

COLAPSO RADIATIVO ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO EN LA  
APROXIMACIÓN POSCUASIESTÁTICA

Andrés Américo Navarro León

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
2008

COLAPSO RADIATIVO ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO EN LA  
APROXIMACIÓN POSCUASIELÁTICA

Andrés Américo Navarro León

Director  
Dr. José David Sanabría Gómez

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Físico

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
2008

*A mi madre Jenny por su gran esfuerzo incansable me brindo su calor de madre, que a pesar que esta lejos la llevo a mi lado siempre, a Jose Joaquín, mi padre, por brindarme sus sabios consejos, a mi abuelita Natividad, por que es mi segunda madre la cual me cuidó y me crió, a mis hermanos joaquito, pato y eduardo*

---

---

# AGRADECIMIENTOS

---

---

Agradezco al Dr. José David Sanabria Gómez, por su apoyo en la realización en este proyecto, a Jorge Armando Rueda por su colaboración aún estando lejos y al Dr. Luis Nuñez.

A Roosevelt Carrillo y Olga Nuñez, por brindarme su apoyo en los momentos que mas los necesitaba y acogerme como un hijo mas, y Hamilton Carrillo, el cobra, mi parcerero, mi amigo.

A Alba Castillo, mi reina, por estar a mi lado y brindarme tanta felicidad.

A mi amigos de carrera: Cesar peralta, Jairo Torres, Francisco Gamboa y Ricardo Contreras y a todos los integrantes del Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

---

---

# RESUMEN

---

---

**TÍTULO :** COLAPSO RADIATIVO ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO EN LA APROXIMACIÓN POSCUASIESTÁTICA<sup>1</sup>.

**AUTORES :** NAVARRO LEÓN, Andrés Americo<sup>2</sup>

**PALABRAS CLABES :** Colapso gravitacional, relatividad general clásica, regimen postcuasiestático, estrellas relativistas.

Se presenta la evolución en el tiempo de las variables de densidad, presión, velocidad del fluido, flujo de radiación, densidad de radiación y presión de radiación, de un objeto autogravitante esféricamente simétrico en fase de colapso gravitacional radiativo en el marco de la relatividad general, descrito por medio de la aproximación poscuasiestática de Herrera et al [*Phys. Rev.* **D65**, 104004 (2002)] con las ecuaciones de estado tipo Schwarzschild y Tolman VI. Se han introducido los parámetros factor de flujo  $f$  y el factor variable de Eddington  $\chi$  para modelar los procesos de disipación de la radiación en la materia, entre el límite de escape libre caracterizado por el valor del factor de flujo  $f = 1$  y regímenes difusivos caracterizado por valores del factor de flujo en el rango,  $0.75 < f < 1$  esto dependiendo de la ecuación de estado. Se ha utilizado principalmente la relación de clausura de Lorentz–Eddington (aunque se han hecho algunas comparaciones con los resultados al momento de utilizar las relaciones de Bowers–Wilson y Maximum Packing) para analizar la influencia de del factor de flujo sobre la evolución del sistema, encontrando que el comportamiento de las variables físicas se ve afectado solo ligeramente y no en forma global por la elección del parámetro del factor de flujo  $f$  y por la elección de la relación de clausura. El cumplimiento de las condiciones de energía dominante, fuerte y débil han sido verificadas.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG), Director: José David Sanabria Gómez

---

---

# ABSTRACT

---

---

**TITLE :** COLLAPSE RADIATIVE SPHERE SYMMETRICAL IN THE APPROXIMATION POSTQUASISTATIC<sup>3</sup>

**AUTHORS :** NAVARRO LEÓN, Andrés Americo<sup>4</sup>

**KEY WORDS :** Gravitational collapse, classical general relativity, postquasistatic regime, relativistic stars.

It shows the evolution over time of variables density, velocity of the fluid, energy flux, density of radiation and pressure of radiation, for a spherically symmetric object self-gravitating under gravitational and radiative collapse in the frame of general relativity is presented. It is described by means of the postquasistatic approximation provided by Herrera et al [*Phys. Rev.* **D65**, 104004 (2002)] with equations of state Schwarzschild-like and Tolman VI-like. The flux factor and the Eddington variable factor have been introduced in order to model processes of dissipation of radiation inside the matter, between the free streaming out limit characterized by the value flux factor  $f = 1$  and diffusive regimes characterized by flux factor values in the range,  $0.75 \leq f < 1$  this depends on the equation of state. It has been used mainly relationship Closing Lorentz–Eddington (although there have been some comparisons with the results at the time of using relations Bowers–Wilson and Maximum Packing) to analyze the influence of flux factor on the evolution of the system, finding that the conduct of the physical variables is affected only slightly and not in a global context by the choice of parameter flux factor  $f$  and the election of the relationship Closing. Besides, the weak, strong and dominant energy conditions have been satisfied.

---

<sup>3</sup>degree project

<sup>4</sup>Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG), Manager: José David Sanabria Gómez

---

---

# ÍNDICE GENERAL

---

---

AGRADECIMIENTOS	II
RESUMEN	III
ABSTRACT	IV
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
ÍNDICE DE TABLAS	x
INTRODUCCIÓN	XI
<b>1. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN Y CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO</b>	<b>1</b>
1.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
1.2. ECUACIONES DE CAMPO . . . . .	2
1.3. TENSOR DE ENERGÍA – IMPULSO . . . . .	2
1.3.1. Tensor energía-impulso de materia . . . . .	3
1.3.2. Tensor energía-impulso de radiación . . . . .	3

---

1.4. CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO . . . . .	7
<b>2. AMBIENTE HIDRODINÁMICO DE RADIACIÓN</b>	<b>11</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	11
2.2. LÍMITES EN EL CAMPO DE RADIACIÓN Y RELACIONES DE CLAUSURA	12
2.3. CONDICIONES DE ENERGÍA . . . . .	14
2.3.1. Condición de energía débil . . . . .	15
2.3.2. Condición de energía dominante . . . . .	15
2.3.3. Condición de energía fuerte . . . . .	15
<b>3. APROXIMACIÓN POSCUASIESTÁTICA</b>	<b>17</b>
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	17
3.2. RÉGIMEN CUASIESTÁTICO . . . . .	18
3.3. VARIABLES EFECTIVAS . . . . .	20
3.4. ECUACIONES DE SUPERFICIE . . . . .	21
<b>4. MODELANDO CONFIGURACIONES DE MATERIA</b>	<b>24</b>
4.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	24
4.2. MODELO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	24
4.3. MODELO DE TOLMAN VI . . . . .	27
<b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>29</b>
5.1. MODELO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	29
5.2. MODELO DE TOLMAN VI . . . . .	38
5.3. CONCLUSIONES . . . . .	50



---

---

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

---

1.1. Cambio de base: Marco comóvil $\implies$ Marco de la métrica. . . . .	5
5.1. Evolución de la frontera $A$ para el modelo de Schwarzschild . . . . .	31
5.2. Densidad de materia $\rho$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	32
5.3. Presión de materia $P$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	33
5.4. Velocidad del fluido $\omega$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	34
5.5. Flujo de radiación $\mathcal{F}$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	35
5.6. Densidad de radiación $\rho_R$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	36
5.7. Presión de radiación $P_R$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild	37
5.8. Evolución de la frontera $A$ para el modelo de Tolman $VI$ . . . . .	39
5.9. Densidad de materia $\rho$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$	40
5.10. Presión de materia $P$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$	41
5.11. Velocidad del fluido $\omega$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$	42
5.12. Flujo de radiación $\mathcal{F}$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$	43
5.13. Densidad de radiación $\rho_R$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$ . . . . .	44
5.14. Presión de radiación $P_R$ (en unidades de $10^3$ ) para el modelo de Tolman $VI$ . . . . .	45

---

5.15. Comparación de la evolución de la frontera de la distribución para el modelo de Schwarzschild usando diferentes relaciones de clausura: Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP). . .	46
5.16. Comparación de la evolución de la frontera de la distribución para el modelo de Tolman VI usando diferentes relaciones de clausura: Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP). . .	47
5.17. Gráficas correspondientes al modelo de Schwarzschild, realizadas para la capa radial de $r/r_\Sigma = 0.2$ , con un factor de flujo de $f = 0.85$ . Se comparan los resultados al utilizar las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP). . .	48
5.18. Gráficas correspondientes al modelo de Tolman VI, realizadas para la capa radial de $r/r_\Sigma = 0.2$ , con un factor de flujo de $f = 0.86$ . Se comparan los resultados al utilizar las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP). . . . .	49

---

---

# ÍNDICE DE TABLAS

---

---

2.1. Relaciones de clausura y sus condiciones de aceptabilidad físicas. Adaptado de [6]. . . . .	13
--	----

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

La disipación de energía de objetos compactos en etapa de colapso se da en forma de emisión de partículas sin masa (fotones y/o neutrinos), proceso común en la evolución de estrellas masivas, por lo general en estrellas de neutrones [1]. La mayor motivación por el cual se estudian sistemas autogravitantes en etapa de colapso gravitacional en presencia de campos gravitacionales y electromagnéticos fuertes es que es uno de los fenómenos astrofísicos en los cuales se esperan obtener mejores datos observacionales y en donde la relatividad general juega un papel importante. Un camino posible para realizar estos estudios es tratar el colapso gravitacional de esferas radiantes autogravitantes a partir de la “aproximación poscuasiestática” [2]. La descripción de la configuración se realiza mediante el tensor energía-impulso, que describe materia, presiones y transporte de radiación en el interior del objeto colapsante. El método propuesto es un método semi-numérico, denominado “aproximación poscuasiestática”, que lleva desde una solución estática esféricamente simétrica (semilla) de las ecuaciones de campo de Einstein hasta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias evaluadas en la superficie (frontera de la distribución del fluido) y su solución numérica permite modelar la esfera autogravitante; esto se logra asumiendo “variables efectivas” [3], las cuales dependen del tiempo y mantienen la misma dependencia radial de las correspondientes variables físicas estáticas (densidad y presión).

La configuración del sistema está principalmente constituida por dos regiones: región interior y región exterior. La región interior se encuentra descrita por densidad de energía, presión y flujo de radiación; en el espacio exterior sólo hay presencia de radiación de neutrinos o fotones ocasionada por el colapso de la configuración y es descrita por la solución de Vaidya. Estas dos regiones se encuentran separadas por una frontera de distribución del fluido que usualmente se mueve con la misma velocidad del mismo. Las características de la estructura y composición de la región interior de la esfera autogravitante será modelada por dos diferentes ecuaciones de estado, una tipo Schwarzschild y Tolman VI. Además estas dos regiones deben acoplarse (región interior y exterior) mediante las condiciones de acoplamiento de Darmois [4], que se encuentran expresadas en forma covariante. La disipación de la energía en forma de neutrinos y/o fotones en el interior del sistema autogravitante en etapa de colapso es un proceso característico en la evolución de estrellas masivas, el cual se modelara mediante la introducción de un factor de flujo de radiación y el factor variable Eddington [5, 6, 7]. Esta elección

permite modelar cualquier fase de radiación entre los límites de difusión y escape libre.

Acerca del método utilizado, debe mencionarse que es un método semi-numérico consistente en mantener el formalismo de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein hasta el punto donde sea imposible continuar de forma analítica y entonces utilizar métodos numéricos para la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acoplado, que en el presente trabajo fue el método “predictor–corrector” de Adams-Bashforth-Moulton implementado en Maple<sup>TM</sup> [8]. El uso de métodos numéricos abre una puerta para la investigación de sistemas, cuya solución analítica es extremadamente complicada o imposible a la luz de las técnicas analíticas actuales y que se constituyen en herramientas importantes para los investigadores de escenarios de campos fuertes [9]. La implementación del método en coordenadas tipo Schwarzschild (ver [2, 3, 10]), es más interesante para los astrofísicos dado que este tipo de coordenadas son comúnmente utilizadas por ellos. Como un comentario adicional, vale resaltar que en los trabajos más destacados en el estudio de colapso gravitacionales [11, 12, 13, 14, 15] no se emplean coordenadas de Schwarzschild sino coordenadas de radiación de Bondi, en las cuales es mucho menos clara la interpretación física desde el punto de vista de situaciones hidrodinámicas.

# CAPÍTULO 1

---

---

## ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN Y CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO

---

---

### *1.1 INTRODUCCIÓN*

La teoría de los campos gravitatorios, construida sobre las bases de la teoría de la relatividad, se llama teoría de la relatividad general, formulada por Einstein en 1916 de manera puramente deductiva y que tan solo después se vio apoyada por un soporte matemático preciso y por observaciones astronómicas. La teoría relatividad general es entre todas las teorías propuestas para describir la interacción gravitacional la que goza de mas aceptación en la comunidad científica.

Las ecuaciones de campo de Einstein forman la base fundamental de la relatividad general y describen como la materia–energía afectan la geometría y viceversa, es decir, como se relacionan la geometría del espacio tiempo (tensor de Einstein) con la materia que se encuentra presente (tensor de energía–impulso). Sin embargo, las ecuaciones de campo no determinan por completo la distribución de la materia, dichas ecuaciones no incluyen las ecuaciones de estado de la materia, o sea, las ecuaciones que ligan la presión con la densidad, entonces estas ecuaciones deben darse junto con las ecuaciones de campo para cerrar el sistema.

## 1.2 ECUACIONES DE CAMPO

Considerando la evolución de una configuración con simetría esférica, disipando energía mediante un flujo de radiación y limitada por una superficie esférica  $\Sigma = r - r_\Sigma = 0$ , se empezará describiendo el espacio tiempo de la configuración interior por un elemento de línea de Schwarzschild, descrito por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

donde  $\nu(r, t)$  y  $\lambda(r, t)$  son funciones únicamente de  $r$  y  $t$ . Se enumeran las coordenadas de la siguiente manera:  $x^0 = t$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \phi$ . La métrica (1.1) satisface las ecuaciones de campo, que en unidades relativistas ( $c = G = 1$ ) se encuentran escritas en la forma

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (1.2)$$

Dichas ecuaciones involucran las componentes del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , el tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ , la curvatura escalar  $R$  y el tensor energía-impulso  $T_{\alpha\beta}$  (para la formulación precisa de los tensores aquí presentado, ver por ejemplo [16]). Ellas describen la configuración de masa y energía en todo el espacio-tiempo. Las ecuaciones (1.2) constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales y acopladas en el tensor métrico. Para un espacio tiempo descrito por un elemento de línea (1.1), las ecuaciones de campo (1.2) pueden ser escritas de la siguiente forma [17]:

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (1.3)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} -8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 &= \frac{e^{-\lambda}}{4} \left[ 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2 \left( \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \right] \\ &\quad - \frac{e^{-\nu}}{4} \left[ 2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (1.6)$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a  $t$  y las primas indican derivadas con respecto a  $r$ .

## 1.3 TENSOR DE ENERGÍA – IMPULSO

El tensor energía-impulso es, en general, la suma de dos tensores; uno asociado a la materia  $\hat{T}_{\alpha\beta}^M$  y otro asociado a la radiación  $\hat{T}_{\alpha\beta}^R$ , donde  $\hat{\phantom{x}}$  indica que es medido desde un

marco de referencia comóvil. Ambos tensores presentan una contribución a la densidad de energía, la presión y al flujo de energía de radiación (para este caso sólo radiación, pues no se considera viscosidad, ya que esto generaría un flujo de calor).

### 1.3.1. Tensor energía-impulso de materia

La contribución del tensor energía-impulso de materia  $\hat{T}_{\alpha\beta}^M$ , para la configuración se asumirá como un fluido perfecto con presión radial e isótropo para un observador en reposo. Esto significa que  $\hat{T}_{\alpha\beta}^M$  es diagonal, es decir que no hay flujo neto de momentum en la dirección radial. Además, sus componentes espaciales deben ser todas iguales por isotropía:  $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ . Se tiene que las componentes del tensor energía-impulso de materia en el sistema comóvil están dadas por

$$\hat{T}_{\alpha\beta}^M = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $P$  la presión radial.

Por otra parte, a pesar de que haya un amplio conocimiento sobre la isotropía en sistemas autogravitantes, hay fuertes evidencias teóricas de que hay una variedad de fenómenos físicos que pueden dar lugar a cierta anisotropía local [18, 19, 20, 21].

### 1.3.2. Tensor energía-impulso de radiación

En seguida se describirán las componentes de tensor  $\hat{T}_{\alpha\beta}^R$ . Primero que todo, en un campo de radiación, se define la intensidad específica para simetría esférica  $\mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)$ , donde  $r$  es la posición y  $t$  el tiempo, propagándose en dirección  $\vec{n}$  con frecuencia  $\nu$ , la cantidad de energía transportada en un intervalo de frecuencias  $(\nu, \nu + d\nu)$  a través de un elemento de superficie  $dS$ , en un tiempo  $dt$ , dentro de un ángulo sólido  $d\Theta$  alrededor de  $\vec{n}$  es

$$d\mathcal{E} = \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) dS \cos\varphi d\Theta d\nu dt, \quad (1.8)$$

donde  $d\Theta = \sin\theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$ ,  $\mu = \cos\theta$  y  $\varphi$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y la normal a  $dS$ . Como en la teoría de transferencia de radiación clásica, en simetría esférica, los tres primeros momentos de  $\mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)$  pueden ser expresadas como [7],

$$\rho_R(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{+1}^{-1} \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) d\mu, \quad (1.9)$$

$$P_R(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{+1}^{-1} \mu^2 \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) d\mu, \quad (1.10)$$

$$\mathcal{F}(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{+1}^{-1} \mu \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) d\mu, \quad (1.11)$$

donde  $\rho_R$ ,  $\mathcal{F}$  y  $P_R$  son, la densidad de energía de radiación, el flujo de radiación y la presión de radiación, respectivamente.

Se puede escribir el tensor energía-impulso de radiación  $\hat{T}_{\alpha\beta}^R$ , de la siguiente forma

$$\hat{T}_{\alpha\beta}^R = \begin{pmatrix} \rho_R & -\mathcal{F} & 0 & 0 \\ -\mathcal{F} & P_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

donde  $P_\perp = \frac{1}{2}(\rho_R - P_R)$  [7].

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, dentro de la configuración el tensor energía-impulso puede ser escrito como  $\hat{T}_{\alpha\beta} = \hat{T}_{\alpha\beta}^M + \hat{T}_{\alpha\beta}^R$  [7]:

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & -\mathcal{F} & 0 & 0 \\ -\mathcal{F} & \bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{P}_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{P}_\perp \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

con  $\bar{\rho} = \rho + \rho_R$ ,  $\bar{P} = P_R + P$  y  $\bar{P}_\perp = P_\perp + P$ .

El tensor (1.13) posee densidad de energía  $\bar{\rho}$ , presión  $\bar{P}$  y flujo de radiación  $\mathcal{F}$ . El símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  denota que el tensor se encuentra escrito en un marco de referencia comóvil con el fluido. Para dotar las componentes del tensor  $\hat{T}_{\alpha\beta}$  de significado físico, se aplica el esquema propuesto por Bondi [17], el cual consiste en aplicar un boost inverso de Lorentz en dirección radial y un cambio de base inverso, con esto se vuelve al marco referencia de Schwarzschild, en el cual se realizan todos los cálculos.

Análogamente, el tensor (1.13) escrito en términos de la tétrada comóvil  $\hat{u}_\alpha$ ,  $\hat{x}_\alpha$ ,  $\hat{y}_\alpha$  y  $\hat{z}_\alpha$  está dado por

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \bar{\rho} \hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta + \bar{P} \hat{x}_\alpha \hat{x}_\beta + \bar{P}_\perp (\hat{y}_\alpha \hat{y}_\beta + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta) - \mathcal{F} (\hat{u}_\alpha \hat{x}_\beta + \hat{u}_\beta \hat{x}_\alpha), \quad (1.14)$$

donde  $\hat{u}_\alpha = \delta_\alpha^0$  y  $\hat{x}_\alpha = \delta_\alpha^1$ .

Si se define  $\hat{\mathcal{F}}_\alpha = -\mathcal{F} \hat{x}_\alpha$ , el tensor (1.14) se puede escribir en términos de la tétrada comóvil de la siguiente forma de componentes

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = (\bar{\rho} + \bar{P}_\perp) \hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta + (\bar{P} - \bar{P}_\perp) \hat{x}_\alpha \hat{x}_\beta - \bar{P}_\perp \eta_{\alpha\beta} + \hat{\mathcal{F}}_\alpha \hat{u}_\beta + \hat{\mathcal{F}}_\beta \hat{u}_\alpha \quad (1.15)$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico de Minkowski.

Como no se conoce  $u_\alpha$ ,  $x_\alpha$  y  $\mathcal{F}_\alpha$  (tétrada en el marco de la métrica de Schwarzschild), se expresan estas en términos de tétrada comóvil  $\hat{u}_\alpha = \delta_\alpha^0$ ,  $\hat{x} = \delta_\alpha^1$  y  $\hat{\mathcal{F}}_\alpha = -\mathcal{F}\hat{x}_\alpha$ , considerando el esquema presentado en la figura 1.1.



Figura 1.1: Transformación de un sistema de referencia comóvil al sistema de referencia de la métrica.

Primero que todo, se introducen coordenadas de Minkowski  $(\tau, x, y, z)$  mediante las fórmulas

$$d\tau = e^{\nu/2} dt, \quad dx = e^{\lambda/2}, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\phi, \quad (1.16)$$

en este caso  $\nu$  y  $\lambda$  son constantes por que solo tienen valores locales. El elemento de línea (1.1) en coordenadas Minkowskianas se escribe

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.17)$$

Si se denota por una barra el tensor energía-impulso en el sistema de referencia Minkowskiano, se obtiene

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = L^\pi{}_\alpha L^\sigma{}_\beta \hat{T}_{\pi\sigma}, \quad (1.18)$$

siendo  $L^\alpha{}_\beta$  el cambio de base inverso

$$L^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} e^{\nu/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Del mismo modo se expresa el tensor energía-impulso que se encuentra en marco el Minkowskiano  $\bar{T}_{\alpha\beta}$ , en términos de la métrica de Schwarzschild, de la siguiente forma

$$T_{\alpha\beta} = \Lambda^\pi{}_\alpha \Lambda^\sigma{}_\beta \bar{T}_{\pi\sigma}, \quad (1.20)$$

de manera que  $\Lambda^\alpha{}_\beta$  es el boost inverso de Lorentz

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} & -\frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

donde, para un observador comóvil (en cada punto) con la materia, cuya velocidad con respecto a las coordenadas localmente Minkowskianas llamaremos  $\omega$ .

En consecuencia, el tensor energía-impulso en el marco de la métrica  $(t, r, \theta, \phi)$  es

$$T_{\alpha\beta} = (\bar{\rho} + \bar{P}_\perp)u_\alpha u_\beta + (\bar{P} - \bar{P}_\perp)x_\alpha x_\beta - \bar{P}_\perp g_{\alpha\beta} + \mathcal{F}_\alpha u_\beta + \mathcal{F}_\beta u_\alpha \quad (1.22)$$

donde

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_R, \quad \bar{P} = P_R + P, \quad \bar{P}_\perp = P_\perp + P \quad \text{y} \quad P_\perp = \frac{1}{2}(\rho_R - P_R), \quad (1.23)$$

y los cuadvectores  $(u_\alpha, x_\alpha)$  y  $\mathcal{F}_\alpha$  en el marco de la métrica de Schwarzschild son respectivamente,

$$u_\alpha = \frac{e^{\nu/2}\delta_\alpha^0 - \omega e^{\lambda/2}\delta_\alpha^1}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \quad x_\alpha = \frac{-\omega e^{\nu/2}\delta_\alpha^0 + e^{\lambda/2}\delta_\alpha^1}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \quad \mathcal{F}_\alpha = -\mathcal{F}x_\alpha. \quad (1.24)$$

El tensor (1.22) escrito en forma matricial se escribe como

$$T^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} T^0_0 & T^0_1 & 0 & 0 \\ T^1_0 & T^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^3_3 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

donde

$$T^0_0 = \frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2}, \quad T^1_1 = -\frac{\bar{P} + \bar{\rho}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2}, \quad T^2_2 = T^3_3 = -\bar{P}_\perp$$

y  $T^1_0 = T^0_1 = -e^{(\lambda-\nu)/2} \left[ \frac{\omega(\bar{\rho} + \bar{P}) + (1 + \omega^2)\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right].$  (1.26)

La velocidad del elemento de fluido  $\omega$  en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  es

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{(\nu-\lambda)/2}. \quad (1.27)$$

En consecuencia, las ecuaciones (1.3)–(1.6) pueden ser escritas, utilizando (1.25), de la siguiente forma

$$\frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2} = \frac{1}{8\pi r} \left[ \frac{1}{r} - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} - \lambda' \right) \right], \quad (1.28)$$

$$\frac{\bar{P} + \bar{\rho}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2} = \frac{1}{8\pi r} \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} + \nu' \right) - \frac{1}{r} \right], \quad (1.29)$$

$$\bar{P}_\perp = \frac{1}{32\pi} \left\{ e^{-\lambda} \left[ 2\nu'' + 2\nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{2}{r}(\nu' - \lambda') \right] - e^{-\nu} \left[ 2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right] \right\}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\omega(\bar{\rho} + \bar{P}) + (1 + \omega^2)\mathcal{F}}{1 - \omega^2} = -\frac{\dot{\lambda}}{8\pi r} e^{-(\nu+\lambda)/2}. \quad (1.31)$$

Este es un sistemas de 4 ecuaciones de campo con 6 variables físicas ( $\rho$ ,  $\rho_R$ ,  $P$ ,  $P_R$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\omega$ ) y dos variables geométricas ( $\nu$ ,  $\lambda$ ), y sus derivadas.

Por otro lado, en el exterior de la configuración de materia la única contribución a la energía se debe a la radiación que proviene del interior de la misma, por tanto el espacio tiempo correspondiente a una región de simetría esférica donde solo hay radiación y es descrito por el elemento de línea de Vaidya

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(u)}{R}\right) du^2 + 2dudR - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.32)$$

donde  $u$  es una coordenada temporal y  $R$  es una coordenada nula ( $g_{RR} = 0$ ). Por otro lado, los dos sistemas coordenados  $(t, r, \theta, \phi)$  y  $(u, R, \theta, \phi)$  se encuentran relacionadas por las transformaciones

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \\ R &= r. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Para la métrica (1.32) el escalar de Ricci es nulo y de las ecuaciones de campo de Einstein (1.2), se tiene que

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.34)$$

ademas, el tensor de Ricci en coordenadas nuladas es

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{R} \frac{dM}{du} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0. \quad (1.35)$$

Reemplazando (1.35) en (1.34), se obtiene el tensor-energía impulso correspondiente a la métrica de Vaidya:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi R} \frac{dM}{du} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0. \quad (1.36)$$

## 1.4 CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO

Las condiciones de acoplamiento tienen diferentes formulaciones, pero son equivalentes. Fueron definidas por primera vez por Darmois [4], mas tarde por Lichnerowicz [22] y recientemente por Herrera y Jiménez [23]. El acople entre dos métricas está garantizado si las condiciones de acoplamiento cumplen (primera y segunda forma fundamental). El fin de estas condiciones es el de evitar la aparición de singularidades sobre las variables físicas del sistema evaluadas en la superficie de acoplamiento  $\Sigma$ . En este trabajo se utilizarán las condiciones de Darmois [4], en el cual las condiciones están expresadas en forma covariante:

- **Primera forma fundamental:** la métrica inducida sobre la hipersuperficie entre las dos regiones del espacio tiempo ( $I$  indica un espacio tiempo descrito por la métrica de Schwarzschild y  $II$  un espacio tiempo descrito por la métrica de Vaidya) sean continuas a través de dicha hipersuperficie, lo que requiere

$$(g_{\alpha\beta})_{\Sigma}^{(I)} = (g_{\alpha\beta})_{\Sigma}^{(II)}. \quad (1.37)$$

- **Segunda forma fundamental:** la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre la hipersuperficie  $\Sigma = r - a(t) = 0$  debe ser continua a través de esta. En términos de las componentes del tensor de energía-impulso resulta ser

$$\begin{aligned} (T_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta})_{\Sigma}^{(I)} &= (T_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta})_{\Sigma}^{(II)}, \\ (T_{\alpha\beta}n^{\alpha}k^{\beta})_{\Sigma}^{(I)} &= (T_{\alpha\beta}n^{\alpha}k^{\beta})_{\Sigma}^{(II)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Para garantizar la continuidad de la primera forma fundamental sobre la superficie  $\Sigma = r - a(t) = 0$ , se iguala (1.1) y (1.32)

$$\left[ e^{\nu} - e^{\lambda} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right]_{\Sigma} dt^2 = \left[ 1 - \frac{2M}{R} + \frac{2dR}{du} \right]_{\Sigma} du^2. \quad (1.39)$$

De las fórmulas (1.33) se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{1 - 2M/r} \quad (1.40)$$

y en consecuencia

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dt} = 1 - \frac{\frac{dr}{dt}}{1 - 2M/r}. \quad (1.41)$$

Evaluando (1.41) en la superficie

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_{\Sigma} = 1 - \frac{dr_{\Sigma}/dt}{1 - 2M/r_{\Sigma}} = 1 - \frac{\frac{dR_{\Sigma}}{du} \frac{du}{dt}}{1 - 2M/R_{\Sigma}}, \quad (1.42)$$

se puede escribir

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{1 - 2M/R_{\Sigma}}{1 - \frac{2M}{R_{\Sigma}} + \frac{dR_{\Sigma}}{du}}. \quad (1.43)$$

Reemplazando (1.43) en (1.39) resulta

$$\begin{aligned} e^{\nu_{\Sigma}} \left( 1 - \frac{2M}{R_{\Sigma}} + \frac{dR_{\Sigma}}{du} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2M}{R_{\Sigma}} \right)^3 = \\ e^{\lambda_{\Sigma}} \left( \frac{dR_{\Sigma}}{du} \right)^2 \left( 1 - \frac{2M}{R_{\Sigma}} \right)^2 + 2 \frac{dR_{\Sigma}}{du} \left( 1 - \frac{2M}{R_{\Sigma}} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.44)$$

en consecuencia la igualdad (1.44) se satisface si

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_\Sigma}, \quad (1.45)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_\Sigma} \quad (1.46)$$

relaciones que constituyen la continuidad de la primera forma fundamental.

Ahora se verá la continuidad de la segunda forma fundamental. Definiendo la ecuación de la frontera en la region  $I$

$$\Psi^{(I)}(r, t) = r - a(t) = 0, \quad (1.47)$$

el vector unitario normal a la superficie  $\Sigma$  evaluado en la región  $I$  esta dado por

$$n_\alpha^{(I)} = \frac{\partial_\alpha \Psi^{(I)}}{(|\partial_\pi \Psi^{(I)} \partial_\sigma \Psi^{(I)} g^{\pi\sigma}|)^{1/2}} \quad (1.48)$$

utilizando (1.47), (1.48) y la métrica correspondiente a la region interior  $I$  (métrica de Schwarzschild), se obtiene

$$n_\alpha^{(I)} = -\gamma \dot{r}_\Sigma \delta_\alpha^0 + \gamma \delta_\alpha^1 \quad (1.49)$$

donde

$$\gamma = (e^{-\lambda_\Sigma} - \dot{r}_\Sigma^2 e^{-\nu_\Sigma})^{-1/2}. \quad (1.50)$$

Además se define un vector unitario tipo tiempo ortogonal a (1.49), tal que

$$k_\alpha k^\alpha = 1 \quad (1.51)$$

en la forma

$$k^\alpha{}^{(I)} = \frac{e^{-\nu_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_0^\alpha + \frac{\omega_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_1^\alpha. \quad (1.52)$$

Utilizando (1.49), (1.52) y (1.22) junto con (1.38) se obtienen las siguientes relaciones:

$$(T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_\Sigma^{(I)} = \bar{P}_\Sigma, \quad (1.53)$$

$$(T_{\alpha\beta} n^\alpha k^\beta)_\Sigma^{(I)} = \mathcal{F}_\Sigma. \quad (1.54)$$

Ahora es fácil encontrar, el vector unitario normal a la superficie  $\Sigma$  en el exterior de la region (region  $II$ )

$$n_\alpha^{(II)} = -\beta \frac{dR_\Sigma}{du} \delta_\alpha^0 + \beta \delta_\alpha^1, \quad (1.55)$$

donde el vector tipo tiempo ortogonal a (1.55) que además debe satisfacer (1.51) es

$$k^\alpha{}^{(II)} = \beta \delta_0^\alpha + \beta \frac{dR_\Sigma}{du} \delta_1^\alpha \quad (1.56)$$

con

$$\beta = \left( 1 - \frac{2M(u)}{R_\Sigma} + 2 \frac{dR_\Sigma}{du} \right)^{-1/2}. \quad (1.57)$$

Utilizando (1.55), (1.56) y (1.36) junto con (1.38) se obtiene

$$(T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_{\Sigma}^{(II)} = - \left[ \frac{\beta^2}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \right]_{\Sigma} \quad (1.58)$$

$$(T_{\alpha\beta} n^\alpha k^\beta)_{\Sigma}^{(II)} = - \left[ \frac{\beta^2}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \right]_{\Sigma} \quad (1.59)$$

A partir de las condiciones de acoplamiento (1.38), igualando (1.53), (1.54), (1.58) y (1.59), se obtiene

$$\bar{P}_\Sigma = \mathcal{F}_\Sigma \quad (1.60)$$

lo que expresa la discontinuidad de la presión barra ( $\bar{P}$ ) en presencia de un flujo de radiación. Utilizando (1.23)

$$\mathcal{F}_\Sigma = [P_R]_\Sigma + P_\Sigma \quad (1.61)$$

se obtiene que el flujo de radiación en la superficie ( $\mathcal{F}_\Sigma$ ) corresponde a la suma de la presión de radiación evaluada en la superficie ( $[P_R]_\Sigma$ ) y la presión de materia evaluada en la superficie ( $P_\Sigma$ ). Desde luego, la expresión (1.61) garantiza la continuidad de la segunda forma fundamental.

## CAPÍTULO 2

---

---

# AMBIENTE HIDRODINÁMICO DE RADIACIÓN

---

---

### *2.1 INTRODUCCIÓN*

Debido a la gravedad formidable que surge en el colapso de objetos autogravitantes, los procesos de reacción nuclear aparecen espontáneamente y entonces es entendible encontrar disipación de fotones o neutrinos y la interacción de la materia ultradensa y radiación, lo que lleva a acoplar la Relatividad General, la hidrodinámica y el transporte de radiación. Desde el punto de vista de la descripción física, no ha sido posibles hasta este momento encontrar una formulación adecuada, a pesar de que se ha realizado un esfuerzo significativo por personas e instituciones para encontrar un modelo analítico o numérico coherente que incluya todas estas componentes con detalle dentro de este tipo de procesos [24]. Por ello el estudio de la hidrodinámica de radiación ha resultado ser de gran interés en la astrofísica, la cosmología y física del plasma [25], en donde la ecuación de transporte de Boltzmann debe ser acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas para obtener la evolución del sistema así como el espectro y la distribución angular del campo de radiación. Sin embargo se han construidos algoritmos para solucionar numéricamente la ecuación de Boltzmann (ver [26, 27]), entre los que se encuentran ellos varios códigos de radiación hidrodinámica como el VISPHOT [28] o el TITAN [29], o el multigrupo de transferencia de radiación como el STELLA [30] . La mayor parte de la hidrodinámica en los código existentes incluyen términos de viscosidad artificial para problemas que requieren un tratamiento exacto de ondas de choque y discontinuidades.

## 2.2 LÍMITES EN EL CAMPO DE RADIACIÓN Y RELACIONES DE CLAUSURA

Debido a las dificultades que presenta resolver la ecuación de transporte de Boltzmann, por la típica carencia de información del acople entre la radiación y la materia ultradensa y la complejidad matemática que demanda resolver este tipo de ecuación, una de las estrategias para resolver estas dificultades es considerar los límites físicos razonables para el campo de radiación [6]. Uno de estos límites es el de escape libre, el cual asume que el camino libre medio de las partículas de radiación (fotones o neutrinos) es del orden de la esfera y es expresado por la relación

$$\rho_R = P_R = \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

El otro límite para el campo de radiación es el de difusión, en donde el camino libre medio de las partículas de radiación es mucho menor que la longitud de la esfera, esto en términos de la presión y densidad de radiación es

$$P_R = \frac{\rho_R}{3}. \quad (2.2)$$

Por esta razón, para simular escenarios realistas donde halla interacción entre materia y radiación, lo mas razonable es tener un parámetro que varié entre los límites anteriormente dichos; con esta idea se introducen aquí el factor del flujo  $f$  y el factor variable Eddington  $\chi$ . El factor variable Eddington mide qué tan anisótropo es el campo de radiación para un medio opaco con una frontera, este se puede expresar como

$$\chi = \left[ \int_{+1}^{-1} \mu^2 \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) d\mu \right] \left[ \int_{+1}^{-1} \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) d\mu \right]^{-1} = \frac{P_R}{\rho_R}. \quad (2.3)$$

Típicamente el factor variable Eddington oscila entre  $\frac{1}{3} \leq \chi \leq 1$ . Para estimar  $\chi$  se ha utilizado una diversidad de esquemas en los problemas de transferencia radiativa, en particular en el contexto de métodos numéricos adecuados para implementación en códigos computacionales de hidrodinámica de transporte acoplado de radiación [31].

De modo similar se define el factor de flujo  $f$  como

$$f = \frac{\mathcal{F}}{\rho_R}. \quad (2.4)$$

Las definiciones del factor variable Eddington y el factor de flujo dadas en (2.3) y (2.4) no consideran detalladamente la información angular contenida en el campo de radiación y en cambio tiene en cuenta los promedios angulares (“momentos”) de la intensidad específica o función de distribución. Adicionalmente, en un sistema con simetría local axial (como geometría plana y esférica) como el que se estudia en este trabajo, la

relación  $\chi = \chi(f)$  es aceptada, ya que existe una dirección preferida en la cual esta fluyendo la radiación. El factor variable de Eddington además debe satisfacer

$$\lim_{f \rightarrow 0} \chi(f) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \lim_{f \rightarrow 1} \chi(f) = 1, \quad (2.5)$$

para que cumpla los límites correctos en el campo de radiación (difusión y escape libre). Por otro lado, la exigencia causalidad implica las siguientes condiciones necesarias en  $\chi$  y  $f$ , para poder definir una región físicamente plausible en el espacio  $\{f, \chi, d\chi/df\}$  [32]

$$f^2 \leq \chi \leq 1, \quad \|f\| \leq 1 \quad \text{y} \quad -\frac{1-\chi}{1+f} \leq \frac{d\chi}{df} \leq \frac{1-\chi}{1-f}. \quad (2.6)$$

Lo anterior motiva la declaración de una relación entre  $\chi$  y  $f$ , ya que teóricamente si se conoce la relación de clausura correcta para un problema dado, la solución obtenida para los primeros momentos de la función de distribución por la solución de las ecuaciones de momento, debe ser la misma solución obtenida para la solución de la ecuación de transporte de Boltzmann. Hay varias relaciones de clausura en la literatura que logran esto ([5], [32], [33] y referencias allí), en la tabla 2.1 se presentan las más utilizadas en transporte de radiación.

Clausura	$\chi(f)$	$\frac{d\chi}{df} \Big _{f=1}$	$\frac{d\chi}{df} \Big _{f=0}$
<i>Lorentz-Eddington</i>	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{4-3f^2}$	2	0
<i>Bowers-Wilson</i>	$\frac{1}{3}(1-f+3f^2)$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>Janka (Monte Carlo)</i>	$\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2}f^{1.31} + 3f^{4.13})$	2.28	0
<i>Maximum Packing</i>	$\frac{1}{3}(1-2f+4f^2)$	2	$-\frac{2}{3}$
<i>Minerbo</i>	$\chi(f) = 1 - 2f/a$ donde $f = \coth a - 1/a$	2	0
<i>Levermore-Pomraning</i>	$\chi(f) = f \coth b$ donde $f = \coth b - 1/b$	1	0

Tabla 2.1: Relaciones de clausura y sus condiciones de aceptabilidad físicas. Adaptado de [6].

Estas relaciones de clausuras interpolan suavemente en el campo de radiación los regímenes de difusión y escape libre. Se puede buscar tal relación de clausura basada en consideraciones geométricas, (como las relaciones de Lorentz-Eddington y Bowers-Wilson), a partir de cálculos directos de la teoría de transporte que sirve para modelar un cierre correcto (como es el caso para la clausura de Janka(Monte Carlo)), o también a partir de un principio máximo de entropía (las tres últimas de la tabla, las cuales al principio fueron utilizadas para modelar la radiación de fotones y posteriormente han sido aplicadas al transporte de neutrinos). Las primeras cuatro pueden considerarse como relaciones de clausura analíticas y las dos últimas como numéricas, ya que para un factor de flujo  $f$  dado la ecuación no lineal  $f = \coth b - 1/b$  tiene que ser

resuelta numéricamente para encontrar el factor variable de Eddington  $\chi$ . Utilizando una relación de clausura es posible cerrar el sistema de ecuaciones de campo de Einstein (1.28)–(1.31): utilizando (1.23), (2.3) y (2.4) se pueden encontrar las cuatro variables físicas  $\rho$ ,  $P$ ,  $\omega$  y  $\mathcal{F}$  en términos del factor variable Eddington  $\chi$ , el factor de flujo  $f$  y las funciones métricas  $\nu$ ,  $\lambda$  y sus derivadas por medio de las relaciones

$$\frac{\mathcal{F} + \omega^2(\chi\mathcal{F} + fP) + f(\rho + 2\mathcal{F}\omega)}{f(1 - \omega^2)} = \frac{1}{8\pi r} \left[ \frac{1}{r} - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} - \lambda' \right) \right], \quad (2.7)$$

$$\frac{\chi\mathcal{F} + \omega^2(f\rho + \mathcal{F}) + f(P + 2\mathcal{F}\omega)}{f(1 - \omega^2)} = \frac{1}{8\pi r} \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} + \nu' \right) - \frac{1}{r} \right], \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(1 - \chi) + 2fP}{2f} &= \frac{e^{-\lambda}}{32\pi} \left[ 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2 \left( \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \right] \\ &\quad - \frac{e^{-\nu}}{32\pi} \left[ 2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\lambda - \dot{\nu}) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\omega[f(\rho + P) + \mathcal{F}(1 + \chi)] + f\mathcal{F}(1 + \omega^2)}{f(1 - \omega^2)} = -\frac{\dot{\lambda}}{8\pi r} e^{-(\nu+\lambda)/2}. \quad (2.10)$$

En lo que sigue y a menos que se exprese de forma clara algo distinto, la relación de clausura a utilizar será la de Lorentz-Eddington. El motivo de esta elección es poder hacer comparaciones con los resultados de Barreto et al [10] quienes han hecho cálculos similares en el régimen de escape libre. Debe mencionarse aquí que en todos los casos presentados en este trabajo, los resultados obtenidos corresponden completamente con los de Barreto et al en dicho límite.

## 2.3 CONDICIONES DE ENERGÍA

Sea  $u^\alpha = e_0^\alpha$  la cuadrivelocidad de un observador comóvil y  $v^\alpha = E_{(0)}^\alpha$  la cuadrivelocidad de un observador arbitrario, donde  $e_0^\alpha$  y  $E_{(0)}^\alpha$  son la tétrada comóvil y arbitraria respectivamente. En un fluido sin flujo de calor (transporte de energía no convectivo), la energía es transportada únicamente por el movimiento del fluido (por convección). Así, el cuadvectores  $S^\alpha$  flujo de energía es proporcional a la cuadrivelocidad  $u^\alpha$ . Por lo tanto, es posible definir el observador comóvil al fluido como aquel que se mueve en la dirección en la que fluye la masa del fluido y a la misma velocidad. Sin embargo, cuando hay flujo de calor en alguna dirección, la energía no es transportada únicamente por convección, imposibilitando la relación  $S^\alpha \propto u^\alpha$  (flujo de energía proporcional a la velocidad del fluido), y por ende dificultando la definición de comóvil. Entonces se define el observador “comóvil” en sistemas disipativos como aquel cuya cuadrivelocidad es proporcional al flujo de energía si no existiera flujo de calor.

### 2.3.1. Condición de energía débil

$T_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta$ ,  $\forall W^\alpha$  tipo tiempo. Si las componentes de la cuadrivelocidad del observador arbitrario tipo tiempo en la base comóvil son denotadas por  $v^{\hat{\alpha}}$ , la condición de energía débil resulta:

$$\hat{T}_{\alpha\beta}v^{\hat{\alpha}}v^{\hat{\beta}} \geq 0 \quad (2.11)$$

Ahora:

$$v^{\hat{\alpha}} = \frac{dx^{\hat{\alpha}}}{d\tau} = \frac{dx^{\hat{\alpha}}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \zeta \frac{dx^{\hat{\alpha}}}{dt}.$$

definiendo el cuadvivector flujo de energía por

$$S_{\hat{\beta}} = \hat{T}_{\alpha\beta}v^{\hat{\beta}},$$

la condición de energía débil queda de la forma

$$S_{\hat{\beta}}v^{\hat{\beta}} \geq 0. \quad (2.12)$$

Aplicando esta condición de energía al tensor energía-impulso (1.13) este debe cumplir que

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &\geq 2\mathcal{F} \\ \bar{P}\bar{\rho} &\geq 2\mathcal{F} \\ \bar{P}_\perp\bar{\rho} &\geq 2\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.3.2. Condición de energía dominante

Esta condición de energía establece, que el vector flujo de energía no debe ser tipo espacio, es decir

$$S_{\hat{\alpha}}S^{\hat{\alpha}} \geq 0. \quad (2.14)$$

Aplicando esta condición de energía al tensor energía-impulso (1.13), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^2 &\geq \bar{P}^2 + 2\mathcal{F}\bar{\rho} + \mathcal{F}^2 \\ \bar{\rho}^2 &\geq \bar{P}_\perp^2 + 2\mathcal{F}\bar{\rho} + \mathcal{F}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3.3. Condición de energía fuerte

Esta condición establece que  $R_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$ ,  $\forall W^\alpha$  tipo tiempo, donde  $R_{\alpha\beta}$ , es el tensor de Einstein. De las ecuaciones de campo de Einstein  $R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\frac{T}{2}$ , se tiene que

$$\left(T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\frac{T}{2}\right)W^\alpha W^\beta \geq 0. \quad (2.16)$$

En un sistema de referencia comóvil  $2\hat{T}_{\alpha\beta}v^{\hat{\alpha}}v^{\hat{\beta}} \geq T$ , ya que  $v_{\hat{\alpha}}v^{\hat{\alpha}} = 1$ . En consecuencia, la condición de energía fuerte para el tensor energía-impulso (1.13) es

$$\begin{aligned}\bar{\rho} + \bar{P} + 2\bar{P}_{\perp} &\geq 4\mathcal{F} \\ \bar{\rho} + \bar{P}_i &\geq 2\mathcal{F}, \text{ para } i = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Los resultados presentados en el capítulo 4 fueron verificados a la luz del cumplimiento de las condiciones de energía presentadas en esta sección, por lo tanto se puede afirmar que son físicamente aceptables.

## CAPÍTULO 3

---

---

# APROXIMACIÓN POSCUASIESTÁTICA

---

---

### *3.1 INTRODUCCIÓN*

Es bien conocido que las estrellas no son inmutables y pasan por diferentes etapas. En el 90% de la vida de las estrellas se encuentran en secuencia principal, que es la fase en que la estrella quema hidrógeno en su núcleo mediante fisión nuclear; esta fue una de las incógnitas que se tuvo durante mucho tiempo ya que no se conocía el mecanismo por el cual estas enormes bolas de fuego extraían su energía. Las primeras teorías científicas que explicaban el origen de su energía aparecieron en el siglo XIX, en donde Lord Kelvin y Helmholtz propusieron que las estrellas extraían su energía de la gravedad contrayéndose gradualmente, pero este mecanismo habría permitido mantener la luminosidad del sol durante unas decenas de millones de años, lo que no concuerda con la edad de la tierra, la cual está estimada por los geólogos en varios millardos de años. Esta discrepancia llevó a la búsqueda de una fuente de energía distinta a la gravedad y en los años de 1920 Sir Arthur Eddington propuso la energía nuclear como alternativa; hoy en día se sabe que la vida de las estrellas está regida por estos procesos nucleares, pero cuando este combustible se ha consumido una estrella se puede convertir en un objeto cósmico exótico (agujero negro, una estrella de neutrones, una supernova, una gigante roja, una enana blanca, etc.). Esta etapa de la evolución de las estrellas es la que se pretende estudiar, la etapa de colapso gravitacional y donde ocurren cambios profundos en la esfera colapsante, como aumento de presión, transporte de partículas (fotones o neutrinos), explosión o implosión de la frontera, etc.

## 3.2 RÉGIMEN CUASIESTÁTICO

Para un sistema en equilibrio (caso estático) en el cual  $\omega = \mathcal{F} = 0$ , todas las derivadas temporales se anulan, se satisface la ecuación de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV)

$$P' + \frac{\nu'}{2}(\rho + P) = 0. \quad (3.1)$$

Saliendo del equilibrio se llega al regimen cuasiestático, en el cual la esfera cambia lentamente, en una escala de tiempo que es muy larga comparada a la escala de tiempo típica en la cual la esfera reacciona a una perturbación de su equilibrio hidrostático, esta escala de tiempo es llamada escala de tiempo hidrostático [34]. En este régimen, el sistema se encuentra muy cerca del equilibrio hidrostático, por lo que su evolución puede ser considerada como una secuencia de modelos estáticos ligados por la ecuación de campo (1.6). Vale la pena aclarar que esta escala de tiempo hidrostática que rige en las ocasiones en que se produce una descomposición entre presión y gravedad, esto sucede en los momentos finales de la vida de una estrella cuando las reacciones nucleares que sostienen a la estrella agotan su combustible y el colapso gravitacional es eminente, pero como se menciono anteriormente estos acontecimientos sucederán muy rápidamente hasta recuperar el equilibrio. Dicha escala de tiempo es del orden de

$$\tau = \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^3 \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right)^3,$$

donde  $G$ ,  $M$  y  $R$  son las constante gravitacional, masa y radio de la estrella, respectivamente (para el Sol el tiempo típico es de 27 minutos). Aparte de esta escala de tiempo hidrostática, existe otras dos escala de tiempo características de las estrellas, una de estas escalas temporales es la escala de tiempo térmica que mide cuánto puede subsistir la estrella con una determinada luminosidad a partir de sus reservas de energía potencial gravitatoria Esta escala, por ejemplo, es la que rige la vida de las protoestrellas<sup>1</sup>. Su valor es del orden de

$$\tau_{ter} \simeq 2 \times 10^7 \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{R_{\odot}}{R} \right) \left( \frac{L_{\odot}}{L} \right),$$

donde  $L_{\odot}$  es la luminosidad del sol. Para el Sol esto da unos 20 millones de años de tiempo térmico. La otra escala de tiempo, es la escala de tiempo nuclear, esta mide cuánto puede subsistir la estrella a partir de sus reservas de hidrógeno, helio o el combustible que esté quemando en ese momento. Su valor aproximado para el caso del hidrógeno es de

$$\tau_{nuc, H} \simeq 9 \times 10^9 \left( \frac{X}{X_{sol}} \right) \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{2.5},$$

---

<sup>1</sup>Se denomina protoestrella al periodo de evolución de una estrella desde que una nube molecular formada de hidrógeno, helio y partículas de polvo empieza a contraerse hasta que la estrella alcanza la secuencia principal en el diagrama de Hertzsprung-Russell.

donde  $X_{\odot}$  es la cantidad estimada de hidrógeno contenida en el sol con el puede subsistir. Para el Sol esta escala da unos 9 millardos de años de tiempo nuclear, que es un valor aproximado para la estancia del Sol en la secuencia principal.

Queda claro que

$$\tau \ll \tau_{ter} \ll \tau_{nuc},$$

por tanto, la suposición de cambio lento o evolución lenta del sistema que se estudiará, no es tan restrictiva, ya que la escala de tiempo hidrostático es muy pequeña para casi todas las fases de evolución estelar. Por ejemplo, para el sol es del orden de 27 minutos, para una enana blanca, es del orden de 4.5 segundos y para una estrella de neutrones de 10 Km de radio y una masa solar, es del orden de  $10^{-4}$  segundos [34]. Por esta razón, la evolución lenta significa que la velocidad  $\omega$  medida por un observador Minkowskiano, es mucho menor que la velocidad de la luz ( $\omega \ll 1$ ), por tanto se despreja los termino de orden  $\mathcal{O}(\omega^2)$ . Pero primero se calcula  $T_{r;\alpha}^{\alpha}$ , que puede ser obtenida derivando (1.4) con respecto a  $r$  y usando las otras ecuaciones de campo, se obtiene

$$8\pi(T_1^1)' = \frac{16\pi}{r}(T_2^2 - T_1^1) + \frac{4\pi}{r}(T_0^0 - T_1^1) - \frac{e^{-\nu}}{r} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) \quad (3.2)$$

entonces, aplicando la consideración  $\mathcal{O}(\omega^2) \approx 0$  y como  $\mathcal{F} = \rho_R = P_R = 0$  resulta que, de (1.26)  $\bar{\rho} = \bar{P} = \bar{P}_{\perp} = 0$ , por tanto de (3.2) se obtiene

$$\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{r} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} = 8\pi e^{\nu} \left[ P' + \frac{\nu'}{2}(\rho + P) \right]. \quad (3.3)$$

Pero de acuerdo con (3.1) la parte izquierda debe ser cero, para que el sistema esté dentro de la consideración de evolución lenta y esté siempre en equilibrio hidrostático. Por lo tanto hay que exigir que

$$\ddot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx \dot{\lambda}\dot{\nu} \approx 0, \quad (3.4)$$

igualmente se exige desprejar términos lineales de la aceleración

$$\dot{\omega} \approx 0, \quad (3.5)$$

que es evidente si se requiere que el sistema se encuentre en equilibrio hidrostático. Por tanto, en el regimen cuasiestático se debe asumir

$$\mathcal{O}(\omega^2) = \dot{\lambda}^2 = \dot{\nu}^2 = \dot{\lambda}\dot{\nu} = \ddot{\lambda} = \ddot{\nu} = 0, \quad (3.6)$$

lo que implica que el sistema se encuentra en (o muy cercano a el) equilibrio. No obstante, en la fase evolutiva de estos objetos autogravitantes, puede ocurrir una fase de alta actividad dinámica, con escalas de tiempo del orden del tiempo hidrostático, por esta razón la aproximación cuasiestática no es aplicable a la fase de colapso súbita y es obligatorio tener en cuenta todos los términos para estudiar el sistema fuera del equilibrio.

### 3.3 VARIABLES EFECTIVAS

Siguiendo el método de aproximación poscuasiestática, se definen las “variables efectivas”

$$\tilde{\rho} = T^0_0 = \frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{P} = -T^1_1 = \frac{\bar{P} + \bar{\rho}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2}, \quad (3.8)$$

en el regimen estático las variables efectivas satisfacen la ecuación (3.1), en consecuencia estas variables dependientes del tiempo, en el limite cuasiestático (y obviamente en el estático) poseen la misma dependencia radial que las variables físicas (densidad de energía y presión). Por otro lado, en una configuración en la cual se trabaja con las coordenadas de radiación de Bondi, las “variables efectivas” no coinciden con su contraparte física en el límite estático, por lo que no satisfacen la ecuación TOV de equilibrio hidrostático. Para el caso de las coordenadas de Schwarzschild, las variables efectivas coinciden con sus contrapartes físicas en el límite estático [2, 10, 35], lo cual hace que en este tipo de coordenadas la elección de la misma dependencia radial, entre las variables efectivas y su contraparte física, tenga sentido.

A partir de la condición de acoplamiento (1.46) se define la función de masa

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(t, r)}{r}, \quad (3.9)$$

teniendo en cuenta lo anterior, las ecuaciones (1.28) y (1.29) pueden ser escritas en función de las variables efectivas (3.7) y (3.8)

$$m = \int 4\pi r^2 \tilde{\rho} dr, \quad (3.10)$$

$$\nu = \int \frac{2(4\pi r^3 \tilde{P} + m)}{r(r - 2m)} dr \quad (3.11)$$

así pues, la dependencia radial de las variables métricas esta completamente concluida, debido a la dependencia radial dada por las variables efectivas.

Entonces, se define el regimen poscuasiestático como el sistema, donde las variables efectivas poseen la misma dependencia radial que las variables físicas en el regimen estático (o cuasiestático), de modo que la aproximación poscuasiestática es el escenario viable mas cercano a una evolución cuasiestática.

En seguida se esboza un resumen el método de la “aproximación poscuasiestática” para un fluido esférico que radía (ver [2]):

1. Tomar la solución interior estática de las ecuaciones de campo de Einstein, para un fluido con simetría esférica  $\rho_{estatica} = \rho(r)$  y  $P_{estatica} = P(r)$ .

2. Asumir que la dependencia radial de  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{P}$  es igual a la dependencia radial de  $\rho_{\text{estatica}}$  y  $P_{\text{estatica}}$ .
3. Utilizando (3.7) y (3.8) y teniendo en cuenta la dependencia radial de  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{P}$ , obtener  $m$  y  $\nu$ .
4. Para las funciones temporales se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias evaluadas en la frontera de la distribución (Ecuaciones de superficie) que se obtienen en el siguiente orden
  - Ecuación (1.27) evaluada en  $\Sigma$
  - La ecuación que relaciona la cantidad de energía que pasa a través de la superficie del fluido  $\Sigma$ , debido a la pérdida de masa por la disipación de radiación del sistema.
  - Ecuación (3.2) evaluada en  $\Sigma$ .
5. El sistemas de ecuaciones definido en 4, se consigue cerrar el sistema de ecuaciones diferenciales, con la información extra que se brinde de la ecuación de transporte (relación de clausura) o la información adicional que se ofrezca sobre algunas de las variables físicas de la frontera (p.ej. la luminosidad).
6. Al momento que se tiene el sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en la superficie cerrado, este puede ser integrado para ciertos valores iniciales.
7. Con los resultados de 6, se utilizan (3.10) y (3.11), reemplazan en las ecuaciones de campo de Einstein (1.28)–(1.31), junto con la relación de clausura, todas las variables físicas del sistemas encargadas de describir la evolución del sistema.

### 3.4 ECUACIONES DE SUPERFICIE

En esta subsección se describe el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales son resultado de las condiciones de acoplamiento (1.45), (1.46) y (1.60), y de las ecuaciones de campo de Einstein (1.28)–(1.31).

Primero hay que presentar una cantidad importante, la cual describe la cantidad de masa perdida debido al flujo de radiación sobre la superficie  $\Sigma$ , esto se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dm}{dt} \equiv \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{dr}{dt}. \quad (3.12)$$

De (1.31) se encuentra que

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 e^{(\nu-\lambda)/2} \left[ \frac{\omega(\bar{\rho} + \bar{P}) + (1 + \omega^2)\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right], \quad (3.13)$$

y (1.28) entonces

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{e^{-\lambda}}{2} + \frac{r}{2} \left[ 8\pi r \left( \frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right) - \frac{1}{r} \right] + \frac{m}{r}. \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.13) y (3.14), en (3.12) y usando la función de masa (3.9), se tiene que

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi r \left[ \frac{dr}{dt} \bar{P} + \mathcal{F} e^{\nu/2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.15)$$

Esta ecuación muestra la energía pasando a través de la frontera de la esfera del fluido. Como se necesita las ecuaciones evaluadas en la superficie, se toma (3.15) y se usa la condición de acoplamiento (1.60) para encontrar que la masa perdida sobre la superficie es

$$\dot{m}_\Sigma = -4\pi r_\Sigma \left[ \dot{r}_\Sigma \mathcal{F}_\Sigma + \mathcal{F}_\Sigma \left( 1 - \frac{2m_\Sigma}{r_\Sigma} \right) \right]. \quad (3.16)$$

La primera ecuación de superficie se obtiene de evaluar (1.27) en  $\Sigma$

$$\dot{r}_\Sigma = \omega_\Sigma \left( 1 - \frac{2m_\Sigma}{r_\Sigma} \right), \quad (3.17)$$

y describe la forma como evoluciona la frontera de la configuración.

Antes de encontrar las otras dos ecuaciones de superficie, hay que hacer ciertas consideraciones y definiciones.

Se introducen variables adimensionales reescalando la masa total  $m_\Sigma$ , el radio  $r_\Sigma$  y la coordenada temporal por la masa inicial  $m_\Sigma(t=0) \equiv m_\Sigma(0)$ ,

$$A \equiv \frac{r_\Sigma}{m_\Sigma(0)}, \quad M \equiv \frac{m_\Sigma}{m_\Sigma(0)}, \quad F \equiv 1 - \frac{2M}{A}. \quad (3.18)$$

También se ha definido

$$t \rightarrow \frac{t}{m_\Sigma(0)} \quad \text{y} \quad \Omega \equiv \omega_\Sigma, \quad (3.19)$$

además de la luminosidad vista por un observador comóvil

$$\hat{E} = 4\pi r_\Sigma^2 \mathcal{F}_\Sigma \quad (3.20)$$

y la luminosidad percibida por un observador en reposo en el infinito, que a partir de (3.16) es

$$L = -\dot{M} = \hat{E}(1 + \Omega)F. \quad (3.21)$$

También se define la luminosidad para un observador no comóvil en la superficie

$$E = -\frac{\dot{M}}{F} = \hat{E}(1 + \Omega). \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la primera ecuación de superficie se puede escribir (3.17) como

$$\dot{A} = F\Omega, \quad (3.23)$$

la segunda ecuación de superficie se obtiene de la derivada temporal de  $F$  definida en (3.18)

$$\dot{F} = \frac{(1-F)F\Omega + 2L}{A}. \quad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.23) y (3.24) son generales dentro de simetría esférica. La tercera ecuación de superficie, la ecuación diferencial para  $\Omega$ , que es de la forma

$$\dot{\Omega} = \mathcal{R}(A, F, \Omega, L), \quad (3.25)$$

donde  $\mathcal{R}$  es obtenida de la ley de conservación  $T_{r;\alpha}^\alpha$  evaluada en la superficie  $\Sigma$ , donde  $T_{r;\alpha}^\alpha$  puede ser escrita como

$$\tilde{P}_{,r} + \frac{(\tilde{P} + \tilde{\rho})(4\pi r^3 \tilde{P} + m)}{r(r-2m)} = \frac{2}{r}(\bar{P}_\perp - \tilde{P}) + \frac{e^{-\nu}}{4\pi r(r-2m)} \left[ \ddot{m} + \frac{3\dot{m}^2}{r-2m} - \frac{\nu\dot{m}}{2} \right]. \quad (3.26)$$

Hasta este punto solo se han definido las ecuaciones en la superficie para  $A$ ,  $F$  y  $\Omega$ , pero aún falta por introducir la luminosidad  $L$ , que es la única cantidad observable que entra en un auténtico colapso gravitacional. Se proporciona el perfil de luminosidad descrito como un pulso gaussiano centrado en  $t_0 = t$

$$L = \frac{\Delta M_{rad}}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-t_0}{s} \right)^2 \right], \quad (3.27)$$

donde  $s$  es el ancho del pulso y  $\Delta M_{rad}$  es la masa total perdida en el proceso.

# CAPÍTULO 4

---

---

## MODELANDO CONFIGURACIONES DE MATERIA

---

---

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se aplicará el método de la aproximación poscuasiestática al colapso gravitacional radiativo de dos sistemas físicos de interés. El primer modelo es inspirado por la conocida solución interior estática de Schwarzschild, donde se propone  $\rho = \text{constante}$ , el cual representa un fluido incompresible y el segundo modelo es inspirado por la VI solución de Tolman, donde  $\rho = 3/r^2$ , cuya ecuación de estado ya es conocida y representa un gas de Fermi altamente comprimido [36].

### 4.2 MODELO DE SCHWARZSCHILD

Este modelo está inspirado en la conocida solución interior en límite estático de Schwarzschild, para un fluido incompresible con densidad constante. Por lo tanto, basado en el método de variables efectivas se tendrá

$$\tilde{\rho} = f(t), \tag{4.1}$$

donde  $f(t)$  es una función arbitraria de  $t$ . Como  $\rho = \text{constante}$ , es posible integrar (3.26) en el caso estático y obtener una expresión para  $P$ , esto es:

$$\frac{P + \frac{1}{3}\rho}{P + \rho} = \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2} k, \tag{4.2}$$

donde  $k$  es una constante de integración. Por lo tanto, se puede escribir una expresión para  $\tilde{P}$  basándose en (4.2), lo que resulta

$$\frac{\tilde{P} + \frac{1}{3}\tilde{\rho}}{\tilde{P} + \tilde{\rho}} = \left(1 - \frac{8\pi}{3}\tilde{\rho}r^2\right)^{1/2} k(t), \quad (4.3)$$

donde  $k(t)$  es función de  $t$ . De lo anterior se puede determinar que  $\tilde{P}$  toma la forma

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{\rho}}{3} \left[ \frac{1 - 3k(t)\xi}{k(t)\xi - 1} \right], \quad (4.4)$$

donde

$$\xi = [1 - (1 - F)(r/r_\Sigma)^2]^{1/2}. \quad (4.5)$$

Utilizando (3.10) se puede hallar una expresión para  $\tilde{\rho}$  en términos de las variables en la frontera definidas en (3.18) y (3.19):

$$\tilde{\rho} = \frac{3(1 - F)}{8\pi r_\Sigma^2}. \quad (4.6)$$

No obstante, se necesita determinar una relación entre las variables efectivas evaluadas en la frontera. Tomando (3.7) y (3.8) y la condición de acoplamiento (1.60), resulta

$$\tilde{P}_\Sigma = \mathcal{F}_\Sigma(1 + \Omega)^2 + \Omega^2\tilde{\rho}_\Sigma. \quad (4.7)$$

Ahora bien, evaluando (4.3) en la frontera, reemplazando (4.4) y (4.7), despejando  $k(t)$  se obtiene

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[ \frac{3\Omega^2(1 - F) + 8\pi r_\Sigma^2 \mathcal{F}_\Sigma(1 + \Omega)^2 + 1 - F}{3\Omega^2(1 - F) + 8\pi r_\Sigma^2 \mathcal{F}_\Sigma(1 + \Omega)^2 + 3(1 - F)} \right], \quad (4.8)$$

y utilizando (3.20) y (3.22) puede escribirse

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\psi_S}{\chi_S}, \quad (4.9)$$

donde

$$\psi_S = (3\Omega^2 + 1)(1 - F) + 2E(1 + \Omega) \quad (4.10)$$

y

$$\chi_S = 3(\Omega^2 + 1)(1 - F) + 2E(1 + \Omega). \quad (4.11)$$

Reemplazando (4.5) y (4.8) en (4.4) se obtiene

$$\tilde{P} = \frac{1 - F}{8\pi r_\Sigma^2} \left\{ \frac{\chi_S \sqrt{F} - 3\psi_S \xi}{\psi_S \xi - \chi_S \sqrt{F}} \right\}. \quad (4.12)$$

En consecuencia, teniendo las expresiones para  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{P}$ , se puede integrar (3.10) y (3.11) encontrando una relación para  $m$  y  $\nu$ , en función de las variables de la frontera ( $A$ ,  $F$ ,  $\Omega$ ,  $L$ ) y el radio  $r$

$$m = m_\Sigma(r/r_\Sigma)^3, \quad (4.13)$$

$$e^\nu = \left\{ \frac{\chi_S \sqrt{F} - \psi_S \xi}{2(1-F)} \right\}^2. \quad (4.14)$$

La tercera ecuación de superficie dada por (3.25) se obtiene en seguida. La parte izquierda de (3.26) evaluada en  $\Sigma$  es

$$TOV_{\text{Izq}} \Big|_{r=r_\Sigma} = \left[ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{P})(4\pi r^3 \tilde{P} + m)}{r(r-2m)} \right] \Big|_{r=r_\Sigma}, \quad (4.15)$$

utilizando las expresiones (4.5), (4.6), (4.10)–(4.13) se encuentra que

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = -\frac{\psi_S \chi_S}{16\pi r_\Sigma^3 F} \quad \text{y} \quad \frac{(\tilde{\rho} + \tilde{P})(4\pi r^3 \tilde{P} + m)}{r(r-2m)} = \frac{\psi_S \chi_S}{16\pi r_\Sigma^3 F}.$$

Reemplazando en (4.15) es fácil ver que

$$TOV_{\text{Izq}} \Big|_{r=r_\Sigma} = 0.$$

Por otro lado, de la parte derecha de (3.26) evaluada en  $\Sigma$  y teniendo en cuenta el resultado anterior, se puede escribir:

$$\left[ \ddot{m} + \frac{3\dot{m}^2}{r-2m} - \frac{\dot{\nu}\dot{m}}{2} + 8\pi e^\nu (r-2m)(\bar{P}_\perp - \tilde{P}) \right] \Big|_{r=r_\Sigma} = 0. \quad (4.16)$$

Utilizando (1.23), (2.3), (2.4), (3.18), (3.22), (3.23), (4.10)–(4.14) se encuentra que

$$\begin{aligned} \ddot{m} \Big|_{r=r_\Sigma} &= -(\dot{E}F + E\dot{F}) + \frac{6EF\dot{A}}{a} - \frac{3(1-F)F\dot{\Omega}}{2} - \frac{3(1-F)\dot{F}\Omega}{2} \\ &\quad + \frac{6\dot{A}(1-F)}{A}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{3\dot{m}^2}{r-2m} \Big|_{r=r_\Sigma} = \frac{3}{AF} \left[ FE + \frac{3}{2}\dot{A}(1-F) \right]^2, \quad (4.18)$$

$$-\frac{\dot{\nu}\dot{m}}{2} \Big|_{r=r_\Sigma} = \frac{1}{2F} \left[ \dot{F} - \frac{\psi_S \dot{A}}{A} \right] \left[ FE + \frac{3}{2}\dot{A}(1-F) \right], \quad (4.19)$$

$$8\pi e^\nu (r-2m) \bar{P}_\perp \Big|_{r=r_\Sigma} = \frac{EF^2(1+2f-3\chi)}{Af(1+\Omega)}, \quad (4.20)$$

$$-8\pi e^\nu (r-2m) \tilde{P} \Big|_{r=r_\Sigma} = -\frac{F^2}{A} [\psi_S - (1-F)]. \quad (4.21)$$

Al reemplazar estas expresiones en (4.16), utilizar la relación de clausura de Lorentz–Eddington para sustituir  $\chi$  en función de  $f$  y despejar  $\dot{\Omega}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = \frac{2}{3F(1-F)} \left\{ \left[ \frac{3}{AF} \left( FE + \frac{3}{2}(1-F)\dot{A} \right) + \dot{F} - \frac{\dot{A}\psi_S}{A} \right] \left( FE + \frac{3}{2}(1-F)\dot{A} \right) \right. \\ + \frac{6FE\dot{A}}{A} + \frac{6(1-F)\dot{A}^2}{A} - \dot{F}E - F\dot{E} \\ - \frac{3}{2}(1-F)\dot{F}\Omega - \frac{F^2}{A} [\psi_S - (1-F)] \\ \left. + \frac{EF^2}{Af(1+\Omega)} [2f - 4 + 2\sqrt{4 - 3f^2}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Esta ecuación, junto con (3.23) y (3.24) constituyen el conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema en la frontera, junto a la expresión (3.27), con las condición de que el sistema radíe 1/10 de la masa inicial, esto es, elegir

$$\Delta M_{rad} = \frac{M_{inicial} - M_{final}}{m_{\Sigma}(0)} = 0.1,$$

además de elegir el valor  $t_0 = 5s$  para el máximo de la función  $L$ . El sistema de ecuaciones entonces puede ser integrado numéricamente utilizando el método “predictor–corrector” de Adams–Bashforth–Moulton, introduciendo las siguientes condiciones iniciales:

$$A(0) = 5.0, \quad F(0) = 0.6, \quad \Omega = 0.0.$$

Entonces es posible obtener de las ecuaciones de campo (2.7)–(2.10) las variables físicas  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathcal{F}$  y  $\omega$ , en función de  $A$ ,  $F$  y  $\Omega$ , fijando adecuadamente el factor de flujo  $f$  y estableciendo la capa radial en el interior o la frontera de la configuración.

### 4.3 MODELO DE TOLMAN VI

En este modelo se utiliza la VI solución de Tolman, cuya densidad está dada por

$$\rho = 3/r^2 \quad (4.23)$$

y que describe un gas de Fermi altamente comprimido. Por un procedimiento similar al presentado en la sección anterior, se encuentra que:

$$\tilde{\rho} = \frac{3(1-F)}{24\pi r^2}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{P} = \frac{1-F}{24\pi r^2} \left\{ \frac{\psi_T - 9\chi_T(r/r_{\Sigma})}{\psi_T - \chi_T(r/r_{\Sigma})} \right\}, \quad (4.25)$$

con

$$\chi_T = (3\Omega^2 - 1)(1 - F) + 6E(1 + \Omega), \quad \psi_T = 3(\Omega^2 - 3)(1 - F) + 6E(1 + \Omega).$$

Las expresiones para  $m$  y  $\nu$ , se obtienen a partir de (3.10) y (3.11), lo que resulta

$$m = m_\Sigma r / r_\Sigma, \quad (4.26)$$

$$e^\nu = F \left\{ \left( \frac{\psi_T - \chi_T(r/r_\Sigma)}{\psi_T - \chi_T} \right)^2 (r/r_\Sigma) \right\}^{\frac{4(1-F)}{3F}}. \quad (4.27)$$

De igual forma, se puede encontrar la tercera ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & \frac{2}{F(1-F)} \left\{ \frac{\dot{F}^2 A}{4F} + \dot{F} \dot{A} + \frac{\dot{F} A}{4F} \left\{ \dot{F} - \frac{\dot{A}}{A} [(1-F)(\Omega^2 + 1)] + 2E(1 + \Omega) \right\} \right. \\ & - \left. \left\{ \dot{E} F + 4\pi A^2 F^2 \tilde{R}(t) + \frac{F^2}{A} [(1-F)\Omega^2 + 2E(1 + \Omega)] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{EF^2}{Af(1 + \Omega)} [2f - 4 + 2\sqrt{4 - 3f^2}] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

con

$$\tilde{R}(t) = \frac{1}{16\pi r_\Sigma F} [(1-F)(1 + \Omega^2) + 3E(1 + \Omega)]^2 - \frac{(1-F)(\psi_T - 3\chi_T)^2}{12\pi r_\Sigma^3 (\psi_T - \chi_T)}.$$

De nuevo, la ecuación (4.28) junto con (3.23) y (3.24) constituyen el sistema que puede ser integrado numéricamente, con la misma función de luminosidad seleccionada en modelo de Schwarzschild, radiando  $\Delta M_{rad} = 1/100$  de la masa inicial. Las condiciones iniciales que se han escogido son

$$A(0) = 6.67, \quad F(0) = 0.70, \quad \Omega = -0.17.$$

De la misma forma que para el modelo de Schwarzschild, es posible obtener de las ecuaciones de campo (2.7)–(2.10) las variables físicas  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathcal{F}$  y  $\omega$ , en función de  $A$ ,  $F$  y  $\Omega$ , donde hay que fijar el factor de flujo  $f$  y establecer la capa radial a modelar dentro de la configuración.

# CAPÍTULO 5

---

---

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

---

El método de la aproximación poscuasiestática (variables efectivas) ha sido implementado teniendo en cuenta que es posible construir soluciones dinámicas a partir de las estáticas para describir esferas que irradian y autogravitán en relatividad general. La evolución del sistema se analizó con éxito, describiendo la evolución de todas las variables físicas de interés ( $\rho$ ,  $P$ ,  $\omega$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$ ) para ambos modelos (Schwarzschild y Tolman *VI*) presentado en las figuras 5.1–5.18.

### 5.1 *MODELO DE SCHWARZSCHILD*

Para el modelo de Schwarzschild la evolución de la frontera  $A$  se presenta en la figura 5.1 y las variables físicas ( $\rho$ ,  $P$ ,  $\omega$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$ ) en las figuras 5.2 a la 5.7 para diferentes factores de flujo, desde el límite de escape libre que se caracteriza por un factor de flujo de  $f = 1.00$ , hasta el mínimo valor posible de  $f = 0.75$ <sup>1</sup>. Inicialmente la frontera de la esfera no cambia y en el instante que se inicia el colapso esta empieza a contraerse. A medida que el factor de flujo disminuye se nota que se retrasa la contracción de la frontera. En las gráficas que ilustran la densidad de materia  $\rho$  se nota que ésta se mantiene constante antes del colapso y luego aumenta cuando la esfera se contrae, esto sucede de la misma forma en todas las capas radiales manteniendo valores idénticos en las mismas, lo que muestra la consistencia del método numérico empleado; por otro lado, el factor de flujo no cambia el comportamiento a lo largo del tiempo, sino solamente los valores en cada instante, como se muestra en la figura 5.2.

La presión de materia  $P$  presenta un aumento a medida que se analizan capas radiales

---

<sup>1</sup>Por debajo de este valor las variables físicas arrojan valores no reales.

internas, como es de esperarse para un sistema autogravitante. Se debe aclarar que la que la condición de superficie (1.61) es cumplida en el límite de escape libre, es decir, en este límite  $P_R = \mathcal{F}$  ocasionando  $P_\Sigma = 0$ , esto es visible en la figura 5.3 para la capa radial  $r/r_\Sigma = 1.0$ .

La velocidad del fluido  $\omega$  es negativa para capas radiales internas en correspondencia con el hecho de que el sistema se contrae siempre en la ventana de observación. En las capas internas la velocidad es menor, lo que indica que el sistema se colapsa más lentamente a medida que disminuye la distancia al centro, como se muestra en la figura 5.4. Se nota además que el valor del factor de flujo no influye de manera determinante en el comportamiento de la velocidad.

En cuanto a las variables de radiación  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$ , estas presentan su mayor contribución al momento del colapso, como es de esperarse. Además, se nota que, particularmente en las gráficas de  $\mathcal{F}$ , que la radiación en el sistema es mayor en las capas exteriores que en las interiores, como es normal dado que por la superficie exterior se escapa toda la radiación emitida dentro de toda la esfera, mientras que para capas interiores se escapa solamente la que está contenida en la misma.

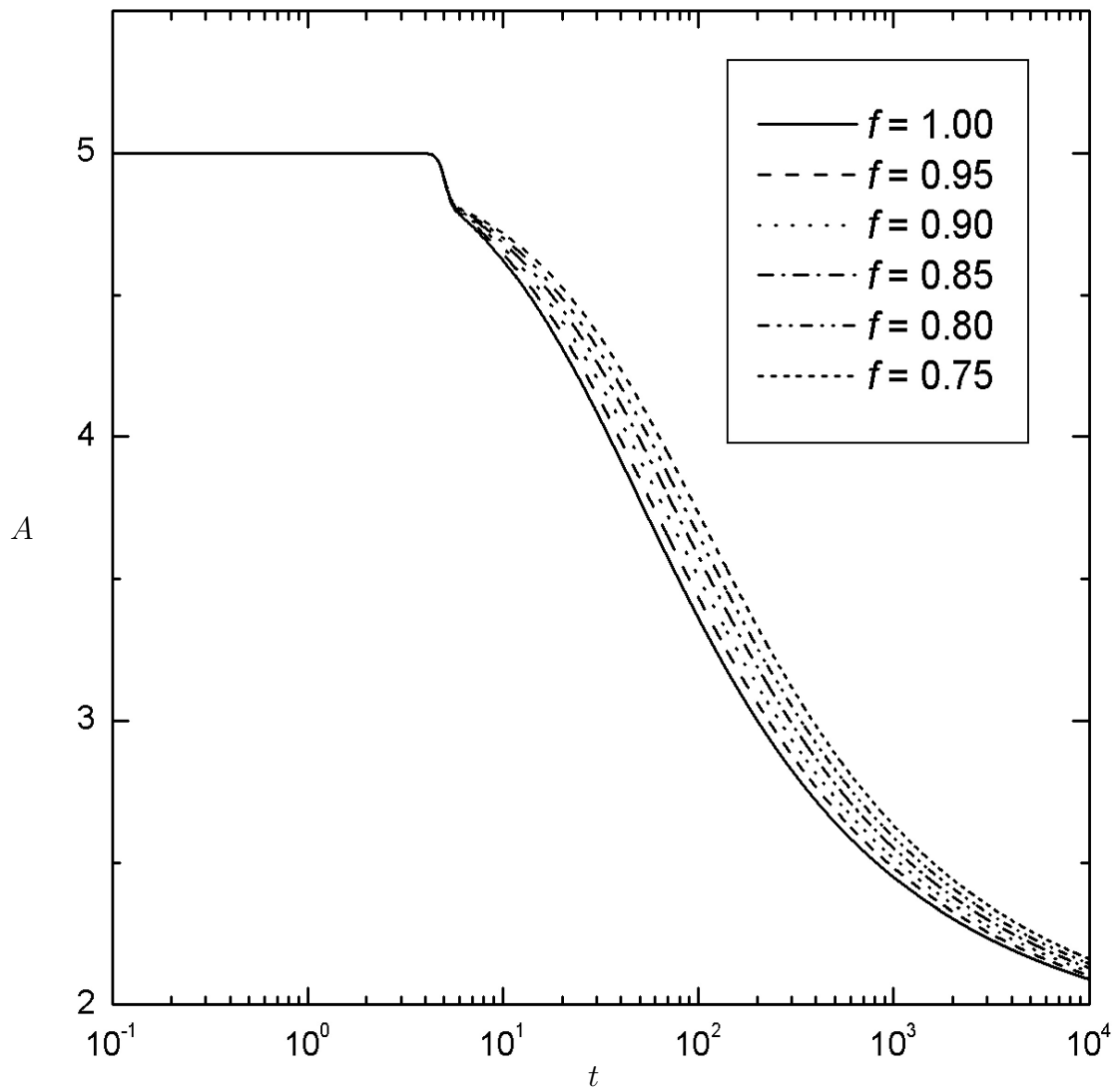


Figura 5.1: Evolución de la frontera  $A$  para el modelo de Schwarzschild

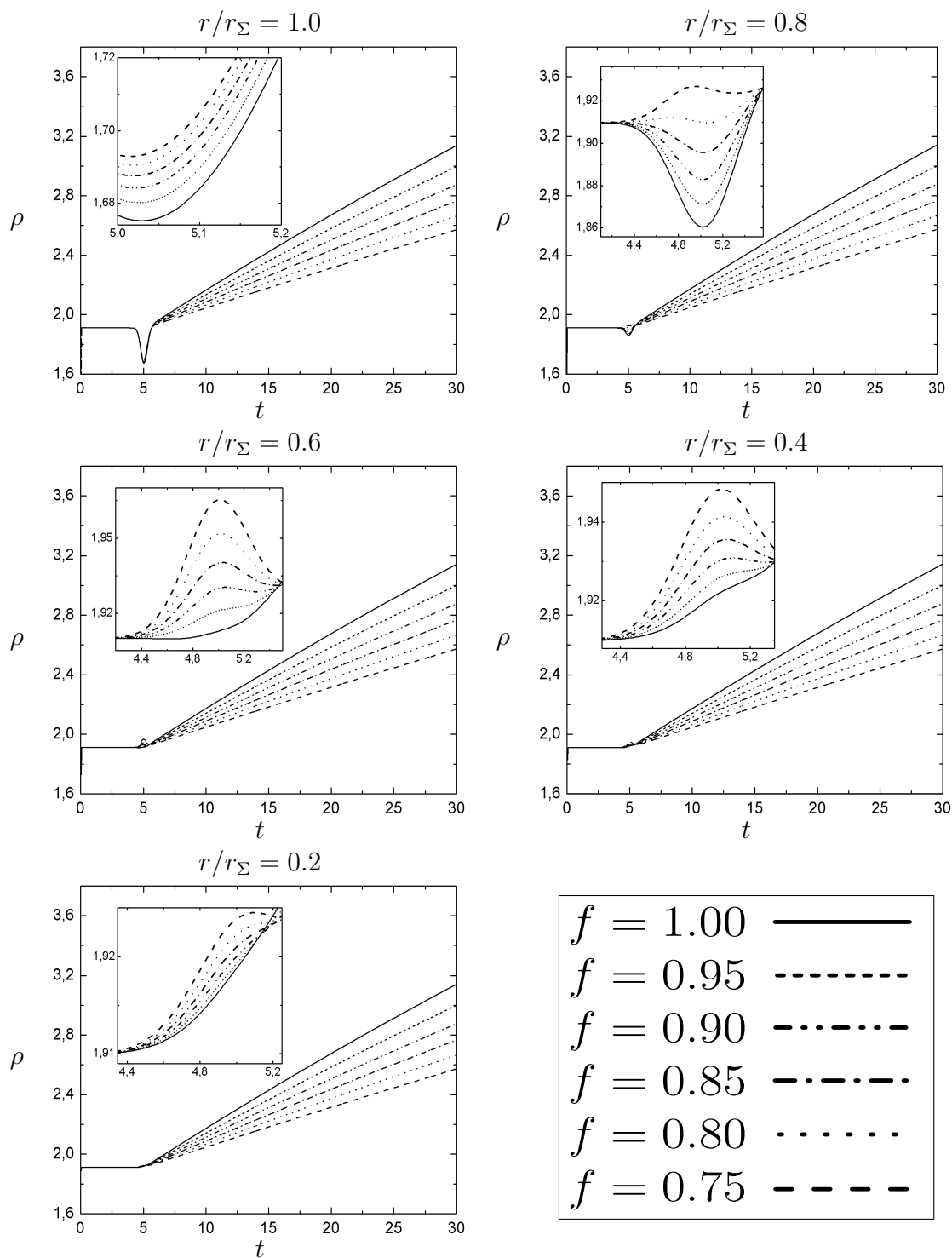


Figura 5.2: Densidad de materia  $\rho$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

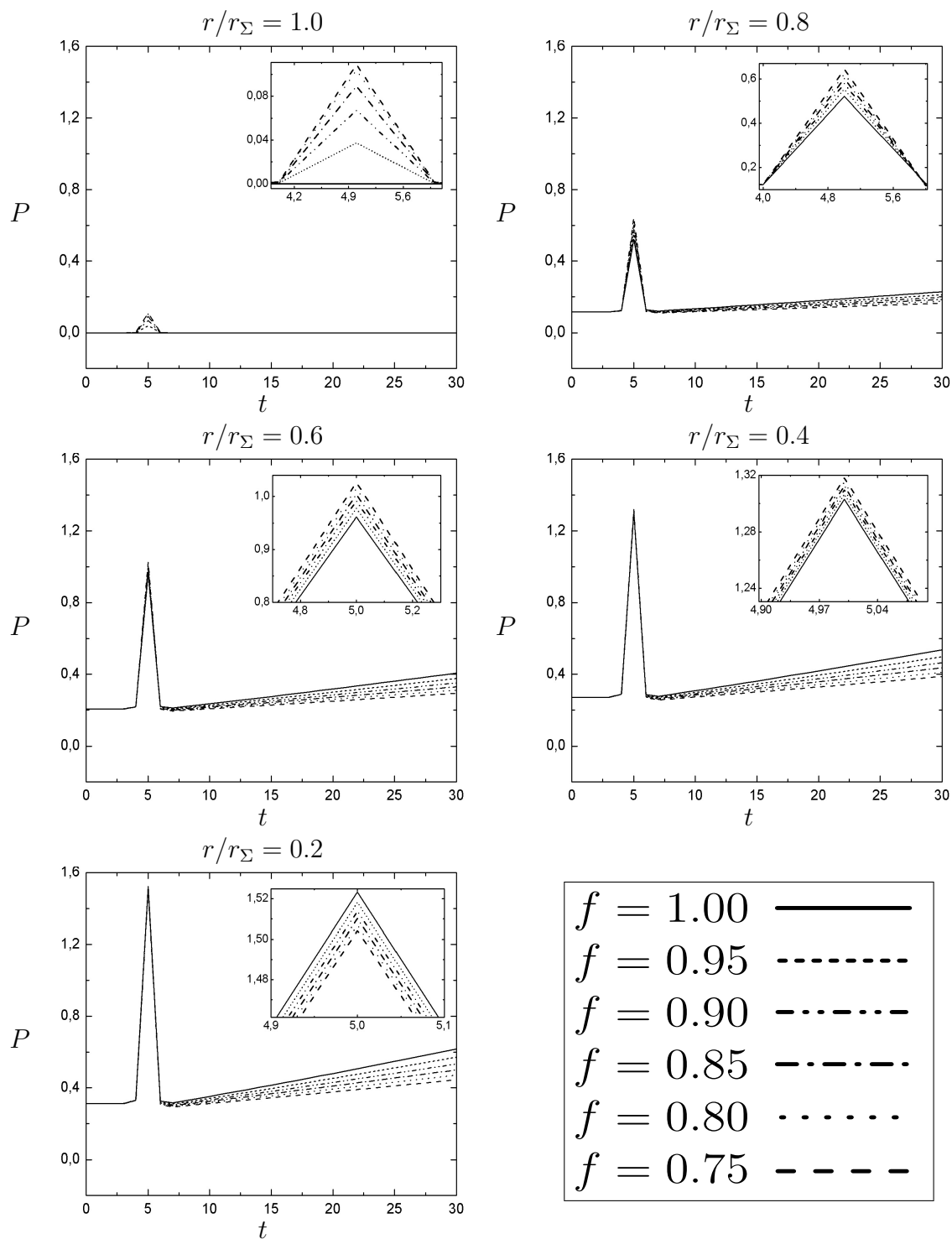


Figura 5.3: Presión de materia  $P$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

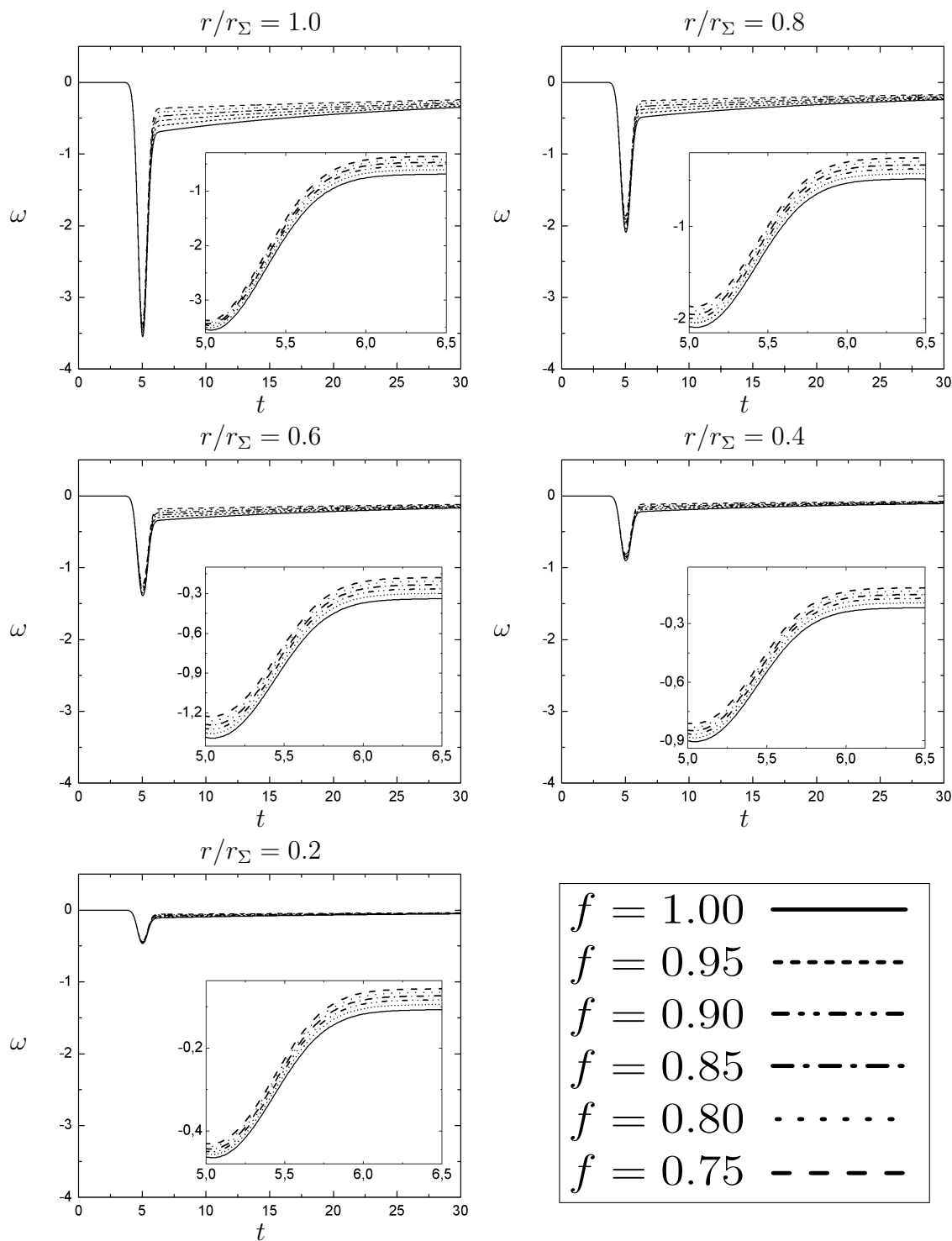


Figura 5.4: Velocidad del fluido  $\omega$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

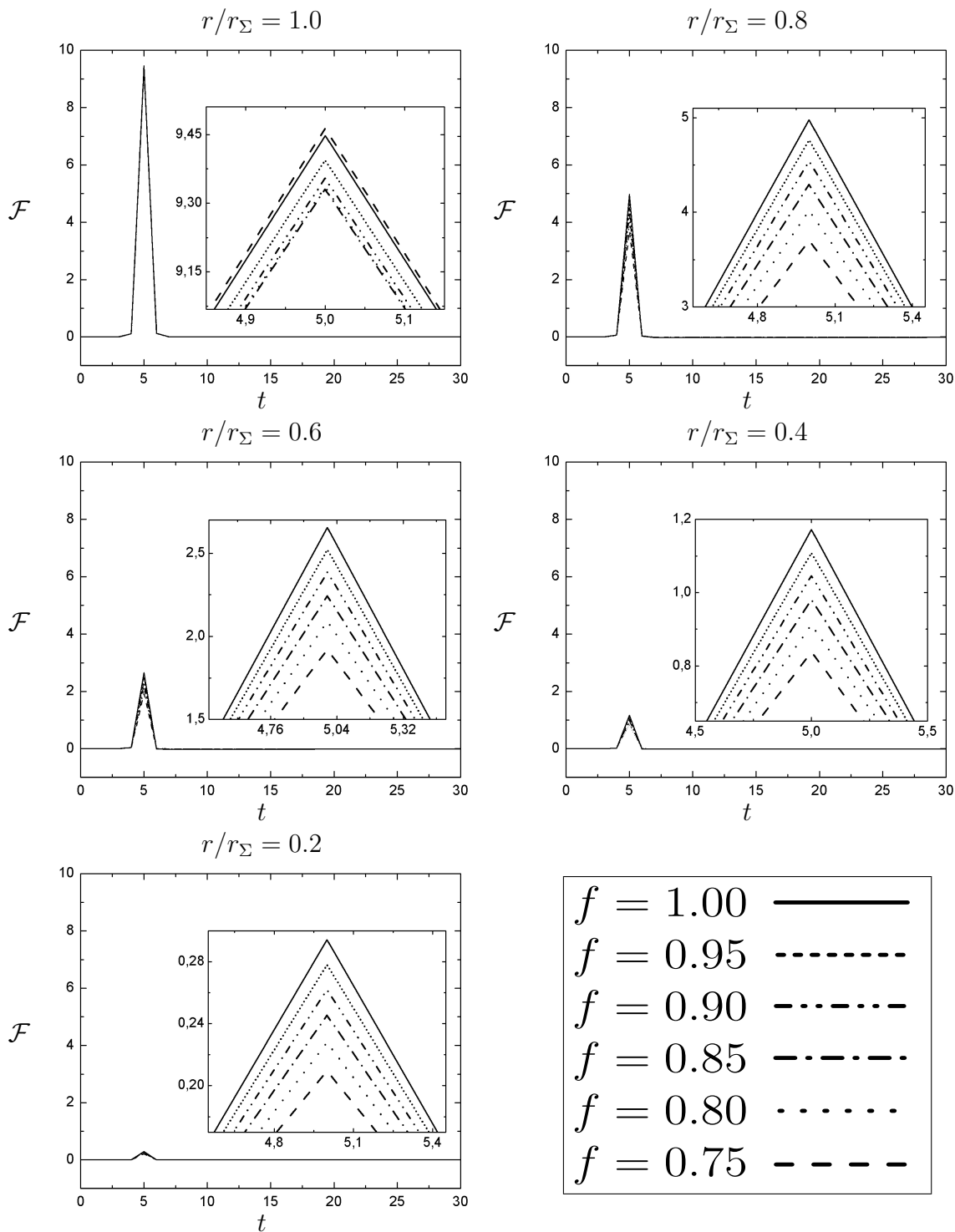


Figura 5.5: Flujo de radiación  $\mathcal{F}$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

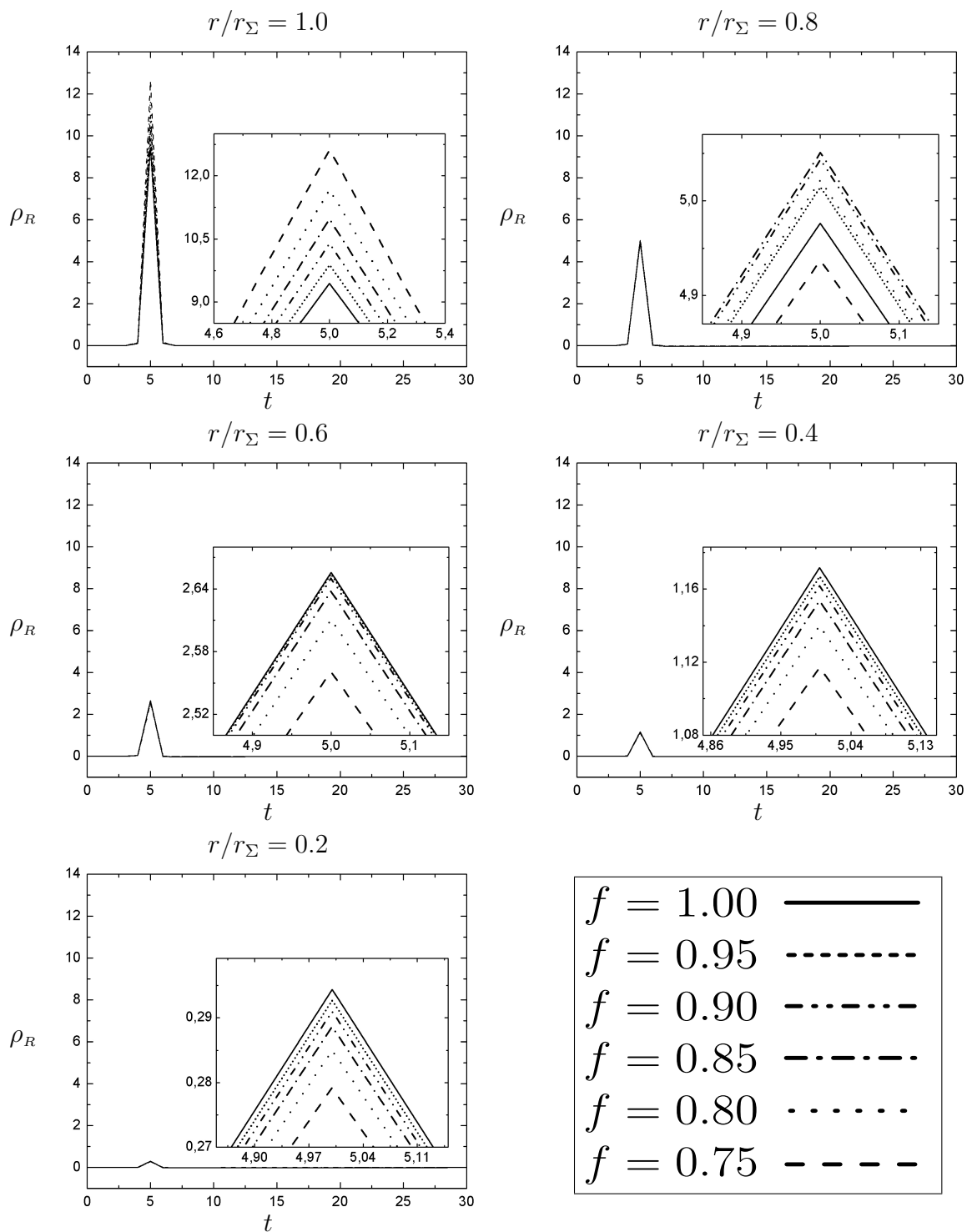


Figura 5.6: Densidad de radiación  $\rho_R$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

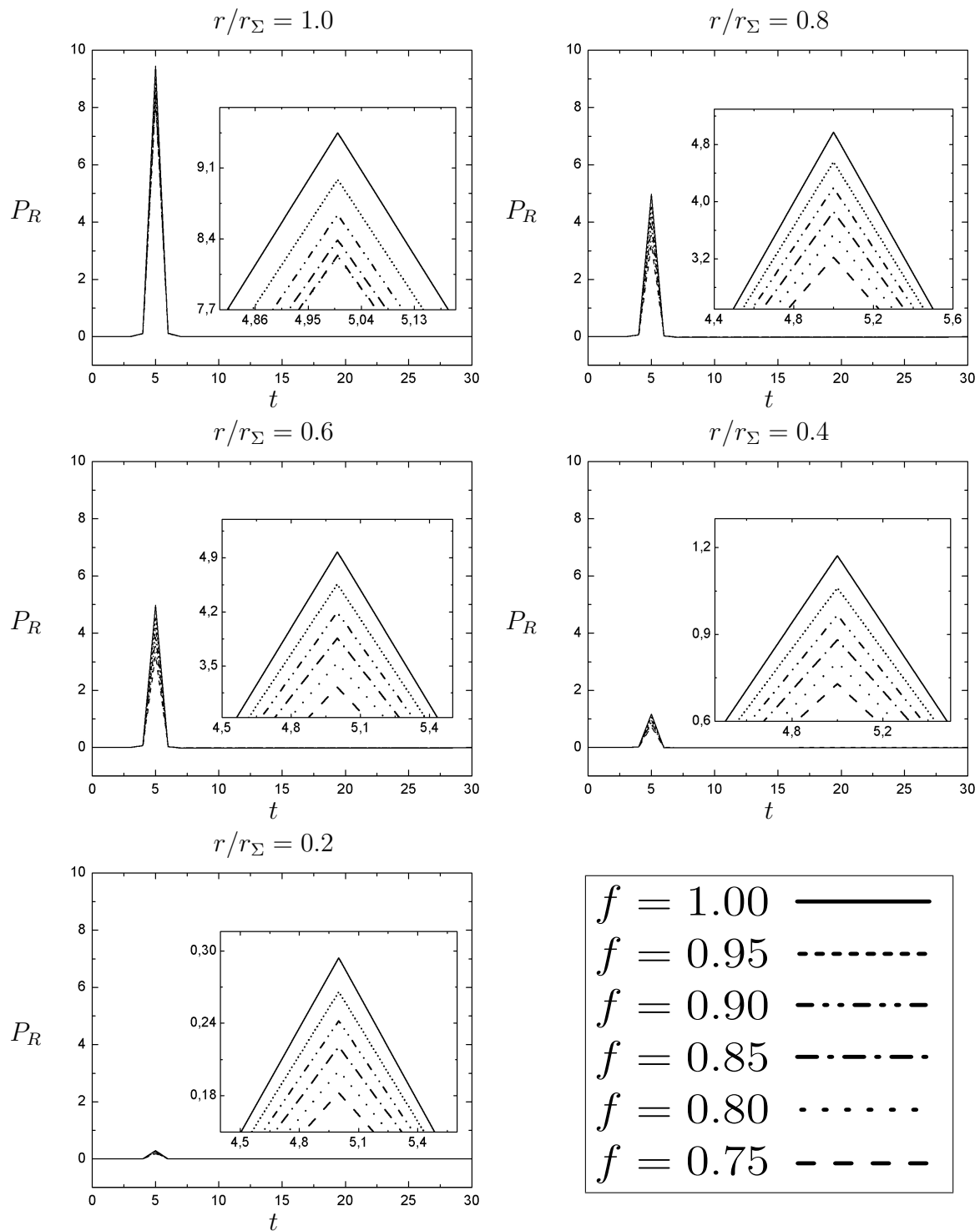


Figura 5.7: Presión de radiación  $P_R$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Schwarzschild

## 5.2 *MODELO DE TOLMAN VI*

Para este modelo la evolución de la frontera  $A$  se presenta en la figura 5.8 y las variables físicas  $\rho$ ,  $P$ ,  $\omega$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$ , en las figuras 5.9 a la 5.14 para diferentes factores de flujo, desde el límite de escape libre ( $f = 1.00$ ), hasta un mínimo valor posible de  $f = 0.78$ , ya que para valores menores a este factor de flujo las variables físicas arrojan valores no reales.

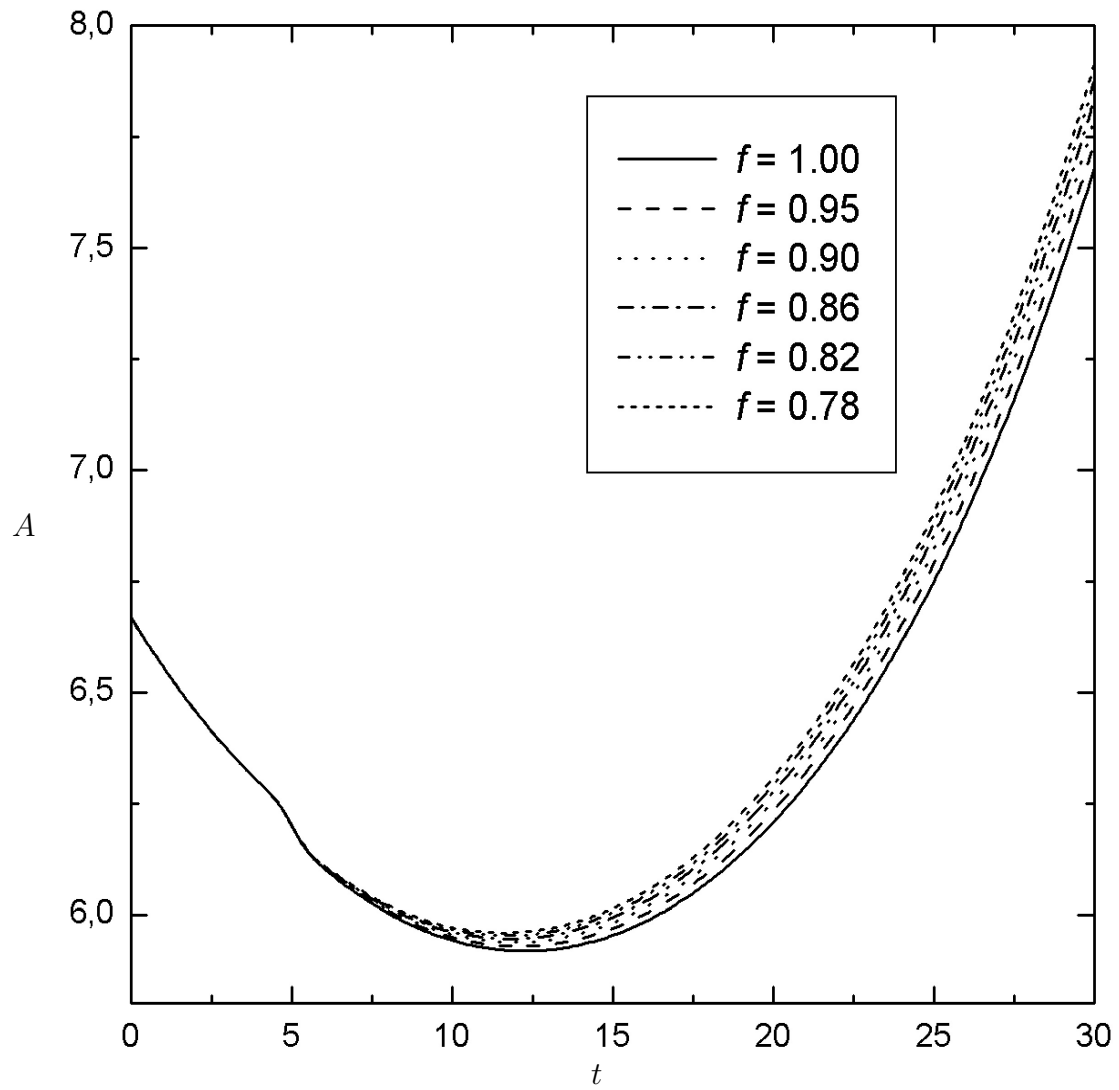
La frontera de la configuración empieza contrayéndose antes del colapso y tiempo después se expande; el valor del factor de flujo de nuevo no afecta el comportamiento global, pero si hace que el radio mínimo de la configuración sea diferente en cada caso, como se muestra en la figura 5.8.

El valor de la densidad de materia  $\rho$  disminuye para las capas radiales más externas debido a su variación con el inverso del cuadrado del radio, como se muestra en la figura 5.9. En las capas más internas hay una influencia mayor en los valores de la densidad con la elección del factor de flujo, relacionados con las variaciones en la velocidad del fluido que se analizarán más adelante. Igualmente debe apuntarse que la densidad aumenta cuando el sistema colapsa y disminuye cuando el sistema se expande.

La presión de materia  $P$  es mayor en las capas más internas, como es natural, y mantiene un comportamiento acorde con el hecho de que el sistema colapsa y luego se expande como se muestra en la figura 5.10.

Para las capas radiales,  $r/r_\Sigma = 1.0$ ,  $r/r_\Sigma = 0.8$  y  $r/r_\Sigma = 0.6$  la velocidad del fluido  $\omega$  inicia como un valor negativo (colapso) y tiempo después cambia a positivo (expansión); en contraste, para las capas radiales  $r/r_\Sigma = 0.4$  y  $r/r_\Sigma = 0.2$  la velocidad es siempre negativa, en consecuencia estas capas radiales seguirán contrayéndose antes y después del colapso. La elección del factor de flujo provoca cambios mucho más notorios en las capas radiales internas, característica mucho más marcada para las capas radiales  $r/r_\Sigma = 0.4$  y  $r/r_\Sigma = 0.2$  como se muestra en la figura 5.11.

Las variables de radiación ( $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$ ) son cero en la superficie de la configuración y aumentan para las capas radiales internas, lo que sugiere que en el sistema predominan los regímenes difusivos, siendo esto notorio para la capa radial  $r/r_\Sigma = 0.2$  como se muestra en las figuras 5.12, 5.13 y 5.14.

Figura 5.8: Evolución de la frontera  $A$  para el modelo de Tolman VI

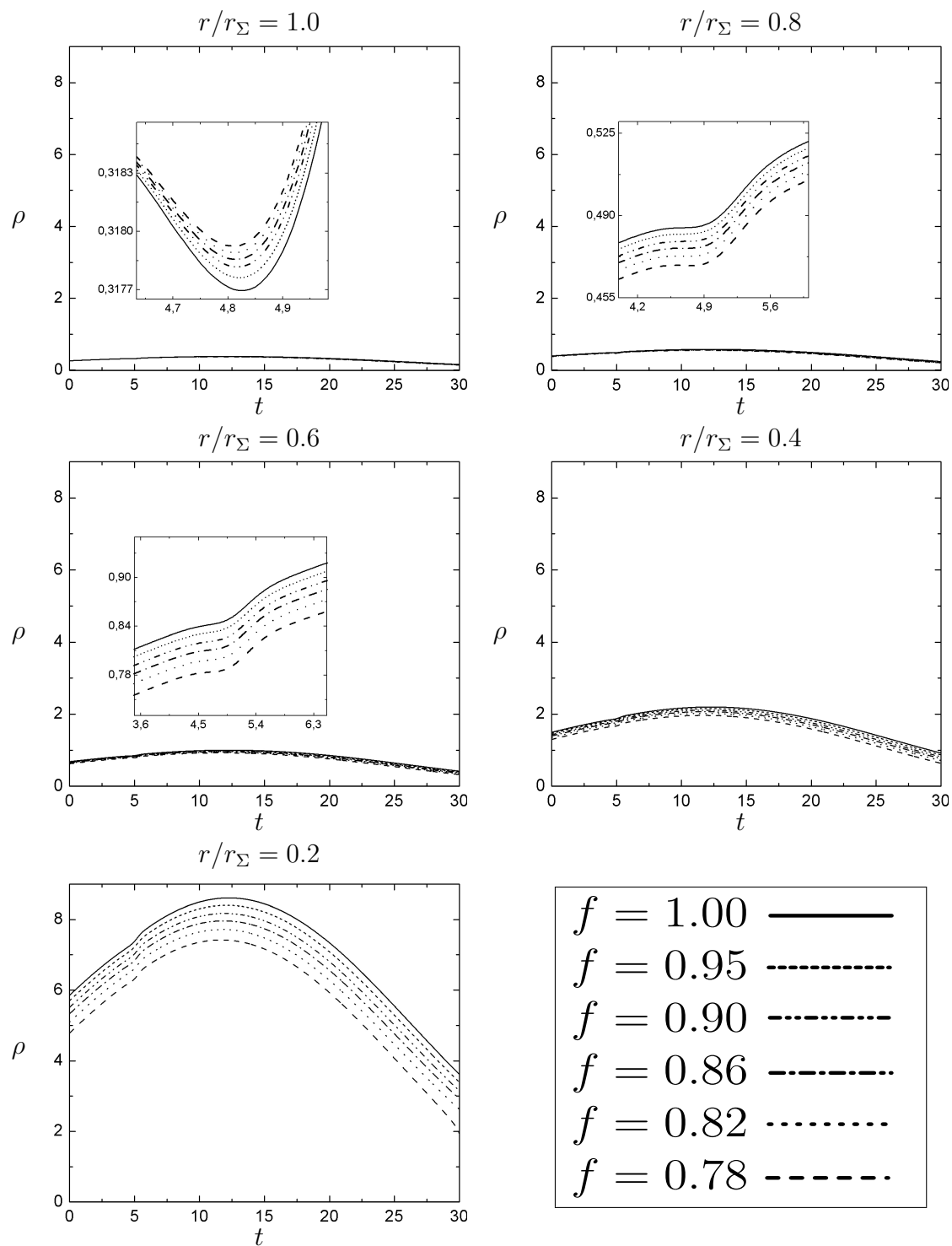


Figura 5.9: Densidad de materia  $\rho$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

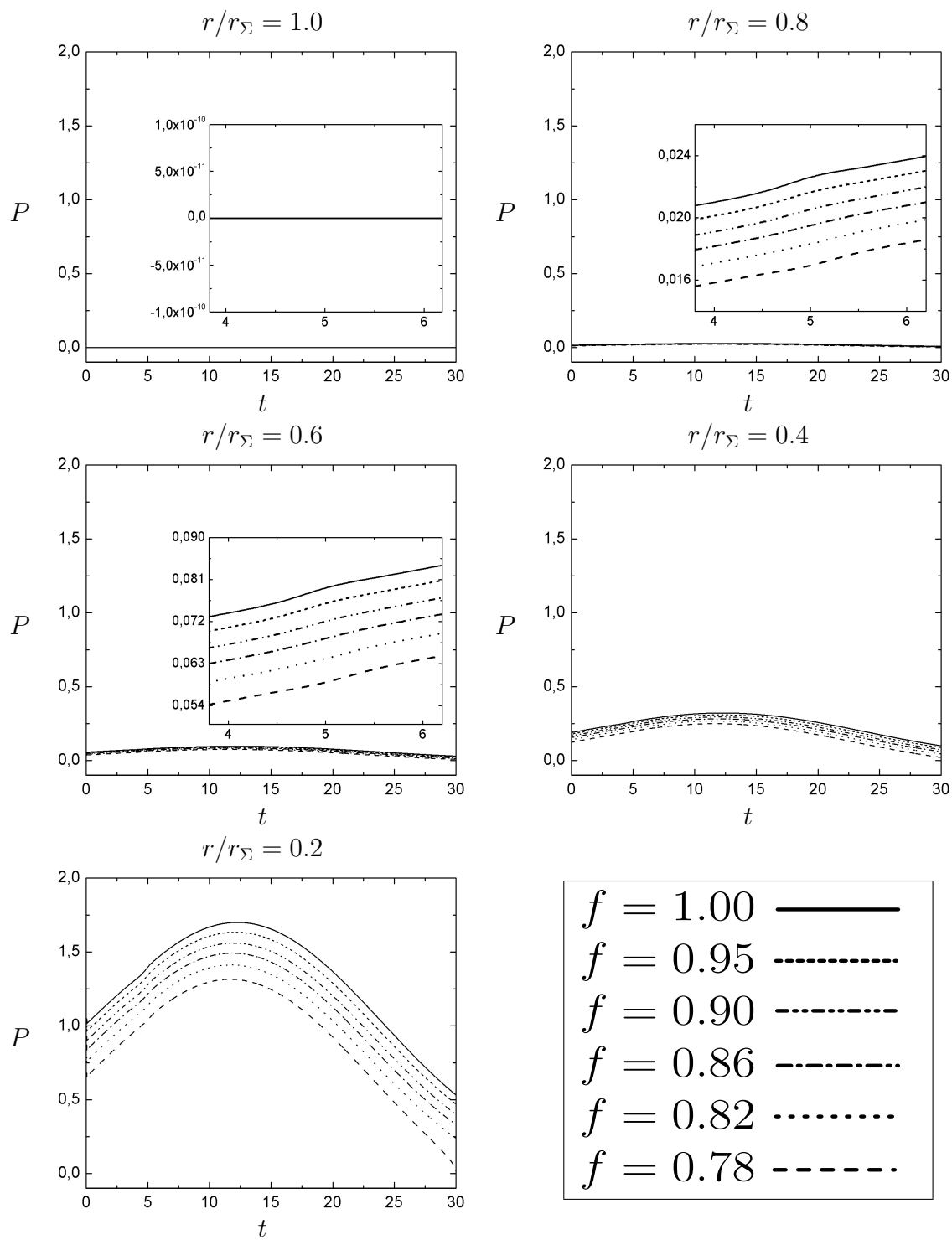


Figura 5.10: Presión de materia  $P$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

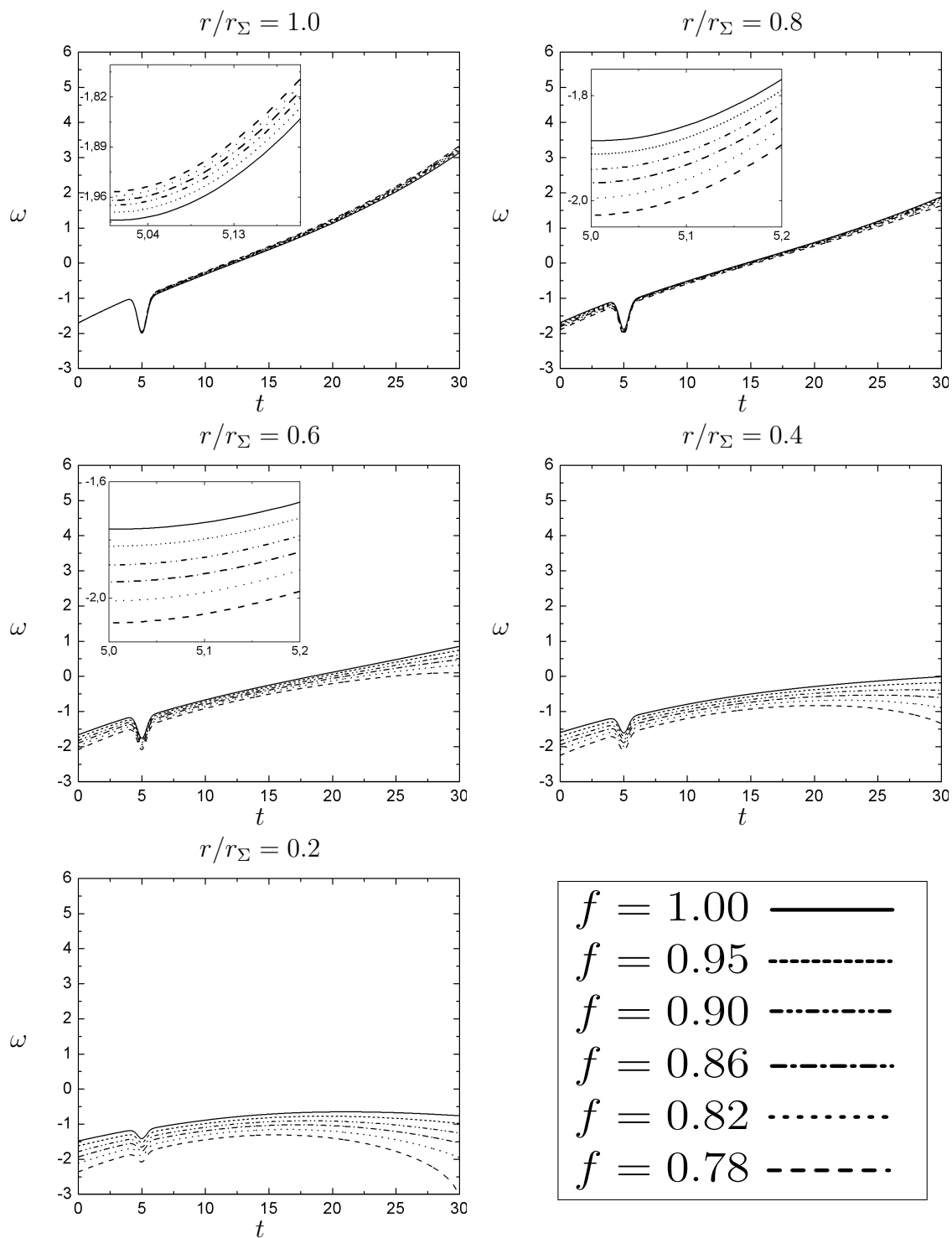


Figura 5.11: Velocidad del fluido  $\omega$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

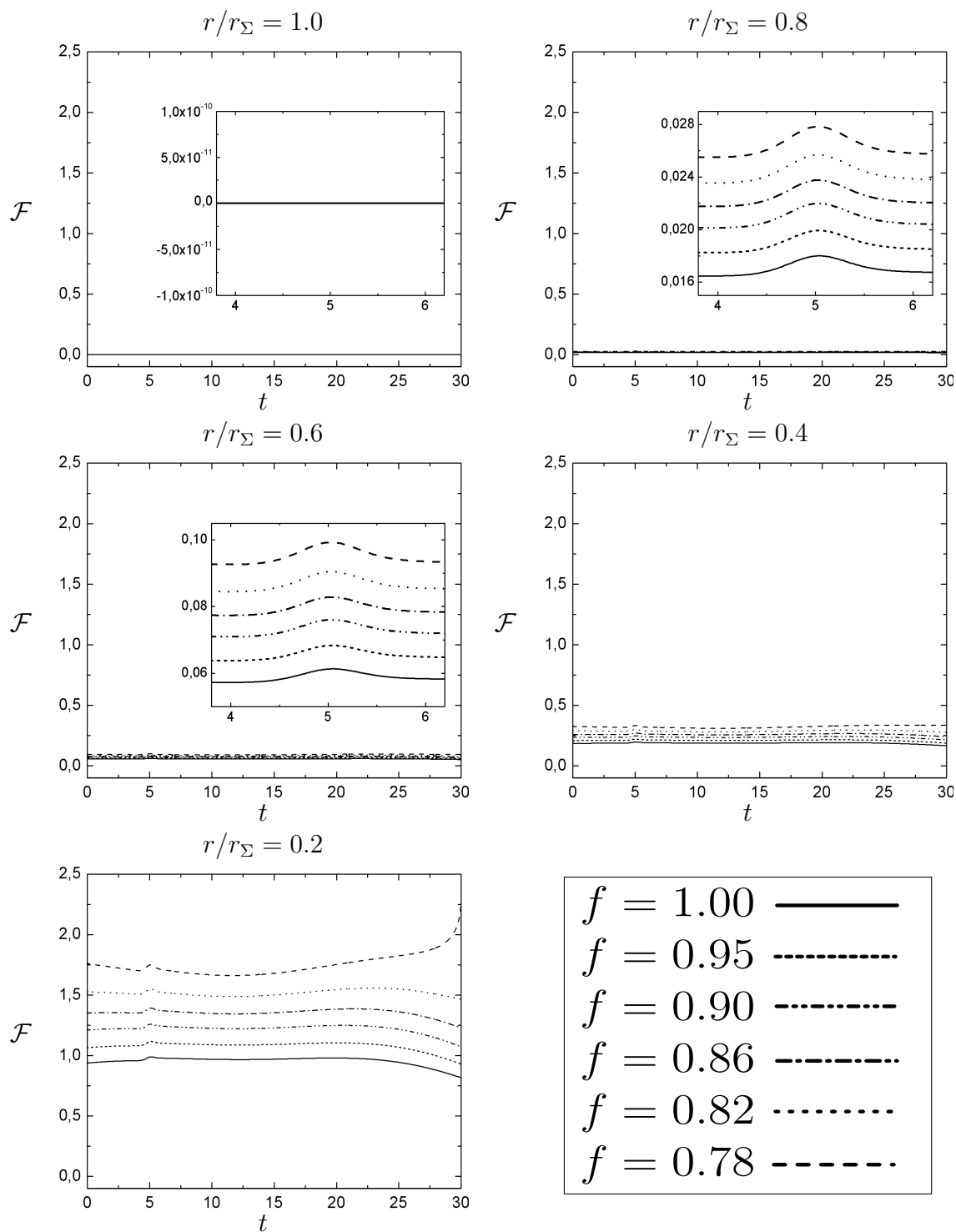


Figura 5.12: Flujo de radiación  $\mathcal{F}$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

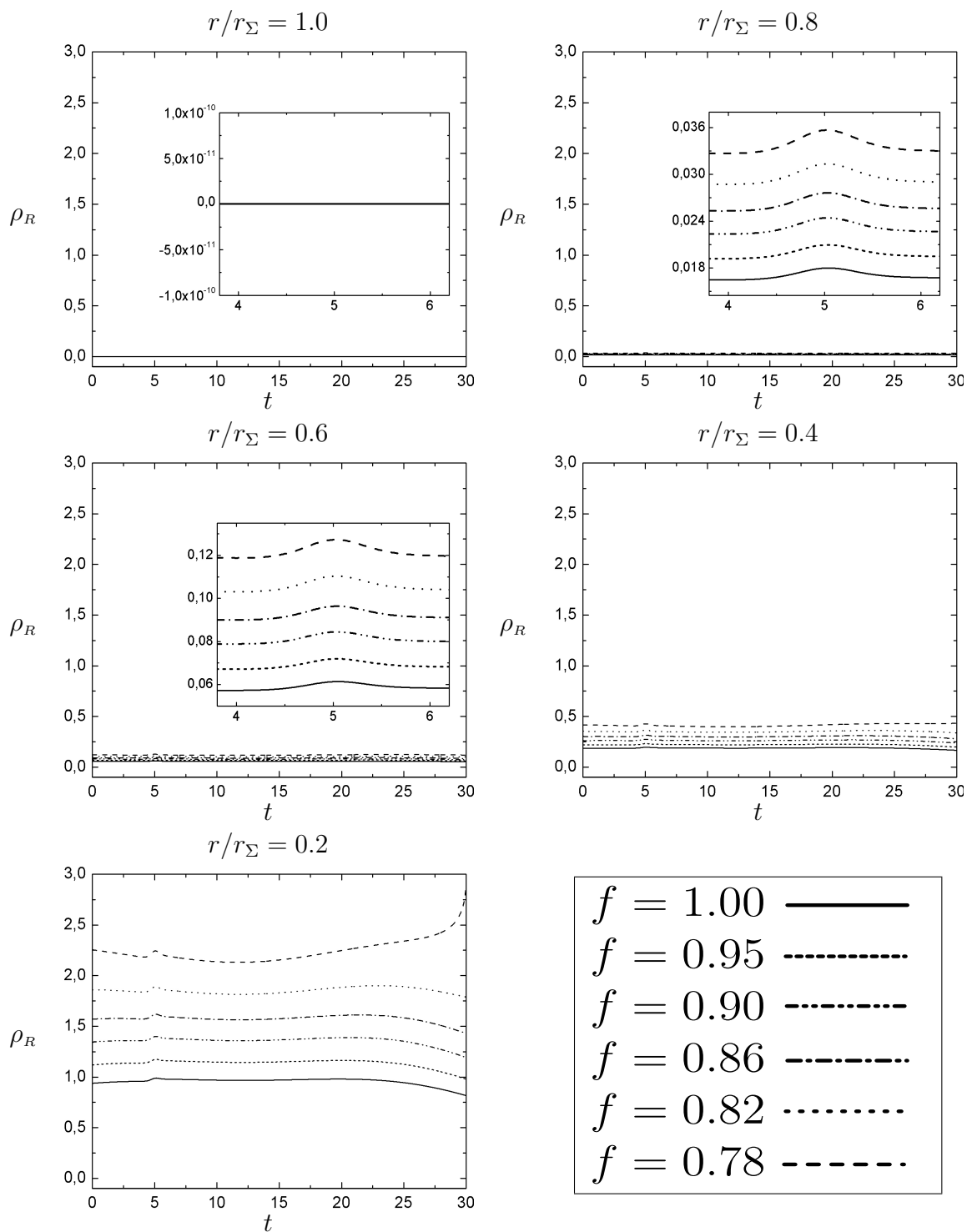


Figura 5.13: Densidad de radiación  $\rho_R$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

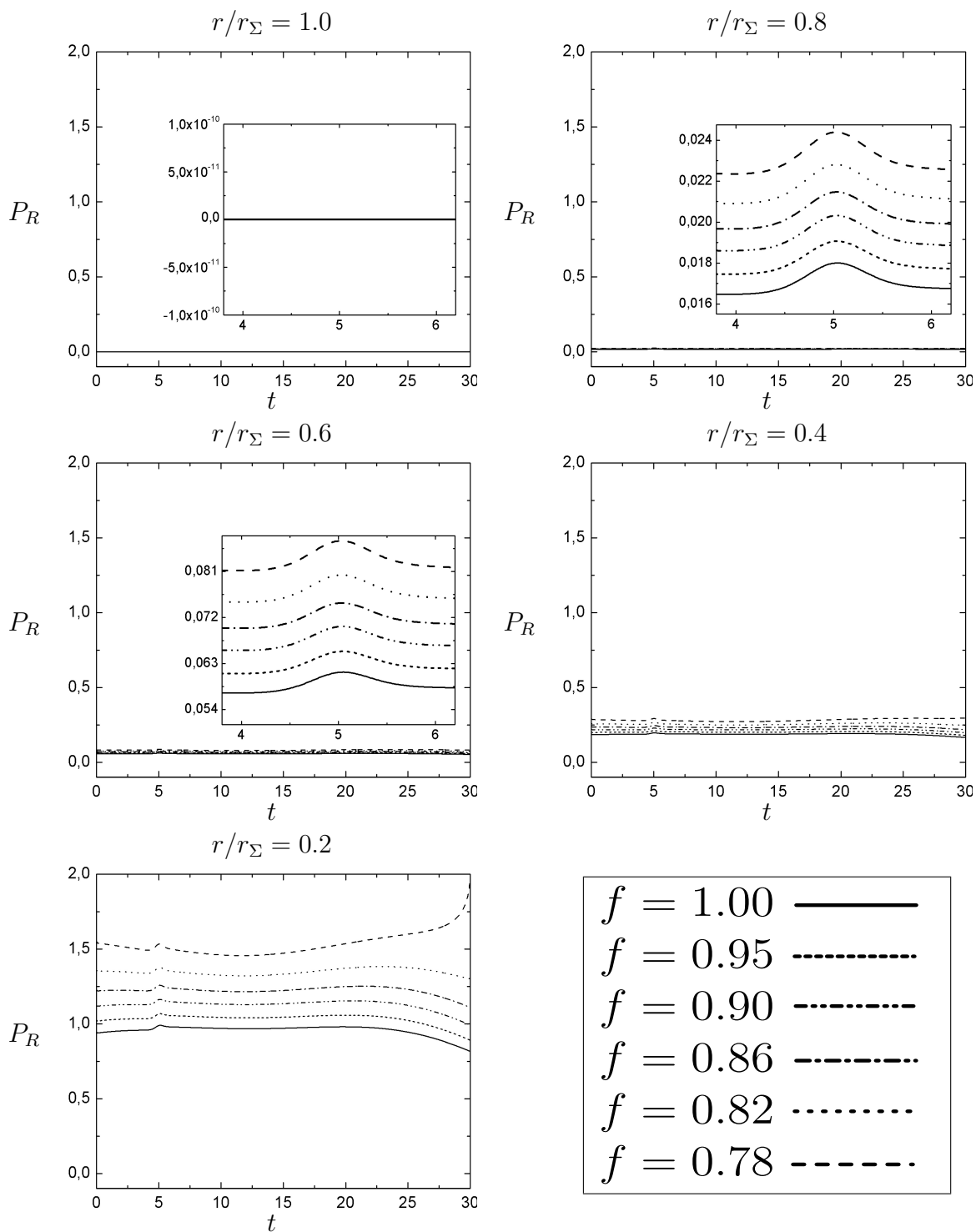


Figura 5.14: Presión de radiación  $P_R$  (en unidades de  $10^3$ ) para el modelo de Tolman VI

Finalmente, en las figuras 5.15 a 5.18 se muestra a manera de ejemplo la evolución de las variables físicas para las dos ecuaciones de estado utilizadas, todo calculado utilizando un factor de flujo  $f = 0.85$  para la capa radial interna  $r/r_\Sigma = 0.2$ . De nuevo, la elección de la relación de clausura no tiene efectos muy importantes sobre el comportamiento general de la variables físicas, pero si permite modular sus valores numéricos en los diferentes tiempos del colapso.

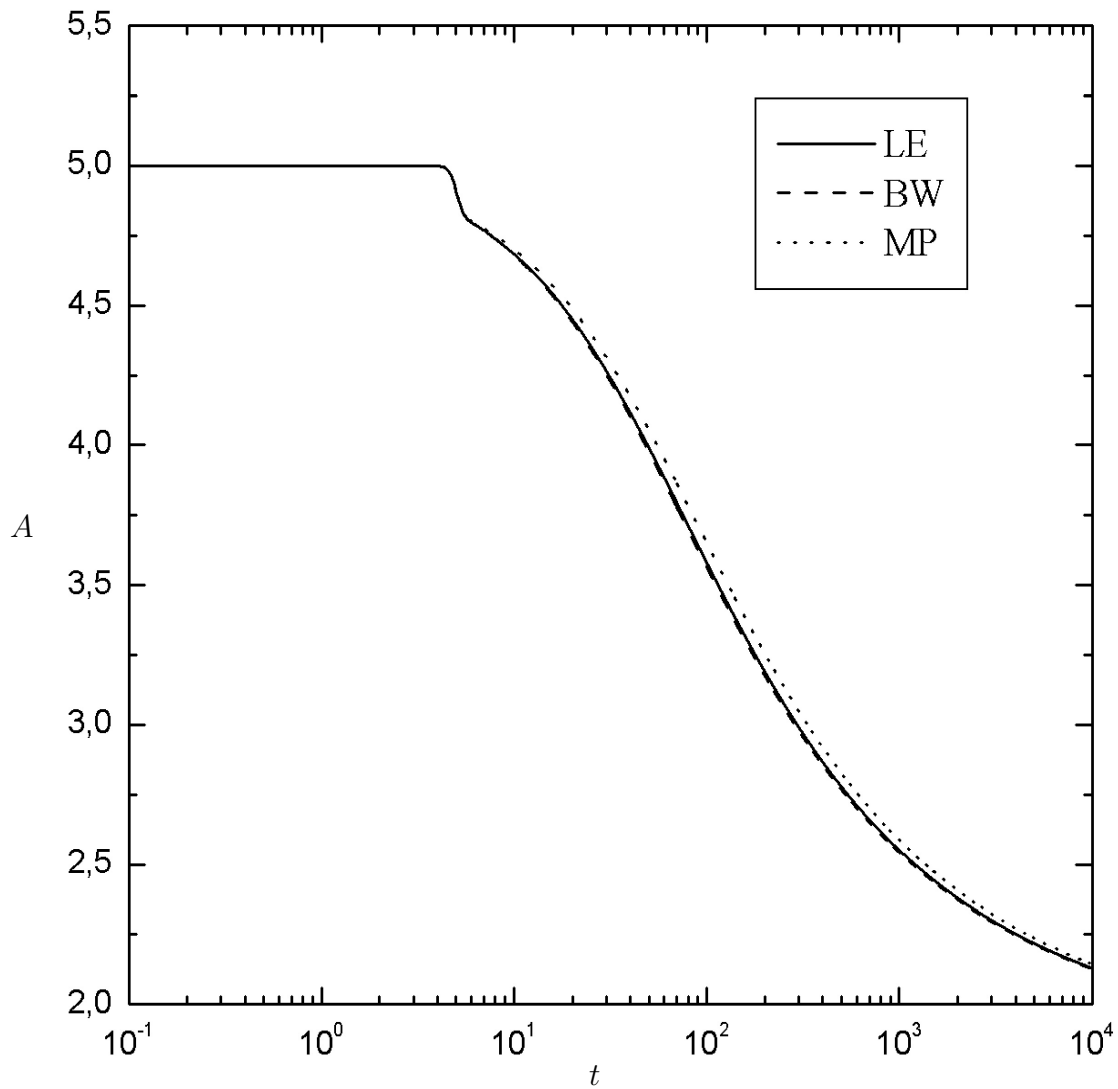


Figura 5.15: Comparación de la evolución de la frontera de la distribución para el modelo de Schwarzschild usando diferentes relaciones de clausura: Lorentz-Eddington (LE), Bowers-Wilson (BW) y Maximum-Packing (MP).

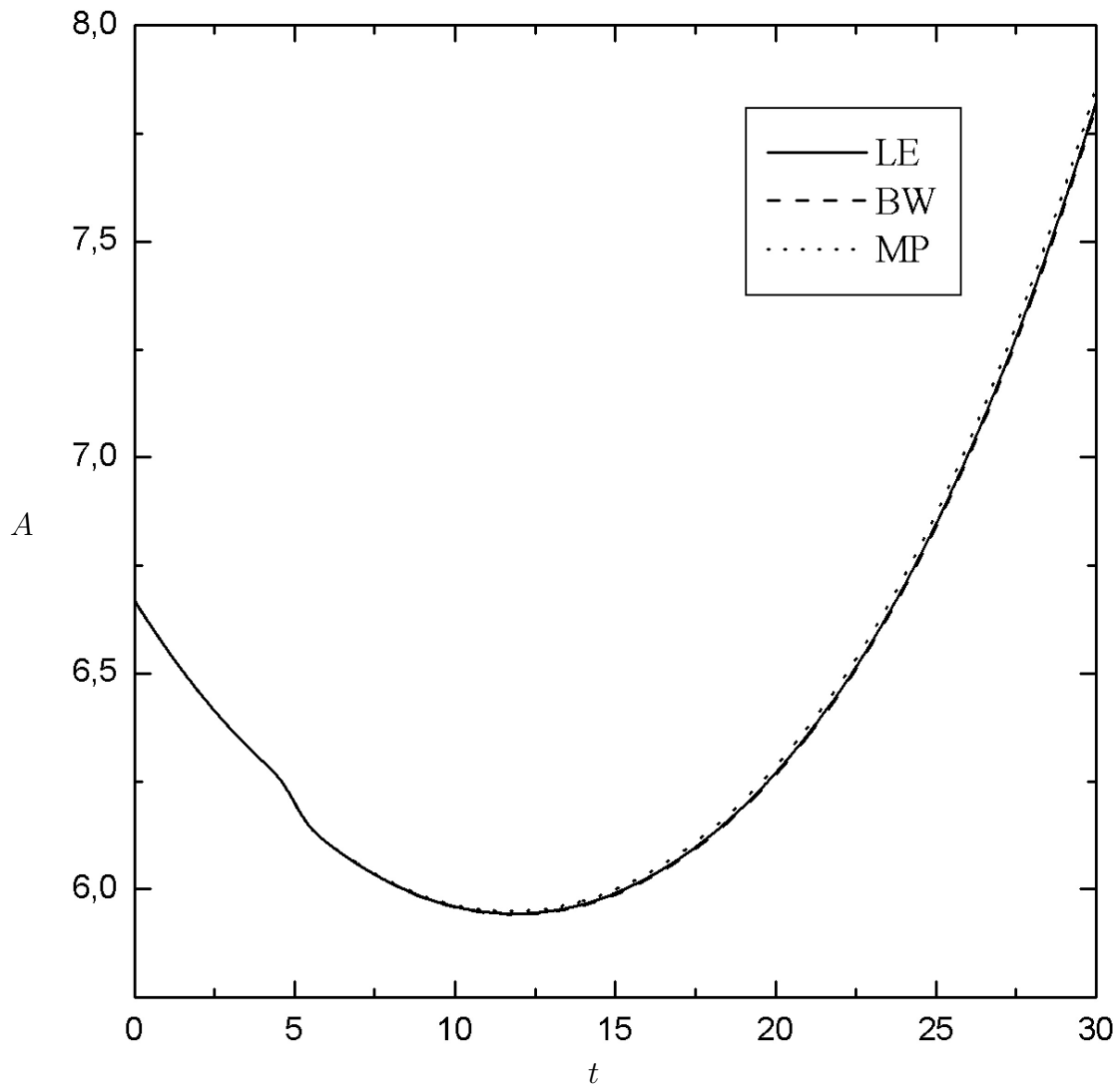


Figura 5.16: Comparación de la evolución de la frontera de la distribución para el modelo de Tolman VI usando diferentes relaciones de clausura: Lorentz-Eddington (LE), Bowers-Wilson (BW) y Maximum-Packing (MP).

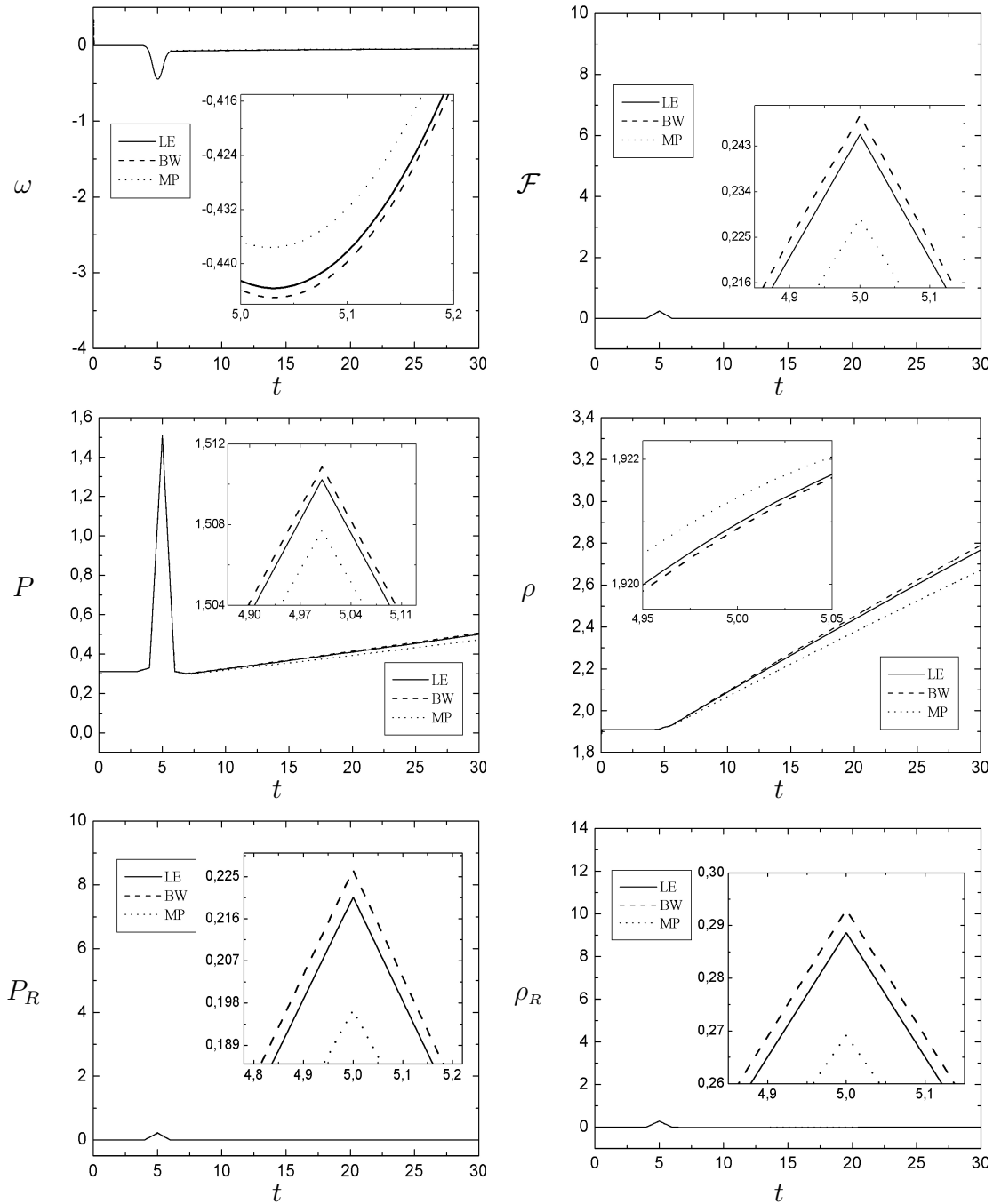


Figura 5.17: Gráficas correspondientes al modelo de Schwarzschild, realizadas para la capa radial de  $r/r_\Sigma = 0.2$ , con un factor de flujo de  $f = 0.85$ . Se comparan los resultados al utilizar las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP).

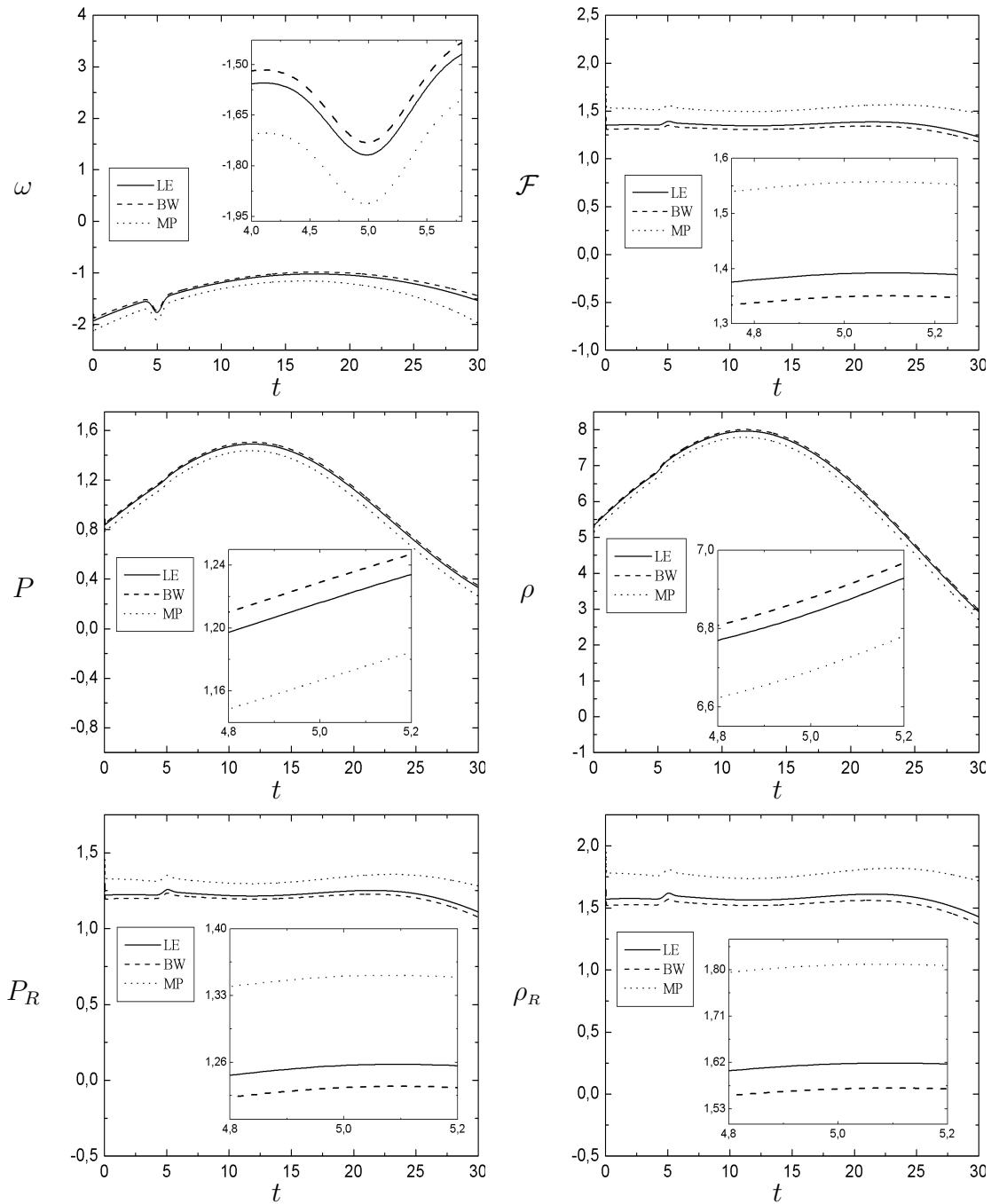


Figura 5.18: Gráficas correspondientes al modelo de Tolman VI, realizadas para la capa radial de  $r/r_\Sigma = 0.2$ , con un factor de flujo de  $f = 0.86$ . Se comparan los resultados al utilizar las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP).

### 5.3 CONCLUSIONES

Después de haber analizado la evolución de la esfera en etapa de colapso para los diferentes modelos de Schwarzschild y Tolman  $VI$ , la influencia de las ecuaciones de estado generadas por cada modelo varia fuertemente la forma como evoluciona la configuración esférica, en cuanto se utilizan diferentes relaciones de clausura estas no cambian la forma global como evoluciona el sistema, en cambio solo afecta los valores locales de cada variables física. Las relaciones de clausura que se utilizaron para comparar la influencia de estas sobre el sistema, fueron las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington, Bowers–Wilson y Maximum Packing. Se comparó la evolución de la frontera  $A$  para ambos modelos Schwarzschild y Tolman  $VI$  como se muestran en las figuras 5.15 y 5.16, en cuanto las variables físicas  $\rho$ ,  $P$ ,  $\omega$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_R$  y  $P_R$  se comparó para los modelos de Schwarzschild y Tolman  $VI$  como se muestra en la figura 5.17 y 5.18. De las relaciones clausura para la cual se obtuvo una mayor valor sobre todas las variables físicas para ambos modelos (Schwarzschild y Tolman  $VI$ ) fue para la clausura de Bowers–Wilson, donde los valores intermedios sobre las variables físicas corresponde para la clausura de Lorentz–Eddington y el menor valor obtenido sobre las variables físicas, fue para la clausura de Maximum Packing.

---

---

# BIBLIOGRAFÍA

---

---

- [1] D. Kazanas, and D. Schramm, *Sources of Gravitational Radiation*, L. Smarr ed., Cambridge University Press, Cambridge, (1979).
- [2] L. Herrera, W. Barreto, A. Di Prisco, and N. O. Santos, *Relativistic gravitational collapse in non-comoving coordinates: the post-quasistatic approximation*, Phys. Rev. D **65**, 104004 (2002).
- [3] L. Herrera, J. Jimenez, and G. Ruggeri, *Evolution of radiating fluid spheres in general relativity*, Phys.Rev. D **22**, 2305 (1980).
- [4] G. Darmois, *In Memorial de Science Mathematiques*, Fascicule XXV, Chap. V (1927)
- [5] R. Dominguez-Cascante, *Information theory in the study of anisotropic radiation*, J. Phys. A. Math. Gen. **30**, 7707 (1997)
- [6] F. Aguirre, L. A. Nuñez, and T. Soldovieri, *Variable Eddington factor and radiating slowly rotating bodies in general relativity*, arXiv: gr-qc/0503085v2.
- [7] D. Mihalas, B. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, (1984).
- [8] *Maple 10.0*, Maplesoft (Waterloo ON, Canada) (2005).
- [9] M. W. Choptuik, *Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field*, Phys. Rev. Lett., **70**, 9 (1993).
- [10] W. Barreto, H. Martinez, and B. Rodríguez, *Radiating fluid spheres in the effective variable approximation*, Astrophys J. Suppl. Ser. **282**, 581 (2002).
- [11] H. Hernandez, L.A. Nuñez, and U. Percoco, *Non-local equation of state in general relativistic radiating spheres*, Class. Quantum. Grav. **16**, 871 (1999).
- [12] L. Herrera, H. Hernandez, L.A. Nuñez, and U. Percoco, *On the eccentricity behaviour of radiating slowly rotating in general relativity*, Class. Quantum. Grav., **15**, 187 (1998).

- 
- [13] L. Herrera, and J. Jiménez, *The complexification of no rotating spheres: An extension of the Newman-Janis algorithm*, J. Math. Phys. **23**, 2339 (1982).
- [14] L. Herrera, and J. Jiménez, *Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity*, Phys. Rev. D, **28**, 2987 (1982).
- [15] L. Herrera, A. Melfo, L.A. Nuñez, and A. Patiño, *Slowly rotating bodies in general relativity*, Astrophys J. **421**, 677 (1994).
- [16] S. Weimberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley (1972).
- [17] H. Bondi, *The contraction of gravitating spheres*, Proc. R. Soc. London A281, 39 (1964).
- [18] J. C. Collins, and M. J. Perry, *Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks?*, Phys. Rev. Lett., **34**, 1353 (1975).
- [19] N. Itoh, *Hidrostatic equilibrium of hypothetical quark stars*, Progress Theor. Phys. **44**, 291 (1970).
- [20] R. F. Sawyer, *Condensed  $\pi^-$  phase in neutron-star matter*, Phys. Rev. Lett. **29**, 382 (1972).
- [21] J. B. Hartle, R. Sawyer, and D. J. Scalapino, *Pion condensed matter at high densities: Equation of state and stellar models*, Astrophys J. **199**, 471 (1975).
- [22] A. Lichnerowicz, *Theories Relativistes de la gravitation*, Masson, Paris (1955).
- [23] L. Herrera and J. Jimenez, *Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity*, Phys. Rev. D **28**, 2987 (1983).
- [24] S. W. Bruenn, K. R. De Nisco, and A. Mezzacappa, *General relativistic effects in the core collapse supernova mechanism*, Astrophys. J. **560**, 326 (2001).
- [25] G. C. Pomraning, *The equations of radiation hydrodynamics*, Pergamos, New York (1884).
- [26] A. Mezzacappa, and S.W. Bruenn, *A numerical method for solving the neutrino equation to spherically symmetric*, Astrophys. J. **405**, 669 (1993).
- [27] S. Yamada, H-Th Janka, and H. Suzuki, *Neutrino transport in type II supernova: Boltzmann solver Vs. Monte Carlo method*, Astron. Astrophys. **344**, 533 (1999).
- [28] L. Ensmann, and A. Burrows, *Shock breakout in SN 1987A*, Astrophys. J. **393**, 742 (1992).
- [29] M. Gehmeyr, and D. Mihalas, *TITAN Code Reference Manual. Report TR022*, Physic D, **72**, 320 (1994).

- 
- [30] S. I. Blinnikov, and O. S. Bartunov *Non-equilibrium radiative transfer in supernova theory - Models of linear type II supernovae*, Astron. Astrophys. **273**, 106 (1993).
- [31] G. C. Pomraning, *An extension of the Eddington approximation*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Trans. **9**, 407 (1969).
- [32] J. A. Pons, J. M<sup>a</sup> Ibañez, and J. A. Miralles, *Hyperbolic character of the angular moment equations of radiative transfer and numerical methods*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **317**, 550 (2000).
- [33] J. M. Smit, L. J. Van De Horn, and S. A. Bludman, *Closure in flux-limited neutrino diffusion and two-moment transport*, Astron. Astrophys. **356**, 559 (2000).
- [34] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars*, Dover, New York (1958).
- [35] J. A. Rueda H., and L. A. Nuñez, *General relativistic radiant shock waves in the post-quasistatic approximation*, arXiv: gr-qc/0612008 v1.
- [36] R. C. Tolman, *Static solution of Einstein's field equations for spheres of fluid*, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).