

Solución de un modelo de optimización para ruteo de buses escolares (SBRP) bajo consideraciones ambientales a través de la metaheurística búsqueda tabú granular

Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniera Industrial

Autor

Paola Andrea Lázaro González

Director

Javier Eduardo Arias Osorio

Magister en Administración

Codirector

Juan Pablo Orejuela Cabrera

Magister en Ingeniería Industrial

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas

Escuela de Estudios Industriales y Empresariales

Bucaramanga

2019

A Dios por llevarme siempre de su mano y guiar mis pasos en el camino de la vida.

A mi papá y a mi mamá por todo su apoyo e incondicionalidad, por estar siempre para mi hermano y para mí, por darnos todo su amor, su comprensión y presencia en cada paso dado, porque sin ustedes y la guía de Dios no sería quien soy.

A mi hermano por estar siempre presente y demostrarme su amor de la manera en que solo un hermano lo puede hacer para volverme más fuerte y por hacerme tía de los regalos más bonitos que me ha dado la vida.

Paola

Agradecimientos

Al profesor Javier, por ser tan excelente ser humano y docente, por su paciencia, apoyo y guía durante todo proyecto.

Al profesor Juan Pablo, porque sin conocerme y en la distancia, me brindó su apoyo y guía durante todo el proyecto.

Sin la guía de mis profesores no se hubieran obtenido los resultados que se obtuvieron y yo no hubiera aprendido tanto como lo hice con ellos, mejor dirección no hubiera podido tener.

A mis mejores amigas de la universidad Mayra y Johanna, y mi amigo Carlos porque una parte del proyecto también es de ustedes, porque de diferentes maneras aportaron en la culminación de este.

Al laboratorio Galea, por el aprendizaje tanto profesional como personal y a los amigos que me deja.

A mis amigos de la universidad y de la vida, por su compañía.

Tabla de contenido

Introducción	13
1. Planteamiento del problema.....	17
2. Justificación del problema	19
3. Objetivos	21
3.1. Objetivo General	21
3.2. Objetivos Específicos.....	21
4. Revisión de la Literatura.....	22
4.1. Análisis bibliométrico	22
4.1.1. Problema de ruteo de vehículos con consideraciones ambientales.....	22
4.1.2. Problema de ruteo de buses escolares.	25
4.2. Análisis preliminar de la literatura.....	27
5. Marco de antecedentes	32
6. Marco teórico	47
6.1. Problemas de optimización	47
6.2. Optimización combinatoria.....	47
6.3. Problemas NP – Hard.....	47
6.4. Problema de asignación	48
6.5. Ruteo de Vehículos o Vehicle Routing Problem	48
6.5.1. Ruteo de Vehículos con ventanas de tiempo.	49
6.5.2. Ruteo de Vehículos con Múltiples Bodegas.	49
6.5.3. Ruteo de Vehículos con Backhauls.....	49
6.5.4. Ruteo de Vehículos con Entrega Dividida.....	50
6.5.6. Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica.	50
6.6. Problema de localización y ruteo	50
6.7. School Bus Routing Problem.....	51
6.8. Teorías de Optimización	53
6.8.1. Método de Ramificación y Acotamiento.	54
6.8.2. Método Simplex.....	55
6.8.3. Algoritmo de ahorros de Clarke & Wright.	55

6.8.4. Colonia de hormigas.	55
6.8.5. Búsqueda Tabú.....	56
6.8.6. Búsqueda Tabú Granular.	57
7.Formulación del modelo	58
7.1. Características del modelo	58
7.2. Modelo base	58
7.3. Formulación del modelo	61
7.3.1. Consideraciones ambientales.	63
7.3.2. Modelo nuevo	69
7.4. Verificación del modelo.....	72
7.4.1. Variables de decisión binarias	73
7.4.2. Variables de decisión no-binarias.	74
7.4.3. Restricciones	76
7.4.4. Ruta	76
8.Técnicas de solución	78
8.1. Algoritmo de Ahorros de Clarke & Wright	78
8.2. Metaheurística Búsqueda Tabú y Búsqueda Tabú Granular.....	79
8.2.1. Metaheurística Búsqueda Tabú.....	80
9.Desarrollo del algoritmo	87
9.1. Datos a ingresar.....	87
9.2. Algoritmo de ahorros Clarke and Wright	87
9.3. Metaheurística Búsqueda Tabú Granular.....	91
10.Experimentación	100
10.1. Instancias.....	100
10.2. Resultados	103
10.2.1. Método exacto.....	103
10.2.2. Metaheurística.....	108
11.Conclusiones	117
12.Recomendaciones	119
Referencias bibliográficas.....	120

Lista de tablas

Tabla 1. Cumplimiento de objetivos	16
Tabla 2. Características del modelo	58
Tabla 3. Resumen criterios de selección de función objetivo ambiental.	63
Tabla 4. Consumo de combustible por vehículo.....	66
Tabla 5. Datos regresión 1	67
Tabla 6. Datos regresión 2	68
Tabla 7. Características de equipo de cómputo	73
Tabla 8. Resultados generales.....	73
Tabla 9. Resultados variable X	73
Tabla 10. Resultados variable Y	74
Tabla 11. Resultados variable Veh	74
Tabla 12. Resultados variable F.....	74
Tabla 13. Resultados variable PE	75
Tabla 14. Resultados variable TE	75
Tabla 15. Restricción capacidad de vehículo.....	76
Tabla 16. Valores de los parámetros.....	97
Tabla 17. Características de la flota de vehículos.....	101
Tabla 18. Características instancias	102
Tabla 19. Parámetros de entrada método exacto.	103
Tabla 20. Resultados método exacto	104
Tabla 21. Porcentaje de ocupación del vehículo.....	107
Tabla 22. Resultados método heurístico	109
Tabla 23. Heurística vs metaheurística	114
Tabla 24. Método exacto vs metaheurística.....	115

Lista de figuras

Figura 1. Publicaciones realizadas por año	23
Figura 2. Número de publicaciones por autor.....	24
Figura 3. Número de publicaciones por país o región.	25
Figura 4. Publicaciones realizadas por año.....	26
Figura 5. Número de publicaciones por autor.....	26
Figura 6. Número de publicaciones por país o región.	27
Figura 7. Ruta 1.....	74
Figura 8. Gráfico Ruta 1	77
Figura 9. Vector solución.....	83
Figura 10. Técnicas metaheurísticas - Movimiento de inserción	84
Figura 11. Técnicas metaheurísticas - Movimiento de intercambio.	84
Figura 12. Diagrama de flujo algoritmo de ahorros Clarke and Wright.	90
Figura 13. Diagrama de flujo metaheurística Búsqueda Tabú Granular	97
Figura 14. Vector solución inicial ejemplo.....	97

Lista de apéndices

(Ver apéndices adjuntos en el CD y pueden visualizarlos en la base de datos de la biblioteca UIS)

Apéndice A. Instancias Gams.

Apéndice B. Instancias Matlab.

Apéndice C. Código Gams.

Apéndice D. Código algoritmo de ahorros.

Apéndice E. Código algoritmo metaheurística Búsqueda Tabú Granular.

Apéndice F. Artículo publicable.

RESUMEN

TÍTULO: SOLUCIÓN DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN PARA RUTEO DE BUSES ESCOLARES (SBRP) BAJO CONSIDERACIONES AMBIENTALES A TRAVÉS DE LA METAHEURÍSTICA BÚSQUEDA TABÚ GRANULAR*

AUTOR: LÁZARO GONZÁLEZ, Paola Andrea**

PALABRAS CLAVE: VERDE, POLUCIÓN, METAHEURÍSTICA, RUTEO DE VEHÍCULOS ESCOLARES, BÚSQUEDA TABÚ GRANULAR.

DESCRIPCIÓN:

En la presente investigación se aborda el Problema de Ruteo de Buses Escolares (SBRP) con flota heterogénea, en el cual se busca determinar las rutas a ser construidas que parten de una única escuela a recoger estudiantes para finalmente dejarlos en ella, considerando una flota de vehículos con capacidad y peso de vehículo no homogéneos; en donde el objetivo es minimizar el consumo de combustible en función del peso del vehículo, el peso de los estudiantes y la distancia recorrida. Esta investigación formula un modelo matemático para ser resuelto por un método exacto y propone un algoritmo metaheurístico basado en búsqueda tabú granular, el cual parte de una solución inicial generada por medio de la heurística algoritmo de ahorros de Clarke and Wright, aplica una nueva estrategia en la asignación de vehículos a las rutas y acepta soluciones infactibles que son penalizadas.

Posteriormente, se evalúa el rendimiento del algoritmo en un conjunto de instancias desarrolladas para el problema en particular y se comparan los resultados de tiempo y valor de la función objetivo con respecto a al método exacto, con el fin de comprobar la hipótesis de que la metaheurística búsqueda tabú granular genera soluciones de alta calidad en tiempos reducidos.

*Proyecto de Grado

** Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Ingeniería Industrial. Director: Javier Eduardo Arias Osorio. Codirector: Juan Pablo Orejuela Cabrera.

ABSTRACT

TITLE: MODEL OPTIMIZATION SOLUTION FOR SCHOOL BUS ROUTING (SBRP) WITH ENVIRONMENTAL FACTS BY MATHEURISTIC TABOO SEARCH GRANULAR*

AUTHOR: LÁZARO GONZÁLEZ, Paola Andrea**

KEYWORDS: GREEN, POLLUTION, MATHEURISTIC, SCHOOL BUS ROUTING PROBLEM, GRANULAR TABOO SEARCH

DESCRIPTION:

The present research is about School Bus Routing Problem (SBRP) with heterogeneous fleet which design routes to start at the only school to pick up students and then at the school. It has an heterogeneous fleet within different capacities and weight and the objective is minimize fuel consumption which take in account vehicle weight, students weight and distance traveled.

In this research develop a mathematical model to be solve by an exact method and propose an algorithm base on Granular Taboo Search, which stars at an initial solution created by Savings Algorithm by Clarke and Wright, gets a new strategy about vehicle assignment and accept unfeasible solutions within a penalty.

At the end evaluate the algorithm performance with a set of own instances compare time and value of the objective function between the exact method and the matheuristic with the final purpose to check the hypothesis out which is the matheuristic gets high quality solutions within short times.

*Bachelor Thesis

** Industrial University of Santander, Physical and Mechanical Engineering Faculty, Industrial and Business Studies Department, Industrial Engineering. Directed by: Javier Eduardo Arias Osorio. Co-directed by: Juan Pablo Orejuela Cabrera.

Introducción

El estudio del problema de rutas escolares se remonta a los años 60 cuando Rita Newton y Warren Thomas realizan la primera publicación acerca del tema, en donde relatan cómo se realizaba la planeación de las rutas de transporte de estudiantes a sus respectivas escuelas, la cual se hacía manualmente utilizando un mapa de la ciudad y un listado de los datos importantes, como se encuentra registrado en su artículo publicado en 1969, llamado “*Design of School Routes by Computer*”. Dicha investigación se desarrolló con dos objetivos específicos: el primero, disminuir el tiempo que tomaba generar las rutas a recorrer de los autobuses y el segundo, disminuir los costos administrativos en términos del número de personas en función de esa actividad.

Más de 40 años después, dicho tema de investigación sigue vigente bajo el nombre *School Bus Routing Problem* con la novedad del desarrollo de nuevos métodos y técnicas que permiten encontrar soluciones en un tiempo mucho menor y cada vez más cercanas al óptimo que permiten el cumplimiento de los objetivos planteados y las características definidas por el investigador, las cuales pueden ser: número de escuelas (una o múltiples escuelas), lugar de servicio (urbano o rural), alcance del problema (mañana, tarde o ambos), carga (si es permitido o no la carga mixta), tipo de estudiantes (aquellos que deben ser recogidos directamente en sus casas), origen y destino (el mismo o diferente), y flota (homogénea o heterogénea). En cuanto al número de objetivos, el problema consigue desarrollarse bajo un solo objetivo, bi-objetivo o multi-objetivo, dentro de los cuales se encuentran: minimizar el número de autobuses, minimizar la distancia total o el tiempo total recorrido, minimizar la distancia o el tiempo de la ruta más larga, minimizar la distancia que debe caminar cada estudiante de la casa a la parada, entre otros.

Dentro de las restricciones que el problema considera, se encuentran: capacidad del vehículo, distancia máxima permitida a caminar por cada estudiante desde la casa hasta la parada, máxima

distancia que cada autobús puede recorrer, ventanas de tiempo, cantidad mínima de estudiantes para abrir una parada, entre otras. Lo que permite que la combinación y variación de algunas o todas estas características conformen un modelo diferente del SBRP, de acuerdo a las necesidades de una situación en específico que requiere de atención por parte de la comunidad académica para ser estudiada.

Por otro lado, algunas de las metaheurísticas implementadas para la solución de problemas de optimización combinatoria, encontradas en la revisión de literatura fueron: Recocido Simulado (RS), Recocido Determinista (RD), Búsqueda Tabú (BT), Algoritmos genéticos (AG), Optimización de la Colonia de Hormigas (OCH) y Redes Neuronales (RN). Otros enfoques de solución encontrados fueron las soluciones a dos fases como la desarrollada por Thangiah y Nygard (1992) llamada GENROUTER, el cual como primera medida genera clusters de la locación de los estudiantes y seguido a esto, la segunda fase genera las mejores rutas para cada sector.

Otro tópico encontrado en la revisión de la literatura, fue la implementación de medidas que reducen de algún modo la contaminación ambiental por medio de características añadidas a modelos matemáticos como, por ejemplo, la planteada por Kramberger, Dragan y Prah (2013) en la cual desarrollan un modelo matemático en el que se minimiza la distancia recorrida, pues ellos determinan que al reducir la distancia recorrida como consecuencia se reduce la emisión de dióxido de carbono. Teoría sustentada con el cálculo de las emisiones de dióxido de carbono totales emitidas bajo la distancia a recorrer al final de la investigación.

En este orden de ideas, en el presente trabajo se busca desarrollar un modelo matemático que sea una variación del SBRP, con las siguientes características: modelo matemático con un solo objetivo; urbano como lugar de servicio o interurbano (en el caso de áreas metropolitanas), esto

en el contexto de ciudad; y como característica a involucrar en el modelo, las consideraciones ambientales, ya sea como parte del objetivo o de las restricciones. En esta investigación se implementa un procedimiento heurístico llamado método de los ahorros de Clarke y Wright para encontrar la población inicial que se ingresará para posteriormente desarrollar un algoritmo basado en la técnica Búsqueda Tabú Granular, lo que permitirá evaluar la eficiencia y eficacia del algoritmo, frente al método exacto con la aplicación de instancias propiamente desarrolladas, ya que el modelo cuenta con características diferentes a los modelos encontrados en la literatura.

Cumplimiento de objetivos

Tabla 1.

Cumplimiento de objetivos

Objetivos específicos	Cumplimiento
Realizar la revisión de literatura sobre el problema de ruteo de buses escolares y ruteo de vehículos con consideraciones ambientales.	Sección 4 y 5
Formular el modelo matemático del problema de diseño de rutas escolares que permita involucrar, entre otros, las consideraciones ambientales	Sección 7
Implementar la técnica búsqueda tabú granular para la solución del SBRP en el software Matlab	Sección 9
Evaluar los resultados obtenidos del modelo con instancias propias generadas.	Sección 10
Elaborar un artículo publicable que recoja los elementos relevantes de la investigación.	Apéndice F

1. Planteamiento del problema

En la revisión de literatura realizada se encontró que el SBRP, además de ser una variación del Location Routing Problem (LRP) es una variación del Vehicle Routing Problem (VRP), lo cual fue tomado como enfoque para este trabajo de investigación, pues permite que el SBRP en este caso se desarrolle con el único fin de diseñar rutas que parten de la escuela (única escuela) y lleguen a esta, ya que se definió que cada uno de las estudiantes serán recogidos en la puerta de su casa; puesto que como tipo de estudiantes a transportar se encuentran que son infantes¹ lo que quiere decir, que no pueden desplazarse hasta una parada fijada para varios estudiantes sin el acompañamiento de un adulto responsable. Es por eso que se dispone como parada para cada uno de los estudiantes el lugar de residencia (casa o conjunto residencial) de cada uno de ellos.

Por otro lado, como objetivo de formulación del modelo matemático se encuentra la adición de características que lo conviertan en un modelo ambiental, lo cual con base en la revisión de literatura sobre ruteo de vehículos con consideraciones ambientales, se observa que las condiciones ambientales en los modelos están representadas por medio de la función objetivo, la cual en algunos casos busca la minimización de las emisiones de CO₂ que son consecuencia del consumo de combustible que se genera en función de la distancia recorrida, el peso del vehículo y la carga total de este. Lo cual se observa que son las variables de interés de la presente investigación y tendrá como particularidad el que esta función descrita anteriormente sea lineal, también contará como variación que la carga del vehículo no será dada por productos, sino por el peso de los estudiantes a transportar en cada arco a recorrer.

¹ Infante: Niño que aún no ha cumplido los siete años de edad, según la RAE.

Adicionalmente, la aplicación de un método exacto para el problema del SBRP y la implementación de la técnica metaheurística Búsqueda Tabú Granular para encontrar la solución del modelo bajo diferentes instancias empleadas.

2. Justificación del problema

El estudio de los sistemas de transporte en las ciudades es de alta importancia, pues se realiza con el fin de encontrar alternativas que garanticen cortos tiempos de recorrido para los ciudadanos (Rodríguez, 2017). Esto con el fin de disminuir la congestión vehicular que va en aumento año tras año y atacar la baja movilidad en transporte público de los ciudadanos en las zonas urbanas cumpliendo con un alto nivel de servicio, entendido como la duración de la ruta más larga (Pacheco, Caballero, Laguna, & Molina, 2012).

Ahora bien, desde la perspectiva de transporte de estudiantes las rutas escolares hacen parte de los sistemas de transporte de las ciudades como lo menciona Rodríguez (2017), pues contribuyen en el aumento del parque automotor que recorre las ciudades, como se observa en las estadísticas generadas en el área metropolitana de Bucaramanga en la cuales se presenta que la cantidad de buses y busetas (tipo de automóvil utilizado generalmente para este fin) que se encuentran circulando es de 2.958 y 2.162, respectivamente (Dirección de Tránsito y Transporte del área metropolitana de Bucaramanga, 2017); lo que favorece al aumento del tráfico vehicular en las horas pico, ya que es el momento en que los estudiantes deben ser trasladados desde o hasta su respectivo colegio o escuela.

Adicionalmente, el calentamiento global producido por factores como la emisión masiva de gases, especialmente por la quema de combustibles fósiles; acción generada en gran medida por el transporte, pues según cifras el porcentaje de emisiones de CO₂ originadas por el transporte en todo el mundo para el 2014 fue de 20,449% (Banco Mundial, 2018); genera el interés desde la perspectiva del Green Transportation, término definido como el servicio de transporte que disminuye el impacto negativo en la salud y en el entorno natural (Bjorklund, 2011). Pues esto permite tomar medidas al respecto y efectuar un plan de acción, el cual permita que las emisiones

de contaminación no superen la capacidad de asimilación del ambiente. Además, como lo menciona el Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible en una de sus publicaciones titulada “Con movilidad sostenible Colombia podrá disminuir la contaminación del aire”, una movilidad inadecuada, así como conlleva impactos ambientales, también genera impactos sociales, que afectan altamente la calidad de vida de las personas.

Es por lo anterior que surge el interés de investigar y estudiar un modelo de transporte de personas con consideraciones ambientales bajo la vista de los problemas de optimización combinatoria clasificados como el *School Bus Routing Problem (SBRP)*, que permita el desarrollo de estrategias enfocadas a lograr el uso racional de los medios de transporte, especialmente el relacionado al transporte masivo de personas como lo es el transporte público, ya que responde adecuadamente a las necesidades de la investigación en desarrollo.

El modelo permitirá la aplicación de la técnica Búsqueda Tabú Granular para la generación de la solución del problema, lo cual ayudará en la evaluación de eficiencia y eficacia del algoritmo en la implementación de problemas tales como SBRP, ya que, Park y Kim (2010) se refieren a las metaheurísticas como mayormente usadas en el Vehicle Routing Problem (VRP) y relatan que en solo una baja proporción de investigaciones, estas han sido aplicadas en la solución del SBRP aunque se considera que generan soluciones de alta calidad en un tiempo razonable para problemas de optimización combinatoria en los cuales se aplican instancias grandes.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo de optimización para ruteo de buses escolares (SBRP) bajo consideraciones ambientales utilizando como técnica de solución la metaheurística búsqueda tabú granular.

3.2. Objetivos Específicos

- Realizar la revisión de literatura sobre el problema de ruteo de buses escolares y ruteo de vehículos con consideraciones ambientales.
- Formular el modelo matemático del problema de diseño de rutas escolares que permita involucrar, entre otros, las consideraciones ambientales.
- Implementar la técnica búsqueda tabú granular para la solución del SBRP en el software Matlab.
- Evaluar los resultados obtenidos del modelo con instancias propias generadas.
- Elaborar un artículo publicable que recoja los elementos relevantes de la investigación.

4. Revisión de la Literatura

El inicio de toda investigación científica requiere de la búsqueda de información relevante para la construcción de una base sólida en cuanto al tema de interés, por ende, la búsqueda e implementación de una actividad estructurada que permita que este paso inicial se desarrolle correctamente y con información verídica, es fundamental. Por ello, para asegurar la calidad del producto generado se determinó la aplicación de la revisión de literatura, puesto que permite una estructura organizada para realizar este paso inicial.

4.1. Análisis bibliométrico

Para el proyecto se realizó una búsqueda avanzada de la literatura existente en la base de datos Web of Science suministrada por la Universidad Industrial de Santander. La búsqueda se dividió en dos, puesto que el primer objetivo determinado es la revisión de literatura del problema de ruteo de buses escolares y el ruteo de vehículos con consideraciones ambientales, por ello, se construyeron dos ecuaciones de búsqueda como se observa a continuación.

4.1.1. Problema de ruteo de vehículos con consideraciones ambientales. El análisis se realizó a partir de la siguiente ecuación de búsqueda, la cual arrojó un total de 35 artículos que fueron analizados con las herramientas bibliométricas proporcionadas por la base de datos WOS.

TI=(green or environment or fuel or pollution) AND
TI=(routing or route* or schedulin*) AND TI=(vehicle or bus or transportation)
AND TI=(matheuristic or algorithm or minimizing or objective or programming)*

En la Figura 1 se muestra el número de publicaciones por año, en el cual se observa que estas se han realizado desde el 2006 hasta el presente año (2018). También se puede ver que en los años comprendidos entre 2006 y 2012 fue baja la frecuencia de publicación, ya que el número máximo

por año fue de 1; comportamiento que cambió a partir del 2013 donde la frecuencia aumentó a un máximo de 15 artículos para el año 2017. Otro aspecto a destacar es que el 48% de las publicaciones se generó únicamente entre el año 2017 y 2018, lo cual muestra un aumento significativo en el número de desarrollos generados en los últimos años.

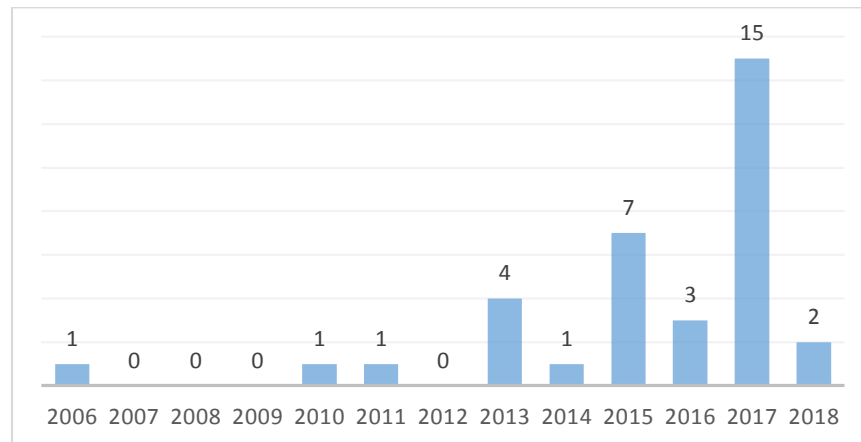


Figura 1. Publicaciones realizadas por año. Adaptado de Web of Science (2018).

En la figura 2 se observa el número de publicaciones por autor, en orden de mayor a menor de cantidad de productos desarrollados. Para la búsqueda se relacionó un total de 95 autores, de los cuales únicamente se muestran los primeros 36; entre estos resaltan Akasoy A, Chen P, Cimen M, Ene S, Konak A, Kucukoglu I, Niu Yy, Oxturk Nm, Soysal M, Xiao Jh, Xiao Yy y Yanh Zh ya que tienen el mayor número de publicaciones, el cual es 2. Los 83 autores restantes cuentan con una publicación respectivamente.

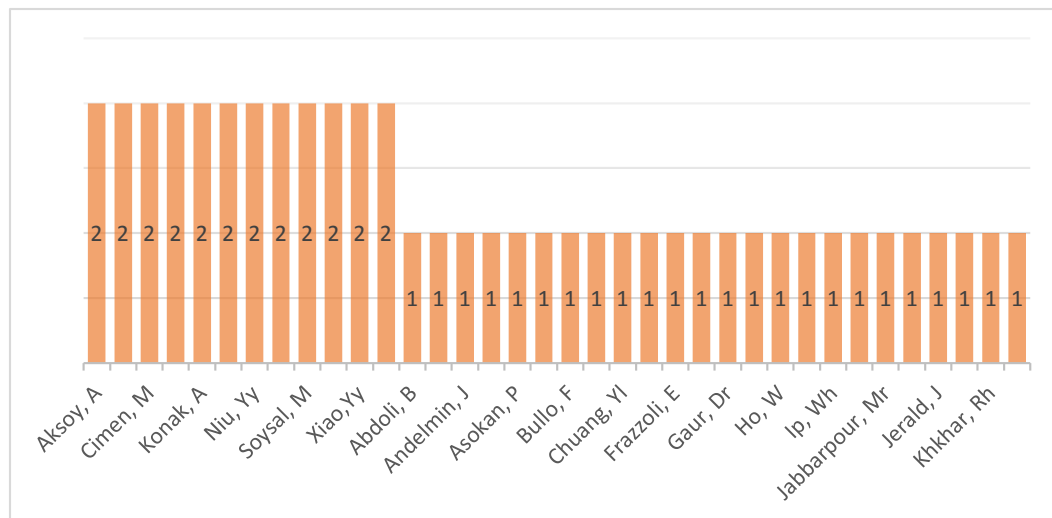


Figura 2. Número de publicaciones por autor. Adaptado de Web of Science (2018).

En el análisis de la Figura 3 se encuentran las regiones o países que mayor participación han tenido sobre el tema, los cuales son: China, USA y Turkía con 28%, 14% y 9% de publicaciones respectivamente. También se observa en la Figura 3, otros países o regiones participes de estas publicaciones como lo son Irán e India, con 3 publicaciones cada uno. Taiwán, Corea del Sur, Malasia, Grecia y Australia con un 5% de publicaciones respectivamente. Finalmente, con un desarrollo sobre el tema de la investigación entran Suecia, Singapur, Alemania, Finlandia y Canadá.

En el caso de China, nación que cuenta con el mayor número de publicaciones, se infiere que el interés de investigar sobre ruteo con consideraciones ambientales se relaciona con los altos índices de contaminación que se presentan allí, por lo que se encuentra la necesidad de investigar acerca del tema para tomar medidas al respecto.

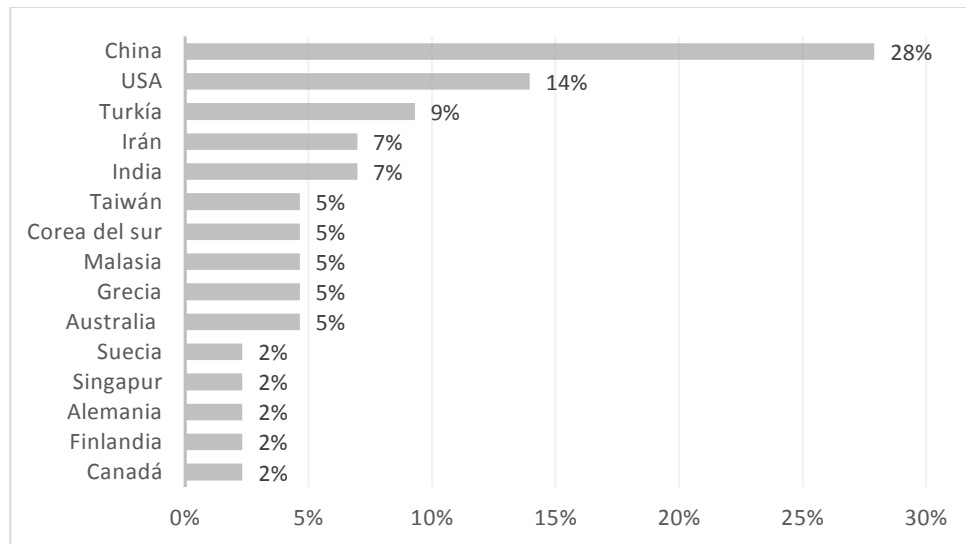


Figura 3. Número de publicaciones por país o región. Adaptado de Web of Science (2018).

4.1.2. Problema de ruteo de buses escolares. La segunda búsqueda se planteó con el objetivo de realizar la exploración acerca del tema central de la investigación, lo cual se efectuó con la siguiente ecuación de búsqueda.

TI=(school) AND TI=(routing or route*) AND TI=(vehicle or bus or transportation)
AND TI=(matheuristic or algorithm or minimizing or objective or programming)*

Para este tema de investigación se observa una baja frecuencia de publicación, puesto que el total de resultados arrojados es de 9, los cuales fueron publicados desde el año 2002 hasta el año 2017. En la Figura 4 se puede ver que los años que presentaron mayor cantidad de publicaciones fueron los años 2016 y 2017 con 3 y 2 publicaciones respectivamente. También se observa que, en los años 2002, 2007, 2011 y 2013 se publicó un producto sobre el tema de ruteo de buses escolares por año.

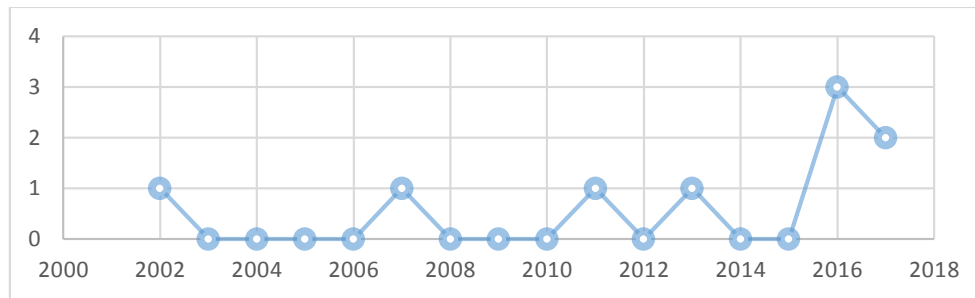


Figura 4. Publicaciones realizadas por año. Adaptado de Web of Science (2018).

Se encontraron 25 autores relacionados a la búsqueda, de los cuales Conceicao S, Laguna M, Lima F y Pereira D se destacan debido a que cuentan con 2 publicaciones a su nombre, la mayor cantidad de resultados por autor. Como se puede observar en la figura 5, los 21 personajes restantes cuentan únicamente con una publicación relacionada a su nombre.

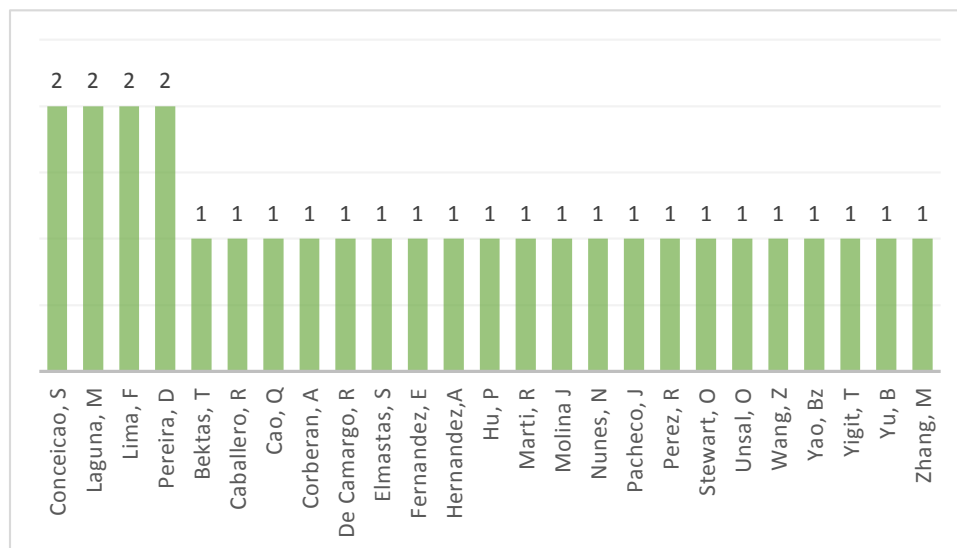


Figura 5. Número de publicaciones por autor. Adaptado de Web of Science (2018).

Para esta búsqueda se encuentra la participación de américa del sur en las investigaciones desarrolladas alrededor del tema principal a investigar. En la figura 6 se observa que en este caso quien más aportes ha realizado sobre el problema de ruteo de buses escolares es EEUU con un aporte del 25% del total de resultados, seguido por el 17% de publicaciones hecho por Brasil,

España y Turkía. Finalmente, China, México y Canadá entran dentro de los países que han publicado con un 8% del total.

En este caso se puede observar la contribución de algunos países hispano hablantes, como lo son México y España, y de américa del sur por parte de Brasil. También se puede observar que en este caso China ha generado un bajo número de desarrollos en el tema, a diferencia de los aportes hechos en el tema de ruteo de vehículos con consideraciones ambientales.

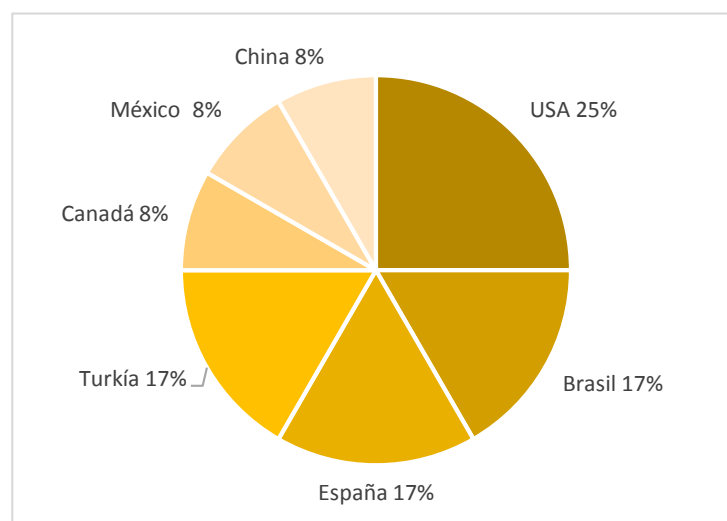


Figura 6. Número de publicaciones por país o región. Adaptado de Web of Science (2018).

4.2. Análisis preliminar de la literatura

El SBRP se encuentra clasificado en la literatura como un problema de optimización combinatoria, el cual busca diseñar rutas para una flota de buses escolares con el objetivo de minimizar el tiempo y los costos de transporte (Corberán, Fernández, Laguna, & Martí, 2000) al prestar el servicio de transporte de estudiantes hacia sus respectivas escuelas o colegios en áreas rurales o urbanas. El problema está compuesto por un conjunto de estudiantes, escuelas, calles, vehículos y paradas, y el tema general de investigación puede ser dividido en cinco subproblemas,

los cuales son: preparación de datos, selección de paradas, generación de rutas, ajuste de ventana de tiempo y horarios de rutas (Desrosiers, Ferland, Rousseau, Lapalme, & Chapleau, 1981).

Cada uno de los subproblemas mencionados anteriormente, consisten en una serie de procedimientos mencionados a continuación:

1. Preparación de datos: en esta etapa se definen los tipos de datos que se utilizarán, por ejemplo, la red de calles a utilizar, los vecindarios que se agruparán, los estudiantes que viven allí y los parámetros a usar.

2. Selección de paradas: es la elección de un conjunto de paradas ubicadas sobre la red de calles definidas anteriormente por medio de la aplicación de heurísticas, ya que este paso se encuentra clasificado como una estrategia de location-allocation-routing (LAR) o allocation-routing-location (ARL) para el problema desarrollado en áreas urbanas; puesto que, si el problema es desarrollado en áreas rurales las paradas serán la casa de los estudiantes y no será necesario hacer uso de métodos o técnicas para encontrarlas (Laporte, 1988).

3. Generación de rutas de buses: en este paso se desarrolla el algoritmo que va definir las rutas que cumplen con las restricciones añadidas al problema.

4. Ajuste de ventana de tiempo: una vez obtenidas las rutas óptimas, algunos problemas son estudiados con restricciones de tiempo los cuales son, la hora de apertura y la hora de salida de la escuela. Para esto, es desarrollado un modelo de programación mixta entera (MIP) y es usualmente resuelto mediante un enfoque de ramificación y corte, el cual permite maximizar el número de rutas y minimizar el número de buses a usar.

5. Horario de ruta: finalmente, se define la hora de partida de cada una de las rutas y la secuencia en la cual se debe realizar (Park & Kim, 2010).

Al respecto, se encuentra que no es regla definir la investigación bajo los cinco pasos mencionados anteriormente, sino que de lo contrario algunos investigadores desarrollan el problema con su propia versión, la cual puede ser: dividir el problema sólo en dos pasos, por ejemplo, preparación de datos y selección de paradas (Sarubbi, Mesquita, Wanner, Santos, & Silva, 2016), pues depende del objetivo que se busca con la investigación. También, se puede ver en la literatura que el problema puede ser multi-objetivo o bi-objetivo, como es realizado en algunos casos en donde los objetivos son: minimizar el tiempo de servicio y al mismo tiempo, minimizar los costos operacionales según Pacheco, Caballero, Laguna & Molina (2013).

Así mismo, la solución de este tipo de problemas no tiene estipulado un método exacto de solución o un método específico, sino que al contrario existe una gran variedad de ellos; punto que se puede observar en la evolución de las heurísticas aplicadas a lo largo del tiempo en investigaciones anteriores; como lo son el procedimiento del ahorro, el método del intercambio o el basado en la solución del problema de asignación generalizada, hasta la metaheurística basada en algoritmos genéticos, recocido simulado, búsqueda tabú, búsqueda local guiada, optimización de colonias de hormigas y búsqueda de vecindad variable (Pacheco et al., 2012), entre otros, mencionados en diferentes investigaciones.

En cuanto al tema medio ambiental de importancia en la investigación se encuentra información que propende por la creación de medidas que permitan la disminución de contaminación del aire, como por ejemplo “la Política de Prevención y Control de la contaminación del aire”, la cual tiene como objetivo general: “impulsar la gestión de la calidad del aire en el corto, mediano y largo plazo, con el fin de alcanzar los niveles de calidad del aire adecuados para proteger la salud y el bienestar humano en el marco del desarrollo sostenible” (Minambiente, 2017). Puesto que en lo que en Colombia respecta, según una publicación realizada por el Ministerio de Ambiente y

Desarrollo Sostenible el 19 de septiembre del 2017, el sector transporte generó 22 millones de toneladas de CO₂ de las emisiones totales del país, lo que representó un 10% en el año 2010 y se proyectó una emisión de 9.72 millones de toneladas en 2030, las cuales serán un 20% de las emisiones proyectadas por el uso de automotores.

Por otro lado, la resolución 2604 de 2009, la cual habla sobre los combustibles limpios y límites máximos de emisión en prueba dinámica para vehículos de prestación de servicio de transporte de pasajeros, en lo que atañe al tema de investigación considera “es necesario establecer niveles máximos de emisión permisibles para fuentes móviles que se vinculen a la prestación de servicio de transporte público de pasajeros que operen con combustibles limpios” (Resolución 2604, 2009); resolviendo, que según el artículo 5 de dicha resolución se consideran como combustibles limpios (para efectos de lo previsto en la Ley 1083 de 2006): el hidrógeno, el gas natural, el gas licuado de petróleo, el diésel hasta de 50 ppm de azufre, mezclas de diésel con biodiesel (no debe superar 50 ppm de azufre), gasolina hasta de 50 ppm de azufre y las mezclas de gasolina con alcohol carburante o etanol anhidro desnaturalizado (no debe superar 50 ppm de azufre).

El capítulo II explica la clasificación de las fuentes móviles para la medición de cada uno de estos, respectivamente. El capítulo III establece los límites de emisión permisibles para fuentes móviles en prueba dinámica evaluados mediante los ciclos de prueba la Unión Europea New European Driving Cycle (NEDC)² y los ciclos de prueba de los Estados Unidos Environmental Protection Agency (EPA)³, los cuales los clasifican en: vehículos livianos y medianos con motor diésel, vehículos livianos y medianos con motor ciclo diésel, vehículos pesados con motor ciclo diésel y vehículos pesados motor ciclo Otto accionados con gas natural o gas licuado de petróleo.

² New European Driving Cycle (NEDC): test de homologación de consumos, que hacen los fabricantes para dar datos provisionales, los cuales se validan en laboratorios independientes.

³ Environmental Protection Agency (EPA): agencia del gobierno encargada de establecer los estándares de consumos de combustibles y emisiones de gases en Estados Unidos.

Lo mencionado previamente sobre SBRP, la información acerca de la contaminación del aire y los niveles de emisión de gases permitidos para las diferentes fuentes móviles, generan el interés en el desarrollo de modelos de ruteo de vehículos que estudian las diferentes alternativas señaladas anteriormente, que converjan en un mismo objetivo, el cual es la disminución de la contaminación del aire.

5. Marco de antecedentes

En el año 2013 se desarrolla la investigación titulada “*A green capacitated vehicle routing problem with fuel consumption optimization model*” por los autores Küçükoğlu, Ene, Aksoy y Öztürk, la cual es realizada debido a la necesidad de generar herramientas para que las empresas se desenvuelvan en un entorno cada vez más competitivo, puesto que las industrias deben ir adoptando estrategias en sus cadenas de abastecimiento que respondan al cumplimiento de la responsabilidad social y se adapten a las regulaciones existentes sobre temas medio ambientales.

El modelo se plantea como un *Green Capacitated Vehicle Routing Problem* (G-CVRP por sus siglas en inglés) y consiste en un grafo directo $G = \{V, A\}$, donde V es el conjunto de clientes $V = \{0, 1, \dots, n\}$, el vértice 0 representa el depósito y A es el conjunto de arcos. Cada uno de los clientes i , tiene una demanda d_i y los arcos $(i, j) \in A$ tiene un costo asignado C_{ij} , que representa el costo del viaje del nodo i al nodo j y un conjunto de vehículos K , cada uno con capacidad C .

$$z = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^K a_1 * c_{ij} * X_{ijk} + K * a_2 * y_o + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K a_2 * X_{ijk} * y_i + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^K b * X_{ijk} \quad (1)$$

Donde, $a_1 = 0.0589$, $a_2 = 0.000991$ y $b = -1.5$, X_{ijk} es la variable binaria (1 si el vehículo k atraviesa el arco de i a j y 0 de lo contrario), K es la cantidad de vehículos disponible, y_o es la carga del vehículo en el depósito y y_i es la carga del vehículo en el cliente i . La ecuación 1 se formuló con la ayuda del software Minitab, puesto que resulta de la regresión lineal entre la carga, la distancia y el combustible consumido para 2020 ejemplos de diferentes distancias y cargas para vehículos en el rango de 1.300 y 1.400 kg de peso y de 0 a 100 km por distancia, la cual arrojó un valor de $R^2 = 95.7\%$.

Esta función objetivo busca minimizar el consumo de combustible, lo cual está directamente relacionado con las emisiones de CO₂ y estuvo sujeta a las siguientes restricciones: cada vehículo debe visitar el depósito, cada cliente debe ser visitado una sola vez y la demanda no debe superar la capacidad del vehículo. Los resultados muestran que el G-CVRP provee una reducción considerable en la cantidad de combustible consumido y se observa también, que minimizar la distancia recorrida no significa una disminución considerable en el consumo de combustible.

En un artículo generado por Zuñiga y González, para la Universidad Autónoma de Chihuahua titulado “Un algoritmo GRASP para un problema de rutas de vehículos escolares aplicado al transporte de personal de una empresa de manufactura” se relata el desarrollo de un algoritmo GRASP en un contexto real, en el cual se busca transportar no estudiantes, sino personal de una empresa en la ciudad de Chihuahua, México. El problema se desenvuelve en un contexto en el cual el servicio de transporte se presta a 643 trabajadores, con variación en el número total debido a al fenómeno de rotación de personal que se presenta en dicha empresa. Para este caso específico se aplicó el algoritmo GRASP, el cual es un proceso iterativo en donde primero se construye una solución y después se mejora mediante búsqueda local. En esta investigación los resultados arrojaron una reducción del 29,63% del número de rutas actuales y una reducción del número de kilómetros recorridos por todas las rutas en un 30,99%, al mismo tiempo en que se mantuvo la calidad de servicio para los trabajadores.

Para el mismo año, se publica el artículo llamado “*Design and development of a hybrid artificial bee colony algorithm for the environmental vehicle routing problem*” en el que consideran un modelo VRP con influencia ambiental, tal y como lo relatan los autores Shuzhu Zhang, C.K.M Lee et al. De acuerdo con el enfoque de logística verde, punto que se considera de influencia directa en el ambiente, ya que la logística consta de la siguiente serie de decisiones:

ubicación de depósitos, abastecimiento de materia prima, gestión del transporte, entre otros; donde este último, se declara como una fuente grande de polución en las actividades logísticas, por lo que atacarlo desde el diseño de las rutas de los vehículos genera un control y aporte a la contaminación del ambiente por parte de estos. En este orden de ideas, el *Environmental Vehicle Routing Problem* permite la generación de rutas con el objetivo de minimizar el impacto ambiental en términos de minimizar las emisiones de CO2 en función de la distancia recorrida, la carga del vehículo y la velocidad del vehículo, como se observa a continuación en la descripción del problema.

El problema consta de un único depósito $i = 0$, donde todos los vehículos m con capacidad homogénea Q , salen y llegan al mismo depósito, visitando una serie de nodos que representan los clientes ($i = 1, 2, \dots, n$) y que contienen información no direccional $d_{ij} = (i, j \in V, i \neq j) = d_{ji}$. La demanda de cada cliente es $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ y el costo asociado a cada arco es $C_{ij} = \alpha * d_{ij}$, donde α es el coeficiente de correlación entre el costo y la distancia recorrida entre arcos. El modelo considera la siguiente serie de restricciones: no exceder la capacidad máxima del vehículo, la cantidad de vehículos a usar no puede ser mayor al número de vehículos disponibles, cada cliente solo puede ser visitado una vez, cada nodo debe ser visitado por un único vehículo y debe garantizarse la conectividad de dicho nodo, la carga debe ser acumulativa y al final debe ser 0. El modelo matemático se formula como bi-objetivo, en el cual se minimiza el costo total de la distancia recorrida (Ecuación 2) y las emisiones de CO2 (Ecuación 3) en función de la carga y la distancia recorrida entre cada arco (i, j) , como se observa a continuación.

$$\min z_1 = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha * d_{ij} * X_{ijk} \quad (2)$$

$$\min z_2 = \sum_i \sum_j \sum_k CER * \left(\rho_o + \frac{\rho^* - \rho_o}{Q} * q_{ijk} \right) * d_{ij} * X_{ijk} \quad (3)$$

Donde CER es la tasa de emisión de CO₂, ρ_o es la tasa de consumo de combustible del vehículo sin carga, ρ^* es la tasa de consumo de combustible del vehículo con carga máxima, q_{ijk} carga del vehículo en el arco (i, j) , $i, j \in V, i \neq j$ y X_{ijk} es la variable binaria. Para la solución del modelo los autores desarrollaron un algoritmo híbrido de colonia de abejas artificial (ABC por sus siglas en inglés), el cual compararon con el algoritmo ABC original con un resultado del 5% de mejor desempeño. También, observaron que el EVRP provee información práctica para la gestión de operaciones en logística verde.

La más reciente investigación titulada “Estudio y desarrollo de un modelo matemático para el Problema de Rutas Escolares (SBRP)” desarrollada en la Universidad Industrial de Santander en el año 2016 por Bustos y Pinilla para optar por el título de Ingeniera Industrial, presenta un modelo de programación lineal entera binaria para el SBRP, el cual se generó para una única escuela en zona urbana y con capacidad homogénea para la flota de buses. El modelo tiene como objetivo minimizar el número de sub-paradas seleccionadas cumpliendo con la restricción de la distancia permitida de caminar hacia una parada, para finalmente generar una serie de rutas minimizando la distancia total recorrida por los autobuses. En la solución se aplicaron tres métodos, uno exacto y dos aproximados, puesto que primero se generó una solución óptima empleando el método exacto el cual es ramificación y acotamiento, mejor conocido como *Branch and Bound*, y finalmente se aplicó el algoritmo ARPRE, el cual está basado en técnicas heurísticas y metaheurísticas tales como: el algoritmo de ahorros de Clarke & Wright y la metaheurística búsqueda tabú; con lo cual se observa que el algoritmo es un buen método de solución, ya que presentó sólo un 3% más en

promedio de variación con respecto a la solución óptima y un tiempo computacional 99.7% más rápido.

En la investigación realizada por Rodríguez (2017) titulada “Optimización del Problema de Ruteo y de Programación de Buses Escolares con Restricciones de Congestión de Tráfico para Políticas de Rutas Compartidas (*Mixed-Load*) e independientes (*Single-Load*)”, para optar por el título de magister en Ingeniería Industrial de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito; se encuentra el desarrollo del modelo SBRP para la ciudad de Bogotá, Colombia. El cual tiene como objetivo estudiar el impacto de generar estrategias colaborativas de transporte de estudiantes para el contexto de la zona norte de la ciudad de Bogotá, a través del uso de modelos de optimización considerando rutas independientes (*Single Load*), en primer lugar y finalmente, analiza la estrategia de rutas compartidas (*Mixed Load*). Para las dos estrategias el autor propuso una formulación matemática que representa el sistema cuando hay tráfico al momento de atravesar la autopista y le permitió asimismo generar la secuenciación ordenada de buses, aplicando un método exacto y uno heurístico.

De esta investigación se presenta como resultado final, que la aplicación de una estrategia de rutas compartidas genera mejores resultados, puesto que en comparación con la estrategia de rutas independientes la reducción del número de buses fue del 25% para el método exacto y 17% para el método heurístico, lo cual ayuda a la reducción de congestión vehicular y reducción de tiempos de viaje. Finalmente, dada la complejidad del problema (*NP-Hard*) el desarrollo de una heurística permitió reducir los tiempos de ejecución respecto al método exacto en un 99%. El autor plantea como recomendación final, generar experimentos con instancias más grandes, para así de esa forma probar la eficiencia de la heurística diseñada en sistemas cercanos a la realidad, de igual manera plantea contemplar investigaciones futuras con estudiantes de necesidades especiales,

tiempos de viaje y de tráfico estocásticos, flota heterogénea de buses y una función multi-objetivo que busque minimizar costos al mismo tiempo en que minimiza el impacto ambiental generado por los buses.

Estudios realizados en torno al *Vehicle Routing Problem (VRP)* consideran que las emisiones de vehículos de transporte es uno de los problemas ambientales más importantes (Soysal & Çimen, 2017), lo que ha aumentado la creciente conciencia ambiental, la cual resulta en la necesidad de tener herramientas de soporte que puedan ser usadas al tomar decisiones amigables ambientalmente en la gestión logística (Soysal, Bloemhof-Ruwaard, Meuwissen, & Van der Vorst, 2012). Lo anterior motivó el desarrollo en el año 2017 de la investigación titulada “*A simulation based restricted dynamic programming approach for the Green time dependent vehicle Routing Problem*” en la que consideran el problema del VRP como un *Time Dependent Capacitated Vehicle Routing Problem* (TDCVRP por sus siglas en inglés), al cual los autores Soysal y Cimen le atañen consideraciones ambientales, por medio de la medición de las emisiones de CO₂.

El problema consta de un centro de distribución de medicamentos en Turquía, que satisface a un conjunto de farmacias con sus propios vehículos y la mayoría de estas están ubicadas en zonas urbanas, lo que los ata al alto tráfico dependiendo de la hora del día. El modelo se define como un grafo completo $G = \{V, A\}$, donde $V = \{0, 1, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos; los nodos $i \in V \setminus \{0\}$ corresponde a los clientes quienes están geográficamente dispersos y el nodo 0 corresponde al depósito. El tiempo de viaje de cada vehículo depende de la distancia y la velocidad del vehículo que cambia de acuerdo a la hora de inicio del viaje y el arco que recorra, la velocidad del vehículo es libre en arcos no congestionados $(i, j) \in A \setminus A_c$ y en arcos congestionados la velocidad será diferente S_l donde $l \in T = \{1, 2, 3, \dots, T_e\}$ dependiendo de la zona

de tiempo T en que viaje el vehículo, en último lugar el resto de los arcos $(i, j) \in A \setminus A_C$ se definen como no congestionados y la velocidad f es constante.

Los autores aplican en el modelo COPERT2⁴, la cual calcula la cantidad de combustible consumida $F(g/km)$ al viajar un kilómetro a velocidad constante $v (km/h)$, por medio de la siguiente formula:

$$F = \frac{a + cv + ev^2}{1 + bv + dv^2} \quad (4)$$

Donde a, b, c, d y e son parámetros ajustados a los diferentes tipos de vehículos y v es la velocidad del vehículo. La metodología empleada para la formulación de la programación dinámica fue la basada en Bellman (1962) y Held & Karp (1962) para el problema del agente viajero e incluye dos pasos, los cuales son: definición del TDCVRP para múltiples vehículos y convertir el mTSP en TSP mediante la realización de una transformación. La investigación revela que la simulación del algoritmo desarrollado muestra un costo 2.3% más bajo con unos tiempos de computación 93.1% más cortos en promedio, en comparación con la programación dinámica restringida clásica. También muestra que, se obtiene un 2.3% de beneficio en el total de las emisiones como efecto del periodo de tráfico y se puede obtener un 0.9% de beneficio en el costo total si los vehículos inician su recorrido después del periodo de alta congestión. Finalmente, definen una serie de indicadores, los cuales fueron: número de vehículos, distancia total recorrida, total de emisiones, tiempo total de viaje, costo total de combustible, costo total del viaje y costo total del ruteo, lo que resulta en una herramienta para la toma de decisiones en la gestión logística.

⁴ COPERT2: metodología para el cálculo del consumo de combustible (Mellios, Hausberger, Keller, Samaras, & Ntziachristos, 2011).

Según el Diccionario de la Real Academia Española (2019) “antrópico o antropogénico” significa producido o modificado por la actividad humana, lo que quiere decir que el término *Polución antropogénica* significa polución producida por la actividad humana; tópico que ha forzado la economía global al cambio y a abordar las inquietudes socio-ambientales con el control efectivo de las emisiones de carbono generadas directamente o como producto de las industrias u organizaciones (Mohammed, Hassan, Selim, & Syed, 2017). Debido a que el transporte de carga es uno de los mayores generadores de emisiones de CO₂, como ya se mencionó anteriormente, la tendencia en pro del transporte verde se ha ido enfocando en los siguientes aspectos: tecnología en el motor, consumo de combustible y plan de distribución. En este orden de ideas, la investigación titulada “*Design and development of a hybrid ant colony-variable neighbourhood search algorithm for a multi-depot green vehicle routing problem*” y desarrollada por Jabir, Panicker y Sridharan en el 2017, de acuerdo a su enfoque de estudio busca atacar las altas emisiones de CO₂, por medio del desarrollo de tres modelos independientes de ruteo de vehículos multi-depósito, los cuales cuentan con las siguientes características: Modelo 1. es el clásico MDVRP donde se busca minimizar la distancia recorrida usando la menor cantidad de vehículos, Modelo 2. es el MDVRP donde se busca minimizar el costo de las emisiones de CO₂ emitidas por los vehículos y el Modelo 3. Es el MDVRP con la combinación de los dos objetivos mencionados previamente.

El problema considera depósitos y camiones con capacidad limitada, una flota de vehículos homogénea con capacidad, velocidad y características de emisión de CO₂ similares. También, se considera el costo como la división de los costos fijos y costos variables, donde el costo variable se calcula con los gastos derivados por la distancia recorrida y el combustible consumido, y el costo fijo son los gastos como: el arriendo del vehículo, mantenimiento, salario del conductor,

entre otros. Las funciones objetivo diseñadas para cada uno de los tres modelos, son las observadas a continuación.

$$\min z = \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} X_{ijv} I_{ij} C_{var} + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+n} X_{ijv} C_{fix} \quad (5)$$

$$\min z = \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} I_{ij} P_{CO2} W_{CO2} V_{eff} W_{ijv} W_p + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} X_{ijv} I_{ij} P_{CO2} W_{CO2} V_{eff} \frac{W_{curb}}{k} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} X_{ijv} I_{ij} C_{var} + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+n} X_{ijv} C_{fix} \\ & + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} I_{ij} P_{CO2} W_{CO2} V_{eff} W_{ijv} W_p \\ & + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} X_{ijv} I_{ij} P_{CO2} W_{CO2} V_{eff} \frac{W_{curb}}{k} \end{aligned} \quad (7)$$

Donde, X_{ijv} es la variable binaria (1 si el vehículo v viaja del nodo i al nodo j y 0 de lo contrario), I_{ij} es la distancia del nodo i al nodo j , C_{var} es el costo variable, C_{fix} es el costo fijo, P_{CO2} precio promedio por unidad de peso de CO2, W_{CO2} cantidad de emisiones de CO2 por litro de combustible consumido, V_{eff} cantidad de combustible consumido por unidad de distancia por unidad de peso del vehículo, W_{ijv} cantidad de peso que carga el vehículo v del nodo i al nodo j , W_p peso de cada producto, W_{curb} peso neto promedio por vehículo y k relación entre el volumen

del vehículo y el peso en el vacío. La ecuación 5 indica la función objetivo del modelo 1, que busca minimizar el costo total de viaje de todas las rutas; la ecuación 6 es la función objetivo del modelo 2, donde se minimiza el costo del total de emisiones de CO₂ emitidas por peso y distancia recorrida; y la ecuación 7 representa la función objetivo del modelo 3, en el cual se consideran los dos objetivos (ecuación 5 y 6) en una misma función.

Los tres modelos independientes considerados en la investigación contienen las mismas restricciones, las cuales son: no se puede viajar de depósito a depósito, el origen y el destino no pueden ser iguales, cada cliente solo puede ser atendido por un vehículo, cuando un vehículo entra a un nodo debe salir de este, la cantidad de arcos que salen del depósito deben ser igual a los que entran, cada vehículo debe iniciar su ruta en un depósito, cada vehículo debe llegar al depósito vacío, la carga mínima del camión debe ser la demanda del nodo destino, la carga máxima del camión debe ser la diferencia entre la carga máxima del vehículo y la demanda del nodo destino, y el depósito no debe superar su capacidad. Lo que se realiza con los tres modelos independientes es una comparación de las tres soluciones, para encontrar la variación del modelo que mejor resultados arroje, en orden de cumplir el objetivo mencionado.

El objetivo de la investigación es integrar el objetivo de minimizar los costos y las emisiones de CO₂ en una única ecuación, con el desarrollo de un modelo de programación lineal con soluciones para pequeñas instancias por medio del software Lingo Solver, soluciones para pequeñas y grandes instancias usando la técnica de solución ACO y finalmente, soluciones para grandes instancias utilizando la técnica ACO integrada con búsqueda variable de vecindarios. Como resultado, la técnica utilizada para instancias grandes genera soluciones cercanas a la óptima en tiempos razonables, por otro lado, se observa una mejora del 8% en el total de costos comparando el ACO-VNS con el ACO.

En el año 2017, Wang, Shao y Zhou desarrollan una investigación llamada “*Matheuristic for a two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental considerations in city logistics service*” con el fin de darle solución a los dos niveles de ruteo requeridos, debido a que las emisiones del motor de los vehículos de carga se han convertido en uno de los principales actores contaminantes del aire y los gobiernos se han visto en la necesidad de crear medidas que protejan el medio ambiente, por lo que han introducido restricciones legales que prohíben la entrada de vehículos de gran tamaño y carga pesada a las zonas urbanas de las ciudades. Esto ha generado un cambio en las operaciones logísticas de las industrias, en el sentido en que los depósitos deben ser localizados en áreas circundantes a las ciudades y se deben ubicar instalaciones intermediarias cerca a los clientes, de manera que los vehículos de carga pesada se desplacen del depósito hasta las instalaciones intermediarias sin violar las restricciones de movilidad y de las instalaciones se asignen vehículos de menor tamaño, por ende, de menor capacidad que realizaran el transporte hasta los clientes, lo que conlleva a un ruteo a dos niveles.

El 2E-CVRP-E se define como un grafo directo $G = \{N, A\}$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. El conjunto N está compuesto de tres subconjuntos: el depósito $N_0 = \{0\}$, las instalaciones intermediarias $N_s = \{1, 2, \dots, n_s\}$ y los clientes $N_c = \{n_s + 1, n_s + 2, \dots, n_s + n_c\}$. Del mismo modo, el conjunto de arcos A consiste en tres subconjuntos: los arcos que conectan el depósito con las instalaciones $A_1 = \{(i, j): i, j \in N_0 \cup N_s\}$, los arcos de flujo libre A_2 y los arcos congestionados A_2' que conectan las instalaciones y los clientes $A_2 \cup A_2' = \{(i, j): i, j \in N_s \cup N_c, (i, j) \notin N_s \times N_s\}$. Un conjunto de vehículos homogéneos de primer nivel $K_1 = \{1, 2, \dots, K_1\}$ con capacidad Q_1 ubicados en el depósito, los cuales completan la entrega de los productos antes de que inicie la entrega hacia los clientes y estos vehículos pueden visitar más de una vez las instalaciones intermediarias. También, existe un conjunto de vehículos $K_2 =$

$\{1, 2, \dots, K_2\}$ con capacidad Q_2 , que pertenecen al segundo nivel, es decir, son los vehículos que salen de las instalaciones hacia los clientes. Cada cliente i tiene una demanda q_i , un tiempo de servicio st_i y solo pueden ser visitados una vez por un único vehículo de segundo nivel. La distancia entre el nodo i y el nodo j esta dada por d_{ij} , y el costo por unidad de carga en las instalaciones s es b_s .

Dado que los autores encuentran que la velocidad del viaje y el peso del vehículo son factores que afectan el consumo de combustible y como consecuencia del consumo de combustible las emisiones de CO₂, desarrollan un modelo matemático basados en los dos niveles de ruteo y en el que buscan minimizar el total de combustible consumido, como se observa a continuación.

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{(i,j) \in A} \sum_{v \in K_1} \left(\lambda \left(K * N_e * V * \frac{d_{ij}}{f_1} * X_{ijv} + \lambda * \beta * d_{ij} * f_1^2 * X_{ijv} + \gamma * \alpha \right. \right. \\ & \left. \left. * (\mu_1 * X_{ijv} + I_{ijv}) * d_{ijv} \right) \right) p \\ & + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{v \in K_1} w * \frac{d_{ij}}{f_1} * X_{ijv} + \sum_{s \in N_s} T_s * b_s + \sum_{r \in R} C_r * Y_r \end{aligned} \quad (7)$$

Donde $\lambda = \zeta / \kappa \psi$ (ζ es la relación masa-combustible-aire, κ es el valor calorífico de un combustible diésel típico y ψ es el factor de conversión de gramos a litros), N_e es la velocidad del motor, V es el desplazamiento del motor, f_1 es la velocidad del viaje, X_{ijv} es la variable binaria (1 si el vehículo v viaja de la instalación i a la j y 0 de lo contrario), $\beta = 0.5 * C_d * A * \rho$ (C_d es el coeficiente de arrastre aerodinámico, A es la superficie frontal y ρ es la densidad del aire)

$\gamma = 1/1000 \varepsilon \omega$ (ε es la eficiencia del tren motriz del vehículo y ω es el parámetro de eficiencia para el motor diésel), $\alpha = g \sin \varphi + g C_r \cos \varphi$ (g es la constante gravitacional y φ es el ángulo de rodamiento), μ_1 es el peso en vacío de los vehículos de primer nivel, I_{ijv} es la carga en el

vehículo v al salir de los satélites i a j , C_r es el costo de la ruta r y Y_r es una variable de decisión binaria (1 si se selecciona la ruta r en la solución y 0 de lo contrario).

La función objetivo representada por la ecuación 7, busca minimizar el costo total del combustible consumido, el salario de los conductores de los vehículos de primer nivel, el costo de los satélites y el costo total de las rutas de segundo nivel; esto bajo las siguientes restricciones: todo vehículo que entra al satélite tiene que salir, los vehículos de primer nivel pueden visitar las instalaciones más de una vez, no se puede superar la capacidad de los vehículos de primer nivel, la demanda que deben cumplir los vehículos de primer nivel es la demanda de las instalaciones, se asegura que cada cliente sea visitado solo una vez y se asegura que las rutas de segundo nivel por instalación no superen los valores establecidos.

Para la solución del modelo se aplica la metaheurística de búsqueda de vecindad variable (VNS), la cual trabaja bajo un cambio sistemático de vecindario dentro de la búsqueda local para escapar de los óptimos locales integrado con programación entera, que es usado como técnica de post-optimalidad para encontrar mejores soluciones no encontradas por el VNS. Los autores encuentran como resultado final que para las instancias del 2E-CVRP-E el costo total de la mejor solución encontrada por la metaheurística es menor que la mejor solución del 2E-CVRP con una brecha relativa promedio de 6.37% y finalmente, los resultados computacionales comprueban que la metaheurística puede encontrar soluciones de alta calidad para el 2E-CVRP Y 2E-CVRP-E.

En el año 2016, en China el costo de las operaciones logísticas fue en promedio 14.9% del producto interno bruto (PIB), mucho más grande que en Estados Unidos que fue de 7.5% para el mismo año y más de la mitad de dicho costo se debe a las actividades de transporte, según Guo, Shen, Choi y Jung (2017). Esto aumentó el interés de los investigadores, los cuales vieron una alternativa de solución en la tercerización de sus actividades de transporte y encontraron, que se

puede modelar como un problema de ruteo de vehículos abierto (OVRP), ya que los vehículos no deben volver al origen. Lo anterior y el aumento en la conciencia ambiental, hicieron de este un tema de investigación el cual titularon “*Optimizing the green open vehicle problem with time windows by minimizing comprehensive routing cost*”, el cual fue desarrollado por Niu, Yang, Chen y Xiao en el 2018.

El problema GOVRPTW se describe como un conjunto de clientes y el depósito, representado por $0 \ N = \{0, \dots, n\}$ y un conjunto de arcos $A = \{(i, j): i, j \in N, i \neq j, j \neq 0\}$. La capacidad de los vehículos es Q , la demanda de los clientes q_i , la ventana de tiempo de cada cliente i es $[a_i, b_i]$, la distancia del nodo i al nodo j es d_{ij} y la variable f_{ij} es la cantidad de flujo entre arcos $(i, j) \in A$. La función objetivo, desarrollada con base en el modelo CMEM⁵, es la observada a continuación.

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{(i,j) \in A} \lambda * f_c * k * N * V * d_{ij} * \sum_{r=1}^R \frac{Z^r_{ij}}{v^r} \\ & + \sum_{(i,j) \in A} \lambda * f_c * \gamma * \alpha_{ij} * d_{ij} * (w * X_{ij} + f_{ij}) \\ & + \sum_{(i,j) \in A} \lambda * f_c * \beta * \gamma * d_{ij} * \sum_{r=1}^R (v^r)^2 * Z^r_{ij} + \sum_{j \in N_o} f_d * S_j \end{aligned} \quad (8)$$

Donde, $\lambda = \zeta / \kappa \psi$, ζ es la relación masa-combustible-aire, κ es el valor calorífico de un combustible diésel típico (kJ / g) y ψ es el factor de conversión de gramos a litros, f_c es el costo del combustible y de las emisiones de CO₂, Z^r_{ij} es una variable binaria (1 si el vehículo atraviesa el arco $(i, j) \in A$ a velocidad v^r y 0 de lo contrario), $\gamma = 1/1000 \varepsilon \omega$ (ε es la eficiencia del tren motriz del vehículo y ω es el parámetro de eficiencia para el motor diésel), $\alpha = \tau + g \sin \theta + g *$

⁵ Microscopic Emissions Modeling (CMEM): modelo que predice las emisiones de escape del tubo de escape y el consumo de combustible en función de las diferentes operaciones modales de la flota de vehículos en uso.

$C_r * \cos \theta$ (donde C_r es el coeficiente de resistencia a la rodadura), k es el factor de fricción del motor, N es la velocidad del motor, V es el desplazamiento del motor, w es el peso al vacío, X_{ij} es una variable binaria (1 si el vehículo atraviesa el arco (i, j) y 0 de lo contrario), $\beta = 0.5 * C_d * A * \rho$ (C_d es el coeficiente de arrastre aerodinámico, A es la superficie frontal y ρ es la densidad del aire), f_d es el salario de los conductores y S_j es el tiempo total que toma en una ruta. El objetivo que se ve reflejado en la ecuación 8 es el de minimizar el costo total de las emisiones y el costo de los conductores, y está sujeto a las siguientes restricciones: el número máximo de vehículos no puede ser superado; cada cliente solo puede ser visitado una única vez; los vehículos parten del depósito, pero no vuelven a él y las ventanas de tiempo se deben cumplir.

En la solución del modelo se aplicó la metaheurística búsqueda tabú con estrategias de búsqueda de vecindario con instancias basadas en condiciones reales de Beijing, China. Las soluciones del modelo fueron comparadas con rutas cerradas y se encontró que las rutas abiertas reducen el costo total en un 20% y para experimentos en nodos congestionados, el consumo de combustible y las emisiones de CO2 aumentaron un 12.3% y el costo de los conductores aumento en un 31.3%.

6. Marco teórico

6.1. Problemas de optimización

En el contexto científico se entiende como problema de optimización aquel que desea elegir la mejor solución entre un conjunto de elementos. El problema equivale a resolver la siguiente ecuación:

$$\text{Máx (min) } f(x) \quad x \in \Omega$$

Donde, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un vector y representa las variables de decisión; $f(x)$ es la función objetivo, la cual mide la calidad de las decisiones; y Ω es el conjunto de decisiones factibles o restricciones del problema, las cuales pueden ser representadas por un conjunto de desigualdades, como se muestra a continuación:

$$g(X_1, \dots, X_n) \leq 0$$

$$h(X_1, \dots, X_n) \geq 0$$

$$l(X_1, \dots, X_n) = 0$$

6.2. Optimización combinatoria

Rama de la optimización en la que se encuentran los problemas en los que las variables de decisión son discretas y tienen las siguientes condiciones: un conjunto de variables, un dominio de variables, un conjunto de restricciones y una función objetivo a ser minimizada o maximizada.

6.3. Problemas NP – Hard

Los problemas de optimización son estudiados desde la Teoría de la Complejidad Computacional, la cual los clasifica de acuerdo a la dificultad para ser resueltos, basándose en los recursos necesarios y requeridos para establecer el grado de complejidad, donde complejidad es entendida como la cantidad de recursos necesarios para efectuar un cálculo (Cruz, Moreno, & Peralta, 2014).

Dicho grado de complejidad se estudió por medio del modelo computacional de la máquina de Turing, inventada por el matemático inglés Alan M. Turing en 1937, la cual clasifica los problemas de acuerdo al tipo de máquina que exista para resolverlos. De allí surge la clasificación NP-Hard o NP-Completo, lo que significa que no existió una máquina Turing determinista que resolviera algunos problemas en tiempo polinómico; por lo que se determinó que se debían solucionar con algoritmos no deterministas, los cuales acotan polinómicamente el tiempo empleado en la búsqueda de una respuesta.

6.4. Problema de asignación

Es una de las clasificaciones de los problemas de programación lineal existentes, los cuales consisten en asignar recursos a la realización de tareas bajo la siguiente serie de supuestos: el número de recursos a asignar es igual al número de tareas (número denotado por n); a cada recurso solo se le puede asignar una tarea y cada tarea debe ser realizada por un solo recurso; y existe un costo C_{ij} asociado al recurso i ($i=1,2,3,...,n$), que realiza la tarea j ($j=1,2,3,...,n$). Esto con el objetivo de minimizar los costos totales de las asignaciones a realizar.

6.5. Ruteo de Vehículos o Vehicle Routing Problem

El VRP (por sus siglas en inglés) es un clásico problema de la Investigación de Operaciones clasificado como problema de optimización combinatoria, en el que se busca atender la demanda de productos o servicios por parte de un conjunto de clientes $C=\{1,2, \dots, n\}$, cada uno de ellos con una demanda $W_i > 0$; los cuales se encuentran dispersos geográficamente en n diferentes puntos cardinales, por lo que se cuenta con una flota de vehículos V con capacidad homogénea m y un depósito denotado con 0 , que es parte del conjunto de locaciones del problema $N = C \cup \{0\}$, para determinado fin. Cada par de locaciones (i,j) , donde $i,j \in N$ al mismo tiempo en que $i \neq j$, es asociado con un costo de viaje d_{ij} y un tiempo de viaje t_{ij} .

El objetivo del problema es el de disminuir los costos totales de satisfacer la demanda de todos los clientes (cantidad de vehículos a utilizar, tiempo de desplazamiento, costos de transporte, entre otros); en el que se consideran una serie de supuestos que ven representados en las restricciones del modelo matemático o en las variables que lo componen y dependen del tipo de VRP que se aplique, como se observa a continuación en la descripción de algunas de las variaciones del problema de ruteo que se encuentran en la literatura.

6.5.1. Ruteo de Vehículos con ventanas de tiempo. El VRPTW además de contar con las características del VRP, también está sujeto a restricciones de tiempo las cuales son llamadas “ventanas de tiempo”; lo que significa que cada cliente $i \in C$ tiene un tiempo específico que puede ser expresado como $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, donde desde a_i hasta b_i sería el intervalo de tiempo en que un vehículo puede llegar a una locación, es decir, fuera de dicho intervalo el vehículo no podrá cumplir con el servicio. Asimismo, el depósito 0 tiene su propia ventana de tiempo expresada como $[a_0, b_0]$, lo que significa que ningún vehículo puede entrar al depósito antes de a_0 , ni después de b_0 .

6.5.2. Ruteo de Vehículos con Múltiples Bodegas. El MDVRP se caracteriza por tener más de un depósito y cada uno de ellos cuanta con una flota de vehículos asociada; lo que representa una situación diferente, ya que se debe asignar cada cliente a una de las bodegas disponibles

6.5.3. Ruteo de Vehículos con Backhauls. El VRPB también conocido como linehaul-backhaul es una extensión del clásico problema de ruteo VRP, el cual además de las entregas hechas de depósito a cliente (linehaul), debe realizar recolección de productos de clientes a depósito (backhaul); esto, bajo el supuesto de que todas las entregas se deben realizar antes de iniciar con la recolección de productos, pues no se debe mezclar la capacidad del vehículo, la cual

está programada con anterioridad y de manera individual tanto para las entregas como para la recolección, y su objetivo es minimizar la distancia total recorrida.

6.5.4. Ruteo de Vehículos con Entrega Dividida. El SDVRP tiene como nueva característica del VRP la flexibilidad de que un cliente sea atendido por dos vehículos, sí esto representa la disminución de los costos totales.

6.5.5. Ruteo de Vehículos con Despacho y Recolección. El VRPSPD comparte los mismos supuestos con el VRPB, con la diferencia en que el vehículo que sale de un depósito para hacer las entregas tiene que volver al mismo depósito al momento de transportar las devoluciones y añadido a esto, la carga definida para un solo vehículo puede contener entregas y devoluciones al mismo tiempo.

6.5.6. Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica. El VRPSD asume que la demanda D_i de los clientes i es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es discreta y conocida, entonces $P_i(k) = \Pr\{D_i = k\}$ donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $k = 0, 1, 2, \dots, K$. También, se supone que la capacidad de los vehículos es Q , por lo que se debe cumplir $K \leq Q$, lo que significa que la demanda máxima de cada cliente no va a superar la capacidad de los vehículos.

6.6. Problema de localización y ruteo

Dentro de las definiciones encontradas que dieron respuesta a la pregunta, ¿qué es un problema de localización y ruteo? La mejor definición fue la siguiente “*El problema de localización y ruteo es la planificación de ubicación bajo aspectos de planificación de rutas*” (Bruns, 1998); puesto que le da la connotación de que no es un solo problema, cómo lo es por ejemplo el problema de asignación, sino se entienden como dos situaciones totalmente diferentes a resolver, pero unidos entre sí. Es decir, la localización es el “principal problema” el cual será resuelto bajo las mejores condiciones expuestas por el “sub-problema” de ruteo al mismo tiempo.

El LRP no es un modelo generalizado de diferentes situaciones, pero los modelos de este tipo cuentan con ciertas características, las cuales son: minimizar costos como objetivo que pueden ser divididos en costos de apertura de depósitos, costos de adquirir vehículos y costos de combustible; el espacio de solución puede ser discreto o continuo; se puede trabajar como un problema de localización de un solo depósito o uno multi-depósito; en cuanto a la flota a utilizar, se puede considerar flota homogénea o heterogénea; y finalmente, la estructura de rutas debe cumplir con el supuesto de que los vehículos salen del depósito, visitan a los clientes y vuelven al depósito inicial.

Otros aspectos claves dentro de la caracterización de los problemas de localización y ruteo son los mencionados por Nagy y Salhi (2007), los cuales fueron: se debe cumplir una estructura jerárquica, ya que las instalaciones son quienes prestan el servicio a los clientes, pero ellas no se comunican directamente con ellos, es decir, las instalaciones se conectan con los depósitos por medio de rutas, pero son los depósitos quienes se comunican directamente con los clientes por medio de rutas. El tipo de datos de entrada pueden variar, lo cual puede hacer el problema determinista o estocástico. El periodo de planeación puede ser uno solo o múltiple, lo que hace que se defina como estático o dinámico y como último recurso de clasificación mencionado está el método de solución, pues puede aplicarse un método exacto o una heurística según lo mencionado por los autores.

6.7. School Bus Routing Problem

El problema consiste en el transporte de estudiantes, los cuales se asignan a una de las potenciales paradas previamente establecidas, para que sean recogidos por un bus que tiene una ruta previamente definida, lo que quiere decir, que tiene un camino único por recorrer y unas paradas por visitar, para finalmente dejarlos en la respectiva escuela o colegio.

El problema se desarrolla bajo la siguiente serie de supuestos: capacidad del vehículo previamente definida; número específico de autobuses a disposición; distancia máxima que un estudiante puede caminar desde su hogar hasta la parada de bus asignada; distancia máxima que un autobús puede recorrer; tiempo máximo que un autobús puede demorarse en realizar su recorrido; tiempo máximo que un estudiante puede pasar en un autobús; ventanas de tiempo definidas, si es el caso; y cantidad mínima de estudiantes para abrir una parada. El SBRP también requiere ser caracterizado de acuerdo al contexto en el que se desarrolla, es decir se deben establecer las siguientes características:

- Número de escuelas: si el problema se desarrolla para estudiantes de una misma escuela o si, por el contrario, se transportaran estudiantes a diferentes escuelas al mismo tiempo.
- Lugar de servicio: si el problema se desarrolla en un área urbana (perteneciente a la ciudad) o en un área rural (perteneciente al campo).
- Alcance del problema: si el problema se desarrolla para el horario de la mañana, de la tarde o de ambos.
- Carga: única o mixta, es decir, estudiantes de una sola escuela (única) o estudiantes de múltiples escuelas (mixta).
- Tipo de estudiantes: si deben ser recogidos directamente en sus casas (infantes) o en un paradero.
- Origen y destino: si la ruta inicia y termina en la escuela o si, por el contrario, la ruta inicia en un punto diferente al de la escuela.
- Flota homogénea o heterogénea: si todos los autobuses tienen la misma capacidad o si, por el contrario, todos cuentan con diferente capacidad.

Tal y como lo relata Park y Kim (2010), en su artículo titulado “*The School Bus Routing Problem: A review*”, el problema del SBRP se puede observar como la división de este en cinco sub-problemas, los cuales se mencionaron previamente en el análisis preliminar de literatura.

En cuanto al número de objetivos, el problema puede ser de un solo objetivo, bi-objetivo o multi-objetivo, los cuales se pueden definir en términos generales en: minimizar el tiempo de transporte y minimizar los costos de transporte (Corberán et al., 2000). Los supuestos y las características pueden aplicarse todos al mismo tiempo o solo alguno de ellos y realizar la combinación acuerdo a los requerimientos de la situación, lo que permite que cada uno de los problemas clasificados como SBRP sean diferentes y se presenten variaciones entre estos.

El SBRP es una variación del VRP, puesto que este último se desarrolla con el fin de diseñar rutas que parten y llegan a un depósito con el objetivo de minimizar la distancia recorrida al visitar un conjunto de locaciones, al igual que el SBRP con infantes como tipo de estudiante a transportar; con las características diferenciadoras de que en vez de personas transporta cargas y no tiene a consideración el cumplimiento de un nivel de servicio. Aunque, el SBRP generalmente se aborda como una variación del LRP, puesto que además de compartir características se resuelve bajo la misma estrategia al asignar como primera medida estudiantes a las paradas de autobuses, se define la ubicación de los paraderos y finalmente, se diseñan las rutas de los autobuses teniendo en cuenta que cada una de las paradas habilitadas deben ser visitadas por un autobús.

6.8. Teorías de Optimización

Los problemas cuantitativos son estudiados por la rama de la matemática aplicada denominada *Teoría de Optimización*, la cual condensa los métodos y técnicas desarrolladas para tal fin, los cuales son aplicados con el objetivo de obtener un resultado numérico máximo o mínimo en problemas reales que son modelados matemáticamente, ya sea en el campo de la biología,

economía, ingeniería, entre otras. A continuación, se presenta la definición de las tres clasificaciones existentes sobre los métodos y técnicas, y posteriormente se mencionan algunos de los más aplicados recientemente.

- Algoritmos de resolución exactos: son aquellos que tienen como fin la obtención de la solución óptima del problema, sin importar el empleo de un tiempo de computación excesivo.
- Heurísticas: estas técnicas son definidas como procedimientos simples basados en el sentido común, que ofrecen una buena solución (no necesariamente la óptima) a problemas difíciles, en un tiempo menor (Zanakis & Evans, 1981).
- Metaheurísticas: es un método de solución general que proporciona tanto una estructura general como criterios estratégicos para desarrollar un método heurístico específico que se ajuste a un tipo particular de problema (Hillier & Lieberman, 2010)

6.8.1. Método de Ramificación y Acotamiento. Método exacto, el cual permite la obtención de resultados óptimos a la hora de solucionar modelos de programación entera y consiste en encontrar inicialmente una solución bajo el uso de cualquier método o técnica, lo que da un punto de partida para aplicar el método e iniciar a construir el árbol. Este utiliza la solución inicial ($X = a, Y = b$), sin discriminar si es un número discreto o continuo y empieza a ramificar definiendo la variable inicial a utilizar (teniendo en cuenta que debe ser la variable que contenga una solución no entera), que en este caso puede ser X , lo que indica que buscará un valor entero menor o igual a $[a]$ y un valor entero mayor o igual a $[a] + 1$. Dichas ramificaciones se consideran como nuevas restricciones, pero no se mezclan entre ellas, es decir, son independientes la una de la otra, por lo cual cada uno de los valores considerados en cada rama se utilizan para recalcular el valor de Y y

de Z. Si no existe una solución factible, se elimina el nodo; en el caso contrario de sea factible este nodo será una cota inferior del árbol.

Finalmente, el método termina cuando se determinan todas las cotas inferiores del árbol y la solución es dada por la cual arroja mayor o menor valor entero, según sea el caso. La eficacia del método depende críticamente de la calidad de los límites disponibles en cada nodo del árbol (Yepes, 2002).

6.8.2. Método Simplex. El método simplex se basa en la idea de Fourier (1826), la cual consistió en formar un poliedro con las restricciones del programa lineal, de modo que se recorra vértice a vértice a lo largo de las aristas, hasta alcanzar el vértice que corresponde al valor óptimo; aunque la formulación algebraica del algoritmo se le atribuye a George Dantzig.

6.8.3. Algoritmo de ahorros de Clarke & Wright. Heurística aplicada generalmente a problemas que tiene como objetivo la determinación de la menor distancia a recorrer y el número de vehículos es una variable de decisión; ya que, calcula el mayor ahorro en distancia a recorrer al utilizar los arcos formados por cada nodo, inicialmente. Posteriormente, el algoritmo continúa trabajando si se encuentran dos rutas que pueden ser combinadas para generar un ahorro mayor en sus arcos, así hasta encontrar las mejores rutas en término de disminución de distancia o costos. El algoritmo original produce buenas rutas al inicio, pero no al final pues incluye rutas circulares (Rocha, González, & Orjuela, 2011).

6.8.4. Colonia de hormigas. Metaheurística inspirada en las estrategias que utilizan las hormigas para la búsqueda de alimentos, puesto que ellas una vez encuentran una fuente de alimento depositan una sustancia llamada “feromonas” dependiendo de la longitud del camino y la calidad del alimento para regresar nuevamente, ya que entre más feromonas descubran es mayor la probabilidad de que el camino hacia el alimento sea el más corto.

En el caso del algoritmo, este inicia con una hormiga en cada nodo y se asigna una probabilidad a cada camino, basándose en una regla probabilística que dice que si ya fue visitado el nodo la probabilidad será 0 y es diferente de 0 en el caso contrario. Luego, la hormiga visita el nodo con mayor probabilidad y de esa manera va construyendo un camino hasta el destino, y se va actualizando para cada arco “la feromona” correspondiente. Finalmente, el algoritmo termina al encontrar el menor valor de solución.

6.8.5. Búsqueda Tabú. Procedimiento metaheurístico, que tiene como filosofía derivar y explotar una colección de estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos implícitos y explícitos de aprendizaje (Glover & Melián, 2003).

La Búsqueda Tabú consiste en la realización de una búsqueda local tomando como base una solución previa aleatoria, la cual mejora el comportamiento del costo de manera que el algoritmo se mueve de una solución a otra mejor, dentro de un subconjunto de soluciones cercanas que utilizan la memoria de corto plazo, la cual registra algunos atributos de las soluciones visitadas clasificadas como solución tabú (soluciones ya visitadas) y movida tabú (movidas que llevan a soluciones tabú). En algunos casos el criterio de aspiración es aplicado para aceptar soluciones consideradas como tabú, puesto que poseen mejores atributos que las demás y son denominadas soluciones admisibles.

Según Hillier y Lieberman (2010), se deben considerar los siguientes seis aspectos en un algoritmo de búsqueda tabú clásico:

- Algoritmo de búsqueda local: Seleccionar aquel vecino inmediato que no esté descartado de la lista tabú en la solución actual, en cada iteración.
- Estructura de vecindad: El vecino inmediato se define como aquel generado recientemente, eliminando la solución actual.

- Forma de los movimientos tabú: Enumerar las nuevas soluciones de forma que sean tabú, si la solución eliminada se encuentra en la lista.
- Adición de un movimiento tabú: En cada interacción, después de incorporar la solución a la actual reciente, se debe añadir a la lista tabú.
- Tamaño máximo de lista tabú: Cuatro.
- Regla de detención: El proceso se detiene después de tres iteraciones consecutivas sin obtener mejora en la función objetivo.

6.8.6. Búsqueda Tabú Granular. La búsqueda tabú granular implementa la estrategia de considerar los mejores vecindarios a visitar mediante una lista de candidatos, la cual contiene aquellos que pueden ser examinados en un menor tiempo y al mismo tiempo son parte de las mejores soluciones, para esto se consideran dos estrategias de diversificación:

- Diversificación granular: para esta estrategia se define un factor de esparsificación β , el cual se ajusta a un valor β_0 inicialmente, el cual se irá aumentando hasta β_n si la mejor solución factible no encontrada no ha sido actualizada en un número N de iteraciones. Esto permite que una nueva lista de candidatos se calcule y de esta manera el valor de β se ajuste nuevamente al valor inicial β_0 , para continuar desde la última mejor solución factible encontrada.
- Penalización: de acuerdo a la infactibilidad y factibilidad de las soluciones, después de las N iteraciones se determina un peso para cada una de ellas determinado por unos parámetros ajustados durante la búsqueda, para determinar qué soluciones serán ejecutadas y en qué momento.

7. Formulación del modelo

De acuerdo a la revisión de literatura realizada con el fin de formular un modelo SBRP con consideraciones ambientales y siguiendo la metodología utilizada en este tipo de investigaciones, el proceso de formulación del modelo de ruteo planteado para el problema de rutas escolares, se describe a continuación.

7.1. Características del modelo

Inicialmente, de acuerdo a la descripción de las características encontradas que se pueden contemplar para considerar un modelo SBRP, se definen las siguientes características para nuestro modelo.

Tabla 2.
Características del modelo

Criterio	Consideración
Número de escuelas	Una sola escuela
Lugar de servicio	Urbano
Alcance del problema	Problema de la mañana
Carga	Única (estudiantes de una sola escuela)
Flota	Heterogénea
Origen y destino	Es el mismo (todos los vehículos salen y llegan a la escuela)
Paradas	La residencia de cada uno de los estudiantes (casa o conjunto residencial)
Objetivo	Minimizar el consumo de combustible

7.2. Modelo base

Se parte del siguiente modelo desarrollado en el proyecto de grado inmediatamente anterior a esta investigación, de la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales de la universidad Industrial de Santander en el año 2016, titulado “Estudio y desarrollo de un modelo matemático para el problema de rutas escolares (SBRP)”, mencionado en varias oportunidades a lo largo de este documento y el cual cuenta con dos características principales, las cuales son: la asignación

de estudiantes y el ruteo de vehículos, las cuales se ven reflejadas en sus restricciones como se observa a continuación.

Índices

i, j : Nodos/Paradas

k : Autobuses

l : Nodo estudiante/Ubicación casa estudiante

Conjuntos

V : Conjunto de paradas potenciales

E : Conjunto de todos los arcos entre las paradas

S : Conjunto de todos los estudiantes

K : Número de autobuses

Parámetros

C_{ij} : Costo de atravesar el arco ij

C : Capacidad de los autobuses

M_{il} : Distancia que debe caminar el estudiante l para llegar a la parada i

$i = 0$ Índice para la escuela

Q : Costo que representa abrir cada parada

W : Define la máxima distancia que puede caminar un estudiante

R : Define la máxima distancia que puede recorrer un autobús en cada ruta

Variables de decisión

$X_{ijk} : \begin{cases} 1 & \text{Si el autobus } k \text{ atraviesa el arco } i \text{ a } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$

$Y_{ik} : \begin{cases} 1 & \text{Si el autobus } k \text{ visita la para } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$

$$Z_{ilk} : \begin{cases} 1 & \text{Si el estudiante } l \text{ es recogido por el vehículo } k \text{ en la parada } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Función objetivo

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} C_{ijk} \sum_{k=1}^K X_{ijk} + \sum_{i \neq 0} \sum_k Q * Y_{ik} \quad (9)$$

Restricciones

$$\sum_{j \in V} X_{ijk} - \sum_{j \in V} X_{jik} = 0 \quad \forall i \in V, \forall k \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V} X_{jik} - Y_{ik} = 0 \quad \forall i \in V, \forall k \quad (11)$$

$$VY_{0k} - \sum_{i \neq 0} Y_{ik} \geq 0 \quad \forall k \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^K Y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (13)$$

$$\sum_{i \neq 0} \sum_{k=1}^K Z_{ilk} = 1 \quad \forall l \in S \quad (14)$$

$$Z_{ilk} \leq Y_{ik} \quad \forall i, l, k \quad (15)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{l \in S} Z_{ilk} \leq C \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (16)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} X_{ijk} \leq [S] - \sum_{i \neq 0} \sum_l \frac{Z_{ilk}}{C} \quad \forall k, \quad \forall S \quad (17)$$

$$M_{il} * Z_{ilk} \leq W \quad \forall i, \forall l, \forall k \quad (18)$$

$$\sum_i \sum_j C_{ij} * X_{ijk} \leq R \quad \forall k \quad (19)$$

$$Y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, K \quad (20)$$

$$X_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V \mid i \neq j \quad (21)$$

$$Z_{ilk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V \mid i \neq j \quad (22)$$

La función objetivo (9) minimiza los costos de la distancia total recorrida por todos los vehículos y el número total de paradas a visitar. Las restricciones: (10) garantiza que si un vehículo k entra al nodo i salga de este; (11) asegura que la sumatoria de todas las aristas que llegan al nodo i en el vehículo k sean igual a 1, si la parada es visitada; (12) asegura que todos los vehículos habilitados inicien su recorrido en la escuela; (13) asegura que cada parada no sea visitada más de una vez a excepción de la escuela; (14) garantiza que todos los estudiantes sean recogidos por un vehículo k ; (15) asegura que todos los estudiantes sean recogidos por un vehículo k en una parada i ; (16) asegura que no se supere la capacidad de los autobuses; (17) restricción que elimina subtoures; (18) asegura que cada estudiante l no camine más de la distancia permitida W , para llegar a la parada asignada; (19) asegura que el recorrido no cada vehículo k no supere la distancia máxima R ; y las restricciones (20 a 22) aseguran que las variables de decisión sean binarias.

7.3. Formulación del modelo

Teniendo como base el modelo descrito anteriormente y la premisa de formular un modelo de ruteo de vehículos, se toman algunas restricciones del modelo anterior para que hagan parte del nuevo, como se explica a continuación:

- Las ecuaciones (10) y (12) se tomaron sin ninguna modificación del modelo base.

$$\sum_{j \in V} X_{ijk} - \sum_{j \in V} X_{jik} = 0 \quad \forall i \in V, \forall k$$

$$VY_{0k} - \sum_{i \neq 0}^K Y_{ik} \geq 0 \quad \forall k$$

- La ecuación (11) se duplicó de manera que una restricción toma la variable X_{jik} y la otra restricción tome la variable X_{ijk} .

$$\sum_{j \in V} X_{jik} - Y_{ik} = 0 \quad \forall i \in V, \quad \forall k$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijk} - Y_{ik} = 0 \quad \forall i \in V, \quad \forall k$$

- La ecuación (13) se toma del modelo base y se añade al nuevo modelo cambiando el signo de la igualdad a igual (=).

$$\sum_{k \in K} Y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

- La ecuación (19) de capacidad del vehículo se toma del modelo base y se añade al nuevo modelo modificando las variables de acuerdo al nuevo modelo.

$$\sum_{i \in V} Y_{ik} * d_i \leq C_k \quad \forall k \in K$$

- Las ecuaciones (14), (15), (16), (17) y (18) no se toman, puesto que son restricciones que contienen variables de asignación y el nuevo modelo no contempla la asignación, únicamente se formula para el ruteo de los autobuses.
- Se añaden seis restricciones nuevas que se basan en la idea con la que se plantea la estructura de las dos siguientes ecuaciones: “siendo M una constante lo suficientemente grande, la restricción (23) asegura que si un vehículo k viaja de i a j , no puede llegar antes que $Y_i + s_i + t_{ij}$ al llegar a j y además actúan como eliminación de sub-tours” (Olivera, 2004, p9). Por último, la ecuación (24) garantiza que $F_j = F_i + d_i$.

$$F_i + d_i \leq F_j + M * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, j \neq 0 \quad (23)$$

$$M * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) + F_i + d_i \geq F_j \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, j \neq 0 \quad (24)$$

- La estructura de las dos ecuaciones anteriores formuladas para la cantidad de niños, se repite para las restricciones de control de peso de los vehículos y del tiempo de las rutas (ver sección 7.3.2 Modelo nuevo).

7.3.1. Consideraciones ambientales. En el estudio de las posibles consideraciones ambientales añadidas en los modelos de VRP, se encontró que los 10 artículos revisados en el apartado de 4.1.1 *Problema de ruteo de vehículos con consideraciones ambientales*, se involucran las características ambientales por medio de la función objetivo ya sea minimizando directamente las emisiones de CO2 o minimizando el consumo de combustible en función de la distancia recorrida, peso, tipo de motor, tipo de combustible, entre otras. También se encontraron diferentes tipos de modelos: estocástico, dinámico, multiobjetivo, LP⁶ y MLP⁷ como se observa en la tabla número 3.

Tabla 3.
Resumen criterios de selección de función objetivo ambiental.

Artículo	Criterio					Tipo de modelo				
	Dis	Peso	TDM	TDC	Est	Din	Mul	LP	MLP	
A simulation based restricted dynamic programming approach for the green time dependent vehicle routing problem				x		x				
Design and development of a hybrid ant colony-variable neighbourhood search algorithm for a multi-depot green vehicle routing problem	x	x					x	x		
Matheuristic for a two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental		x				x				

⁶ LP: Programación lineal.

⁷ MLP: Programación lineal entera mixta.

considerations in city logistics
service

Optimizing the green open vehicle routing problem with time windows by minimizing comprehensive routing cost		x	x		x
Design and development of a hybrid artificial bee colony algorithm for the environmental vehicle routing problem	x	x			x
Green transportation scheduling with pickup time and transport mode selections using a novel multi-objective memetic optimization approach		x	x		x
A green capacitated vehicle routing problem with fuel consumption optimization model	x	x			x
A genetic algorithm with exact dynamic programming for the green vehicle routing & scheduling problem	x	x		x	x
The pollution-routing problem		x		x	
Time-dependent green vehicle routing problem with stochastic vehicle speeds: an approximate dynamic programming algorithm			x	x	

Nota: los nombres de las columnas son abreviaturas, por ejemplo: dis=distancia, TDM=tipo de motor, TDC= tipo de combustible, Est=estocástico, Din=dinámico y Mul=multiobjetivo.

Debido al interés de buscar una función objetivo lineal en la cual se integren las consideraciones ambientales al modelo y además esté en función del peso y la distancia recorrida, se descartaron 9 de los 10 artículos revisados y se tomó como referencia el documento titulado “*A Green Capacitated Vehicle Routing Problem with Fuel Consumption Optimization Model*” desarrollado en el año 2013 por İlker Küçükoğlu, Seval Ene, Aslı Aksoy y Nursel Öztürk, el cual después de una serie de consideraciones y el siguiente supuesto: “todos los parámetros que influyen en el consumo de combustible son constantes, excepto carga y distancia, el consumo de combustible es

proporcional al análisis de regresión entre la distancia y la carga del vehículo” (Küçükoğlu, Ene, Aksoy, & Öztürk, 2013), como se observa en la ecuación 25.

$$\text{Consumo de combustible} = a1 \text{ distancia} + a2 \text{ carga del vehículo} + b \quad (25)$$

Los autores mencionan que realizaron el análisis de regresión en el software Minitab, con 2020 ejemplos para diferentes instancias con un rango de carga del vehículo de 1.300 a 1.400 kg y un rango de distancias de 0 a 100 km, para un valor de los parámetros de $a1 = 0.0589$, $a2 = 0.000991$, y $b = -1.5$ con un coeficiente de determinación $R^2 = 95.7\%$, lo cual indica que la ecuación se ajusta en buena medida al comportamiento de los datos.

Por lo tanto, para la presente investigación se toma el mismo modelo de función objetivo ajustado con datos reales en la ciudad de Bucaramanga, como se observa en la sección 7.3.1.1. en la cual se realiza la explicación del tratamiento de los datos recopilados, para la obtención de nuevos valores para los parámetros mencionados.

7.3.1.1. Tratamiento de los datos. Los datos tomados para esta investigación fueron suministrados por la empresa de transporte de personas “Transporte Seres” ubicada en la carrera 22 # 46^a-81, por el señor José David Arenas. La medición realizada para obtener estos datos la empresa la hace con el fin de generar un documento llamado Estudio de costos, para solicitar capacidad transportadora en el Ministerio de transporte (trámite exigido para todas las empresas de transporte).

Los datos obtenidos fueron recopilados para los 11 vehículos que hacen parte de la flota propia de la empresa. Estos vehículos se dividen en tres tipos de acuerdo a su capacidad: micro buses, busetas y buses, como se observa en la tabla 4.

Tabla 4.
Consumo de combustible por vehículo

Tipo de vehículo	Marca	Capacidad	Peso Vehículo vacío	Km/Galón de gasolina
Micro buses	Hyundai	12	2.265	23
	Volkswagen	16	2.883	25
	Nissan Urvan	16	1.920	18
	Renault	18	2.007	21
	Kia	19	2.207	22
Busetas	Nissan	23	2.340	20
	Hyundai	23	4.185	21
	Chevrolet	23	5.200	23
Buses	Hyundai	31	4.085	17
	Mercedes Benz	38	5.990	19
	Chevrolet	37	6.407	19

Nota: Datos suministrados por la empresa “Transporte Seres”.

Como se observa en la tabla, los datos suministrados son km por galón de gasolina, por lo que se realiza un tratamiento de los datos para generar la variación del consumo de gasolina por peso y kilómetro recorrido, para la construcción de la ecuación de regresión con los datos: consumo de combustible (variable dependiente Y), peso (variable independiente X1) y distancia recorrida (variable independiente X2). Los pasos seguidos son los siguientes:

- Paso 1: el peso se cambia de unidades, es decir, de kilogramos se pasa a toneladas y se tabula.
- Paso 2: se halla el consumo de combustible unitario, es decir, el consumo por distancia recorrida (galones/kilómetro), para cada uno de los 11 vehículos.
- Paso 3: por facilidad de cálculo, se convierte el consumo de combustible unitario en galones por cada 100 kilómetros.

- Paso 4: entre galones por 100 kilómetros (variable Y) y peso en toneladas (variable X), se genera una ecuación de regresión de la forma $y = mx + b$. Esto con el fin de obtener el consumo estimado de y por peso.

La ecuación de regresión 1 obtenida es $y = 0.08121x + 4.5929$, con los datos mostrados en la tabla 5. Datos calculados con los 4 pasos mencionados anteriormente.

Tabla 5.
Datos regresión 1

Peso (ton)	Consumo (gal/km)	Consumo (gal/100km)	Consumo estimado Y1
2.265	0.043	4.348	4.777
2.883	0.040	4.000	4.827
1.920	0.056	5.556	4.749
2.007	0.048	4.762	4.756
2.207	0.045	4.545	4.772
2.340	0.050	5.000	4.783
4.185	0.048	4.762	4.933
5.200	0.043	4.348	5.015
6.407	0.053	5.263	5.113
5.990	0.053	5.263	5.079
4.085	0.059	5.882	4.925

Una vez realizado esto, se generan los datos con los que se quiere estimar el consumo de combustible, para realizar la regresión múltiple de forma $y = m_1X_1 + m_2X_2 + b$.

- Paso 5: se genera una columna de datos para el peso (en ton) desde 1 hasta 6 toneladas, aumentando de a 50kg, que es lo que aproximadamente pesa un infante con sobrepeso. Esto se hace para cada kilómetro.
- Paso 6: se tabulan los datos de 1 a 100 kilómetros. Para cada kilómetro se tabula el peso como se menciona en el primer paso.
- Paso 7: se toma la primer ecuación de regresión encontrada $y_1 = 0.08121x + 4.5929$ la cual estima el consumo de combustible en las unidades galón/100kilometros, lo cual se

multiplica por kilómetros para encontrar el consumo de gasolina en galones estimado (Y2) en función del peso y de la distancia, de la siguiente forma: $y2 = y1 * distancia$, es decir, la ecuación quedaría así: $y2 = (0.08121peso + 4.5929) * distancia$.

- Paso 8: una vez se tiene la ecuación de Y2 estimado, se reemplaza en la ecuación los valores de peso y distancias generados en el paso 5 y paso 6. Finalmente, se tabula el valor de Y2 para completar cada terna.

Los datos obtenidos se tabulan en la tabla 6, como se observa a continuación.

Tabla 6.
Datos regresión 2

Y2 estimado	Peso (ton)	Distancia (km)
4.674	1.00	1
4.678	1.05	1
4.682	1.10	1
Y2 se calcula con el peso y distancia de las dos columnas seguidas*	Aumenta de a 50 kg hasta 6 ton*	Se mantiene en 1km hasta completar las 6 ton*
9.348	1.00	2
9.356	1.05	2
9.365	1.10	2
Y2 se calcula con el peso y distancia de las dos columnas seguidas*	Aumenta de a 50 kg hasta 6 ton*	Se mantiene en 2km hasta completar las 6 ton*
508.019	6	100

Nota: los signos * significan la aclaración de cómo se tabularon los datos en cada columna, puesto que en total se tabularon 9.999 ternas hasta llegar a 6 toneladas con 100 kilómetros.

Finalmente, con los datos tabulados en la tabla 6 como se mostró anteriormente, se realiza la regresión múltiple con consumo de combustible (variable dependiente Y), peso (variable independiente X1 y distancia (variable independiente X2), para hallar el valor de los parámetros

$a1$, $a2$ y b que se utilizarán en la función objetivo del nuevo modelo formulado. La ecuación de regresión obtenida con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9994\%$, fue:

$$\text{Consumo de combustible} = 4,0864 \text{ peso} + 4,8771 \text{ distancia} - 14,3004 \quad (26)$$

7.3.1.2. Función objetivo. Una vez se obtienen los nuevos parámetros para el modelo a formular, se modifica la ecuación (26) con el fin de integrarla al nuevo modelo, lo cual resulta como se observa en la ecuación (27).

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & \sum_{k \in K} a1 * Wveh_k * Veh_k + \sum_{j \in V} a1 * PE_j \\ & + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} a2 * dis_{ij} * X_{ijk} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} b * X_{ijk} \end{aligned} \quad (27)$$

Donde $a1 = 4,0864$, $a2 = 4,8771$, y $b = -14,3004$. El término 1 y 2 de la ecuación (27) representa el peso total de los vehículos k al vacío y el peso de los estudiantes transportado en cada arco; el término 3 representa la distancia total recorrida y el término 4 representa el consumo fijo de combustible de todos los vehículos en todo el recorrido. Debido a que el primer término considera el peso de los vehículos una nueva variable Veh_k resulta, para indicar el peso del vehículo que se habilita para la respectiva solución, lo cual conlleva a formular una restricción que indique cual es el vehículo a utilizar, la cual es $Q * Veh_k \geq \sum_i Y_{ik}$, que se formula de igual estructura a la ecuación (12) con el mismo fin.

7.3.2. Modelo nuevo. De acuerdo a las modificaciones mencionadas anteriormente y las ecuaciones formuladas el modelo completo resulta así:

Índices

i, j : Nodos/Paradas

k : Autobuses

Conjuntos

$V = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ Conjunto de paradas

$E = \{12, 13, \dots, ij\}$ Conjunto de arcos

$K = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ Conjunto de autobuses

Parámetros

C_k : Capacidad del autobús k

$i = 0$ Índice para la escuela

d_i : Cantidad de niños a recoger en el nodo i

p_i : Peso del total de niños a recoger en el nodo i

s_i : Tiempo de espera en el nodo i

dis_{ij} : Distancia del nodo i al nodo j

$Wveh_k$: Peso del autobús k vacío

K : Número total de autobuses

$a1$: Coeficiente de la ecuación de regresión (26)

$a2$: Coeficiente de la ecuación de regresión (26)

b : Coeficiente de la ecuación de regresión (26)

Variables de decisión

$X_{ijk} : \begin{cases} 1 & \text{Si el Autobus } k \text{ atraviesa el arco } i \text{ a } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$

$Y_{ik} : \begin{cases} 1 & \text{Si el Autobus } k \text{ visita la parada } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$

$Veh_k : \begin{cases} 1 & \text{Si el Autobus } k \text{ se habilita} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$

F_i : Cantidad de niños que lleva el vehículo cuando llega al nodo i

PE_i : Peso total de los niños que lleva el vehículo cuando llega al nodo i

TE_i : Tiempo de entrada del vehículo al nodo i

Función objetivo

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & \sum_{k \in K} a1 * Wveh_k * Veh_k + \sum_{j \in V} a1 * PE_j \\ & + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} a2 * dis_{ij} * X_{ijk} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} b * X_{ijk} \end{aligned} \quad (27)$$

Restricciones

$$\sum_{j \in V} X_{ijk} - \sum_{j \in V} X_{jik} = 0 \quad \forall i \in V, \quad \forall k \in K \quad (28)$$

$$\sum_{j \in V} X_{jik} - Y_{ik} = 0 \quad \forall i \in V, \quad \forall k \in K \quad (29)$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijk} - Y_{ik} = 0 \quad \forall i \in V, \quad \forall k \in K \quad (30)$$

$$|V|Y_{0k} - \sum_{i \in V/i \neq 0} Y_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (31)$$

$$\sum_{k \in K} Y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (32)$$

$$F_i + d_i \leq F_j + M * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (33)$$

$$M * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) + F_i + d_i \geq F_j \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (34)$$

$$PE_i + p_i \leq PE_j + N * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (35)$$

$$N * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) + PE_i + p_i \geq PE_j \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (36)$$

$$TE_i + \sum_{k \in K} X_{ijk} * \left(\frac{dis_{ij}}{v_k} + s_i\right) \leq TE_j + T * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (37)$$

$$T * \left(1 - \sum_{k \in K} X_{ijk}\right) + TE_i + \sum_{k \in K} X_{ijk} * \left(\frac{dis_{ij}}{v_k} + s_i\right) \geq TE_j \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j, \quad j \neq 0 \quad (38)$$

$$\sum_{i \in V} Y_{ik} * d_i \leq C_k \quad \forall k \in K \quad (39)$$

$$Q * Veh_k \geq \sum_{i \in V} Y_{ik} \quad \forall k \in K \quad (40)$$

$$Y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V, \quad \forall k \in K \mid i \neq j \quad (41)$$

$$X_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V, \quad \forall k \in K \mid i \neq j \quad (42)$$

La función objetivo (27) minimiza el consumo de combustible total en función del peso y la distancia recorrida. Las restricciones: (28) garantiza que si un vehículo k entra al nodo i salga de este; (29) asegura que la sumatoria de todas las aristas que salen del nodo i en el vehículo k sean igual a 1, si la parada es visitada; (30) asegura que la sumatoria de todas las aristas que llegan al nodo i en el vehículo k sean igual a 1, si la parada es visitada; (31) asegura que todos los vehículos habilitados inicien su recorrido en la escuela; (32) asegura que cada parada no sea visitada más de una vez a excepción de la escuela; (33) y (34) aseguran que los niños que un vehículo lleve al llegar al nodo j sea igual a la suma de los niños que llevaba al llegar a i y los que recogió en i ; (35) y (36) aseguran que el peso de los niños que un vehículo lleve al llegar al nodo j sea igual a la suma del peso de los niños que llevaba al llegar a i y el peso de los que recogió en i ; (37) y (38) asegura que el tiempo de ruta que un vehículo lleva al llegar al nodo j sea igual a la suma del tiempo de ruta que llevaba al llegar a i , el tiempo de espera en el nodo i y el tiempo que demora en recorrer el arco ij ; (39) asegura que no se supere la capacidad máxima del vehículo k ; (40) indica qué vehículo se habilita; (41) y (42) asegura que la variable X y la variable Y sean binarias.

7.4. Verificación del modelo

Para comprobar la correcta integración del modelo matemático desarrollado se ejecutó en el software GAMS la instancia de prueba Ins0-p5-s12-v2. El equipo de cómputo utilizado para la experimentación cuenta con las siguientes características mencionadas en la tabla 7.

Tabla 7.
Características de equipo de cómputo

Características	
Fabricante:	Hewlett-Packard Company
Modelo:	HP ProDesk 600 G1 SFF
Procesador:	Intel® core™ i5-4570CPU @3.20GHz 3.20GH.z
Memoria RAM:	8,00 GB
Tipo de sistema:	Sistema operativo de 64 bits

Los resultados obtenidos por la instancia 0, fueron los siguientes (ver tabla 8).

Tabla 8.
Resultados generales

Resultados	
Función objetivo:	20.954,6774
Número de iteraciones:	100
Tiempo de ejecución:	11.622

La instancia 0 arrojó un valor 20.954 galones como el total de combustible consumido, por el total de rutas generadas y los respectivos vehículos utilizados. El algoritmo realizó un total de 100 iteraciones en un tiempo de ejecución de 11.622 segundos.

7.4.1. Variables de decisión binarias. En el análisis de las variables de decisión del modelo matemático se encontraron los siguientes resultados, los cuales se encuentran tabulados en tablas que tienen dos filas, de las cuales en la primera se encuentran las variables y en la segunda se encuentra el valor obtenido (1 quiere decir que la variable fue habilitada) por dicha variable.

Tabla 9.
Resultados variable X

Variable X_{ijk}	0.4.1	1.5.1	2.1.1	3.0.1	4.2.1	5.3.1
Resultado	1	1	1	1	1	1

La variable X_{ijk} indica que arcos serán visitados (i,j) por cada vehículo k , por ende los resultados tabulados en la tabla 9 indican que solo se creó una ruta (ver figura 7), la cual será

recorrida por el vehículo 1. Lo que quiere decir que el algoritmo encontró que el mínimo valor de consumo de combustible consumido será dado por el vehículo 1 realizando la ruta mencionada.

0	4	2	1	5	3	0
---	---	---	---	---	---	---

Figura 7. Ruta 1. Elaboración propia.

A continuación se pueden observar los resultados de la variable Y_{ik} .

Tabla 10.

Resultados variable Y

Variable Y_{ik}	0.1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1
Resultado	1	1	1	1	1	1

La variable Y_{ik} indica que vehículo visitará cada parada, como se observa en la tabla 10 el vehículo 1, el cual es el único vehículo habilitado visitará la parada: escuela-1-2-3-4-5.

Tabla 11.

Resultados variable Veh

Variable Veh_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Resultado	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La variable Veh_k me indica el vehículo que será habilitado de las posibles opciones.

7.4.2. Variables de decisión no-binarias. A partir de este punto se encuentra el análisis de las variables no-binarias, como se observa a continuación.

Tabla 12.

Resultados variable F

Variable F_j	1	2	3	4	5	0
Resultado	5	2	8	0	7	12

El resultado de la variable F indica la cantidad de niños que lleva un vehículo cuando llega al nodo j , por lo que según los resultados que se observan al llegar el vehículo al nodo 1 lleva 5 estudiantes, al llegar al nodo 2 el vehículo lleva 2 estudiantes, al llegar al nodo 3 el vehículo lleva 8 estudiantes y finalmente al llegar al nodo 5 el vehículo lleva 7 estudiantes. Si los resultados se

observan de esa manera podrían llegar a ser confusos, por lo que el orden correcto de revisarlos es de acuerdo al orden de la ruta, lo que se entendería de la siguiente manera: de acuerdo a la ruta formada (figura 7), se observa que un único vehículo parte de la escuela (nodo 0) y se desplaza a la parada 4, pero el vehículo no recoge estudiantes en la escuela puesto que los volvería a llevar finalmente a la escuela (lo cual no tiene sentido), por esta razón el nodo 4 tiene como resultado 0. Ahora de la parada 4 el vehículo se desplaza a la parada 2, en este caso recoge en la parada 4 a 2 niños, por lo que cuando llega a la parada 2 el resultado es 2. Posteriormente de la parada 2 sale hacia la parada 1, lo cual significa que en la parada 2 recogió a 3 niños y en el vehículo ya venían 2, lo que quiere decir que al llegar a la parada 1 se encuentran en el vehículo 5 niños. El proceso se repite hasta terminar la revisión de cada una de las paradas y rutas, para finalmente llegar al nodo 3 con 8 niños dentro del vehículo y de dicha parada (8) recoge 4 niños, lo que quiere decir que a la escuela llega con 12 niños.

Tabla 13.
Resultados variable PE

Variable PE_j	1	2	3	4	5	0
Resultado	0.187	0.074	0.284	0	0.241	0.46

Variable PE_j contiene la misma lógica de análisis anteriormente mencionada de la variable F_j , la única variación es que la variable PE es el peso de los estudiantes (en toneladas) que se encuentran en el vehículo al llegar al nodo j .

Tabla 14.
Resultados variable TE

Variable TE_j	1	2	3	4	5
Resultado	0.187	0.074	0.284	0	0.241

La variable TE_j muestra el tiempo de entrada (en segundos) del vehículo al nodo j , es decir el momento en espacio de tiempo en el que el vehículo llega a la parada j , el cual contiene el tiempo

que se demora un vehículo en recorrer un arco (i, j) mas el tiempo de espera s del vehículo en el nodo i . El análisis de los resultados se realizan de la misma forma en que se realizaron las variables PE_j y F_j , la única diferencia es que se tienen en cuenta dos tiempos: tiempo de recorrer el arco (i, j) , el cual está dado por la ecuación $\frac{dis_{ij}}{v_k}$; donde dis_{ij} es la distancia que existe entre arcos y v_k es la velocidad del vehículo k , la cual se asume igual para todos los tipos de vehículos existentes. Y el tiempo de espera s en el nodo i .

7.4.3. Restricciones. En el caso de las restricciones, el modelo cuenta con la restricción de capacidad (ecuación 39), la cual impide que sea superada la capacidad máxima de los vehículos, es decir, que no se asignen más niños a un vehículo de los que puede llevar.

Tabla 15.
Restricción capacidad de vehículo

Ruta	Capacidad ocupada	Capacidad máxima	Capacidad disponible
Autobús 1	12	12	0

Como se observa en la tabla 14, el autobús habilitado de los dos autobuses disponibles, cuenta con una capacidad máxima de 12 asientos, en la ruta 1 generada para ese autobús se ocupó una capacidad de 12 (la capacidad máxima) y la capacidad disponible es 0, puesto que se ocupó el autobús totalmente.

7.4.4. Ruta. A continuación, se observa la ruta generada, representada gráficamente para fines ilustrativos en la figura 8.

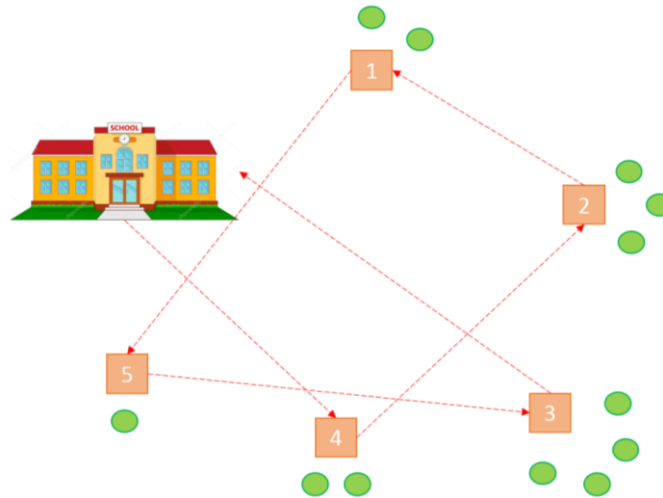


Figura 8. Gráfico Ruta 1.

Dónde la línea punteada representa la ruta, los cuadros representan las paradas y los círculos representan los estudiantes a recoger en dicha parada. Recordar que el modelo es formulado para realizar ruteo, por ende, los estudiantes asignados a cada parada se trabajan por medio de un parámetro que se ingresa al modelo con la suposición de que en promedio se recoge un estudiante por residencia, pero existen casos en los que la parada puede ser un conjunto residencial.

8. Técnicas de solución

En la solución del problema de ruteo de vehículos escolares se implementa como solución inicial el algoritmo de Ahorros de Clarke & Wright, para posteriormente haciendo uso de dicha solución inicial se implementa el algoritmo de Búsqueda Tabú Granular. La descripción de cada una de las técnicas se observa a continuación.

8.1. Algoritmo de Ahorros de Clarke & Wright

El algoritmo de Ahorros de Clarke & Wright se clasifica como una técnica heurística, lo cual se entiende como un procedimiento que trata de descubrir una solución factible, pero no necesariamente una solución óptima bajo un algoritmo iterativo novedoso, donde cada iteración busca una mejor solución que puede ser mejor que la solución previamente encontrada y una vez el algoritmo termina, la solución proporcionada es la mejor encontrada entre todas las iteraciones (Hillier & Lieberman, 2010).

Una vez entendida la definición de técnica heurística, se explica el algoritmo según Olivera (2004): si en una solución dos rutas diferentes $(0, i, 0)$ y $(0, j, 0)$ pueden ser combinadas formando una nueva ruta $(0, i, j, 0)$, el ahorro (en distancia) obtenido por dicha unión será:

$$S_{ij} = C_{oi} + C_{oj} - C_{ij} \quad (42)$$

ya que en la nueva solución los arcos $(0, i)$ y $(0, j)$ no serán utilizados y se agregará el arco (i, j) .

Existen variaciones del algoritmo de acuerdo a la estrategia de construcción de las rutas elegido por el investigador, la versión paralela y la versión secuencial. La aplicada en esta investigación fue la versión secuencial, por ende, se encuentra a continuación la descripción del algoritmo paso a paso.

- Paso 1: para cada residencia del estudiante i , se construye la ruta $(0, i, 0)$.

- Paso 2: se calculan los ahorros por cada par de nodos (estudiante), aplicando la formula (42), donde: C_{oi} corresponde a la distancia entre la escuela y el estudiante i , C_{oj} corresponde a la distancia entre la escuela y el estudiante j , y C_{ij} corresponde a la distancia entre el estudiante i y el estudiante j .
- Paso 3: se elabora una lista en orden descendente de todos los ahorros calculados.
- Paso 4: se escoge la mejor unión, es decir, el máximo ahorro dentro de los ahorros disponibles.
- Paso 5: se inicia la construcción de las rutas, de la siguiente manera: si $(0, i, j, 0)$ es la ruta actual y existe un máximo ahorro contenido en i o en j , y si la combinación de dicha ruta con la actual es factible, realizar la combinación.
- Paso 6: eliminar S_i o S_j según sea el caso de futuras consideraciones.
- Paso 7: si no han sido examinados todos los ahorros, se repite el paso 5 hasta que no queden ahorros disponibles.

8.2. Metaheurística Búsqueda Tabú y Búsqueda Tabú Granular

Una metaheurística se considera como un método de solución general que proporciona una estructura general y criterios estratégicos para desarrollar un método heurístico específico que se ajusta a un tipo particular de problema. (Hillier & Lieberman, 2010)

8.2.1. Metaheurística Búsqueda Tabú. La Búsqueda Tabú o Tabu Search (TS) es un procedimiento metaheurístico cuya característica distintiva es el uso de memoria adaptativa y de estrategias especiales de resolución de problemas. Su filosofía se basa en la explotación de diversas estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos de aprendizaje. (Batista & Glover, 2006)

En este orden de ideas, lo que hace la metaheurística es guiar un procedimiento heurístico de búsqueda local, en la búsqueda de optimalidad global, por medio de la explotación de la historia del proceso de resolución del problema haciendo referencia a cuatro dimensiones, las cuales son:

- Propiedad de ser reciente: dimensión asociada a la memoria reciente o a corto plazo.
- Frecuencia: dimensión asociada a la memoria de frecuencia.
- Calidad: habilidad para diferenciar la bondad de las soluciones visitadas a lo largo del proceso de búsqueda.
- Influencia: considera el impacto de las decisiones tomadas, en cuanto a calidad y estructura de las soluciones.

Dos elementos considerados de alta importancia en la búsqueda tabú son:

- La intensificación: se basa en la elección de reglas que favorecen la elección de buenas combinaciones, de movimientos y características de soluciones no encontradas, lo que se traduce en un conjunto de soluciones élite, es decir, soluciones cercanas a la mejor solución encontrada.
- La diversificación: se basa en la búsqueda en zonas del espacio de soluciones no visitadas antes, es decir, soluciones diferentes a las ya evaluadas.

8.2.1.1. Mecanismos de memoria. Estos mecanismos clasifican un subconjunto de movimientos en un entorno como prohibidos (tabú)⁸, dependiendo de la historia de la búsqueda y determinado por lo reciente o frecuente de algunos movimientos o componentes (atributos) de la solución. Existen tres tipos de memoria, los cuales son:

- Memoria a corto plazo: funciona a través de la llamada lista tabú, pues en esta lista se almacena el historial de los últimos movimientos realizados, impidiendo que estos movimientos se ejecuten en las próximas iteraciones, lo cual permite escapar de los óptimos locales.
- Memoria a mediano plazo: en esta memoria se registra la frecuencia de los movimientos más comunes en un conjunto de soluciones.
- Memoria a largo plazo: en esta memoria se guarda el registro de las zonas que no han sido exploradas aún, con el fin de diversificar la búsqueda.

8.2.1.2. Fundamentos de la búsqueda tabú. Cada uno de los mecanismos de memoria de la metaheurística cuenta con unos fundamentos que les permite salir de óptimos locales, para acercarse a la búsqueda del óptimo global. De acuerdo al tipo de memoria, se definen algunos fundamentos como se observa a continuación.

- Memoria a corto plazo: sea una función $\min c(x)$, que puede ser lineal o no lineal, sujeto a $x \in X$ las restricciones impuestas sobre el vector X ; se puede aplicar la *búsqueda por entorno*, la cual identifica para cada solución $x \in X$ un conjunto asociado de vecinos $N(x) \subset X$ llamado entorno de x . También, la clasificación tabú hace parte de la memoria a corto plazo, esta clasificación determina que soluciones pueden ser alcanzadas por un movimiento desde la solución actual. Esta clasificación tabú depende del periodo tabú, es

⁸ Movimiento tabú: se clasifica como tabú todos los intercambios de pares recientes.

decir, que tantas iteraciones un movimiento será considerado tabú (el periodo será muy pequeño cuando se detectan valores repetitivos de la F.O o será muy grande cuando se produce un deterioro en la calidad de las soluciones encontradas).

El criterio de aspiración, como fundamento de la memoria a corto plazo determina cuando se pueden cambiar las restricciones tabúes, de acuerdo a la influencia, es decir, al grado de cambio inducido en la estructura de la solución o en la factibilidad o por aspiración por defecto, es decir cuando todos los movimientos posibles están clasificados como tabú y no se han hecho admisibles, se selecciona el movimiento menos tabú. Algunos refinamientos de los criterios de aspiración son el estado tabú por grados, es decir, su estado cambia a tabú pendiente si no existen movimientos de mejor excepto los que son tabú; también están los criterios de aspiración por admisibilidad fuerte, es decir, si es admisible para ser seleccionado y no confía en criterios de aspiración para calificar como admisibles.

- Memoria a mediano plazo: la selección de soluciones élite (óptimos locales de alta calidad) encontradas durante el proceso de la búsqueda. Estas soluciones se identifican como elementos de un grupo local en estrategias de intensificación o como elementos de diferentes grupos en estrategias de diversificación.
- Memoria a largo plazo: la memoria basada en la frecuencia, es decir, número de veces que un atributo reside en las soluciones. Las estrategias de intensificación que crean soluciones agresivamente estimulando la incorporación de atributos buenos y la diversificación simple, que es generar soluciones que incorporan composiciones de atributos significativamente diferentes a los encontrados previamente durante la búsqueda.

8.2.1.3. Términos de la búsqueda tabú. A continuación, se encuentra la explicación de los términos mayormente mencionados en la metaheurística.

- Secuencia o tours: la solución es arrojada a través de un vector solución, el cual muestra una secuencia, donde dicha secuencia incluye el orden en que los estudiantes son visitados por cada vehículo.

1	2	3	1	4	5	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 9. Vector solución. Elaboración propia.

En el vector solución se encuentra que fueron creadas dos rutas, es decir, se utilizaron dos vehículos, de los cuales el vehículo 1 tiene como recorrido iniciando de la escuela (nodo 1), visita la residencia 2, la residencia 3 y finalmente vuelve a la escuela, y el vehículo 2 tiene como recorrido escuela, residencia 4, residencia 5, residencia 6 y vuelve a la escuela.

- Población inicial: es la solución de partida que toma el algoritmo para iniciar, la cual puede ser generada por un método aleatorio o un método heurístico, según sea la elección del investigador.
- Solución factible: es aquella solución encontrada por el algoritmo que cumple con las restricciones del problema, ya sean de capacidad, de distancia recorrida, etc.
- Vecindad: es el conjunto de soluciones que se pueden encontrar iniciando con una solución s^* , por medio de un movimiento σ .

$$N(s) = \{s^* \in S: s \rightarrow^\sigma s^*\}$$

Donde, $N(s)$ representa la vecindad con respecto a s , s representa un solución tomada del espacio de soluciones S y s^* es el vecino de s generado a partir del movimiento σ .

Los tipos de movimientos σ pueden ser: eliminación, que es cuando un elemento deja de pertenecer a la solución; inserción, es un cuando un elemento de un vector, matriz, etc de la solución $x(i)$ se mueve hacia otra posición j y los demás elementos se desplazan, como se observa en la figura 10.

Solución de partida	2	3	5	7	6	8	4	9	1	10
Solución vecina	2	3	7	6	8	5	4	9	1	10

Figura 10. García, Álvaro (2019). Técnicas metaheurísticas- Movimiento de inserción. Recuperado de <http://www.iol.etsii.upm.es/arch/metaheuristicas.pdf>

El movimiento de intercambio, es aquel en el que dos elementos de la solución intercambian posiciones, mientras los otros elementos permanecen estáticos, como se observa en la figura 11.

Solución de partida	2	3	5	7	6	8	4	9	7	10
Solución vecina	2	3	7	6	8	5	4	9	5	10

Figura 11. García, Álvaro (2019). Técnicas metaheurísticas- Movimiento de intercambio. Recuperado de <http://www.iol.etsii.upm.es/arch/metaheuristicas.pdf>

- Criterio de parada: este criterio se establece al inicio del algoritmo y define el momento en el que el algoritmo se detiene, y puede usar los siguientes supuestos: establecer un número fijo de iteraciones sin importar la evolución de la última solución encontrada, precisar un tiempo límite de procesamiento del algoritmo o fijar un número determinador de iteraciones.
- Lista tabú: lista que constituye la memoria a corto plazo del proceso de búsqueda. Mediante la lista se alienta la exploración de diferentes regiones de soluciones y se dificulta la convergencia en torno a un óptimo local. (García Sánchez, n.d.)
- Tenure: es el periodo de tiempo en que un movimiento será considerado tabú.

8.2.2. Metaheurística Búsqueda Tabú Granular. La metaheurística tabú granular comparte las mismas características de la búsqueda tabú con la única diferencia de que no utiliza el grafo completo de solución, sino que utiliza aquellos elementos de la población inicial que son incidentes

a la escuela y todas las combinaciones de los arcos pertenecientes a la solución inicial que tengan una distancia menor al umbral de granularidad ϑ , dado por la siguiente ecuación:

$$\vartheta = \beta * \frac{z'}{(n+K)} \quad (43)$$

Donde β es el parámetro de dispersión positivo, z' es el valor objetivo de la solución inicial $f_1(S_o)$, n es el número de estudiantes y K es el número de rutas obtenidas en la solución inicial.

La metaheurística puede aplicar como criterio de aspiración el hecho de que si el valor de la función objetivo de la nueva solución es menor $f_2(S_o) < f_1(S_o)$, el movimiento que produce a S es ejecutado inclusive si este es un movimiento tabú. También, las estrategias de diversificación e intensificación se vinculan a los valores de dispersión β , de manera que β tomará valores grandes para encontrar soluciones no visitadas antes (inducir procesos de diversificación) y β tomará valores pequeños para encontrar soluciones cercanas a la mejor solución encontrada (permitir procesos de intensificación). (Puenayán, Londoño, Escobar, & Linfati, 2014)

La restricción que lleva a tomar un vecindario granular es: “generalmente el VRP es definido en un grafo completo y se puede observar que los arcos largos tienen poca probabilidad de ser parte de buenas soluciones” (Toth & Vigo, 2004). Esto se debe a que los arcos largos tienen asociado un costo alto (en el caso del problema de ruteo de vehículos) y por ende, al buscar minimizar costos o distancia recorrida estos no serán tomados en consideración para una buena solución, como se puede observar en el artículo titulado “*The granular tabu search and its application to the vehicle routing problem*” de los autores Paolo Toth y Daniele Vigo. También mencionan estos autores que los tiempos de ejecución disminuyen.

Otro punto vinculado al vecindario granular es que la modificación de la estructura del grafo bajo la condición de granularidad permite la inclusión de estrategias de intensificación y

diversificación, modificando el valor del parámetro β , puesto que lo que hace es que altera el grafo y nuevas soluciones pueden ser encontradas.

9. Desarrollo del algoritmo

El algoritmo desarrollado está diseñado para la solución de un problema de ruteo de buses escolares, el cual adopta la técnica del algoritmo de ahorros de Clarke and Wright para generar la solución inicial, la cual permitirá una población inicial para la implementación del algoritmo de Búsqueda Tabú Granular.

9.1. Datos a ingresar

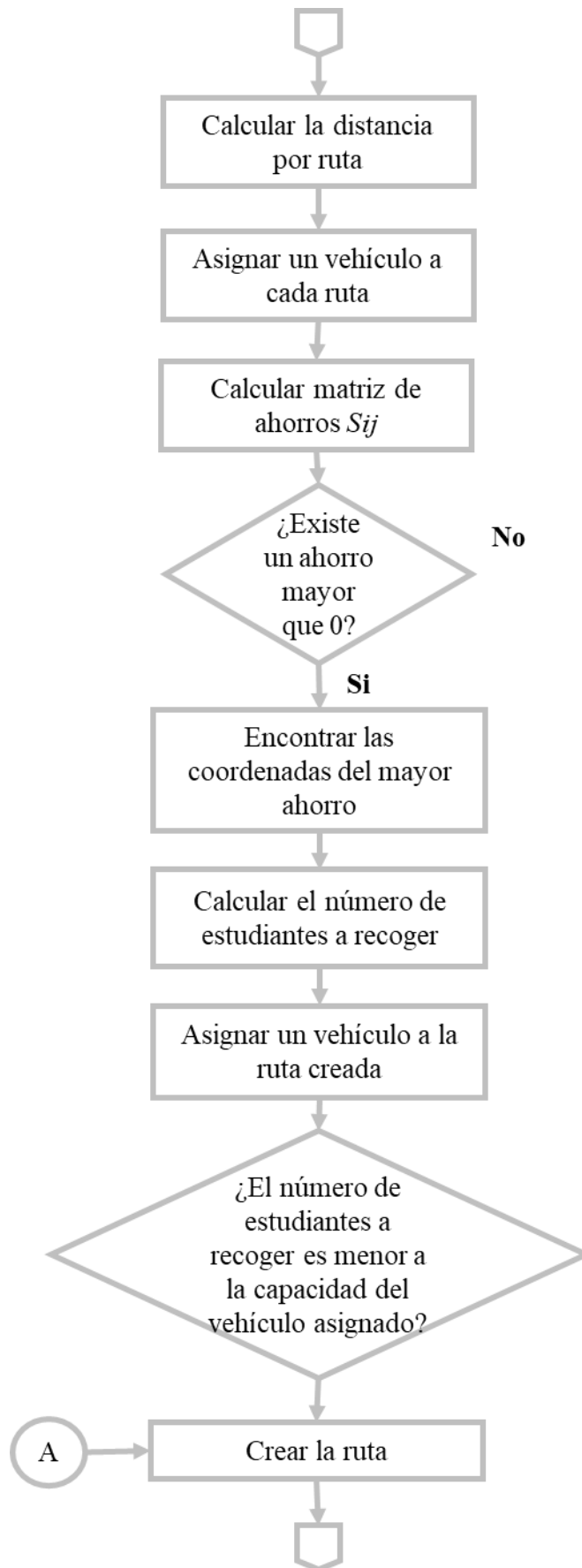
Debido a que el objetivo es el diseño de rutas, se tabulan una serie de datos en Excel para ser importados a Matlab.

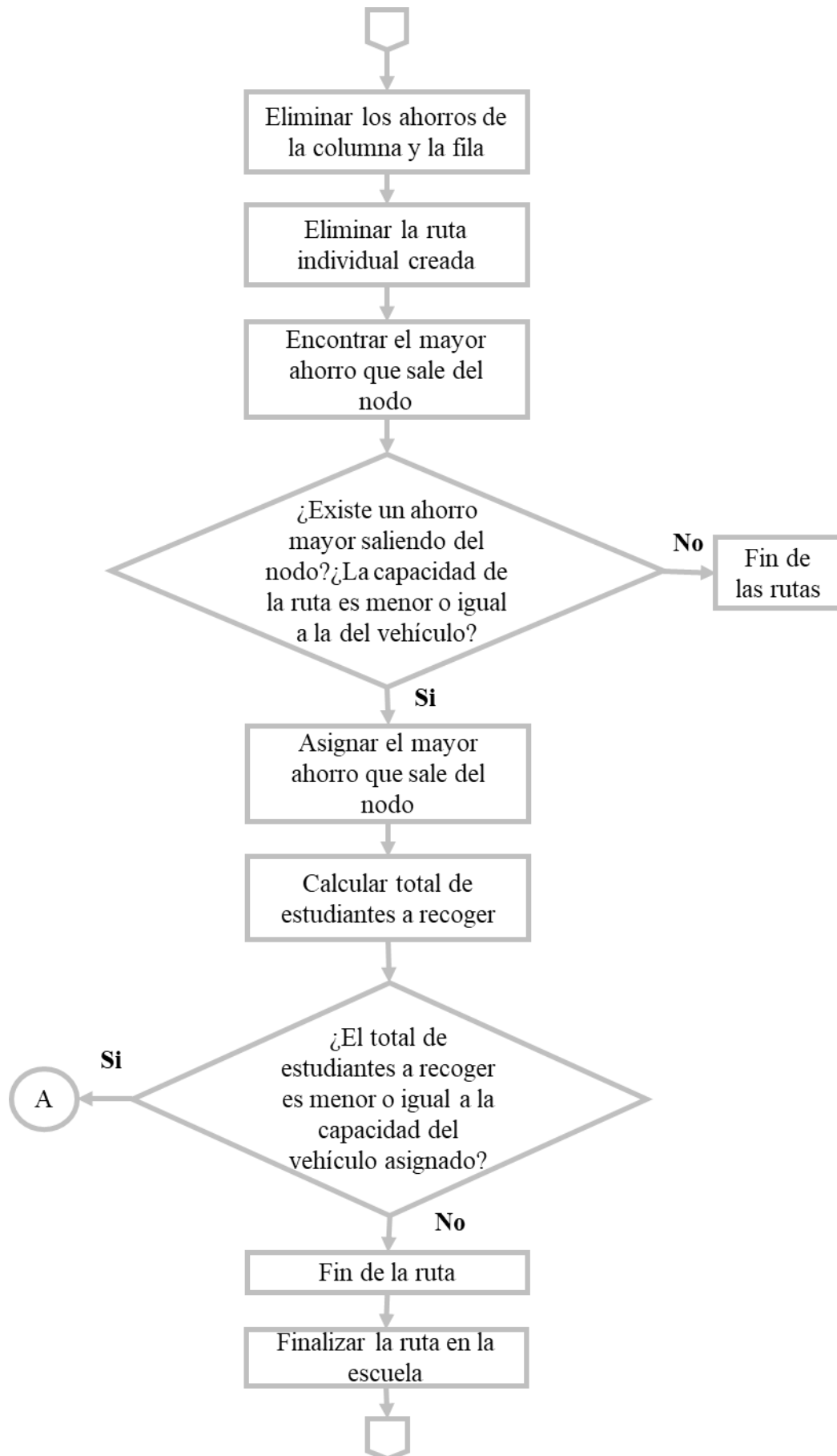
- Paradas y distancias: el número de paradas ingresa como vector y para las distancias se calcula previamente la distancia euclidiana en Excel y se ingresan los datos a Matlab en una matriz.
- Estudiantes: el número de estudiantes y el peso de los estudiantes ingresa como vector.
- Características vehículo: los datos de la capacidad y peso de los vehículos ingresan como vector.
- Coeficientes de la regresión: ingresan como parámetros con los valores mencionados en la sección 7.3.1.2. *Función objetivo*.

9.2. Algoritmo de ahorros Clarke and Wright

A continuación, se observa el diagrama de flujo creado para el algoritmo de ahorros y la explicación con más detalle seguido de este.







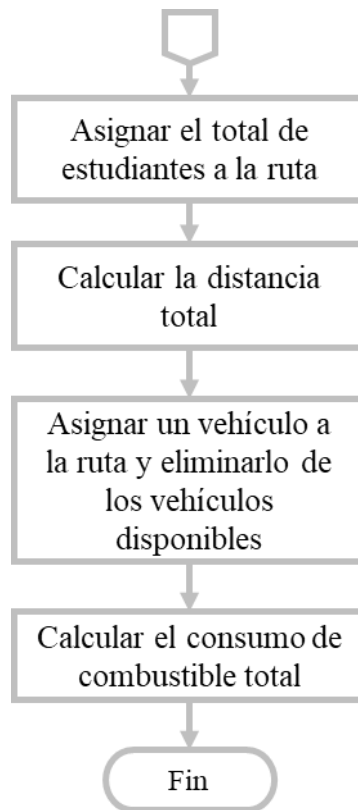


Figura 12. Diagrama de flujo algoritmo de ahorros Clarke and Wright.

Los datos anteriormente mencionados al inicio del código se importan desde Excel, por medio del argumento de entrada *xlsread('Nombre del documento','Hoja#','Rango')*. Al final los resultados también se exportan a Excel con el argumento de salida *xlswrite('Nombre del archivo de salida','Variable','Hoja#')*.

Como se observa en la teoría el algoritmo de ahorros se basa en la creación de rutas por medio de la conexión de los arcos que generan ahorros mayores a 0, sin discriminar la capacidad de los vehículos y el tamaño de la flota. En este caso en particular, se cuenta con un total de 11 vehículos a disposición con diferentes capacidades, es por esto que para la asignación de estos se realizaron una serie de supuestos, los cuales son:

- Los vehículos se organizan inicialmente por capacidad de menor a mayor y se asignan en dicho orden.

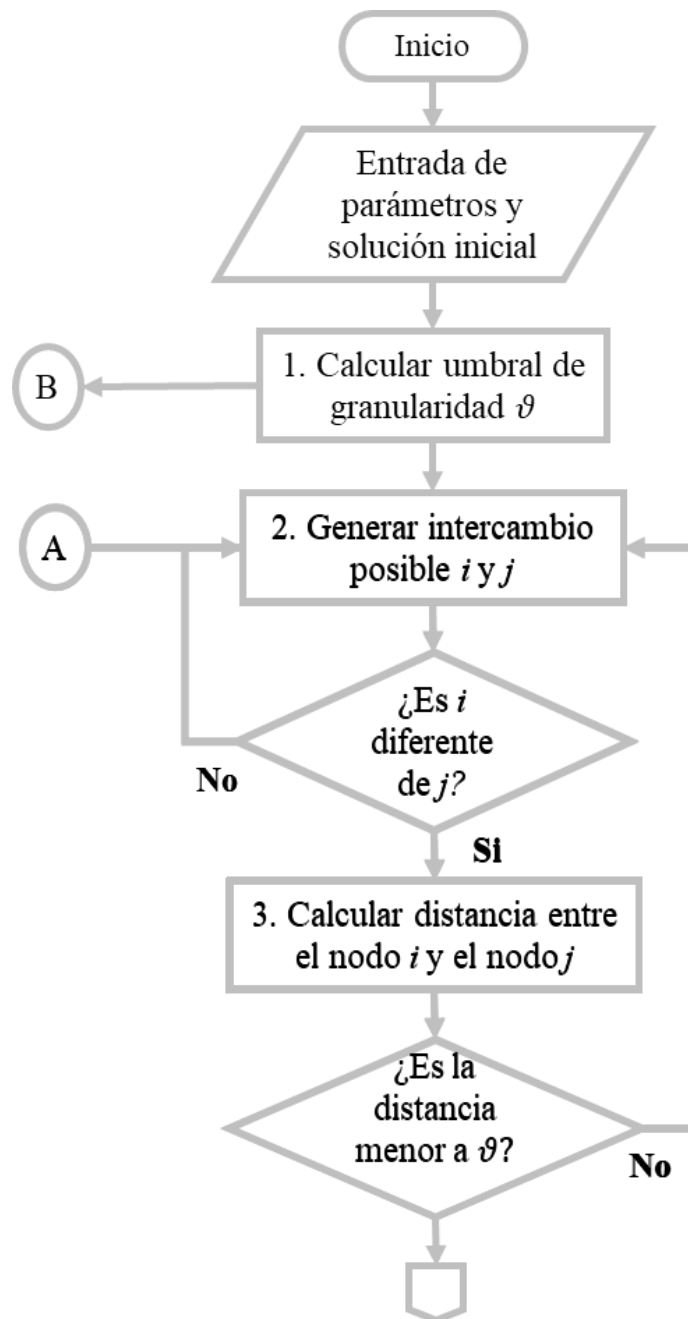
- Como al inicio se crean todas las rutas individuales posibles, a cada ruta se le debe asignar un vehículo, puesto que al final cuando no existen más ahorros puede resultar más de una ruta individual y con estos valores finales calcular el consumo total de combustible en todas las rutas, pero puede resultar que para el caso en el que la cantidad de paradas supera el número de vehículos, no existirían más vehículos para asignar a todas las rutas individuales. Lo cual, lleva a la suposición de que al momento en el que se presente lo anterior se asigna el vehículo 2, las veces que sean necesarias a las rutas individuales faltantes.
- Al final, el resultado puede ser un número mayor de rutas que de vehículos disponibles, suponiendo que se cuenta con más de un vehículo del tipo 2.
- También, durante la asignación de vehículos a la ruta en desarrollo, estos se van asignando de menor capacidad a mayor capacidad y la construcción de dicha ruta termina una vez que se llene la capacidad total del vehículo o la capacidad parcial (si es el caso de que añadiendo el siguiente nodo a la ruta se supera la capacidad del vehículo), o termina cuando no existen más ahorros mayores a 0 en los nodos que salen de la última posición de la ruta. Es por esto, que una vez no hay más vehículos disponibles y todavía quedan ahorros restantes el algoritmo continúa creando rutas, pero asigna el vehículo número 2, en estos casos.

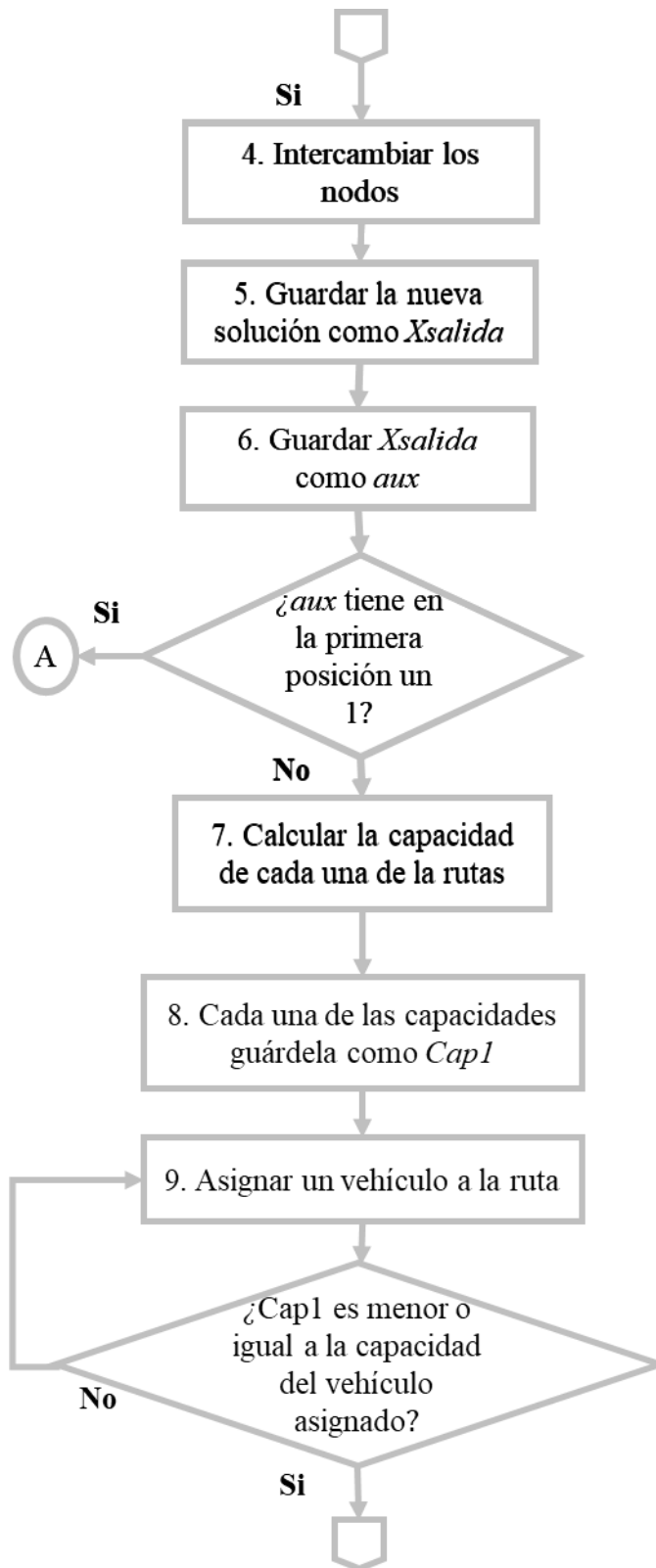
9.3. Metaheurística Búsqueda Tabú Granular

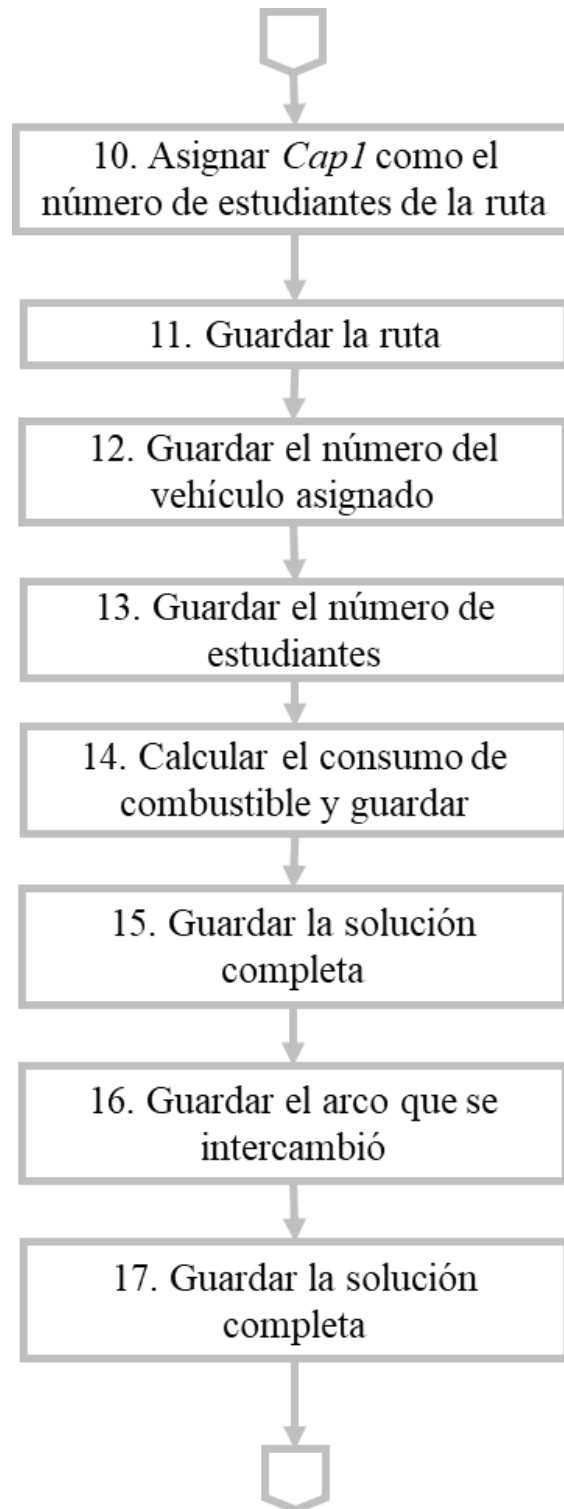
La iniciación de la metaheurística consiste en una solución inicial y el valor de la función objetivo correspondiente, proveniente de cualquier tipo de método que la genere, debido a esto la solución inicial se genera con el *Algoritmo de ahorros de Clarke y Wright* como se observa anteriormente, para iniciar con la aplicación del algoritmo metaheurístico, el cual se basa en el

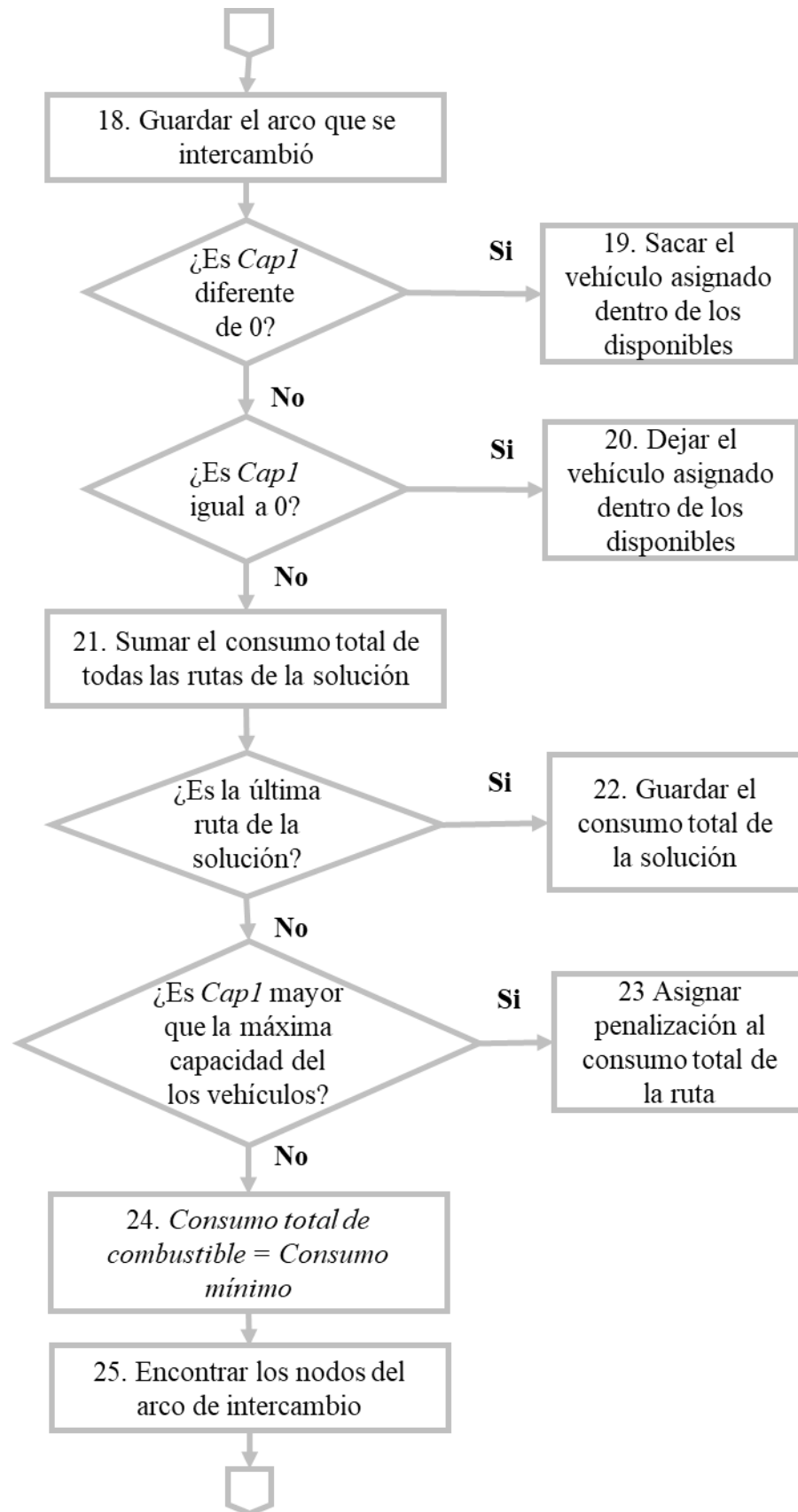
desarrollado en el artículo “*Un algoritmo basado en búsqueda tabú granular para la solución de un problema de ruteo de vehículos considerando flota heterogénea*” (Puenayán et al., 2014).

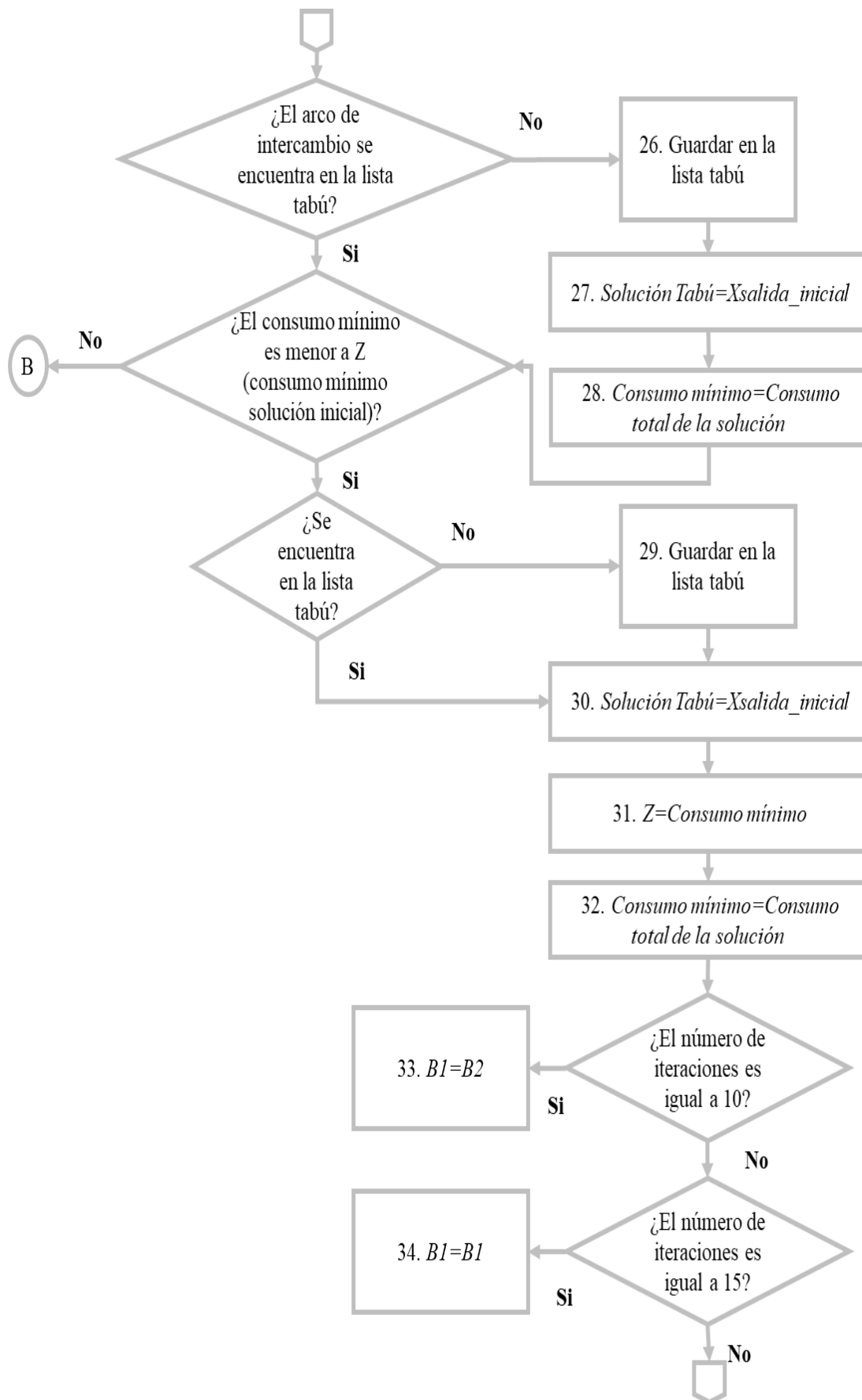
A continuación, se observa el diagrama de flujo de la metaheurística Búsqueda Tabú Granular y posteriormente su explicación a detalle.











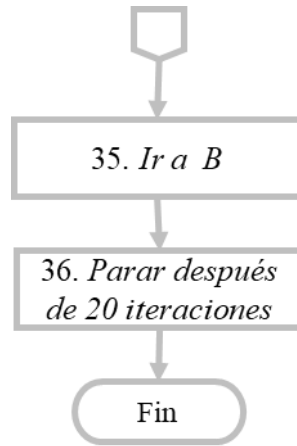


Figura 13. Diagrama de flujo metaheurística Búsqueda Tabú Granular.

Se ingresan nuevamente los datos mencionados en la sección 9.1. *Datos a ingresar* y se ingresa la solución inicial como un vector que tiene la siguiente forma:

1	2	3	1	5	1	6	4	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 14. Vector solución inicial ejemplo. Elaboración propia.

El vector contiene todas las rutas generadas para dicha solución, donde el número uno indica el inicio y el fin de una ruta, lo cual indica que en el ejemplo de la figura 14 se crearon tres rutas: $1 - 2 - 3 - 1$, $1 - 5 - 1$ y $1 - 6 - 4 - 1$. También, ingresa el valor de la función de dicha solución con el nombre de Z .

“El éxito del algoritmo propuesto depende directamente de los parámetros utilizados” (Puenayán et al., 2014), es por eso que los valores de los parámetros $B1$, $B2$ y N_change fueron tomados de Puenayán et al.

Tabla 16.
Valores de los parámetros

Parámetro	Valor Obtenido
$B1$	1.5
$B2$	4.5
N_change	10

El valor de N_change se aplica en la operación 32 del diagrama de flujo y para la operación 33 se aplica el N_vuelta con un valor de 15, el cual fue definido por pruebas realizadas al algoritmo desarrollado para esta investigación.

En el algoritmo se aplicaron una serie de características de Búsqueda Tabú, las cuales son:

- Criterio de aspiración: esta estrategia se aplica al aceptar movimientos así sean un movimiento tabú, solo si este intercambio genera un consumo de combustible menor a la mejor solución encontrada durante la búsqueda.
- Estrategia de diversificación: esta estrategia se aplica tomando valores grandes de B (en este caso 4.5) con el fin de explorar soluciones no visitadas anteriormente.
- Estrategia de intensificación: esta estrategia se aplica tomando valores pequeños de B (en este caso 1.5) con el fin de explorar soluciones cercanas a la mejor encontrada anteriormente.
- Tipo de movimiento: el tipo de movimiento aplicado en el algoritmo fue el movimiento de intercambio.
- Tenure: tiene un valor de 5.
- Lista tabú: la lista tiene un tamaño de 5.

Otras estrategias utilizadas en el desarrollo del algoritmo fueron:

- Penalización: este valor de penalización, el cual es igual a 100000000000000000000 se aplica con el objetivo de diferenciar las soluciones que contienen rutas que superan la capacidad máxima del vehículo con mayor capacidad y evita que sea tomado como consumo mínimo por el algoritmo.
- Rutas con dos unos seguidos: esto quiere decir que hay menos rutas de las que contaba la solución inicial, por ejemplo, *Solución inicial* = [1 2 3 4 1 5 6 1 7 1] tiene 3 rutas y se

resultan dos unos seguidos podría resultar así *Solución después del movimiento* = [1 2 3 4 1 5 6 7 1 1], como se puede observar se redujeron las rutas a 2. A lo anterior el algoritmo lo identifica cuando la variable *Cap1* toma el valor de 0 y este asigna a la ruta 11 un valor de 0 como función objetivo y no le asigna vehículo. Esto evita que se tomen vehículos por dicha ruta y se generen consumos inexistentes.

10. Experimentación

Esta etapa de la investigación se lleva a cabo mediante el uso del software Sistema General de Modelaje Algebraico (GAMS) el cual permite modelar problemas de optimización lineales, no lineales o mixtos mediante el método exacto de ramificación y acotamiento. También, se hace uso del software de programación Laboratorio de matrices (MATLAB), el cual permite la implementación de la técnica heurística y metaheurística aplicadas en el presente trabajo.

10.1. Instancias

Debido a que el modelo formulado resultó con una estructura diferente a aquellos encontrados en la literatura, no fue posible aplicar las instancias encontradas con el fin de evaluar los resultados obtenidos. Es por ello que con la recopilación de datos de otras investigaciones y datos reales recopilados por la empresa de transporte Seres de la ciudad de Bucaramanga mencionada anteriormente, se construyeron las instancias requeridas por el modelo en la etapa de experimentación.

Los parámetros asociados al problema son coordenadas de los estudiantes, número de estudiantes a recoger por parada, peso del total estudiantes a recoger por parada, tiempo de espera por parada, número de vehículos, velocidad del vehículo, capacidad del vehículo, peso del vehículo vacío y coeficientes de la regresión (función objetivo). A continuación, una breve descripción de la obtención de cada uno de los parámetros:

- Coordenadas de los estudiantes: estos datos fueron tomados del trabajo de grado desarrollado por Bustos y Pinilla, en el cual también contaban como parámetro de entrada las coordenadas de los estudiantes para realizar la asignación a las paradas de acuerdo a una distancia máxima permitida para recorrer. Ya que en este modelo se aplicaron instancias de diferentes tamaños, se modificaron para cumplir con los tamaños

preestablecidos aleatoriamente de cada una de las instancias (las distancias se generaron en kilómetros).

- Número de estudiantes: se asume que por casa se recogerá solo un estudiante y solo en algunos casos de manera aleatoria se asignan tres estudiantes por casa o parada, debido a que esto se puede presentar en los casos en el que la parada es un conjunto residencial.
- Peso de los estudiantes: según la OMS⁹ y las tablas de patrón de crecimiento entre 0 y 18 años, un infante de 6 años de edad (característica del individuo a transportar) en promedio pesa 19,91 kilogramos, por lo que se asume un peso de 20 kilogramos por estudiante a recoger (los pesos se tabularon en toneladas).
- Tiempo de espera: de manera aleatoria se asume 1 minuto de espera por niño a recoger (el tiempo se tabuló en horas).
- Tipo de vehículo: los datos asociados a los vehículos como lo son cantidad, capacidad y peso, fueron los datos proporcionados por la empresa de transporte relacionados a su flota propia de vehículos (11 vehículos en total), los cuales se encuentran en la tabla 7.

Tabla 17.
Características de la flota de vehículos

Tipo de vehículo	Marca	Capacidad	Peso vehículo vacío (ton)
Micro buses	Hyundai	12	2.265
	Volkswagen	16	2.883
	Nissan Urvan	16	1.920
	Renault	18	2.007
	Kia	19	2.207
Busetas	Nissan	23	2.340
	Hyundai	23	4.185
	Chevrolet	23	5.200
Buses	Chevrolet	37	6.407
	Mercedes benz	38	5.990
	Hyundai	31	4.085

⁹ OMS: Organización Mundial de la Salud.

- Velocidad del vehículo: según el Código Nacional de Tránsito Terrestre (artículo 106) el límite de velocidad en las zonas escolares y residenciales es 30 kilómetros por hora, por ello que se asume una velocidad de 30 kilómetros por hora para cada uno de los 11 vehículos a utilizar.
- Coeficientes de la regresión: en estos parámetros de entrada se utilizan los valores generados en la sección 7.3.1.2 *Función objetivo*.

La codificación de cada una de las instancias se generó de la siguiente forma:

Ins1-p5-s12-v11

Donde:

- Ins1: representa el número de la instancia, que en este caso es 1.
- P5: representa el número total de paradas de la instancia, que en este caso es 5.
- S12: representa el número total de estudiantes de la instancia, que en este caso es 12.
- V11: representa el número total de vehículos a utilizar, que para todas las instancias generadas será el mismo (11 vehículos).

En total se generaron 20 instancias con las cuales se llevará a cabo la experimentación en la cual se compara el rendimiento de los métodos de solución elegidos. A continuación, se observa cada una de las instancias y sus características en la tabla 8.

Tabla 18.
Características instancias

Código	Número de paradas	Número de estudiantes	Cantidad de vehículos
Ins1-p5-s12-v11	5	12	11
Ins2-p10-s12-v11	10	12	11
Ins3-p15-s20-v11	15	20	11
Ins4-p20-s20-v11	20	20	11
Ins5-p25-s35-v11	25	35	11
Ins6-p30-s35-v11	30	35	11

Ins7-p35-s41-v11	35	41	11
Ins8-p40-s41-v11	40	41	11
Ins9-p45-s55-v11	45	55	11
Ins10-p50-s55-v11	50	55	11
Ins11-p55-s62-v11	55	62	11
Ins12-p60-s62-v11	60	62	11
Ins13-p65-s70-v11	65	70	11
Ins14-p70-s70-v11	70	70	11
Ins15-p75-s88-v11	75	88	11
Ins16-p80-s88-v11	80	88	11
Ins17-p85-s95-v11	85	95	11
Ins18-p90-s95-v11	90	95	11
Ins19-p95-s104-v11	95	104	11
Ins20-p100-s104-v11	100	104	11

10.2. Resultados

En esta sección se encuentran los detalles relacionados a la aplicación de los métodos de solución y sus respectivos resultados, los cuales se ejecutaron en el mismo equipo de cómputo mencionado en la tabla 7.

10.2.1. Método exacto. La solución del problema por el método exacto, se realizó por medio del software GAMS, en el cual se programó el modelo matemático formulado, con los siguientes valores de los parámetros de entrada:

Tabla 19.
Parámetros de entrada método exacto.

Parámetro	Valor
a1	4.0864
a2	4.8771
b	-14.3004
M	38
N	Peso del total de niños a recoger por instancia
T	1

El valor de $a1, a2, b, M$ y T son los mismos en todas las instancias, excepto N puesto que representa un valor grande de peso de los estudiantes; es por eso, que para cada instancia se ingresó el peso total de los niños a recoger. A continuación, se observan los resultados para el método exacto, lo que quiere decir que los valores obtenidos son los valores óptimos.

Tabla 20.

Resultados método exacto

Instancia	Vehículos	Ruta	F.O(gal)	Tiempo (seg)
Ins1-p5-s12-v11	1	0-4-5-3-1-2-0	7775.596	0.17
Ins2-p10-s12-v11	1	0-6-3-8-10-2-5-9-4-1-7-0	7720.007	0.33
Ins3-p15-s20-v11	1	0-11-5-12-4-10-3-14-7-8-1-13-6-9-2-15-0	9425.722	2.92
Ins4-p20-s20-v11	1	0-9-17-2-8-16-35-1-12-13-11-19-6-10-7-14-4-20-15-18-0	9368.63037	19.53
Ins5-p25-s35-v11	2	0-13-7-24-5-21-19-8-23-1-15-9-17-0 0-11-22-25-20-18-16-14-10-2-3-12-6-4-0	17507.5799	25.85
Ins6-p30-s35-v11	2	0-25-16-14-9-5-8-15-21-29-30-26-10-13-12-28-4-18-1-3-27-19-2-7-24-22-23-0 0-17-30-26-10-13-12-28-4-18-1-3-27-19-2-7-24-22-23-0	17530.5404	21.90
Ins7-p35-s41-v11	2	0-3-25-21-7-33-24-6-15-1-34-23-20-11-17-4-22-14-9-0 0-29-27-2-12-28-30-35-13-8-16-26-18-10-31-32-5-19-0	17505.52	12.84

Instancia	Vehículos	Ruta	F.O(gal)	Tiempo (seg)
Ins8-p40-s41-v11	3	0-34-18-10-13-29-27-5-0	25245.4189	52.09
		0-15-8-36-17-14-9-30-35-39-38-31-32-6-11-0		
		0-19-12-16-24-28-2-3-7-33-40-37-26-25-21-22-20-1-4-23-0		
Ins9-p45-s55-v11	3	0-36-33-35-15-23-1-18-38-45-9-44-31-30-42-0	25129.4423	76.63
		0-13-22-11-10-25-19-17-43-8-32-12-21-14-26-0		
		0-39-24-37-34-41-29-5-6-40-28-2-3-27-16-20-7-4-0		
Ins10-p50-s55-v11	7	0-27-26-47-32-50-5-12-0	104140.12	999.55
		0-20-40-8-6-23-37-49-41-44-33-25-45-21-24-16-0		
		0-9-10-15-0		
		0-14-17-34-0		
		0-28-19-22-48-36-1-11-42-39-18-30-0		
		0-3-38-42-46-7-13-35-29-43-0		
Ins11-p55-s62-v11	9	0-31-0	129832.244	999.56
		0-38-32-42-48-43-51-12-30-35-0		
		0-5-27-34-54-50-0		
		0-8-29-36-19-9-0		
		0-4-22-15-55-13-46-23-28-20-0		
		0-26-1-33-6-24-0		
		0-47-11-10-16-0		
		0-44-17-18-0		
		0-31-41-45-52-0		
		0-25-14-21-53-40-39-37-3-49-7-2-0		

Instancia	Vehículos	Ruta	F.O(gal)	Tiempo (seg)
Ins12-p60-s62-v11	3	0-15-11-4-54-55-6-33- 23-26-48-49-57-38-42- 35-32-37-1-0 0-40-45-52-3-39-59-51- 43-41-21-2-5-47-60-17- 7-27-46-53-0 0-30-29-25-28-22-31- 24-10-16-19-34-36-14- 8-20-13-12-58-50-44- 18-9-56-0	35006.823	898.43
Ins13-p65-s70-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins14-p70-s70-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins15-p75-s88-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins16-p80-s88-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins17-p85-s95-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins18-p90-s95-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Ins19-p95-s104-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			
Instancia	Vehículos	Ruta	F.O(gal)	Tiempo (seg)
Ins20-p100-s104-v11	No se encuentra solución – Excede el límite de tiempo			

Se observa que para la instancia 1, se recorrió la ruta 0-4-5-3-1-2-0, lo que quiere decir que el vehículo 3 inició su recorrido en la escuela, visita la parada 4, luego la 5, luego la 3, luego la 1, luego la 2 y finaliza su recorrido en la escuela, y consume un total 7.775,596 galones de gasolina. El tiempo que tomó el software en encontrar la solución óptima fue de 0,17 segundos. La lectura de los resultados se repite para las demás instancias.

De acuerdo a estos resultados se puede inferir que debido a que el objetivo es minimizar el consumo de combustible en función del peso del vehículo, el peso de los estudiantes y la distancia recorrida, el factor que influye en el consumo de combustible en mayor proporción es el peso del vehículo, pues representa el porcentaje más grande dentro del consumo total, ya que es el peso del vehículo multiplicado por el coeficiente a_1 de la regresión. En cuanto al tiempo que toma el software en encontrar una solución, se puede observar que a medida que el tamaño de la instancia

crece implica mayor tiempo para encontrar una solución, aunque no se observa una relación de aumento en la misma proporción. Finalmente, de la instancia 13 a la 20 se superó el límite de tiempo del software para encontrar una solución, por ello no se observan valores en dichos casos.

Tabla 21.
Porcentaje de ocupación del vehículo

Instancia	Vehículo	Capacidad ocupada	Capacidad máxima	Capacidad disponible (%)	Capacidad ocupada (%)
Ins1-p5-s12-v11	3	12	16	25%	75%
Ins2-p10-s12-v11	3	12	16	25%	75%
Ins3-p15-s20-v11	6	20	23	13%	87%
Ins4-p20-s20-v11	6	20	23	13%	87%
Ins5-p25-s35-v11	4	16	18	11%	89%
	6	19	23	17	83
Ins6-p30-s35-v11	4	14	18	22%	78%
	6	21	23	9%	91%
Ins7-p35-s41-v11	4	14	18	22%	78%
	6	23	23	0%	100%
Ins8-p40-s41-v11	3	6	16	63%	38%
	4	15	18	17%	83%
	6	20	23	13%	87%
Ins9-p45-s55-v11	3	14	16	13%	88%
	4	18	18	0%	100%
	6	23	23	0%	100%
Ins10-p50-s55-v11	1	7	12	42%	58%
	3	15	16	6%	94%
	4	3	18	83%	17%
	7	3	23	87%	13%
	8	15	23	35%	65%
	9	11	31	65%	35%
	11	1	38	97%	3%

Instancia	Vehículo	Capacidad ocupada	Capacidad máxima	Capacidad disponible (%)	Capacidad ocupada (%)
Ins11-p55-s62-v11	1	9	12	25%	75%
	2	6	16	63%	38%
	3	7	16	56%	44%
	4	10	18	44%	56%
	5	5	19	74%	26%
	7	5	23	78%	22%
	9	3	31	90%	10%
	10	4	37	89%	11%
	11	13	38	66%	34%
Ins12-p60-s62-v11	5	19	19	0%	100%
	6	20	23	13%	87%
	7	23	23	0%	100%
Promedio				36%	64%

En la tabla 21, se encuentran los porcentajes de ocupación de los vehículos habilitados en cada instancia, como se puede observar la solución óptima encontrada hasta la instancia 12 arrojó que en promedio los vehículos no utilizan el 36% de su capacidad, es decir, en promedio el 64% de la capacidad de los vehículos es ocupada. Se esperaría que por ser un resultado óptimo la capacidad fuera ocupada al 100% o cerca a este valor, pero el objetivo es disminuir el consumo de combustible, por lo que se puede ver que se corrobora la conclusión asociada al valor de la función objetivo, la cual es que la mayor influencia en el consumo de combustible se encuentra en el peso del vehículo y no en la cantidad de personas transportadas. Aunque se presenta que en 12 de 35 rutas creadas en total la capacidad del vehículo fue ocupada en un porcentaje mayor al 87%, lo cual se observa es un alto valor de ocupación a pesar de que este no sea el objetivo.

10.2.2. Metaheurística. La metaheurística se programó en el software MATLAB como se mencionó en anteriores oportunidades y se aplicaron los valores de los parámetros mostrados en

el apartado 9.3 *Metaheurística Tabú Granular*. A continuación, se observan los resultados obtenidos

Tabla 22.
Resultados método heurístico

Búsqueda Tabú Granular				
Instancia	Número de rutas	Solución	Tiempo segundos	FO galones
Ins1-p5-s12-v11	1	0-4-5-3-1-2-0	0.052471	9184.58
Ins2-p10-s12-v11	1	0-9-5-4-1-7-3-6-8-10-2-0	0.046156	9133.19
Ins3-p15-s20-v11	2	0-8-14-7-2-9-6-0	0.059472	20906.34
		1-13-11-5-12-10-3-4-15-1-0		
Ins4-p20-s20-v11	2	0-5-20-7-15-6-4-10-18-19-13-11-12-0	0.057521	20844.97
		0-17-9-2-16-8-3-14-1-0		
		0-9-17-23-1-15-2-7-21-5-24-8-19-0		
Ins5-p25-s35-v11	3	0-12-6-4-3-0	0.064163	28609.62
		0-20-18-16-14-10-25-22-11-13-0		
		0-23-22-24-8-5-15-20-19-27-7-11-0		
Ins6-p30-s35-v11	3	0-25-16-14-29-28-13-0	0.058954	28968.32
		0-26-30-10-12-6-4-18-1-3-2-9-21-17-0		
		0-34-31-13-8-18-16-11-4-17-22-14-0		
Ins7-p35-s41-v11	3	0-30-23-20-28-12-10-25-21-7-3-19-5-9-0	0.055624	28120.21
		0-33-29-27-15-1-2-6-32-24-26-35-0		
		0-6-12-0		
Ins8-p40-s41-v11	4	0-30-35-22-20-25-26-21-14-9-8-15-34-24-19-16-0	0.140389	36717.49
		0-39-38-31-32-28-23-4-1-2-3-36-0		
		0-40-37-33-29-27-17-13-18-10-7-5-11-0		

Instancia	Número de rutas	Solución	Tiempo segundos	FO galones
Ins9-p45-s55-v11	5	0-14-4-23-1-37-0	0.072086	46182.91
		0-28-18-10-13-11-12-40-7-2-3-0		
		0-16-42-35-30-38-36-25-29-5-6-		
		22-28-0		
		0-43-33-27-31-32-15-17-9-8-0		
Ins10-p50-s55-v11	4	0-44-45-41-39-34-21-24-26-20-0	0.073506	36387.00
		0-20-40-22-23-8-6-14-17-4-2-0		
		0-42-35-30-31-39-29-24-16-18-43-45-50-32-41-0		
		0-47-36-33-15-13-10-27-26-25-12-3-7-5-21-11-9-0		
		0-49-37-46-19-1-28-38-34-44-48-0		
Ins11-p55-s62-v11	4	0-26-27-50-18-19-15-14-9-8-22-23-5-32-6-2-0	0.076210	36371.01
		0-51-43-48-46-16-17-55-34-29-24-25-44-20-21-13-3-0		
		0-52-45-28-35-37-38-39-40-30-31-12-7-10-11-0		
		0-53-49-47-41-42-36-54-33-1-4-0		
Ins12-p60-s62-v11	4	0-23-26-34-19-16-10-36-14-8-50-13-20-33-40-3-9-18-2-0	0.06645	36354.11
		0-48-49-57-42-38-24-35-30-29-25-31-28-22-55-54-6-0		
		0-12-58-44-27-15-11-17-7-60-47-21-5-0		
		0-59-51-43-41-4-32-37-1-53-46-39-56-52-45-0		
Ins13-p65-s70-v11	5	0-32-37-1-53-18-3-14-8-0	0.076364	45293.89
		0-47-60-21-5-2-15-11-17-7-27-62-54-6-35-30-29-0		
		0-9-64-46-39-56-52-45-40-33-26-23-34-19-16-24-10-36-0		
		0-55-65-31-28-22-20-13-12-25-48-49-57-42-38-0		
		0-58-63-50-44-61-51-59-43-41-4-0		

Instancia	Número de rutas	Solución	Tiempo segundos	FO galones
Ins14-p70-s70-v11	5	0-44-34-38-28-17-37-19-14-4-2-9-13-15-10-27-26-25-12-0	0.071335	45153.24
		0-51-32-1-5-7-3-21-11-0		
		0-60-61-62-57-39-54-35-30-31-29-24-16-18-43-50-0		
		0-67-66-40-20-22-23-8-6-63-70-53-46-4-56-52-41-0		
		0-68-69-65-42-64-59-58-47-36-33-55-48-0		
Ins15-p75-s88-v11	7	0-11-21-32-1-23-41-55-48-44-9-33-58-47-36-15-13-10-12-3-7-5-0	0.083604	70995.60
		0-61-60-62-42-35-30-31-29-24-16-18-43-45-50-51-0		
		0-67-66-40-20-22-6-8-37-19-17-14-4-2-34-0		
		0-70-71-74-63-53-46-49-56-52-0		
		0-28-38-39-57-0		
Ins16-p80-s88-v11	6	0-72-73-64-59-68-69-65-54-25-26-27-0	0.075283	54627.01
		0-75-0		
		0-56-18-23-48-9-10-0		
		0-58-61-52-50-43-42-55-44-38-30-40-46-49-21-39-0		
		0-62-67-31-28-24-22-34-17-11-8-77-51-35-32-0		
		0-74-80-57-45-41-47-37-29-71-73-0		
		0-76-69-14-15-12-13-5-6-20-27-3-4-16-25-1-2-36-19-7-0		
		0-79-78-65-66-60-59-72-68-54-64-53-26-63-70-75-33-0		

Instancia	Número de rutas	Solución	Tiempo segundos	FO galones
Ins17-p85-s95-v11	6	0-1-9-11-65-60-58-36-26-47-66-16-20-22-27-18-0	0.07038	54551.14
		0-8-13-83-12-10-84-80-69-79-74-73-0		
		0-14-3-77-72-75-76-39-44-54-57-50-45-46-33-31-6-2-81-0		
		0-15-5-7-4-71-67-64-85-78-68-61-52-34-0		
		0-63-70-59-49-53-43-32-29-19-17-24-48-51-62-0		
		0-82-55-35-37-38-23-21-28-30-25-42-41-40-56-0		
Ins18-p90-s95-v11	6	0-33-29-27-39-21-22-16-8-9-13-23-31-44-53-0	0.08121	54493.77
		0-56-82-40-37-30-6-7-2-3-12-24-35-14-15-4-5-1-38-26-0		
		0-63-66-90-89-41-55-57-48-47-60-64-73-59-45-51-54-49-43-0		
		0-78-86-76-85-79-62-50-46-52-42-34-28-0		
		0-81-88-74-19-20-17-18-10-11-25-32-72-67-36-0		
		0-87-80-75-68-61-58-69-77-84-83-70-71-65-0		
Ins19-p95-s104-v11	6	0-35-42-31-30-18-16-32-51-1-5-7-12-3-10-13-9-17-19-14-4-2-0	0.07341	54380.85
		0-66-67-40-20-22-23-8-6-37-56-52-41-28-38-34-44-55-48-15-0		
		0-76-77-72-73-64-59-68-29-65-54-25-26-27-47-58-36-33-0		
		0-85-84-74-75-95-70-71-63-53-46-49-82-0		
		0-89-90-87-88-80-81-95-78-79-62-57-60-61-24-69-39-0		
		0-91-92-86-83-50-45-43-21-11-0		

Instancia	Número de rutas	Solución	Tiempo segundos	FO galones
Ins20-p100-s104-v11	6	0-60-92-66-69-24-32-28-37-26- 21-6-11-10-13-4-1-5-16-7-50- 3-0	0.07886	54348.01
		0-68-82-65-61-67-57-49-56-53- 75-43-15-29-27-22-27-25-2-12- 0		
		0-72-88-94-71-73-34-33-31-47- 46-38-30-20-14-18-19-23-0		
		0-96-98-87-91-90-52-48-42-40- 55-35-99-0		
		0-97-93-78-89-84-83-79-85-76- 74-63-62-51-64-58-0		
		0-100-95-80-54-39-86-59-44- 45-36-41-8-9-81-77-70-0		

Se puede observar una relación entre el número de rutas y el consumo de combustible, lo cual se genera debido a que si se aumentan las rutas aumenta el número de vehículos y, por ende, es mayor el consumo de combustible. Se observa también, una particularidad la cual es, que en algunos casos sin importar el tamaño de la instancia si se habilitan el mismo número de rutas la función objetivo tiende a variar y en algunas ocasiones es menor el consumo de combustible en instancias de mayor tamaño, por ejemplo, la instancia 19 y 20. En este caso las dos instancias tienen el mismo número de rutas, el mismo número de estudiantes, pero difieren en el número de paradas por 5 personas; esto puede ocurrir, ya sea porque a pesar de utilizar el mismo número de vehículos, estos pueden tener diferentes características (peso del vehículo), lo cual influye en el consumo o debido a que realizar desplazamientos más largos con menos estudiantes disminuye el consumo de combustible.

10.2.3. Comparación de resultados entre métodos de solución. Inicialmente se observa el rendimiento de la heurística que genera la solución inicial y posteriormente, se observa el método exacto vs la metaheurística.

Tabla 23.

Heurística vs metaheurística

Instancia	Ahorros		Tabú	
	Tiempo (segundos)	Consumo de combustible (galones)	Tiempo (segundos)	Consumo de combustible (galones)
Ins1-p5-s12-v11	0.00961	9185,29	0.05247	9184,58
Ins2-p10-s12-v11	0.01722	9130,14	0.04615	9133,19
Ins3-p15-s20-v11	0.01546	32562,21	0.05947	20906,34
Ins4-p20-s20-v11	0.01582	29918,53	0.05752	20844,97
Ins5-p25-s35-v11	0.01722	59723,85	0.06416	28609,62
Ins6-p30-s35-v11	0.01204	54586,53	0.05895	28968,32
Ins7-p35-s41-v11	0.01932	59585,46	0.05562	28120,21
Ins8-p40-s41-v11	0.04414	85592,72	0.14038	36717,49
Ins9-p45-s55-v11	0.02948	138428,98	0.07208	46182,91
Ins10-p50-s55-v11	0.02245	90335,73	0.07350	36387,00
Ins11-p55-s62-v11	0.03311	92596,09	0.07621	36371,01
Ins12-p60-s62-v11	0.01252	84611,38	0.06645	36354,11
Ins13-p65-s70-v11	0.02930	135787,90	0.07636	45293,89
Ins14-p70-s70-v11	0.03150	131398,55	0.07133	45153,24
Ins15-p75-s88-v11	0.02941	252081,31	0.08360	70995,60
Ins16-p80-s88-v11	0.02785	186562,00	0.07528	54627,01
Ins17-p85-s95-v11	0.02805	186579,12	0.07038	54551,14
Ins18-p90-s95-v11	0.03171	185727,35	0.08121	54493,77
Ins19-p95-s104-v11	0.02582	250118,51	0.07341	54380,85
Ins20-p100-s104-v11	0.02774	189695,64	0.07886	54348,01
Promedio	0.02399	-	0.07167	-

Como se observa en la tabla 23, en tiempos de ejecución la heurística y la metaheurística las dos presentan cortos tiempos en todas las instancias probadas, pero comparando entre promedios el tiempo de la heurística es menor al tiempo que toma la metaheurística ejecutándose, aunque no lo es gran proporción. En cuanto al valor de la función objetivo, los valores no son comparables, puesto que la solución inicial en algunos casos genera soluciones infactibles y la metaheurística no permite soluciones infactibles como resultado final.

En la tabla 24 se tomó como tiempo de la metaheurística la suma entre el tiempo del algoritmo de ahorros y la Búsqueda Tabú Granular, puesto que para generar un resultado en la última depende de la solución inicial de la primera. A continuación, se observa el rendimiento del método exacto vs la metaheurística.

Tabla 24.
Método exacto vs metaheurística

Instancia	Exacto		Metaheurística		Diferencia	
	Tiempo	FO	tiempo	FO	Δ Tiem	Δ FO
Ins1-p5-s12-v11	0.17	7.775,59	0.06208	9.184,59	63.48%	18.12%
Ins2-p10-s12-v11	0.33	7.720,01	0.06338	9.133,20	80.79%	18.31%
Ins3-p15-s20-v11	2.92	9.425,72	0.07493	20.906,34	97.43%	121.80%
Ins4-p20-s20-v11	19.53	9.368,63	0.07334	20.844,98	99.62%	122.50%
Ins5-p25-s35-v11	25.85	17.507,58	0.08139	28.609,62	99.69%	63.41%
Ins6-p30-s35-v11	21.9	17.530,54	0.07099	28.968,32	99.68%	65.24%
Ins7-p35-s41-v11	12.84	17.505,52	0.07495	28.120,22	99.42%	60.64%
Ins8-p40-s41-v11	52.09	25.245,42	0.18453	36.717,50	99.65%	45.44%
Ins9-p45-s55-v11	76.63	25.129,44	0.10157	46.182,91	99.87%	83.78%
Ins12-p60-s62-v11	898.43	35.006,82	0.07898	36.354,11	99.99%	3.85%
Ins13-p65-s70-v11	-	-	0.10567	45.293,89	-	-
Ins14-p70-s70-v11	-	-	0.10284	45.153,25	-	-
Ins15-p75-s88-v11	-	-	0.11301	70.995,60	-	-
Ins16-p80-s88-v11	-	-	0.10314	54.627,01	-	-
Ins17-p85-s95-v11	-	-	0.09844	54.551,15	-	-
Ins18-p90-s95-v11	-	-	0.11293	54.493,77	-	-
Ins19-p95-s104-v11	-	-	0.09924	54.380,86	-	-
Ins20-p100-s104-v11	-	-	0.10660	54.348,02	-	-
Promedio	111.07	17.221,53	0.09488	38.826	93.96%	65%

La tabla 24 contiene la diferencia de tiempos y valor de función objetivo para las instancias de 1 a 12, puesto que como se mencionó anteriormente el método exacto no encontró soluciones para las demás instancias, ya que superó el tiempo límite de búsqueda de una solución. Los valores que se observan reflejan que en cuanto a tiempos de ejecución resulta la metaheurística más eficaz, pues generó soluciones 93,96% en promedio más rápido que el método exacto. Con respecto a la

función objetivo se encuentra que la metaheurística generó soluciones con valor de función objetivo 65% mayor que el método exacto.

11. Conclusiones

Se encuentra en la revisión de literatura un incremento de la conciencia ambiental a partir del año 2017, puesto que del total de los artículos revisados acerca de SBRP con consideraciones ambientales el 48% de ellos fueron publicados entre los años 2017 y comienzos del 2018, que fue el momento en el que se realizó la revisión de literatura. Además, se puede observar que los países que mayor aporte hicieron fue China y USA con el 28% y 24% de las publicaciones.

En el método exacto se observa que las restricciones con estructura como las ecuaciones (33), (34), (35), (36), (37) y (38) crea el resultado esperado que es la cancelación de sub-tours y generan control sobre los resultados del problema, por lo que se considera una buena estrategia para la estructura de algunas de las restricciones de problemas de diseño de rutas. También se observa, que la función objetivo (ecuación 27) aplicada no describe en detalle el comportamiento del consumo de combustible frente a diferentes variables, pues este puede depender de otros factores, pero permite un acercamiento y estudio al detalle de la relación del consumo de combustible con factores más globales, como lo son en este caso: el peso del vehículo, el peso de los estudiantes, y la distancia recorrida, lo cual lleva a la conclusión de que el factor que más influye sobre el consumo es el tipo de vehículo, en específico el peso del vehículo vacío.

Se concluye, en cuanto al diseño del algoritmo de la metaheurística Búsqueda Tabú Granular que la estrategia de asignación de vehículos de menor a mayor capacidad aplicada no funciona para problemas que consideran la disminución del consumo de combustible, puesto que el factor que mayor impacto tiene sobre este es el peso del vehículo.

Búsqueda Tabú Granular es una metaheurística de alta calidad en la aplicación de problemas de diseño de rutas con función objetivo de minimización de costos o de distancia recorrida. En cuanto a función objetivo de minimización de consumo de combustible con flota de vehículos

heterogénea no funciona igual, sin embargo, se observa que para las instancias que se pudieron comparar con el método exacto, en dos de ellas el algoritmo generó soluciones con un valor de función objetivo un 18% más alto y en una de ellas solo un 3,85% más alto que el método exacto, pero en promedio los resultados muestran un 65% más alto con tiempos computacionales 93,96% en promedio menores que el método exacto.

12. Recomendaciones

Se recomienda generar investigación acerca del SBRP con consideraciones ambientales en los países de centro américa y sur américa, puesto que no se encuentran publicaciones de dichos países, en especial en Colombia.

Se recomienda estudiar la influencia del tipo de combustible y el motor en el consumo, puesto que la implementación de vehículos eléctricos parcial o total se ve alejada de la realidad colombiana. También, estudiar el efecto de la velocidad sobre este.

Se recomienda evaluar la estrategia de asignación de vehículos de menor a mayor peso, en el desarrollo de algoritmos basados en la metaheurística Búsqueda Tabú Granular en el caso de problemas de ruteo de vehículos con flota heterogénea, cuando se busca implementar el objetivo de minimización de consumo de combustible o estudiar nuevas estrategias de asignación.

Se recomienda estudiar la variación de los parámetros utilizados en el algoritmo en la aplicación de los diferentes tipos de problemas de diseño de ruteo, pues de estos depende el éxito de este.

Se recomienda evaluar el impacto de diferentes métodos que generan la solución inicial del algoritmo basado en la metaheurística Búsqueda Tabú Granular.

Referencias bibliográficas

- Banco Mundial. (2018). Emisiones de CO2 Originadas por el Transporte (% del total de la quema de combustible). Retrieved March 7, 2018, from <https://datos.bancomundial.org/indicador/EN.CO2.TRAN.ZS>
- Batista, B. M., & Glover, F. (2006). Introducción a la Búsqueda Tabú, 03, 1–36.
- Bjorklund, M. (2011). Influence from the Business Environment on Environmental Purchasing - Drivers and Hinders of Purchasing Green Transportation Services. *Journal of Purchasing & Supply Management*, 17, 11–22.
- Bruns, A. (1998). *Zweistufige Standortplanung unter Berücksichtigung von Tourenplanungsaspekten – Primale Heuristiken und Lokale Suchverfahren*. Sankt Gallen University.
- Corberán, A., Fernández, E., Laguna, M., & Martí, R. (2000). Heuristic Solutions to The Problem of Routing School Buses with Multiple Objectives. *Journal of the Operational Research Society*, 53(4), 427–435. Retrieved from <https://www.uv.es/rmarti/paper/docs/routing4.pdf>
- Cruz, M., Moreno, P., & Peralta, J. del C. (2014). Aplicación de la teoría de la complejidad en optimización combinatoria. *Narraciones de La Ciencia y La Tecnología*, 35–42.
- Desrosiers, J., Ferland, J., Rousseau, J.-M., Lapalme, G., & Chapleau, L. (1981). *An Overview of a School Busing System*. North-Holland.
- Dirección de Tránsito y Transporte del área metropolitana de Bucaramanga, A. (2017). *Parque Automotor Oficial, Público y Particular en el Área Metropolitana de Bucaramanga*. Bucaramanga. Retrieved from <http://www.transitobucaramanga.gov.co/files/2018/estadisticas/parque-automotor-31-12-2017.pdf>
- García Sánchez, Á. (n.d.). *Técnicas metaheurísticas*. Retrieved from <http://www.iol.etsii.upm.es/arch/metaheurísticas.pdf>
- Glover, F., & Melián, B. (2003). Búsqueda Tabú. *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 7(019), 29–48. Retrieved from <http://www.redalyc.org/pdf/925/92571902.pdf>
- Hillier, F., & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones* (9a edición). México: McGraw-Hill.
- Küçükoğlu, İ., Ene, S., Aksoy, A., & Öztürk, N. (2013). A Green Capacitated Vehicle Routing Problem with Fuel Consumption Optimization Model. *International Journal of Computational Engineering Research*, 3(7), 16–23.
- Laporte, G. (1988). Location-Routing Problems. In *Location-routing problems*. (pp. 163–198). North-Holland.
- Mellios, G., Hausberger, S., Keller, M., Samaras, C., & Ntziachristos, L. (2011). Parameterisation of fuel consumption and CO2 emissions of passenger cars and light commercial vehicles for modelling purposes. *JRC Scientific and Technical Reports*.
- Minambiente, M. de ambiente y desarrollo sostenible. (2017). Con Movilidad Sostenible Colombia podrá disminuir la Contaminación del Aire. Retrieved November 13, 2018, from <http://www.minambiente.gov.co/index.php/noticias/3220-con-movilidad-sostenible-colombia-podra-disminuir-la-contaminacion-del-aire>
- Mohammed, F., Hassan, A., Selim, S., & Syed, N. M. (2017). Multi-period planning of closed-loop supply chain with carbon policies under uncertainty. *Transportation Research Part D*, 51, 146–172.

- Olivera, A. (2004). Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos.
- Pacheco, J., Caballero, R., Laguna, M., & Molina, J. (2012). Bi-Objective Bus Routing: An Application to School Buses in Rural Areas. *Transportation Science*, 47(3), 397–411. <https://doi.org/10.1287/trsc.1120.0437>
- Park, J., & Kim, B.-I. (2010). The School Bus Routing Problem: A Review. *European Journal of Operational Research*, 202, 311–319. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.017>
- Puenayán, D. E., Londoño, J. C., Escobar, J. W., & Linfati, R. (2014). Un algoritmo basado en búsqueda tabú granular para la solución de un problema de ruteo de vehículos considerando flota heterogénea. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 13(25), 81–98. <https://doi.org/10.22395/rium.v13n25a6>
- Rocha, L., González, E., & Orjuela, J. (2011). Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución. *Ingeniería*, 16(2).
- Rodriguez, G. (2017). Optimización del Problema de Ruteo y Programación de Buses Escolares con Restricciones de Congestión de Tráfico para Políticas de Rutas Compartidas (Mixed-Load) e Independientes (Single-Load), 1–53. Retrieved from <https://repositorio.escuelaing.edu.co/bitstream/001/619/1/ED - Trabajos de Grado Maestría en Ingeniería Industrial - 1070919216. pdf>
- Sarubbi, J., Mesquita, C., Wanner, E., Santos, V., & Silva, C. (2016). A Strategy for Clustering Students Minimizing the Number of Bus Stops for Solving the School Bus Routing Problem. *International Workshop on Urban Mobility & Intelligent Transportation Systems (UMITS)*, 1175–1180. <https://doi.org/10.1109/NOMS.2016.7502983>
- Soysal, M., Bloemhof-Ruwaard, J. ., Meuwissen, M. P. ., & Van der Vorst, J. G. A. . (2012). A review on quantitative models for sustainable food logistics management. *International Journal on Food System Dynamics*, 3, 136–155.
- Soysal, M., & Çimen, M. (2017). A Simulation Based Restricted Dynamic Programming Approach for the Green Time dependent Vehicle Routing Problem. *Computers and Operations Research*, 88, 297–305. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.06.023>
- Toth, P., & Vigo, D. (2004). The granular tabu search and its application to the vehicle-routing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 15(4), 333–346. <https://doi.org/10.1287/ijoc.15.4.333.24890>
- Yepes, V. (2002). *Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Zanakis, S. ., & Evans, J. . (1981). Heuristic “optimization”: why, when and how to use it. *Interfaces*, 11, 83–89.