

EL TEOREMA DE DESARGUES DESDE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

HÉCTOR FABIÁN HERRERA HERRERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2023

EL TEOREMA DE DESARGUES DESDE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

HÉCTOR FABIÁN HERRERA HERRERA

Trabajo de Grado para optar al título de  
Matemático

Directora

Claudia Inés Granados Pinzón

Doctora en matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2023

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mis padres y a mis hermanas, juntos fueron mi mayor impulso para cumplir satisfactoriamente con este logro.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios Nuestro Señor quien en su infinito amor y misericordia iluminó mi camino para culminar satisfactoriamente este trabajo y puso en mi vida a personas maravillosas que siempre me animaron y cuya presencia fue luz en mi vida en momentos en los que todo parecía perdido.

Agradezco a mi madre quien siempre confió en mí y me apoyó para terminar este trabajo.

Agradezco a mi padre y a mis hermanas que fueron una gran motivación en este periodo de investigación.

Agradezco a la profesora Claudia quien me ayudó a que este sueño de ser matemático UIS fuera una realidad para mí. Gracias profe, sin usted, este logro no sería hoy una realidad y estaré eternamente agradecido. Gracias también profe porque usted ha sido un ejemplo a seguir para mí como persona y como profesora.

Agradezco a la profesora Tulia, mi profesora de estadística, quien confió en mí y me ayudó a vivir la experiencia más inolvidable de mi vida: mi intercambio a México.

Agradezco a los profesores de la escuela de matemáticas con quienes tuve la oportunidad de compartir y aprender.

Agradezco a mis compañeros de trabajo y estudiantes, porque ellos son parte importante en mi vida y, por tanto, también en este trabajo.

## CONTENIDO

	<b>Pág</b>
<b>1 DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEOREMA DE DESARGUES</b>	<b>9</b>
1.1 Vida y obra de Desargues . . . . .	11
1.2 Obras de Desargues . . . . .	17
1.3 Los inicios de la geometría proyectiva . . . . .	20
<b>2 EL TEOREMA DE DESARGUES</b>	<b>24</b>
2.1 Demostración original de Desargues . . . . .	24
2.2 El teorema de Desargues en la geometría euclidiana . . . . .	28
<b>3 ESPACIOS PROYECTIVOS</b>	<b>34</b>
3.1 Sistema de coordenadas homogéneas . . . . .	38
3.2 Principio de dualidad . . . . .	42
3.3 El teorema de Desargues en la geometría proyectiva . . . . .	47
<b>4 APLICACIONES</b>	<b>53</b>
4.1 Primera aplicación . . . . .	53
4.2 Segunda aplicación . . . . .	57
4.3 Teorema de Pappus . . . . .	58

## Índice de figuras

1.1	Rectas paralelas y punto en el infinito. . . . .	21
2.1	Construcción original del teorema de Desargues. . . . .	24
2.2	Primera parte de la demostración original. . . . .	25
2.3	Versión moderna del teorema de Desargues. . . . .	26
2.4	Recíproco de la versión original del teorema de Desargues. . . . .	27
2.5	Triángulos en perspectiva central respecto al punto $O$ . . . . .	29
2.6	Triángulos en perspectiva central respecto a la recta $k$ . . . . .	30
2.7	Teorema de Menelao. . . . .	31
2.8	Teorema de Desargues. . . . .	31
2.9	Recíproco del Teorema de Desargues. . . . .	33
4.1	Construcción de un eje de perspectiva. . . . .	53
4.2	Paso 1, construcción de un eje de perspectiva. . . . .	54
4.3	Paso 2, construcción de un eje de perspectiva. . . . .	55
4.4	Paso 3, construcción de un eje de perspectiva. . . . .	56
4.5	Solución a la construcción de un eje de perspectiva. . . . .	56
4.6	Paralelogramo, segunda aplicación. . . . .	57
4.7	Solución con el Teorema de Desargues . . . . .	57
4.8	Teorema de Pappus . . . . .	59

## Resumen

**TÍTULO:** EL TEOREMA DE DESARGUES DESDE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA <sup>1</sup>

**AUTOR:** HÉCTOR FABIÁN HERRERA HERRERA <sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** DESARGUES, TEOREMA DE MENELAO, ESPACIO PROYECTIVO, REFERENCIA PROYECTIVA, COORDENADAS HOMOGÉNEAS.

**DESCRIPCIÓN:** El teorema de Desargues es uno de los primeros resultados que se tienen sobre proyección y perspectiva. En el primer capítulo de este trabajo se realiza un estudio del desarrollo histórico de la geometría proyectiva y de la vida y obra de Desargues, autor del teorema. En el segundo capítulo se aborda la demostración original que Desargues dio del teorema mostrando las imágenes originales de la construcción geométrica y la demostración y explicando el teorema desde una versión más actual a partir de la geometría euclidiana. En el tercer capítulo se presentan las definiciones y resultados necesarios para demostrar el teorema de Desargues desde la geometría proyectiva tales como espacios proyectivos, referencia proyectiva y dualidad; de igual forma se introducen las coordenadas homogéneas con las que se realizará la demostración del teorema. Finalmente, en el capítulo cuarto se presentan algunas aplicaciones del teorema tanto desde el punto de vista euclidiano como desde el punto de vista proyectivo.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Claudia Inés Granados Pinzón, Doctora en Matemáticas.

## Abstract

**TITLE:** DESARGUES' THEOREM FROM PROJECTIVE GEOMETRY <sup>3</sup>

**AUTHOR:** HÉCTOR FABIÁN HERRERA HERRERA <sup>4</sup>

**KEYWORDS:** DESARGUES, MENELAO'S THEOREM, PROJECTIVE SPACE, PROJECTIVE REFERENCE, HOMOGENEOUS COORDINATES.

**DESCRIPTION:** Desargues' Theorem is one of the earliest results related to projection and perspective.

The first chapter of this work presents a study on the historical development of projective geometry as well as the life and work of Desargues, the author of the theorem. The second chapter discusses Desargues' original proof of the theorem, showing the original images of the geometric construction and the demonstration, as well as an explanation of the theorem from a more current version based on Euclidean geometry. The third chapter presents the definitions and necessary results to prove Desargues' theorem from projective geometry, such as projective spaces, projective reference, and duality. Similarly, homogeneous coordinates are introduced, which will be used to prove the theorem. Finally, in the fourth chapter, some applications of the theorem are presented from both the Euclidean and the projective perspectives.

---

<sup>3</sup> Bachelor Thesis

<sup>4</sup> Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Claudia Inés Granados Pinzón, PhD in mathematics.

## INTRODUCCIÓN

A lo largo del tiempo, las expresiones artísticas como el dibujo, la pintura, la escultura o la arquitectura han tomado elementos de la geometría para producir obras más bellas y mejor elaboradas; justamente es así como surge la geometría proyectiva, que introduce de manera formal en el arte los conceptos de proyección y perspectiva.

En el Renacimiento comienzan a utilizarse algunas técnicas de perspectiva en la pintura que permitían representar objetos de 3 dimensiones en el plano y es Girard Desargues quien en el siglo XVII da vida a la geometría proyectiva al dar fundamento matemático a los conocimientos renacentistas de perspectiva y proyección.

Girard Desargues (Lyon 1591- Lyon 1661) fue un geómetra, ingeniero y arquitecto francés considerado el fundador de la geometría proyectiva; sus ideas sobre proyección y perspectiva fueron revolucionarias para la época y aunque en su momento pasaron desapercibidas por el auge de la geometría analítica con matemáticos como Descartes, fueron retomadas y desarrolladas ampliamente en los siglos XIX y XX donde cobran fuerza nuevamente y se utilizan los trabajos de Desargues y de otros geómetras ya no solo en el campo del arte sino en algunas ramas de la ciencia como la física; el matemático Felix Klein <sup>5</sup> dice de esta geometría *“en el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la geometría proyectiva”*.

---

<sup>5</sup> Matemático francés del siglo XX (1849-1925). Sus aportes más reconocidos son la clasificación de las geometrías en las que utiliza el concepto de grupo, la *“Gran enciclopedia de las matemáticas”* y la botella de Klein que es un ejemplo de una superficie no orientable.

De acuerdo al matemático Jean-Victor Poncelet <sup>6</sup>, la geometría proyectiva “*se ocupa de resultados geométricos que se pueden enunciar y demostrar sin utilizar ángulos ni distancias*” (ver [1]), es decir, es una geometría que estudia las propiedades de incidencia de objetos geométricos elementales como puntos, rectas, planos, etc. sin utilizar el concepto de medida.

Uno de los teoremas clásicos e importantes de la geometría proyectiva es el teorema de Desargues, enunciado en 1639, que a grandes rasgos establece que, dos triángulos que se encuentran en perspectiva respecto a un punto, también están en perspectiva respecto a una línea.

En este trabajo estudiaremos este teorema y presentaremos la prueba que en su momento dio Desargues, una prueba más elaborada desde la geometría euclidiana utilizando el concepto de medida a través del teorema de Menelao <sup>7</sup> y otra desde la geometría proyectiva, utilizando coordenadas homogéneas. Cabe resaltar que dichas coordenadas fueron introducidas en el siglo XIX mientras que Desargues vivió en el siglo XVII, por tanto, la demostración de Desargues utiliza herramientas de la geometría euclidiana como el Teorema de Menelao para demostrar la colinealidad de puntos mientras que la demostración desde la geometría proyectiva implica el uso de ecuaciones de rectas utilizando las coordenadas homogéneas.

---

<sup>6</sup> Matemático francés (1788-1867). Junto a Desargues, Poncelet es considerado uno de los fundadores de la geometría proyectiva. Aportó el famoso principio de dualidad y retomó y desarrolló las ideas que habían caído en el olvido en el siglo XVII.

<sup>7</sup> Menelao de Alejandría (70 d.C.-140 d.C.), fue un matemático griego que aportó el famoso teorema que lleva su nombre y que se utiliza para probar colinealidad de puntos. También fue el primero en reconocer las líneas geodésicas en una superficie curva.

## 1. DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEOREMA DE DESARGUES

Para comprender el teorema de Desargues y la geometría proyectiva estudiaremos su contexto histórico tomando principalmente como referencia a [12].

Cuando se quiere representar elementos del espacio en el plano, automáticamente viene a nosotros el concepto de perspectiva; por ejemplo, en el arte y, de manera particular, en la pintura, las técnicas de perspectiva son fundamentales para la creación de una obra. Sin embargo, estas técnicas han ido evolucionando a lo largo del tiempo y las matemáticas han contribuido en gran medida a su perfeccionamiento.

La geometría proyectiva es una geometría no euclídea, ya que no verifica el quinto postulado de Euclides,<sup>1</sup> que permite trabajar en el infinito (justamente esta geometría nos permitirá asignarle coordenadas al infinito) y, por tanto, contiene a la geometría euclidiana.

Poncelet en [1] define a la geometría proyectiva como la *“geometría que se encarga de resultados geométricos que se pueden enunciar y demostrar sin utilizar ángulos ni distancias”*, más precisamente, la geometría proyectiva parte de unas figuras elementales: puntos, rectas, planos, etc. y una relación entre ellas llamada *relación de incidencia*, por ejemplo, un punto es incidente en una línea si el punto está sobre ella y una línea es incidente sobre un punto si esta pasa a través de dicho punto.

Como dice Aroca en [5], la geometría proyectiva tal y como la entendemos hoy, es el resultado de un largo proceso de evolución que comienza con la geometría métrica griega <sup>2</sup> y culmina

---

<sup>1</sup> Dados una recta  $l$  y punto  $P$  exterior a dicha recta, existe una única recta  $m$  paralela a  $l$  que pasa por  $P$ .

<sup>2</sup> Geometría axiomática y constructivista desarrollada en Grecia que utiliza el concepto de distancia y medida.

en la obra de los geómetras franceses y alemanes de la segunda mitad del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX.

La geometría proyectiva comienza a formalizarse con los trabajos del ingeniero, geómetra y arquitecto francés Girard Desargues en el siglo XVII. Desargues introduce ideas nuevas sobre proyección y perspectiva y revoluciona la forma de entender la geometría. Sin embargo, cuando el trabajo de Desargues fue presentado, este no fue aceptado ya que representaba una ruptura con el pasado, una geometría con un lenguaje nuevo y difícil de entender; además, el gran Descartes había publicado recientemente su trabajo que proporcionaba un nuevo método algebraico en contraposición a los antiguos métodos de la geometría.

Los trabajos de Desargues estuvieron en el olvido durante mucho tiempo, fue Poncelet en [1] quien redescubrió su obra y lo reconoció como el fundador de la geometría moderna.

Poco se sabe de la formación académica de Desargues pero por sus obras se deduce que tenía conocimientos en diversas áreas como geometría, arquitectura, ingeniería, entre otras y en sus obras cita a geómetras de la talla de Euclides<sup>3</sup> y Apolonio<sup>4</sup>.

De acuerdo a [12], Desargues se caracterizó por escribir artículos cortos no con el objetivo de lucrarse sino de compartir su conocimiento y exponer sus ideas entre sus allegados; en sus escritos trata temas sobre geometría y sus aplicaciones y destaca entre sus obras su libro sobre secciones cónicas. El estilo de Desargues, aunque original resultaba un poco confuso de entender debido a la introducción de términos nuevos para referirse a ciertos elementos

---

<sup>3</sup> Euclides (325 a.C.-265 a.C.), conocido como el padre de la geometría. Es conocido principalmente por su obra **Elementos** en la que mediante un grupo de axiomas, presenta y deduce las propiedades de algunos objetos geométricos

<sup>4</sup> Apolonio de Perga (262 a.C.-190 a.C.), matemático griego conocido por sus aportes al estudio de las secciones cónicas.

de la geometría ya que utilizaba términos botánicos como nudo, tronco, rama, ramita para designar objetos geométricos comunes como punto en una línea, línea que se cruza con líneas, segmento, entre otros. De los términos introducidos por Desargues aún se utiliza hoy en día el de *involución*, que ha permanecido en el lenguaje técnico de las matemáticas para denotar un concepto central en la geometría proyectiva.

No obstante, Desargues no se destacó por escribir muchas obras; su teorema se encuentra enunciado en su obra *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plane* (Borrador de un intento de resultado de la intersección entre un cono y un plano) de 1639 y una demostración atribuida a Desargues es presentada por su discípulo Abraham Bosse en su obra *Manière universelle de M. des Argues pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral*. (Método universal del Señor Desargues de practicar la perspectiva a pie pequeño, como el Geometral.)

### 1.1. Vida y obra de Desargues

***“... admito con honestidad que nunca tuve el gusto por el estudio o la investigación, ya sea en física o en geometría, más que en la medida en que pueda servir al intelecto como un medio para llegar a algún tipo de conocimiento de las causas próximas de los efectos de las cosas que pueden reducirse para la bondad y comodidad de la vida en cuyo uso residirá la conservación del bienestar (salud) y en su aplicación a la práctica de algún arte. Y es evidente para mí que una buena parte de los métodos prácticos en las artes están fundamentados en la geometría y, por lo tanto, están sobre una base sólida...”(Desargues).***

La anterior afirmación de Desargues aparece en una obra de su discípulo Bosse titulada ***El método de la perspectiva de Desargues*** publicada en 1647. Comenzamos con esta afirmación porque sintetiza adecuadamente la intención del trabajo de Desargues: más que tener discusiones intelectuales o filosóficas sobre resultados matemáticos, es procurar que dichos

resultados puedan contribuir a una mejor calidad de vida de las personas de la época y a su quehacer en el arte o en la arquitectura y que todos puedan acceder a este conocimiento indistintamente de su nivel de preparación académica.

En esta sección estudiaremos la vida y obra de Girard Desargues teniendo a [9] y [12] como referencia.

Girard Desargues nació en Lyons, Francia. Son pocos los datos que se conocen sobre su vida o su familia pero en [9] se menciona que provenía de una numerosa familia de ocho hijos de los cuales probablemente él era el menor.

Aunque no se conoce mucho sobre su formación, él mismo se consideraba un autodidacta de la geometría al estudiar por cuenta propia las obras de Euclides y Apolonio.

Desargues fue contemporáneo de Marin Mersenne <sup>5</sup> (1588-1648), matemático, teólogo y filósofo francés conocido por reunir a grandes mentes europeas de la época de la revolución científica como Descartes, Pierre de Fermat, Torricelli o Galilei quienes a través de cartas daban a conocer sus investigaciones y resultados, proponían problemas o comentaban los aportes de unos a otros. Desargues fue parte de este prestigioso grupo de sabios pues se conoce que Mersenne incluyó en su obra "*Le Harmonie Universelle*" (La Armonía Universal) publicada en 1636 un breve artículo de la autoría de Desargues llamado *Un método aisee pour apprendre et enseigner a lire et écrire la musique* (Un método fácil para aprender y enseñar la lectura y la Escritura de Música). Formar parte de este grupo le dio a Desargues un fácil acceso a las principales ideas y discusiones del momento.

---

<sup>5</sup> Matemático y teólogo francés promotor de la revolución científica

Entre 1631 y 1636, Desargues fue tutor del joven Blaise Pascal <sup>6</sup> quien a futuro sería también uno de los más reconocidos científicos de la época (ver [10]).

En [9] se muestra la admiración de Pascal hacia Desargues con el siguiente comentario que realiza en su obra *“Essay pour les Coniques”*(Ensayo sobre cónicas):

*“También demostraremos esta propiedad de cuyo autor original es el Sr. Desargues de Lyon quien es una de las grandes mentes de este tiempo y es versado también en matemáticas, entre otras en las cónicas, cuyos escritos al respecto, aunque pequeños en número, han dado amplio testimonio de su habilidad a aquellos que habían deseado convertirse en conscientes de ello...”*

En 1636 publica su obra *“Exemple de l’une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d’autre nature, qui soit hors du champ de l’ouvrage”* (Ejemplo de uno de los modos universales del S.G.D.L. incidiendo en la práctica de la perspectiva sin emplear tercer punto, distancia u otra naturaleza, que está fuera del alcance del trabajo). Este título confirma una vez más la afirmación con la que comenzamos esta sección: la universalidad del trabajo de Desargues.

En 1639 Desargues publica su trabajo más extenso llamado *“Brouillon project d’une atteinte aux événemens des rencontres du Cone avec un Plan”* (Borrador de un intento de resultado de la intersección entre un cono y un plano) en el cual prueba su famoso teorema de involución.

---

<sup>6</sup> Blaise Pascal (1623-1662), fue una de las mentes más brillantes del siglo XVII. Aportó la pascalina, el artefacto precursor de las calculadoras mecánicas; también propuso el principio de Pascal de la mecánica de fluidos, el triángulo de Pascal que da una representación de los coeficientes binomiales, el teorema de Pascal de la geometría proyectiva y aportes a la teoría de la probabilidad. También se dedicó al estudio de la filosofía y la teología.

Otro de los grandes hombres de ciencia y filosofía con el que Desargues tuvo contacto fue con el también francés, Descartes. Juntos compartieron una admiración mutua y aunque el trabajo de Descartes ensombreció el trabajo de Desargues, esto no fue impedimento para que juntos mantuvieran correspondencia e intercambiaran ideas. En 1638, Mersenne invitó a Desargues a mediar en una discusión entre Descartes y Pierre de Fermat sobre el tratamiento de las tangentes a la curvas (esta es la única carta de Desargues que ha sobrevivido hasta hoy, que se encuentra en [9] y de la cual podemos deducir también un poco del pensamiento filosófico de Desargues) y allí Desargues comenta:

*“Respecto a las objeciones de Fermat contra Desargues, sabes desde el comienzo las pocas diferencias que encuentro entre sus posturas ni encontrarás que el señor Fermat entendió esta objeción de buena fe según mi sentimiento que concuerda mejor con las meditaciones de Descartes que con cualquier otro estando igualmente conforme con lo que escribió que encuentro en varias observaciones que he hecho, y que Entiendo, me parece un poco mejor, el suyo que vi fuera de su Geometría, y yo hasta ahora estoy bastante satisfecho con él y, sobre todo, todo, por su manera de conducir sus razonamientos”.*

De la anterior cita, en [12] se concluyen tres aspectos sobre la posición filosófica de Desargues:

- Conocía “las Meditaciones” de Descartes y muy posiblemente otras obras filosóficas de su autoría.
- Se encuentra satisfecho con los resultados de la filosofía de Descartes.
- Está totalmente satisfecho con el método cartesiano de filosofar.

Descartes también admiraba a Desargues y en una carta dirigida a Mersenne en [9] él le manifiesta:

*“Me alegraría mucho que el Sr. Desargues fuera uno de mis críticos si le agradara tomar el problema por ello, y tengo más fe en él que en tres teólogos”.*

En 1640, Desargues publicó dos obras, una sobre corte de piedra en arquitectura y la otra sobre la calibración de relojes de sol.

La primera obra se llamó *“Brouillon project d'exemple d'une maniere universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait a preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture”* (Borrador de un ejemplo de un método universal por (Desargues) que toca la práctica de un trabajo anterior sobre corte de piedra en arquitectura) y es de gran importancia en la geometría descriptiva ya que constituye el primer intento formal de representar la proyección oblicua de un sólido sobre la superficie plana.

La otra obra de Desargues publicada en 1640 fue *“Maniere universelle de poser le style aux rayons du soleil en quel conque endroit possible, avec la regle, le compas, l'esquerre et le plomb”* (Método universal para situar el gnomon (posar) a los rayos del sol en cualquier lugar posible, utilizando la regla, el compás, la escuadra y el plomo.)

El método de Desargues sobre estereotomía fue un invento brillante, no obstante, resultaba un poco complejo de entender para los albañiles y obreros de la época. De hecho, fue con la publicación de Bosse en 1643 de *“Pratique de trait a preuves de Mr. Desargues Lyonnois pour la coupe des pierres en l'Architecture”* (una práctica de línea a pruebas del Sr. Desargues Lyonnois para cortar piedras en Arquitectura) que el método de Desargues recibió el tipo de explicación que un trabajador común podría entender.

En 1647, Bosse publicó su explicación de *“El método de la perspectiva de Desargues”*. En su

reconocimiento a esta obra, Desargues da la afirmación más definitiva de sus puntos de vista sobre la relación entre la teoría geométrica y trabajo práctico que fue dada al inicio.

De acuerdo a [12]. en 1648 Desargues regresa a su ciudad natal Lyons y allí se dedica en mayor medida a las actividades de arquitectura que por un lado, consistían en la elaboración de diseños de edificios y por otro lado, en el aporte teórico al método y la representación gráfica.

Las actividades arquitectónicas de Desargues se enmarcan en dos clases:

- El diseño y la construcción de casas y edificios o partes de estos.
- El aporte a los métodos de tallado de rocas y representación gráfica de construcciones arquitectónicas.

Para concluir, en [11], se describe el pensamiento de Desargues así:

**“Su orientación intelectual expresó dos grandes objetivos: construir una geometría basada en la posición sin tener en cuenta la métrica, basada en técnicas proyectivas y buscar métodos prácticos para quienes trabajaban en campos distintos a la matemática. Así, propuso integrar la teoría y la práctica.”**

De igual forma, en [11] se sintetizan los múltiples aportes de Desargues a la geometría proyectiva:

- El estudio de las propiedades (en cuanto a perspectiva) de los polígonos inscritos en secciones cónicas.
- El análisis de las líneas rectas como curvas que se encuentran en el infinito.
- Innovaciones técnicas basadas en sus resultados de proyección y perspectiva.

- El teorema de Desargues.
- El concepto de involución.

En cuanto a su famoso teorema, cuando Desargues lo presenta, proporciona un ejemplo de representación en dos dimensiones de una figura de tres dimensiones. Nace así una nueva geometría, la geometría proyectiva de la que hablaremos en la siguiente sección.

## 1.2. Obras de Desargues

Para realizar esta lista de obras utilizamos como referencia [2], [9] y su traducción y explicación en [12].

### Trabajos publicados durante la vida de Desargues:

#### Año 1636

- "Une methode aisee pour apprendre et enseigner a lire et escrire la musique" (Un método fácil para aprender y enseñar a leer y escribir música). Artículo publicado en la obra "*Le Harmonie Universelle*" (Armonía universal) de Mersenne.
- "Exemple de l'une des manieres universelles du s.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage" (Ejemplo de una de las formas universales de S.G.D.L. de tocar la práctica de la perspectiva sin utilizar un tercer punto, distancia u otra naturaleza, que esté fuera del alcance de la obra). Esta obra fue publicada en París en mayo de 1636.

#### Año 1639

- "Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan" (Borrador de un intento de resultado de la intersección entre un cono y un plano), publicada en Paris en 1639.

## **Año 1640**

- "Brouillon project d'exemple d'une maniere universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait a preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture: Et de l'esclaircissement d'une maniere de reduire au petit pied in Perspective comme en Geometral, y de tracer tous Quadrans plats d'heures egales au Soleil" (Borrador de un proyecto de un ejemplo de un método universal de S.G.D.L. sobre la práctica para el corte de piedras en Arquitectura: y de la clarificación de una manera de reducir al pie pequeño en Perspectiva como en Geométrica, y de trazar todos los Cuadrantes de horas planos iguales al Sol), publicada en París, en agosto de 1640.
- "Lecons de tenebres" (Lecciones en las sombras). Esta obra se encuentra perdida, no obstante, muchos contemporáneos de Desargues se refieren a ella. El título hace referencia al uso de proyecciones de sombras por parte de Desargues para estudiar las propiedades de las secciones cónicas. Posiblemente fue publicada en París en 1640.

## **Año 1643**

- "Reconnaissance de Monsieur Desargues" (Reconocimiento del Señor Desargues), publicada en París, en Julio de 1643.
- "Reconnaissance de Monsieur Desargues" (Reconocimiento del Señor Desargues), publicada en París, en septiembre de 1643.
- "Livret de perspective adresse aux theoriciens" (Libro de perspectiva dirigido a los teóricos), publicada en París, posiblemente en 1643. Esta obra se encuentra perdida pero aparecen algunos fragmentos en [2].

## **Año 1644**

- "Sommaton faite au Sieur Curabelle, au sujet de ses affiches calomnieuses" (Citación hecha al Señor Curabelle, en relación con sus carteles calumniosos), publicada en París, el 18 de abril de 1644.

## **Año 1657**

- "Lettre de Mr. Desargues a Monsieur Bosse" (Carta del Señor Desargues al Señor Bosse), París, 25 de julio de 1657.

## **Trabajos inspirados por Desargues:**

- "La Pratique du trait a preuves de Mr. Desargues, Lyonnais, pour la coupe des pierres en l'Architecture"(Práctica de pruebas del Señor Desargues de Lyon, para el corte de piedras en la arquitectura), París, 1643.
- "La Maniere universelle de Mr. Desargues, Lyonnais, pour poser l'essieu y placer les heures et autres choses aux cardans au Soleil" (El método universal del Señor Desargues de Lyon, de poner el eje, las horas y otras cosas a cardanes en el sol), París, 1643.
- "Maniere universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le Geometral. Ensemble les places et proportions des fortes et foibles touches, teintes ou Couleurs" (Método universal del Señor Desargues de practicar la perspectiva a pie pequeño, como el Geometral. Juntos, los lugares y proporciones de las claves, tintes o colores fuertes y débiles.), París, 1648.

## **Cartas:**

Las únicas dos cartas escritas por Desargues que persisten hasta la actualidad son las escritas a su discípulo, Bosse y la dirigida a Mersenne.

## **Obras arquitectónicas:**

De acuerdo a [2], [3], [9] y [12] dentro de las obras arquitectónicas en París que en las que se sabe o se cree que Desargues tuvo alguna participación se encuentran:

- Una escalera en el Hotel de l'Hospital.
- Una escalera en el Hotel Turenne en la Rue Neuve-Saint-Louis.
- Escaleras en Maison of M. Vedeau de Grammont.
- Diseños de perspectivas anamórficas para las bóvedas de la antigua Iglesia de las Carmelitas diseñadas hacia 1628 por Philippe de Champaigne.
- Una gran escalera en el segundo patio del Palacio Real.
- Escalera y probablemente toda la casa de Monsieur Roland en la calle Clery.

Las siguientes obras son en Lyon:

- El ayuntamiento (palacio municipal) de Lyon, aparentemente iniciado por Simon Maupin, y revisada en cierto grado por Desargues hacia 1646.
- El "Hotel de l'Europa" (1651).
- Plano de la entrada de una Iglesia de la orden de Corinto. (Ver Fig. 1-6).

### **1.3. Los inicios de la geometría proyectiva**

Para realizar un análisis histórico y epistemológico del teorema de Desargues debemos dirigirnos al origen de la geometría proyectiva y explorar en sus raíces los aspectos fundamentales que dieron paso al enunciado de dicho teorema. En este capítulo haremos un recorrido por los principales resultados que permitieron pasar de una simple aplicación de las nuevas nociones de proyección y perspectiva en el Renacimiento al desarrollo de una nueva rama de las matemáticas, mucho más amplia que la geometría convencional y con múltiples aplicaciones en el campo de la ciencia. Para esto, estableceremos una clara diferencia entre la geometría euclidiana y la geometría proyectiva. En esta sección utilizaremos como referencia a [11] y [12].

La definición 23 del libro I de los elementos de Euclides establece que dos rectas que están en el mismo plano (como en la parte a) de la figura 1.1) son **paralelas** si al prolongarse indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra; un ejemplo clásico de rectas paralelas son las vías de un tren cuyos rieles están alineados de manera paralela. Pensemos ahora en el punto desde el cual observamos dicha carrilera: en la parte b) de la figura 1.1 por la perspectiva desde la que se observa, pareciera que en un punto muy lejano, los rieles se cortan. Si bien, esto no ocurre, nos permite introducir una nueva forma de definir a las rectas paralelas: dos rectas coplanares son paralelas si se cortan en el infinito.

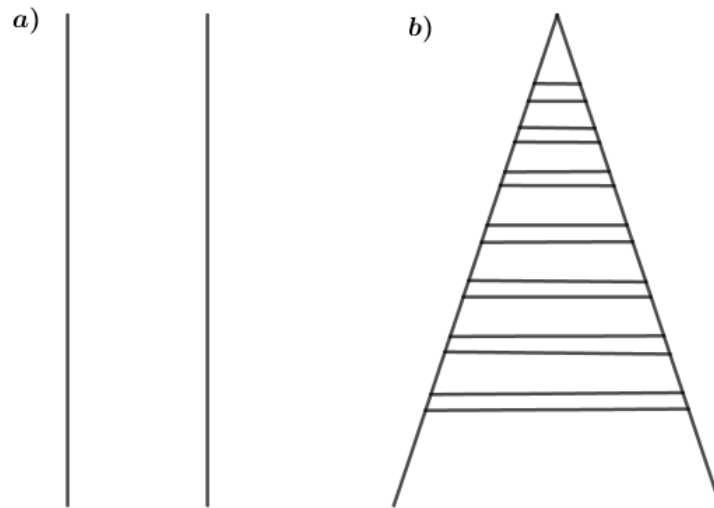


Figura 1.1. Rectas paralelas y punto en el infinito.

Esta idea de puntos en el infinito fue introducida por Desargues en el siglo XVII y dio paso al estudio de una nueva geometría, mucho más amplia que la euclidiana, llamada **geometría proyectiva**. Aunque en el siglo XVII, esta idea no tuvo mucho trasfondo, en el siglo XIX fue retomada con fuerza ya que esta nueva geometría es independiente del concepto de medida que prima en la geometría euclidiana y del uso de métodos algebraicos como en la geometría analítica.

De igual forma, en [11] se establece que la noción de perspectiva se basa en el concepto de proyección, y esta, a su vez, es un caso particular de la operación de transformación. El estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de las transformaciones originó la geometría proyectiva y, posteriormente, la topología.

Como lo hemos mencionado anteriormente, la geometría proyectiva se remonta a la introducción de técnicas de perspectiva en el arte al representar objetos tridimensionales en el plano; destaca en este comienzo el arquitecto y escultor italiano Filippo Brunelleschi quien introduce el concepto de perspectiva cónica y el de punto de fuga y es el también artista italiano Masaccio quien aplica en la pintura esta nueva perspectiva con bases geométricas. Este primer periodo de introducción de la geometría en el arte tiene su culmen en los aportes del gran Leonardo Da Vinci. En [11] se menciona que Da Vinci aportó a problemas relacionados con "las técnicas de la perspectiva, la geometría y óptica subyacentes, las relaciones entre tamaño y distancia teniendo en cuenta las posiciones relativas del observador, plano y objeto; los recursos e instrumentos ópticos como las propiedades del ojo."

Estas ideas se extendieron por Europa e influyeron en los principales artistas de la época, por ejemplo, Alberto Durero en Alemania quien consideraba que la geometría era el elemento clave para entender el arte renacentista cuyos aportes se encuentran en su obra "Instrucción sobre las medidas con regla y compás de figuras planas y sólidas" publicada póstumamente.

La geometría que se aplicaba en el arte pronto comenzó a utilizarse para entender mejor el universo y tener desde la astronomía una visión más precisa de lo que nos rodea. Poco a poco la teoría de la perspectiva se fue volviendo más compleja y superaba las necesidades de los artistas de modo que la perspectiva comienza a separarse del arte y a estudiarse de un modo mucho más formal. Es aquí donde destaca el gran **Girard Desargues** dentro de cuyos aportes se encuentra el estudio de la perspectiva a través de las secciones cónicas, los

puntos en el infinito, el famoso teorema de Desargues, entre otros. Sus ideas influyeron en el trabajo de Blaise Pascal y Philippe de La Hire siendo este último el encargado de que la obra de Desargues perdurara en el tiempo pues realizó una copia de un manuscrito de Desargues que sobrevivió hasta el siglo XIX y cuyo estudio representó el regreso de la geometría proyectiva.

Las ideas de Descartes y su geometría analítica opacaron el desarrollo de la geometría proyectiva hasta el siglo XIX cuando Poncelet y Chasles, matemáticos franceses considerados los fundadores de la geometría proyectiva moderna, retomaron las ideas de Desargues y las ampliaron proponiendo, por ejemplo, el importante principio de dualidad del que hablaremos más adelante y que permite obtener resultados nuevos y fascinantes que involucran puntos y rectas; este principio es una de las principales características de la geometría proyectiva.

De acuerdo a la descripción que hemos hecho hasta el momento, a lo largo de los años la geometría proyectiva dejó de ser simplemente una herramienta de dibujo y pasó a constituirse en una rama formal de las matemáticas que aún hoy continúa evolucionando y que proporciona a las matemáticas no solo ideas originales y novedosas sino pruebas rigurosas y elegantes.

## 2. EL TEOREMA DE DESARGUES

### 2.1. Demostración original de Desargues

Como se mencionó en la introducción, el teorema de Desargues implica el uso de triángulos en perspectiva central, no obstante, en la proposición y demostración original escrita en [3], no aparecen explícitamente dichos triángulos pero los deduciremos para una mejor comprensión en el lenguaje actual, para ello utilizaremos como referencia a [8].

La imagen 2.1 corresponde a la construcción que utilizó Desargues para la demostración del teorema:

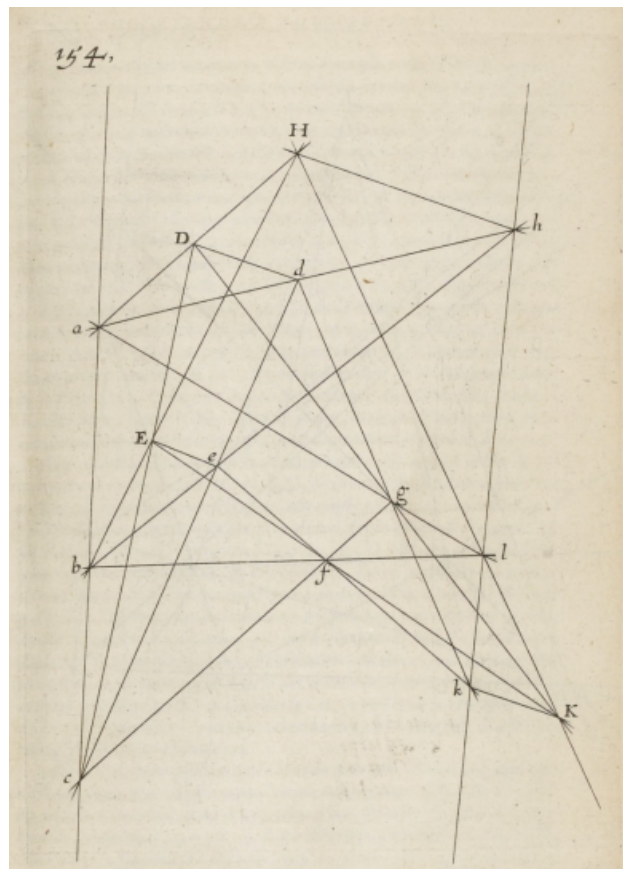


Figura 2.1. Construcción original del teorema de Desargues.

La imagen 2.2 corresponde a la primera parte del teorema junto con la demostración propuesta por Desargues:

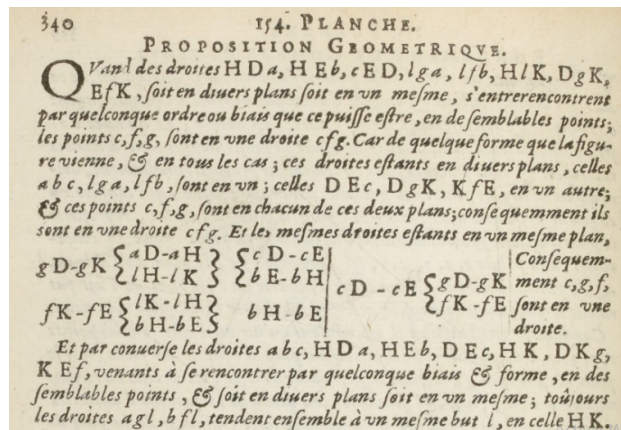


Figura 2.2. Primera parte de la demostración original.

El enunciado del teorema en su versión original es el siguiente:

**Cuando las rectas  $HDa, HEb, cED, lga, lfb, Hlk, DgK, Efk, cab$  que se encuentran en el mismo o en diferentes planos se cortan entre sí en cualquier orden y en cualquier ángulo formado por dichos puntos, entonces los puntos  $c, f, g$  se encuentran en la misma línea recta  $cfg$ .**

**Y conversamente, si las rectas  $abc, HDaHEb, DEc, HK, DKg, KEF$  se encuentran de cualquier forma y en cualquier ángulo, en puntos como los que se dan y las líneas están en diferentes planos o en el mismo, las líneas  $agl, bfl$  siempre se encontrarán en un punto  $l$  que se encuentra en la línea  $HK$ .**

La siguiente es la idea de la demostración de Desargues cuando las líneas se encuentran en planos diferentes:

“Porque, cualquiera que sea la forma que tome la figura, en todos los casos, si las líneas rec-

tas pertenecen a planos diferentes, las líneas  $abc, lga, lfb$  pertenecen a un plano; las líneas  $DEc, DgK, KfE$  pertenecen a otro plano y los puntos  $c, f, g$  pertenecen a cada uno de estos dos planos, en consecuencia, están en la línea recta  $cfg$ ".

Ahora, si las líneas se encuentran en el mismo plano, Desargues utiliza el teorema de Menelao (que enunciaremos más adelante) así:

“Y si las mismas líneas rectas están todas en el mismo plano,

$$\frac{gD}{gK} = \frac{aD lH}{aH lK}, \frac{fK}{fE} = \frac{lK bH}{lH bE}, \frac{aD}{aH} = \frac{cD bE}{cE bH}$$

y por tanto

$$\frac{cD}{cE} = \frac{gD fK}{gK fE}.$$

En la versión moderna del teorema, los triángulos que se consideran en la construcción de Desargues son  $\triangle DEK$  y  $\triangle abl$  que están en perspectiva respecto al punto  $H$ .

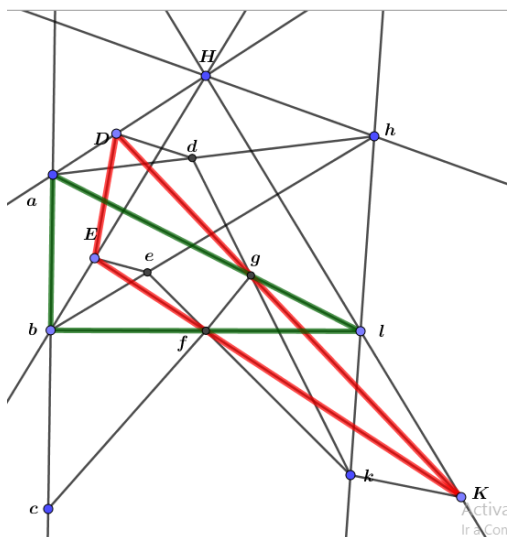


Figura 2.3. Versión moderna del teorema de Desargues.

La imagen 2.4 corresponde al recíproco de la proposición anterior junto con la demostración

propuesta por Desargues:

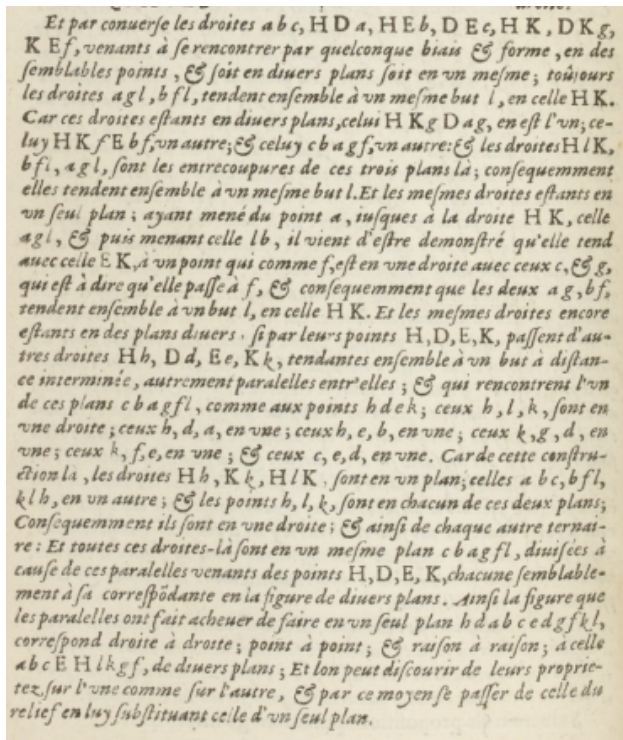


Figura 2.4. Recíproco de la versión original del teorema de Desargues.

**“Y conversamente, si las rectas  $abc, HDaHEb, DEc, HK, DKg, KEF$  se encuentran de cualquier forma y en cualquier ángulo, en puntos como los que se dan y las líneas están en diferentes planos o en el mismo; las líneas  $agl, bfl$  siempre se encontrarán en un punto  $l$  que se encuentra en la línea  $HK$ ”.**

La siguiente es la idea de la demostración de Desargues cuando las líneas se encuentran en planos diferentes:

“Porque si las líneas rectas están en diferentes planos, uno de estos planos es  $HKgDag$ , otro es  $HKfEbf$ ; y otro  $cbagf$ : y las rectas  $HlK, bfl, agl$ , son las rectas de intersección de estos tres planos; entonces, todas se encuentran en el mismo punto  $l$ ”.

En este punto de la prueba, Desargues utiliza líneas paralelas así:

“Y si de nuevo, las mismas líneas se encuentran en diferentes planos y a través de puntos en ellas,  $H, D, E, K$  pasan otras líneas rectas  $Hh, Dd, Ee, Kk$  que se encuentran todas en algún punto en una distancia indeterminada, o, dicho de otro modo, son paralelas entre sí; y estas líneas cortan uno de los planos  $cbagfl$ , en puntos como  $h, d, e, k$ ; los puntos  $h, l, k$  están en una línea recta; los puntos  $h, d, a$  en otra; los puntos  $h, e, b$  en otra; los puntos  $k, g, d$  en otra; los puntos  $k, f, e$  en otra; y los puntos  $c, e, d$  se encuentran en otra recta. Por esta construcción las líneas rectas  $Hh, Kk, HlK$  están todas en un plano; las líneas  $abc, bfl, klh$  se encuentran en otro; y los puntos  $h, l, k$  se encuentran en cada uno de los dos planos. En consecuencia, se encuentran en una línea recta; y análogamente para cualquier otro conjunto de tres puntos en la proposición”.

Cuando las líneas se encuentran en el mismo plano:

“Y todas estas rectas están en un plano,  $cgabfl$ , y cada una de ellas está dividida por líneas paralelas que pasan por los puntos  $H, D, E, K$  de la misma manera que la línea correspondiente en la figura tridimensional. Entonces la figura que estas líneas paralelas han definido en el plano  $hdabcedgfk$  corresponde recta por recta; punto por punto; y razón por razón a la figura tridimensional  $abcEHLkgf$ . Y se puede discutir sus propiedades en el mismo modo que en una figura como en la anterior, y así prescindir de la figura sólida, usando en su lugar la figura en el plano.”

## 2.2. El teorema de Desargues en la geometría euclidiana

En esta sección detallaremos la demostración de Desargues utilizando herramientas de la geometría euclidiana que nos permitirán realizar una detallada demostración analítica utili-

zando el concepto de medida y una representación geométrica en el plano.

**Definición 2.2.1.** Sean  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  los vértices de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  respectivamente y sean  $l_1, l_2$  y  $l_3$  las rectas que unen los vértices  $AA', BB'$  y  $CC'$  respectivamente como en la figura 2.5, entonces los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en **perspectiva respecto al punto  $O$**  si las rectas  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son concurrentes en  $O$ . Dicho punto es llamado **centro de perspectiva**.

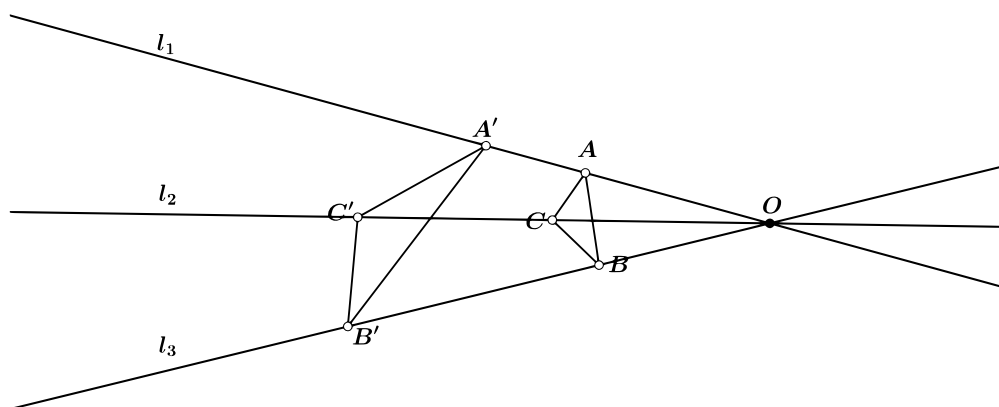


Figura 2.5. Triángulos en perspectiva central respecto al punto  $O$ .

**Definición 2.2.2.** Sean  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  los vértices de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  respectivamente y sean  $M_1, M_2$  y  $M_3$  los puntos donde se intersecan las rectas  $AB, A'B'$ ;  $BC, B'C'$  y  $CA, C'A'$  respectivamente como en la figura 2.6, entonces los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en **perspectiva respecto a la recta  $k$**  si los puntos  $M_1, M_2$  y  $M_3$  son colineales y pertenecen a la recta  $k$ . Dicha recta es llamada **recta o eje de perspectiva**.

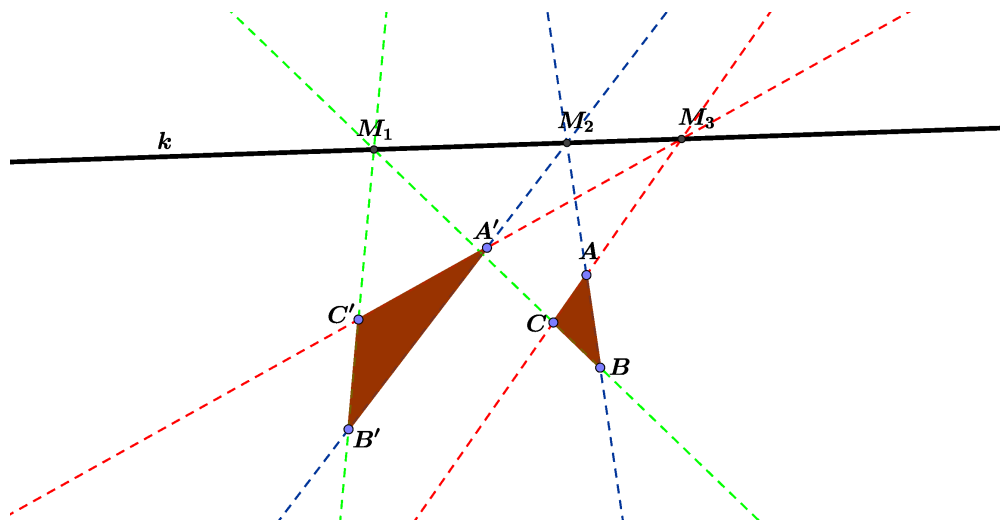


Figura 2.6. Triángulos en perspectiva central respecto a la recta  $k$ .

El siguiente teorema, atribuido a Menelao de Alejandría, fue utilizado por el propio Desargues para realizar la demostración del teorema cuando los triángulos se encuentran en el mismo plano.

**Teorema 2.2.3. Teorema de Menelao.**

Sean  $A, B, C$  los vértices del triángulo  $\triangle ABC$  y  $X, Y, Z$  puntos en los lados (o prolongaciones de los lados)  $BC, CA$  y  $AB$  como en la figura 2.7, entonces los puntos  $X, Y, Z$  son colineales si y solo si se cumple la relación

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

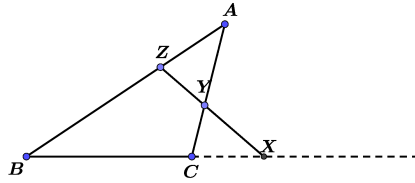


Figura 2.7. Teorema de Menelao.

**Teorema 2.2.4. Teorema de Desargues**

*Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  como en la figura 2.8 están en perspectiva respecto al punto  $O$  si y solo si están en perspectiva respecto a la recta  $k$ .*

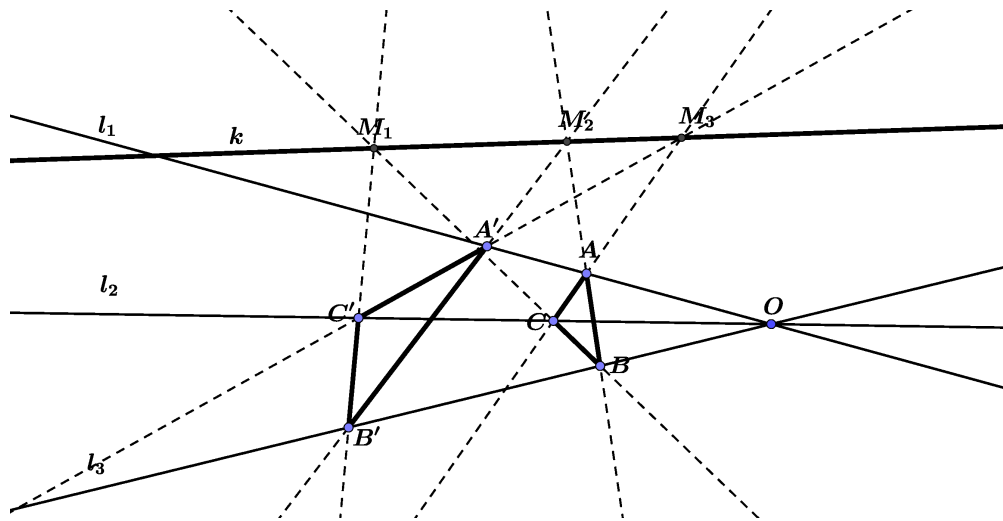


Figura 2.8. Teorema de Desargues.

**Demostración**

Consideremos el triángulo  $\triangle OA'B'$  y la transversal que contiene a los puntos  $M_2, A$  y  $B$ , aplicando el teorema de Menelao se tiene que:

$$\frac{OA}{AA'} \cdot \frac{A'M_2}{B'M_2} \cdot \frac{B'B}{BO} = -1.$$

Consideremos ahora el triángulo  $\triangle OA'C'$  y la transversal que contiene a los puntos  $M_3, A$  y  $C$ , aplicando el teorema de Menelao se tiene que:

$$\frac{OA}{AA'} \cdot \frac{A'M_3}{C'M_3} \cdot \frac{C'C}{CO} = -1.$$

Finalmente, considerando el triángulo  $\triangle OC'B'$  y la transversal que contiene a los puntos  $M_1, B$  y  $C$ , aplicando el teorema de Menelao se tiene que:

$$\frac{OC}{CC'} \cdot \frac{M_1C'}{M_1B'} \cdot \frac{B'B}{BO} = -1.$$

Dividiendo la ecuación 1 entre la ecuación 3 se obtiene la expresión

$$\frac{A'M_2}{B'M_2} \cdot \frac{B'B}{BO} \cdot \frac{M_3C'}{M_3A'} \cdot \frac{CO}{C'C} = 1.$$

Dividiendo nuevamente el resultado anterior entre la ecuación 3 se obtiene:

$$\frac{A'M_2}{B'M_2} \cdot \frac{M_1B'}{M_1C'} \cdot \frac{M_3C'}{M_3A'} = -1.$$

Por lo tanto, los puntos  $M_1, M_2, M_3$  son colineales. ■

Ahora, demostraremos la otra implicación

En la figura 2.9, los triángulos  $\triangle M_1C'C$  y  $\triangle M_2A'A$  están en perspectiva respecto al punto  $M_3$ .

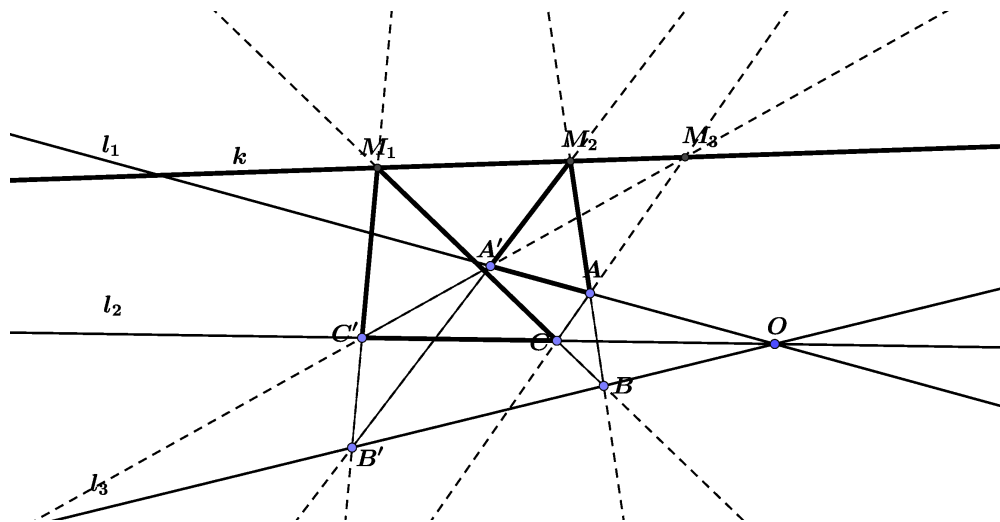


Figura 2.9. Recíproco del Teorema de Desargues.

Los lados  $C'C$  y  $A'A$  se cortan en el punto  $O$ , los lados  $M_1C'$  y  $M_2A'$  se cortan en el punto  $B'$  y los lados  $M_1C$  y  $M_2A$  se cortan en el punto  $B$ , por tanto, los puntos  $B'$ ,  $B$  y  $O$  son colineales y los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en perspectiva respecto al punto  $O$ . ■

### 3. ESPACIOS PROYECTIVOS

En este capítulo introducimos los espacios proyectivos, las referencias proyectivas y las coordenadas homogéneas y presentamos ejemplos que nos permitirán entender estos conceptos y también la relación que existe entre el álgebra lineal y la geometría proyectiva; de igual forma, presentaremos la demostración del teorema de Desargues utilizando coordenadas homogéneas.

**Definición 3.0.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $V - \{0\}$  definida así:

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} : u = \lambda v.$$

Se define el **espacio proyectivo asociado a  $V$**  como el espacio cociente  $\mathbb{P}(V) = (V - \{0\}) / \sim$ .

Los elementos de  $\mathbb{P}(V)$  son llamados **puntos del espacio proyectivo** y de acuerdo a la definición anterior, corresponden a las rectas vectoriales de la forma

$$P = [v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}\}, \forall v \in V - \{0\}.$$

**Definición 3.0.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $\dim V = n$ , entonces se define **la dimensión del espacio proyectivo asociado a  $V$**  como

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = n - 1.$$

Por ejemplo, si  $V = \{0\}$ , entonces  $\mathbb{P}(V) = \emptyset$  y así,

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim \emptyset = \dim V - 1 = 0 - 1 = -1.$$

En adelante, consideraremos  $V$  como un espacio vectorial de dimensión  $n+1$  sobre el cuerpo

$\mathbb{K}$  y  $\mathbb{P}(V)$  como el espacio proyectivo de dimensión  $n$  asociado a dicho espacio vectorial  $V$ .

**Definición 3.0.3.** Se llama **aplicación canónica** de  $V - \{0\}$  sobre  $\mathbb{P}(V)$  a la función definida así:

$$\begin{aligned} \pi : V - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ v &\longmapsto \pi(v) := [v] \end{aligned}$$

es decir, a cada  $v \in V - \{0\}$  se asocia la clase de equivalencia  $[v]$  de  $v$  en  $\mathbb{P}(V)$ .

Se puede ver que la aplicación anterior es sobreyectiva pero no inyectiva.

El espacio  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  también se denota por  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  y recibe el nombre de **espacio proyectivo estándar** de dimensión  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ .

Si  $(x_0, \dots, x_n)$  es un elemento de  $\mathbb{K}^{n+1}$  entonces su correspondiente imagen mediante la aplicación canónica corresponde a la clase de equivalencia  $[x_0, \dots, x_n]$ .

**Ejemplo 3.0.4.** Los siguientes son algunos ejemplos de espacios proyectivos:

1. Si  $V = \{0\}$  ( $\dim V = 0$ ), entonces  $\mathbb{P}(V) = \emptyset$  y  $\dim \mathbb{P}(V) = -1$ .
2. Si  $V$  es una recta ( $\dim V = 1$ ) entonces  $\mathbb{P}(V)$  es un **punto** y  $\dim \mathbb{P}(V) = 0$ .
3. Si  $V$  es un plano ( $\dim V = 2$ ) entonces  $\mathbb{P}(V)$  es una **recta proyectiva** y  $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ .
4. Si  $\dim V = 3$  entonces  $\mathbb{P}(V) = 2$  y  $\mathbb{P}(V)$  es un **plano proyectivo**. El plano proyectivo, por ejemplo, corresponde a todas las rectas vectoriales en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen de coordenadas.

Los resultados del álgebra lineal se pueden establecer en la geometría proyectiva mediante la aplicación canónica definida anteriormente, así, las rectas vectoriales pasan a ser puntos, los planos vectoriales pasan a ser rectas proyectivas y los espacios vectoriales de dimensión 3 pasan a ser planos proyectivos.

*Observación 3.0.5.* En la geometría proyectiva, al igual que en la geometría euclidiana, se tienen propiedades como:

- Dos puntos distintos de  $\mathbb{P}(V)$  determinan una única recta proyectiva.
- Tres puntos no colineales de  $\mathbb{P}(V)$  determinan un único plano proyectivo.

**Definición 3.0.6.** Si  $W$  un subespacio lineal del espacio vectorial  $V$ , entonces  $\mathbb{P}(W)$  es un **subespacio proyectivo** de  $\mathbb{P}(V)$ .

Considerando la aplicación canónica de la definición 3.0.3, se puede entender el subespacio proyectivo asociado a  $W$  como  $\mathbb{P}(W) = \pi(W - \{0\})$  y así se tiene que

$$\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1.$$

**Definición 3.0.7.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ , entonces una aplicación  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  es una **transformación proyectiva** si existe una aplicación lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  tal que:

$$f([v]) = [\varphi(v)], \quad \forall v \in V - \{0\}.$$

En este caso escribimos  $f = \bar{\varphi}$ .

Si  $\varphi$  es una aplicación lineal que induce a  $f$ , entonces el conjunto de aplicaciones lineales de  $V$  a  $W$  que induce a  $f$  coincide con el conjunto  $\{\lambda\varphi : \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}\}$ .

**Definición 3.0.8.** Si la aplicación  $f$  de la definición 3.0.7 es inducida por un isomorfismo lineal  $\varphi$  entonces  $f$  es un **isomorfismo proyectivo**. Dos espacios proyectivos sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  son **isomorfos** si existe un isomorfismo proyectivo entre ellos.

Un isomorfismo proyectivo de la forma  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  es llamado una **proyectividad** de  $\mathbb{P}(V)$ ; si además se cumple que  $f^2 = Id$  entonces  $f$  es una **involución** la cual es no trivial si

$f \neq Id.$

El conjunto de las proyectividades de  $\mathbb{P}(V)$  junto con la composición de funciones constituyen un grupo denominado **grupo lineal proyectivo** de  $\mathbb{P}(V)$  y se denota por  $\mathbb{P}GL(V)$ .

De igual forma que en otras estructuras, entre subespacios proyectivos también se pueden definir operaciones como sigue:

**Definición 3.0.9.** Sea  $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$  y  $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$  subespacios proyectivos de  $\mathbb{P}(V)$ , se define la intersección de dos subespacios proyectivos como:

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2).$$

Se puede ver que la intersección de dos subespacios proyectivos es un subespacio proyectivo.

**Definición 3.0.10.** Sea  $A \neq \emptyset$  un subconjunto de  $\mathbb{P}(V)$ , se define el **subespacio generado por  $A$**  como el subespacio proyectivo  $L(A)$  que se obtiene de la intersección de todos los subespacios de  $\mathbb{P}(V)$  que contienen a  $A$ .

Si  $A = S_1 \cup S_2$  donde  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios proyectivos de la forma  $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$  y  $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ , entonces el subespacio generado por  $A$  se denotará por  $L(S_1, S_2)$  y se define como:

$$(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

Se denotará por  $L(P_1, \dots, P_m)$  al subespacio generado por los puntos  $P_1, \dots, P_m$ .

De igual forma que en los espacios vectoriales, en los espacios proyectivos podemos definir la dependencia e independencia lineal así:

**Definición 3.0.11.** Los puntos  $P_0 = [v_0], \dots, P_k = [v_k]$  del espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{V})$  son **proyectivamente independientes** en  $\mathbb{P}(\mathbb{V})$  si los vectores  $v_0, \dots, v_k$  son linealmente independientes en  $\mathbb{V}$ .

Equivalentemente, los puntos  $P_0, \dots, P_k$  son proyectivamente independientes si y solo si el subespacio generado  $L(P_0, \dots, P_k)$  tiene dimensión  $k$ ; más aún, el mayor número de puntos proyectivamente independientes en  $\mathbb{P}(V)$  es  $\dim \mathbb{V} + 1$ .

**Definición 3.0.12.** Sea  $\mathbb{P}(V)$  un espacio proyectivo de dimensión  $n$ , y  $P_0, \dots, P_k$  puntos en  $\mathbb{P}(V)$ ; se dice que  $P_0, \dots, P_k$  están en **posición canónica** si cumplen una de las siguientes dos condiciones:

1. Si  $k \leq n$ , los puntos  $P_0, \dots, P_k$  son proyectivamente independientes.
2. Si  $k > n$ , no existe ningún hiperplano de  $\mathbb{P}(V)$  contenga  $n + 1$  puntos de los  $P_i$ .

**Definición 3.0.13.** Un conjunto ordenado  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n, P_{n+1}\}$  es un sistema de referencia proyectivo o, simplemente, una **referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$**  si los puntos  $P_0, \dots, P_n, P_{n+1}$  están en posición canónica. Los  $P_i$  reciben el nombre de **puntos fundamentales de la referencia proyectiva** y el punto  $P_{n+1}$  se denomina **punto unidad de la referencia**.

### 3.1. Sistema de coordenadas homogéneas

**Definición 3.1.1.** Sea  $R = \{P_0, \dots, P_n, P_{n+1}\}$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$ . Para cualquier  $u \in V - \{0\}$  tal que  $[u] = P_{n+1}$  existe una única base  $B_u = \{v_0, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que  $[v_i] = P_i$  para cada  $i = 0, \dots, n$  y  $u = v_0 + \dots + v_n$ . Más aún, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$  se tiene que  $B_{\lambda u} = \{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$ .

Cualquier base  $B_u$  obtenida de esta manera se denomina **base normalizada** de  $V$  y se puede definir con ella un **sistema de coordenadas homogéneas** en  $\mathbb{P}(V)$  así:

Sea  $v$  un vector en  $V$  con coordenadas  $(x_0, \dots, x_n)$  respecto a una base lineal  $\mathcal{B}_u$  y sea  $P = [v]$ , entonces se dice que  $[x_0, \dots, x_n]$  es la  $(n + 1)$ -tupla de coordenadas homogéneas de  $P$  con respecto a la referencia  $\mathcal{R}$ .

Estas coordenadas están determinadas de manera única salvo por un escalar no nulo, ya que las coordenadas homogéneas de un punto  $P$  en el espacio proyectivo corresponden a la  $(n + 1)$ -tupla  $[P]_R = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , de manera particular,

$$[P_0]_R = [1, 0, \dots, 0], [P_1]_R = [0, 1, \dots, 0], \dots, [P_n]_R = [0, 0, \dots, 1]$$

, y el punto  $[P_{n+1}]_R = [1, 1, \dots, 1]$ .

Una vez se ha escogido una referencia proyectiva en el espacio  $\mathbb{P}(V)$ , entonces el punto  $[P]_R = [x_0, \dots, x_n]$  se puede escribir como  $P = [x_0, \dots, x_n]$ .

Las coordenadas homogéneas fueron definidas por Moëbius y sirvieron para mostrar que:

- Un punto tiene infinitas representaciones.
- Los puntos en el infinito se pueden representar mediante coordenadas.
- Dadas dos rectas, estas siempre se cortan en un punto.

Escoger una referencia proyectiva  $R$  es equivalente a escoger un isomorfismo proyectivo entre  $\mathbb{P}(V)$  y  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Llamemos  $\phi_R : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  definido por  $\phi_R(P) = [P]_R$  resulta ser el isomorfismo proyectivo inducido por el isomorfismo lineal  $\phi_B : V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  que envía a  $v \in V$  a sus coordenadas con respecto a la base  $B$ , donde  $B$  es una base normalizada asociada a  $R$ .

En  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  la referencia  $\{[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, 0, \dots, 1], [1, 1, \dots, 1]\}$  es llamada la referencia proyectiva estándar y su correspondiente base normalizada es la base canónica de

$\mathbb{K}^{n+1}$ .

Las coordenadas homogéneas permiten dar una representación analítica de subespacios y transformaciones proyectivas (ver [7]).

**Ejemplo 3.1.2.** Los siguientes son ejemplos de referencias proyectivas:

- Sobre la recta proyectiva, cualquier familia de tres puntos, distintos dos a dos, es una referencia proyectiva.
- En el plano proyectivo, cualquier conjunto de cuatro puntos tales que tres cualesquiera entre ellos no sean colineales constituye una referencia proyectiva.
- Si  $\mathbb{P}(V) = 3$ , cualquier familia de cinco puntos tales que al tomar cuatro puntos arbitrariamente de entre ellos no son coplanares constituyen una referencia proyectiva.

**Ejemplo 3.1.3.** Veamos que los puntos

$$\left[\frac{1}{3}, 1, 1\right], \left[1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right], [-4, 2, -1]$$

del plano proyectivo real son colineales y encontremos la ecuación de la recta que los contiene.

Los puntos  $\left[\frac{1}{3}, 1, 1\right]$ ,  $\left[1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]$  son clases de equivalencia luego:

- tomando  $\lambda = 3$  el punto  $\left[\frac{1}{3}, 1, 1\right]$  es equivalente a  $[1, 3, 3]$  y
- tomando  $\lambda = 5$  el punto  $\left[1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]$  es equivalente a  $[5, 1, 4]$ .

De acuerdo a la observación 3.0.5 los puntos  $[1, 3, 3]$  y  $[5, 1, 4]$  determinan una única recta, es decir, están alineados. Para ver que son colineales con el punto  $[x_0, x_1, x_2]$  del plano, se debe probar que sus vectores correspondientes  $(1, 3, 3)$ ,  $(5, 1, 4)$ ,  $(x_0, x_1, x_2)$  son linealmente

dependientes, es decir, si se define la matriz  $A$ , cuyas columnas son dichos vectores, entonces  $\det A = 0$ .

En efecto, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & x_0 \\ 3 & 1 & x_1 \\ 3 & 4 & x_2 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & x_0 \\ 3 & 1 & x_1 \\ 3 & 4 & x_2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 4 & x_2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 3 & x_2 \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1(x_2 - 4x_1) - 5(3x_2 - 3x_1) + x_0(12 - 3) \\ &= x_2 - 4x_1 - 15x_2 + 15x_1 + 9x_0 \\ &= 9x_0 + 11x_1 - 14x_2. \end{aligned}$$

Del procedimiento anterior se puede concluir que la ecuación que contiene estos tres puntos es  $9x_0 + 11x_1 - 14x_2 = 0$ .

Ahora, para ver que el punto  $[-1, 2, -4]$  es colineal con los otros dos puntos, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación anterior. En efecto:

$$9(-4) + 11(2) - 14(-1) = 0.$$

Así los puntos  $[\frac{1}{3}, 1, 1]$ ,  $[1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ ,  $[-4, 2, -1]$  son colineales.

### 3.2. Principio de dualidad

**Definición 3.2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  y denotemos por  $V^*$  a su espacio dual. El espacio proyectivo  $\mathbb{P}(V^*)$ , también denotado por  $\mathbb{P}(V)^*$ , es llamado **espacio proyectivo dual**. Si  $\dim V = n + 1$ , entonces  $\mathbb{P}(V)^*$  tiene dimensión  $n$  y por tanto es proyectivamente isomorfo a  $\mathbb{P}(V)$ .

Si  $B$  es una base lineal de  $V$  (obtenida, por ejemplo, de una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$ ), entonces la base dual  $B^*$  de  $V^*$  se puede utilizar para inducir en  $\mathbb{P}(V)^*$  un sistema de coordenadas homogéneas duales. Si  $[L] \in \mathbb{P}(V)^*$  es la clase de equivalencia de una función lineal no nula  $L \in V^*$  y si  $L(x_0, \dots, x_n) = a_0x_0 + \dots + a_nx_n$  en el sistema de coordenadas homogéneas indicado por  $B$ , entonces  $L$  tiene coordenadas  $(a_0, \dots, a_n)$  con respecto a la base  $B^*$  de  $V^*$  y  $[L]$  tiene coordenadas homogéneas  $[a_0, \dots, a_n]$ .

Ya que  $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$  representa un hiperplano de  $\mathbb{P}(V)$ , el espacio  $\mathbb{P}(V)^*$  puede ser identificado de modo natural con el conjunto de hiperplanos proyectivos de  $\mathbb{P}(V)$  y por tanto tiene una estructura de espacio proyectivo.

La siguiente es la versión del principio de dualidad planteada en [4] que nos va a permitir dar una demostración simplificada del recíproco del teorema de Desargues:

#### **Teorema 3.2.2. Principio de dualidad**

*Sea  $\mathbb{P}(V)$  un espacio proyectivo de dimensión  $n$ . Sea  $P$  una afirmación sobre subespacios de  $\mathbb{P}(V)$ , sus intersecciones, uniones, y dimensiones y  $P^*$  la afirmación dual de  $P$  que se obtiene al remplazar las palabras intersección, unión, dimensión, contenido, contiene por unión, intersección, dimensión dual, contiene, contenido, respectivamente. Entonces  $P$  se cumple si y solo si  $P^*$  se cumple.*

**Ejemplo 3.2.3.** Encontramos los valores  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales las rectas con ecuaciones

$$ax_1 - x_2 + 3ix_0 = 0, -iax_0 + x_1 - ix_2 = 0, 3ix_2 + 5x_0 + x_1 = 0$$

de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  son concurrentes.

Consideremos la matriz  $A$  cuyas columnas están formadas por los coeficientes de  $x_0, x_1$  y  $x_2$  respectivamente así:

$$A = \begin{pmatrix} 3i & a & -1 \\ -ia & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix}$$

y el vector columna

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entonces todas las líneas se intersecan si y solo si el sistema lineal homogéneo  $AX = 0$  admite una solución no trivial, lo cual ocurre si y solo si,  $\det(A) = 0$ , luego

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3i & a & -1 \\ -ia & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{vmatrix} = 3i \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3i \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -ia & -i \\ 5 & 3i \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -ia & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3i(3i - (-i)) - a(-3ai^2 - (-5i)) - 1(-ia - 5) \\ &= -3a^2 - 4ia - 7 = 0. \end{aligned}$$

Ahora,  $-3a^2 - 4ia - 7 = 0$  implica que  $3a^2 + 4ia + 7 = 0$  y

$$3a^2 + 4ia + 7 = (3a + 7i)(a - i) = 0,$$

es decir,  $a = i$  o  $a = -\frac{7}{3}i$ .

**Ejemplo 3.2.4.** Sean  $A, B, C, D$  puntos de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  en posición general y consideremos los puntos

$$P = L(A, B) \cap L(C, D); Q = L(A, C) \cap L(B, D); R = L(A, D) \cap L(B, C)$$

Veamos que  $P, Q, R$  no son colineales.

En efecto, ya que  $A, B, C, D$  están en posición general, se puede escoger un sistema homogéneo de coordenadas en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  donde:

$$A = [1, 0, 0], B = [0, 1, 0], C = [0, 0, 1], D = [1, 1, 1].$$

Para hallar la ecuación de la recta  $L(A, B)$  debemos calcular el determinante cuyas columnas son los vectores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(x_0, x_1, x_2)$ , es decir:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(x_2 - 0x_1) - 0 + x_0(0 - 0) \\ &= x_2, \end{aligned}$$

luego

$$L(A, B) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_2 = 0\}.$$

De igual forma se puede ver que:

- $L(C, D) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_0 = x_2\}$
- $L(A, C) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_1 = 0\}$
- $L(B, D) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_0 = x_2\}$
- $L(A, D) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_1 = x_2\}$
- $L(B, C) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) : x_0 = 0\}$

y así se tiene que

$$P = [1, 1, 0], Q = [1, 0, 1], R = [0, 1, 1]$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

los puntos  $P, Q, R$  no son colineales.

**Ejemplo 3.2.5.** Los puntos  $P_1 = [1, 0, 1, 2], P_2 = [0, 1, 1, 1], P_3 = [2, 1, 2, 2], P_4 = [1, 1, 2, 3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  no están en posición canónica.

Al considerar sus correspondientes vectores asociados  $v_1 = (1, 0, 1, 2), v_2 = (0, 1, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2, 2), v_4 = (1, 1, 2, 3) \in \mathbb{R}^4$  tales que  $P_i = [v_i]$  para todo  $i$ , consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\det A = 0$  y así  $v_1, v_2, v_3, v_4$  son linealmente dependientes y, por tanto, los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  no están en posición canónica.

Encontremos las ecuaciones cartesianas de  $L(P_1, P_2, P_3, P_4)$  y su dimensión.

El determinante de la submatriz dada por las 3 primeras filas y las 3 primeras columnas de  $A$  es igual a  $-1$ , así,  $v_1, v_2, v_3$  son linealmente independientes. Entonces, la dimensión del subespacio lineal generado por  $v_1, v_2, v_3, v_4$  es 3 luego  $L(P_1, P_2, P_3, P_4) = L(P_1, P_2, P_3)$  y  $\dim L(P_1, P_2, P_3, P_4) = 2$ . Más aún, la ecuación cartesiana de  $L(P_1, P_2, P_3, P_4) = L(P_1, P_2, P_3)$  está dada por

$$0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x_0 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 1 & 2 & x_3 \end{vmatrix} = -x_0 - 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

Por el ejercicio anterior, si reemplazamos la última columna de  $A$  por el vector  $(0, 0, 0, 1)$  obtenemos una matriz invertible, así los vectores  $v_1, v_2, v_3, (0, 0, 0, 1)$  constituyen una base de  $\mathbb{R}^4$ . La referencia proyectiva inducida por esta base está dada por los puntos

$$P_1, P_2, P_3, [0, 0, 0, 1], [3, 2, 4, 6].$$

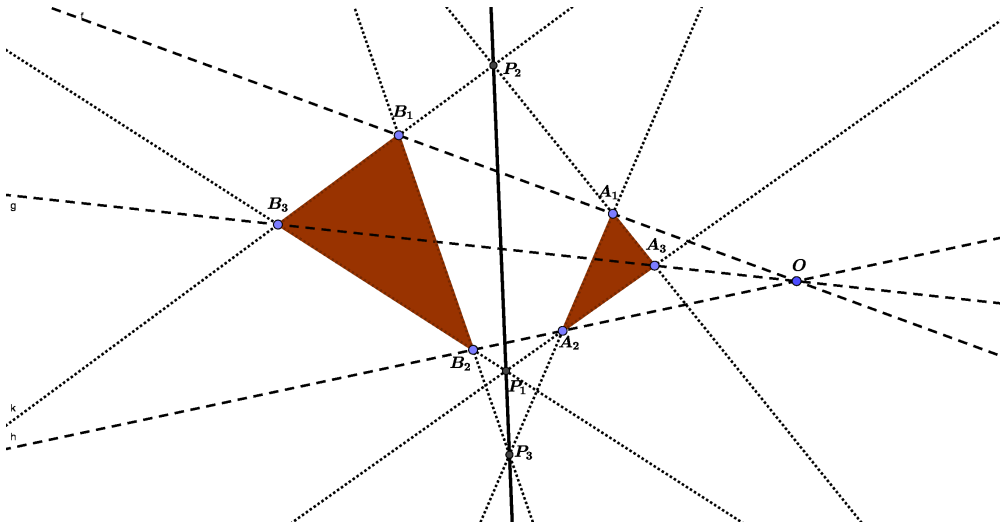
Así, estos puntos extienden a  $P_1, P_2, P_3$  a una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Sea  $R = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$  y sea  $0 \leq k \leq n+1$  y consideremos los subespacios  $S = L(P_0, P_1, \dots, P_k)$  y  $S' = L(P_{k+1}, \dots, P_{n+1})$ , entonces existe  $W \in \mathbb{P}(V)$  tal que  $S \cap S' = \{W\}$ .

Por definición de referencia proyectiva,  $\dim S = k$ ,  $\dim S' = n - k$  y  $\dim L(S, S') = n$ , así, por la fórmula de Grassmann se tiene que  $\dim(S, S') = \dim S + \dim S' - \dim L(S, S') = 0$ .

### 3.3. El teorema de Desargues en la geometría proyectiva

**Teorema 3.3.1.** Sea  $\mathbb{P}(V)$  un plano proyectivo y  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, O$  puntos de  $\mathbb{P}(V)$  en posición canónica. Consideremos los triángulos  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathbb{P}(V)$  con vértices en  $A_1, A_2, A_3$  y  $B_1, B_2, B_3$  respectivamente; entonces  $T_1$  y  $T_2$  están en perspectiva central respecto al punto  $O$  si y solo si los puntos  $P_1 = L(A_2, A_3) \cap L(B_2, B_3)$ ,  $P_2 = L(A_3, A_1) \cap L(B_3, B_1)$ ,  $P_3 = L(A_1, A_2) \cap L(B_1, B_2)$  son colineales.



#### Demostración

Los puntos  $\{A_1, B_1, P_3, P_2\}$  no son colineales, por tanto, están en posición canónica y así constituyen una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$  de modo que es posible asignarles coordenadas homogéneas como sigue:

$$A_1 = [1, 0, 0], B_1 = [0, 1, 0], P_3 = [0, 0, 1], P_2 = [1, 1, 1]$$

A partir de estos puntos, podemos asignarles coordenadas a los puntos  $A_2, A_3, B_2, B_3$  así:

- El punto  $A_2$  pertenece a la línea  $L(A_1, P_3)$ , luego  $A_2$  se puede expresar como combi-

nación lineal de los puntos  $A_1, P_3$  así:

$$A_2 = \lambda_1 [1, 0, 0] + \lambda_2 [0, 0, 1] = [\lambda_1, 0, \lambda_2] = \left[ 1, 0, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right] = [1, 0, a_2],$$

donde  $a_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq 0$ .

- El punto  $A_3$  pertenece a la línea  $L(A_1, P_2)$ , luego  $A_3$  se puede expresar como combinación lineal de los puntos  $A_1, P_2$  así:

$$A_3 = \lambda_3 [1, 0, 0] + \lambda_4 [1, 1, 1] = [\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_4, \lambda_4] = \left[ \frac{\lambda_3}{\lambda_4} + 1, 1, 1 \right] = [a_3, 1, 1],$$

donde  $a_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} + 1 \neq 1$ .

- El punto  $B_2$  pertenece a la línea  $L(B_1, P_3)$ , luego  $B_2$  se puede expresar como combinación lineal de los puntos  $B_1, P_3$  así:

$$B_2 = \lambda_5 [0, 1, 0] + \lambda_6 [0, 0, 1] = [0, \lambda_5, \lambda_6] = \left[ 0, 1, \frac{\lambda_6}{\lambda_5} \right] = [0, 1, b_2],$$

donde  $b_2 = \frac{\lambda_6}{\lambda_5} \neq 0$ .

- El punto  $B_3$  pertenece a la línea  $L(B_1, P_2)$ , luego  $B_3$  se puede expresar como combinación lineal de los puntos  $B_1, P_2$  así:

$$B_3 = \lambda_7 [0, 1, 0] + \lambda_8 [1, 1, 1] = [\lambda_8, \lambda_7 + \lambda_8, \lambda_8] = \left[ 1, \frac{\lambda_7}{\lambda_8} + 1, 1 \right] = [1, b_3, 1].$$

donde  $b_3 = \frac{\lambda_7}{\lambda_8} + 1 \neq 1$ .

luego,

$$A_3 = [a_3, 1, 1], B_2 = [0, 1, b_2], B_3 = [1, b_3, 1]$$

donde  $a_3, b_2, b_3 \in \mathbb{K}, b_2 \neq 0, a_3 \neq 1, b_3 \neq 1$ .

Definamos ahora los puntos  $P'_1 = L(A_2, A_3) \cap L(P_2, P_3)$  y  $P''_1 = L(B_2, B_3) \cap L(P_2, P_3)$ , entonces, los puntos  $P_1, P_2, P_3$  son colineales si y solo si  $P'_1 = P''_1$  (y en este caso  $P_1 = P'_1 = P''_1$ ).

Calculemos la ecuación de las rectas y las coordenadas de los puntos

- Ecuación de la recta  $L(A_2, A_3)$ .

Los puntos  $A_2 = [1, 0, a_2]$  y  $A_3 = [a_3, 1, 1]$  son colineales con el punto  $[x_0, x_1, x_2]$  si sus correspondientes vectores asociados  $(1, 0, a_2)$ ,  $(a_3, 1, 1)$  y  $(x_0, x_1, x_2)$  son linealmente dependientes en  $V$ , es decir, si al definir una matriz cuyas columnas corresponden a dichos vectores, entonces su determinante es 0. Calculemos primero el determinante así:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a_3 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ a_2 & 1 & x_2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ a_2 & x_2 \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= x_2 - x_1 - a_3(0x_2 - a_2x_1) + x_0(0 - a_2) \\ &= x_2 - x_1 + a_2a_3x_1 - a_2x_0 \\ &= -a_2x_0 + (a_2a_3 - 1)x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Luego estos 3 puntos son colineales si  $-a_2x_0 + (a_2a_3 - 1)x_1 + x_2 = 0$ , es decir, si

$$a_2x_0 + (1 - a_2a_3)x_1 - x_2 = 0$$

La anterior expresión corresponde a la ecuación de la recta  $L(A_2, A_3)$ .

- Ecuación de la recta  $L(B_2, B_3)$ .

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 \\ 1 & b_3 & x_1 \\ b_2 & 1 & x_2 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} b_3 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ b_2 & x_2 \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} 1 & b_3 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 1(x_2 - b_2x_1) + x_0(1 - b_2b_3) \\
&= 0 - x_2 + b_2x_1 + x_0 - b_2b_3x_0 \\
&= (1 - b_2b_3)x_0 + b_2x_1 - x_2.
\end{aligned}$$

La expresión  $(1 - b_2b_3)x_0 + b_2x_1 - x_2 = 0$  corresponde a la ecuación de la recta  $L(B_2, B_3)$ .

- Ecuación de la recta  $L(P_2, P_3)$ .

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} + x_0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 1(0x_2 - x_1) + x_0(0 - 1) \\
&= x_1 - x_0.
\end{aligned}$$

La expresión  $x_1 - x_0 = 0$  corresponde a la ecuación de la recta  $L(P_2, P_3)$ .

De aquí se tiene que  $x_1 = x_0$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $x_0 = x_1 = 1$ , entonces

$$a_2(1) + (1 - a_2a_3)(1) - x_2 = 0$$

y así  $x_2 = a_2 + 1 - a_2 a_3$  luego  $P'_1 = [1, 1, 1 - a_2 a_3 + a_2]$  y  $P''_1 = [1, 1, 1 - b_2 b_3 + b_2]$ . Por tanto,  $P'_1 = P''_1$  si y solo si se tiene la igualdad

$$a_2(1 - a_3) = b_2(1 - b_3).$$

y así  $P_1, P_2$  y  $P_3$  son colineales.

Ahora, utilizaremos la condición de que  $T_1$  y  $T_2$  están en perspectiva central respecto al punto  $O$ . La línea  $L(A_1, B_1)$  tiene ecuación  $x_2 = 0$ , la línea  $L(A_2, B_2)$  tiene ecuación  $a_2 x_0 + b_2 x_1 - x_2 = 0$  y la línea  $L(A_3, B_3)$  tiene ecuación  $(1 - b_3)x_0 + (1 - a_3)x_1 + (a_3 b_3 - 1)x_2 = 0$ . Estas 3 líneas son concurrentes si y solo si los puntos correspondientes del plano proyectivo dual son colineales, es decir, si y solo si

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_2 & b_2 & -1 \\ 1 - b_3 & 1 - a_3 & a_3 b_3 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

luego

$$\begin{aligned} 1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 - b_3 & 1 - a_3 \end{vmatrix} &= a_2(1 - a_3) - b_2(1 - b_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que, si esta condición se tiene, entonces el punto  $O$  que pertenece a las 3 líneas tiene coordenadas  $[b_2, -a_2, 0]$ . Ya que  $a_2 \neq 0$  y  $b_2 \neq 0$ , el punto  $O$  es distinto de cualquier vértice de  $T_1$  y  $T_2$ .

Finalmente, la conclusión sigue del hecho de que  $a_2(1 - a_3) = b_2(1 - b_3)$ .

## 4. APLICACIONES

En este capítulo estudiaremos dos aplicaciones del teorema de Desargues relacionadas con situaciones problema de la geometría euclidiana y analizaremos el teorema de Pappus, un importante resultado que demostraremos desde la geometría proyectiva y que implica el teorema de Desargues.

### 4.1. Primera aplicación

La primera aplicación que estudiaremos es la solución del siguiente problema:

***Dadas dos rectas  $r$  y  $s$  que no sean paralelas y un punto  $G$  exterior a ambas como se muestra en la siguiente figura, trazar la recta que pasa por  $G$  y por el punto de intersección de  $r$  y  $s$ .***

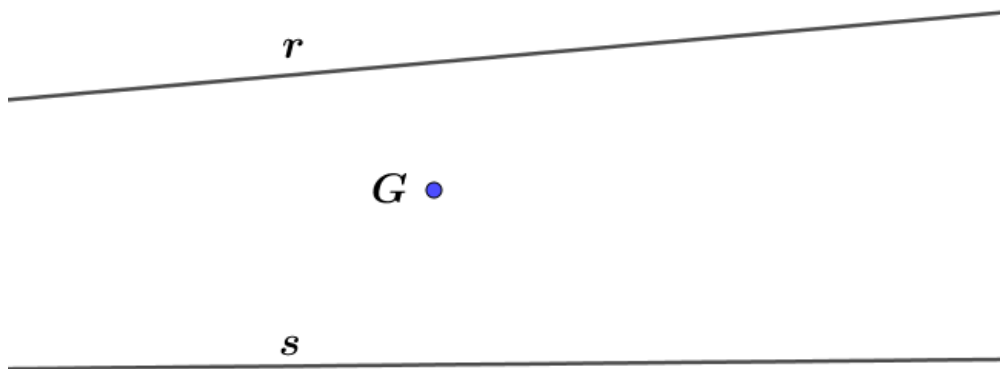


Figura 4.1. Construcción de un eje de perspectiva.

El problema parece trivial en un comienzo, pero si consideramos una gráfica como la anterior en la que no podemos establecer fácilmente el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$ , resulta conveniente utilizar el teorema de Desargues para graficar la recta deseada así:

- Ubicamos un punto arbitrario  $O$  exterior a las rectas dadas y trazamos tres rectas  $l_1, l_2, l_3$  que pasen por  $O$  y que corten a las rectas  $r$  y  $s$ .

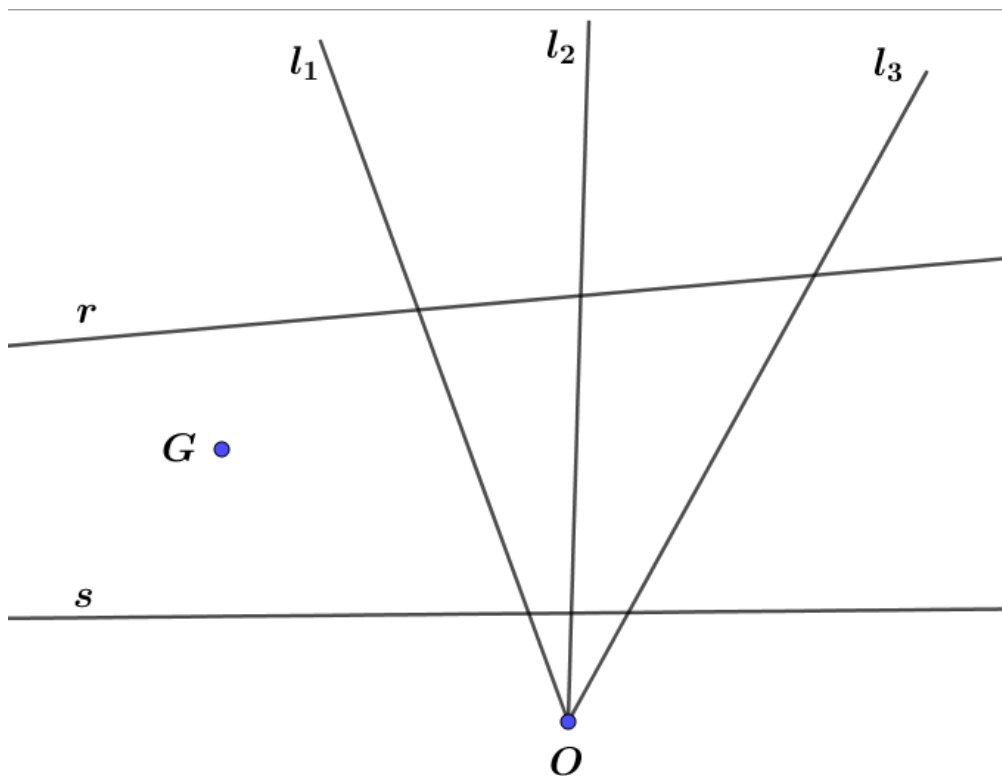


Figura 4.2. Paso 1, construcción de un eje de perspectiva.

- Denotamos por  $A$  y  $A'$  a los puntos de intersección de  $l_1$  con las rectas  $r$  y  $s$  respectivamente y trazamos dos rectas  $l_4$  y  $l_5$  que contiene a los puntos  $G, A$  y  $G, A'$  respectivamente. Denotamos también por  $B$  la intersección de las rectas  $l_2$  y  $l_4$  y por  $B'$  la intersección de  $l_2$  y  $l_5$ .

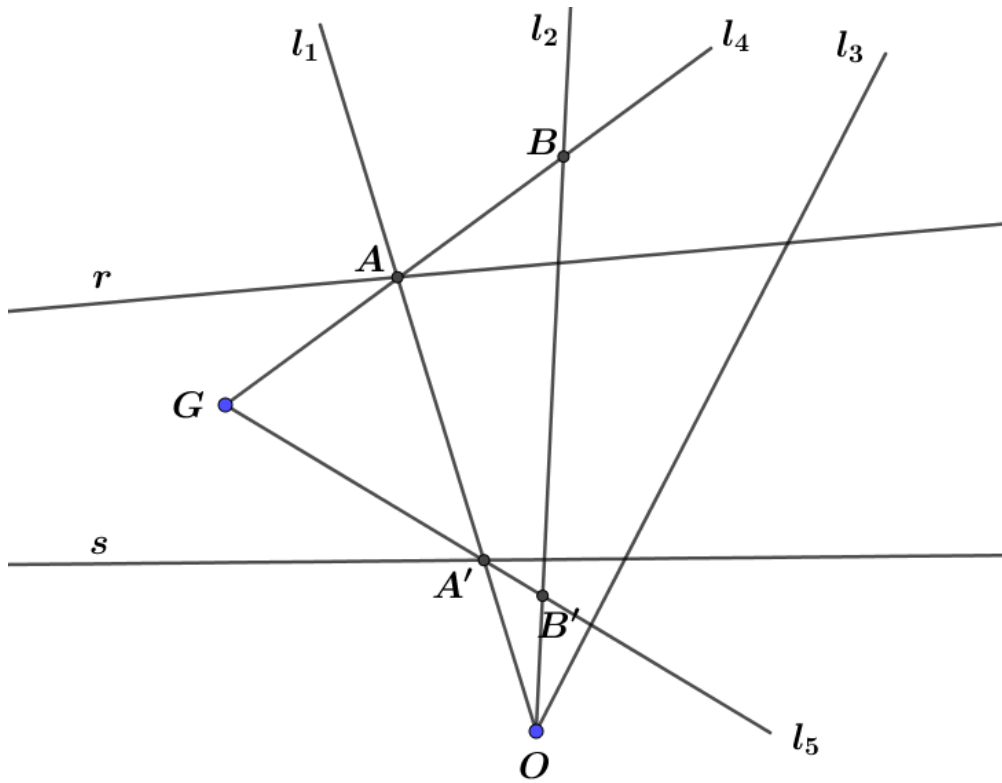


Figura 4.3. Paso 2, construcción de un eje de perspectiva.

- Denotamos por  $C$  la intersección de  $r$  con  $l_3$  y  $C'$  la intersección de las rectas  $s$  y  $l_5$ . Con esta configuración, los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se encuentran en perspectiva central respecto al punto  $O$  ya que las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concurren en  $O$ .

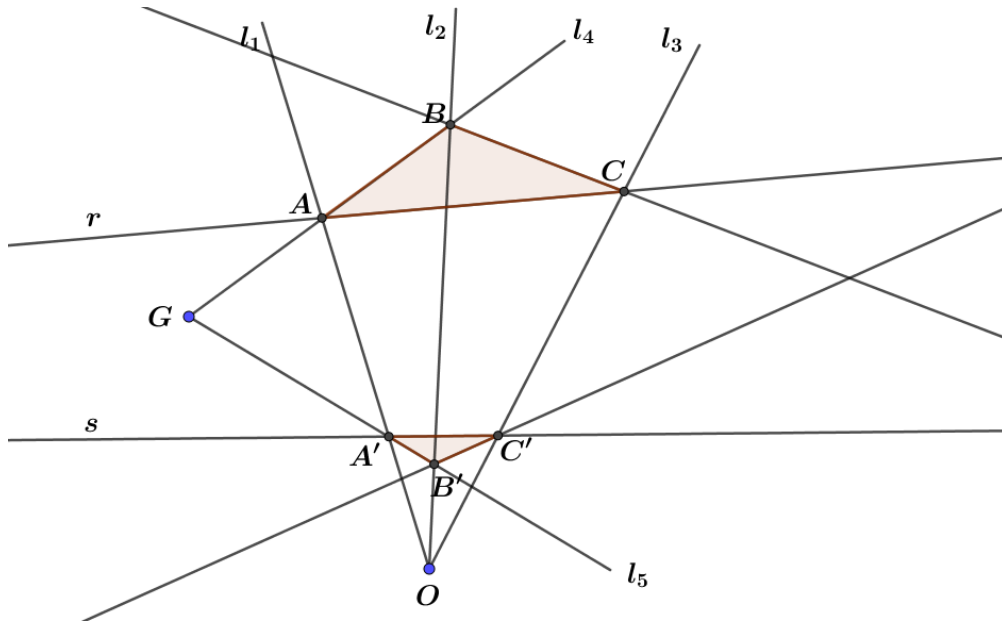


Figura 4.4. Paso 3, construcción de un eje de perspectiva.

- Sea  $H$  el punto de intersección de las rectas  $BC$  y  $B'C'$  y  $G$  el punto de intersección de las rectas  $AB$  y  $A'B'$  entonces, por el teorema de Desargues, los puntos  $G$  y  $H$  son colineales con el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$  y así, la recta  $GH$  es la recta deseada.

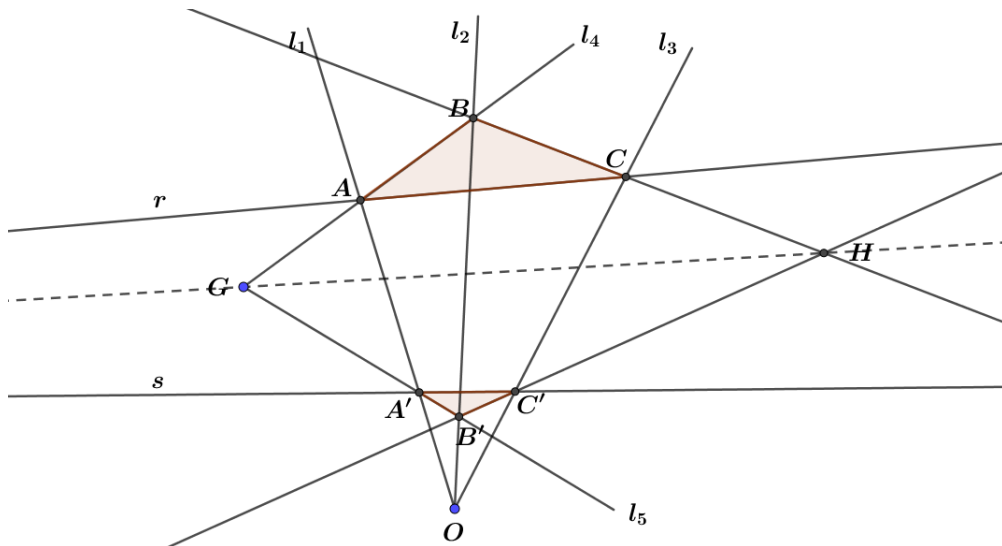


Figura 4.5. Solución a la construcción de un eje de perspectiva.

## 4.2. Segunda aplicación

Consideremos el siguiente paralelogramo  $ABCD$  y las rectas  $l_1, l_2, l_3$  concurrentes en  $O$ . Denotemos por  $A_1, B_1, C_1, D_1$  los puntos de intersección de dichas rectas con los lados del paralelogramo  $ABCD$  como se muestra en la figura:

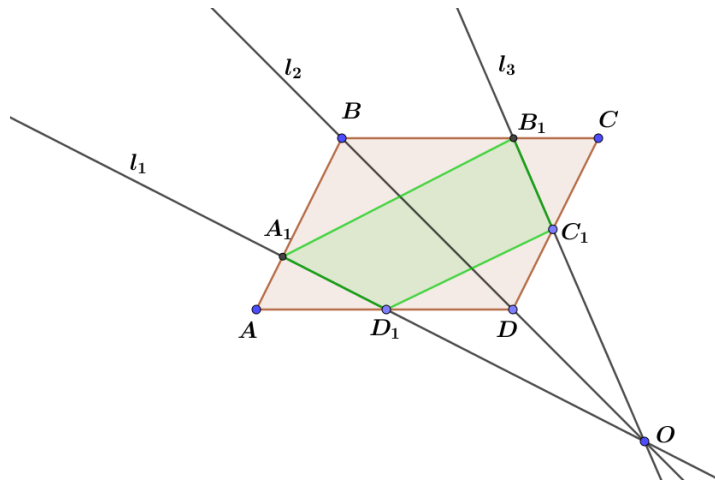


Figura 4.6. Paralelogramo, segunda aplicación.

Entonces las líneas  $A_1B_1$ ,  $AC$  y  $D_1C_1$  concurren en el punto  $E$ .

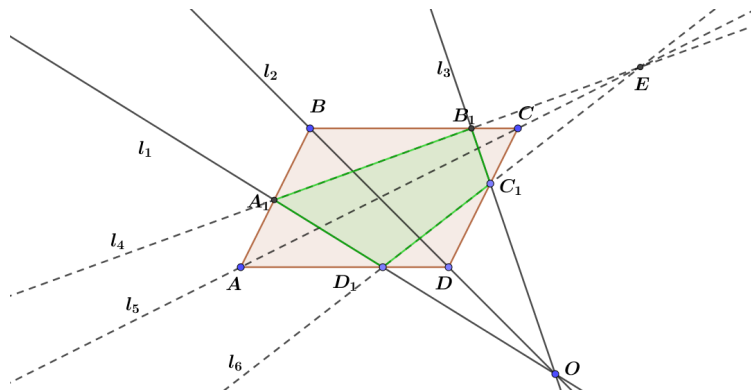


Figura 4.7. Solución con el Teorema de Desargues

Supongamos que  $E$  es el punto de intersección de las rectas  $A_1B_1$  y  $D_1C_1$  y veamos que la recta  $AC$  pasa por  $E$ . En efecto, los triángulos  $A_1BB_1$  y  $D_1CC_1$  se encuentran en posición

central respecto al punto  $O$ , por consiguiente, los puntos  $A = BA_1 \cap DD_1$ ,  $C = BB_1 \cap DC_1$ ,  $E = A_1B_1 \cap D_1C_1$  son colineales y así se tiene que las líneas  $A_1B_1$ ,  $AC$  y  $D_1C_1$  concurren en el punto  $E$ .

### 4.3. Teorema de Pappus

El teorema de Pappus <sup>1</sup> es un importante resultado de la geometría euclidiana que se puede entender también en términos de la geometría proyectiva y que implica el teorema de Desargues. En esta sección demostraremos el teorema de Pappus utilizando coordenadas homogéneas.

#### Teorema 4.3.1. Teorema de Pappus

Sea  $\mathbb{P}(V)$  un plano proyectivo y  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  puntos de  $\mathbb{P}(V)$  distintos dos a dos tales que las líneas  $L(A_1, A_2)$ ,  $L(A_2, A_3)$ ,  $L(A_3, A_4)$ ,  $L(A_4, A_5)$ ,  $L(A_5, A_6)$ ,  $L(A_6, A_1)$  son distintas dos a dos. Consideremos el hexágono de  $\mathbb{P}(V)$  con vértices  $A_1, \dots, A_6$  y supongamos que existen dos líneas distintas  $r, s$  tales que  $A_1, A_3, A_5 \in r$ ,  $A_2, A_4, A_6 \in s$  y  $O = r \cap s$  distinto de cada  $A_i$ . Entonces, los puntos donde los lados opuestos del hexágono se encuentran, son colineales, es decir, los puntos  $P_1 = L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5)$ ,  $P_2 = L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6)$  y  $P_3 = L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1)$  están en una misma línea proyectiva.

---

<sup>1</sup> Pappus de Alejandría (290 d.C.- 350 d.C.), es considerado uno de los últimos grandes geómetras y matemáticos de la Grecia antigua conocido por su obra "Colección matemática" en donde en 8 volúmenes aborda distintos tipos de problemas relacionados con geometría, matemática recreativa, entre otros.

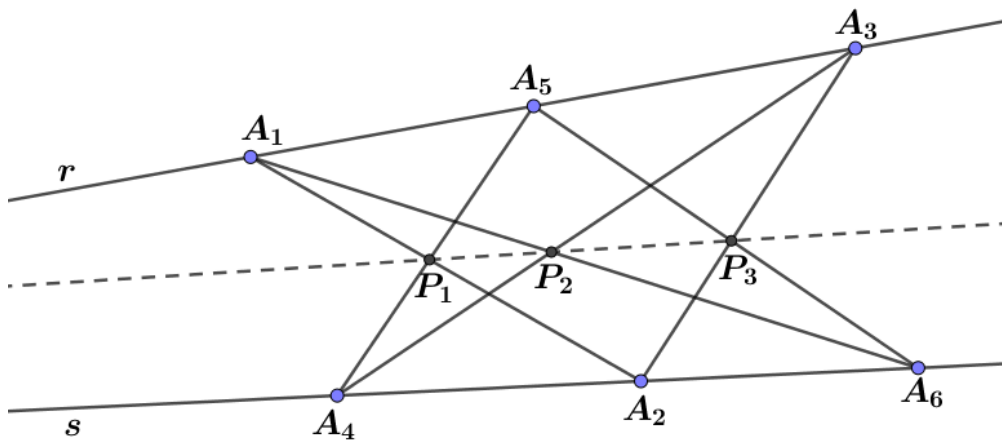


Figura 4.8. Teorema de Pappus

Demostración:

Por hipótesis tenemos que  $r = L(A_1, A_3)$  y  $s = L(A_2, A_4)$ . Como  $r \neq s$  y  $O = r \cap s$  no es un vértice del hexágono, entonces los puntos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  constituyen una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$  y así, podemos asignarles coordenadas homogéneas de  $\mathbb{P}(V)$  así:

$$A_1 = [1, 0, 0], A_2 = [0, 1, 0], A_3 = [0, 0, 1], A_4 = [1, 1, 1].$$

Los puntos  $A_1 = [1, 0, 0]$ ,  $A_3 = [0, 0, 1]$  y  $[x_0, x_1, x_2]$  son colineales si sus correspondientes vectores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y  $(x_0, x_1, x_2)$  son linealmente dependientes, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

luego la línea  $r$  tiene ecuación  $x_1 = 0$ . De la misma forma, la línea  $s$  tiene ecuación  $x_0 - x_2 = 0$  y por consiguiente, el punto  $O$  tiene coordenadas  $[1, 0, 1]$ .

El punto  $A_5$  pertenece a la recta  $r$  y es distinto de  $O$ ,  $A_1$  y  $A_2$ , luego realizando un proceso similar al anterior,  $A_5$  tiene coordenadas  $[1, 0, a]$  para algún  $a \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$ .

Del mismo modo, el punto  $A_6$  tiene coordenadas  $[1, b, 1]$  donde  $b \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$ . La línea  $L(A_1, A_2)$  tiene ecuación  $x_2 = 0$  y la línea  $L(A_4, A_5)$  tiene ecuación  $ax_0 + (1 - a)x_1 - x_2 = 0$ . Así, el punto  $P_1 = L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5)$  tiene coordenadas  $[a - 1, a, 0]$ .

Realizando cálculos similares a los anteriores, se tiene que  $P_2$  tiene coordenadas  $[0, b, 1 - a]$  y  $P_3$  tiene coordenadas  $[b, b, 1]$ , luego se tiene que los puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  son colineales pues

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{vmatrix} &= (a-1) \begin{vmatrix} b & 1-a \\ b & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ b & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & b \end{vmatrix} \\ &= (a-1)(b - b(1-a)) - a(0 - b(1-a)) + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

## Bibliografía

- [1] Poncelet, J. V. (1866). *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain* (Vol. 2). Gauthier-Villars.
- [2] Poudra, N. G. (1864). *Oeuvres de Desargues réunies et analysées*. Fide.
- [3] Bosse, A. *Manière universelle de M. desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral*. Imprimerie de Pierre Des-Hayes, Paris (1648).
- [4] Fortuna, E., Frigerio, R., and Pardini, R. (2016). *Projective Geometry* (Vol. 104). Cham: Springer.
- [5] Aroca, J. M., and Bermejo, M. F. *Geometria Proyectiva*.
- [6] Borceux, F. (2014). *An Algebraic Approach to Geometry*. Berlin: Springer.
- [7] Doneddu, A. (1978). *Curso de matemáticas: Algebra y geometría*. Aguilar.
- [8] Lienert, C. (2018). *Dual Perspectives on Desargues' Theorem*.
- [9] Taton, R. (1951). *L'œuvre mathématique de G. Desargues*. Paris, 25.
- [10] Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Volume 2* (Vol. 2). Oxford university press.
- [11] De Porras, M. C., y Ramos, C. A. L. (2019). *El Arte y la Historia de la Construcción en la Geometría Proyectiva*. Saber, Ciencia y Libertad, 14(2), 295-311.
- [12] Schneider, M. E. (1984). GIRARD DESARGUES, THE ARCHITECTURAL AND PERSPECTIVE GEOMETRY: A STUDY IN THE RATIONALIZATION OF FIGURE (FRANCE). Virginia Polytechnic Institute and State University.