergente de la tobera según las condiciones de diseño establecidas.
- Validar los resultados numéricos obtenidos por medio de los datos experimentales logrados en la prueba estática del motor de cohete.
- Verificar el diseño preliminar de la tobera comparando la curva de empuje requerida del motor de cohete, con la curva de empuje resultante calculada en el código numérico desarrollado.
- Si procede, formular recomendaciones en base a los resultados obtenidos sobre el diseño preliminar de la tobera.

2. FUNDAMENTOS SOBRE COHETES

2.1. PARÁMETROS DE DESEMPEÑO

Los parámetros que evalúan el desempeño del sistema de propulsión son: el empuje F , el impulso específico I_s , la velocidad característica c , la velocidad de salida de los gases v_2 , y el flujo másico $\dot{m}$.

- Presión de la cámara de combustión, y la presión ambiente.
- Relación de áreas de la tobera en la sección de expansión.
- Forma de la tobera y ángulo de salida.
- Propelente, composición y relación de mezcla.
- Temperatura inicial del proponente.

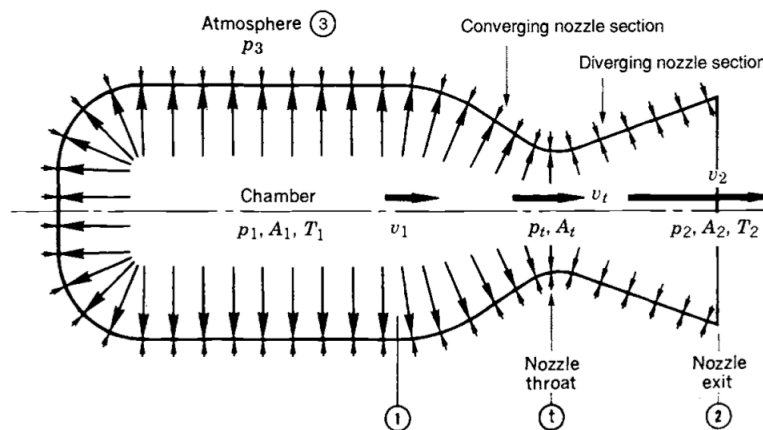


Figura 1. Variables en la tobera. Autor: Sutton y Biblarz [1], Rocket Elements Propulsion

En la figura 1 se identifican las variables internas y externas que influyen el desempeño del sistema de propulsión.

2.1.1. Flujo másico El flujo másico $\dot{m}$ se expresa como una función de las condiciones en la cámara de combustión (P_1, T_1) y el área de la garganta A_t .

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho_t v_t A_t = \rho_1 v_1 A_t \frac{v_t}{v_1} \frac{\rho_t}{\rho_1} \quad v_1 = \sqrt{\gamma R T_1} \\ \frac{v_t}{v_1} &= \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\rho_t}{\rho_1} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \\ \Gamma &= \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}\end{aligned}$$

$$\dot{m} = \Gamma \frac{P_1 A_t}{\sqrt{R T_1}} \quad (1)$$

Un parámetro característico de la combustión de la cámara es el *factor de flujo másico* C_D .

$$C_D = \frac{\dot{m}}{P_1 A_t} \quad (2)$$

El numero Mach se define a partir de los componentes de la velocidad,

$$\mathcal{M} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3)$$

Y la velocidad local del sonido es

$$a = \sqrt{\frac{\gamma \partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma R T} \quad (4)$$

2.1.2. Relación de áreas El área mínima de la tobera es llamada la garganta. La relación de entre el área de salida de la tobera y el área de la garganta es llamada *Relación de expansión de área de la tobera* y es nombrada como ϵ .

$$\epsilon = \frac{A_2}{A_t} \quad (5)$$

Épsilon es una función de la relación de presiones entre la salida de la tobera y la cámara P_2/P_1 , desde el punto de vista termodinámico. Cuando $P_x = P_2$, entonces $A_x/A_t = A_2 = A_t = \epsilon$.

$$\frac{A_t}{A_x} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{P_x}{P_1} \right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{P_x}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}} \quad (6)$$

En la garganta de la tobera la relación de presiones es función únicamente de la relación los calores específicos γ . Igualmente ocurre con la relación de volumen específicos y la relación de temperaturas. Esto es posible debido al valor del numero Mach en la garganta, igual a uno.

$$\frac{P_t}{P_1} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (7)$$

$$\frac{V_t}{V_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (8)$$

$$\frac{T_t}{T_1} = \frac{2}{(\gamma + 1)} \quad (9)$$

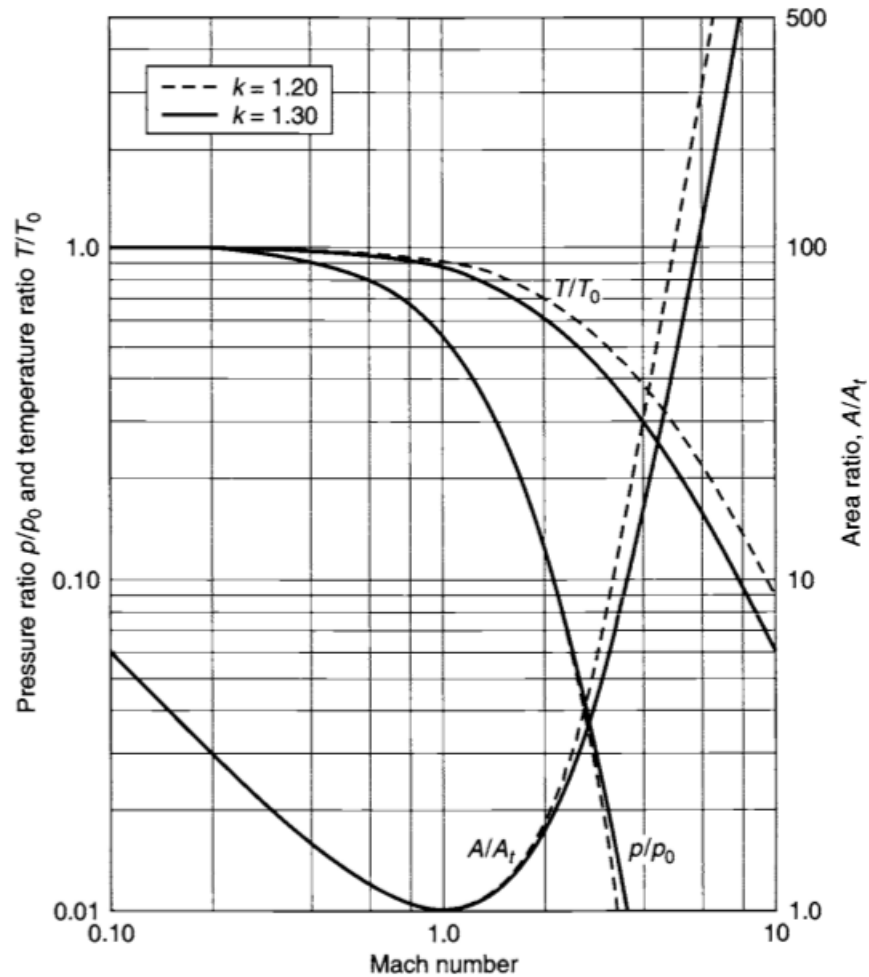


Figura 2. Variables en la tobera. Autor: Sutton y Biblarz[1], Rocket Elements Propulsion

El análisis del comportamiento del flujo en la garganta es aproximadamente determinado bajo suposiciones de flujo isentrópicas, gracias a las relaciones termodinámicas planteadas desde las condiciones internas de la tobera.

2.1.3. Empuje y coeficiente de empuje El empuje es la fuerza generada por el sistema de propulsión. Esta reacción sobre el vehículo es causada por la eyección de gases a alta velocidad. Una formula en condiciones ideales, ampliamente usada,

es la derivada del cambio de momento. Esta consideración implica un empuje constante, con flujo másico constante, y velocidad de salida de los gases v_2 uniforme y axial. Sin embargo, la diferencia de presión con el ambiente² adiciona un componente de empuje, que causa pérdidas y afecta la estabilidad del vehículo en operación.

$$F = \dot{m}v_2 + (p_2 - p_3)A_2 \quad (10)$$

Cuando la presión de salida es exactamente igual a la presión del ambiente ($p_2 = p_3$) el sistema presenta una *relación de área óptima* o *relación de expansión óptima*.

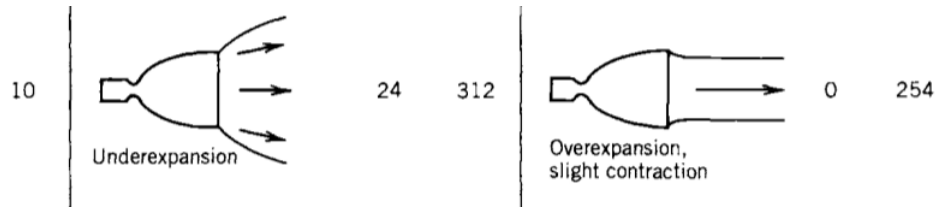


Figura 3. Evaluación de las características de flujo para una misma relación de área igual a 10. a). Altura 24 km, Lsp 312 b). Altura 0 km, Lsp 254. Autor: Sutton y Biblarz[1], Rocket Elements Propulsion

La relación *Empuje-peso* expresa la aceleración que el motor es capaz de generar para elevar su propia carga. Para un sistema con un empuje constante la máxima aceleración, se presenta justo antes de terminar la quema total del propelente.

$$\frac{F}{w_0} \quad (11)$$

En cuanto al *Coeficiente de empuje* $-C_F$, este es definido como el empuje dividido por la presión de la cámara P_1 y el área de la garganta A_t . Es un parámetro característico del flujo de gas a través de la tobera.

²Se asume una atmósfera homogénea.

$$C_F = \frac{F}{P_1 A_t} = \frac{\dot{w}}{g A_t P_1} v_2 + \frac{(p_2 - p_3) A_2}{A_t P_1}$$

$$C_F = \sqrt{\left(\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\right) \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)} + \frac{P_2 - P_3}{P_1} \frac{A_2}{A_t} \quad (12)$$

El coeficiente de empuje representa la amplificación del empuje debido a la expansión de los gases en la tobera comparados con el empuje que se puede alcanzar si la presión de la cámara actúa solo sobre el área de la garganta.

2.1.4. Velocidad de escape y velocidad efectiva La velocidad de salida de la tobera puede ser calculada a partir de variables termodinámicas. Estas ecuaciones aplican para sistemas ideales y no ideales, con características isentrópicas, y de acuerdo a un balance de energías.

$$\frac{(v_2)^2}{2} = c_p(T_1 - T_2) = c_p T_1 \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right) + (v_1)^2} \quad (13)$$

La velocidad de escape se ve influenciada por la relación de presiones, la temperatura inicial en la cámara, la razón entre la constante universal y el peso molecular R/M , y la relación de calores específicos γ , el cual limita la velocidad de escape. Inicialmente los efectos de la relación de presión afectan la velocidad de escape, sin embargo, su efecto disminuye cuando $\frac{P_c}{P_e} > 25$, ya que se incrementa la velocidad de escape, y la temperatura en la cámara T_c . Debido a estas condiciones, la fabricación de la tobera exige un material que resista las elevadas temperaturas (entre 2500K y 3500K).

La velocidad efectiva es el promedio de la velocidad a la cual los gases, producto

de la combustión son expulsados del vehículo. Es un parámetro característico de la combinación del motor y el propelente para cohetes que expanden termodinámicamente gases calientes en la tobera.

$$c = \frac{F}{\dot{m}} = v_2 + \frac{(p_2 - p_3)A_2}{\dot{m}} \quad (14)$$

Es valido decir que la condición de flujo se impone en la tobera, puesto que el valor del numero Mach a la salida de la tobera define el tipo de tobera. Por ejemplo, una tobera con flujo subsónico, es catalogada como tobera subsónica. Los efectos sobre la presión son causados por una relación de área fija ante cambios de altura en la operación del cohete. También se tienen toberas supersónicas y sónicas.

El flujo en la tobera se dice que es *sobrexexpandido* cuando la presión de salida de la tobera es menor que la presión ambiente $P_2 < P_3$. Es el caso mas complejo. Si la presión de salida es mayor que la presión externa $P_2 > P_3$, la condición de flujo es *subexpandido* y presenta continuas ondas de expansión y contrancción hacia la salida. A medida que cambia la altura del vuelo para una relación de área fija, el cohete va perdiendo impulso, y sumando perdidas. El flujo puede ser idealmente expandido, o presentar capas cortantes, choques, y ondas de expansión en condición de subexpansión o sobreexpansión.

2.1.5. Impulso específico y total El impulso específico I_s en concepto, es similar al concepto de km/galón en los automóviles, y al igual que la velocidad efectiva, es un parámetro característico resultado entre el tipo de motor y tipo de propelente. Es el empuje por unidad de peso del propelente. Durante las condiciones transitorias, el valor del impulso específico se puede obtener integrando el valor promedio para F y $\dot{m}$ por intervalos cortos de tiempo.

$$I_s = \frac{\int F dt}{g \int \dot{m} dt} \quad (15)$$

El impulso total I_t es la fuerza de empuje integrada en el tiempo de quema del propelente, siendo proporcional al total de la energía del propelente en un sistema de propulsión.

$$I_t = \int F dt \quad (16)$$

La relación entre el impulso específico y el impulso total se expresa por la siguiente formula donde m_p es la masa de propelente efectiva.

$$I_s = \frac{I_t}{m_p g}$$

Una relación índice de la eficiencia del diseño, se define dividiendo el impulso total por el peso del vehículo (incluyendo cargas y propelente), y se conoce como relación *Impulso-peso*.

$$\frac{I_t}{w_0} = \frac{I_t}{(m_f + m_p)g} \quad (17)$$

2.2. TEORÍA DE TOBERAS CONVERGENTES- DIVERGENTES

Isentrópicas -Las relaciones termodinámicas de los procesos en la tobera y la cámara de combustión son necesarias para el calculo del desempeño del sistema de propulsión, tal como se demostró en las ecuaciones anteriores. Al comparar los resultados de las relaciones termodinámicas con los requerimientos de misión, se evalúa el desempeño para determinar los parámetros de diseño a corregir.

2.2.1. Hipótesis de una tobera ideal Una tobera *ideal* es aquella que proporciona las condiciones apropiadas para direccionar el flujo en la salida únicamente en dirección axial. Durante el proceso de diseño de la tobera se simplifican las relaciones termodinámicas que definen el comportamiento del flujo a partir de las hipótesis que definen una tobera ideal. Aunque el diseño geométrico de la tobera no esta considerado en este proyecto, las hipótesis serán usadas en el diseño del código

computacional como condiciones iniciales y de frontera. Las siguientes hipótesis son consideradas para el estudio del *Cohete*:

- La sustancia de trabajo es homogénea.
- Todas las especies del flujo de trabajo son gaseosas
- La sustancia de trabajo obedece la *Ley de gas perfecto*
- La expansión del flujo de trabajo es uniforme y estable, sin vibraciones
- Se presenta equilibrio químico entre la cámara de combustión y la composición del gas no cambia en la tobera.
- Los calores específicos de los gases de escapes, no varía con la temperatura y la presión
- El flujo de los gases es estable y constante
- Todos los gases de escape salen de la tobera únicamente con velocidad axial.

2.2.2. Geometrías y contornos de toberas El desempeño del motor cohete es dependiente del diseño aerodinámico interno en la expansión de la tobera. Los parámetros de diseño relevantes son la forma del contorno y la relación de áreas. Cada contorno convergente-divergente, genera características particulares del campo de flujo, debido a la relación entre la sección convergente, la garganta en la zona mas estrecha, y la sección divergente.

En la sección convergente entre la cámara y la garganta de la tobera, se presenta el comportamiento mas estable del flujo causando mínimas perdidas en el sistema. La sección de mayor estudio, es la sección divergente, donde se genera la aceleración del flujo para alcanzar la velocidad de escape requerida.

Las paredes de la tobera deben ser lisas y brillantes para minimizar la fricción, la absorción por radiación, y la transferencia de calor por convección, debido a las rugosidades de la superficie, espacios, orificios, bordes cortantes y salientes. En la figura 4 se presentan seis diferentes configuraciones de toberas, las tres primeras son toberas cónicas, y en forma de campana o *Bell-shaped*. Las otras tres tienen cuerpos en el interior de la tobera para compensación de altitud.

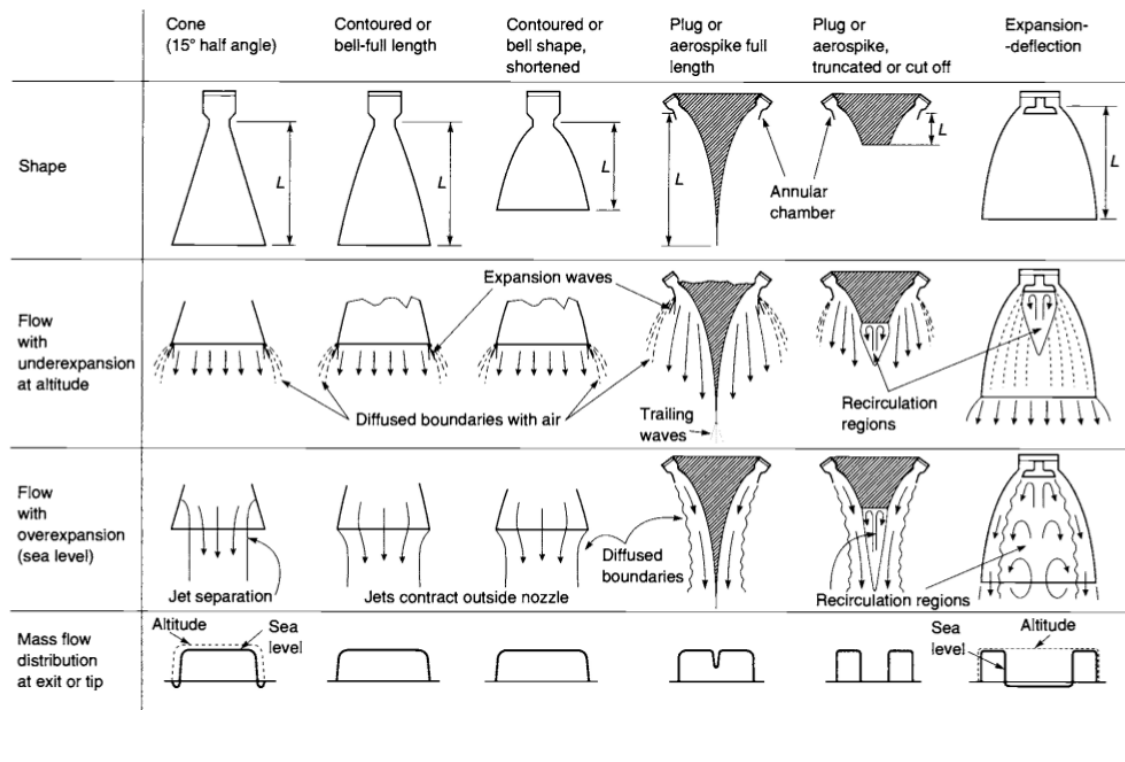


Figura 4. Diferentes configuraciones de toberas y efectos sobre el flujo de gases.
Autor: Sutton y Biblarz[1], Rocket Elements Propulsion

La forma cónica es la mas simple de las configuraciones de tobera, y por tanto la mas fácil de manufacturar. Para una tobera con un ángulo de divergencia de 30° (half angle de 15° la velocidad de escape llega a ser el 98,3 % de la velocidad calculada. El ángulo de divergencia óptimo para una tobera cónica esta entre 12° y 15° de ángulo medio (*half angle*), su valor depende de la aplicación y el vuelo que se

requiera en la misión. Un ángulo medio pequeño causa que la mayoría del momento sea axial, logrando un alto impulso específico. Sin embargo la longitud de la tobera repercute en la masa del motor, y la complejidad del diseño. Contrariamente, un amplio valor en el ángulo ocasiona un bajo desempeño.

La forma en Campana, tiene un ángulo en la sección de expansión entre 20° y 50° justo después de la garganta de la tobera. A partir de este punto la forma se rige por un contorno de pendiente hasta la salida de la tobera con un ángulo medio de aproximadamente 10° . Las condiciones del flujo de trabajo inmediatamente después de la garganta, no permiten separaciones de flujo, a menos que se presentes discontinuidades en el contorno de la tobera.

Comparando el desempeño en operación de una tobera cónica y una tobera en forma de campana, con relación de área similar y longitud, resulta mas eficiente la expansión en una tobera forma de campana. El contorno de las paredes en una tobera forma campana, minimiza las perdidas. Como se muestra en la figura ??, un 80 % de la tobera campana tiene una longitud 20 % menor en comparación con una tobera cónica 15° con la misma relación de área. Se han realizado modificaciones de la forma campana según los parámetros de una tobera ideal, para optimizar variables de desempeño, según el caso.

Tobera de Contorno Ideal Truncado (TIC)

Consiste en sintetizar contornos optimizados de tobera junto con líneas que representan la relación de áreas constantes a lo largo de la tobera, el diámetro de salida, la longitud y el coeficiente de empuje al vacío, figura 5, dando como resultado grandes longitudes en la tobera para un perfil de escape unidimensional. Sin embargo la contribución del empuje en la ultima parte del contorno termina por ser insignificante debido a las pequeñas pendientes de las paredes.

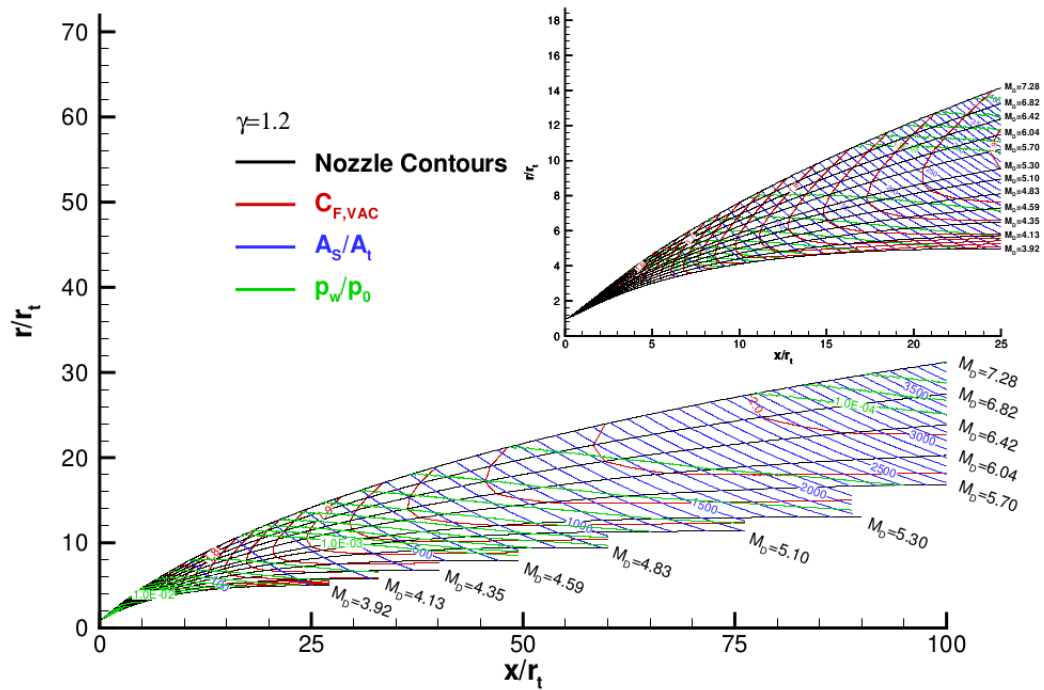


Figura 5. Técnica basada en contorno ideal truncado de tobera TIC. Autor: Jan Östlund [2]. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads.

Contorno de Empuje Optimizado (TOC)

Esta técnica esta enfocada en generar un empuje óptimo, para valores fijos de longitud de la tobera. El contorno de empuje optimizado incrementa la eficiencia geométrica comparada con una tobera cónica de 15° de ángulo medio con la misma relación de expansión. La longitud esta entre el 80 % - 100 % de una tobera cónica. También es conocida como tobera *Rao-Shmyglevsky*. En la figura 6 se muestran los parámetros de diseño del método.

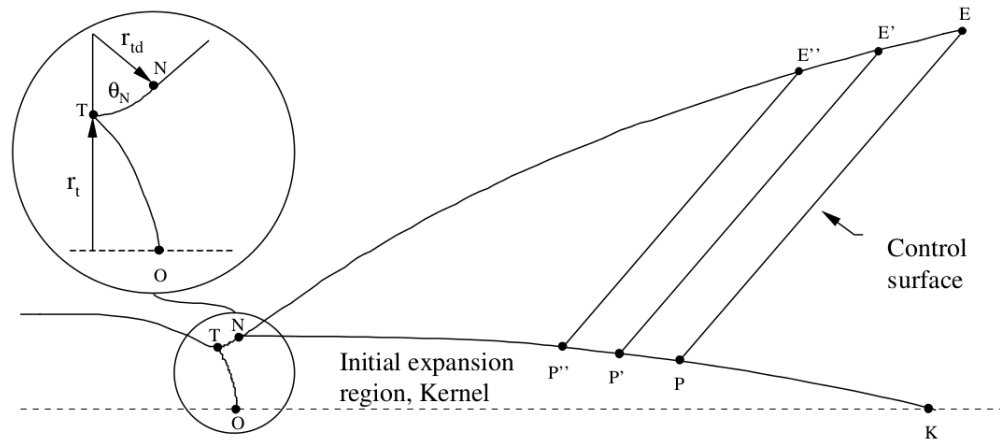


Figura 6. Contorno de tobera de empuje optimizado TOC. Autor: Jan Östlund [2]. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads.

Contorno Parabólico de Empuje Optimizado(TOP)

Basada en el contorno de empuje optimizado, se realizan modificaciones en los puntos de inflexión a la salida de la tobera. El contorno es completamente definido por cinco variables independientes aproximándose a un diseño tipo TOC, pero sin ninguna perdida significativa del rendimiento.

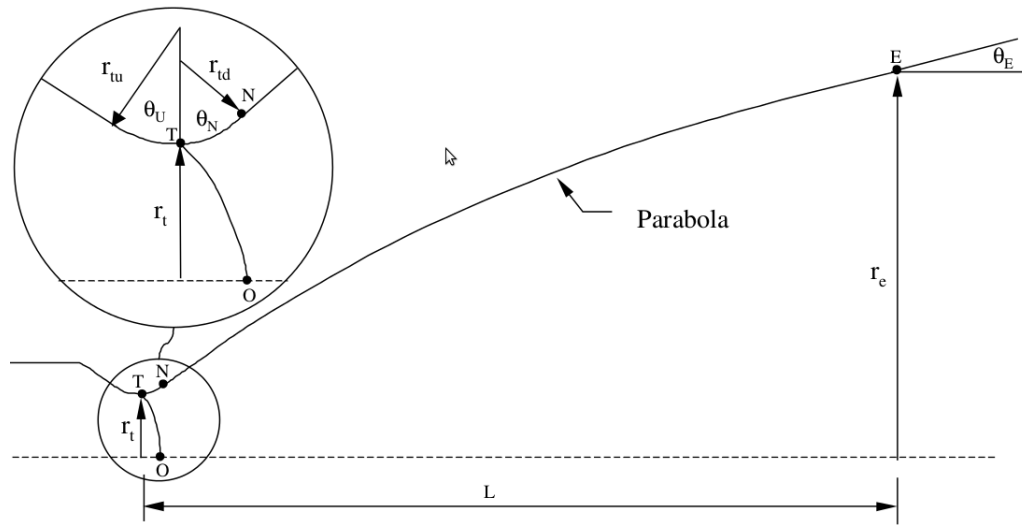


Figura 7. Contorno parabólico de tobera de empuje optimizado TOP. Autor: Jan Östlund [2]. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads.

La selección del tipo de contorno para una tobera depende de la función para la cual sea usada. Si formara parte de una segunda, o primera etapa, o un booster. Por ejemplo una tobera tipo TIC es la única que genera un flujo libre de choques, mientras la tobera cónica, la tipo TOC, y TOP, presentan choques internos en la tobera. En la figura 49 se presentan los campos de flujos según cada caso.

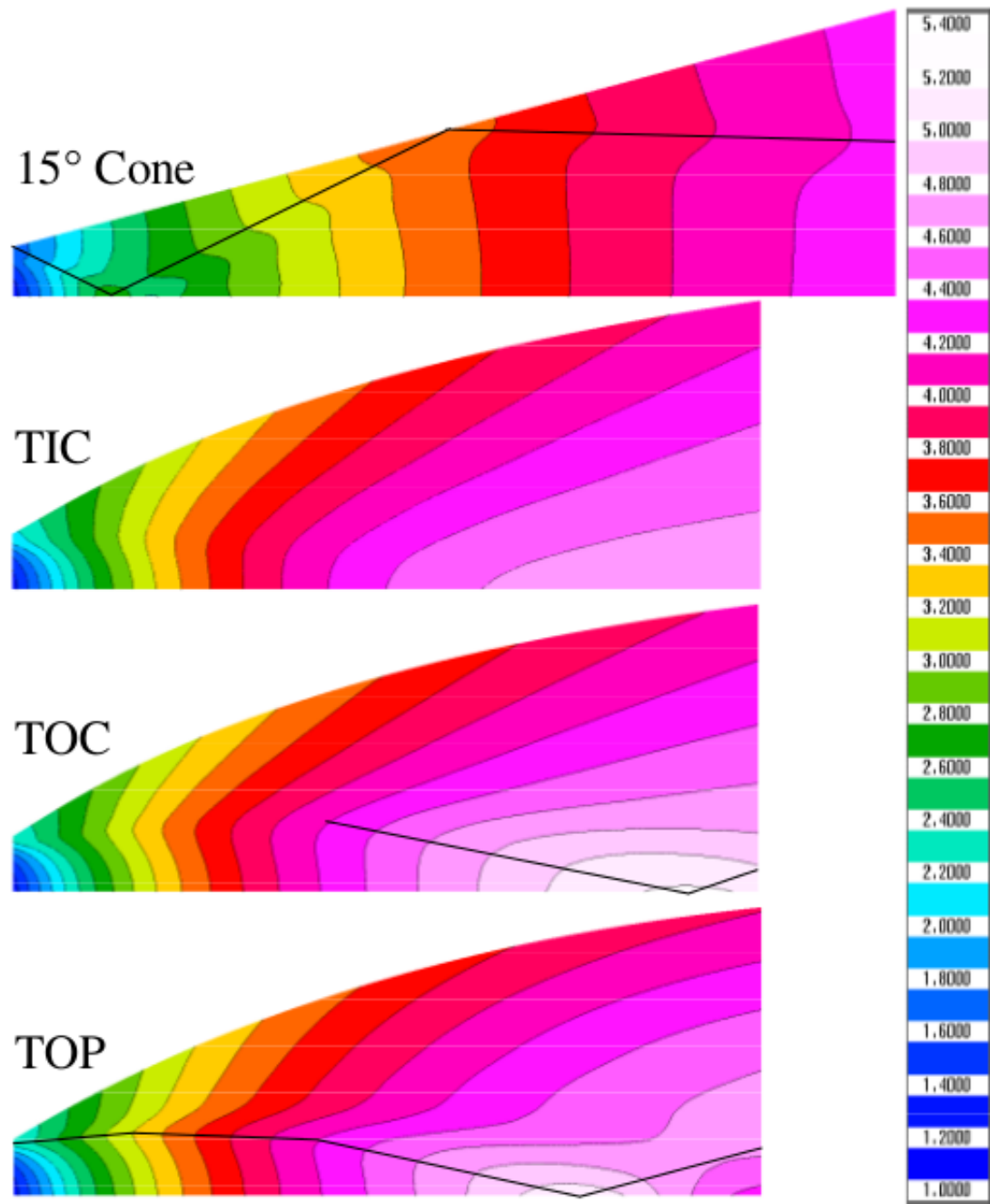


Figura 8. Distribución del numero Mach en una tobera tipo cónica 15°, tipo TIC, tipo TOC, y tipo TOP. La línea delgada indica la posición aproximada de los choques internos. Autor: Jan Östlund [2]. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads.

Los diseños clásicos están basados en modelos no viscosos, que posteriormente se complementaron con correcciones de capa límite y efectos de flujo viscoso. Sin embargo, la limitada capacidad de cómputo solo permitía cálculos de los flujos por separado, sin uso de las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) en el diseño de contornos. Ahora es posible el uso de solvers N-S en paralelo con técnicas de optimización directas sobre los diseños. Un diseño típico u optimización debe incluir los siguientes pasos:

1. Especificación de los requerimientos de diseño.
2. Establecer un parámetro como objetivo, es decir, una función objetivo.
3. Establecer un conjunto de variables o parámetros de diseño, con un valor inicial estimado.
4. Computar la función objetivo con el conjunto de variables.
5. Calcular la sensibilidad de la función objetivo ante los parámetros de diseño.
6. Generar un nuevo grupo de variables de diseño, al ser un problema de optimización.
7. Comparar la solución con los requerimientos de diseño.
8. Lograr una solución de la variable objetivo que satisfaga los requerimientos de diseño, de lo contrario, repetir el procedimiento.

De esta forma se obtiene un contorno derivado de un contorno ideal. El diseño final resultará en un modelo con mínimas afectaciones por los fenómenos de flujo en la tobera. Los diseños también se ven afectados por las limitaciones en los métodos de manufactura, precisión de medidas, sistema de enfriamiento, propiedades del material, el peso, entre otros.

2.2.3. Formación de la pluma de escape La pluma es la formación del flujo de los gases de escape calientes fuera de la tobera del cohete. Esta formación de gases no es uniforme, y contiene diferentes regiones de flujo y ondas de choque supersónicas. Es una flama brillante, con emisiones de intensa radiación en el infrarrojo, el visible y el ultravioleta. *Jan Östlund* en su tesis presenta cuatro patrones de flujo en la tobera 9.

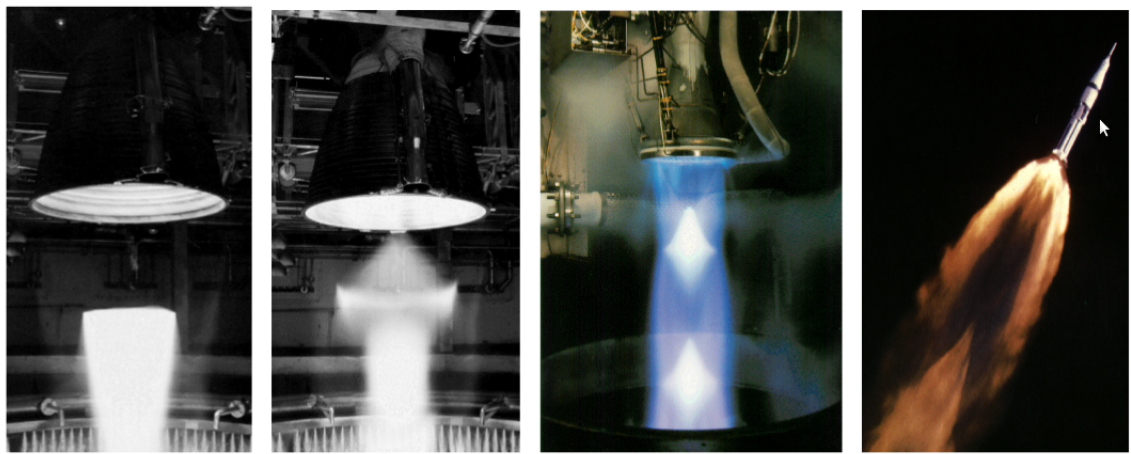


Figura 9. Patrones de flujo. a). Flujo sobreexpandido con disco Mach. b). Flujo sobreexpandido con patrones de ondas de choque. c). Flujo sobreexpandido con reflexión regular. d). Flujo subexpandido durante lanzamiento. Autor: Jan Östlund [2]. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads.

Las características de la pluma son función no solo del sistema de propulsión o el propelente, sino también del vuelo, las condiciones ambientales y la configuración del vehículo. El cambio de altura durante el vuelo, causa cambios drásticos en el tamaño y en la estructura interna de la pluma. Debido a que la velocidad de los gases de combustión es mayor a la velocidad del aire alrededor del vehículo, se generan vórtices por re-circulación del flujo inestable.

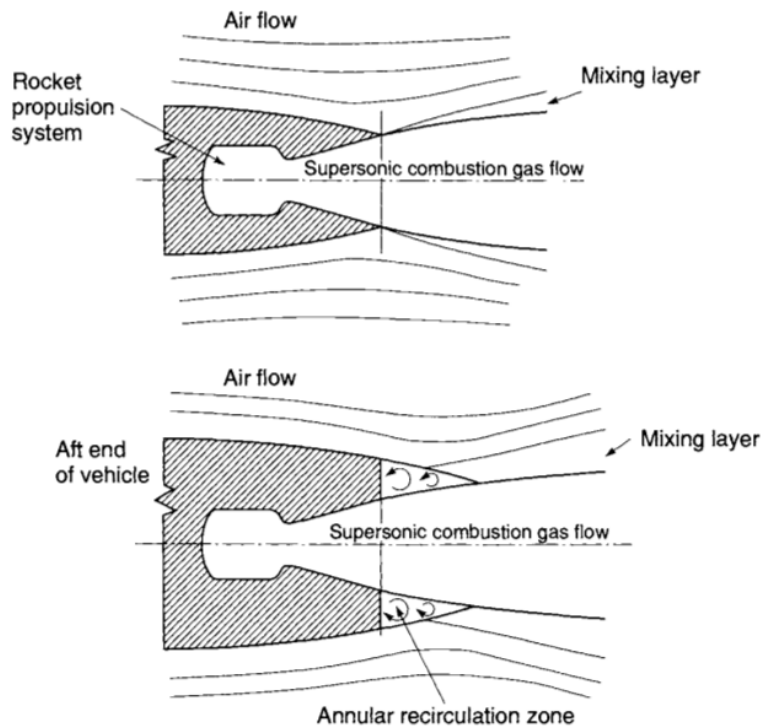


Figura 10. Diagrama de la estructura de la pluma de escape. Autor: Sutton y Biblarz [1]. Rocket Propulsion Elements.

El patrón del flujo en el vehículo puede diferir entre diferentes geometrías por estabilidad aerodinámica. En la figura se muestra la formación de patrones de flujo alrededor de la tobera.

La estructura de la pluma está compuesta por tres regiones: interna, región de transición, y externa. Internamente, el núcleo es no viscoso con una capa de mezcla externa relativamente delgada donde el oxígeno del aire se quema de forma turbulenta con las especies restantes ricas de la combustión del propelente. La región intermedia o región de transición, donde disminuyen las intensas ondas de choque y la mayoría del flujo másico es mezclado con el aire. En la región externa, el aire bajo condiciones ambientales es mezclado con los gases de escape a lo largo de la sección transversal de la pluma, y la presión local es la presión del aire.

Los flujos con poca fricción en las cercanías de la superficie pueden subdividirse en dos regiones: una capa delgada cercana a la superficie llamada capa límite sobre las paredes de la tobera, la cual es una región de flujo viscoso con una velocidad menor a la velocidad del flujo del núcleo. Y una región interna donde los efectos de la fricción son insignificantes.

En los flujos con un gradiente de presión favorable la capa límite es adherida a las paredes, si la presión aumenta en dirección del flujo principal la energía cinética es transformada en energía potencial. Sin embargo, las partículas del fluido cercanas a la pared solo tienen una pequeña proporción de energía cinética debido a su baja velocidad. El aumento de presión en las paredes al forzar el flujo en dirección contraria, causa que la capa límite se separe de la pared, y desarrolle una región de re-circulación próxima a la pared. En algunas toberas, debido a su tamaño la capa límite puede ser muy gruesa incluso de 20 mm o mas.

Por ejemplo, un flujo de gases de escape supersónico el cual emerge de la tobera, experimenta ondas de expansión tipo Prandtl-Meyer³, las cuales se adhieren al ultimo borde de la tobera, al aumentar el numero Mach de los gases en la capa externa de la pluma. En la figura se muestra la típica distribución de presión de pared. Sin embargo, cuando un flujo supersónico turbulento, es expuesto a un gradiente de presión adverso lo suficientemente fuerte como para causar la separación de flujo, este adapta el nivel de mayor presión por medio de un sistema de ondas de choque. Si la capa límite turbulenta no es capaz de contrarrestar el gradiente de presión adverso impuesto por el flujo exterior, se genera la separación de capas. Por tanto la separación en un flujo supersónico es un proceso que involucra ondas de choque. En resumen, la separación de flujos requiere la existencia de fricción y un gradiente de presión adverso en la pared del flujo a lo largo de la superficie. Si no se presenta una de estas dos condiciones, la separación de flujos no puede desarrollarse.

³Son producto del decremento de la presión en un flujo supersónico sobre una esquina convexa. También se presentan en flujos sub-expandidos en el final de la tobera.

Tampoco se presenta esta condición, si el gradiente de presión adverso es un pico.

3. ESPECIFICACIONES DEL MOTOR

3.0.1. Curva de empuje Una vez se establece la Misión a cumplir, comienza la etapa de diseño del sistema de propulsión, a partir de la curva de empuje que se define en función de las alturas a alcanzar en cada etapa del vuelo por parte del motor durante el tiempo de la misión. La curva de empuje brinda la información del empuje requerido por el cohete. Sin embargo esta curva esta restringida por otros sistemas del cohete, siendo afectada de manera relevante por el sistema estructural. Si las relaciones de masas del cohete cambian después de establecer la curva de empuje, se debe re-calcular la curva para satisfacer el vuelo.

Siendo el empuje una función de la velocidad de escape y las presiones, se deberá determinar a la distribución de las presiones y velocidades sobre la tobera a fin de calcular el empuje promedio que satisfaga la curva de empuje establecida. Por otro lado, las temperaturas son un factor de interés por las características de los materiales de fabricación para los componentes. Ya que los cohetes estándar de alta potencia o empuje suelen quemarse al sobrepasar un Mach 3.

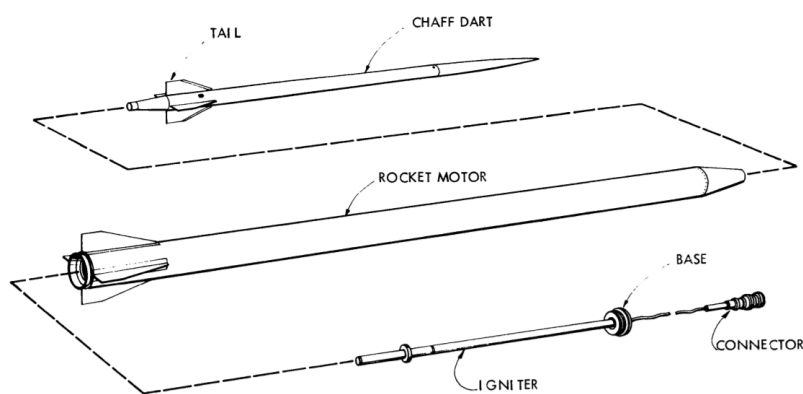


Figura 11. Componentes del cohete Super Loki Dart. Autor: NASA [3]

Para nuestro caso la curva de empuje se estableció previamente. Este proyecto se desarrolla en la etapa del diseño del sistema de propulsión para la misión, con enfoque en la tobera del motor del sistema de propulsión. Esta misión es similar al reconocido *Super Loki Dart* en requerimientos de empuje. El Super Loki fue importante en la carrera espacial sobre los años 60's para la investigación meteorológica a gran altitud (60- 100 km). La carga útil del cohete, se lleva en la punta en un dardo o sonda la cual tenía su fase de separación sobre los 90 km aproximadamente. La NASA usó este tipo de cohete ampliamente para elevar pequeñas cargas útiles, tales como radares, esferas inflables, y radiosondas.

Por medio de las curvas de empuje, específicamente con los parámetros de empuje promedio, impulso total y específico se puede establecer la similitud en los requerimientos de potencia de ambos motores. La forma de la curva es función principalmente de la forma del propelente (grano) y la relación de masas a lo largo del vuelo. Para corroborar la similitud comparamos estos de parámetros entre motores:

Parametro	Super Loki Dart	Pro150
Empuje promedio [N]	17886	23507
Impulso total [N.s]	37858	30794
Impulso Especifico [s]	232	217

Figura 12. Comparación de parámetros.

A continuación se presentan las curvas de empuje para el Super Loki y para el caso de estudio. Se anexa la carta de fabricante de un cohete con un propulsor del tipo de motor del caso de estudio como respaldo de los datos del motor. Como se planteó en los objetivos del proyecto, el motor de análisis corresponde a un motor tipo O.

Cesaroni O25000

Manufacturer:	Cesaroni Technology	Cert. Org.:	Canadian Association of Rocketry
Entered:	Feb 14, 2012	Cert. Designation:	30795-O25000-VM-P
Last Updated:	Apr 16, 2019	Cert. Date:	Jan 6, 2012
Mfr. Designation:	30795O25000-P	Average Thrust:	23507.0N
Common Name:	O25000	Maximum Thrust:	29275.0N
Motor Type:	SU	Total impulse:	30794.0Ns
Delays:	P	Burn Time:	1.3s
Diameter:	132.0mm	Isp:	217s
Length:	140.7cm	Case Info:	Pro130-
Total Weight:	23558g	Propellant Info:	Vmax
Prop. Weight:	14471g	Availability:	regular

Figura 13. Datos técnicos sobre motor de cohete Cesaroni O25000. Cesaroni Technology. Autor: ThrustCurve

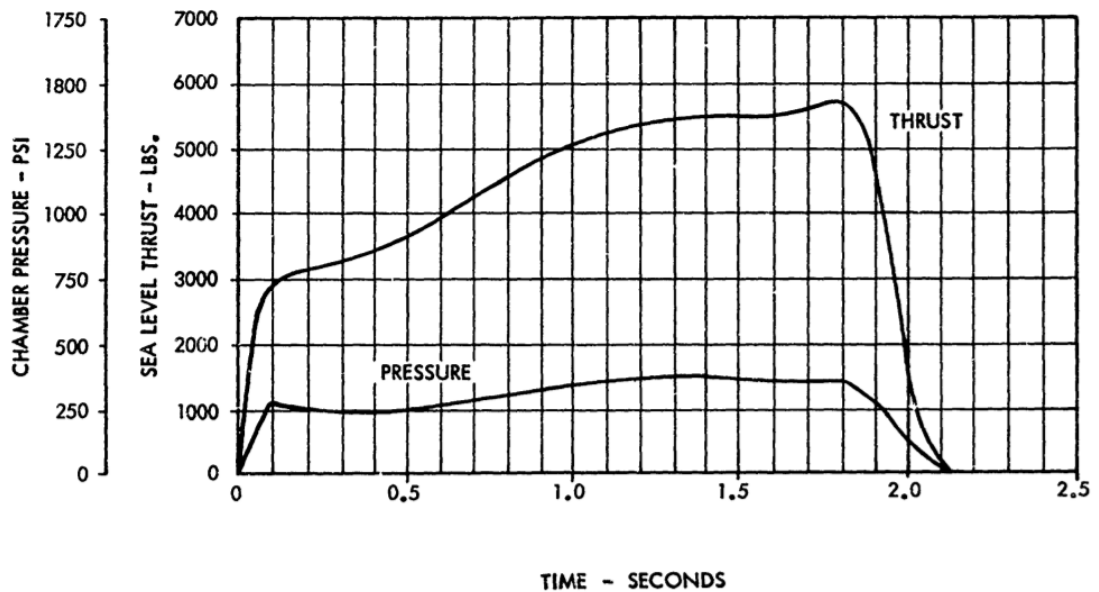


Figura 14. Componentes del cohete Super Loki Dart. Autor: NASA [4]

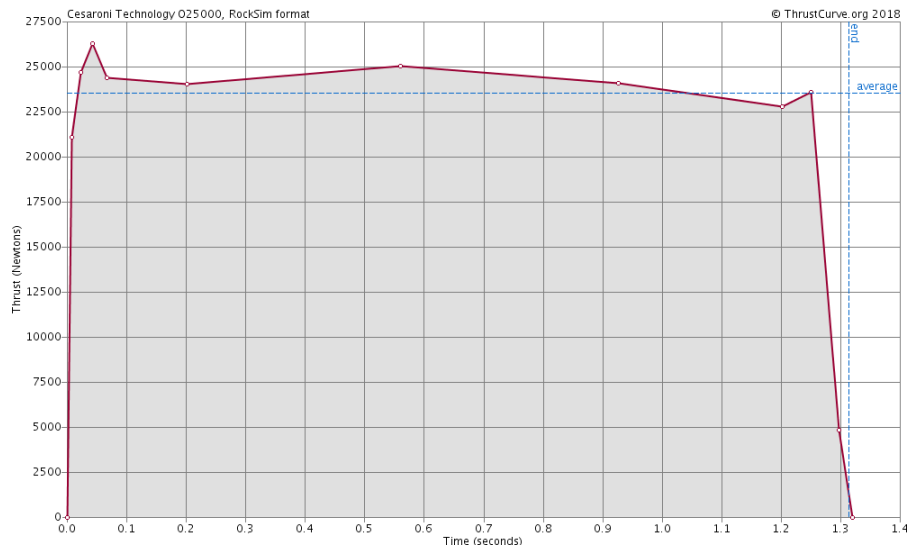


Figura 15. Curva de empuje motor Cesaroni O25000. Cesaroni Technology. Autor: ThrustCurve

3.0.2. Geometría de la tobera La geometría de la tobera del presente estudio fue definida por el grupo de Coheteria de la Universidad de Antioquia según método de diseño *Método de las características*.

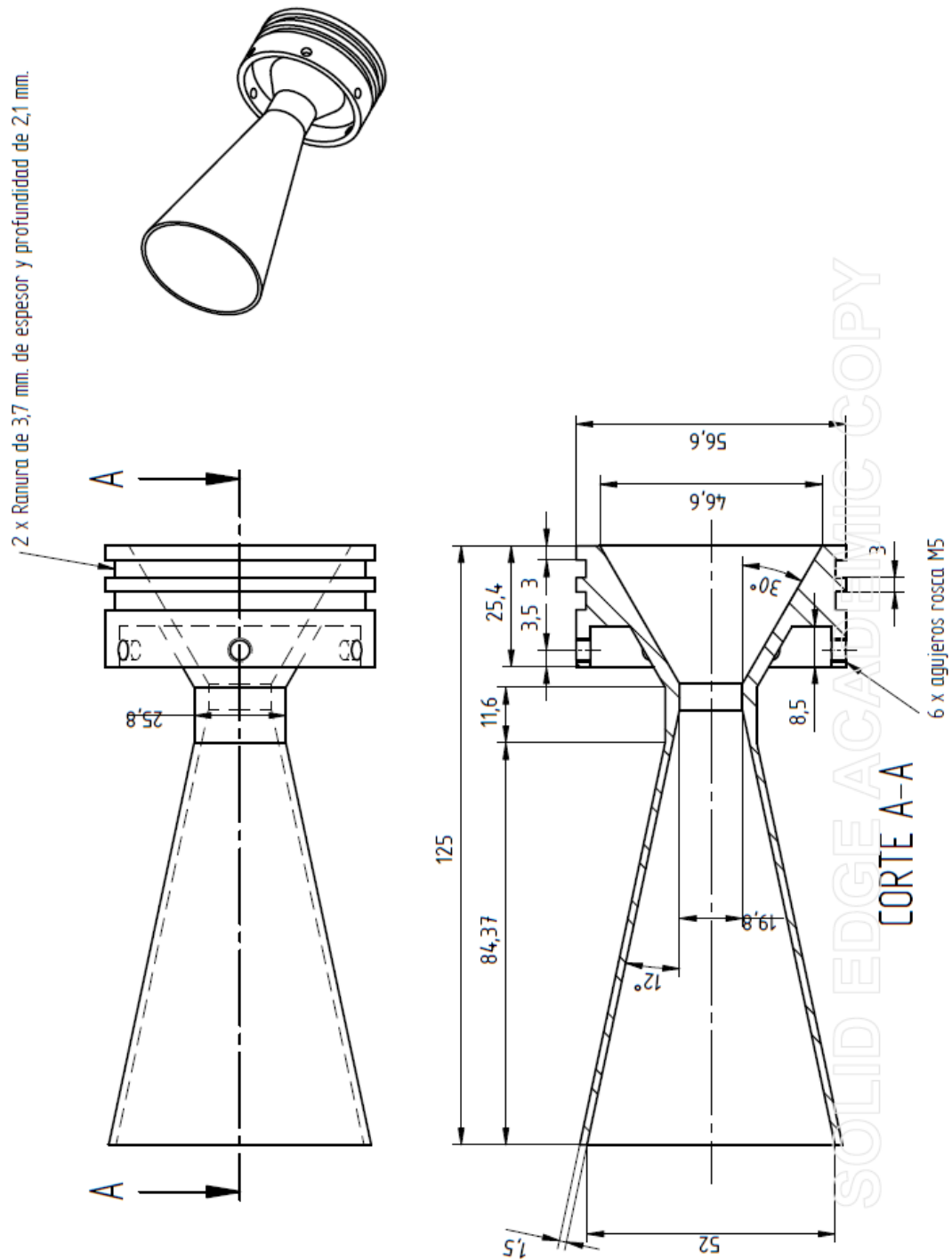


Figura 16. Tobera para motor de cohete. Autor: Grupo de Coheteria Universidad de Antioquia, Medellin -Colombia

4. DESCRIPCION DE ECUACIONES GOBERNANTES

4.1. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Las siguientes ecuaciones son presentadas para describir el comportamiento del flujo matemáticamente, a través de la conservación de la variable o propiedad de referencia en cada una de las ecuaciones. Para nuestro caso, se emplea un enfoque euleriano para el estudio de las propiedades.

4.1.1. Hipótesis generales de dinámica de fluidos

- El flujo de un continuo (i.e. uniforme y composición homogénea) es descrito por el estudio de tres propiedades específicas: masa, momento, y energía por unidad de volumen, bajo la Ley de Conservación de la Física Clásica.
- Las relaciones adicionales necesarias para una solución particular en conjunto de las ecuaciones de conservación son:

Ecuaciones de estado calórico $e = c_v T$ y $h = c_p T$

Ecuación de estado térmico $p = \rho R T$

Formulaciones para coeficientes de transporte: Coeficiente de viscosidad $\mu = \mu(T)$ y Conductividad térmica $\lambda = \lambda(T)$

- Condiciones iniciales y de frontera definidas para el problema de flujo en particular.

Por cada propiedad específica se obtiene una ecuación gobernante. A partir de la solución particular de las tres ecuaciones, se conoce el comportamiento de la velocidad V , la presión p , y la temperatura T en el flujo, donde p y T son variables

termodinámicas independientes. Las ecuaciones de conservación cuentan con cuatro variables termodinámicas adicionales: la densidad ρ , la entalpía h (o energía interna e), y los coeficientes de transporte μ y λ .

Siendo la velocidad V la propiedad mas importante de un flujo, en total se tienen nueve propiedades termodinámicas las cuales determinan la condición termodinámica o el estado de un fluido.

1. Presión P
 2. Temperatura T
 3. Densidad ρ
 4. Energía interna e
 5. Entalpía h
 6. Entropía s
 7. Calores específicos c_v y c_p
 8. Coeficiente de viscosidad dinamica μ
 9. Conductividad térmica λ
- %endmulticols

4.1.2. Formulación del modelo matemático El análisis de un volumen de control permite la formulación integral de las ecuaciones de conservación. Este análisis corresponde al *Teorema de transporte de Reynolds*.

Se considera un volumen de control τ en un flujo de fluido a través de la superficie A . Para cada elemento de una superficie da del volumen de control, se asigna un vector normal $\vec{n}$. La formulación del principio general de conservación para el volumen τ es:

Cambio temporal de la variable de conservación $\vec{U}$ en el volumen τ

- Flujo $\vec{H}$ normal $\vec{n}$ a la superficie A

= Efecto de las fuerzas de volumen $\vec{F}$ en τ

La formulación matemática integral de la ecuación de conservación es:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\tau + \oint \vec{H} \cdot \vec{n} dA = \int_{\tau} \vec{F}_{vol} d\tau \quad (18)$$

- Vector de variables conservativas con masa/volumen (ρ), momento/volumen ($\rho\vec{v}$), energía/volumen (ρE) como componentes:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (19)$$

- Vector correspondiente a la suma de los flujos y los esfuerzos. La primer componente es el flujo másico ($\rho\vec{v}$), la segunda componente es el flujo de momentos ($\rho\vec{v}\vec{v}$) sumada al tensor de esfuerzos ($\bar{\sigma}$), y la tercera componente es la suma del flujo de energía ($\rho\vec{v}E$), el efecto de los esfuerzos ($\bar{\sigma}\vec{v}$), y el flujo de calor ($\vec{q}$):

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v}\vec{v} + \bar{\sigma} \\ \rho\vec{v}E + \bar{\sigma}\vec{v} + \vec{q} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\bar{\sigma} = P - \mu \nabla \cdot \vec{v} \quad (21)$$

- Vector de fuerzas de volumen incluye la fuerza de volumen por gravedad ($\vec{f}_{vol} =$

$\rho\vec{g}$) y los efectos de la fuerza de volumen ($\vec{f}_{vol} \cdot \vec{v}$):

$$\vec{F}_{vol} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\vec{g} \\ \vec{f}_{vol} \cdot \vec{v} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Al reemplazar cada vector en la ecuación 18 se obtienen las ecuaciones de conservación en su forma integral. Ecuación de continuidad 23, ecuación de momento (Navier-Stokes) 24 y ecuación de la energía 25.:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oint_A [\rho\vec{v}] \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (23)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} d\tau + \oint_A [\rho\vec{v}\vec{v} + \vec{\sigma}] \cdot \vec{n} dA = \int_{\tau} (\rho\vec{g}) d\tau \quad (24)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho E}{\partial t} d\tau + \oint_A [\rho\vec{v}E + \vec{\sigma}\vec{v} + \vec{q}] \cdot \vec{n} dA = \int_{\tau} (\vec{f}_{vol} \cdot \vec{v}) d\tau \quad (25)$$

Para desarrollar un modelo discretizado que permita expresar algebraicamente las ecuaciones, se requiere convertir las ecuaciones de la formulación integral a una formulación diferencial. Para lograr este resultado, se aplica el teorema de Gauss o de divergencia que relaciona el flujo en un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen de limitado.

$$\oint_A \vec{H} \cdot \vec{n} dA = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{H} d\tau$$

De esta forma la ecuación 4, 1 resulta ser:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{H} d\tau = \int_{\tau} \vec{F}_{vol} d\tau \quad (26)$$

y se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{H} = \vec{F}_{vol} \quad (27)$$

El termino de la divergencia en el vector de flujos $(\nabla \cdot \vec{H})$, referencia el sistema de ecuaciones como la forma divergente de las ecuaciones conservativas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \bar{\sigma}) = \rho \vec{g} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} E + \bar{\sigma} \vec{v} + \vec{q}) = \vec{f}_{vol} \cdot \vec{v} \quad (30)$$

Estas ecuaciones corresponden a la aplicación directa de la *Ecuación diferencial general* considerando fuerzas de superficie y volumen, bajo un marco de referencia euleriano. Sin embargo en nuestro caso, la hipótesis del caso permiten simplificar las ecuaciones. De manera que las ecuaciones a resolver para el flujo bidimensional, compresible para bajo numero Mach, transitorio y viscoso, se presentan a continuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + (P - \mu \nabla \cdot \vec{v})) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} e - \vec{v}(\mu \nabla \cdot \vec{v})) = 0 \quad (33)$$

La formulacion general de las ecuaciones anteriores se simplifica al siguiente modelo: *La Ecuacion Diferencial General para sistemas termicos*:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S \quad (34)$$

- Variable dependiente

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ e \end{pmatrix} \quad (35)$$

Adicionalmente se requieren otras ecuaciones para completar el sistema de ecuaciones, en la solución del flujo compresible.

- Ecuación de estado térmico:

$$p = \rho RT$$

- Ecuaciones de estado calórico:

$$e = c_v T \quad h = e + p/\rho = c_p T \quad \text{con } c_p = \text{const. y } c_v = \text{const.}$$

Se considera la p y e iguales a:

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad \text{siendo} \quad \gamma = c_p/c_v$$

La gran mayoría de los flujos viscosos compresibles son también turbulentos. Estos flujos presentan fluctuaciones en el intercambio de energía y momento (densidad, temperatura, y velocidad), siendo necesario suponer aproximaciones para el calculo tanto del flujo de calor, como de los esfuerzos cortantes y normales. Las variables implícitas en su calculo son los coeficientes de transporte y la conductividad térmica. Sin embargo, para el caso de estudio, no se tienen en cuenta los fenómenos de turbulencia ya que el valor del numero de Reynolds es bajo.

4.1.3. Transformación de coordenadas Las ecuaciones de conservación pueden ser evaluadas para cualquier sistema de coordenadas cuando son escritas en forma tensorial. El problema de un sistema no cartesiano es derivar correctamente los componentes con gradientes o divergencia. La forma correcta de hacerlo, es

usar un factor h_i para relacionar las coordenadas curvilineas al sistema cartesiano. Considerando un sistema curvilineo (x_1, x_2, x_3) que sera relacionado a un sistema cartesiano (x, y, z) donde la longitud de arco es expresada como

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dx_2)^2 + (h_3 dx_3)^2 \quad (36)$$

El factor h_i es función de las nuevas coordenadas, de manera que el sistema que los componentes de el gradiente de un escalar ϕ es:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad (37)$$

La divergencia de cualquier vector $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ es definido asi,

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (38)$$

Y el producto cruz del vector $\vec{A}$ se define como,

$$B_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 A_2) \right] \quad (39)$$

con las mismas relaciones para B_2 y B_3 . Estas ecuaciones son suficientes para derivar las ecuaciones de conservación en un nuevo sistema de coordenadas. Por la geometría del caso de estudio, un sistema de coordenadas cilíndricas es apropiado para el caso.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (40)$$

Donde $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = 1$ y la velocidad esta compuesta por (v_r, v_θ, v_z) de

manera que las relaciones son

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (41)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (42)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (43)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (44)$$

De manera que las ecuaciones de interés, ecuación de continuidad y momento, bajo las hipótesis de flujo bidimensional -2D, compresible, transitorio, y sin sin fuerzas de cuerpo, resultan ser:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad (45)$$

Ecuación de momento:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (46)$$

5. MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

Aunque las ecuaciones de mecánica de fluidos permiten solucionar problemas de modelos físicos, estas se ven limitadas a ciertos flujos. En otros casos, las soluciones son posibles solo bajo algunas hipótesis, simplificaciones, y/o aproximaciones. Una forma de solucionar las ecuaciones, consiste en implementar herramientas computacionales a fin de incrementar significativamente la capacidad de cálculo y desempeño. De esta manera, se reducen las simplificaciones y se obtiene un resultado un mas aproximado a la realidad, pero no exacto, ya que los resultados numéricos son siempre aproximaciones y no soluciones reales.

Cuando las ecuaciones son conocidas con exactitud, la solución de las ecuaciones es directa; sin embargo cuando se consideran fenómenos (e.g. turbulencia, combustión, y flujo multifase) en el flujo, las ecuaciones exactas no están determinadas o la solución numérica no es factible. Entonces se requiere desarrollar códigos o modelos numéricos, que posteriormente deben ser validados con datos experimentales. Por lo tanto, usar métodos numéricos implica validar una solución satisfactoria del código desarrollado con las herramientas computacionales. Las características a evaluar son:

- *Precisión* respecto a la solución exacta de la ecuación original.
- La diferencia entre la ecuación discretizada y la ecuación exacta se define como *error de truncación*. Para que un código sea consistente, el error de truncación debe tender a cero al reducir el tamaño de los volúmenes de control y el tiempo de avance. Si se obtiene la ecuación original al restar el error de truncamiento, el código es *Consistente*.
- Si al incrementar el numero de iteraciones, el error disminuye o permanece

constante, la solución de la ecuación discretizada es *Estable*. La estabilidad garantiza que el código genera una solución acotada a las ecuaciones exactas.

- Al satisfacer la consistencia y estabilidad, se obtiene un código *Convergente*.

5.1. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

Con las ecuaciones del modelo matemático definidas, el siguiente paso es elegir el método de discretización de las ecuaciones. Como se menciona, el método seleccionado es el método de volúmenes finitos para la discretización numérica. Los resultados por este método son mas precisos respecto a los Elementos Finitos, ya que el error en los nodos del mallado es nulo [5].

La discretización de las ecuaciones consiste en definir sobre el volumen de control las ecuaciones del modelo matemático obteniendo una ecuación algebraica como resultado, la cual sea computada por el código para cada uno de los volúmenes de control que conforman la geometría de estudio.

5.1.1. Discretización de las ecuaciones Para discretizar las ecuaciones se considera una porción de malla bidimensional, definiendo el nodo central del volumen de control como P, y los nodos vecinos como E, W, N, y S, correspondientemente nodo este, oeste, norte y sur. El volumen de control se encuentra limitado por la malla punteada de la gráfica 17.

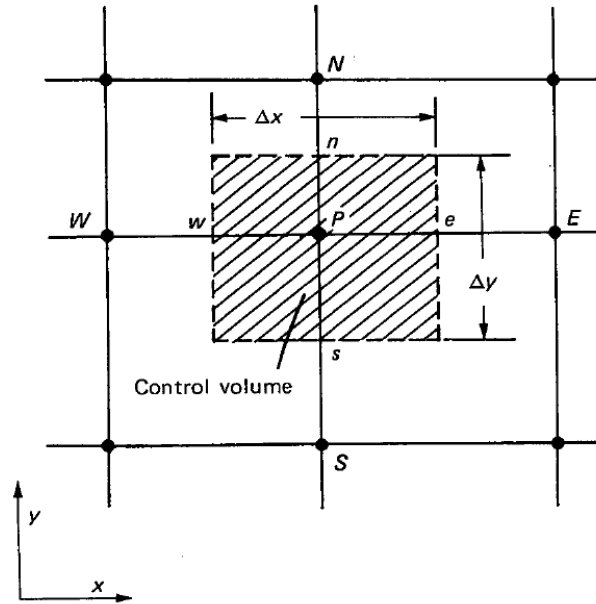


Figura 17. Volumen de control para un caso bidimensional de volúmenes finitos.
Autor: Patankar [6]

La ecuación general que simplifica las ecuaciones gobernantes discretizadas es desarrollada por Suhas V. y Patankar[6], en su libro *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (47)$$

donde a_i corresponde a los coeficientes de los volúmenes de control, b es la suma de los términos independientes de la ecuación y ϕ_i el valor de la variable dependiente en el centroide del volumen de control.

Esta ecuación se repite para cada uno de los nodos de manera que se cubre la totalidad de la malla, a fin de obtener un sistema de ecuaciones algebraicas. El método usual de solución de las ecuaciones resultantes es mediante iteraciones,

uno de los mas conocidos es el método de *Gauss-Seidel* o método punto a punto.

$$a_P \phi_P = \sum a_i \phi_i + b \quad (48)$$

Resolviendo de la siguiente manera:

$$\phi_P = \frac{\sum a_i \phi_i^* + b}{a_P} \quad (49)$$

Donde ϕ_i^* representa el valor de ϕ_i en la iteración anterior o bien el valor actualizado. La ecuación de la cantidad de movimiento, sin embargo se ve afectada por la presión del sistema. Si suponemos una variación lineal de la presión entre nodos, para la malla definida, se obtiene:

$$P_e = \frac{P_E + P_P}{2} \quad P_w = \frac{P_W + P_P}{2} \quad \rightarrow -(P_e - P_w) = \frac{P_W - P_E}{2}$$

Este resultado implica que la presión es calculada sobre una malla mas gruesa que la malla de la velocidad puesto que la distancia para la presión se definiría entre nodos, mientras que la distancia para la velocidad se define por el volumen de control. Además, se presentan variaciones de la presión entre nodos similares a las variaciones que se presentan ante un código inestable, donde estas variaciones no pueden ser percibidas como variaciones del gradiente de presión. Previniendo esta situación, se recurre a una malla *alternada o staggered*, donde la presión se define en los nodos, y las velocidades en las caras el volumen de control.

Para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se emplea el volumen de control en la figura ??a. Mientras que para la cantidad de movimiento en la dirección y , el volumen de control de la figura ??b.

De manera que las velocidades son expresadas por las siguientes ecuaciones de

acuerdo a al volumen de control:

$$\hat{i} \rightarrow a_e u_e = \sum a_i u_i + b + (P_P - P_E) \Delta y \quad u_e \approx 0.5 [u(i, j) + u(i + 1, j)] \quad (50)$$

$$\hat{j} \rightarrow a_n v_n = \sum a_i v_i + b + (P_P - P_N) \Delta x \quad v_n \approx 0.5 [v(i, j) + v(i, j + 1)] \quad (51)$$

La solución de estas ecuaciones algebraicas da como resultado el campo de velocidades, a partir una matriz de presiones inicial. Sin embargo, a medida que avanza el proceso de iteración, los resultados de la variables no resultan ser precisos, y por tanto se requieren correcciones para la presión y las velocidades. Para la corrección de la presión, se emplea la siguiente aproximación que consiste en despreciar los términos $\sum a_i u_i$ de las ecuaciones algebraicas:

$$u'_e = \frac{\Delta y (P'_P - P'_E)}{a_e} \quad (52)$$

$$v'_n = \frac{\Delta x (P'_P - P'_N)}{a_n} \quad (53)$$

Y donde finalmente las velocidades resultan ser:

$$u_e = u_e^* + u'_e = u_e^* + \frac{\Delta y (P'_P - P'_E)}{a_e} \quad (54)$$

$$v_n = v_n^* + v'_n = v_n^* + \frac{\Delta x (P'_P - P'_N)}{a_n} \quad (55)$$

Considerando ahora términos transitorios en la ecuación, el resultado es una ecuación parabólica en la que la solución proviene a través del tiempo, de la distribución inicial de la variable en cuestión. Por lo tanto, se debe determinar el valor de la variable en el tiempo $t + \Delta t$ desde los valores iniciales de la variable conocidos. Los valores antiguos son representados con el superíndice 0 y los valores nuevos sin el superíndice. La ecuación de discretización se determina integrando los términos

sobre el volumen de control como se estableció previamente.

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (56)$$

Simplificando términos de la ecuación:

$$J_e = (\rho u \phi)_e - \Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx F_e \phi_e - D_e (\phi_E - \phi_P) \quad (57)$$

$$F_e = J_{e,convectivo} \cdot \Delta y = (\rho u \phi)_e \Delta y \quad (58)$$

$$D_e = J_{e,difusivo} \cdot \Delta y = \Gamma_e \frac{\Delta y}{\delta x_e} \quad (59)$$

Y obteniendo como resultado la siguiente ecuación:

$$\frac{(\rho \phi)_P - (\rho \phi)_P^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \Delta y (J_e - J_w) + \Delta x (J_n - J_s) = S \Delta x \Delta y \quad (60)$$

Se requiere hacer una suposición de como varían la variable ϕ en el intervalo de tiempo entre $t + \Delta t$. Las formulaciones mas conocidas parten de la siguiente suposición:

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [f \phi_P + (1 - f) \phi_P^0] \Delta t \quad (61)$$

donde el termino f se denomina factor de peso ponderado que varia entre 0 y 1. Dependiendo de los valores para f la ecuación se reduce a uno de los esquemas numéricos de discretización de las ecuaciones parabólicas.

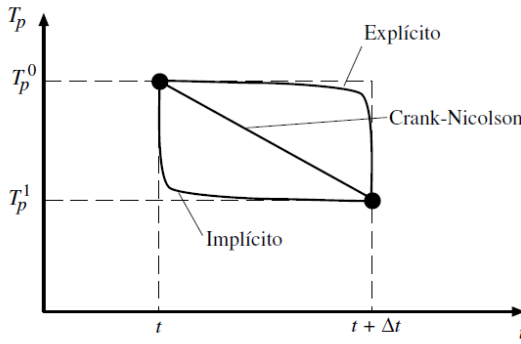


Figura 18. Variable transitorio en función del tiempo según el esquema.

- Para $f = 0$ un esquema *Explicito*: esto implica que el valor antiguo prevalece en todo intervalo de tiempo excepto cuando el valor de la variable ϕ_P cambia a un nuevo valor. Sin embargo, este esquema tiene problemas de estabilidad cuando el coeficiente inicial en el nodo central es menor a la suma de los coeficientes vecinos, por esta razón se deben aplicar restricciones al tiempo usando un criterio de estabilidad para determinar el tiempo requerido en transmitir las perturbaciones por difusión y convección. Este parámetro es conocido como numero de *Courant* y resulta ser un parámetro clave para la solución del problema.

$$\Delta t \left(\frac{\Gamma}{\rho \delta x^2} \right)_{max} \leq C_{diff} = 0.2 \quad (62)$$

$$(63)$$

$$\Delta t \left(\frac{|V|}{\delta x} \right)_{max} \leq C_{conv} = 0.35 \quad (64)$$

- Para $f = 1$ un esquema *Implícito*: este esquema supone que el valor antiguo cambia rápidamente al valor nuevo en el comienzo del intervalo de tiempo y se mantiene hasta el final del intervalo. El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias muy similar al de estado estable que no restringe el

paso del tiempo Δt , permitiendo amplios pasos de tiempo, lo cual resulta ser un procedimiento mas eficiente. Además, el esquema es bastante estable ya que los coeficientes de la variable ϕ_P siempre son positivos. Los contra del esquema son el error de truncación de primer orden en el tiempo y la necesidad de resolver una gran cantidad de ecuaciones acopladas para cada paso de tiempo, lo que resulta en un mayor tiempo computacional para la solución del sistema. La capacidad de almacenamiento es mucho mayor comparada con el esquema explícito por la misma razón.

Para $f = 0.5$ un esquema *Crank-Nicolson*: Todo esquema con un $f \neq 0$ es considerado un esquema implícito. En Crank-Nicolson se supone la variación lineal de la variable ϕ_P en el intervalo de tiempo desde el valor antiguo hasta el nuevo valor. El esquema es estable pero soluciones oscilantes e incluso inestables son posibles para grandes pasos de tiempo, debido a que esta la posibilidad de obtener coeficientes negativos. Por tanto se debe implementar un criterio de estabilidad para su implementación.

$$\Delta t \leq \frac{\rho \delta x^2}{\Gamma} \quad (65)$$

5.1.2. Condiciones iniciales y de frontera Las condiciones de frontera son establecidas por el modelo de estudio sobre la cámara de combustión por parte del diseñador del motor. Las condiciones de frontera se clasifican entre los siguientes tres (3) tipos:

- Condición de Dirichlet: se conoce el valor de la magnitud o propiedad ϕ en la frontera.

Presión de la cámara de combustión. $P_1 = P_c = 2200 KPa$.

A partir de las características del motor, se determina la velocidad del flujo unidireccional a la entrada de la tobera $V_1 = u_1 = 175 m/s$. Con el parámetro

de la temperatura y la velocidad definidos, se calcula el *numero Mach* para la condición de Frontera.

Aunque se tienen estudios detallados de combustión que permiten determinar con mejor exactitud la temperatura de de un proceso de combustión en función del propelente, este proyecto no profundizara en el tema. Valor de $T_1 = 293.15[K]K$

La relación de calores específicos es determinado por la combustión en la cámara y la composición de los gases. Los valores típicos se hallan en el intervalo $[1,1 - 1,35]$. Se utilizara $\gamma = 1,2$.

- Condición de Neumann: se conoce el valor del gradiente de la magnitud o propiedad en la dirección normal a la cara frontera.

Las paredes de la tobera no presentan conducción de calor con el exterior.

- Condición mixta: es una combinación de los casos anteriores

5.2. GEOMETRÍA Y MALLADO NUMÉRICO

Se requiere definir la geometría del modelo físico para la construcción del código. En este caso, la geometría comprende la tobera definida previamente como parámetro de entrada. La tobera fue determinada a partir del *Método de las Características* por definición de las áreas de la tobera a partir de la curva de empuje del motor de cohete. Para la construcción y discretización de la geometría (creación de malla) se utilizo el software Salome Platform. El software es libre uso y permite realizar el pre y post procesamiento de simulaciones numéricas. A continuación se presenta la geometría y la construcción de malla.

5.2.1. Construcción de la geometría La geometría definida en Salome Platform, obedece al plano de tobera presentado a continuación. Ya que la simulación es

bidimensional y axialsimétrica solo se construye la sección inferior para la formación de malla y el desarrollo de las ecuaciones discretizadas. Para la construcción de la geometría se comienza el modulo *Geometry* en la interfaz de Salome.

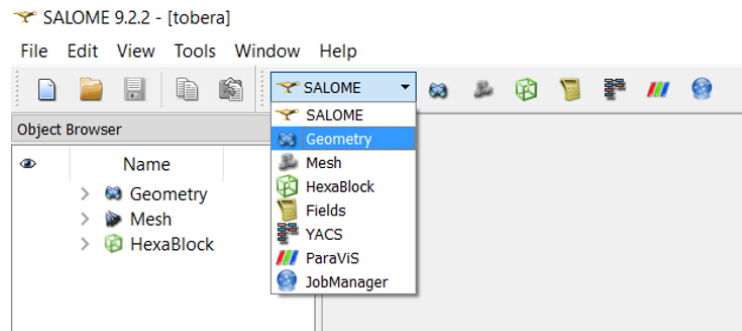


Figura 19. Plataforma de Usuario Salome Platform

Por las características de la geometría, se requiere incrementar la densidad de malla en algunas secciones de la tobera. Para incrementar la densidad de malla, se deben realizar las divisiones por medio de planos transversales sobre la superficie. Posterior a las secciones, se crea un volumen compuesto.

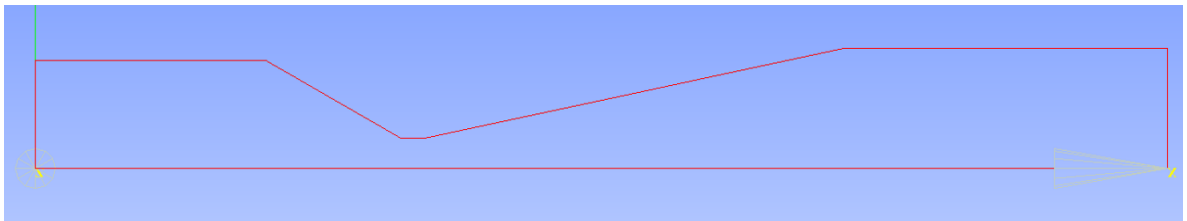


Figura 20. Salome Platform. Geometría axialsimétrica de la tobera según plano -Contornos. *Modulo Geometría.*

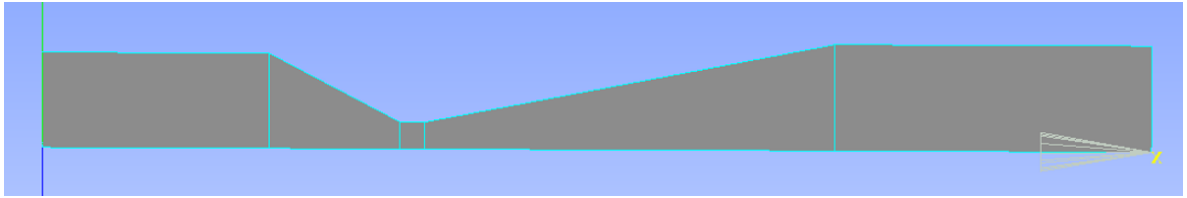


Figura 21. Salome Platform. Área axialsimétrica de la tobera según plano para estudio CFD. *Modulo Geometría.*

Áreas de la Geometría: La sección frontal de la tobera, esta conformada por el Interior del motor y la sección convergente. En esta zona se direccionan los gases de escape a la garganta de la tobera para ser posteriormente expulsados bajo el efecto de expansión térmica.

- Interior del motor
- Seccion convergente
- Area de la garganta
- Seccion divergente
- Exterior del motor

5.2.2. Generación del mallado Posterior a la geometría se definen los parámetros de mallado acorde a los requerimientos de la simulación. Para este caso se crea una malla con 30 volúmenes finitos en dirección Y -equidistantes. Este valor se mantiene a lo largo de la geometría por lo cual se incrementa la densidad de malla en la sección de menor área.

Se ingresa al modulo *Mesh* de la interfaz de Salome. El modulo permite seleccionar entre una lista de algoritmos el tipo de malla, así mismo para cada tipo de malla se tienen diferentes hipótesis con opción para los elementos 2D y elementos 1D.

Para los parámetros 2D se aplica un algoritmo *Quadrangle: Mapping*. A los parámetros 1D se selecciona una hipótesis de *Wire discretisation* con hipótesis por numero de segmentos. Como parámetro de entrada se manejan 30 volúmenes de control en dirección Y.

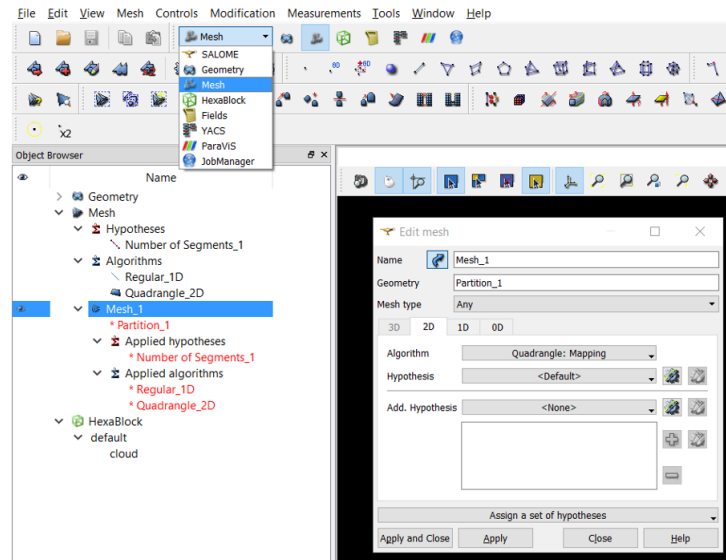


Figura 22. Salome Platfrom. *Modulo de Malla*.

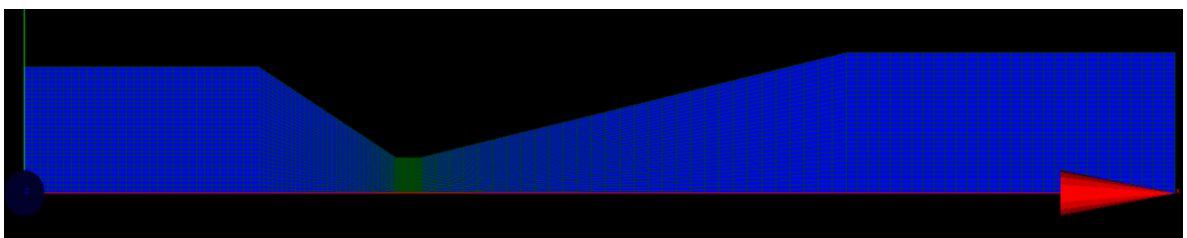


Figura 23. Salome Platfrom. Malla resultante sobre el área de la tobera.

Finalmente los resultados de la malla deben ser exportados de manera que puedan ser interpretados por el código computacional desarrollado. El archivo exportado es .DAT y contiene la información de numero de nodo, y posición en las coordenadas

X, Y, y Z. De manera que la malla recreada en Salome corresponde a la malla entre nodos, y no la malla de las fronteras de los volúmenes de control.

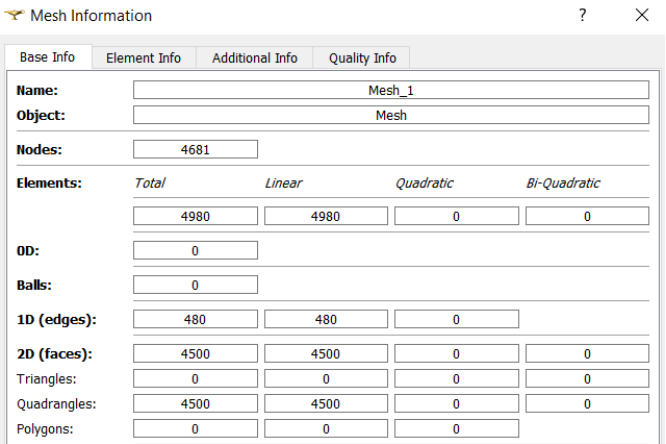


Figura 24. Salome Platform. Información de malla.

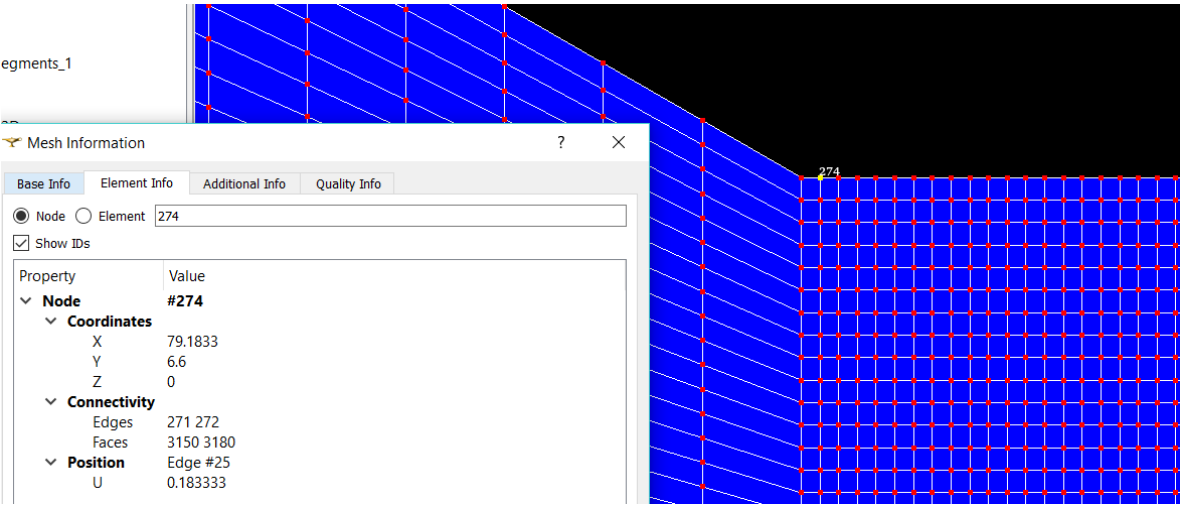


Figura 25. Salome Platform. Ubicacion de los nodos sobre la malla de la tobera.

```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
270 8.4500000000000e+01 8.8000000000004e-01 0.000000000000e+00
271 8.4500000000000e+01 6.6000000000005e-01 0.000000000000e+00
272 8.4500000000000e+01 4.4000000000005e-01 0.000000000000e+00
273 8.4500000000000e+01 2.2000000000004e-01 0.000000000000e+00
274 7.9183333333333e+01 6.6000000000000e+00 0.000000000000e+00
275 7.9366666666667e+01 6.6000000000000e+00 0.000000000000e+00
276 7.9550000000000e+01 6.6000000000000e+00 0.000000000000e+00
-----

```

Figura 26. Salome Platform. Información de nodo de malla #274

6. DESARROLLO DE CÓDIGO NUMÉRICO

Para la implementación y validación del código se resuelve el problema de difusión-convección conocido como *Driven Cavity* con el código computacional desarrollado. Normalmente, los códigos que desarrollan las ecuaciones de Navier-Stokes en incompresible son validados con este caso. En este capítulo se comparan los resultados del código con los resultados encontrados en la literatura de [7]. En segunda instancia se implementa para el caso de difusión-convección para flujo compresible en estado transitorio.

6.1. DIFUSIÓN -CONVECCIÓN INCOMPRESIBLE TRANSITORIA

6.1.1. Descripción del problema El dominio computacional es un área rectangular, donde la pared superior se mantiene en movimiento con velocidad igual a $\vec{V} = 1\hat{i} + 0\hat{j}$ mientras las otras paredes son inmóviles. El campo de velocidad inicial es uniforme en todo el dominio. Las paredes son adiabáticas, y no presentan pérdidas. La malla usada por Ghia et al. esta conformada por 129 nodos en dirección X y en dirección Y. Se evalúa para número de Reynolds igual a 100 ($Re = 100$) y número de Reynolds igual a 1000 ($Re = 1000$).

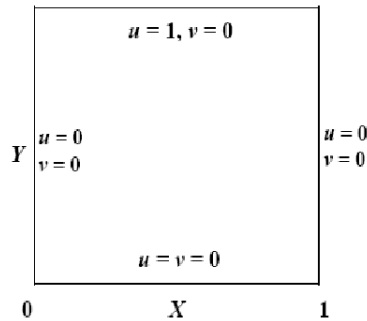
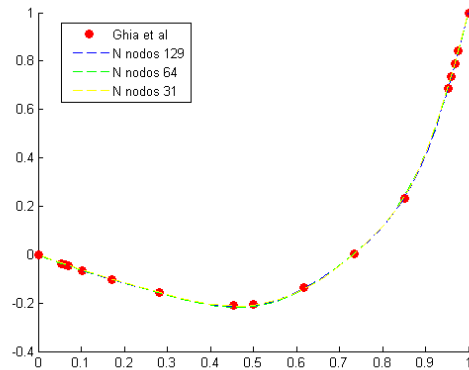
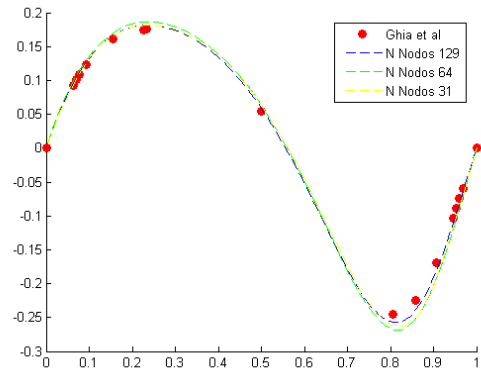


Figura 27. Caso *Driven Cavity*. Geometría y condiciones de frontera.

Los resultados de Ghia et al. para Reynolds 100 son presentados a continuación para la velocidad horizontal sobre el eje vertical para el valor medio del numero de nodos en X. Análogamente, se presentan los resultados para la velocidad vertical sobre el eje horizontal para el valor medio del numero de nodos en Y. En cada caso se evalúa el código para diferentes tamaños de malla.



(a) Perfil de la velocidad horizontal para $x = 0.5$.



(b) Perfil de la velocidad vertical para $y = 0.5$.

Figura 28. Curvas de velocidad central para sus componentes u y v . $Re = 100$, mallas uniformes 129, 64, 31.

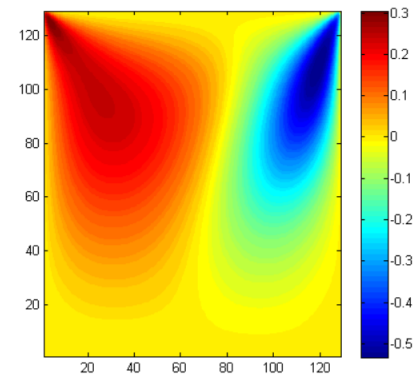
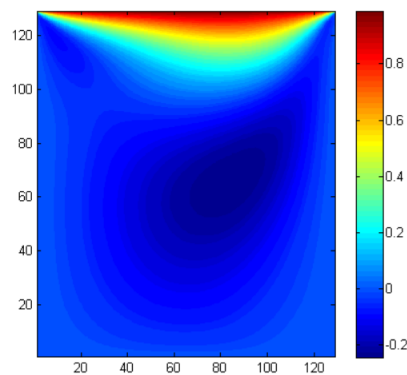
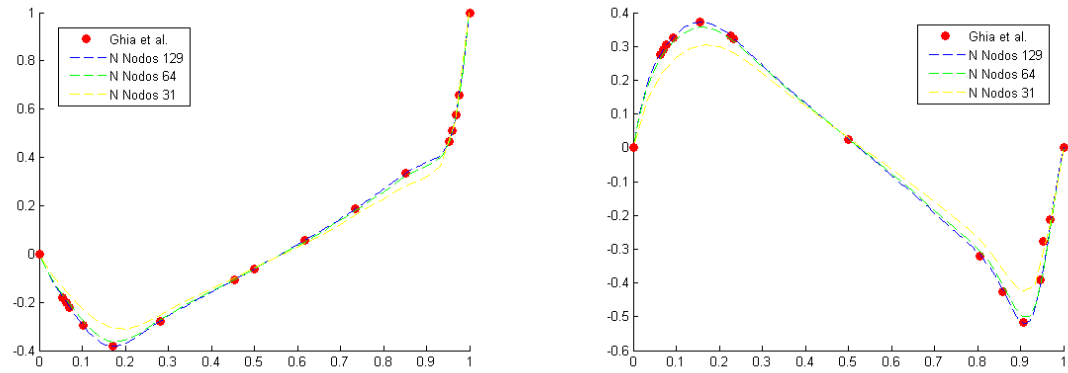


Figura 29. Campos de flujo para u y v . $Re = 100$, malla uniforme 129 x 129.

Los resultados para un Reynolds igual a 1000 son notoriamente afectados por las



(a) Perfil de la velocidad horizontal para $x = 0.5$.

(b) Perfil de la velocidad vertical para $y = 0.5$.

Figura 30. Curvas de velocidad central para sus componentes u y v . $Re = 1000$, mallas uniformes 129, 64, 31.

fuerzas convectivas que ejercen un mayor dominio sobre las fuerzas viscosas por el incremento del numero de Reynolds. A mayor velocidad, los gradientes en las zonas cercanas a las paredes incrementan por la condición de no deslizamiento.

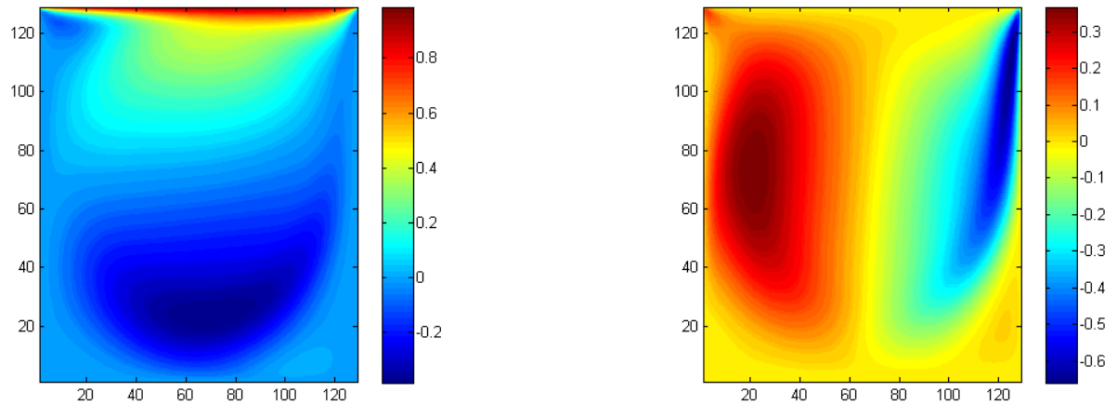


Figura 31. Campos de flujo para u y v . $Re = 1000$, malla uniforme 129 x 129.

6.1.2. Análisis de Campos de flujo Los tiempos de convergencia son afectados por el tamaño de la malla. A medida que disminuye el numero de nodos, disminuye

el tiempo de convergencia del código. Para un Reynolds 100 el error disminuyo el 73.4% del error en los primeros 11 segundos. El tiempo en CPU para computar la totalidad del código es 128.8 segundos. La culminación del código se obtiene hasta llegar al estado estacionario con un valor residual de 10^{-6} .

Para un numero de Reynolds igual a 1000, sin importar el tamaño de la malla, comparado con un Reynolds 100 el tiempo se incrementa significativamente, ya que los pasos de tiempo grandes pueden causar densidades negativas. Durante los mismos 11 segundos, en este caso solo se disminuyo un 14.5% del error durante el computo del código. El estado estable se alcanzo en 419 segundos.

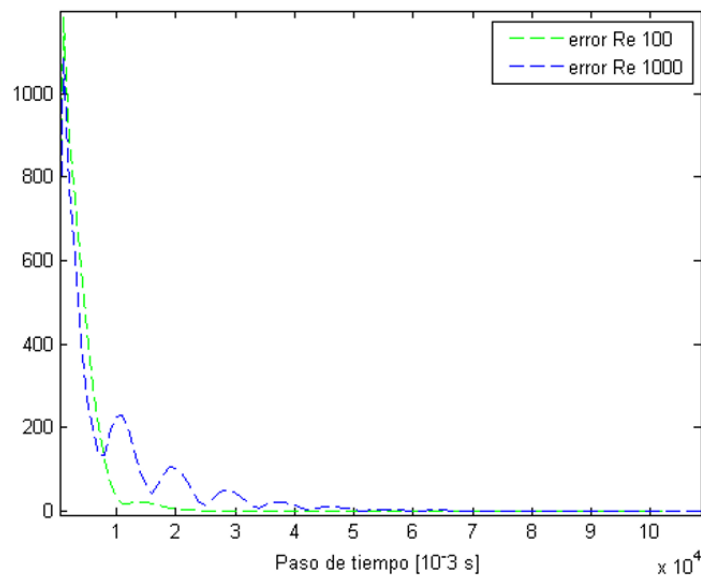


Figura 32. Comparativa de convergencia del código para $Re = 100$ y $Re = 1000$. Malla uniforme 129×129 .

Las gráficas de la figura 33 se presentan los contornos del campo de velocidades, los cuales son muy similares a los encontrados en la literatura. Igualmente se grafican los resultados del mapa de presiones. Los resultado se comparan para Reynolds 100 y Reynolds 1000.

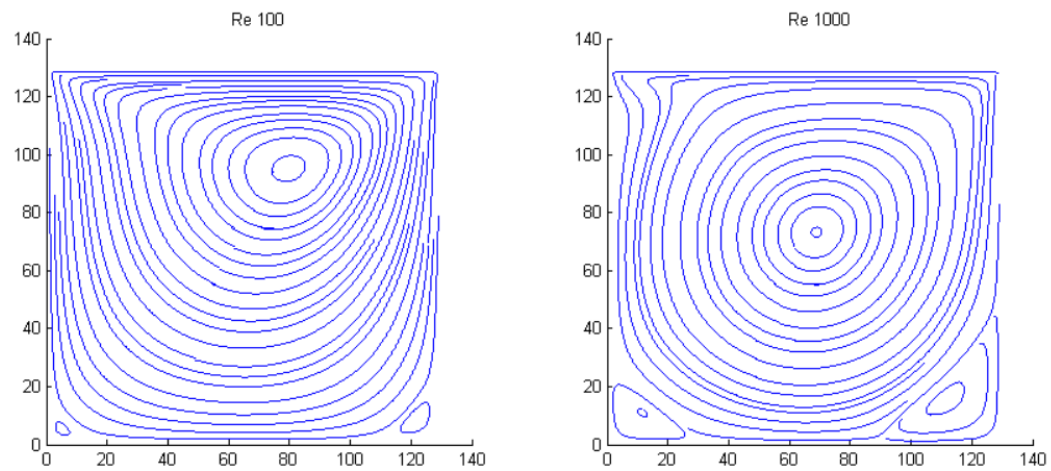


Figura 33. Contornos de velocidad para $Re = 100$ y $Re = 1000$, malla uniforme 129 x 129.

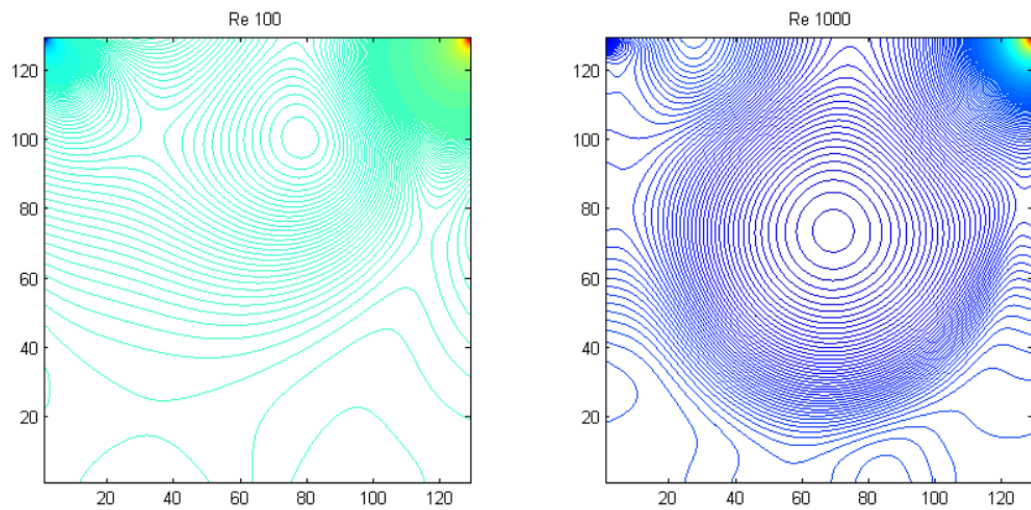


Figura 34. Distribución de presiones para $Re = 100$ y $Re = 1000$, malla uniforme 129 x 129.

Se concluye a través de las gráficas, que para un mayor numero de Reynold se debe refinar aun mas la malla a fin de obtener una solución mas aproximada a la solución

de referencia.

6.2. DIFUSIÓN -CONVECCIÓN COMPRESIBLE TRANSITORIA

6.2.1. Descripción del problema Para el caso anterior, se estudia la circulación del flujo en laminar y compresible. La pared superior se encuentra libre para movimiento a una velocidad específica de 1.0 m/s. Las demás paredes son inmóviles y adiabáticas. En el área de estudio se asume un fluido compresible. Las simulaciones se realizan para diferente número de Reynolds, bajo parámetros definidos de número Mach, altas presión y temperaturas.

Este problema ha sido resuelto a través de soluciones directas de las ecuaciones de Navier -Stokes y por modelos que incluyen variables artificiales.

- Método directo: se realizan simplificaciones las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso compresible y se modela a partir de *Coupled Strongly Implicit Procedure (CSIP)* basado en usar acoplamientos entre las variables. Este tipo de estudios está restringido por los tipos de acoplamientos entre variables.

En estudios donde el acoplamiento se realiza entre la presión y la densidad, se presentaron fluctuaciones en el acoplamiento debido a pequeñas variaciones de la densidad. La densidad se define como primera variable y la presión por medio de la ecuación de estado.

Acoplamientos entre presión y velocidad [8] fueron realizados sobre modificaciones del algoritmo SIMPLE incluyendo los efectos de la compresibilidad. La vulnerabilidad del método se encuentra en la densidad de malla, pues la presencia de términos de curvatura en las ecuaciones incrementan las pérdidas de presión con el avance entre nodos.

Chen y Pletcher [9] resolvieron el caso con las variables primitivas acopladas a la presión, es decir las componentes de la velocidad, presión y tem-

peratura, acopladas a la presión. En su estudio, los autores resolvieron las variables simultáneamente en el código sin necesidad de usar la ecuación de presión de Poisson por separado.

- Variables artificiales: se asume un flujo compresible con bajo numero Mach en la cavidad a fin de integrar un termino artificial entre las ecuaciones, que convierta el sistema de ecuaciones combinado de ecuaciones elípticas e hiperbólicas a un sistema de ecuaciones totalmente hiperbólico. Chorin en 1967 [10] y Roe en 1981 [11]. Ambos métodos se basan en linealizar la ecuación de estado en términos de la velocidad del sonido, cuya variable a su vez es función de la variación de la presión y la densidad. Al asumir un mínimo efecto de la compresibilidad sobre el flujo por el bajo numero Mach, los cambios de energía cinética y potencial del fluido, la disipación viscosa y el trabajo realizado por los cambios de presión son ignorados en la ecuación de energía [12]. De manera que, bajo estas condiciones el flujo compresible se aproxima a las condiciones de flujo incompresible.

Compresibilidad artificial fue desarrollado por Chorin. Bajo el esquema de Chorin, se satisfacen las constantes de la divergencia, adicionando en la ecuación de continuidad un termino en función de una densidad artificial y una variable de compresibilidad artificial. La compresibilidad artificial es relacionada con la velocidad del sonido. De esta manera, el problema de la ecuación de Poisson se soluciona.

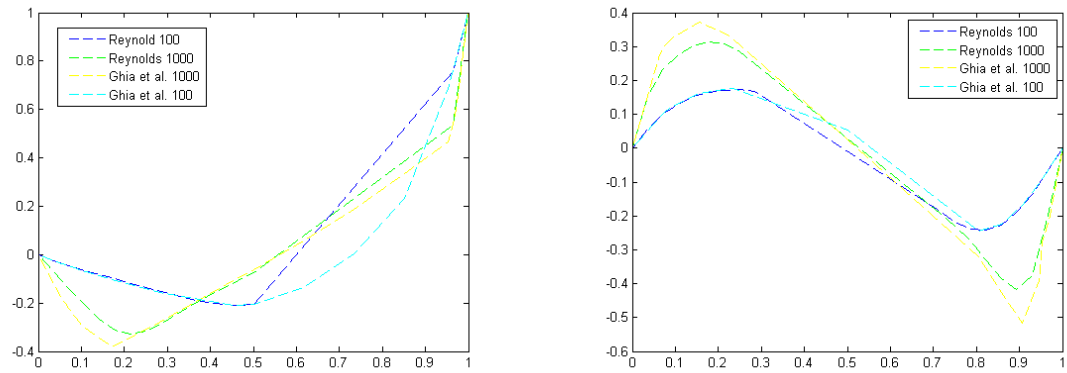
Viscosidad artificial por Roe. Correcciones a este modelo fueron presentadas por Turkel en [13], en un esquema donde usa un pre-condicionamiento que mejora la solución anulando las altas frecuencias de oscilación. Este esquema permite que la convergencia de la solución numérica dependa solo del tamaño de la malla, y sea independiente del numero de Mach, para un bajo numero Mach. En [14] se realiza el estudio del flujo compresible alrededor de

un perfil de ala NACA0012, obteniendo como resultado una solución estable para diferente numero Mach sobre el mismo tamaño de malla.

El particular en todos los casos flujo compresible es la dependencia del rango de numero Mach, y las dimensiones del volumen de control, i.e., la densidad de malla [15], [16]. En los códigos compresibles para flujo transónico o supersónico, la precisión y convergencia de la solución va disminuyendo a medida que el numero Mach tiende a cero. La necesidad de calcular flujos con bajo numero Mach o flujos compresible locales, se presenta para el estudio de casos como motores de cohete con fenómenos de poca recirculación sobre sus plumas de escape, o motores de pistón, en el estudio del inicio de la carrera del pistón para los flujos de escape o en la fase de ignición.

Las hipótesis para este caso comprende un flujo continuo, compresible, laminar, viscoso y transitorio; con una malla simétrica. El flujo es compresible, de densidad variable en función de la temperatura y la presión (*Teoría de gas ideal*). Las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de energía junto con la ecuación de estado acopladas son usadas para predecir, aproximadamente, el campo de velocidades así como la distribución interna de la temperatura y la presión en el dominio del flujo. El esquema de solución es *Coupled Modified Strongly Implicit Method -CMSIP* por Akyuzlu et al. [17]. Los resultados son contrarrestados con el caso resuelto anterior a partir de los datos Ghia et al.

Los resultados son presentados a lo largo de la línea central vertical de la malla ($\bar{y}$) y la línea central horizontal ($\bar{x}$). Los parámetros del modelo son: Tamaño de malla 31 x 31. Prandtl del fluido en la cavidad es $Pr = 1$. Temperatura inicial $T_i = 300K$. Presión $P = 101.325kPa$. El estudio se realizó para dos casos, Reynolds 100 y para Reynolds 1000.



(a) Perfil de la velocidad horizontal para $x = 0.5$.

(b) Perfil de la velocidad vertical para $y = 0.5$.

Figura 35. Comparación de componentes de la velocidad $u(\bar{y})$ y $v(\bar{x})$. Resultados *Ghia et al.* y CMSIP.

A diferencia del caso anterior, después de resolver el sistema de ecuaciones acopladas y actualizar valores, se resuelve la ecuación de energía de manera desacoplada actualizando los parámetros del flujo y revisando la convergencia de las ecuaciones.

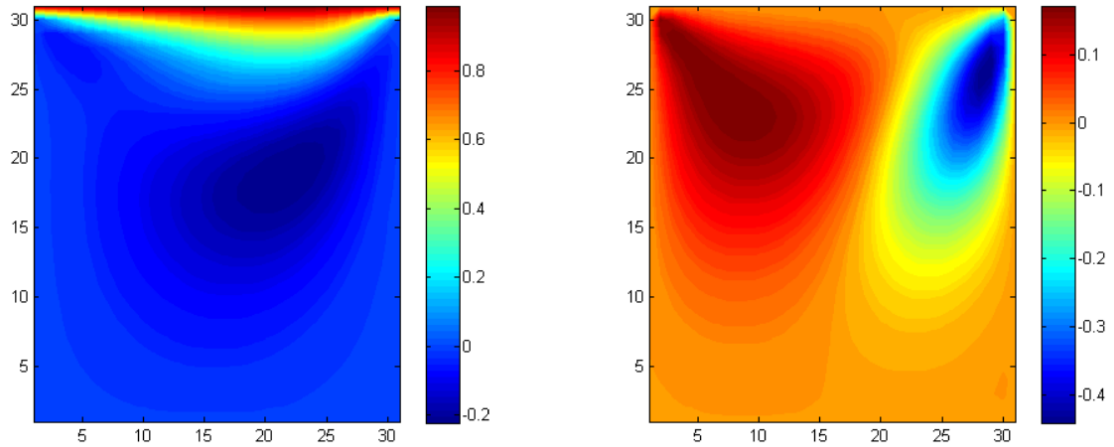


Figura 36. Campos de velocidad. Compresible. $Re = 100$. Malla uniforme 31×31 .

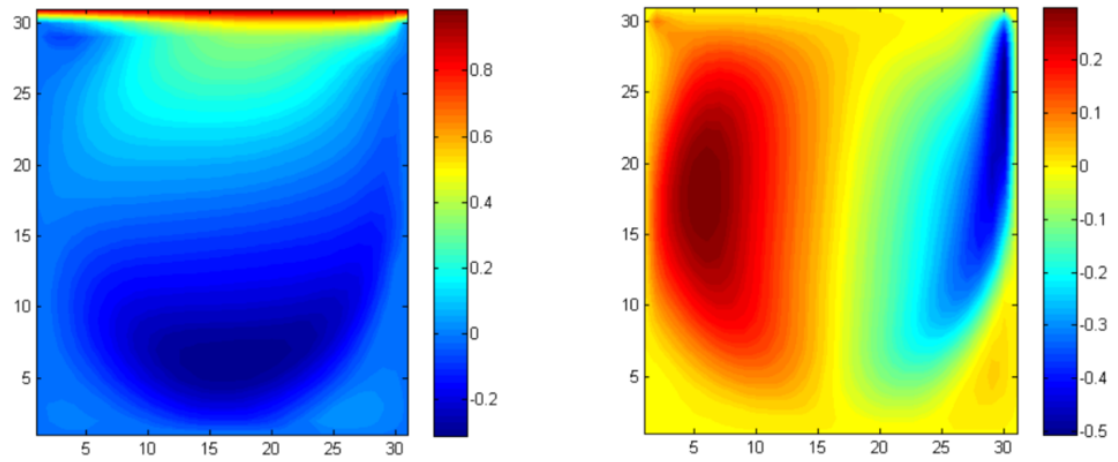
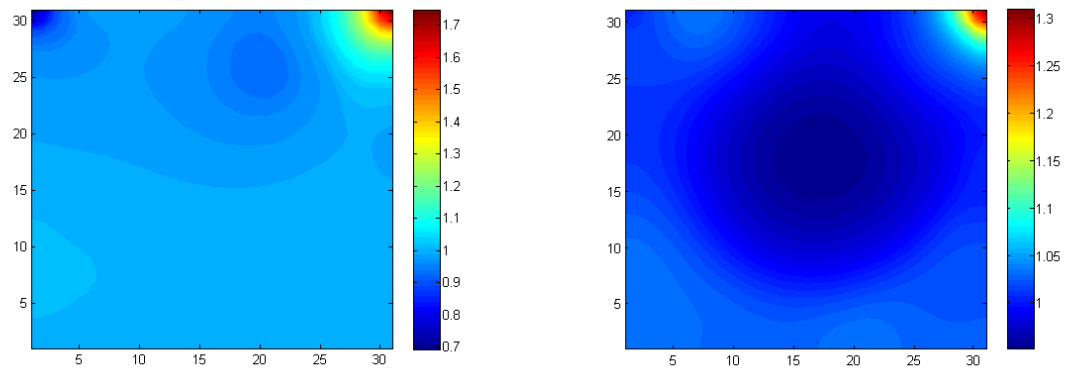


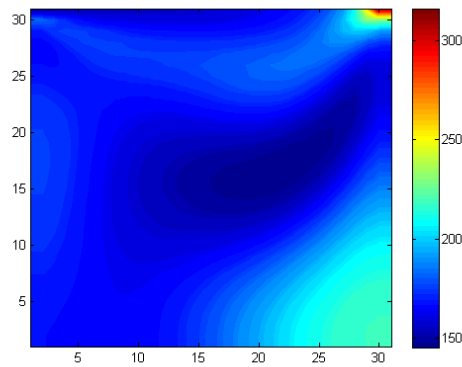
Figura 37. Campos de velocidad. Compresible. $Re = 1000$. Malla uniforme 31 x 31.



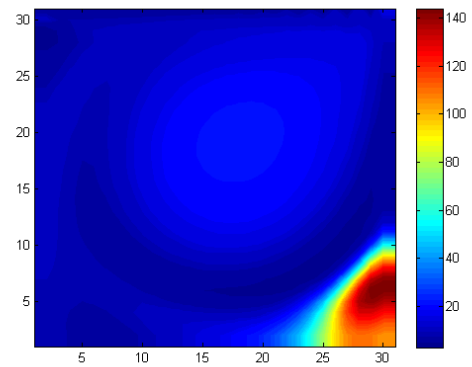
(a) Distribución de presiones. Reynolds 100. Malla uniforme 31 x 31.

(b) Distribución de presiones. Reynolds 1000. Malla uniforme 31 x 31.

Figura 38. Distribución de presiones. Reynolds 1000 y 100. Malla uniforme 31 x 31.

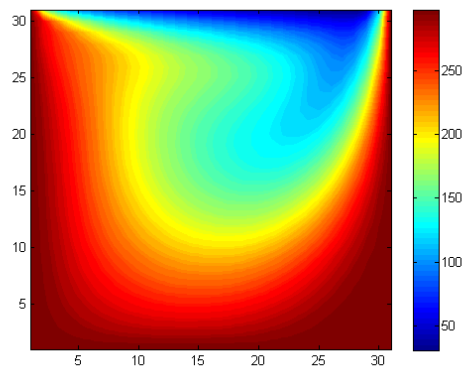


(a) Distribución de temperatura. Reynolds 100. Condición de fronteras Neumann. Malla uniforme 31 x 31.

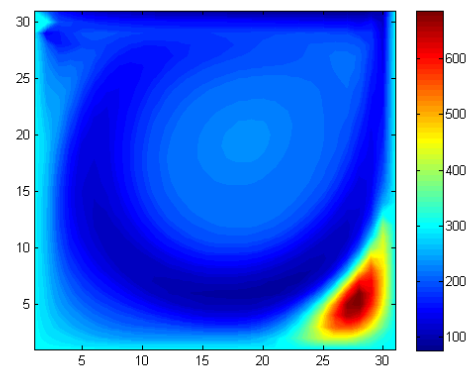


(b) Distribución de temperatura. Reynolds 1000. Condición de fronteras Neumann. Malla uniforme 31 x 31.

Figura 39. Distribución de temperatura. Reynolds 1000 y 100. Condición de fronteras Neumann. Malla uniforme 31 x 31.



(a) Distribución de temperatura. Reynolds 100. Condición de fronteras Dirichlet. Malla uniforme 31 x 31.



(b) Distribución de temperatura. Reynolds 1000. Condición de fronteras Dirichlet. Malla uniforme 31 x 31.

Figura 40. Distribución de temperatura. Reynolds 1000 y 100. Condición de fronteras Dirichlet. Malla uniforme 31 x 31.

7. CASO DE ESTUDIO: TOBERA

7.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se exponen los resultados obtenidos del estudio numérico. Las condiciones de flujo obedecen al caso *Driven Cavity Compressible*, evaluando bajo las mismas condiciones la geometría de la tobera. Las condiciones iniciales y de frontera corresponden a los parámetros de operación del motor de cohete y las hipótesis impuestas sobre la tobera.

Con el análisis de velocidades, densidad, presión y temperatura se determina la capacidad de empuje alcanzada por la tobera. En las condiciones de entrada de la tobera, las variables primitivas fueron definidas. A partir de los resultados, y considerando los parámetros de estancación para densidad ρ_o , presión P_o , y temperatura T_o , los parámetros del flujo son extrapolados en la salida de la tobera.

$$P_o = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (66)$$

$$\rho_o = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (67)$$

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right) \quad (68)$$

7.1.1. Análisis de velocidades A continuación se presenta una serie de imágenes con los contornos de velocidad y número Mach en el interior de la tobera para condiciones del exterior al nivel del mar. En la figura se observa un flujo *sobreexpandido con reflexión regular* caracterizado por la estructura diamantada de la pluma de escape. También se observa la formación de *Capa límite* en las paredes de la tobera con una velocidad menor a la velocidad del flujo en el núcleo. En general, el flujo está caracterizado por cambios bruscos en el campo de velocidades durante y después de la garganta.

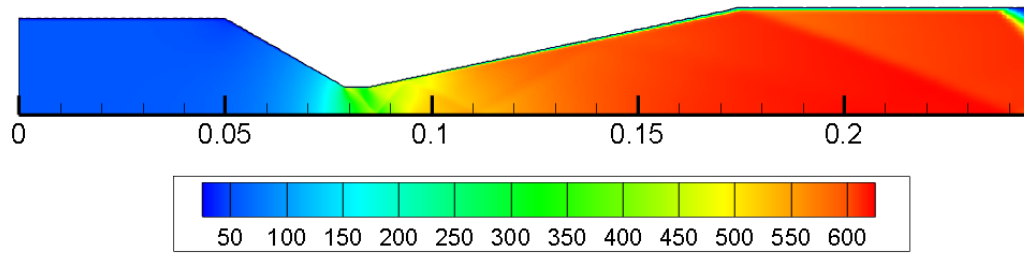


Figura 41. Distribución de velocidades en perfil de tobera.

Para un Mach uniforme a la entrada de la tobera de $M = 0.51$ y la geometría implementada, el flujo trasciende desde un valor subsónico hasta un valor supersónico a la salida de la tobera igual a $M = 2.91$; prevaleciendo la condición de $M > 1$ se clasifica la tobera de tipo supersónica. En su mayor parte, el numero Mach es constante en las secciones transversales de la tobera, y estable en dirección axial. Esta es una característica típica en los flujos en toberas.

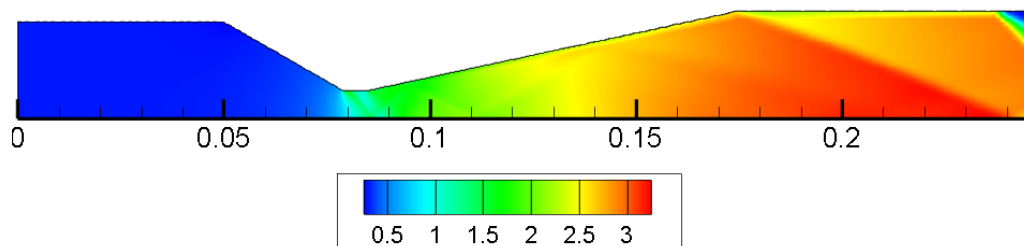


Figura 42. Distribución de numero Mach en perfil de tobera.

En la sección de la geometría correspondiente al área externa se observa sobre la esquina superior, una reflexión de choque causando un borde a la salida, sin embargo esta sección de la geometría es supuesta, y por tanto no es el área real exterior de desarrollo para la pluma de escape en condiciones reales de operación.

7.1.2. Análisis de densidad En el contorno de densidad se visualiza a pocos milímetros de la garganta de la tobera la formación de tres ondas de choque con dirección a la frontera de salida debido al flujo supersónico en la sección divergente de la tobera. La interacción entre las ondas transversales y la geometría divergente, puede causar vórtices entre la interfaz del flujo con las paredes de la tobera desde la sección convergente hasta la sección divergente pasando por la garganta de la tobera. Pero en este caso, no logran su formación.

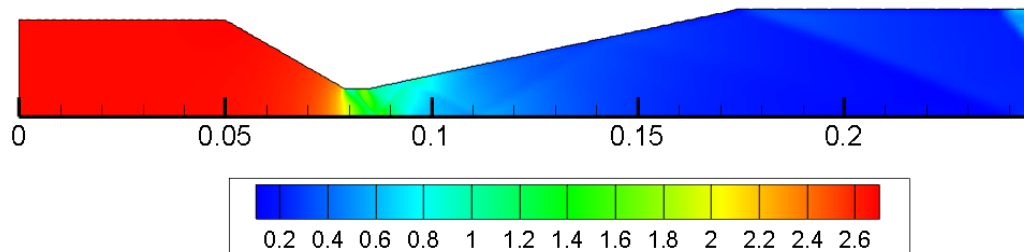


Figura 43. Distribución de densidad en perfil de tobera.

7.1.3. Análisis de presión y temperatura En los contornos de la presión, así como en el numero Mach, se logran apreciar los tres ángulos de choque inversamente proporcionales al avance a lo largo de la sección divergente. Los valores de la presión en los contornos de cada angulo, disminuyen en la misma proporción.

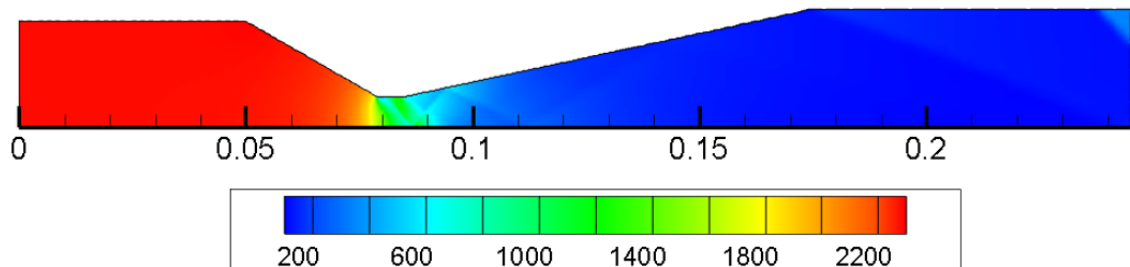


Figura 44. Distribución de presiones en perfil de tobera.

La erosión en las paredes de la tobera es causada por una fuerte interacción entre las altas temperaturas y las altas velocidades del flujo durante la operación del motor. Como se puede apreciar en la imagen, los contornos de la temperatura están condicionados el vector de la velocidad de flujo siguiendo el mismo patrón.

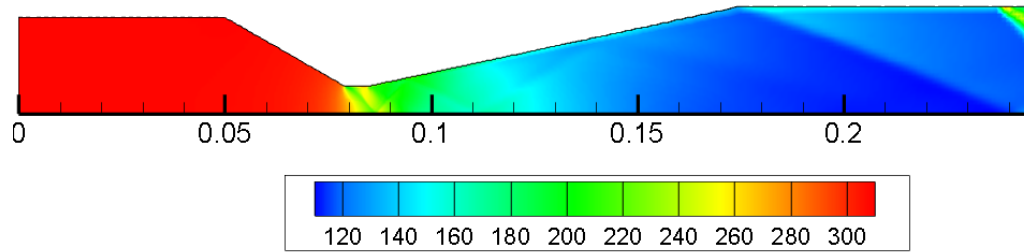


Figura 45. Distribución de temperatura en perfil de tobera.

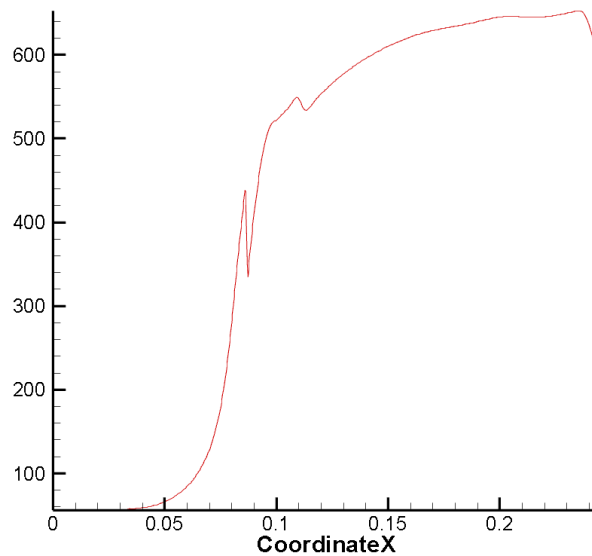


Figura 46. Comportamiento de la velocidad a lo largo del eje axial simétrico.
Velocidad a la salida de la tobera $V(x = 175mm) = 631.75m/s$

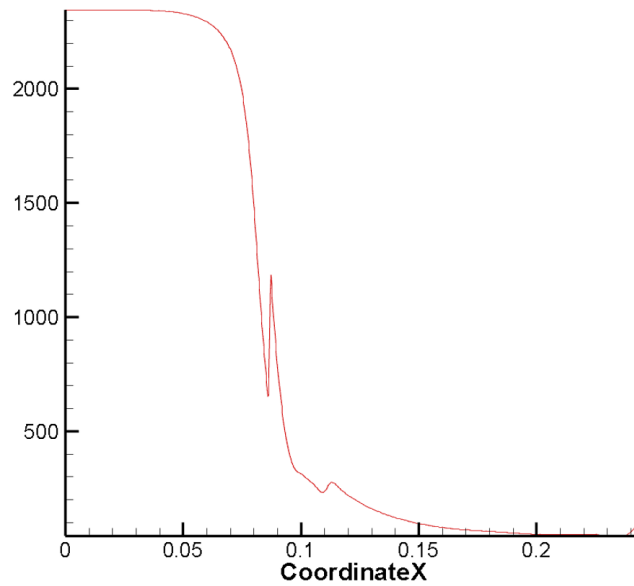


Figura 47. Comportamiento de la presión a lo largo del eje axial simétrico. Presión a la salida de la tobera $P(x = 175mm) = 64.23kPa$

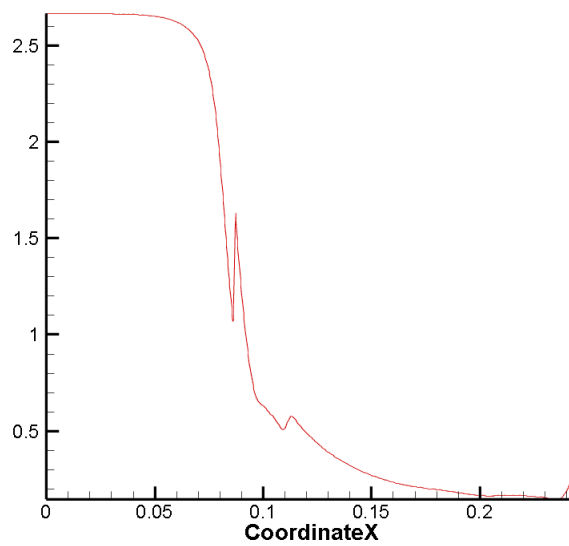


Figura 48. Comportamiento de la densidad lo largo del eje axial simétrico. Densidad a la salida de la tobera $\rho(x = 175mm) = 0.2037kg/m^3$

Acorde a los resultados en los contornos de velocidad y numero Mach, el empuje se concentra sobre el área central de la superficie de escape. A medida que se acerca a las paredes de la tobera este parámetro disminuye por condición de capa limite, proveniente de la distribución de velocidades sobre la tobera.

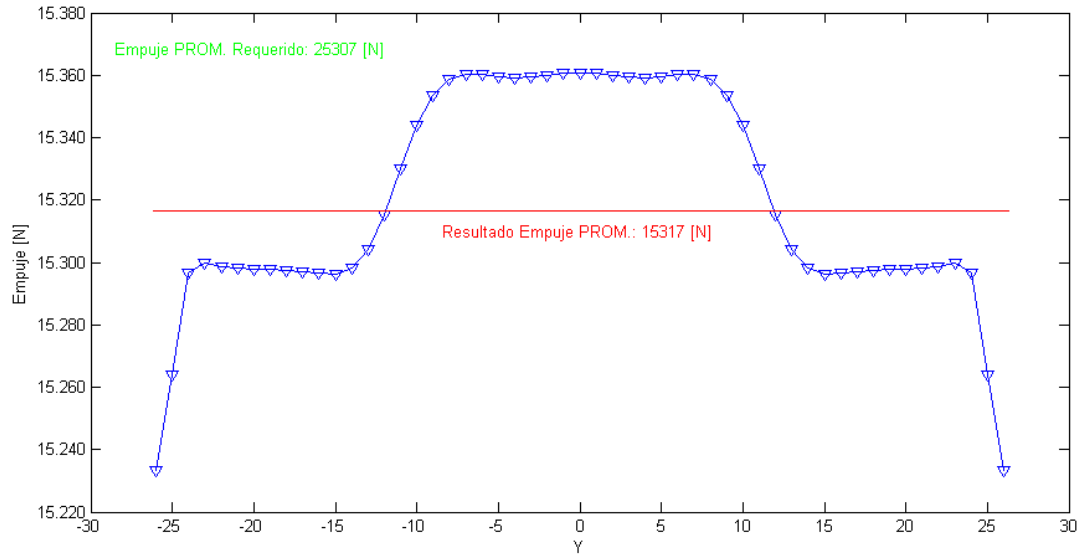


Figura 49. Curva de empuje en la tobera. Resultado sobre el Área de escape (x = 175 mm)

8. CONCLUSIONES

- Comparando los resultados del caso Driven Cavity se validó el código desarrollado para las condiciones de flujo compresible con bajo número Mach. Los resultados son buenos, lo cual indica que el modelo matemático implementado, así como la solución son correctos.
- El análisis de malla se realizó sobre la geometría rectangular, a fin de corroborar la independencia de malla al ejecutar el código sobre el caso de estudio.
- No se presenta adición o reducción de masa en la geometría rectangular, por lo que se establece que se cumple la conservación de masa. La variación conservativa de la masa, permite corroborar el análisis de flujo compresible.
- En las gráficas se presentan pequeñas formaciones de vórtices aun para un bajo número Mach en el caso de Driven Cavity compresible. En estas zonas, tanto la temperatura como la presión incrementan su valor.
- El presente método fue basado en acoplamiento de ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de continuidad y de energía, y la ecuación de estado con lo cual no se limita el código a ciertos valores de Reynolds para alcanzar la convergencia. Se puede decir que el código es auto adaptativo al tipo de flujo y a las condiciones del flujo.
- El código permite la captura de ondas de choques automáticamente sobre toda el área de estudio. Un mayor refinamiento de la malla puede mejorar la resolución de las perturbaciones del flujo induciendo un incremento en el tiempo de cómputo.

- El flujo de la tobera en las condiciones de estudio permite visualizar la estructura de *diamante*. Esto se debe a la presencia de ondas oblicuas débiles y de expansión que conforman a lo largo del flujo, por la contrapresión del ambiente exterior y las componentes de la velocidad de escape. Se establece por tanto, que la tobera durante en el arranque presenta una condición de *sobreexpansión*
- Los resultados muestran un incremento en el numero Mach desde 0.5 hasta 2.91 Mach, con lo cual se satisface el requerimiento de desarrollo de potencia por parte de la tobera. Sin embargo, se requiere incrementar la presión en la cámara combustión por encima de los 8 MPa y evaluar nuevamente sobre la geometría de la tobera el empuje generado por el motor.
- Las condiciones impuestas desde el diseño del motor (Camara de combustion) no satisfacen los requerimientos de la curva de empuje de la mision. Aunque la tobera cumple la funcion de su diseño, las condiciones de operacion limitan su alcance.

9. RECOMENDACIONES

- Para lograr mejores resultados se requiere incrementar la zona de la malla correspondiente al ambiente exterior para una mayor aproximación a la experimentación física y el recorrido del flujo.
- Aunque los resultados numéricos son buenos para el objetivo del proyecto se recomienda complementar el código con modelos de turbulencia que permitan visualizar con mayor detalle los fenómenos transitorios en la geometría de la tobera.
- El código puede obtener mejores resultados en la implementación por medio de rutinas de programación en paralelo que permitan aprovechar el uso de memoria, y optimizar los tiempos de procesamiento.
- De acuerdo a la literatura, otros perfiles de tobera son propensos a la formación de vorticidades y separación de capas en las zonas cercanas a la tobera. Conocer el desempeño del código para superficies de tobera con curvatura en las fronteras permitiría contrarrestar con la teoría el código desarrollado.
- Se recomienda para un posterior estudio integrar los cálculos de empuje del motor con el desempeño de la tobera a lo largo del ascenso a través de la atmósfera, consiguiendo la adaptación de la tobera. La adaptación se obtiene por medio de una función, entre la altura de la trayectoria y la presión ambiente. Con el estudio de tobera adaptada se van expandiendo los gases hasta la presión exterior a la altura del sistema, permitiendo encontrar el punto de diseño de la tobera donde su rendimiento es óptimo.

Bibliografía

- [1] G. P. Sutton and B. O., *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 2000.
- [2] J. Östlund, “Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads,” *Royal Institute of Technology -Kungl Teknika Högskolan*, 2002.
- [3] B. Bruce and R. L. Walker, “Super loki dart meteorological rocket system,” tech. rep., Space Data Corporation, 1968.
- [4] B. Bruce and R. L. Walker., “Design, development and flight test of the super loki dart meteorological rocket systems,” tech. rep., Space Data Corporation, 1968.
- [5] J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [6] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC Press, 1980.
- [7] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, “High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method,” *Journal Computational Physics Vol. 48*, pp. 387–411, 1982.
- [8] I. Demirdzic, R. I. Issa, and Z. Lilek, “Solution method for viscous flow at all speeds in complex domains,” in *Proceedings of the Eighth GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, 1990. Notes on Numerical Fluid Mechanics (NNFM) Vol 29.
- [9] K. H. Chen and R. H. Pletcher, “Primitive variable, strongly implicit calculation procedure for viscous flows at all speeds,” in *AIAA Journal Vol 29*, 1991.

- [10] A. J. Chorin, "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *Journal Computational Physics Vol. 2*, pp. 12–26, 1967.
- [11] P. L. Roe, "Approximate riemann solvers, parametric vectors, and difference schemes," *Journal of Computational Physics Vol. 43*, pp. 357–372, 1981.
- [12] A. Hussain, "A numerical study of compressible lid driven cavity flow with a moving boundary," Master's thesis, University of New Orleans, 2016.
- [13] E. Turkel, "Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations," *Journal Computational Physics Vol 72*, pp. 227–298, 1986.
- [14] C. Viozat and P. Sinus, "Implicit upwind schemes for low mach number compressible flows," 1997.
- [15] G. Volpe, "Performance of compressible flow codes at low mach numbers," *AIAA Journal Vol. 31*, pp. 49–56, 1993.
- [16] B. Van Leer, L. Wen-Tzong, and R. Philip, "Characteristic time-stepping or local preconditioning of the euler equations," *10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, pp. 260–282, 1991. Technical Papers.
- [17] K. M. Akyuzlu, A. Antoniou, and Y. Pavri, "A case study for compressible flow benchmarking-simulation of unsteady driven cavity flow with moving boundaries using cmsip," in *Proceedings of ASME HTFED Conference*, 2004.

Anexo A. Ecuaciones de Conservación

Ecuacion de la Energia

Convenientemente la ecuacion de la energia es escrita en terminos de calor Q y trabajo W . Con el fin de expresar estos terminos en funcion de las propiedades del fluido, se realiza el siguiente tratamiento matematico.

- La transferecia de energia, resulta ser la variacion de la energia temporalmente. La cantidad E , es la energia total, incluye no solo la energia interna, sino tambien la energia cinetica y potencial.

$$E = (e + \frac{1}{2}v^2 - \vec{g} \cdot \vec{r}) \quad (69)$$

$\vec{r}$ = desplazamiento de la unidad de volumen:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{De}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{v} \quad (70)$$

- El calor transferido a un elemento es dado por la Ley de Fourier.

$$q = -k\nabla T \quad (71)$$

En un cambio temporal del calor transferido se tiene:

$$\frac{DQ}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (72)$$

- El trabajo hecho se debe a los esfuerzos cortantes τ en las caras del volumen de control. Su cambio temporal en un analisis conservativo es funcion de las

velocidades.

En notacion indicial se expresa:

$$\frac{DW}{Dt} = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\sigma}_{ij}) \quad (73)$$

Descomponiendo el termino $\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\sigma}_{ij})$ se tiene:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\sigma}_{ij}) = \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (74)$$

El primer termino es relacionado con la ecuacion de momento,

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}_{ij} = \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{g} \quad (75)$$

resultando

$$\vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{ij}) = v \frac{Dv}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{v} \quad (76)$$

$$\frac{DW}{Dt} = v \frac{Dv}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{v} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (77)$$

Sumando la descomposicion de los tres terminos se obtiene:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad (78)$$

$$\frac{De}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{v} = \nabla \cdot k \nabla T + v \frac{Dv}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{v} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (79)$$

finalmente,

$$\frac{De}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (80)$$

Al dividir el tensor de esfuerzos $\bar{\sigma}_{ij}$ en terminos de la presion y la viscosidad,

$$\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - p \nabla \cdot \vec{v} \quad (81)$$

$$p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{Dp}{Dt} \quad (82)$$

simplificando terminos,

$$\frac{De}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{Dp}{Dt} \quad (83)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{Dp}{Dt} \quad (84)$$

El termino de los esfuerzos viscosos, es llamado *Funcion disipacion*, y es representada por la letra griega Φ :

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (85)$$

La suma de la energia interna y la relacion entre la presion y la densidad, es la entalpia. Asi mismo, se asume h proporcional a la temperatura T .

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (86)$$

$$h = C_p T \quad (87)$$

Reemplazando variables se obtiene la ecuacion que ser discretizada.

$$\frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{k}{C_p} \nabla h \right) + \Phi + \frac{Dp}{Dt} \quad (88)$$

Anexo A. Ecuaciones de Conservación

Anexo B. Código Computacional Desarrollado

El código esta conformado por tres (3) *Clases* y el código principal. En la primera clase GRID se definen los parámetros de la geometría y malla de estudio, a partir de una malla que permite recorrer cada nodo y las caras de los volúmenes de control de la malla. Las variables se almacenan en estructuras tipo vector en cada dirección, se acuerdo al sistema de referencia.

Listing 1. C++ code using listings

```
1  #include <iostream>
2  #include <cmath>
3  #include <fstream>
4  #include <string>
5  #include <cstdlib>
6  #include <vector>
7
8  using namespace std;
9
10 ////////// construction of the mesh
11 class GRID
12 {
13 public:
14     double deltax, deltax, Lx, Ly;
15     int NodosX, NodosY;
16     vector<double> NODX;
17     vector<double> NODY;
18     vector <double> FCVX;
19     vector <double> FCVY;
20     void CrearMalla();
```

```

21         void Print() const;
22     };
23
24     void GRID::CrearMalla()
25     {
26         NODX.resize(NodosX, 0);
27         NODY.resize(NodosY, 0);
28         FCVX.resize(NodosX - 1, 0);
29         FCVY.resize(NodosY - 1, 0);

```

La segunda clase PROPFISICAS, se definen las propiedades del flujo con valor escalar.

Listing 2. C++ code using listings

```

1  ///////// Definition of physical properties
2  class PropFisicas
3  {
4  public:
5      double Dviscosity, Kviscosity;
6  };

```

La tercera clase, FLOW contiene todas las funciones que resuelven el flujo entre las cuales se encuentra: Actualizaciones, calculo de paso del tiempo, calculo de constantes y coeficientes, calculo de velocidades nuevas, calculo de presiones, entre otros.

Listing 3. C++ code using listings

```

1      double ErrorMax;
2      int Flag;
3

```

```

4      GRID malla;
5      PropFisicas Propiedades;
6
7      void Datos();
8      void Preliminares();
9      void Calculo_Deltat();
10     void Calculo_VelPredictoras();
11     void Coef_Presiones();
12     void Solver_Presiones();
13     void Calculo_VelocidadesNuevas();
14     void Actualizaciones();
15     void Imprimir() const;
16 };

```

La función del paso del tiempo se define de acuerdo a criterios de estabilidad.

Listing 4. C++ code using listings

```

1 void FLOW::Calculo_Deltat()
2 {
3     for (int i = 1; i < malla.NodosY; i++)
4     {
5         for (int j = 1; j < malla.NodosX - 1; j++)
6         {
7             Relacion = abs(U[i][j]) / (malla.NODX[j + 1] ←
8                 - malla.NODX[j]);
9             Delta_tnew = 0.35 / Relacion;
10            if (Delta_t > Delta_tnew)
11            {
12                Delta_t = Delta_tnew;
13            }
14        }
15    }
16 }

```

```

15
16     for (int j = 1; j < malla.NodosX - 1; j++)
17     {
18         Delta_t2 = 0.2 / (Propiedades.Kviscosity / pow((←
19             malla.NODX[j + 1] - malla.NODX[j]), 2));
20         if (Delta_t > Delta_t2)
21         {
22             Delta_t = Delta_t2;
23         }
24     }

```

Para realizar los cálculos de las variables, se definen los vectores para almacenar los datos en cada una de las funciones del código.

Listing 5. C++ code using listings

```

1  class FLOW
2  {
3  public:
4      double Delta_t, Delta_tnew, Delta_t2, Relacion;
5      double tiempo, t;
6      double iteraciones;
7
8      vector< vector<double> > U;
9      vector< vector<double> > Up;
10     vector< vector<double> > Unew;
11
12     vector< vector<double> > V;
13     vector< vector<double> > Vp;
14     vector< vector<double> > Vnew;
15
16     vector< vector<double> > rho;

```

```

17     vector< vector<double> > rhop;
18     vector< vector<double> > rhonew;
19
20     vector< vector<double> > Piniciales;
21     vector< vector<double> > Pactuales;
22
23     vector< vector<double> > Tiniciales;
24     vector< vector<double> > Tactuales;
25
26     vector< vector<double> > ap_u;
27     vector< vector<double> > ae_u;
28     vector< vector<double> > aw_u;
29     vector< vector<double> > as_u;
30     vector< vector<double> > an_u;
31
32     vector< vector<double> > ap_v;
33     vector< vector<double> > ae_v;
34     vector< vector<double> > aw_v;
35     vector< vector<double> > as_v;
36     vector< vector<double> > an_v;
37
38     vector< vector<double> > ap;
39     vector< vector<double> > ae;
40     vector< vector<double> > aw;
41     vector< vector<double> > as;
42     vector< vector<double> > an;
43     vector< vector<double> > b;

```

Listing 6. C++ code using listings

```

1 void FLOW::Preliminares()
2 {

```

```

3      malla.CrearMalla();
4      //malla.Print();
5      U.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1, 0));
6      V.resize(malla.NodosY - 1, vector<double>(malla.NodosX, 0));
7      rho.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1, 0)↵
      );
8
9      Up.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1, 0)↵
      ;
10     Vp.resize(malla.NodosY - 1, vector<double>(malla.NodosX, 0)↵
      ;
11     rhop.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1, ↵
      0));
12
13     //For the new velocities
14     Unew.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1, ↵
      0));
15     Vnew.resize(malla.NodosY - 1, vector<double>(malla.NodosX, ↵
      0));
16     rhonew.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX - 1,↵
      0));
17
18     // For the Coefficients of the pressures
19     ap.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 1));
20     ae.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 0));
21     aw.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 0));
22     as.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 0));
23     an.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 0));
24     b.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, 0));
25
26     //To resolve the pressures and temperatures
27     Piniciales.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX,↵
      50));

```

```

28     Pactuales.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, ←
        0));
29     Tiniciales.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, ←
        50));
30     Tactuales.resize(malla.NodosY, vector<double>(malla.NodosX, ←
        0));
31
32     //For the solver
33     t = 0.0;
34     iteraciones = 0;

```

Función de calculo de los coeficientes de las presiones

Listing 7. C++ code using listings

```

1 void FLOW::Coef_Presiones()
2 {
3     // Interior nodes
4     for (int i = 1; i < malla.NodosY - 1; i++)
5     {
6         for (int j = 1; j < malla.NodosX - 1; j++)
7         {
8             ae[i][j] = (malla.FCVY[i] - malla.FCVY[i - ←
                1]) / (malla.NODX[j + 1] - malla.NODX[j]) ←
                ;
9             aw[i][j] = (malla.FCVY[i] - malla.FCVY[i - ←
                1]) / (malla.NODX[j] - malla.NODX[j - 1]) ←
                ;
10            an[i][j] = (malla.FCVX[j] - malla.FCVX[j - ←
                1]) / (malla.NODY[i + 1] - malla.NODY[i]) ←
                ;
11            as[i][j] = (malla.FCVX[j] - malla.FCVX[j - ←
                1]) / (malla.NODY[i] - malla.NODY[i - 1]) ←

```

```

12         ;
13         ap[i][j] = ae[i][j] + aw[i][j] + an[i][j] + ↵
14         as[i][j];
15     }
16     // north frontier
17     for (int j = 1; j < malla.NodosX - 1; j++)
18     {
19         as[malla.NodosY - 1][j] = (malla.FCVX[j] - malla.↵
20         FCVX[j - 1]) /
21         (malla.NODY[malla.NodosY - 1] - malla.NODY[↵
22         malla.NodosY - 2]);
23         b[malla.NodosY - 1][j] = 0.0;
24         ap[malla.NodosY - 1][j] = as[malla.NodosY - 1][j];
25     }
26     // southern frontier
27     for (int j = 1; j < malla.NodosX - 1; j++)
28     {
29         an[0][j] = (malla.FCVX[j] - malla.FCVX[j - 1]) / (↵
30         malla.NODY[1] - malla.NODY[0]);
31         b[0][j] = 0.0;
32         ap[0][j] = an[0][j];
33     }
34     // East frontier
35     for (int i = 1; i < malla.NodosY - 1; i++)
36     {
37         aw[i][malla.NodosX - 1] = (malla.FCVY[i] - malla.↵
38         FCVY[i - 1]) /
39         (malla.NODX[malla.NodosX - 1] - malla.NODX[↵
40         malla.NodosX - 2]);
41         b[i][malla.NodosX - 1] = 0.0;
42         ap[i][malla.NodosX - 1] = aw[i][malla.NodosX - 1];
43     }

```

```

38      //West frontier
39      for (int i = 1; i < malla.NodosY - 1; i++)
40      {
41          ae[i][0] = (malla.FCVY[i] - malla.FCVY[i - 1]) / (↵
                     malla.NODX[1] - malla.NODX[0]);
42          b[i][0] = 0.0;
43          ap[i][0] = ae[i][0];
44      }
45 }

```

Anexo B. Código Computacional Desarrollado