Significados de la Demostración en una Comunidad de Práctica de Clase de Profesores de Matemáticas en Formación

Edwin Andrés Amaya Sánchez

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2020

Agradecimientos

A Dios, por haberme acompañado y guiado en este proceso, por ser mi fortaleza, brindarme sabiduría y experiencia para lograr mis objetivos.

A mis padres, Rosalba y Clímaco, por su apoyo incondicional en todo momento, por ser un excelente ejemplo de vida y por todas sus enseñanzas.

A mis hermanos y demás integrantes de mi familia, por el apoyo que siempre me brindan.

Al Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, mi director de tesis, quien con su experiencia, motivación, paciencia y apoyo, me ayudó a continuar con mis estudios.

A mis evaluadores, Dra. Sandra Evely Parada y Dr. John Henry Durango, por los aportes realizados que enriquecieron mi proceso de aprendizaje como investigador.

A la Escuela de Matemáticas de la UIS y el grupo de investigación EDUMAT-UIS, por el apoyo brindado para asistir a eventos académicos para enriquecer mi aprendizaje como educador matemático.

A Ingrid, Sergio y César, compañeros de maestría, quienes con sus aportes y apoyo constante me ayudaron en este proceso.

A Darío, Alex, Noris, Katerine, Dámaris y todas las personas que estuvieron en algún momento para escucharme y alentarme a continuar con mis estudios.

A los estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo (2018-I) por participar con dedicación, esfuerzo y empeño en esta investigación.

A todos ustedes ¡muchas gracias!

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

RESUMEN

TÍTULO: SIGNIFICADOS DE LA DEMOSTRACIÓN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE CLASE DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN[1]

AUTOR: EDWIN ANDRES AMAYA SANCHEZ [**]

PALABRAS CLAVES: COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE CLASE, PROFESORES EN FORMACIÓN, SIGNIFICADO, DEMOSTRACIÓN.

DESCRIPCIÓN:

En este documento presentamos resultados de una investigación que tuvo como objetivo caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación, que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración.

Para lograr el objetivo, se utilizaron elementos de la teoría de la práctica social de Wenger (2001), atendiendo al concepto de comunidad de práctica, vista también en el sentido de Clark (2005) como comunidad de práctica de clase, por su fundamentación metodológica. Entre los elementos más destacados que usamos de la teoría, está la negociación de significados, que para esta investigación tienen relación directa con la demostración, teniendo en cuenta sus tipos, funciones y significados. Las principales fuentes de información fueron las respuestas a los talleres diseñados, los ensayos, los encuentros y los artefactos documentales (notas de campo del investigador, registros de audio y video de algunas sesiones).

En el análisis de los datos obtenidos de los significados de la demostración negociados por los profesores en formación, se evidenció que estos son en gran parte dados por la experiencia que han tenido en su trayectoria académica (secundaria y primeros niveles universitarios). Además, se encontró que esos significados responden en algunos aspectos relacionados con una concepción estrictamente formalista de la demostración y en otros casos a una visión amplia acerca de la misma, lo cual aporta en prestar especial atención a la generación de comunidades de práctica donde se fortalezca la formación de profesores y la reflexión en el uso de la demostración en el aula.

---

[1] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal

ABSTRACT

TITLE: MEANINGS OF THE DEMONSTRATION IN A CLASSROOM COMMUNITY OF PRACTICE OF MATH TEACHERS IN TRAINING [2]

AUTHOR: EDWIN ANDRES AMAYA SANCHEZ[**]

KEY WORDS: CLASSROOM COMMUNITY OF PRACTICE, TEACHERS IN TRAINING, MEANING, DEMONSTRATION.

DESCRIPTION:

In this document we present results of an investigation that aimed to characterize the meanings negotiated by a class practice community of mathematics teachers in training, who participate in a calculus didactic course and reflect on the demonstration process.

To achieve the objective, elements of Wenger's theory of social practice (2001) were used, taking into account the concept of community of practice, also seen in the sense of Clark (2005) as a class practice community, for its methodological foundatio. Among the most prominent elements that we use in the theory, is the negotiation of meanings, which for this investigation are directly related to the demonstration, taking into account their types, functions and meanings. The main sources of information were the responses to the designed workshops, essays, meetings and documentary artifacts (researcher field notes, audio and video records of some sessions).

In the analysis of the data obtained from the meanings of the demonstration negotiated by the teachers in training, it was evidenced that these are largely given by the experience they have had in their academic career. In addition, it was found that these meanings respond in some aspects related to a strictly formalistic conception of the demonstration and in other cases to a broad view about it, which contributes in paying special attention to the generation of communities of practice where it is strengthened the identities of participation and reflection in the use of the demonstration in the classroom.

[2] Degree work

[* *] Faculty of Sciences. School of Mathematics PhD. Jorge Enrique Fiallo Leal

Introducción

Diversas son las investigaciones que reportan posturas acerca de la demostración matemática, por parte de estudiantes, profesores, investigadores y matemáticos que se relacionan con clasificaciones de definiciones, roles, funciones y significados de la demostración. A pesar de las diferencias, algo es claro, y es que la demostración ocupa un papel importante en el estudio de las matemáticas, pues debería ser siempre un hilo conductor de la experiencia matemática de todo aquel que la estudie (Camargo, 2010). En los *Principios y estándares para la educación matemática* (NCTM, 2003) se plantea que los procesos de argumentación y demostración son importantes en la actividad matemática que llevan a cabo los profesores y estudiantes en el aula, señalando que los estudiantes deberían desde temprana edad entender que hay que razonar sobre las afirmaciones que se hacen en el aula de clase y para esto se deben hacer generalizaciones, plantear conjeturas y demostrarlas.

> A través de los ambientes que creen en el aula, los profesores deberían transmitir la importancia de conocer las razones justificativas de las verdades y de los patrones matemáticos… Deberían tender a que sus alumnos busquen, formulen y critiquen las explicaciones, para que así las clases lleguen a convertirse en comunidades de investigación… Para evaluar la validez de los argumentos propuestos, los alumnos tienen que desarrollar suficiente confianza en sus capacidades de razonamiento para cuestionar los argumentos matemáticos ajenos o propios. Así, para determinar la validez de un argumento matemático, confían más en la lógica que en la autoridad externa. (NCTM, 2003. p. 352)

La investigación que aquí reportamos se enmarca dentro del ámbito educativo institucional, por esto nos referimos a una comunidad de práctica de clase, entendida en el sentido sugerido por Clark (2005), pues, a pesar de que comparte muchos aspectos de la caracterización de una comunidad de práctica como la define Wenger (2001), hay particularidades relacionadas con la agrupación de los miembros que hace importante reconocer la diferencia. Como unidad de análisis consideramos la comunidad de práctica de clase de un curso de Didáctica del Cálculo en un programa universitario de profesores en formación en Bucaramanga, Colombia. En la comunidad se incluyen los estudiantes que participan en clase, la profesora responsable del curso y el investigador.

La comunidad de práctica de clase se saca adelante a medida que los profesores en formación tienen la oportunidad de comprometerse en un repertorio de prácticas mediante el cual empiezan a ganar ideas acerca del significado de la demostración y su papel en el aula de clase y además ellos pueden ser participantes legítimos en la negociación de dichos significados. Desde el inicio del curso se trabajó conjuntamente con la profesora encargada en el diseño del cronograma de actividades en el que se incluyeron momentos de reflexión acerca de la enseñanza de la demostración y algunos talleres en los que se evidenciaron los significados de la demostración en los profesores en formación e incluso la negociación de los mismos. Nos planteamos como objetivo: Caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración.

La presentación de este documento se ha organizado en cinco capítulos que se describen brevemente a continuación. *Primer capítulo:* presenta el contexto, la problemática, la pregunta y el objetivo de la investigación. *Segundo capítulo:* presenta la revisión de algunas investigaciones referentes a las comunidades de práctica, la demostración según el grado de rigor y las funciones de la demostración. *Tercer capítulo:* presenta los aspectos teóricos y conceptuales relacionados con la comunidad de práctica dentro de la teoría de la práctica social. *Cuarto capítulo:* expone la metodología empleada para el diseño del curso y las actividades; las fases de la investigación; los instrumentos usados para la recolección de los datos y la forma de análisis de los mismos. *Quinto capítulo:* Presenta los resultados del análisis de los datos donde se caracterizan los significados negociados en la comunidad de práctica. *Sexto capítulo:* se sintetizan las conclusiones generadas de los análisis de resultados en cuanto a los hallazgos de la caracterización de los significados negociados acerca de la demostración. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas.

1. Planteamiento de la investigación

Para comprender el objeto de estudio de este trabajo, presentamos a continuación el contexto en el cual se desarrolla, la problemática, la pregunta y el objetivo de la investigación.

1.1 Contexto y problemática de la investigación

En este apartado presento los elementos que sustentan el planteamiento del problema de investigación y el contexto en el cual se desarrolló este estudio. También comento un poco acerca de mi experiencia en un curso de Didáctica del Cálculo como estudiante, como asistente a otras versiones del mismo y cómo finalmente llegué a participar como investigador.

El contexto en el cual se aplicó la investigación fue un curso de Didáctica del Cálculo del programa académico de Licenciatura en Matemáticas que ofrece la Universidad Industrial de Santander (UIS). En el momento de aplicación de la investigación, en el plan de estudios (Escuela de Matemáticas, 2018), las asignaturas de la licenciatura se dividen en tres líneas: la línea de matemáticas, la línea de didáctica y la línea de pedagogía. A continuación, enunciaremos las asignaturas que pertenecen a la línea de matemáticas, para identificar el posible acercamiento a la demostración en ellas.

El curso se ubicaba en el quinto semestre de la carrera y para matricularlo tenía como requisito haber visto Cálculo I (Cálculo Diferencial), Cálculo II (Cálculo Integral), Cálculo III (Cálculo Multivariable) y Ecuaciones Diferenciales. En esta línea del cálculo se estudian diversas temáticas, cuyo mayor propósito es adquirir destrezas y habilidades para el cálculo de límites, derivadas e integrales. Por otro lado, los estudiantes matriculados han cursado otras asignaturas como Álgebra Lineal I, Álgebra Lineal II, Geometría Euclidiana, Fundamentos de Matemáticas, Teoría de Conjuntos y Teoría de Números; en las cuales el principal propósito es argumentar de forma frecuente en torno al conocimiento matemático, donde apelan al convencimiento y a la argumentación analítica y cuyos productos y usos se vinculan con la lógica formal, especialmente, con la verificación de certeza de enunciados o teoremas. Lo anterior nos indica que, en el momento de tomar el curso de Didáctica del Cálculo, los estudiantes ya han tenido varios acercamientos a la demostración matemática, especialmente en los cursos del componente matemático.

Según el plan de estudios en la asignatura de Didáctica del Cálculo se espera que los estudiantes al finalizar posean, entre otras, las siguientes competencias:

- Integra didácticamente las diferentes etapas históricas vividas en la construcción teórica del cálculo.
- Identifica las dificultades que los estudiantes presentan con los conceptos y procedimientos del cálculo.
- Posee la capacidad para diseñar metodologías adecuadas para el aprendizaje del cálculo.
- Se expresa en forma rigurosa y clara.
- Desarrolla capacidad de análisis y síntesis.
- Escucha, habla, lee, escribe, participa en diálogos, asume posiciones críticas y argumenta para conocer, comprender y transformar e innovar en el área de la didáctica del cálculo y en su venidera práctica pedagógica como mediador de procesos.

De acuerdo a estas competencias, queremos incorporar situaciones en el aula, de tal manera que se conserven sus finalidades, aunque incluyendo de forma más explícita los procesos de demostración que pueden surgir en el aula dentro del campo del cálculo.

A partir de mi experiencia como estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas y especialmente estudiante de Didáctica del Cálculo, además como asistente en gran parte del desarrollo de los cursos de las anteriores versiones a la aplicación de la presente investigación (primer y segundo semestre de 2016), pude observar de cerca el proceso que llevan los estudiantes (profesores en formación), las diferentes perspectivas con las que llegan algunos, y su formación en ese periodo de tiempo en cuanto a las temáticas tratadas que van en la línea de la didáctica de las matemáticas e incluso acerca de la demostración.

En esta experiencia, puedo resaltar como una hipótesis que, en muchas ocasiones los profesores en formación que llegan al curso de Didáctica del Cálculo, aunque ya han visto toda la línea del cálculo, aún presentan algunas dificultades relacionadas con la comprensión de los conceptos y también con la demostración, esto lo resalto también desde mi experiencia como estudiante. Lo anterior, puede ser por varias razones, una de ellas, las dificultades en la adaptación y el proceso de estudio en esta línea del cálculo; y otra, por el diseño curricular de los cursos, que tiene que ver con la manera en que fueron enseñadas las materias del cálculo, donde en la mayoría de los casos los profesores encargados no trabajan con el proceso de la demostración y esto depende en gran parte del significado que le está dando el profesor en el aula de clases. Dado este contexto con profesores en formación y con las experiencias vividas, nos interesamos en estudiar esos significados de la demostración que tienen los participantes y cómo pueden avanzar sobre ellos, entonces nos planteamos trabajar con este grupo como una comunidad de práctica, dicha comunidad de práctica se interesó en negociar significados de la demostración, apuntando a conocer más acerca de esta y mediante la reflexión incorporar dentro de las planeaciones y las prácticas reales en el aula el uso de la demostración. El curso desarrollado estuvo a cargo principalmente por una profesora de planta de la universidad encargada de desarrollar en los tiempos requeridos la planeación de la asignatura y además aportar también desde su experiencia en la negociación de los significados. En cuanto a mi papel, fue de investigador y consistió en asistir a las sesiones del curso aplicando algunas actividades, tomando los datos y trabajando conjuntamente con la profesora encargada.

La necesidad de indagar en el estudio de los significados de la demostración que posean los profesores en formación, va relacionada con el riesgo que quizá se pueda tener al optar en el futuro con una determinada concepción de la demostración y que va a influir en su práctica como docente. Como señala Hernández (2017) "de acuerdo con los significados que se tengan de la demostración así se tomarán decisiones acerca de omitir demostraciones en clase".

Para dar cuenta de los significados de la demostración de los profesores de matemáticas en formación, asociamos el significado mediante su negociación desarrollado dentro de una comunidad de práctica de clase, entendida desde la perspectiva de Clark (2005), pero que tiene sus fundamentos en la comunidad de práctica de Wenger (1998). Las comunidades de práctica son "grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o una pasión sobre un tema y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área mediante la interacción en forma permanente" (Wenger, McDermontt y Snyder, 2002, pág. 4). Una de las ventajas de trabajar bajo el enfoque de estas comunidades es que se aprende con y del otro, lo que da lugar a la negociación de significados por la participación conjunta de los miembros de la comunidad y así tener un aprendizaje. La dinámica asumida fue, dar lugar a la participación de los profesores en formación a través de actividades que promovieran el debate relacionado con los significados de la demostración matemática y reflexionar sobre ellos.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, se hizo esta investigación con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas cuyo campo de acción está enfocado a ser profesores de nivel de secundaria y bachillerato. Para este nivel los profesores necesitan tener claridad acerca de los conceptos matemáticos y promover la argumentación y demostración en el aula. De acuerdo con Crespo y Ponteville (2003):

> Teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática debe reflejar la naturaleza de esta ciencia y su ejercicio profesional y que los alumnos requieren, como los matemáticos, de actividades significativas para su desarrollo, se requiere una mirada y un proceso más comprensivo de las funciones y del papel de la demostración que el que se le da en forma tradicional en las aulas (p.311).

Algunos autores como Schoenfeld, Hanna y Flores (citado por Arnall y Oller, 2017) ponen de manifiesto la necesidad y el interés de trabajar la demostración en el aula, pues es importante desde el punto de vista del quehacer matemático y contribuye a la comprensión de los objetos matemáticos; además, aporta a la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. El trabajo a nivel de los profesores en formación debería enfocarse en dar a éstos futuros docentes herramientas útiles para diseñar e implementar actividades ricas relacionadas, en este caso, con la demostración. Por tanto, es de gran importancia que los estudiantes aprendan a construir demostraciones que le ayuden a comprender mejor los contenidos matemáticos.

Los estudiantes que están en su proceso de formación para ser profesores de matemáticas necesitan comprender muy bien los temas que van a enseñar. Ellos deben tener claro los argumentos necesarios para la comprensión de los contenidos que enseña, por tanto, se hace necesario identificar de qué manera los profesores en formación llevan a cabo sus demostraciones y reflexionan sobre éstas mediante la interacción entre ellos y en las planeaciones de clase. Por tanto, se plantea hacer un aporte para que los estudiantes reflexionen, entre otras cosas, sobre su propia manera de demostrar y su visión acerca de la aplicación de la misma en el aula de clase. Como señala Shulman (1987):

> Un profesor es miembro de una comunidad académica. Debe comprender las estructuras de la materia enseñada, los principios de la organización conceptual, como también los principios de indagación que ayudan a responder dos tipos de preguntas en cada ámbito: ¿cuáles son las ideas y las destrezas importantes en este dominio del saber? y ¿de qué manera quienes generan conocimientos en esta área incorporan las nuevas ideas y descartan las superfluas o deficientes? Esto es, ¿cuáles son las reglas y los procedimientos de un buen saber académico y de la investigación? (p.12).

Esto lleva a cuestionarnos acerca del papel que va a desempeñar el profesor en el aula, pues para enseñar un tema se necesita un dominio completo de los conceptos involucrados y que le permita construir demostraciones. El análisis llevado a cabo en la presente investigación pretende dar evidencias de los significados de la demostración de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en un curso de didáctica del cálculo.

Por tanto, se plantea resolver con nuestra investigación el siguiente interrogante:

¿Qué significados negocia una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración?

Con el ánimo de resolver la anterior pregunta, nos planteamos el siguiente objetivo de investigación:

Caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración.

2. **Antecedentes**

En éste capítulo se realiza una descripción de los estudios que se consideran importantes por estar relacionados con algún aspecto de la presente investigación. Se consideran algunas investigaciones relacionadas con la demostración según el grado de rigor (sección 2.1), las investigaciones relacionadas con las funciones de la demostración (sección 2.2) e investigaciones que tienen en cuenta la comunidades de práctica en la formación de profesores (sección 2.3).

2.1 La demostración según el grado de rigor

Los significados de la demostración que puedan surgir dentro de la comunidad matemática pueden estar influenciados por el grado de abstracción en el que se produce la demostración y por la comunidad en la que se desarrolla. Algunos autores han aportado en la caracterización de las demostraciones dado el rigor y han aportado en categorías para enunciar algunos tipos.

Harel y Sowder (1998) distinguen tres categorías de esquema de demostración resultantes de sus investigaciones con estudiantes de nivel superior, que están caracterizadas por las dudas, certezas y convicciones individuales de los alumnos: esquemas de demostración de convicción externa (ritual, autoritaria y simbólica); esquemas de demostración empíricos (inductivo, perceptual); y, esquemas de demostración analíticos (transformacional y axiomático); es en este último en donde se incluye a la demostración formal como una forma de demostración. Los autores llaman esquema de demostración de una persona a "lo que constituye la persuasión y comprobación en dicha persona" (ibíd., p. 245).

Por otro lado, Marrades y Gutiérrez (2000) a partir de los trabajos de Balachef (1988) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para organizar y describir las producciones de los estudiantes referentes a la demostración. Ellos plantean que hay dos grandes grupos de tipos de demostración: las demostraciones empíricas que son las que se basan en ejemplos y las demostraciones deductivas que se caracterizan porque surgen de deducciones abstractas. A su vez describe tres tipos de demostraciones empíricas que depende de cómo los estudiantes manipulen los ejemplos con los que movilizan su actividad matemática: Empirismo ingenuo (pueden ser inductivas y perceptivas), experimento crucial y ejemplos genéricos (pueden de ejemplificación, constructivas, analíticas e intelectuales). La demostración deductiva se divide por su parte en: experimento mental (aun siendo deductivas y abstractas se ayudan de ejemplos) y demostraciones formales (producto de deducciones lógicas); a su vez ambas se dividen en transformativas y axiomáticas.

Haciendo un análisis y tomando como referencia el trabajo anterior, Fiallo (2011) hace una reinterpretación de los tipos de demostración planteadas por Marrades y Gutiérrez (2000): descarta dos de los cuatro tipos de experimento crucial (experimento crucial analítico y experimento crucial intelectual) que, según el autor, utilizan un razonamiento general que se define mejor para el tipo de demostración ejemplo genérico. También, descarta dos de los cuatro tipos de ejemplo genérico (ejemplo genérico basado en ejemplo y ejemplo genérico constructivo) ya que según la definición del ejemplo genérico al construir la demostración se está produciendo razonamiento abstracto que involucra propiedades matemáticas generales y no propiedades específicas del ejemplo.

En su trabajo, Fiallo (2011) hace un estudio donde aporta información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto de estudio de las razones trigonométricas con estudiantes de grado décimo. Diseña una unidad de enseñanza para favorecer el aprendizaje de la demostración, planteando las actividades de trigonometría que conducen al planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones. Además, ofrece una caracterización de los términos de argumentación y demostración, la cual es la siguiente, *Argumentación*: proceso que conlleva a la conformación de una estructura ternaria, compuesta por unos datos, una conclusión y un permiso de inferir. *Demostración*: proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática. Además, propone un modelo de análisis de la unidad cognitiva entre estos dos procesos.

El modelo de análisis está basado en la propuesta de Pedemonte (2005), que adaptó para adecuarlo a las categorías de demostraciones propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000) a las características de demostraciones que hay que hacer en trigonometría. Según Pedemonte (2009), este es un aporte original y novedoso que incluye las demostraciones empíricas o inductivas que no se ha tenido en cuenta en las investigaciones de la unidad cognitiva, dado que en dichas investigaciones el término demostración incluye únicamente las demostraciones deductivas que conducen a la construcción de un teorema.

2.2 Funciones de la demostración

Han sido varias las funciones que se le han dado a la demostración por algunos investigadores, las cuales se han considerado relevantes en el campo de la educación matemática para darle sentido a su enseñanza.

Diversos autores señalan diferentes funciones de la prueba (Bell, 1976; De Villiers, 1993; Hanna y Jahnke, 1996). Estas funciones son:

- Verificación o justificación: concerniente a la verdad de una afirmación.
- Explicación: profundizando en porqué es verdad.
- Sistematización: la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- Descubrimiento: descubrimiento o invención de nuevos resultados
- Comunicación: la transmisión del conocimiento matemático.
- Construcción de teoría empírica
- Exploración del significado de una definición o de las consecuencias de una suposición.
- Incorporación de un hecho bien conocido en un nuevo marco y por lo tanto viéndolo desde una perspectiva fresca.

La función de la demostración de uso más exclusivo en las matemáticas es la de verificación (convicción o justificación) de la validez de una proposición matemática

(De Villiers, 1993, 2012). De acuerdo con French y Stripp (2005, citado por De Villiers, 2012), esta perspectiva sobre la función de la demostración como verificación "sigue dominando la mayoría de los diseños curriculares en los libros de texto, las clases, y materiales sobre la enseñanza de la demostración" (pág.1). La mayoría de los profesores de matemáticas considera que la demostración proporciona la verdad absoluta para validar una conjetura, pero no necesariamente se da de esa manera; muchas veces la convicción es un prerrequisito a la demostración (De Villiers, 1993). Los estudiantes a menudo necesitan hacer experimentos, comprobaciones empíricas, después de una demostración porque la demostración no los convence (Healy & Hoyles, 2000). A respecto:

> Una vez verificado el teorema en varios casos particulares, conseguimos reunir bastante evidencia inductiva. Esta fase inductiva sobrepasó nuestra sospecha inicial y nos dio una fuerte confianza en el teorema. Sin tal confianza, difícilmente podríamos encontrar el valor necesario para llevar a cabo la demostración, que no es, ni con mucho, un trabajo rutinario. Cuando uno se convence de que el teorema es verdadero, se puede empezar a demostrarlo. (Polya, 1984, citado por De Villiers, 1993, p.18).

Hanna (2000, 1989) distingue entre las demostraciones, aquellas que muestran la verdad de un teorema, mencionada anteriormente como la más exclusiva, y las demostraciones que explican; además, considera que la función de la demostración más importante es la de explicación, pues no sólo es establecer que una proposición es verdadera, sino saber por qué es así, y proporcionar la comprensión del teorema demostrado, lo que hace a la demostración ser más persuasiva.

Estas funciones de la demostración son tomadas en cuenta en nuestra investigación como un aspecto que ayuda a constituir los significados de la demostración negociados en la comunidad de práctica de clase. Estas funciones, principalmente las señaladas por De Villiers (1993) (verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación) fueron útiles para considerar, tanto por esas mismas ideas, los significados negociados el análisis de los mismos, así como los significados emergentes de los participantes de la presente investigación.

2.3 Comunidades de práctica en la formación de profesores

Las comunidades de práctica son un contexto de estudio interesante en la comunidad de investigadores en educación matemática, puesto que en ellas se comparten y analizan una variedad de experiencias y evidencias de situaciones a las que se enfrentan los profesores cuando su formación inicial no es suficiente. El profesor que reflexiona sobre su propia práctica es más consciente de las matemáticas que enseña, como señala Parada (2011), quien afirma que los procesos reflexivos mejoran las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas, los cuales alcanzan nuevos conocimientos en cuanto a lo que enseñan y como lo enseñan, claramente posibilitados al interior de comunidades de práctica.

Fiallo y Parada (2014) resaltan la importancia de fortalecer proyectos curriculares en las instituciones que cuentan con programas de formación de profesores para conformar comunidades de práctica que sirva como alternativa de aprendizaje para los maestros, en los que las reflexiones personales y colectivas al interior de la comunidad puedan elevar y fortalecer sus procesos de desarrollo profesional, así como su confianza y competencias docentes.

El estudio de Clark (2005) describe la emergencia de una comunidad de práctica en un grupo de estudiantes de estructuras matemáticas. El objetivo de la investigación fue establecer un modelo de la actividad matemática de los estudiantes, lo que se convirtió en una empresa conjunta de la comunidad, y se buscó que los participantes avanzaran desde un conocimiento basado en procedimientos algebraicos básicos, hacia la capacidad de crear argumentos cada vez más formales con el rigor necesario para enfrentarse a cursos de matemáticas de nivel superior. La comunidad de practica que hacemos referencia, Clark la toma como una comunidad de práctica de clase debido a las limitaciones de la comunidad en un contexto educativo institucional. El papel del profesor encargado del curso fue de negociador entre la comunidad de la clase y las prácticas matemáticas usuales. La caracterización de la comunidad de práctica de clase la tenemos en cuenta en nuestra investigación y la describiremos más adelante, debido a que la población también está ligada a un curso dentro de un contexto institucional.

Otra investigación que trabaja sobre una comunidad de práctica de clase es la realizada por Camargo (2010). La autora analiza el aprendizaje de un grupo de estudiantes de un curso universitario de geometría plana que participan en actividades matemáticas asociadas a la demostración y producen demostraciones en el marco de un sistema axiomático construido colectivamente, lo cual se convierte en la empresa conjunta de la comunidad, la construcción del sistema axiomático. En la investigación se toma a la demostración matemática como un discurso que respeta ciertas reglas, fundamentado en un sistema teórico de referencia, mediante el cual se da validez a un enunciado al interior del sistema. Además, Camargo propone que la participación en la actividad demostrativa conforma con la producción de demostraciones, una dualidad que da sentido a la práctica del curso, cuyo resultado son los postulados, definiciones y teoremas, en ese sentido establece una analogía entre la conceptualización de la demostración como la dualidad proceso-producto y la dualidad participación-materialización (cosificación en nuestra investigación), pues ambas dan sentido a la actividad.

En concordancia con algunos investigadores, Camargo (2010) Coincide con la caracterización que hace Stylianides (2007) de la demostración para el contexto educativo quien señala tres particularidades centrales de las cadenas deductivas que componen una demostración matemática: (i) se usan y se explicitan claramente enunciados que se han aceptado previamente como verdaderos por la comunidad a quien se dirige la demostración; (ii) se emplean formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de dicha comunidad; (iii) se usan formas de expresión que son aceptadas, apropiadas y al alcance conceptual de los miembros de la comunidad. Desde ese punto de vista, los principios y reglas de construcción que rigen la producción del discurso son establecidos por grupos humanos específicos y por el contexto en donde se lleva a cabo la actividad demostrativa.

Camargo (2010) resalta que la demostración matemática, aún vista como producto, es de naturaleza sociocultural y está condicionada por el contexto en donde se lleva a cabo y por el dominio específico al interior del cual se está actuando. Además de cumplir la función de validar enunciados, se considera, como lo señalan Hanna (1990) y Hanna et al. (2008), que la demostración para los matemáticos es también una forma de lograr la comprensión matemática, específicamente con relación a la certeza de ciertos enunciados. En ese sentido, se hace la diferencia entre la demostración matemática de la demostración formal, vista esta última como un cálculo lógico desprovisto de significados (Douek, 2007). Además, coincide con la caracterización que hace Stylianides (2007) de la demostración para el contexto educativo quien señala tres particularidades que componen una demostración matemática: (i) se usan y se explicitan claramente enunciados que se han aceptado previamente como verdaderos por la comunidad a quien se dirige la demostración; (ii) se emplean formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de dicha comunidad; (iii) se usan formas de expresión que son aceptadas, apropiadas y al alcance conceptual de los miembros de la comunidad. Desde ese punto de vista, la construcción del discurso matemático es establecida por grupos específicos y depende del contexto donde se lleva a cabo la actividad demostrativa (Camargo, 2010). Finalmente, uno de los resultados de la investigación es llamar la atención sobre la responsabilidad que adquiere un profesor universitario para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes acerca de la demostración.

Hernández (2017) realiza una investigación con el objetivo de analizar los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros. Los participantes del estudio fueron nueve profesores de cálculo diferencial para ingeniería, con quienes se conformó un grupo para tener encuentros en un programa de formación continua y que sirvió como fuente principal de datos en el que se utilizaron autobiografías, entrevistas y artefactos documentales para información complementaria. La relación de la demostración matemática con la formación de ingenieros como lo señala el autor, quedó planteada en roles de la demostración asociados con: el pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación del conocimiento matemático y la fundamentación teórica de nociones matemáticas.

Para la investigación se escogió como marco conceptual y analítico la perspectiva social de la teoría de la práctica social de Lave y Wenger (1991) y Wenger (2001), debido a que ésta teoría centra su interés en el aprendizaje como participación social. Especial atención dentro de la teoría y la investigación se da al término significado, entendido por el autor como "las experiencias que se constituyen en escenarios de negociación que se dan a través de la participación en prácticas definidas por una comunidad". Los significados de la demostración por parte de los profesores se dieron negociando el grado de abstracción de las demostraciones, debido a que el contexto de enseñanza era para estudiantes de ingeniería. Se evidenció que los significados no eran la reproducción de una definición de un libro de texto, sino que son el resultado de negociación dada su trayectoria profesional. La negociación de significados de la demostración de algunos profesores estuvo asociada a repetir demostraciones aplicando esquemas tradicionales de la enseñanza, pues se centran en la difusión del conocimiento que debe ser aceptado tal y como es presentado, además, estos significados responden a una concepción formalista de la demostración, evitando el recurso de la intuición. A respecto, se plantea que se debe prestar atención en lo concerniente a la formación inicial de profesores del área de matemáticas respecto a la demostración, para evitar la perspectiva exclusivamente formal acerca de la demostración.

Estas investigaciones son importantes en nuestra investigación, debido a que sustenta que en el aula de clase pueden surgir diferentes tipos de demostración, que no necesariamente tiene que ser único y ser el deductivo formal. Además, presenta elementos importantes acerca de la demostración que se trabajaron con los profesores en formación durante el desarrollo de la comunidad de práctica.

3. Marco Conceptual

En este capítulo se presentan elementos teóricos sobre el significado y la demostración matemática en profesores en formación, a partir de la teoría de la práctica social de Wenger (2001). Este elemento teórico nos permitió fundamentar e interpretar el proceso llevado a cabo de investigación sobre los significados de la demostración matemática manifestados por los estudiantes que cursaron la asignatura de Didáctica del Cálculo.

3.1 La teoría de la práctica social

En nuestra investigación, hemos escogido como sustento teórico la teoría de la práctica social de Wenger (2001). Como lo señala el autor, la teoría de la práctica social se ocupa de la "actividad cotidiana y de los escenarios de la vida real, pero destacando los sistemas sociales de recursos compartidos por medio de los cuales los grupos organizan y coordinan sus actividades, sus relaciones mutuas y sus interpretaciones del mundo" (pág. 31). Desde esta teoría se centra el interés en el aprendizaje como participación social y a los seres humanos como seres sociales. Estos supuestos cobran importancia en nuestra investigación debido a que vemos la clase como una comunidad de práctica conformada por el profesor, experto inicial de la comunidad, y los estudiantes, quienes son profesores en formación y son guiados hacia una práctica que tipifica el quehacer de los profesionales en matemáticas.

Para caracterizar la participación social como un proceso de aprender y conocer Wenger (2001) establece los siguientes componentes:

1. *significado*: una manera de hablar de nuestra capacidad (cambiante) —en el plano individual y colectivo— de experimentar nuestra vida y el mundo como algo significativo.
2. *práctica*: una manera de hablar de los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo de la acción.
3. *comunidad*: una manera de hablar de las configuraciones sociales donde la persecución de nuestras empresas se define como valiosa y nuestra participación es reconocible como competencia.

4. *identidad*: una manera de hablar del cambio que produce el aprendizaje en quiénes somos y de cómo crea historias personales de devenir en el contexto de nuestras comunidades (Wenger, 2001, pág. 22).

Según Wenger (2001), estos componentes están interconectados, se definen mutuamente, y mediante su integración se constituye el concepto de "comunidad de práctica". La relación entre este concepto y otros elementos de la teoría la expresamos de la siguiente manera: nos referimos a la "comunidad de práctica" como una unidad social, donde cada miembro lleva a cabo una "empresa conjunta" a través de la interacción con otros miembros. La "negociación de significados" se produce por los procesos de "participación" y "cosificación"; gracias a la participación se establecen relaciones con otras personas y se define la manera de formar parte dentro de la comunidad; con la cosificación se proyectan los significados que se le dan a los objetos. Con estos procesos se producen las "identidades de participación" debido al "compromiso mutuo" asumido por los participantes de la comunidad.

A continuación, detallamos estos conceptos que están estrechamente relacionados y que son propios de esta teoría.

3.1.1 Comunidad de práctica de clase. Para objeto de nuestra investigación utilizamos el término acuñado por Clark (2005) "comunidad de práctica de clase", la cual es una versión más pequeña de una comunidad de práctica real según lo define Wenger (1998), pues el grupo no fue formado por un interés común de los participantes, sino que hace parte de un curso ligado a un programa académico institucional, pero que comparte muchos rasgos de la comunidad de práctica, la cual a su vez es una configuración social en la que los participantes llevan a cabo una empresa, a través de la interacción con otros miembros que se constituyen en los participantes que buscan su identidad dentro de la comunidad. Según Wenger (2001):

> Una comunidad de práctica es un contexto viviente que puede ofrecer a los principiantes acceso a la competencia y que también puede provocar una experiencia personal de compromiso por la que incorporar esa competencia a una identidad de participación. Cuando estas condiciones se cumplen, las comunidades de práctica son un lugar privilegiado para la adquisición de conocimiento (pág. 259).

La comunidad de práctica de clase es un contexto en donde el profesor y los estudiantes llevan a cabo una empresa conjunta de interés. Aunque principalmente el objetivo de los estudiantes en el aula de clase es aprender y el del profesor es lograr que los estudiantes aprendan, es posible proponer y desarrollar dicho interés por lograr sacar adelante la empresa conjunta por la cual se reúnen y definen los objetivos del curso (Camargo, 2010), que, en nuestro caso, entre otros, es reflexionar acerca del proceso de la demostración.

Dado que la agrupación de los miembros de la comunidad, como lo mencioné anteriormente, no se da de manera voluntaria, ni motivada precisamente por el interés de participar en la comunidad para la consecución de la empresa conjunta, sino por la organización curricular propia de la institución educativa, buscamos desde el principio del curso involucrar a los participantes buscando indicadores de su agrupación y no por una razón por la que se agrupan. Es importante el papel que toma el profesor dentro de comunidad para generar en los profesores en formación la participación, así como también en nuestra investigación importante el papel del investigador para generar la cultura de la clase. Dado que el diseño y desarrollo del curso se lleva a cabo con profesores en formación, se buscó la participación de los estudiantes dentro de la actividad demostrativa. Como lo señala Llinares (2000):

> Las 'prácticas matemáticas' que se desarrollan en el aula vendrán caracterizadas por las interacciones entre el profesor, los alumnos y la tarea matemática a realizar mediados por los objetivos pretendidos. Vistas globalmente estas prácticas matemáticas van a definir las oportunidades de aprendizaje de los alumnos. Desde esta perspectiva las prácticas matemáticas generadas en el aula definirán una comunidad de práctica (p.114).

Para llevar a cabo la comunidad se deben tener en cuesta tres aspectos fundamentales que son: el dominio, la comunidad y la práctica. En cuanto al dominio, se refiere al área de estudio de la comunidad, que para nuestra investigación son temas relacionados con el cálculo y la demostración considerando sus aspectos didácticos; la comunidad está relacionada con la interacción e intercambio de saberes entre los individuos participantes y la práctica con el campo de aplicación de los conocimientos.

Una comunidad de práctica se constituye mediante tres dimensiones: un compromiso mutuo, una empresa conjunta y un repertorio compartido. A continuación, se describen cada una.

Compromiso mutuo: es una característica de la práctica como fuente de coherencia de la comunidad. Como lo señala Wenger (2001) "La práctica no existe en abstracto. Existe porque hay personas que participan en acciones cuyo significado negocian mutuamente… La afiliación a una comunidad de práctica es cuestión de compromiso mutuo” (p. 100), esto es lo que precisamente define a una comunidad de práctica, no siendo simplemente un conjunto de personas que tienen una característica en común, sino porque mantienen relaciones de participación mutua que se organizan en torno a sus objetivos.

Empresa conjunta: es aquello que mantiene a los participantes de la comunidad unidos para trabajar en sus intereses comunes, lo que crea en ellos relaciones de responsabilidad mutua y es producto de un proceso colectivo de negociación. Según Wenger (2001) “la empresa no es conjunta en el sentido de que todos creen lo mismo o están de acuerdo en todo, sino en el sentido que se negocia colectivamente” (p. 106). Para organizar la clase en función de crear una empresa conjunta, que, si inicialmente los estudiantes no se sienten involucrados en contribuir a la empresa que se les propone, es posible que vayan adquiriendo el interés por sacarla adelante. Se deben dar indicios de la construcción por medio de la interacción y los avances por parte del profesor y de los estudiantes.

Debido a que la agrupación de los miembros de la comunidad no se da necesariamente por el interés de participar en la misma, sino por la organización curricular de la institución, se dará especial atención a la participación y la negociación de los significados hechos por los estudiantes y no en la razón por la que se agrupan.

Repertorio compartido: esta tercera característica como fuente de coherencia para la comunidad, según Wenger (2001) “incluye rutinas, palabras, instrumentos, maneras de hacer, relatos, gestos, símbolos, etc.” (p.110) que la comunidad ha producido para formar parte de su compromiso en la práctica.

Para objeto de nuestra investigación, hacemos referencia a algunos aspectos del repertorio compartido. El curso de didáctica del cálculo se constituye en un estilo propio de hacer las clases y se caracteriza por la forma en la que el profesor y los estudiantes llevan a cabo la actividad demostrativa y los aspectos relacionados a ella, reflexionando y negociando sobre los diferentes tipos de demostración y el análisis de los procesos que se llevan a cabo durante la construcción de una demostración.

3.1.2 Negociación de significados. Uno de los principales elementos en los que se centra nuestra investigación es el significado. Según Wenger (2001), cuando se refiere al significado, no se alude a una acepción filosófica, ni la relación entre un signo y un referente, tampoco al significado que se da en un diccionario; éste no surge de la realización de procedimientos mecánicos y la absorción pasiva de información sino por el contrario, surge a partir de procesos de participación en las prácticas de la comunidad a la que pertenece. Por tanto, el significado se sitúa más en lo se denomina dentro de la teoría de la práctica social como la "negociación de significados" el cual expresa el proceso por el que experimentamos el mundo y se reorganizan las interpretaciones de las ideas propias o ajenas mediante la interacción en clase. Para Wenger (2001) un significado "siempre es el producto de su negociación. El significado no existe en nosotros ni en el mundo, sino en la relación dinámica de vivir en el mundo" (pág. 79).

En una comunidad de práctica hay un permanente proceso de negociación de significados, los cuales, los participantes ya poseen, construyen o hacen negociación de ellos. Este proceso se da mediante la interacción de otros dos, los cuales son la participación y la cosificación. Este proceso da lugar a la interacción con los demás componentes de la teoría, de los cuales surgen nuevos significados negociados por los miembros de la comunidad, quienes se basan en los conocimientos que poseen y que pueden compartir para hacer la negociación y adquirir los significados.

En la presente investigación, indagar acerca de los procesos de negociación de significados de la demostración, requiere desarrollar la interacción de los participantes que se van ajustando al desarrollo de la práctica para reflexionar y tomar acciones sobre el uso de la demostración en el aula de matemáticas.

Como lo resalta Camargo (2010): "La negociación no es sinónimo de acuerdo total respecto de alguna interpretación sino de un nivel de afinidad que permite el éxito de la comunicación y genera la cultura de la clase" (p.67). En el caso de nuestra investigación, se sugiere centrarse en la participación de los profesores en formación en el curso de Didáctica del Cálculo, donde se persigue en reflexionar y tomar acciones sobre la demostración como futura utilización en el área profesional. La participación de los estudiantes en la negociación de significados, promueve la construcción conjunta de los conocimientos relacionados con la demostración y posibilita tomar importancia en promover su enseñanza y utilidad en el aula de clase.

Como lo señalan algunos investigadores (de Villiers, 1993; Hanna, 1990), cuando las demostraciones son presentadas por el profesor a los estudiantes como un producto ya materializado, sin la participación de ellos en su producción, es muy probable que esto produzca una experiencia poco significativa. Por tanto, hay que prestar especial atención a la forma en que se constituye el papel de la demostración por parte de los profesores en formación, de tal manera que sientan la importancia de llevarla al aula.

Para esta investigación indagar acerca de los significados de la demostración de profesores en formación, se convierte en un proceso que sugiere enfocarse en la participación de los mismos en prácticas colectivas que busquen reflexionar y tomar acciones sobre la demostración y su papel dentro de la formación matemática. La participación de los estudiantes permite un escenario donde se exponen las experiencias y conocimientos individuales bajo la interacción con los demás miembros de la comunidad de práctica.

Según Wenger (2001) la negociación de significados se da por la convergencia de otros dos procesos que son la participación y la cosificación, que describimos a continuación.

3.1.3 Participación. La participación en una comunidad de práctica no significa asistir a una serie de actividades específicas con personas concretas o sólo porque un grupo se reúne dos veces a la semana en un salón, la participación incluye crear relaciones entre los miembros de la comunidad y contribuir en su desarrollo para constituir una identidad, además, se concibe como un proceso complejo que combina hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer (Wenger, 2001).

La participación en una comunidad de práctica se puede dar de forma plena o periférica. La participación plena, se da cuando los miembros de la comunidad que participan activa y protagónicamente en las actividades, avanzando en el centro de las discusiones; la participación periférica, es aquella en la que los miembros están en el contorno y participan en pocas ocasiones (Gonzales, 2013), esto no quiere decir que los que están en la periferia no aprendan o avancen durante el desarrollo de la comunidad, sino que son menos visibles que los demás. Inicialmente, todas las personas de la comunidad participan de manera periférica, pero a medida que establecen contacto unos con otros van accediendo a la cultura del grupo.

3.1.4 Cosificación. La cosificación se refiere al proceso de hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar, describir, percibir, utilizar o adaptar diferentes recursos para dar forma a nuestra experiencia produciendo objetos que plasman esta experiencia en una cosa (Wenger, 2001). Los recursos no sólo son objetos concretos, sino también son reflejos de los significados y de las prácticas de los participantes de la comunidad.

En nuestra investigación prestamos especial atención a las funciones dela demostración que plantea De Villiers (1993), las cuales son: de verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. Estas funciones constituyen la base y punto de referencia para expresar el significado que presentan los profesores en formación acerca de la demostración. Aunque, en muchos casos, los significados de la demostración que negocian los profesores en formación, pueden ser emergentes.

4. Proceso Metodológico

En el presente capítulo se describe el diseño metodológico de la presente investigación para responder a nuestro objetivo propuesto. Se usará una metodología cualitativa que se puede tipificar como investigación-acción colaborativa. Según Kemmis y McTaggart (1988) la investigación acción "es una forma de indagación introspectiva colectiva emprendida por participantes en situaciones con objeto de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales o educativas, así como su comprensión de esas prácticas". Es colaborativa, pues el investigador tiene también la función de participar como moderador en la comunidad de práctica y forma parte del proceso de la toma de decisiones.

Se describen las fases realizadas durante la investigación, la cual inicia con la caracterización de la comunidad de práctica, continua con el diseño del curso y de los talleres, la implementación de las actividades y finaliza con la selección de los casos de estudio y el análisis de datos. A continuación, se describen las siete fases en las que fue estructurado el proceso metodológico de la investigación, las cuales se resumen en el esquema presentado a continuación (figura 1).

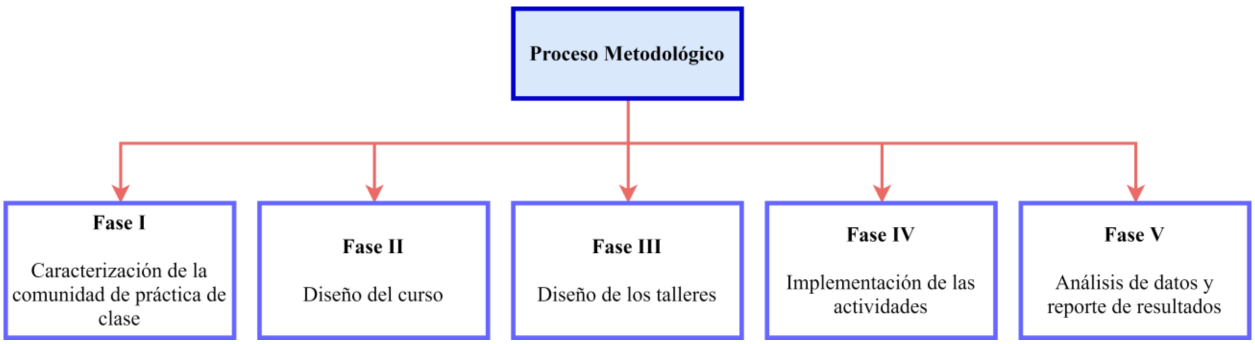


Figura 1. Esquema Proceso Metodológico

4.1 Fase I: Caracterización de la comunidad de práctica de clase

4.1.1 Descripción de la comunidad. La investigación fue realizada con un grupo de 13 estudiantes de la carrera Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander que estaban cursando la asignatura de Didáctica del Cálculo. El curso se desarrolló en el primer periodo académico de 2018 de acuerdo a las fechas establecidas por la UIS.

El curso de Didáctica del Cálculo está diseñado de manera que los estudiantes han visto entre otras, las asignaturas de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Multivariable y Ecuaciones Diferenciales. Una principal característica de estos cursos, es que, por estar ubicado en la Facultad de Ciencias Básicas, estas se cursan entre los estudiantes de ciencias y los estudiantes de Ingeniería, es decir, los grupos son mixtos, aunque por lo general, la gran mayoría de los estudiantes de los cursos son de ingeniería. Además, han tenido otras materias propias de la carrera en la línea de matemáticas, que son Álgebra Lineal I, Álgebra Lineal II, Geometría Euclidiana, Fundamentos de Matemáticas, Teoría de Conjuntos y Teoría de Números; en estas asignaturas, los profesores en formación ya han adquirido un poco de experiencia relacionada con la demostración y en parte, ha configurado los significados de la demostración que cada uno pueda tener.

4.2 Fase II: Diseño del Curso

El curso de Didáctica del Cálculo, hasta el momento, se ha orientado bajo la concepción de tomar el salón de clase como un espacio apropiado para generar discusiones y debates alrededor de los diferentes temas del cálculo como funciones, límites, derivadas e integrales, teniendo en cuenta su evolución histórica y su didáctica, agregando resultados de investigaciones que han abordado problemáticas acerca de la enseñanza de estas diferentes temáticas. La metodología es de tipo seminario, los estudiantes participan en la preparación de diferentes exposiciones en temas alrededor del cálculo y la didáctica para presentar y discutir con sus compañeros de clase. El trabajo tipo seminario es uno de los aspectos principales para llevar a cabo el desarrollo del curso como una comunidad de práctica, donde se orientó el discurso con mayor énfasis en el proceso de demostración.

El curso contó con el acompañamiento todo el tiempo de una profesora de planta y el investigador, los dos trabajamos conjuntamente en la organización y planeación de las actividades que se iban a desarrollar durante el semestre. La profesora de planta, fue la persona que brindó el espacio para la realización de la investigación y la principal moderadora de discusiones relacionadas con las exposiciones de los profesores en formación. En cuanto al papel del investigador, fue el de estar atento en diferentes momentos de las exposiciones, tomar en cuenta el proceso de la demostración, pero principalmente fue el de diseñar y aplicar talleres relacionados con algunos temas del cálculo orientados a explorar los significados de la demostración en los participantes de la comunidad.

El desarrollo del curso de Didáctica del Cálculo durante el transcurso de la investigación, se hizo de la siguiente manera, la cual ampliaremos más adelante: Una primera actividad, antes de los talleres, que se hizo dentro de la comunidad de práctica de clase, fue realizar un ensayo en el que los participantes expusieran sus experiencias vividas en las asignaturas de la línea del cálculo y acerca de la demostración en los mismos, esto con el fin de identificar un poco en la trayectoria de los profesores en formación los significados de la demostración a los que se acercaron dentro de su formación académica. En otra sesión, se llevó a cabo una prueba diagnóstica para dar evidencia del significado que tenían estos profesores en formación acerca de la demostración en el área de las matemáticas. Otra parte importante, fue organizar exposiciones grupales acerca de algunos contenidos del cálculo (variación, función, límite, derivada e integral) en su evolución histórica y epistemológica, además de otra parte didáctica en la que se evidenciara algún trabajo hecho en cada tema haciendo uso de estos temas profundizando en su enseñanza. Como complemento de las exposiciones se realizaron actividades que implicaban la reflexión alrededor de la demostración donde implicaba hacer negociación de ésta por parte de los profesores en formación.

El papel de la profesora fue de moderador del curso, fue quien se encargó de dirigir las discusiones y de “desequilibrar” a los estudiantes mediante cuestionamientos permanentes con el fin de motivar la reflexión en el aula, vista como una comunidad de práctica.

El papel del investigador en la clase, fue de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento a los estudiantes y registrando en grabaciones las discusiones en torno a las tareas propuestas.

Con el fin de trabajar en el curso como una comunidad de práctica, donde se reflexiona principalmente sobre la demostración, se plantea el programa del curso (tabla 1) que incluye algunos ajustes, con el fin de lograr nuestro objetivo. A continuación se muestra es programa seguido de una explicación de los momentos clave que se desarrollaron en la comunidad.

Tabla 1.

Cronograma de actividades de Didáctica del Cálculo

No	FECHA	TEMAS, TEXTOS Y ACTIVIDADES
1.	31/01/18	Presentación del curso. Discusión de las formas de trabajo. Presentación de la práctica del curso en el programa ASAE.
2.	02/02/18	Socialización de ensayos
3.	07/02/18	Reflexiones sobre el proceso de la demostración (Taller diagnóstico)
4.	09/02/18	
5.	14/02/18	Fiallo, J., Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. Educational studies in Mathematics, 94. Págs. 1-23.
6.	16/02/18	Charla: Construcción y exploración de modelos dinámicos de fenómenos de variación.
7.	21/02/18	López, E (2017). Procesos de argumentación y demostración de estudiantes en un curso de precálculo. Tesis de maestría. Universidad industrial de Santander.
8.	23/02/18	
9.	28/02/18	Exposición de Variación
10.	02/03/18	
11.	07/03/18	Taller 1. Proceso de demostración asociado a la variación
12.	09/03/18	Avance 1 del proyecto de diseño curricular (planteamiento del problema)
13.		Socialización de experiencia de práctica en ASAE
14.	14/03/18	Exposición de Funciones
15.	16/03/18	
16.	21/03/18	Taller 2. Proceso de demostración asociado a las funciones
17.	23/03/18	Avance 2 del proyecto de diseño curricular (revisión bibliográfica)
18.	04/04/18	Exposición de Límites
19.	06/04/18	
20.	11/04/18	Taller 3. Proceso de demostración asociado al límite
21.	13/04/18	Socialización de experiencia de práctica en ASAE
22.	18/04/18	Avance 3 del proyecto de diseño curricular (aspectos teóricos y conceptuales)
23.	20/04/18	Exposición de derivada
24.	25/04/18	
25.	27/04/18	Taller 4. Proceso de demostración asociado a la derivada
26.	02/05/18	Avance 4 del proyecto de diseño curricular (diseño didáctico)
27.	04/05/18	
28.	09/05/18	Exposición de Integrales
29.	11/05/18	
30.	16/05/18	Taller 5. Proceso de demostración asociado a la integrales
31.	18/05/18	Avance 5 del proyecto de diseño curricular (ajustes al diseño didáctico)
32.	23/05/18	Presentación resultados del proyecto
33.	25/05/18	
34.	30/05/18	Informe final de la práctica en ASAE

- En las primeras dos sesiones, se presentó a los participantes de la comunidad el programa del curso, las actividades que se desarrollarían durante el semestre, la asignación de grupos de trabajo, y especialmente lo relacionado con la primera actividad, que consistió en escribir un ensayo describiendo sus experiencias vividas en los cursos de cálculo en su formación en la universidad y lo relacionado con la demostración visto en dichos cursos.
- En las sesiones numeradas de 5-10, 14-15, 18-19, 23-24 y 28-29, representa los momentos en los que se hicieron exposiciones formando grupos de trabajo de dos o tres profesores en formación encargados de dirigir la clase. Las dos primeras exposiciones trataron acerca de debatir investigaciones relacionadas con la demostración y las demás exposiciones trataron acerca de aspectos relacionados con el desarrollo epistemológico y didáctico de temas del cálculo como son: variación, funciones, límites, derivadas e integrales.
- En las sesiones correspondientes a 3-4, 11, 16, 20, 25, 30 representa los momentos en los que se llevaron a cabo los talleres diseñados en el curso, estos talleres se realizaron luego de las exposiciones de los temas: variación, funciones, límites, derivadas e integrales. En los talleres, nos centramos principalmente en las respuestas individuales y discusiones grupales de los profesores en formación a cada uno de ellos, esto con el fin de evidenciar los significados de la demostración negociados en cada etapa.
- En las sesiones 12, 17, 22, 26-27 y 31-33 representa las sesiones de clase programadas para plantear y mostrar avances acerca de un mini proyecto de diseño curricular que tuvieron que hacer los profesores en formación, organizados en los mismos grupos de las exposiciones. Este mini proyecto consistió en hacer una planeación de actividades, que podía ser una adaptación de otras investigaciones, para aplicar en estudiantes de cálculo de

la universidad y al final del curso presentar los resultados obtenidos en un documento escrito.

- En las sesiones correspondientes a 13, 21 y 34 representa las sesiones en las que cada profesor en formación expuso su experiencia de la práctica como tutor que llevaba con estudiantes de Cálculo I, estas tutorías están enmarcadas dentro de un programa de apoyo académico de la UIS llamado: Atención, Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes (ASAE). En las sesiones se mostraron los avances tenidos por sus estudiantes a cargo, su forma de dar las tutorías, sus inquietudes y la autocrítica acerca de lo que también estaba aprendiendo en esa experiencia práctica.

4.3 Fase III: Diseño de los talleres

Para el diseño de los talleres se tuvo en cuenta los fines para los cuales se diseña el curso, visto como una comunidad de práctica de clase y donde se trabaja principalmente acerca del proceso de la demostración. A continuación, se describen cada uno de los talleres haciendo principal énfasis en ellos, pues fueron momentos clave para evidenciar los aportes en cuanto a los significados de la demostración negociados en la comunidad.

4.3.1 Taller 1 (Diagnóstico). Este taller se llevó a cabo en dos sesiones, cada una de dos horas, se realizó con el propósito de conocer más acerca de los significados iniciales de la demostración de los participantes, antes de cualquier intervención teórica dentro de la comunidad.

Para este taller, me basé en una actividad del trabajo de Hernández (2017) que aplicó a profesores de cálculo diferencial, quien a su vez retomó el contenido utilizado en la tesis doctoral de Pfeiffer (2011), dicha actividad trató sobre un estudio exploratorio de los enfoques adoptados por los estudiantes de primer año universitario en la validación y evaluación de demostraciones matemáticas.

Para nuestra investigación, el contenido escogido se consideró apropiado, pues se trató acerca de un tema visto por los profesores en formación en el curso de cálculo diferencial. La actividad consistió en presentar las respuestas de cinco estudiantes de primer año universitario a la tarea de demostrar la siguiente proposición: "Sea f una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que f no puede tener más de dos valores comunes con su derivada".

El fin de este taller es dar evidencia de la valoración que le dan los profesores en formación a las respuestas planteadas y donde se pueda evidenciar qué significado le atribuyen a las mismas. A continuación, se enuncian las cinco respuestas con una descripción de cada una de acuerdo a nuestra consideración, basándonos en la existencia de diferentes tipos de demostración como lo plantea Fiallo (2011) y algunas consideraciones de acuerdo a Pfeiffer (2011).

En la respuesta de Gerard (figura 2) identificamos que corresponde a una demostración de tipo empírico basado en ejemplo (Fiallo, 2011), porque lo que hace el estudiante es utilizar un ejemplo, el cual llega a ser su demostración y además, este tipo de respuesta conserva una estructura que puede ser generalizable.

Respuesta de Gerard

$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

$f'(x) = 4x + 3$

$2x^2 + 3x - 7 = 4x + 3$

$2x^2 - x - 10 = 0$

$(2x - 5)(x + 2) = 0$

$x = \frac{5}{2}, \quad x = -2,$

Hay 2 soluciones, luego el enunciado es verdadero.

Figura 2. Respuesta de Gerard

La respuesta de Helena (figura 3) corresponde a una demostración de tipo retórico, además que se puede identificar como una demostración deductiva (Fiallo, 2011), donde la estudiante expresa en palabras cada uno de los elementos que necesita para concluir que el enunciado es verdadero, presenta generalidad sin el uso exclusivo del lenguaje algebraico.

Respuesta de Helena

La derivada de una función cuadrática es una expresión lineal. Para encontrar los puntos comunes resuelvo la ecuación que tengo de establecer la igualdad de las dos expresiones. Establecer una expresión cuadrática igual a una expresión lineal resulta una ecuación cuadrática la cual no puede tener más de dos soluciones.

Figura 3. Respuesta de Helena

La respuesta de Ian (figura 4) es una demostración de tipo gráfico, en ésta se evidencia la gráfica de una función cuadrática y con ella las diferentes posibilidades de solución entre esta y la derivada, en el primer caso muestra dos posibles soluciones que son las intersecciones entre f y f', en la segunda una posible solución, es decir, un punto de intersección entre f y f' y en el tercer caso ninguna posible solución. Esta respuesta muestra el uso correcto de los elementos presentes en el planteamiento del enunciado, por lo que podemos decir que en esencia es una demostración deductiva.

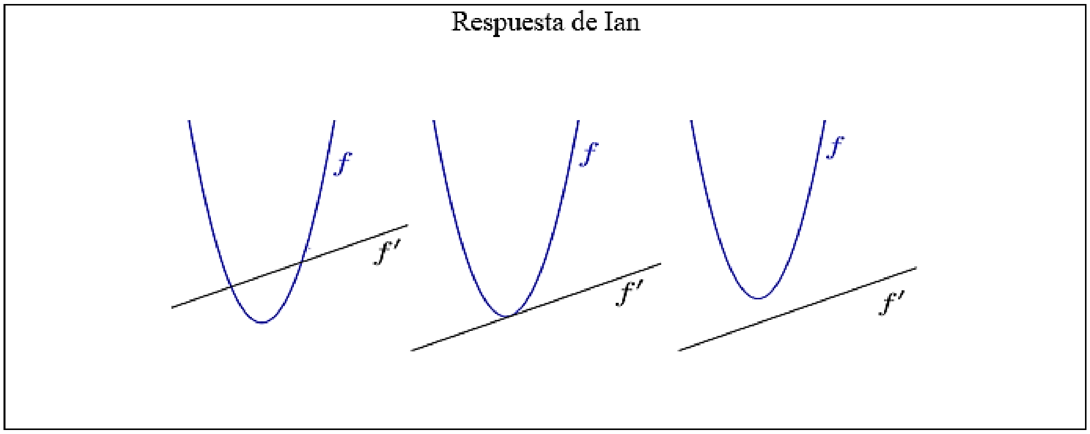


Figura 4. Respuesta de Ian

La respuesta de Joan (figura 5) corresponde a una demostración fallida, pues en el momento del desarrollo de su planteamiento, el estudiante multiplica por x sólo un lado de la igualdad, lo cual hace que la demostración quede incorrecta aunque llega a la conclusión que se pide de demostrar que se obtienen dos valores comunes de la función cuadrática con su derivada, pero esto no quiere decir que haya sido correcta su demostración.

Respuesta de Joan

Demostrar $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f'(x) = 2ax + b$. Queremos soluciones para probar que $f(x) = f'(x)$, *i. e.*

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

Multiplicando por x da:

$$ax^2 + bx + c = 2ax^2 + bx$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

Entonces las únicas dos posibles soluciones están dadas por $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

Figura 5. Respuesta de Joan

La respuesta de Kieran (figura 6) corresponde a una demostración de tipo algebraico (Deductivo Formal), en ella hace uso de elementos algebraicos válidos en los que plasma su respuesta y llega a la conclusión que se quería demostrar, pues parte de la función cuadrática mostrada en el enunciado para derivarla, igualar las dos funciones y encontrar una expresión cuadrática que claramente como máximo puede tener dos soluciones.

Respuesta de Kieran

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = f'(x)$$

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

$$ax^2 + (b - 2a)x + c - b = 0$$

Es una ecuación cuadrática la cual tiene como máximo dos soluciones.

Figura 6. Respuesta de Kieran

Dadas las cinco presentaciones a los profesores en formación, se le hacen las siguientes preguntas: ¿Cuáles de las respuestas dadas por los estudiantes corresponden a una demostración? ¿Por qué? Y ¿En qué casos aceptaría usted como válida las presentaciones de los estudiantes en una clase? ¿Por qué? La respuesta a estas preguntas nos permitió identificar los significados iniciales que los profesores en formación tenían acerca de la demostración matemática.

4.3.2 Taller 2 (Variación). En este taller se trabajó de manera similar al taller 1, pues la idea es la misma, se les presentó a los profesores en formación un enunciado que se quería demostrar y cinco respuestas hipotéticas de estudiantes de primer nivel en la universidad.

A partir de las cinco respuestas al enunciado, se pide a los profesores en formación primero de manera individual y luego una discusión grupal responder a lo siguiente: 1) asignar una calificación de 0 a 5 a cada respuesta y el por qué, 2) Decidir según su criterio cuáles de las respuestas corresponden a una demostración, 3) Mencionar con cuál de las respuestas se identifica más que haría cada uno, y finalmente, clasificar las demostraciones identificadas con una categoría de las presentadas por Fiallo (2011). Estos cuestionamientos nos ayudó para conocer en los profesores en formación sus avances en el estudio del proceso de la demostración, el repertorio compartido y los diferentes significados que pudieran surgir con una presentación similar al taller diagnóstico.

El taller se basó en el enunciado (figura 7) de un problema mostrado en la investigación de López (2017), en el marco del desarrollo de un curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2014) ofrecido a estudiantes de primer ingreso a los estudiantes de las carreras de Ciencias e Ingenierías.

Se toma una hoja tamaño carta y sin recortar, se forma un cilindro sin tapas.

Luis, Laura, Daniel, Sofía y Fabián discuten si la siguiente afirmación es verdadera:

"El cilindro de mayor volumen que se obtiene con cualquier hoja rectangular, es el que se forma usando el largo de la hoja para formar la base circular"

Figura 7. Enunciado del taller de variación

Al anterior enunciado, presentamos las respuestas que dieron cinco estudiantes (los nombres usados no son los propios):

En la respuesta de Luis (figura 8) se evidencia el uso de un ejemplo, lo cual consiste en medir las dimensiones de una hoja tamaño carta y a partir de ahí calcular los volúmenes en las dos situaciones y comparar los resultados. Esta respuesta llega a la conclusión basándose en el ejemplo particular que puede tener a la mano, así mismo es una respuesta que puede ser generalizable.

Respuesta de Luis
Mido las longitudes de los lados de la hoja tamaño carta y encuentro que el largo mide 27,94 cm y el ancho mide 21,6 cm. Usando el largo para la base circular: El radio es $r = \frac{27{,}94}{2\pi} = 4{,}44\ cm$ y el volumen es, $v = \pi r^2 h = \pi(4{,}44)^2(21{,}6) = 1337{,}73\ cm^3$ Usando el ancho para la base circular: El radio es $r = \frac{21{,}6}{2\pi} = 3.43\ cm$ y el volumen es, $v = \pi r^2 h = \pi(3{,}43)^2(27{,}94) = 1032{,}67\ cm^3$ Por tanto, el volumen es mayor formando la base circular con el largo de la hoja.
Calificación:

Figura 8. Respuesta de Luis

En la respuesta de Laura (figura 9) se evidencia que se deja llevar por la primera impresión al ver el problema y es considerar que, al ser la misma hoja, no importa si el cilindro se forma a lo largo o a lo ancho, el volumen siempre será igual, algo que evidentemente es incorrecto al analizarlo de forma más detallada.

Respuesta de Laura
Si tengo una hoja de largo=L y ancho=A, cuando se dobla por el largo o por el ancho para formar el cilindro, sigue siendo la misma hoja e igual área superficial la cual es $A \times L$. Por tanto, el volumen es igual al doblarlo en alguna de las dos formas.
Calificación:

Figura 9. Respuesta de Laura

La respuesta de Daniel (figura 10) es una forma que presenta aparentemente generalidad al usar letras, pero lo que él analiza realmente es para las situaciones en las que el largo de la hoja es el doble del ancho, es decir, se limita solamente a esos casos.

Respuesta de Daniel
Si tomo una hoja rectangular cuyo largo es el doble del ancho, es decir, $L = 2A$, entonces: Usando el largo para la base circular, el radio es $r = \frac{2A}{2\pi} = \frac{A}{\pi}$ y el volumen es, $V = \pi\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 A = \pi\frac{A^2}{\pi^2}A = \frac{A^3}{\pi}$ Usando el ancho para la base circular, el radio es $r = \frac{A}{2\pi}$ y el volumen es, $V = \pi\left(\frac{A}{2\pi}\right)^2 2A = \pi\frac{A^2}{4\pi^2}2A = \frac{A^3}{2\pi}$ Por tanto, el volumen es mayor cuando la base circular se forma con el largo.
Calificación:

Figura 10. Respuesta de Daniel

La respuesta de Sofía (figura 11) es una forma de hacerlo de manera general algebraicamente para cualquier hoja rectangular, donde calcula mediante para cualquier dimensión de la hoja los volúmenes al doblar por el largo o por el ancho y al compararlos concluir su respuesta.

Respuesta de Sofía
Sean a el ancho y l el largo de la hoja. Si se forma la base circular con el lado de la hoja cuyo lado mide a, se tiene que $r = \frac{a}{2\pi} \Longrightarrow V_1 = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 . l = \frac{a^2 l}{4\pi}$ Si se forma la base circular con l, se tiene que $r = \frac{l}{2\pi} \Longrightarrow V_2 = \pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 . a = \frac{a l^2}{4\pi}$ Ahora, teniendo en cuenta que $a < l$, y multiplicando por $\frac{1}{4\pi}$ que es positivo, $\frac{a}{4\pi} < \frac{l}{4\pi}$ Ahora multiplicando por a y l, que son positivos, $\frac{a^2 l}{4\pi} < \frac{a l^2}{4\pi}$ Entonces, $V_1 < V_2$, por tanto el volumen del cilindro formado a lo largo es más grande que formado a lo ancho.
Calificación:

Figura 11. Respuesta de Sofía

La respuesta de Fabián (figura 12) muestra algo de similitud con la respuesta de Daniel, a diferencia que Daniel hace un ejemplo más, es decir calcula los volúmenes considerando las dimensiones de una hoja tamaño carta y otro caso de hoja rectangular, además concluye en palabras expresando que al doblar el cilindro por el largo el radio va a ser mayor y en la fórmula del volumen de un cilindro, el radio por estar elevado al cuadrado hace que el radio sea mayor también.

Respuesta de Fabián
Usando las dimensiones de la hoja $L = 27{,}94\ cm$ y $A = 21{,}6\ cm$. Formando la base circular a lo largo, se tiene que $r = 4{,}44\ cm$ y $V_1 = 1337{,}73\ cm^3$ A lo ancho, se tiene que $r = 3{,}43\ cm$ y $V_2 = 1032{,}67\ cm^3$ Luego $V_1 > V_2$ Si $L = 35\ cm$ y $A = 20\ cm$ A lo largo, se tiene que $r = 5{,}57\ cm$ y $V_3 = 1949{,}35\ cm^3$ A lo ancho, se tiene que $r = 4{,}61\ cm$ y $V_4 = 1111{,}35\ cm^3$ Luego $V_3 > V_4$ Se observa que el radio influye, porque está elevado al cuadrado y además la altura no difiere mucho, entonces el radio determina si su radio es mayor o es menor. La altura incide, pero no va a ser superior al radio elevado al cuadrado. Por tanto, formando el cilindro a lo largo dela hoja se obtiene el mayor volumen.
Calificación:

Figura 12. Respuesta de Fabián

4.3.3 Taller 3 (Funciones). El taller se dividió en tres momentos:

- Se presentó al profesor en formación la hoja de la actividad para que la respondiera de manera individual.
- Los profesores en formación presentaron a sus compañeros las demostraciones que planteó en cada ítem y explican por qué lo hizo así. Mediante la socialización, se produce una discusión entre ellos donde la idea es dar a comprender sus respuestas y complementar las

respuestas escritas para identificar los significados de la demostración asumidos por cada uno.

- El investigador interviene para formalizar las ideas planteadas por los estudiantes.

En este taller, se presenta a los profesores en formación tres problemas relacionados con el tema de funciones en los que tienen que plantear conjeturas y demostrarlas. Las demostraciones que se le pide hacer a los profesores en formación son las siguientes (figura 13):

1. Suponga que f y g son funciones pares.
   - ¿Qué puedes decir sobre $f + g$ y $f . g$?
   - ¿Qué puedes decir si f y g son impares?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

2. Sean f y g dos funciones lineales.
   - ¿Qué puedes decir acerca de la composición?
   - ¿Cómo es su pendiente?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

3. Considera la familia de funciones $f(x) = \frac{1}{x^n}$, donde n es un entero positivo.
   - ¿Cómo es la función cuando n es par?
   - ¿Cómo es la función cuando n es impar?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

Figura 13. Demostraciones a realizar en el taller de funciones

Estas demostraciones requieren conocimientos básicos de funciones, como saber el significado de función par o impar, lineal y la composición de funciones. Las respuestas pueden variar dependiendo del rigor o el tipo de demostración que quieran hacer. Cuando el profesor en formación plasme su respuesta en la hoja de trabajo, mediante la socialización, se podrá identificar el significado que le asocia a la demostración, es decir, primero, si la demostración que produce es de tipo empírico o deductivo y segundo, el porqué de dicha presentación.

4.3.4 Taller 4 (Límites). Este taller está relacionado con el tema de límite de una función en un punto. Se les pide a los profesores en formación elaborar un plan de clase para un curso de Cálculo Diferencial de un programa de ingeniería. El objetivo es que los profesores en formación puedan llevar a cabo en su planeación aspectos aprendidos acerca de la demostración y de su enseñanza. Se espera que ellos planteen demostraciones que ayude a sus estudiantes a comprender las propiedades vistas donde incorporen distintas representaciones. El plan de clase debe tener en cuenta algunas propiedades y resultados de límites (figura 14).

Demostrar las siguientes propiedades de los límites:

Suponga que a es un número real y que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

Demostrar el siguiente resultado:

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe

Figura 14. Enunciados a demostrar en el plan de clase de límites

El diseño del plan de clase debe contener los siguientes elementos: objetivos de la sesión, actividades y desarrollo de la clase, recursos didácticos (¿Considera el uso de la tecnología? ¿De qué manera la usaría?) Y estrategias o proceso de evaluación. Al profesor en formación se le entregó un formato como el siguiente (figura 15):

TÍTULO DEL PLAN DE CLASE:		DURACIÓN:
ASIGNATURA	TEMA	SUBTEMAS
OBJETIVO		
RECURSOS DIDÁCTICOS		
ACTIVIDADES Y DESARROLLO DE LA CLASE		
ESTRATEGIAS Y PROCESO DE EVALUACIÓN		

Figura 15. Diseño de plan de clase

Los profesores en formación pueden hacer uso de diferentes herramientas para llevar a cabo su planeación, tales como libros de texto o el internet.

4.3.5 Taller 5 (Derivadas e integrales). En esta actividad se trabaja acerca del tema de Derivadas e Integrales, principalmente algunos teoremas o reglas específicos como: Regla del Producto para derivadas, Regla del Cociente para derivadas, Teorema del Valor Medio para Derivadas, Teorema del Valor Medio para Integrales y Teorema Fundamental del Cálculo. Estos teoremas fueron seleccionados por ser de los principales que se ven en los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

La actividad se diseñó para llevarla a cabo en grupos. Cada grupo se organizó teniendo en cuenta las características vistas en cada uno de los estudiantes a lo largo del curso; en cada grupo se distribuyeron estudiantes con diferente significado y usos que le daban a la demostración, por tanto, en los grupos hubo estudiantes que su postura se inclinaba más hacia la demostración deductiva formal y los que consideraban también las demostraciones empíricas como válidas.

En la primera parte de la actividad se le asignó a cada grupo un teorema de los anteriormente mencionados. El objetivo del taller era que ellos planearan para el tiempo que consideren la demostración de dicho teorema para un curso de cálculo diferencial o integral. Con esto se quiere observar ese proceso de negociación que se lleve a cabo en ese pequeño grupo, teniendo en cuenta las discusiones generadas entre ellos y algunas intervenciones del investigador. En la segunda parte de la actividad, los grupos tienen que presentar sus demostraciones al resto del curso, donde también se puede generar discusión acerca de las formas de presentación e incluso algunas sugerencias para sus compañeros.

4.4 Fase IV: Implementación de las actividades

La aplicación de los talleres planeados se llevó a cabo mediante las fechas correspondientes en la planeación del curso de Didáctica del Cálculo en el primer semestre académico de 2018. Algunas hojas de trabajo fueron contestadas de manera individual, para poder documentar los registros que reflejaran el significado de la demostración que le asignó cada profesor en formación en diferentes sesiones; otras actividades se realizaron de manera grupal teniendo en cuenta el perfil de cada profesor en formación donde se pudo evidenciar un proceso de negociación entre ellos y luego con todo el grupo.

La recolección de los datos se hizo a través de hojas de trabajo, registro de las observaciones (bitácora) realizada por el investigador en las diferentes sesiones de aplicación de las actividades, grabaciones y video grabaciones de las mismas con la transcripción de cada una de ellas.

4.5 Fase V: Análisis de los datos y reporte de resultados

En las hojas de trabajo, se observan las respuestas que los profesores en formación dieron a cada una de las preguntas planteadas, donde se evidenciaron los significados que tienen ellos acerca de la demostración; las grabaciones y videograbaciones sirvieron como apoyo para conocer más en palabras el complemento de cada una de las respuestas que ellos daban como sustento, también sirven como complemento a las discusiones que se generaron en el ambiente de la clase mediante la socialización de las actividades y donde se evidenció el significado que cada uno de los participantes tenía acerca de la demostración y la negociación que se llevó a cabo.

El análisis de los resultados se hizo a partir de la comparación de la información contenida en los datos recolectados y fue guiado por la pregunta de la investigación. Primero, se caracterizan y describen los diversos significados que los profesores en formación le dieron a la demostración. También, se hace un análisis sobre la negociación de los significados de la demostración que se mostraron a lo largo de las sesiones.

Por la naturaleza de la presente investigación, dado su contexto, no declaro categorías a priori respecto a los significados de la demostración que dan los profesores en formación en matemáticas, sino que se consideraron categorías emergentes de éstos, considerando como unidad de análisis los enunciados que hacen los participantes mediante su participación e identidad dentro de la comunidad.

5. Análisis de datos

En este capítulo presentamos los significados de la demostración matemática negociados por profesores de matemáticas en formación que participaron en un curso de Didáctica del Cálculo. Los significados surgieron de las participaciones en el curso visto como una comunidad de práctica de clase, los cuales sirven para responder a la pregunta de investigación que nos trazamos: ¿Qué significados negocia una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración?

5.1 Indicios de participación e identidad

En el presente estudio, el tema de aprendizaje es la demostración matemática en la comunidad de práctica, fue visto como un proceso de participación en la construcción de significados. En la teoría de la práctica social de Wenger (2001) el aprendizaje integra varios componentes, como: significado, práctica, comunidad e identidad. En esta investigación centramos la atención en lo referente al significado y eventualmente a algunos de los otros componentes.

La participación en una comunidad de práctica puede ser plena o periférica, este proceso puede tener una evolución a medida que se avanza colectivamente en el desarrollo de actividades dentro de la comunidad. En nuestra investigación, hubo algunos profesores en formación que se mantuvieron en el contorno de algunos debates, es decir, su participación fue muy poca y sus aportes no muy influyentes; sin embargo, otros mostraron avances en su participación de forma activa y protagónica, de manera que se pudo identificar los significados de la demostración para conocer si hubo estancamientos o avances en cuanto a estos. Teniendo en cuenta lo anterior, se escogieron principalmente cuatro de trece profesores en formación que mostraron más interés y en cuyas intervenciones se identificaron elementos para describir los significados, son aquellos en los que se pudo evidenciar una comparación durante el semestre en el que se desarrolló la comunidad de práctica de clase. Estos profesores en formación son: Estefany, Carolina, Nicolás y David (seudónimos).

En cuanto a la identidad de los miembros de la comunidad, presentamos a continuación un apartado en el que se muestra las experiencias vividas acerca de la demostración en su formación en la universidad en la línea del cálculo. Presentamos esa experiencia de los cuatro profesores en formación principales y otros más, en algunos más que en otros dependiendo de la forma en que vieron sus cursos, pues de alguna manera todos fueron participantes de la comunidad y en algún momento hicieron aportes que influyeron en los demás; luego, para las demás actividades y talleres mostramos especialmente los aportes de los cuatro mencionados anteriormente.

5.1.1 Experiencias de aprendizaje sobre el cálculo y la demostración. Para rastrear los significados de la demostración de los profesores de matemáticas en formación, no sólo se tuvo en cuenta la definición actual que tuvieran de ella, sino, en esta sección se tiene en cuenta las experiencias de una parte de su vida académica en la que muestran sus primeros acercamientos a ella en sus inicios de la educación superior, como señala Wenger (2001), "la negociación de significado es un proceso productivo, pero negociar un significado no quiere decir construirlo desde cero. El significado no es preexistente, pero tampoco es simplemente inventado" (pág. 78). En ese sentido, los significados de la demostración se ubican en momentos de su vida académica propios del contexto.

Para el inicio de la comunidad de práctica, se solicitó a cada uno de los profesores en formación plasmar en un ensayo sus experiencias de aprendizaje respecto a las asignaturas de cálculo que cursaron los primeros semestres en la universidad, además contar sus experiencias respecto a la demostración en dichas asignaturas, teniendo en cuenta las formas en las que les fue enseñada o les fue presentada. Los significados de la demostración que se evidencian de los profesores de matemáticas en formación, son el resultado de un proceso de negociación dado en parte de sus trayectorias de vida académica y que se seguirán constituyendo en su trayectoria profesional. A continuación, me referiré a cada uno de ellos que hicieron parte de la actividad y se convierten en objeto de nuestra investigación.

ESTEFANY

Como profesora en formación, Estefany muestra interés por el aprendizaje de las matemáticas y su enseñanza. Ella manifiesta que en los cursos de Cálculo de la universidad los aprobó satisfactoriamente sin repetir alguno, aunque con algunas dificultades. En el primer semestre de su formación en la universidad, en el curso de Cálculo Diferencial, Estefany tuvo como profesor un licenciado en matemáticas, lo que para ella considera "favorable ya que él dio prioridad a la demostración teniendo en cuenta que, de los miembros del curso, todos fuimos estudiantes de esta carrera". En los demás cursos de Cálculo, la demostración no tomó lugar, esto debido en parte a la pluralidad de estudiantes en el aula, pues habían de diferentes carreras y en estos cursos se enfatizaron principalmente en resolver problemas y ejercicios para ejecutar algoritmos que se debían aprender de memoria.

Estefany resalta que no solamente se debe enfatizar en memorizar fórmulas para resolver determinados problemas,

> Siento que esto fue como una desventaja, ya que, para mí, la matemática más que aprenderse las fórmulas o los algoritmos, es entender de dónde surgen… la demostración tiene gran influencia en el desarrollo de habilidades fundamentales como refutar, deducir, inferir y argumentar. Es imprescindible que el estudio del Cálculo vaya de la mano con la demostración, la cual es usada para asegurar la veracidad de cierta proposición matemática" y "como estudiante de licenciatura en matemáticas se dé prioridad al uso de la demostración en lugar de desplazarla y priorizar el estudio de sus aplicaciones. (Ensayo de Estefany, 2 de febrero de 2018)

Las afirmaciones de Estefany dan indicios del significado de la demostración que estuvo negociando dentro de su formación universitaria hasta ese momento. Aunque en los cursos de Cálculo no tuvo mayor acercamiento a la demostración, ella menciona que es de gran ayuda para asegurar el valor de verdad de una proposición, por lo cual, se puede identificar que para ella *la demostración es una herramienta para desarrollar habilidades y además es un medio para verificar una proposición*. También, Estefany mencionó:

> He podido evidenciar cómo en la formación escolar no disponen de una herramienta tan importante como lo es la demostración, dando paso al mundo universitario sin conocer qué es un teorema, un corolario, una proposición, y demás; por ello se presenta mayor dificultad en cursos donde predomina el uso de esta, más que en resolver un ejercicio de forma mecánica… debe reforzarse el tema de la demostración desde la formación escolar y continuarla en la universidad. (Ensayo de Estefany, 2 de febrero de 2018)

En el planteamiento de Estefany recae la importancia de llevar al aula la demostración, pero como ella lo menciona, no se debería esperar a que los estudiantes se enfrenten a la demostración hasta que accedan a la educación superior, por el contrario, se debe promover el uso de la demostración desde los niveles inferiores, para que se empiecen a familiarizar con ella desde edades tempranas. En su experiencia, Estefany no tuvo mayor acercamiento al proceso de demostrar en la escuela secundaria, sino hasta entrar a la universidad. Esto es algo que se presenta en la educación, aunque se considera la demostración como una parte central de las matemáticas y de la práctica de los matemáticos, muchas veces es completamente ignorada, lo que conlleva a que los estudiantes no asuman la necesidad de demostrar y solamente creer que es suficiente el estudio de los casos particulares (De Villiers, 1993; Knuth, 2002; Crespo y Ponteville, 2003; Camargo 2010)

CAROLINA

Carolina se destaca por tener buen desempeño en las asignaturas de Cálculo vistas en los primeros semestres, para ella,

> El cálculo y la demostración permiten dar precisión a un concepto propio del área de las matemáticas, pues el cálculo está basado en el desarrollo de algoritmos matemáticos que

> anticipan resultados y la demostración en la justificación teórica de determinado procedimiento o afirmación, de cierta manera son dos perspectivas distintas pero ligadas mutuamente y que en la formación y desarrollo de un licenciado en matemáticas es de vital importancia … Tradicionalmente se creía que las matemáticas solo abarcaban habilidades de numeración, cálculo aritmético, nociones geométricas y resolución de problemas, solo como área práctica, sin considerar que las matemáticas como elemento de estudio de profundización y para el desarrollo de dichas habilidades, la generalización de conceptos debe estar respaldados por demostraciones que corroboran la validez universal. (Ensayo de Carolina, 2 de febrero de 2018)

El significado de la demostración que podemos identificar ha negociado Carolina en su formación, se asocia *a una herramienta necesaria de justificación y validación de una proposición matemática*, pues señala que, gracias a la demostración, se ha dado importancia a señalar la verdad de las proposiciones matemáticas existiendo una secuencia de afirmaciones lógicas que son comprensibles y garantizan la verdad.

También, Carolina señala que la propuesta de los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN) es ambicioso con respecto a los alcances de la educación real en nuestro país y que respecto a la demostración no se presenta el desarrollo de ejes temáticos relacionados con temas formales, esto conlleva a que según ella:

> Al ingresar a la universidad y enfrentarse con cursos como Geometría Euclidiana, Fundamentos de Matemáticas, Teoría de Números, Teoría de Conjuntos, entre otros, propios del plan de estudios de la carrera, es común los nervios y la difícil adaptación a prácticas de demostraciones con justificación respaldada teóricamente, pues son

> experiencias nuevas que requieren de conceptualización precisa, dedicación y perseverancia. (Ensayo de Carolina, 2 de febrero de 2018)

Además, respecto a la demostración, Carolina señala que:

> Durante el proceso de aprendizaje de demostraciones, inicialmente familiarizar el lenguaje matemático es un factor clave para determinar que tan bien justificada está una demostración, ya que expresar de forma suelta la justificación teórica no respalda del todo una demostración, es necesario distinguir claramente el uso de conectores lógicos para realizar enlaces coherentes, no es estandarizar ideas sino generalizar afirmaciones; puesto que conocer las expresiones que se usan en matemáticas para presentar una idea permite distinguir contextos y comunicar información eficazmente. (Ensayo de Carolina, 2 de febrero de 2018)

Además de tener en cuenta la demostración como justificación y validación, en las ideas que expresa Carolina, podemos encontrar otros significados para la demostración, esto es, *la demostración hace uso adecuado de conectores lógicos*, es decir, se refiere a la función de *sistematización* que menciona De Villiers (1993) y que para Carolina, esto conlleva a que la demostración pueda comunicarse eficazmente, lo cual podemos asociar con la función de *comunicación* de De villiers (1993), pues permite dar a conocer resultados matemáticos entre la comunidad.

LAURA

En el caso de Laura, su experiencia en los cursos de Cálculo de la universidad no fue muy satisfactoria como esperaba, pues tuvo algunas dificultades, ella expresa:

> Tal vez la principal causa de las dificultades que presenté en el aprendizaje de estas asignaturas es por las matemáticas aprendidas en el colegio, por mi parte el ejercicio de generalizar a partir de sucesos repetitivos y empezar con el proceso de demostración, no se llevó a cabo debido a muchos factores, entre los más relevantes la falta de preparación del docente encargado de impartir la clase, ya que en el colegio el maestro que dictaba sociales era el mismo que se encargaba de dictar química, español y matemáticas, el escaso conocimiento matemático impartido en el aula de clases y la falta de herramientas interactivas para el aprendizaje, entre otras; fue por esta razón que cuando llegué a la universidad a recibir el curso de cálculo de una variable no contaba con el desarrollo del pensamiento matemático que se requiere para aprobar este curso. (Ensayo de Laura, 2 de febrero de 2018)

Para Laura, las dificultades que presentó inicialmente en la universidad están relacionadas con las pocas bases que tenía desde el colegio, pues en la educación media juega un papel primordial el conocimiento y la disciplina en el estudio de las matemáticas, especialmente en la demostración que pudo tener para desarrollar mejores habilidades y entender los temas relacionados con el Cálculo más adelante. Aquí recae la importancia de llevar al aula desde niveles inferiores el proceso de la demostración para desarrollar mejores herramientas y tomar las matemáticas de niveles superiores.

La situación que presentó Laura en la asignatura de Cálculo Diferencial en el primer semestre, se siguió presentando en los cursos posteriores, muchas veces, según ella lo indica, por la manera en que se llevaban a cabo sus clases, donde la mayoría de las veces se avanzaba rápidamente, teniendo en cuenta el progreso de las personas que estaban repitiendo la materia, lo que impedía llevar el ritmo adecuado para su forma de estudiar.

La demostración estuvo presente en varios cursos de cálculo, algunos profesores mostraban a sus estudiantes la demostración de algunos teoremas referentes a diferentes asignaturas. Al ver Cálculo Integral por segunda vez, expresa Laura: “contaba con excelentes bases para afrontar el ritmo del curso, no fue necesario dedicarle mucho tiempo para aprobar y además el docente daba muchas herramientas que nos permitían desarrollar aún más la capacidad de demostrar teoremas encaminados a cálculo II”. La demostración de dichos teoremas se daba de la manera en la que se presenta en el libro guía, así para los estudiantes se convertía en una forma de ver que los teoremas eran ciertos.

En la formación como profesores de matemáticas es de gran importancia promover experiencias de aprendizaje respecto a la demostración, que servirán como base para su posterior estudio o enseñanza de la misma (Camargo, 2010), en el caso de Laura como bien lo expresa,

> En cuanto a la demostración de los teoremas referentes al cálculo creo que se da un avance significativo en estos cursos, pero que para un futuro docente no son suficientes, ya que a medida que avanzamos en el plan de estudios nos encontramos con asignaturas que requieren que el estudiante ya tenga soltura para demostrar diferentes tipos de teoremas y conjeturas. (Ensayo de Laura, 2 de febrero de 2018)

El significado de la demostración se da por medio de su negociación (Wenger, 2001) y en la experiencia de Laura, éste significado está dado por como lo vivió en el inicio de su formación profesional y también en la necesidad que evidenció de trabajar más en ello durante su formación en la escuela secundaria, aspecto que ella considera primordial, además, tiene en cuenta que la manera en que vio la demostración en los cursos de Cálculo no es suficiente para enfrentar otras materias del plan de estudios que tienen un enfoque más cercano a la demostración. El significado que se fue construyendo va asociado a ver *la demostración como una herramienta de generalización a partir de procesos repetitivos*, importante dentro de las matemáticas.

DAVID

David presentó algunas dificultades al inicio de su carrera, debido a las pocas bases que tenía de la educación básica para enfrentar las matemáticas de la universidad. En su experiencia con la demostración se encontró con profesores que hicieron uso de ella en el aula y otros que no. En el caso de Cálculo Diferencial, el profesor encargado del curso usó la demostración, y según David,

> Teniendo en cuenta el tema de demostración y la importancia que este tema toma para una persona que estudia matemática, es necesario demostrar todo el razonamiento o producciones matemáticas, pues todo lo que se demuestra acarrea un peso de validez inmediato, en el caso de Cálculo I las demostraciones que se realizaban en clase eran muy claras y se percibía el objetivo por el cual el profesor realizaba dicha demostración, logrando en el estudiante esa necesidad de ir más allá de una definición o teorema. (Ensayo de David, 2 de febrero de 2018)

El significado que tiene David acerca de la demostración está relacionada con que ésta *es un tema que se debe abordar en el aula de clase*, así como también la demostración *es una herramienta que sirve para mostrar la validez de una proposición matemática*, esto para tener seguridad de que dichas proposiciones son “confiables” de usar.

En el curso de Cálculo Integral, David también tuvo acercamientos con la demostración,

> La forma como la profesora realizaba las clases, era muy dinámica y divertida, la participación del grupo y disposición que brindaba la profesora generaba un ambiente de discusión acerca de los conocimientos expuestos según el tema. Las demostraciones hechas

> en clase y sugeridas por la profesora generaban un gran interés, mostrando claramente el objetivo de este recurso tan necesario para comprender de una manera clara el uso de los determinados conceptos y teoremas. (Ensayo de David, 2 de febrero de 2018)

En este caso, el significado de la demostración está asociado en que esta *debe proporcionar la comprensión del uso de teoremas*.

La experiencia con la demostración no se presentó en todos los cursos de Cálculo, tal como David lo manifiesta para Cálculo III:

> Fue una materia con una metodología totalmente diferente, no es llegar a criticar, pero el profesor nos hacía sentir como espectadores de una película donde solo era observar el tablero y tomar los apuntes que él nos daba, la participación ero un poco como negada. La materia se basó prácticamente en aprender teoremas, definiciones y fórmulas y solo aplicarlas a los ejercicios que él nos entregaba, en otras palabras, eran clases mecánicas, no reconocía la demostración como un elemento en la enseñanza de los teoremas, solo se limitaba a expresarlos en función de la conveniencia según el tema tratado en clase. (Ensayo de David, 2 de febrero de 2018)

Aunque la demostración no siempre estuvo presente, David sostiene que parte del uso de la demostración depende del enfoque que tenga el profesor en sus clases y que claramente es un elemento de gran importancia dentro del campo de las matemáticas.

VALERIA

En el caso de Valeria, algunos de sus profesores de Cálculo hicieron uso de la demostración en sus clases, a respecto ella expresa,

> En el curso de Cálculo I, donde tuve la oportunidad de tener un profesor que sí le daba la importancia merecida a las demostraciones de cada teorema, él resaltaba que aprender las cosas de memoria no facilitaba los procesos, sino el saber cómo demostrar cada regla teórica y el porqué de su uso, para luego aplicarla con veracidad sin tener dudas del procedimiento y tener la seguridad de tener una solución correcta a cualquier problema abordado. (Ensayo de Valeria, 2 de febrero de 2018)

Se puede ver que Valeria encontró a la demostración como un medio para conocer por qué se usa una regla teórica o teorema para poder aplicarlo a determinados problemas con la convicción de que sí se puede usar, esto debido a que proporciona seguridad. Este punto de vista nos lleva a asociar el significado de la demostración como *medio para explicar el uso de los teoremas.*

Además, Valeria agrega,

> Durante el trascurso de los demás cursos de Cálculo (Cálculo II, Cálculo III, Ecuaciones Diferenciales), fueron muy pocas las experiencias donde tuve que recurrir a la demostración para resolver un problema, particularmente en el curso de Cálculo II, el profesor tan solo escribía los teoremas, acompañado de un ejemplo que en su mayoría exhibía un procedimiento mecánico y después de terminada la clase proponía una lista de ejercicios que seguían la misma estrategia, es por ello que puedo decir que este fue un curso que para mí fue mecánico, ya que entre más ejercicios realizaba más agilidad y destreza adquiría para lograr aprobar los exámenes, pero no se tenía en cuenta el por qué se usaban los teoremas. (Ensayo de Valeria, 2 de febrero de 2018)

Valeria hace uso del término mecánico para referirse a esas clases en las que lo primordial es hacer uso de la estructura de una clase en la que primero se ve la definición, luego el teorema, luego el ejemplo y finalmente los ejercicios de práctica para el estudiante, pero en ningún momento se utiliza la demostración.

Otra cosa importante que menciona Valeria es su visión acerca de cómo puede ser su papel de profesora en un futuro, a respecto ella dice:

> Estando preparándome como futura profesora tengo claro que la preparación referente al Cálculo mecánico como el Cálculo demostrativo refiere tener un equilibrio, no se trata de lograr que los estudiantes memoricen teoremas y definiciones, la cuestión es lograr que entiendan su naturaleza y que a la hora de abordar un problema puedan reconocer como utilizarlas y aplicarlas. (Ensayo de Valeria, 2 de febrero de 2018)

Es importante en Valeria el hecho de reflexionar acerca de su práctica como profesora en un futuro, principalmente en mostrar a los estudiantes las razones del por qué el uso de herramientas matemáticas.

TATIANA

Tatiana mencionó en su experiencia que, al entrar a la universidad, al igual que se evidencia en varios de sus compañeros, se dio cuenta que tenía muchas dificultades para enfrentar los contenidos de las materias de matemáticas, que, para ella, son consecuencia de su poca preparación en la educación básica, así lo expresa,

> No es desconocido en nosotros como estudiantes y futuros docentes de esta área, que la matemática se construye como una red de conexiones entre conceptos y procesos, que se van fortaleciendo y ampliando a medida que se avanza en la academia. Así, entre más sólidas estén las bases aumenta directamente la probabilidad de aprobar un curso como Cálculo… mi primer acercamiento con la demostración fue en fundamentos matemáticos,

> y aunque no estaba demostrando las fórmulas de Cálculo, si fui comprendiendo poco a poco cómo funcionaba el proceso de demostrar, la dificultad más grande era cómo organizar y escribir una demostración para que fuese entendible para cualquier lector, sin que perdiera la formalidad que esta requería, sinceramente demostraciones como la del concepto de limite fueron de las que más cuesta trabajo comprender, pues es una escritura a la que muchos siendo bachilleres no estamos acostumbrados, en mi caso este fue un primer rechazo a las demostraciones, porque sencillamente no logré entenderla cuando el docente la explicó. (Ensayo de Tatiana, 2 de febrero de 2018)

Podemos identificar que, para Tatiana, la demostración debe estar bien estructurada de tal forma que sea entendible y se pueda comunicar a cualquier lector, incluso ella plantea lo que considera para ella es una demostración:

> La demostración matemática es una cadena finita de proposiciones verdaderas, que se obtienen con ayuda de reglas de inferencia lógicas. El punto de partida de esta cadena son proposiciones cuya verdad es conocida. El punto final de la cadena es el teorema a demostrar. Cada miembro de la cadena se obtiene del anterior mediante reglas de inferencia lógica. (Ensayo de Tatiana, 2 de febrero de 2018)

Tatiana, en quien identificamos su significado de la demostración por su experiencia en las primeras asignaturas cursadas en la universidad, se preocupa por la organización de la misma, lo cual está ligado a la función de sistematización planteada por De Villiers (1993), pues la demostración debe ser esquemáticamente clara.

NINGUNA EXPERIENCIA CON LA DEMOSTRACIÓN

Mencionamos en este apartado, dos profesores en formación que tuvieron un acercamiento a la demostración prácticamente nulo, por diferentes motivos; uno de ellos debido a que sus profesores de Cálculo, expresaban que por ser cursos variados donde hay mezcla entre estudiantes de Ciencias Básicas e Ingeniería, principalmente con dominio de estos últimos, ellos no se centraban en las demostraciones pues éstas se las dejaban a los matemáticos. A continuación, se exponen algunas de las experiencias que se mostraron en los ensayos por parte de los profesores en formación: Sandra, Nicolle.

SANDRA

Manifestó que, por lo visto en otros compañeros, la mayoría de ellos veían en el colegio algunos de los temas que se presentan en Cálculo Diferencial, pero en su caso fue algo inexistente dentro de su formación en el colegio. Este problema fue una de las principales causas, junto al mal hábito de estudio, que la llevó a reprobar la asignatura de Cálculo Diferencial en su primer semestre en la universidad, para ella: "Esta vez estuve lejos de aprobar el curso, siento que no había estudiado los temas necesarios para afrontar el curso y es bastante complicado construir nuevos conceptos cuando no se tienen bases suficientes".

NICOLLE

Nicolle expresó:

> Un estudiante de licenciatura en matemáticas en esta clase no aprende a demostrar, aprende a ser más ingeniero que profesor, a usar más una calculadora que la mente como tal, pero con conocimientos verdaderamente adquiridos. Entonces, qué importa más, ¿saber mucho? o ¿saber enseñar lo mucho o poco que se sabe? Es aquí donde se ven las contradicciones

de los estudiantes al hablar de un profesor, de una materia o hasta de un mismo compañero. (Ensayo de Nicolle, 2 de febrero de 2018)

Los significados de la demostración que surgieron en los ensayos escritos de cada uno de los profesores en formación, están influenciados por la forma en que sus profesores impartían las clases en los cursos de Cálculo; en la mayoría de los casos los profesores en formación como estudiantes no tuvieron mucho acercamiento al proceso de la demostración. Sin embargo, ellos manifiestan que, como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, se debería dar mayor importancia a la demostración de algunos teoremas, de manera que se favorezca el aprendizaje y la apropiación de los conceptos involucrado en los distintos temas vistos alrededor del cálculo.

5.1.2 Significados de la demostración negociados desde la experiencia. Los significados acerca de la demostración que pudimos identificar en esta actividad de realizar los ensayos son variados, aunque no tenemos más evidencia de la negociación que llevó a cabo cada profesor en formación, sus ideas dejan claro que son: **La demostración como medio de verificación**, pues se utiliza para validar que una proposición se cumple; **La demostración como contenido**, pues es tomada como un tema a incluir en el currículo; **La demostración como medio de sistematización**, pues es aquella en que está muy bien organizada y estructurada con conectores lógicos; **La demostración como medio de comunicación**, pues es vista como una forma de dar a conocer las matemáticas; **La demostración como medio de explicación**, pues su principal objetivo es dar a entender una proposición; **La demostración como medio de comprensión**, debido a que ofrece al lector la oportunidad de entender a fondo una proposición o teorema.

5.2 Taller diagnóstico

En esta primera etapa del curso se permite dar evidencia del inicio del proceso de interacción entre los profesores en formación, donde ellos empiezan a adquirir un liderazgo y una reflexión acerca de sus posturas y la negociación que surge con sus compañeros mediante la participación dentro de la comunidad, reportamos especialmente los casos de estudio mencionados en el inicio: Estefany, Carolina, Nicolás y David, aunque eventualmente en algún momento se menciona otros profesores en formación que influyeron en los significados de la demostración que se estaban negociando.

En la primera sesión de este taller se les presentó a los profesores en formación las respuestas de cinco estudiantes de primer año universitario a la tarea de demostrar la siguiente proposición: "Sea f una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que f no puede tener más de dos valores comunes con su derivada". De esas cinco respuestas dadas, los profesores en formación tuvieron que decidir cuáles de ellas correspondía, según ellos, a una demostración, y se hicieron las siguientes preguntas: ¿Cuáles de las respuestas dadas por los estudiantes corresponden a una demostración? ¿En qué casos aceptaría usted como válida las presentaciones de los estudiantes en una clase? Y en cada uno de los casos argumentar el porqué de sus respuestas. Lo anterior nos permitió dar evidencia del significado de la demostración que le atribuyen con sus argumentos.

A continuación, mostramos algunas intervenciones individuales y grupales que surgieron de los participantes de la comunidad, como parte de la puesta en común de las ideas dentro de la comunidad y en la que se presentan diferentes posturas de algunos de ellos, generando inicios de interacción y reflexión sobre la práctica. En el proceso de la interacción de los miembros de la comunidad se evidenciaron los significados de la demostración que cada uno de ellos presentaba y que en algunos de ellos se dio un cambio o se reafirmó su posición respecto a la clasificación de las respuestas como demostraciones y sus argumentos del porqué.

Mostramos los significados encontrados mediante el análisis de las hojas de trabajo de los profesores en formación y la videograbación de las sesiones. Pudimos hallar una relación en las justificaciones de los profesores en formación comparando lo que ellos dijeron acerca de las respuestas dadas por Gerard y Kieran (figura 16).

Respuesta de Gerard:	Respuesta de Kieran:
$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 4x + 3$	$f'(x) = 2ax + b$
$2x^2 + 3x - 7 = 4x + 3$	$f(x) = f'(x)$
$2x^2 - x - 10 = 0$	$ax^2 + bx + c = 2ax + b$
$(2x - 5)(x + 2) = 0$	$ax^2 + (b - 2a)x + c - b = 0$
$x = \frac{5}{2}, \quad x = -2,$	
Hay 2 soluciones, luego el enunciado es verdadero.	Es una ecuación cuadrática la cual tiene como máximo dos soluciones.

Figura 16. Respuesta de Gerard y Kieran

En la respuesta de Gerard, ninguno de los profesores consideró que corresponde a una demostración, pues sólo usa un ejemplo de función cuadrática en particular y falta generalidad; además, con un ejemplo no se puede afirmar que para todas las funciones cuadráticas se cumple el enunciado. Mientras que en el caso de Kieran, todos los profesores en formación consideraron que sí corresponde a una demostración, debido a que en su respuesta tiene en cuenta todos los casos posibles, al menos utilizando la generalidad en los coeficientes de la función cuadrática para concluir que el enunciado es verdadero. Algunas de las consideraciones de los profesores en formación son las siguientes:

Nicolás: La respuesta de Gerard no es una demostración porque lo que hace es dar un solo ejemplo, es válida sólo si se pide un ejemplo, pero debe comprender que ésta es una posibilidad y lo tendría que hacer considerando cualquier valor de a, b y c.

Carolina: Exacto, Gerard dio una respuesta empírica a conveniencia (ejemplo) y lo que hace es ilustrar lo que sucede, mas no demuestra.

David: La respuesta de Gerard no corresponde a una demostración, pues una demostración, se basa en cualquier número, en este caso para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$ y no solamente para un ejemplo particular.

En la respuesta de Gerard hubo consenso entre todos; para los profesores en formación, ahí muestra la estructura de lo que se debería hacer, pero sólo con un ejemplo, tal como lo señala Pfeiffer (2011), esta respuesta hace uso de los ejemplos (representantes de una clase), lo cual él categoriza como una demostración genérica en la que la demostración puede ser generalizable, aunque el estudiante no toma todos los casos posibles, si mantiene una estructura clara de solución.

En el caso de la respuesta de Kieran; Estefany y Nicolás mencionan:

Estefany: Kieran sí realiza una demostración de manera general de función cuadrática con su derivada.

Nicolás: Esta respuesta, aunque pudo mejorar un poco su esquema, hace un buen procedimiento y éste es generalizado, por lo cual lo acepto como demostración.

Los demás profesores en formación comparten las mismas ideas que expresan Estefany y Nicolás; para todos, la respuesta de Kieran sí es una demostración, principalmente porque utiliza lenguaje algebraico de manera general relacionando muy bien los datos del enunciado del problema. Los argumentos que dan los profesores en formación están basados en el uso o no de la generalidad.

Algunos de los profesores en formación manifestaron que en el caso que se les presentara lo mismo en una clase de Cálculo, lo ideal sería mostrarle al estudiante que su respuesta está correcta para un solo caso e invitarlo a que piense en otros casos más y construya su demostración de manera general. Por este motivo, dadas las opiniones y justificaciones de los profesores en formación, podemos identificar un significado, el cual es que *la demostración presenta generalidad* pues está relacionada con una perspectiva formalista donde se hace uso exclusivo del álgebra.

En el caso de la respuesta de Helena (figura 17), encontramos que los profesores en formación en su mayoría no la consideran como una demostración.

Respuesta de Helena:

La derivada de una función cuadrática es una expresión lineal. Para encontrar los puntos comunes resuelvo la ecuación que tengo de establecer la igualdad de las dos expresiones. Establecer una expresión cuadrática igual a una expresión lineal resulta una ecuación cuadrática la cual no puede tener más de dos soluciones.

Figura 17. Respuesta de Helena

David: La respuesta que dio Helena tiene en su razonamiento una validez, pero no es suficiente para llegar a decir que es válido para cualquier función cuadrática.

Nicolás: Tiene toda la expresión y los conceptos de cómo y porqué es correcta la afirmación, pero le falta un poco de demostración numérica para una demostración algo mejor. Yo la valdría como demostración si se pidiera de manera oral y si fuera escrito valdría la mitad. No es una demostración, debido a que sólo usa palabras y en su explicación no hay ninguna expresión algebraica**.**

Carolina: Para mí no es una demostración, le valoraría la mitad de la calificación, pues la idea es acertada pero falta la estructura de una generalización formal.

Podemos ver que, para los profesores en formación, el hecho de usar únicamente lenguaje retórico para expresar la respuesta, hace que no corresponda a una demostración; para ellos falta la generalidad especialmente usando el álgebra en su justificación, lo cual reafirma el significado que están asociando a la demostración. Sin embargo, Estefany en su postura mantiene que la respuesta presentada sí corresponde a una demostración, según lo expresa:

Estefany: Helena realizó la demostración para un caso general de la función cuadrática y su derivada. La acepto como demostración, porque probó la proposición en general y no es para un caso específico, además su manera de expresar las ideas es bastante entendible.

Tomando en cuenta la postura de Estefany, podemos asociar el significado de la demostración como aquella que *es explicativa sin pérdida de generalidad* y, además, la demostración *sirve como medio de comprensión*. En los otros casos de Nicolás, David y Carolina, ellos no están de acuerdo en considerar esta respuesta como una demostración, debido a que hace falta la evidencia algebraica de lo que se está expresando únicamente en palabras. Algunos de ellos continúan su debate:

Nicolás: Helena se ve que tiene todos los conocimientos, pero no fue capaz de plantear bien su demostración, porque para mí debe tener uso de herramientas algebraicas.

Inv: ¿Será que con lo que escribió Helena no plasma y quiere decir lo mismo que Kieran?

Nicolás: Hay veces que uno tiene los conocimientos muy bien en la cabeza, pero a la hora de expresarlo matemáticamente no es capaz, porque por ejemplo yo a veces sé que es lo que debo hacer en la cabeza, pero si yo escribo todo lo que debo hacer como un ensayo, no es una demostración porque no tiene todo el rigor matemático.

Estefany: Para mí, sí es una demostración, porque analizando la respuesta de Helena, tiene todos los elementos necesarios para demostrar que el enunciado es verdadero, ella hace en palabras lo que escribió Kieran algebraicamente.

Nicolás: En mi caso, si tuviera que calificar a Helena, yo no le daría todo el punto, porque viéndolo desde el rigor matemático, le hicieron falta muchas cosas como lo dije anteriormente.

Estefany: No estoy muy de acuerdo, porque hay distintas maneras de demostrar y Helena da una de ellas. No puedo decir, ahí le faltan las letras, le faltan las palabras, no, porque ella da una forma de demostrarla. En mi experiencia en el curso de Fundamentos de Matemáticas en el que el profesor nos hacía demostrar todo con símbolos matemáticos y no aceptaba demostraciones en palabras; en cambio, en el curso de Teoría de Conjuntos el profesor nos pedía hacer también demostraciones en palabras, entonces es ahí donde se puede ver que hay distintas maneras de demostrar un enunciado matemático.

Nicolás: Un profesor decía que una demostración debería tener ciertos pasos algebraicos y yo nunca tuve un punto completo con él. Porque cuando uno le da el punto completo, el estudiante no se cuestiona acerca de lo que debe mejorar.

En ese momento de la sesión no se logra un acuerdo total entre ellos, cada uno mantiene su postura de acuerdo a la experiencia que han vivido durante su formación y sobre lo que creen que es una demostración. Hay una profesora en formación, que es Sandra, quien cambia su forma de ver la respuesta de Helena, pues al leerla varias veces y con los argumentos de Estefany empieza a considerar como demostración aquella que tenga una estructura retórica, pero de tal manera que conserve la generalidad y la lógica. En los demás casos, como Nicolás, Carolina y David mantienen su posición, pues, cuando Nicolás manifiesta la necesidad de herramientas algebraicas en la respuesta de Helena, se evidencia un significado que se está asociando a la demostración y es *como medio de comunicación en lenguaje algebraico*, pues es un formato algebraico que mantiene una estructura lógica, que según él se necesita seguir unos pasos haciendo uso del álgebra para organizar el contenido de la demostración.

En el caso de la respuesta de Ian (figura 18), que fue de manera gráfica, Sandra es la única profesora en formación que la considera como una demostración. Pues según ella: "si es una demostración, porque aborda el problema desde la geometría. La acepto porque la demuestra correctamente utilizando elementos de la geometría"

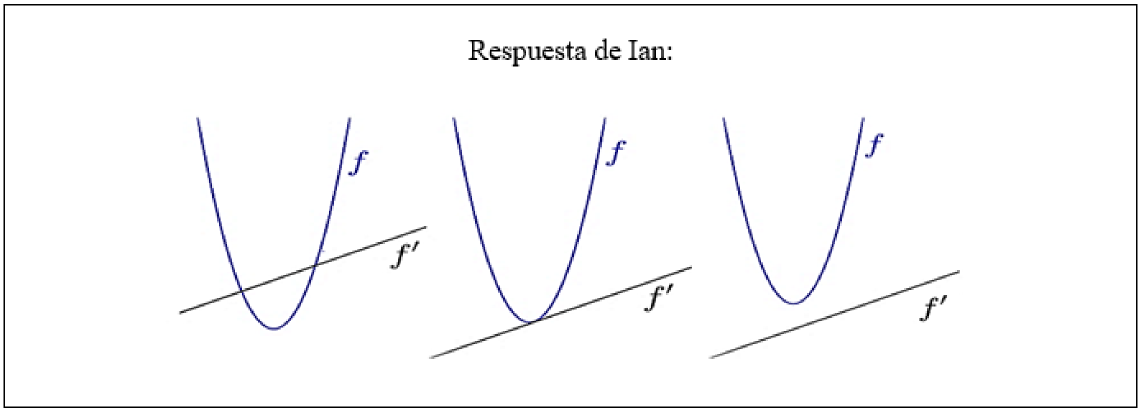


Figura 18. Respuesta de Ian

Los demás profesores en formación consideran que la respuesta dada por Ian no corresponde a una demostración, pues para ellos falta claridad en la presentación:

> Nicolás: Quizá se podría ver como una demostración usando geometría, pero para aceptarla como demostración debe mejorar a la hora de escribirla donde explique lo que hizo en la gráfica (le faltan muchas cosas).

> Manuel: hace falta un poco de lenguaje más técnico, Ian está usando un método más geómetra donde por medio de la generalidad de la gráfica de una ecuación cuadrática usa los conocimientos previos a la derivada y su representación para mostrar la veracidad de su hipótesis, pero hace falta lenguaje algebraico.

En los argumentos de los profesores en formación podemos evidenciar que el usar la geometría o representaciones geométricas para dar respuesta a una situación a demostrar no es un elemento convincente para utilizarlo y validarlo como demostración, debido a que no hace uso lenguaje algebraico para justificar su respuesta, ellos sólo lo están tomando como un posible elemento que hace posible entender lo que está sucediendo con el problema y quizá una manera de guiarse para plantear la demostración pero por sí sola no es suficiente. Respecto a esta idea, podemos decir que estas formas de representación son formas de sustentar argumentos matemáticos válidos para proporcionar comprensión.

> Algunas formas de representación, como los diagramas, las gráficas y las expresiones simbólicas, han sido parte considerable de las matemáticas escolares. Desafortunadamente, estas y otras representaciones se han enseñado y aprendido con frecuencia como si constituyeran fines en sí mismas. Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos, para que los alumnos se comuniquen sus enfoques, argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización… Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas. (NCTM, 2003, p. 71).

Dos profesoras en formación continuaron exponiendo sus posturas respecto a una demostración con elementos gráficos:

Juliana: Yo pienso que Ian solamente muestra unas curvas y unas líneas que no necesariamente muestra todo el significado, depende del significado que le dé el profesor, depende mucho de lo que piense el profesor, necesitaría más explicación de lo que está representando.

Estefany: Es una demostración gráfica, ya depende de la consideración del profesor si considera colocarle el máximo de la calificación, pero al igual que la respuesta de Helena y Kieran son formas distintas de demostrar, una es gráfico, una verbal y una algebraica.

Juliana: Uno a la hora de plasmar una demostración, debe especificar cada paso que está haciendo y no dejar tanto a la imaginación del profesor, para que él la pueda evaluar mejor.

En la primera parte de la actividad, podemos encontrar que los profesores en formación, en su mayoría, tienen una visión de la demostración formalista, ligada a los procesos de comunicación y representación, principalmente con la utilización del álgebra, para expresar de manera deductiva los pasos a seguir para llegar a la conclusión.

La respuesta que dio Estefany en la primera sesión en su hoja de trabajo, indicó que Ian no estaba haciendo una demostración, pero debido a la interacción que se dio en la segunda parte con sus compañeros, la empezó a considerar como demostración, además, también da como válida la respuesta de Helena manifestando que estas formas distintas de respuestas corresponden a demostraciones de diferentes tipos. De acuerdo a la posición de Estefany y su ampliación del significado que se le asocia a la demostración, algunas investigaciones como la de Healy y Hoyles (2000) señalan que los estudiantes prefieren argumentos narrativos, es decir, aquellos en los que las relaciones matemáticas y el razonamiento se describen en lenguaje común, además aquellos que utilizan diagramas, ejemplos, porque están más cerca de su propia manera de expresar una justificación; esto porque a menudo los estudiantes necesitan hacer comprobaciones empíricas, después de mirar o hacer una demostración, porque esta no los convence.

Estefany hace una negociación o ampliación de su visión acerca de la demostración, pues inicialmente considera válida solamente la respuesta que tiene estructura formal deductiva y en palabras, para luego considerar también la respuesta de tipo gráfico como otro tipo de demostración. Nicolle es otra profesora en formación que, de acuerdo con Estefany, manifiesta la importancia de tener en cuenta las distintas formas de demostrar que de una u otra manera muestran la verdad de la proposición que se quiere demostrar.

Finalmente, mostramos algunas de las posturas que tuvieron los profesores en formación en cuanto a la respuesta de Joan (figura 19). Aunque en el procedimiento se comete un error, los profesores en formación (Sandra, Juliana y Sebastián) consideran dicha respuesta como una demostración, debido a que según ellos: "La respuesta tiene el pensamiento deductivo, tiene la estructura p implica q, aunque comete un error. Es una demostración, porque muestra elementos que pertenecen a una demostración formal". Podemos identificar que un significado de la demostración que está bastante presente en la mayoría de los profesores en formación, es que la demostración debe hacer uso exclusivo del álgebra, a pesar de existir errores, eso es lo que para ellos la identifica principalmente.

Respuesta de Joan:

Demostrar $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f'(x) = 2ax + b$. Queremos soluciones para probar que $f(x) = f'(x)$, *i. e.*

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

Multiplicando por x da:

$$ax^2 + bx + c = 2ax^2 + bx$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

Entonces las únicas dos posibles soluciones están dadas por $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

Figura 19. Respuesta de Joan

Las demás observaciones de los profesores en formación señalan que, efectivamente la respuesta de Joan muestra una estructura buena en cuanto al uso del álgebra, el problema está en el error que se cometió. Por eso, no la consideran como una demostración, porque en realidad sería una demostración fallida.

En el taller diagnóstico, identificamos a dos profesores en formación (Estefany y Sandra), que mediante la interacción con sus compañeros de clase cambiaron algunas de sus posturas respecto a la consideración de las respuestas presentadas como demostraciones o no, quienes ampliaron sus significados, en los dos casos terminaron aceptando como demostraciones las respuestas proporcionadas por Helena, Ian y Kieran. Por parte de los demás profesores en formación, se pudo evidenciar que no cambiaron sus posturas acerca de considerar dichas respuestas como demostraciones, pues según ellos, estas presentaciones carecen de formalismo, especialmente de justificaciones que van relacionadas con el uso del álgebra; estos profesores en formación no reconocen que los procesos de comunicación y representación pueden ser procesos complementarios y necesarios para el desarrollo del proceso de demostración, que no necesariamente la demostración debe estar representada en un sistema algebraico.

5.2.1 Significados de la demostración negociados en el taller diagnóstico. En el taller diagnóstico encontramos otros significados de la demostración más de los obtenidos en las experiencias de los profesores en formación en los cursos de cálculo de la universidad, estos son: **La demostración presenta generalidad**, pues en su presentación no se basa en ejemplos; **La demostración como medio de explicación**, debido a que muestra al lector el porqué; **La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico**, puesto que utiliza la generalidad utilizando exclusivamente el álgebra.

5.3 Estudio de dos investigaciones relacionadas con la argumentación y la demostración

Según lo planeado en el curso de Didáctica del Cálculo, luego de finalizado el taller diagnóstico, dos grupos de profesores en formación (Juliana - Laura y Valeria - Tatiana) prepararon exposiciones de dos trabajos de investigación relacionados con la demostración para presentar y discutir en el grupo. El primer de ellos fue el artículo titulado “Analysis of the cognitive or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course” de Fiallo y Gutierrez (2017) y el segundo fue la tesis de trabajo de grado de maestría en Educación Matemática de López (2017) titulada: “Procesos de argumentación y demostración de estudiantes en un curso de precálculo”. Se seleccionaron estos dos trabajos de investigación, ya que aportan diferentes perspectivas acerca de la demostración en el campo de las matemáticas en diferentes niveles de la educación y atendiendo a las demostraciones que surgen en el aula, considerando la demostración en un sentido amplio. A continuación, presentamos algunos momentos de cada una de las exposiciones, donde se discutió aspectos importantes relacionados con la demostración.

5.3.1 Artículo: Analysis of the cognitive or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. La sesión estuvo a cargo de las profesoras en formación Laura y Juliana. En la exposición se trató el tema de la existencia de tipos de demostración, que para los autores, se dividen en empíricas y deductivas; las demostraciones empíricas se caracterizan por comprobar que la conjetura es cierta solo en uno o pocos casos tomando de un conjunto más amplio de ejemplos, asumiendo que se cumple para todos los casos; las demostraciones deductivas, son aquellas que consisten en una cadena de implicaciones lógicas que conectan la hipótesis con la declaración de la conjetura.

En cuanto a los tipos, se expusieron los que plantean Marrades y Gutiérrez (2000) para analizar e identificar las pruebas producidas por los estudiantes y la evolución de las habilidades de prueba. Los tipos de demostración son:

Empirismo ingenuo: son los casos particulares, mostrar que una conjetura es verdadera mediante un caso particular, es cualquier ejemplo.

Ejemplo genérico: muestra que una conjetura es cierta por un ejemplo específico y tiene una característica especifica de una clase.

Experimento mental: consiste en una cadena de declaraciones deductivas organizadas con la ayuda de ejemplos específicos.

Formal: es una cadena de declaraciones deductivas organizadas sin la ayuda de ejemplos específicos, sino basada en propiedades, teoremas y demás.

Algunas discusiones de los profesores en formación giraron en torno a si se tenía que hablar de una secuencia entre los procesos de conjeturar, argumentar y demostrar; basados en lo expuesto se concluyó que no, pues se pueden dar al mismo tiempo. En donde sí se puede hablar de jerarquía es entre los tipos de demostración, pues permite evaluar el progreso de los estudiantes en su aprendizaje, porque para pasar de un tipo a uno más alto se requiere un mayor nivel de internalización y razonamiento.

Una de las conclusiones a las que llegó Laura como expositora, que compartió con sus compañeros fue la siguiente,

> Se deben incluir los razonamientos empíricos. Como futuros docentes es importante que trabajemos este ejercicio en nuestros estudiantes, que no digamos que a nuestros estudiantes hay que enseñarle a demostrar en los últimos grados, cuando se puede empezar a trabajar desde la primaria situaciones que le permitan al estudiante argumentar, empecemos a asimilar las demostraciones empíricas en nuestros estudiantes, porque éstas

les pueden servir para ir construyendo una demostración más deductiva formal. (Laura, sesión 14 de febrero)

5.3.2 Tesis: Procesos de argumentación y demostración de estudiantes en un curso de precálculo. Para el desarrollo de esta sesión estuvieron encargadas dos profesoras en formación (Tatiana y Valeria), quienes estaban encargadas de la exposición, aunque en el desarrollo de la misma hubo participación por los demás profesores en formación y también por la profesora encargada del curso. Durante el desarrollo de la exposición surgieron algunas inquietudes respecto a la diferencia entre argumentación y demostración. A continuación, mostramos algunas partes de conversaciones que se dieron durante esta sesión de clase y que consideramos importantes, pues aportan al conocimiento de los profesores en formación acerca de la demostración y que influye en los significados negociados dentro de la comunidad de práctica; mostramos las opiniones e intervenciones de diferentes profesores en formación que guiaron la conversación del tema tratado.

Profesora: En el planteamiento del problema dice que es importante indagar sobre el proceso de la demostración, ¿por qué ese y no otro?

Carolina: Pues según el NCTM, la demostración es algo que se debe trabajar con los estudiantes no sólo al final de la etapa escolar sino siempre desde su inicio.

Profesora: Sin embargo, él dice que se supone que al terminar el bachillerato los estudiantes salen con un nivel de desarrollo de todos los pensamientos, pero nos damos cuenta que definitivamente a la universidad no llegamos con este desarrollo. ¿Es claro qué se da a entender por demostración?

Sebastián: El autor dice que no solamente se va a fijar en la demostración como un resultado sino también como un proceso.

Inicialmente, dentro de la comunidad se empieza a hablar del porqué precisamente en el estudio, uno de los intereses es ver el proceso de la demostración en estudiantes que van a ingresar a la universidad. Algo importante que menciona Carolina es que desde los estándares del NCTM (2003), se señala la importancia de trabajar el proceso de la demostración en los estudiantes de cualquier nivel de escolaridad. Luego, en la exposición surge otra palabra clave que es la argumentación y con ello algunas dudas que se intentan dejar claras.

Laura: El autor dice que la argumentación se refiere a todo el proceso que está relacionado con el planteamiento de la conjetura y la demostración se refiere al proceso final que valida la conjetura anunciante.

Profesora: Mire que surge otro proceso que es la argumentación.

Nicolás: Antes de lo que hace Fiallo, según Balacheff dice que la argumentación y la demostración son dos procesos distintos, pero con Fiallo hace la “unión” entre esos dos procesos.

Profesora: A mí me parece que debe quedar claro en nosotros, ya que vamos a trabajar sobre esto todo el semestre, qué significa favorecer en el estudiante el proceso de argumentación y demostración, que son distintos y porqué.

David: Cuando existe una relación más cercana entre la argumentación y la demostración entonces se acerca más a la respuesta que quiere lograr.

Prof: Y ¿cuál es la respuesta?

David: Es demostrar la conjetura, es decir, llegar a la conclusión.

Prof: A ver, uno cuando demuestra ¿llega a una conclusión?

Tatiana y Sandra: Llega a validar la conjetura.

Prof: Es necesario tener claro en qué consiste la demostración, porque ahora estamos como estudiantes, pero luego van a ser profesores y van a aplicar esto que estamos aprendiendo.

Valeria: Nos estamos metiendo a la estructura de la demostración y esas características, por ejemplo, se usan en el método axiomático deductivo donde efectivamente tomamos esos conjuntos de verdades que son axiomas, es decir, son verdades que nos permiten validar una afirmación, esa afirmación es lo que nosotros empezamos a llamar una conjetura, porque yo pienso que es así pero tengo que demostrar que es falso o verdadero, cuando ya lo demostramos eso se convierte en verdad, ahora puedo usarlo como un base para otra cosa.

Valeria: La argumentación se utiliza para convencer, así lo que esté diciendo no sea verdadero y la demostración es para validar.

Profe: ¿Alguien tiene otra cosa?

Nicolle: Yo pudo decir cualquier cosa así sea verdadero o falso, una afirmación, en la argumentación hago convencer de que es cierto y en la demostración a otra persona se hace ver que un razonamiento es verdadero con sustento teórico, no solo porque yo lo diga y ya.

Julián: La argumentación es como el planteamiento de la conjetura y la demostración es validar esa conjetura.

Profe: Ok, vamos a quedarnos con lo que dice Nicolle, que está muy cerca de lo que queremos.

Profe: Hasta aquí ¿hay alguna pregunta?

Juliana: Que ella (Refiriéndose a Valeria) dice los tipos de demostración y tipos de argumentación de acuerdo a argumentaciones, pero así estoy entendiendo que son lo mismo, pero para mí son totalmente diferentes, van de pronto de la mano para llegar a un proceso demostrativo de acuerdo a los procesos deductivos formales y la argumentación, si yo argumento una cosa y la demuestro la estoy entendiendo la misma.

Profe: Estefany, ¿qué entendiste de lo que dicen tus compañeras?

Estefany: Yo no entendí que sean iguales, pues hay diferentes tipos de argumentación y demostración. La argumentación es algo que yo puedo afirmar, pero no tengo como sustentarlo con bases teóricas, pero la demostración sí, es como un tipo de argumentación, pero más formal.

Esta parte del debate, muestra una mejor idea aclarando lo que se entiende y lo que se va a tener en cuenta acerca de la argumentación y la demostración. Lo anterior nos permite trabajar y hacer caer en la cuenta a los profesores en formación de la existencia de diversas posturas relacionadas con la caracterización de estos dos procesos importantes dentro del campo de las matemáticas. Han sido diversos autores que han propuesto una clasificación de la demostración de acuerdo con el rigor o el grado de abstracción (Balacheff, 1988; Gutiérrez, 2001; Harel & Sowder, 1998; Fiallo, 2011).

Cuando hablamos de diferentes posturas referentes a la clasificación de las demostraciones, decimos que son diferentes visiones en las que no necesariamente debemos estar de acuerdo con todas, sino tener una visión crítica en cuanto a la postura que asumimos como profesores de matemáticas para llevarla al aula. Así, en la comunidad de práctica de clase se empezó a dar algunos acercamientos a las posturas acerca del papel que toma la demostración en el aula y lo que permite avanzar en los siguientes talleres y actividades. No obstante, en este momento del curso no se asumió una postura absoluta acerca de la demostración por parte de los participantes de la comunidad, pues ese no es el fin de la negociación de significados de la teoría de Wenger (2001); más bien es conocer las diferentes opiniones de los profesores en formación que están negociando.

5.4 Taller de variación

Este taller presenta similitud con el taller diagnóstico, pues utiliza una estructura semejante, consistió en analizar la respuesta que le dieron cinco estudiantes a un anunciado matemático (figura

20). Los profesores en formación de la comunidad tuvieron que decidir cuáles de ellas corresponden a una demostración, asignar una calificación de 0 a 5 en cada una y decir con cuál de ellas se identifica que haría.

Se toma una hoja tamaño carta y sin recortar, se forma un cilindro sin tapas.

Luis, Laura, Daniel, Sofía y Fabián responden si la siguiente afirmación es verdadera:

"El cilindro de mayor volumen que se obtiene con cualquier hoja rectangular, es el que se forma usando el largo de la hoja para formar la base circular"

Figura 20. Enunciado de la actividad

Las cinco respuestas que se le presentan a los profesores en formación difieren en el tipo de demostración que está utilizando cada estudiante, en el caso de Luis (figura 21), toma las medidas de una hoja rectangular tamaño carta y calcula el volumen doblando por el largo y por el ancho de la hoja y llega a la conclusión que la afirmación es verdadera.

Respuesta de Luis

Mido las longitudes de los lados de la hoja tamaño carta y encuentro que el largo mide 27,94 cm y el ancho mide 21,6 cm.

Usando el largo para la base circular:

El radio es $r = \frac{27{,}94}{2\pi} = 4{,}44\ cm$ y el volumen es,

$$v = \pi r^2 h = \pi(4{,}44)^2(21{,}6) = 1337{,}73\ cm^3$$

Usando el ancho para la base circular:

El radio es $r = \frac{21{,}6}{2\pi} = 3.43\ cm$ y el volumen es,

$$v = \pi r^2 h = \pi(3{,}43)^2(27{,}94) = 1032{,}67\ cm^3$$

Por tanto, el volumen es mayor formando la base circular con el largo de la hoja.

Figura 21. Respuesta de Luis

Para la respuesta de Luis, las calificaciones de los profesores en formación fueron muy variadas, algunos de ellos consideraron una calificación aceptable superior o igual a 3. Las calificaciones más altas que se encontraron están asociadas en que la respuesta concuerda con lo que dice la afirmación, por ejemplo, para Juliana: "Luis analiza lo que pasa en los dos casos al doblar la hoja y a partir de ahí llega a la conclusión", se evidencia que a partir del ejemplo realizado podría concluir que el volumen es mayor formando la base circular con el largo de la hoja para cualquier hoja rectangular, aunque al juzgar si corresponde a una demostración, no la considera como tal, pues para ella "no se evidencia la manera de llegar a la generalización".

Para los profesores en formación que asignaron calificaciones aprobatorias a la respuesta de Luis, colocaron dicha nota, porque el estudiante responde para un caso particular llegando a la respuesta correcta, pero en este caso, sí la aceptan como una demostración, por ejemplo para Valeria la nota es 4 y dice: "es una demostración, sólo que en algunos casos se ve reflejado más el rigor matemático y otros se basaron en ejemplos para demostrar" y para Estefany la nota es 3, pues según ella "Aunque el estudiante llegó a la respuesta correcta, demostró solo para un caso particular", sin embargo, sí la está considerando como demostración, ya que según ella, Luis construye muy bien el ejemplo con el cual puede llegar a afirmar de manera general.

Los demás profesores en formación como David, Carolina y Nicolás, no consideraron la respuesta de Luis como una demostración, pues hace uso de un solo ejemplo para supuestamente demostrar la afirmación, pero que no muestra generalidad. Dado lo anterior se puede evidenciar que la mayoría de los profesores en formación mantienen como significado de la demostración aquellas que *presentan generalidad y hacen uso exclusivo del álgebra*.

En la respuesta de Laura (figura 22), ella expresa en palabras lo que observó físicamente de primera impresión, argumentando que por ser la misma hoja no importa si se dobla a lo largo o a lo ancho, el volumen es el mismo.

Respuesta de Laura

Si tengo una hoja de largo=L y ancho=A, cuando se dobla por el largo o por el ancho para formar el cilindro, sigue siendo la misma hoja e igual área superficial la cual es $A \times L$.

Por tanto, el volumen es igual al doblarlo en alguna de las dos formas.

Figura 22. Respuesta de Laura

En la respuesta de Laura, todos los profesores en formación asignaron una nota muy baja, y la razón es porque, por ejemplo, para Estefany: "la estudiante no manejó bien el concepto de volumen del cilindro, confundiéndolo con área superficial, pensando que ésta incidía directamente, lo cual la llevó a cometer el error". Por tanto, cuando hicieron la evaluación para determinar si la respuesta corresponde a una demostración o no, la mayoría de ellos dijeron que no, debido a que es una respuesta errónea. Sin embargo, Manuel sí la toma como una demostración, a respecto él afirma: "todas son demostraciones, sólo que varía es el rigor utilizado en cada una, desde demostraciones de tipo empirismo ingenuo hasta demostraciones deductivas formales". Manuel está utilizando lo visto en clases anteriores acerca de los tipos de demostraciones, considerando que puede haber distintas formas de demostrar un enunciado matemático, pero puede variar su grado de generalidad. Aunque le faltó señalar en ese momento que la demostración es fallida. Además, resaltamos que para Manuel la demostración empieza a adquirir un significado distinto a lo que él consideró en el taller diagnóstico, que la demostración debe poseer una estructura únicamente algebraica, ahora considera que *la demostración presenta diferentes grados de rigor*, sin tener prioridad que debe ser algebraica.

En la respuesta de Daniel (figura 23) utiliza un hecho particular y es el de tomar el largo como el doble del ancho de la hoja y hacer los cálculos algebraicamente para llegar a la conclusión correcta.

Respuesta de Daniel

Si tomo una hoja rectangular cuyo largo es el doble del ancho, es decir, $L = 2A$, entonces:

Usando el largo para la base circular, el radio es $r = \frac{2A}{2\pi} = \frac{A}{\pi}$ y el volumen es,

$$V = \pi \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 A = \pi \frac{A^2}{\pi^2} A = \frac{A^3}{\pi}$$

Usando el ancho para la base circular, el radio es $r = \frac{A}{2\pi}$ y el volumen es,

$$V = \pi \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2 2A = \pi \frac{A^2}{4\pi^2} 2A = \frac{A^3}{2\pi}$$

Por tanto, el volumen es mayor cuando la base circular se forma con el largo.

Figura 23. Respuesta de Daniel

La mayoría de los profesores en formación colocaron una nota alta, debido a que responde de manera general al problema, aun colocando una suposición inicial que no estaba presente (el largo de la hoja es igual a dos veces el ancho), pero que sigue siendo una hoja rectangular. Algunas consideraciones de los profesores en formación son,

> Estefany: (Nota 3.8) El estudiante quería llevar un proceso de generalización, sin embargo, sigue tomando un caso particular donde el alto es dos veces el ancho, llegó a la respuesta pero no en general.
>
> Carolina: (Nota 4) Realizó una afirmación recursiva, faltó generalización o información del enunciado.
>
> Manuel: (Nota 4) Es un razonamiento un poco más avanzado al empirismo ingenuo, pues ya no trabaja con ejemplos particulares, sino que ya usa representantes de familias (aquellos rectángulos cuyo largo es dos veces el ancho).

En la respuesta de Sofía (figura 24), la estudiante hace una demostración formal tomando la generalidad de cualquier hoja rectangular de largo l y ancho a, luego calcula los volúmenes y concluye satisfactoriamente.

Respuesta de Sofía

Sean a el ancho y l el largo de la hoja.

Si se forma la base circular con el lado de la hoja cuyo lado mide a, se tiene que

$$r = \frac{a}{2\pi} \Longrightarrow V_1 = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 . l = \frac{a^2 l}{4\pi}$$

Si se forma la base circular con l, se tiene que

$$r = \frac{l}{2\pi} \Longrightarrow V_2 = \pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 . a = \frac{a l^2}{4\pi}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $a < l$, y multiplicando por $\frac{1}{4\pi}$ que es positivo,

$$\frac{a}{4\pi} < \frac{l}{4\pi}$$

Ahora multiplicando por a y l, que son positivos,

$$\frac{a^2 l}{4\pi} < \frac{a l^2}{4\pi}$$

Entonces $V_1 < V_2$, por tanto el volumen del cilindro formado a lo largo es más grande que formado a lo ancho.

Figura 24. Respuesta de Sofía

Todos los profesores en formación colocan la máxima nota de calificación, pues la estudiante presenta de manera general para cualquier hoja rectangular que el volumen del cilindro formado doblando a lo largo es mayor que formando el cilindro doblando a lo ancho. De igual manera, al presentar la generalidad del caso, todos la consideran como una demostración. A respecto Estefany dice: “Sofía fundamentó su respuesta en la generalidad, sin basarse en ningún ejemplo”. Podemos reafirmar acá el significado que los profesores en formación tienen y es el que *la demostración presenta generalidad y hace uso exclusivo del algebra*.

En la respuesta de Fabián (figura 25), él hace dos ejemplos tomando medidas de hojas rectangulares concluyendo con un argumento en palabras y llegando a partir de ahí a la conclusión.

Respuesta de Fabián

- Usando las dimensiones de la hoja
  $L = 27{,}94\ cm$ y $A = 21{,}6\ cm$. Formando la base circular a lo largo, se tiene que $r = 4{,}44\ cm$ y $V_1 = 1337{,}73\ cm^3$
  A lo ancho, se tiene que $r = 3{,}43\ cm$ y $V_2 = 1032{,}67\ cm^3$
  Luego $V_1 > V_2$

- Si $L = 35\ cm$ y $A = 20\ cm$
  A lo largo, se tiene que $r = 5{,}57\ cm$ y $V_3 = 1949{,}35\ cm^3$
  A lo ancho, se tiene que $r = 4{,}61\ cm$ y $V_4 = 1111{,}35\ cm^3$
  Luego $V_3 > V_4$

Se observa que el radio influye, porque está elevado al cuadrado y además la altura no difiere mucho, entonces el radio determina si su radio es mayor o es menor.

La altura incide, pero no va a ser superior al radio elevado al cuadrado.

Por tanto, formando el cilindro a lo largo dela hoja se obtiene el mayor volumen.

Figura 25. Respuesta de Fabián

La calificación por parte de los profesores en formación fue similar a la calificación otorgada a Luis, incluso mejoró, pues para ellos Fabián utiliza un ejemplo más que Luis y hace la generalización en palabras expresando la relación que puede establecerse en los dos casos de doblar la hoja entre el radio y la altura.

> Estefany: (Nota 3.3) El estudiante utiliza ejemplos particulares, creyendo que si para dos cumplía, ya era cierto para todos en general. Aunque llegó a la respuesta correcta, no obtuvo verídicamente la generalización. Si es una demostración pues lo hizo para casos particulares y con esto dedujo la generalidad de la misma.

> Manuel: (Nota 3.5) Si es una demostración, porque notó una variante, aparte del largo y el ancho, a través de ejemplos dedujo que el radio también afectan el volumen pero en general lo que está usando son ejemplos.

Tomando en cuenta las observaciones de los profesores en formación acerca de la respuesta con la que se identifican que harían, algunos de ellos dijeron sus respuestas y tuvieron una conversación,

> Valeria: La manera como yo haría la demostración y me identifico es con la respuesta de Sofía, ya que este proceso se trata de una cadena de razonamientos lógicos que no utiliza ejemplos para ilustrar la veracidad de la afirmación, por el contrario, generaliza esta afirmación para todos los casos, es decir, no importa tener las dimensiones de una hoja rectangular particular para deducir que se tendrá un mayor volumen cuando se forma la base circular con el largo de la hoja.

> Manuel: Me identifico con la respuesta de Sofía, pues a estas alturas de la carrera, con toda la experiencia adquirida ya estoy más familiarizado con las demostraciones, por tanto, tengo un poco más claro cómo es una demostración más o menos formal.

> Juliana: Me identifico con la respuesta de Luis, pues lo que hace él es medir la hoja carta como lo dice el problema y analizar qué sucede con el volumen, es decir, es como una especie de experimento.

David: Cuando se me presentó este problema por primera vez, yo realicé lo que hizo Luis, tomé las medidas de la hoja, construí los dos volúmenes, luego los comparé y con base a esto presenté mi respuesta, pero soy consciente que la respuesta de Sofía es la mejor para presentar la demostración.

Estefany: Teniendo en cuenta lo aprendido acerca del tema, yo haría la demostración análoga la de Sofía, ya que ella tomó para cualquier hoja rectangular y con base a definiciones ya establecidas logró elaborar con éxito la demostración.

Juliana: Aunque, seamos realistas, es porque la tenemos ahí, pero ¿será que en realidad la hubiésemos hecho? por ejemplo yo haría la de Luis. Yo cogería la hoja, la mido, hallo el volumen y concluyo lo mismo.

Estefany: Yo la haría primero así y me preguntaría si funciona para todos e intento generalizar como Sofía.

David: haría la de Luis. Yo lo vi en precálculo y no intenté generalizar, porque uno inicialmente no piensa en eso, sino en tomar las medidas y concluir, es ahora que de pronto uno ya piensa en eso. Depende del contexto donde uno esté.

Juliana: si estuviésemos en un parcial yo me quedaría con la que hace Daniel.

Nicolás: ¿sí? ¿Enserio? Eso no sería demostración.

> Juliana: ¡claro! tengo que tomar las medidas para saber las medidas de la hoja y concluyo acertadamente.

En la conversación que tuvieron los profesores en formación, acerca de cuál de las respuestas que se presentaban en la hoja sería con la que ellos más se identifican para hacer como demostración, se dieron diferentes posturas, algunos profesores en formación como David, Estefany y Juliana consideraron que dada su experiencia con el problema, ellos lo abordarían de la forma en la respuesta que da Daniel, es decir, tomando las medidas de una hoja tamaño carta y hacer la conclusión a partir del resultado de calcular el volumen, pero los demás sostienen que la respuesta con mejor nivel de rigor es la de Sofía, en la que se hace una demostración formal con toda la generalidad y en lenguaje algebraico.

Una parte importante que señalamos es el uso del repertorio compartido, puesto que se empieza a usar un lenguaje en el que la mayoría está de acuerdo, especialmente al hablar de los tipos de demostración, tema que se trató anteriormente.

Al momento de compartir las ideas entre todos los profesores en formación acerca de la clasificación de la respuesta como demostraciones o no, se presentaron casos de acuerdo y desacuerdo entre ellos.

> Estefany: Todas son demostraciones, pero la diferencia está en el tipo que ellos hacen, porque mientras unos se basan en ejemplos y perspectiva, otros en lo conceptual. Al igual todos, menos Laura probaron la conjetura (a su manera). Laura se basó en lo que vieron sus ojos, pero no generalizó adecuadamente.

> Valeria: Las respuestas dadas por Luis, Daniel, Sofía y Fabián considero que son demostraciones solo que en algunos casos se ve reflejado más el rigor matemático y otras se basan más en ejemplos para demostrar. En el caso de Fabián y Luis pensé que iban a ser solo argumentos, pero para mí si son demostraciones porque utilizan los ejemplos para mostrar la veracidad de la afirmación, no solamente para evidenciar resultados numéricos del ejercicio.

> Sandra: Para decir cuáles de las respuestas corresponden a una demostración depende del modelo que se esté tomando como referencia, pero para mí sólo Sofía muestra evidencia de una demostración algo más formal, los demás están en una primera fase que es el uso de ejemplos.

Se pudo observar que los profesores en formación, algunos han cambiado sus posturas respecto a considerar como demostraciones cierto tipo de respuestas, esto en los casos de Nicolle, Estefany, Manuel y Valeria, ellos por ejemplo empiezan a considerar como demostraciones válidas aquellas basadas en ejemplos, las de tipo retórico o las que son deductivas formales.

Las justificaciones que dan los profesores en formación están relacionadas con diferentes elementos vistos durante las sesiones anteriores en las que se habló acerca de algunas posturas acerca de la demostración, evidenciando que estas deben ser claras para que sean entendibles y de alguna manera demuestre y no quede duda acerca de lo que se quiere mostrar. En el caso de Sandra, ella expresa que depende del modelo que se tome como referencia, haciendo alusión a las sesiones anteriores acerca de las diferentes posturas en la demostración, sin embargo, personalmente ella sigue considerando como demostración la que hace uso del álgebra únicamente.

En la discusión hecha por los participantes de la comunidad se evidenció algo importante y está relacionado con lo mencionado anteriormente acerca de Sandra. A la hora de evaluar respuestas y juzgarlas como demostraciones o no, es importante considerar el contexto, pues si los estudiantes no presentan mucha experiencia respecto a la realización de demostraciones, esto es, un proceso que se va aprendiendo y adquiriendo como práctica en el aula, teniendo avances y donde inicialmente se pueden considerar diferentes tipos de respuesta válidas como demostración, y a medida que haya avance, las demostraciones van adquiriendo mayor generalidad; esto es lo que influyó en algunos profesores en formación para decidir.

Comparando la presente actividad con la actividad diagnóstica, aunque son situaciones distintas que se tienen que demostrar, se reflejan las mismas posturas de algunos profesores en formación en cuanto a su visión acerca de la demostración y avances en otros de ellos.

Respecto a Nicolle y Estefany, estas profesoras en formación mantienen su postura, que existen distintos tipos de demostración y las califican teniendo en cuenta su grado de generalidad. Manuel en la actividad diagnóstica consideró la demostración válida sólo la respuesta que era de tipo algebraico, para este caso manifestó que: "todas son demostraciones, sólo que varía el rigor utilizado en cada una desde demostraciones de tipo empirismo ingenuo hasta demostraciones deductivas formales*",* por lo que consideró todas las presentaciones de los estudiantes como demostraciones, aunque teniendo en cuenta el grado de generalidad para asignar una nota. Respecto a los tipos de demostración, podemos decir que es importante tenerlos en cuenta y es algo que algunos profesores mencionaron, dependiendo del nivel académico en el que se encuentren los estudiantes, se pueden elaborar demostraciones dependiendo el rigor. A respecto encontramos:

> Es necesario tener en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes para que las pruebas se presenten en formas que sean potencialmente significativas para ellos. Esto requiere que los

> educadores y matemáticos reconsideren la naturaleza de la prueba matemática y consideren el uso de los diferentes tipos de prueba relacionados con el desarrollo cognitivo del individuo. (Tall 1998, pág. 17. Citado por Balacheff, 2008)

Para Valeria al igual que Manuel, en la actividad diagnóstica consideró como demostración sólo la que hacía uso de álgebra y era coherente, en este caso tuvo en cuenta como demostraciones otras presentaciones (Luis, Daniel, Sofía, Fabián) pues para ella "en algunos casos se ve reflejado más el rigor matemático y otros se basan en ejemplos particulares para demostrar utilizándolos para mostrar la veracidad de la afirmación*"*. Las justificaciones que da Valeria se están basando en lo visto en sesiones anteriores, influyendo el hecho de haber expuesto una parte del trabajo de López (2017), en el que se mencionan situaciones donde se ven reflejados algunos tipos de demostración.

Encontramos que los profesores en formación en su mayoría conservan la idea que una demostración debe mostrar principalmente generalidad, que se evidencie realmente un lenguaje técnico, porque en caso que haya ejemplos o el lenguaje no sea muy técnico, la respuesta deja de ser una demostración o como lo empiezan a decir varios de ellos, la demostración es más débil, es decir, si se consideran como demostración serían más de un tipo empírico. Esto apunta a una perspectiva amplia acerca de la demostración.

5.4.1 Significados de la demostración negociados en el taller de variación. En el taller de variación pudimos evidenciar significados de la demostración muy similares a los obtenidos en el taller diagnóstico.

En general la mayoría de profesores en formación mantienen sus posturas en que la demostración presenta generalidad, pues en una demostración no deben existir los ejemplos; la demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico, porque una presentación en palabras pierde estructura formal para ellos; sin embargo, algunos consideran la demostración como medio de comprensión, pues es bueno que esta proporcione elementos que haga entender al lector las propiedades y en general los teoremas.

5.5 Taller de funciones

En este apartado presentamos el análisis de lo sucedido en el taller de funciones, para determinar los significados de la demostración en esta etapa del curso. Lo que se hizo fue pedir a los profesores en formación, desde su conocimiento, plantear conjeturas acerca algunas situaciones matemáticas en el tema de funciones (figura 26) y luego demostrar dichas conjeturas.

1. Suponga que f y g son funciones pares.
   - ¿Qué puedes decir sobre $f + g$ y $f . g$?
   - ¿Qué puedes decir si f y g son impares?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

2. Sean f y g dos funciones lineales.
   - ¿Qué puedes decir acerca de la composición?
   - ¿Cómo es su pendiente?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

3. Considera la familia de funciones $f(x) = \frac{1}{x^n}$, donde n es un entero positivo.
   - ¿Cómo es la función cuando n es par?
   - ¿Cómo es la función cuando n es impar?

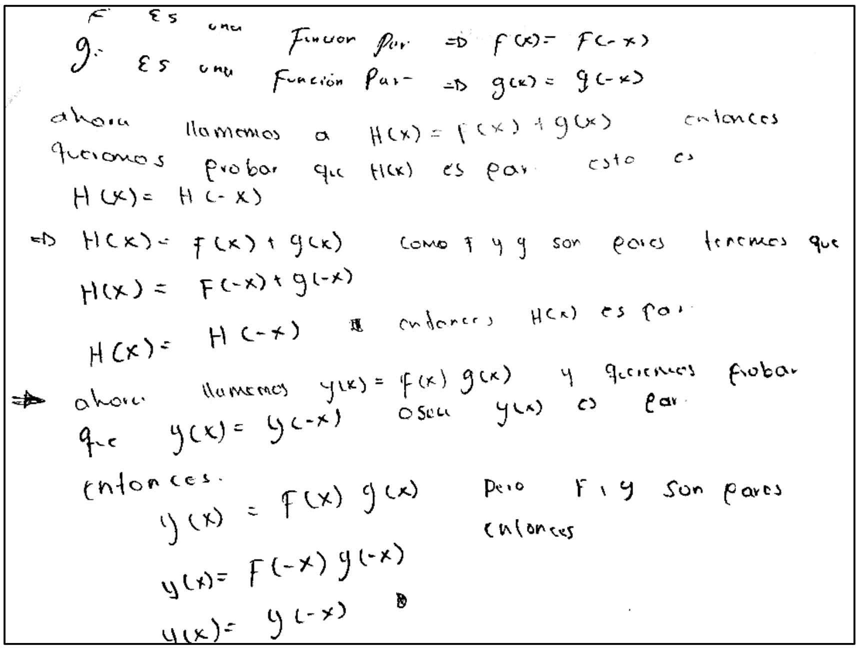
   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

Figura 26. Taller de funciones.

Mostramos algunas respuestas que dieron los profesores en formación, de tal manera que se vea la variedad, sin caer tanto en repeticiones que hubo en las presentaciones entre los participantes de la comunidad. Las demostraciones que hicieron los profesores en formación fueron de diferentes maneras, entre ellas verbal, algebraica, gráfica y hay casos en los que no logran establecer la demostración debido a la falta de dominio conceptual.

El caso de Nicolás

Nicolás realiza sus demostraciones de manera general, en el primer punto hizo una demostración formal (figura 27), define las funciones como pares e impares y a partir de ahí demuestra lo que sucede con la suma y producto de éstas.



f Es una Funcion Par $\Rightarrow f(x) = f(-x)$
g. Es una Función Par $\Rightarrow g(x) = g(-x)$
ahora llamemos a $H(x) = f(x) + g(x)$ entonces queremos probar que $H(x)$ es par esto es
$H(x) = H(-x)$
$\Rightarrow H(x) = f(x) + g(x)$ como f y g son pares tenemos que
$H(x) = f(-x) + g(-x)$
$H(x) = H(-x)$ entonces $H(x)$ es par
$\Rightarrow$ ahora llamemos $y(x) = f(x)\, g(x)$ y queremos probar que $y(x) = y(-x)$ osea $y(x)$ es par
entonces. $y(x) = f(x)\, g(x)$ pero f y g son pares entonces
$y(x) = f(-x)\, g(-x)$
$y(x) = y(-x)$

Figura 27. Respuesta de Nicolás del ítem 1

Define dos funciones pares f y g que cumplen la condición $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$, luego realiza la suma y el producto de las mismas respectivamente. A partir de algunos pasos, logra demostrar que en los dos casos la función también es par, es decir, que la suma de funciones pares es par y el producto de funciones pares es par. Cabe resaltar que en la demostración incluye el uso de lenguaje retórico para justificar diferentes pasos.

Para la demostración del punto 3 (figura 28), la estructura es similar a la realizada anteriormente, Nicolás se apoya en lenguaje retórico para justificar los pasos que realiza algebraicamente.

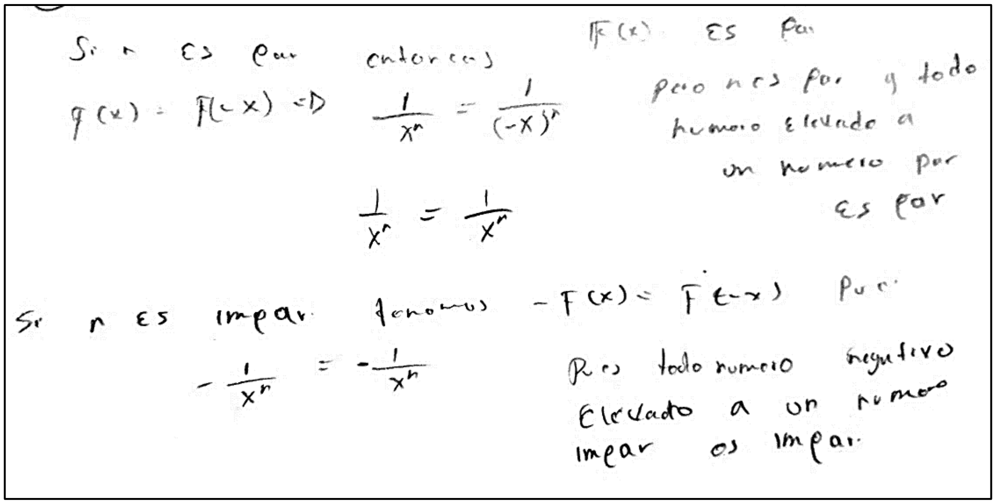
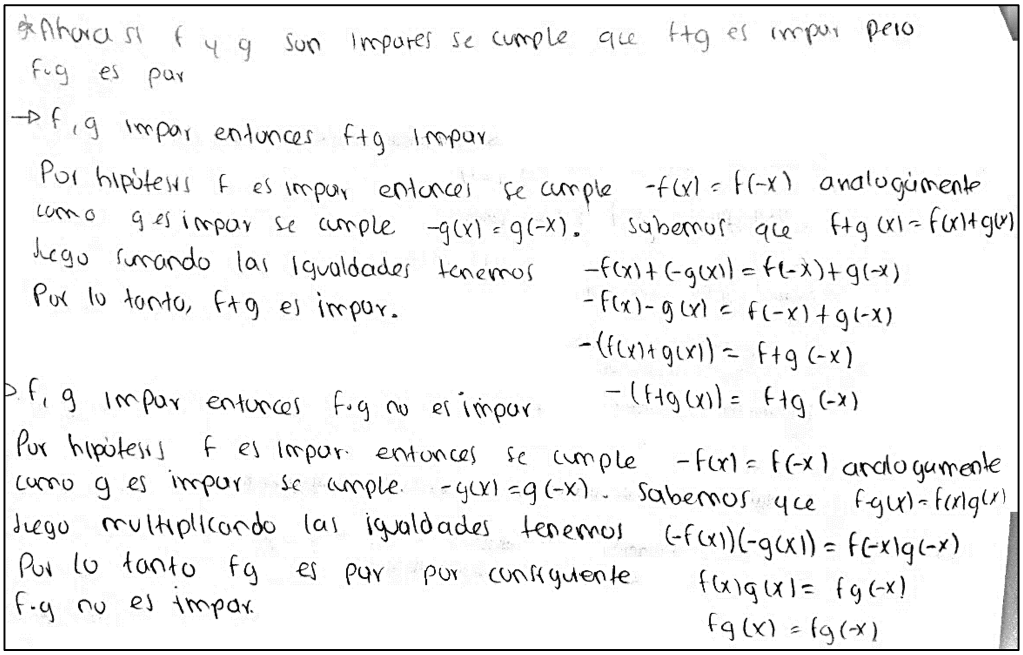


Figura 28. Respuesta de Nicolás del ítem 3

Las demostraciones que realiza Nicolás en sus respuestas son de tipo deductivo formal, en la mayor parte, utiliza el lenguaje algebraico y en algunas de ellas como las anteriores, él realiza una pequeña explicación. Esta manera general de dar las respuestas obedece a lo que él considera debe ser una demostración, pues según Nicolás dice: “no hago uso de ejemplos porque la demostración pierde el rigor que debe tener”, podemos evidenciar que está dando importancia al uso del lenguaje algebraico, pero algo también importante es las justificaciones que realiza en algunos pasos para que la demostración sea entendible para el lector. El significado que podemos identificar que pone en evidencia en este taller es que *la demostración debe presentar generalidad y ser comprendida por el lector*.

El caso de Carolina

En la demostración del punto 1 (figura 29) en el caso cuando se toman dos funciones impares, Carolina plantea una conjetura acerca de lo que sucede con la suma y el producto de las mismas y luego las demuestra.



*Ahora si f y g son impares se cumple que f+g es impar pero f·g es par

→ f, g impar entonces f+g impar

Por hipótesis f es impar entonces se cumple $-f(x) = f(-x)$ analogámente como g es impar se cumple $-g(x) = g(-x)$. Sabemos que $f+g\,(x) = f(x)+g(x)$

luego sumando las igualdades tenemos $-f(x)+(-g(x)) = f(-x)+g(-x)$

Por lo tanto, f+g es impar.

$-f(x)-g(x) = f(-x)+g(-x)$

$-(f(x)+g(x)) = f+g\,(-x)$

→ f, g impar entonces f·g no es impar

$-(f+g\,(x)) = f+g\,(-x)$

Por hipótesis f es impar entonces se cumple $-f(x) = f(-x)$ analogamente como g es impar se cumple $-g(x) = g(-x)$. Sabemos que $f\cdot g(x) = f(x)g(x)$

luego multiplicando las igualdades tenemos $(-f(x))(-g(x)) = f(-x)g(-x)$

Por lo tanto fg es par por consiguiente f·g no es impar.

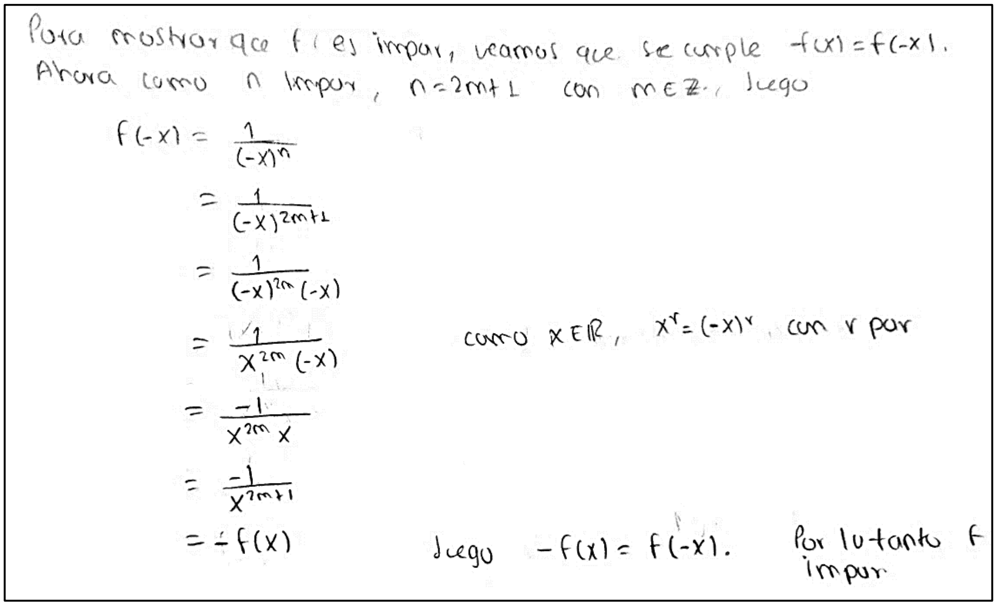
$f(x)g(x) = fg(-x)$

$fg(x) = fg(-x)$

Figura 29. Respuesta de Carolina del ítem 1

En esta demostración, Carolina hace una parte expresando los pasos algebraicamente, pero también utiliza la justificación retórica para expresar lo que está sucediendo en cada paso.

En el tercer punto, Carolina también realiza su demostración de manera general; Su demostración es formal deductiva (figura 30), muestra total generalidad, como ella lo ha manifestado dentro de la comunidad que “la demostración debe ser general, sin hacer uso de ejemplos”.



Para mostrar que f es impar, veamos que se cumple $-f(x) = f(-x)$.
Ahora como n impar, $n = 2m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$, luego

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{(-x)^n} \\
&= \frac{1}{(-x)^{2m+1}} \\
&= \frac{1}{(-x)^{2m}(-x)} \\
&= \frac{1}{x^{2m}(-x)} \qquad \text{como } x \in \mathbb{R},\ x^r = (-x)^r \text{ con r par} \\
&= \frac{-1}{x^{2m}x} \\
&= \frac{-1}{x^{2m+1}} \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

Luego $-f(x) = f(-x)$. Por lo tanto f impar

Figura 30. Respuesta de Carolina del ítem 3

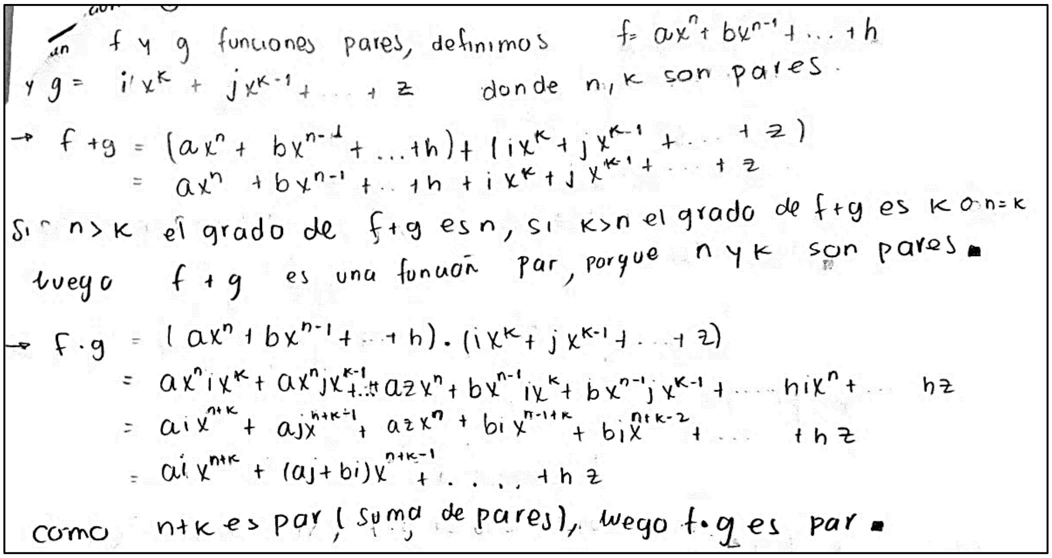
Las respuestas de Carolina a cada uno de los ítems las da de manera general, aunque ella intenta que sus demostraciones sean entendibles, es decir, muchos de los pasos que llevaba a cabo en sus demostraciones están justificados para conocer de dónde salen.

Lo que hace Carolina es similar a lo que hizo Nicolás, hace uso tanto del álgebra como del lenguaje retórico para justificar cada paso que está realizando en la demostración, esto con el fin de que sea entendible la estructura y lo que se está demostrando. En este caso reconocemos el significado de la demostración es que *debe presentar generalidad y ser comprendida por el lector*.

El caso de Estefany

Para demostrar el primer punto, Estefany utilizó las funciones de manera polinómica, porque al inicio ella pensó que esa forma era una manera general de hacerlo, pero después con los comentarios de sus compañeros, se dio cuenta que no estaba considerando todas las funciones pares o impares, sino sólo las polinómicas. En el planteamiento de la demostración, también se equivocó porque no consideró de forma adecuada los grados de los polinomios pues dejarían de ser pares o impares (figura 31).

Cabe resaltar que en su respuesta ella intenta que la demostración se presente de manera general, pero sea entendible en estructura y a la hora de leer que haya conexión lógica entre pasos.



Sean f y g funciones pares, definimos $f = ax^n + bx^{n-1} + \dots + h$ y $g = ix^k + jx^{k-1} + \dots + z$ donde n, k son pares.

$\rightarrow$ $f+g = (ax^n + bx^{n-1} + \dots + h) + (ix^k + jx^{k-1} + \dots + z)$
$= ax^n + bx^{n-1} + \dots + h + ix^k + jx^{k-1} + \dots + z$

Si $n > k$ el grado de $f+g$ es n, si $k > n$ el grado de $f+g$ es k o $n=k$
luego $f+g$ es una función par, porque n y k son pares ■

$\rightarrow$ $f \cdot g = (ax^n + bx^{n-1} + \dots + h) \cdot (ix^k + jx^{k-1} + \dots + z)$
$= ax^n ix^k + ax^n jx^{k-1} + \dots + azx^n + bx^{n-1} ix^k + bx^{n-1} jx^{k-1} + \dots hix^n + \dots hz$
$= aix^{n+k} + ajx^{n+k-1} + azx^n + bix^{n-1+k} + bjx^{n+k-2} + \dots + hz$
$= aix^{n+k} + (aj+bi)x^{n+k-1} + \dots + hz$

como $n+k$ es par (suma de pares), luego $f \cdot g$ es par ■

Figura 31. Respuesta de Estefany del ítem 1

En esta demostración, Estefany no toma en cuenta la manera de las funciones pares o las funciones impares con las que inicia la demostración, pues considera funciones polinómicas, en el primer caso para las funciones pares considera a n y k como pares, pero al seguir con $n-1, n-2, n-3 \dots$ y $k-1, k-2, k-3 \dots$ las funciones f y g dejan de ser pares, al igual que cuando considera el caso de las funciones impares. En el momento de la socialización Estefany se da cuenta de su error por medio de la intervención de sus compañeros.

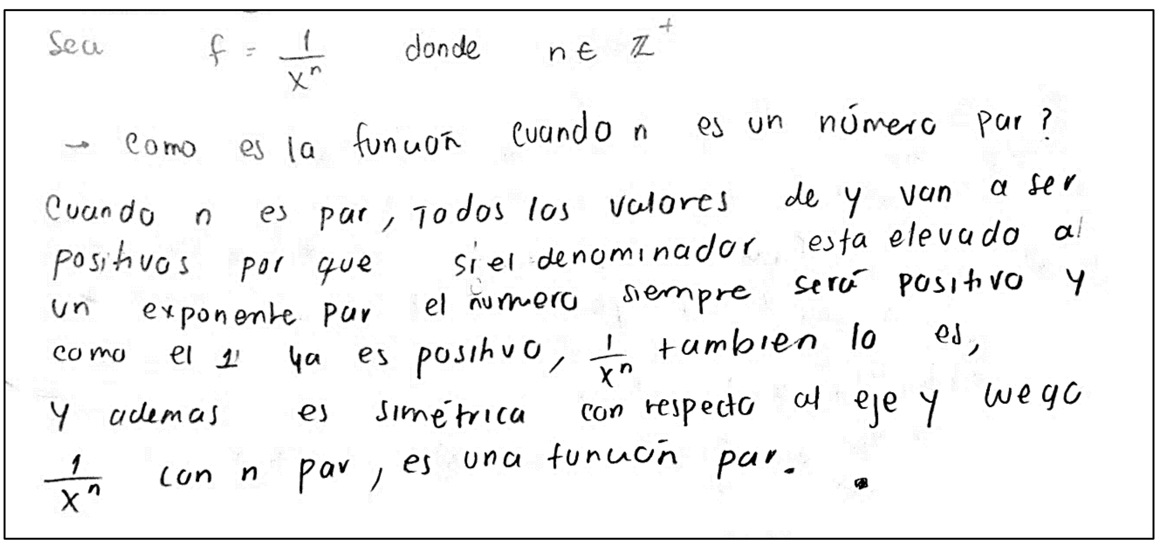
> Estefany: Ahí estoy diciendo que es para cualquier constante en esa demostración, yo definí las funciones de manera polinómica general; al sumarlas, como las dos son pares, entonces va a ser par.

Sandra: No hizo completamente la demostración, porque la hizo para el caso de las funciones polinómicas, además no son pares.

Carolina: Pues es que, no consideró más general. ¿No se le ocurrió o está dando un ejemplo?

Estefany: Ay sí, pues yo pensaba que esto no es como un ejemplo, cuando uno define funciones, ¿cómo las define? de manera polinómica general, pero eso sólo sería un grupo de funciones.

A pesar que la demostración en este punto es fallida, Estefany intentó hacerla de tal forma que fuese entendible tanto para ella como para el lector. A continuación, mostramos su respuesta al tercer punto (figura 32 y 33) en el caso cuando n es par e impar.

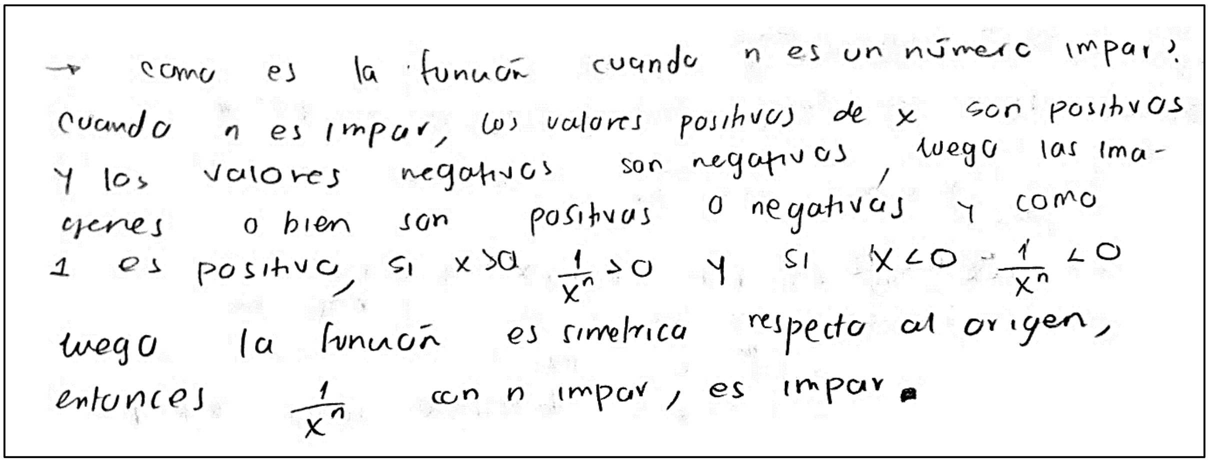


Sea $f = \frac{1}{x^n}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$

→ como es la funcion cuando n es un número par?

Cuando n es par, Todos los valores de y van a ser positivos por que si el denominador esta elevado al un exponente par el número siempre será positivo y como el 1 ya es positivo, $\frac{1}{x^n}$ tambien lo es, y ademas es simétrica con respecto al eje y luego $\frac{1}{x^n}$ con n par, es una funcion par.

Figura 32. Respuesta de Estefany del ítem 3, primera parte



→ como es la función cuando n es un número impar?
Cuando n es impar, los valores positivos de x son positivos y los valores negativos son negativos, luego las imágenes o bien son positivas o negativas y como 1 es positivo, si $x > 0$ $\frac{1}{x^n} > 0$ y si $x < 0$ $\frac{1}{x^n} < 0$
luego la función es simetrica respecto al origen, entonces $\frac{1}{x^n}$ con n impar, es impar ■

Figura 33. Respuesta de Estefany del ítem 3, segunda parte

En las respuestas de Estefany, su demostración no hace uso exclusivo del álgebra, por el contrario, responde más de manera retórica justificando en palabras lo que sucede con cualquier valor de la función, sea positivo o negativo y que se eleva a un exponente par o impar, de esta manera decide qué sucede con el comportamiento de la función, en este caso si la función se hace par o impar. Estefany menciona que “aunque la demostración no muestra mucho el álgebra, si hay generalidad”. Podemos identificar en Estefany, que al igual que en sesiones anteriores, el significado de la demostración toma un sentido amplio, pues considera que las demostraciones pueden darse de diferentes tipos, en este taller seguimos identificando en ella el significado asociado a que *la demostración debe ser entendible, puede ser de diferentes tipos y debe expresar generalidad.*

El caso de David

Las demostraciones de los puntos 1 y 2, David las expresa de manera formal, utilizando generalidad de las funciones pares e impares y de las funciones lineales, es decir, en estos puntos su respuesta es muy similar a las realizadas por Nicolás y Carolina. Sin embargo, en la respuesta del tercer punto (figura 34), David representó la situación por medio de una gráfica.

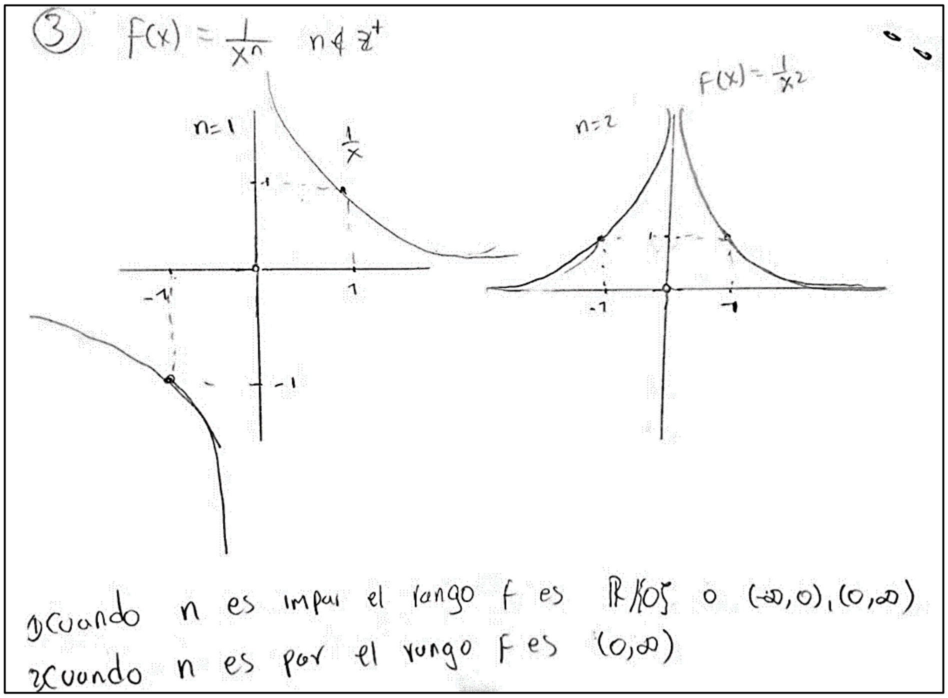


Figura 34. Respuesta de David del punto 3

Lo que hace David en su respuesta es mostrar gráficamente lo que sucede con la función $\frac{1}{x^n}$, pero en los casos $n = 1$ y $n = 2$, y concluye en general, que los rangos van a ser distintos en cada función dependiendo si n es par o impar; a partir de un ejemplo generaliza que se cumple para cualquier n. Sin embargo, cuando se presenta el momento de compartir con sus compañeros, se da cuenta que hay otra posible conclusión a la que se puede llegar y es que la función $f(x) = \frac{1}{x^n}$ es par o impar dependiendo del valor de n, al respecto él dice que la gráfica que tiene sirve también para ver eso: "con las dos gráficas que muestro, también puedo concluir que cuando n es impar f es impar y cuando n es par f es par, cambia un poco la forma, pero eso se conserva".

En lo observado con David, al principio él no sabía qué conjetura plantear y demostrarla, pero al hacer la gráfica y hacer un proceso de generalización, más bien mental, llega a concluir de manera general, pero apoyado en lo visto gráficamente. David da evidencias de tener un significado de la demostración que puede ser empírico, no deja el ejemplo para llegar a una conclusión de manera general. El significado que encontramos es que *la demostración debe presentar generalidad y se puede construir con base en ejemplos.*

El caso de Sebastián

Como caso especial, aparte de los profesores en formación de la muestra (Estefany, Nicolás, Carolina y David), mencionamos el de Sebastián. En este caso no logró hacer las demostraciones que se pidieron, por ejemplo, Sebastián intenta recordar definiciones que necesita tener claras para demostrar, por ejemplo, en el punto 1, no realiza ninguna demostración pues lo expresó: “no recuerdo en este momento las definiciones de función par e impar, por tanto, no soy capaz de hacerlo”. En el punto 2, escribió lo que muestra a continuación, (figura 35).

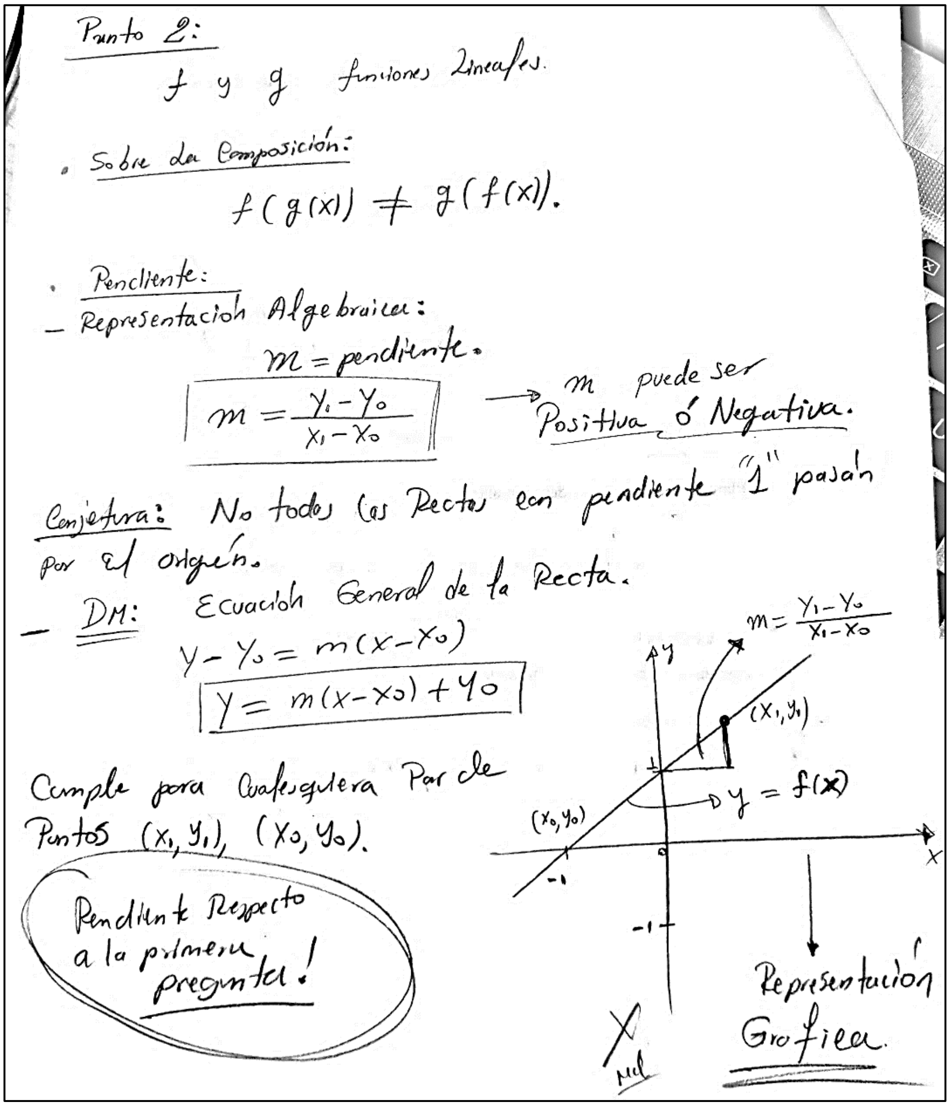


Figura 35. Respuesta de Sebastián del ítem 2

En la figura anterior se observa que Sebastián empieza con una afirmación verdadera, que verbalmente se puede traducir como “la composición de funciones no es conmutativa” y sobre la pendiente que puede ser positiva o negativa. Lo demás que hace en su respuesta es mostrar algo que realmente no está relacionado directamente con el fin con el que está planteado dicho punto.

En la respuesta del tercer punto (figura 36), Sebastián se notó bastante confundido, trató de explicar con ayuda de la gráfica lo que sucede con las funciones, las conjeturas que realiza son adecuadas y coherentes, pero no relaciona muy bien la justificación al planteamiento o demostración de las mismas.

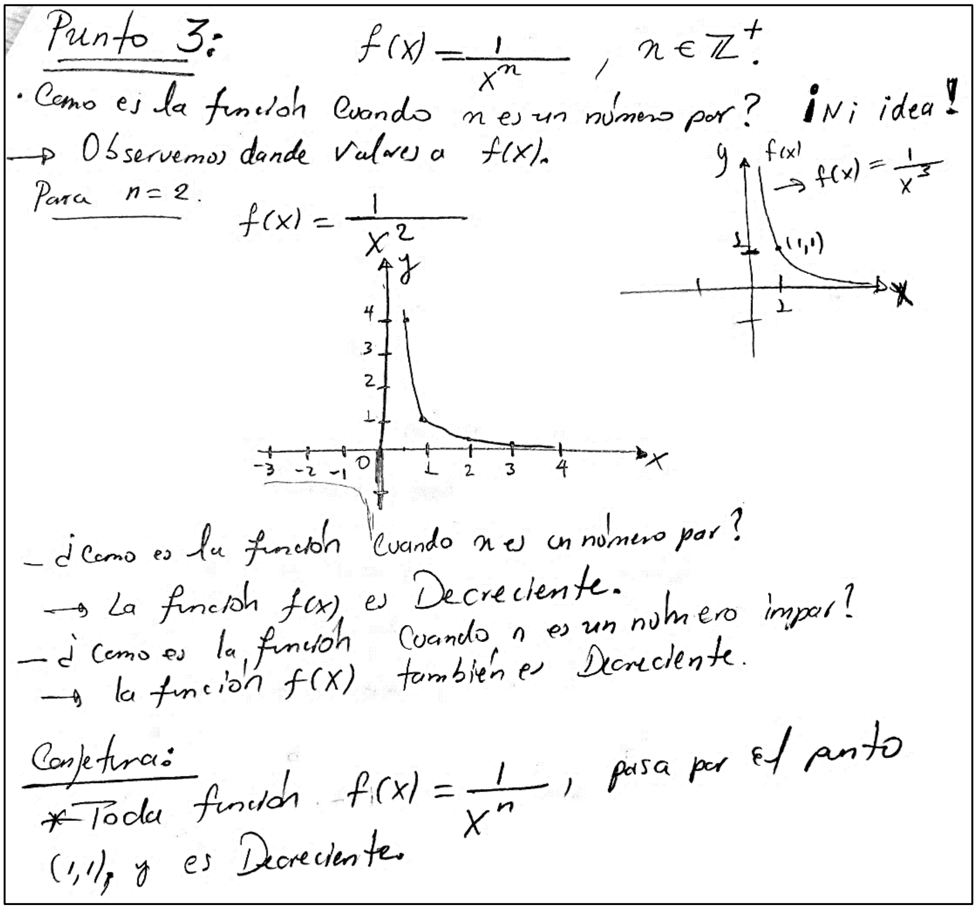


Figura 36. Respuesta de Sebastián del ítem 3

Sebastián intenta recordar cosas relacionadas con el problema para plantear una conjetura y luego demostrarla, pero al no encontrar algo que lo convenza no puede hacerlo. Este es un caso de profesor en formación, pero que representa también a aquellos estudiantes quienes no son capaces de construir una demostración, pero su significado formalista de la misma los lleva a escribir definiciones o teoremas que no tienen mucho que ver con lo que se pide demostrar.

Al momento de compartir las respuestas entre todos, las respuestas de los demás guardaron bastante similitud a las reportadas anteriormente. Se presentó algo importante especialmente en el tercer punto, donde la mayoría de los profesores en formación hicieron la demostración de manera deductiva formal, pero se presentó lo siguiente:

Juliana: Alguien hizo una demostración gráfica. Yo quiero verla.

Pasa Nicolle a mostrar su demostración que es básicamente la que realizó en su hoja de trabajo (figura 37).

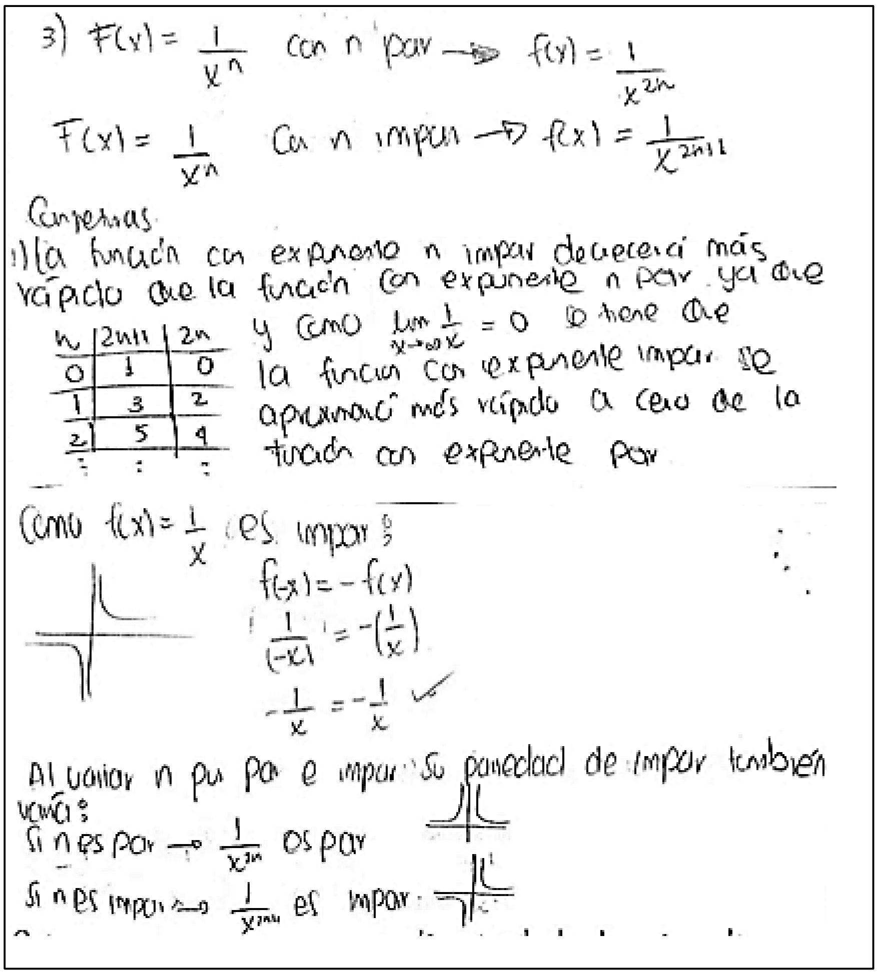


Figura 37. Respuesta de Nicolle del ítem 3

Nicolle: Sí, haciendo las gráficas para n par y n impar, con la gráfica se puede observar el comportamiento de la familia de funciones. Que cuando n es par los negativos se hacen positivos en los impares se mantiene en general.

Estefany: También se puede observar en las gráficas las simetrías. Como profesores lo que podemos hacer es acercarle al estudiante de la mejor manera los objetos matemáticos sin restarle importancia al rigor porque es necesario, pero mediante el uso de diferentes representaciones y el uso de ejemplos, se les puede mostrar a los estudiantes características para llegar a cosas generales.

Tatiana: Bueno sí, se puede recurrir al uso de gráficas para entender mejor.

Podemos decir que cuando Nicolle plantea las demostraciones y luego enuncia los resultados como producto más bien de la observación de lo que está sucediendo, *la demostración sirve para descubrir nuevos resultados*.

5.5.1 Significados de la demostración negociados en el taller de funciones. Los significados de la demostración que encontramos en los profesores en formación en el taller de funciones fueron interesantes al encontrarlos, puesto que se hizo teniendo en cuenta las demostraciones que producen ellos mismos.

Pudimos evidenciar que sus presentaciones obedecieron en parte a los mismos significados negociados hasta el momento como: La demostración presenta generalidad, pues los argumentos se basan en proposiciones verdaderas y que están en lenguaje general y sin ejemplos; la demostración como medio de comprensión, porque debe proporcionar al lector la certeza mediante la comprensión de las proposiciones en juego; también surgió el significado nuevo y es la demostración como medio de descubrimiento, pues mediante la construcción de una demostración se pueden conocer otros resultados importantes.

5.6 Taller de límites

En este apartado presentamos algunos de los planes de clase que elaboraron los profesores en formación Carolina, Estefany, Nicolás y David.

El caso de Carolina

Carolina titula su plan de clase "Propiedades de límites (suma - producto) y un límite que no existe" y como objetivos:

- Que los estudiantes comprendan el comportamiento del límite como suma o producto de límites con el fin de la aplicación para la resolución de problemas.
- Que el estudiante relacione la definición de límite de una función mediante la exploración de un límite que no existe.

En su planeación considera proponer ejercicios de aplicación del tema y el uso de GeoGebra en clase, con el fin de favorecer el proceso de la visualización en los estudiantes para el límite de una función. Inicialmente, planea recordar la suma de funciones gráficamente, esto es, considerando que en la suma de funciones se deben sumar las imágenes. Luego retomar la definición informal de límite que según el libro de Zill se enuncia de la siguiente manera:

> Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número L al tomar x suficientemente cerca de, pero diferente de un número a, por la izquierda y por la derecha de a, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

La idea de repasar la suma de funciones y la definición informal de límite es según Carolina, acercar al estudiante a la comprensión de las propiedades de los límites de manera gráfica y empírica, esto con ayuda también de GeoGebra. Al tener un acercamiento informal a la demostración, Carolina planea llevar al estudiante a la compresión de la definición formal de límite, para lo cual considera necesario estudiar las propiedades de valor absoluto y luego considerando la participación de los estudiantes, demostrar las propiedades de límites que se plantean. A continuación, hacemos referencia a la demostración de la primera propiedad (figura 38) en la que Carolina utiliza la definición formal de límite.

Considerando que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, sea $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$.

Ahora, como $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ esto significa $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ tenemos que $|f(x)-\alpha|<\varepsilon/2$ (*), analogamente como $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ tenemos que $|g(x)-\beta|<\varepsilon/2$ (**)

Sumando (*) y (**) tenemos $|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|<\varepsilon/2+\varepsilon/2$

$|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|<\varepsilon$

luego por la desigualdad triangular $|f(x)-\alpha+g(x)-\beta| \le |f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|$

Por lo tanto, $|f(x)-\alpha+g(x)-\beta|<\varepsilon$.

$|f(x)+g(x)-(\alpha+\beta)|<\varepsilon$.

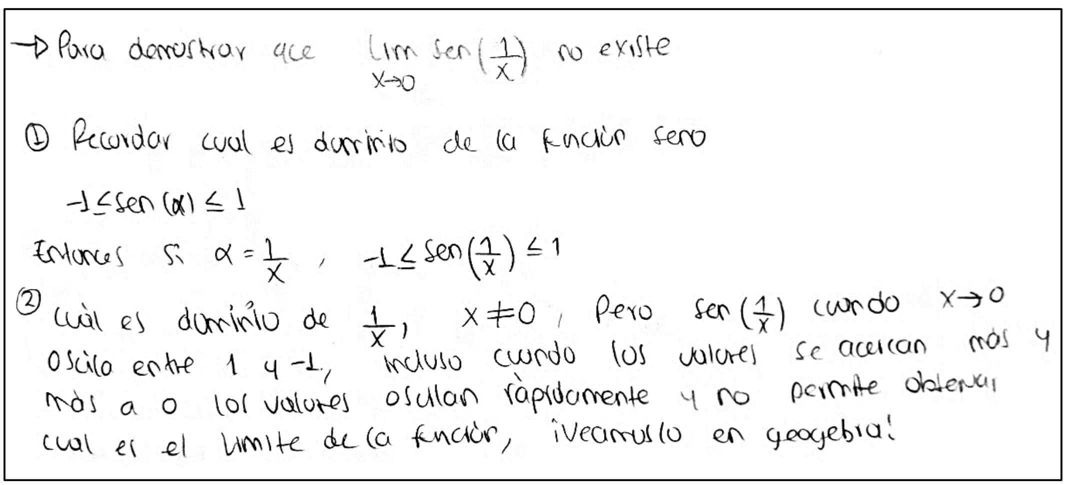
Por la definición formal de límite podemos afirmar que $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \alpha+\beta$

Por lo tanto, se concluye que $\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ siempre y cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen

Figura 38. Demostración de Carolina de la suma de límites

Carolina decide presentar la demostración haciendo uso de la definición formal, esta es la forma en que se demuestra en la mayoría de libros de texto de cálculo, a respecto ella mencionó: “en mi caso, entiendo la definición formal de límite, porque al verla gráficamente se me facilita y así es como me entendieron los chicos a los que les estoy dando tutoría de cálculo I”. Como ella lo dijo, en su caso cuando vio la asignatura de cálculo I, no comprendía el tema de límites, pero cuando se le presentó la definición formal lo pudo comprender, aunque cabe resaltar que fue gracias a la explicación haciendo uso principal de una representación gráfica, la cual se dio conociendo una representación en GeoGebra en la que, según ella, se muestra el papel de ε y δ dentro de la definición más claramente, es por esto que la presentación la hace de esta manera. Cabe resaltar que la demostración de la segunda propiedad tiene el mismo enfoque que la primera.

Para demostrar que $\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, Carolina manifestó que estuvo buscando en libros y en internet una manera de hacerlo con la definición formal de límite pero no la encontró y para construirla se hacía muy complicado, por esto optó por reconocer el dominio de la función seno y la función $\frac{1}{x}$ (figura 39).



→ Para demostrar que $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe

① Recordar cual es dominio de la función seno

$-1 \le sen(\alpha) \le 1$

Entonces si $\alpha = \frac{1}{x}$, $-1 \le sen\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

② Cuàl es dominio de $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, Pero $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando $x \to 0$ oscila entre 1 y -1, incluso cuando los valores se acercan más y más a 0 los valores oscilan ràpidamente y no permite obtener cual es el limite de la función, ¡Veamoslo en geogebra!

Figura 39. Demostración de Carolina de un límite que no existe

En este punto, Carolina hace uso de propiedades relacionadas con las funciones involucradas $\text{sen}(x)$ y $\frac{1}{x}$, justificando que, como la función seno está entre $[-1,1]$ y $\frac{1}{x}$ no puede tomar a $x = 0$ hace que la función $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ oscile rápidamente para valores cercanos a 0. Al final ella escribió:

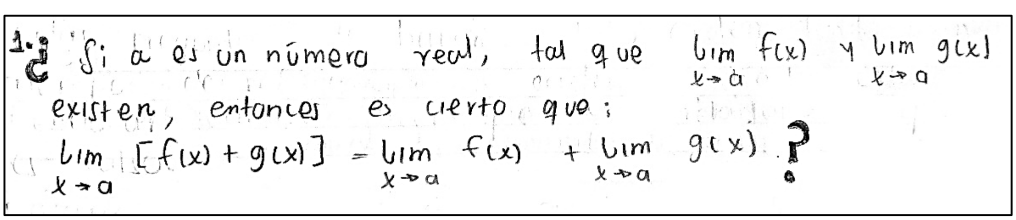
¡veámoslo en GeoGebra!, a lo que Carolina hacía referencia y no escribió en su hoja, es que “otra forma de verlo, es haciendo uso de las herramientas de GeoGebra, donde al graficar la función y hacer zoom cerca de 0, se puede concluir que el límite no existe”. Carolina planteó hacer uso de la intuición y de la visualización; inicialmente quería hacer una demostración formal, pero luego para convencerse y convencer a los estudiantes utiliza el software como apoyo. Aunque, para ella esto no sería una demostración pues solamente se tiene visualmente una comprobación de la no existencia del límite.

Como estrategia de evaluación, Carolina propone un taller para los estudiantes que contenga problemas donde evidentemente hagan uso de las propiedades demostradas, principalmente donde se evidencie la necesidad de considerar las condiciones del teorema.

El significado de la demostración que podemos observar en Carolina, es que para ella la demostración *debe ser formal, haciendo uso principal del lenguaje algebraico.*

El caso de Estefany

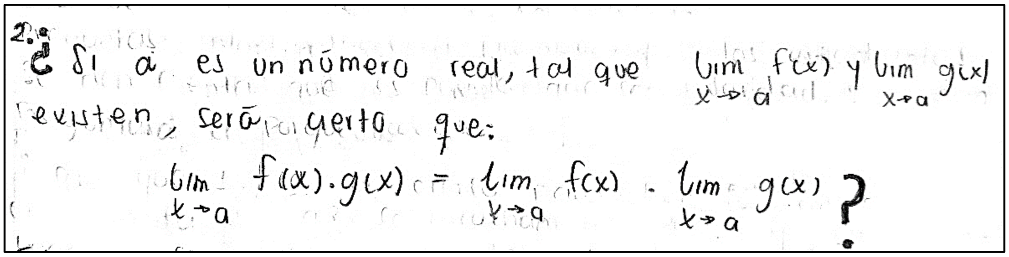
Estefany plantea como objetivo: “que los estudiantes de cálculo I de un programa de ingeniería reconozcan la importancia y rigurosidad de la demostración, por medio de algunas demostraciones de límites”. Planea empezar la clase con la pregunta a los estudiantes si creen que se cumple la propiedad de la suma (figura 40).



1. ¿Si a es un número real, tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen, entonces es cierto que: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$?

Figura 40. Pregunta de la suma de límites

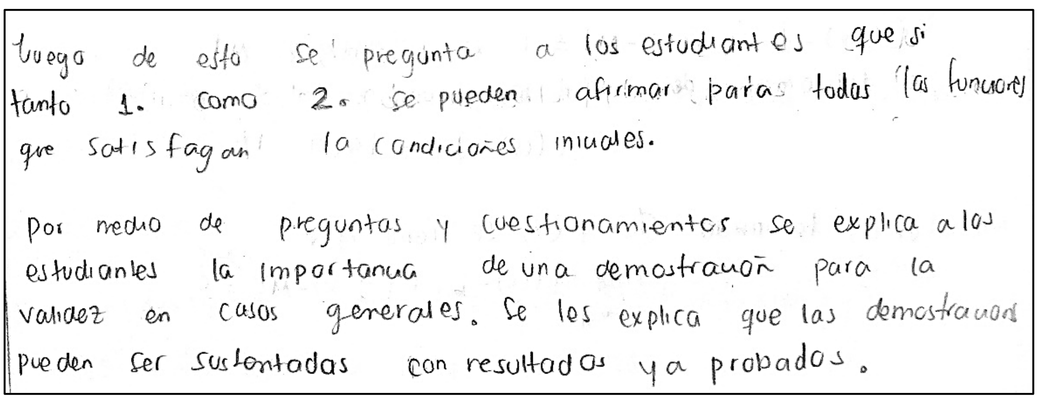
Luego, la pregunta respecto al producto (figura 41).


2. ¿Si a es un número real, tal que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, será cierto que:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\text{?}$$

Figura 41. Pregunta del producto de límites

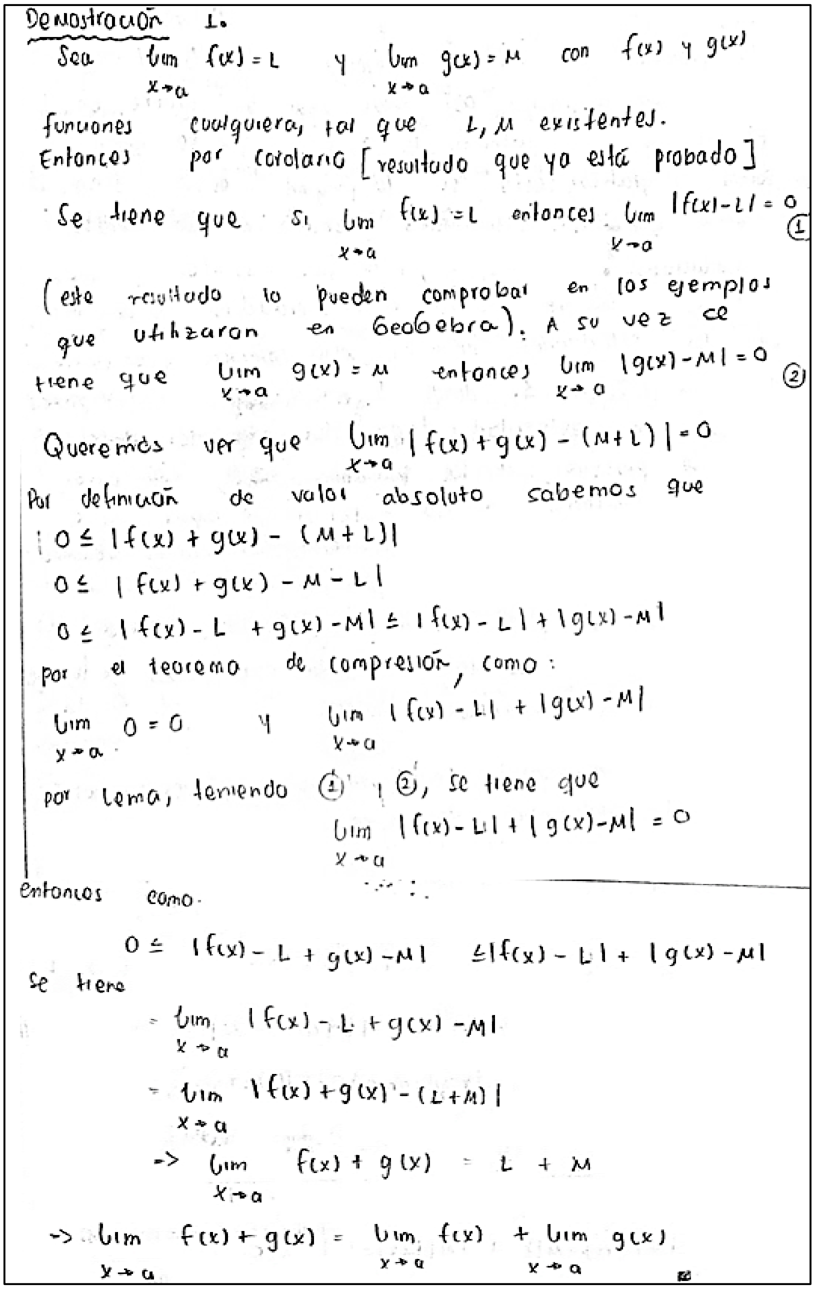
En la planeación de Estefany, ella espera que los estudiantes respondan a las preguntas haciendo uso de ejemplos y donde pueden utilizar GeoGebra para considerar muchos casos rápidamente donde se cumplan las condiciones y luego hacer más preguntas (figura 42).


Luego de esto se pregunta a los estudiantes que si tanto 1. como 2. se pueden afirmar para todas las funciones que satisfagan la condiciones iniciales.

Por medio de preguntas y cuestionamientos se explica a los estudiantes la importancia de una demostración para la validez en casos generales. Se les explica que las demostraciones pueden ser sustentadas con resultados ya probados.

Figura 42. Introducción a la actividad

Estefany plantea hacer las demostraciones de manera general utilizando propiedades de valor absoluto muy similar a la que hace Carolina con el uso de la definición épsilon - delta de límite. Una de las demostraciones que planeó Estefany para estudiar con los estudiantes es la propiedad de la suma de límites (figura 43), la presentación del producto de límites la hace de manera similar.



Demostración 1.

Sea $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ con $f(x)$ y $g(x)$ funciones cualquiera, tal que L, M existentes.

Entonces por corolario [resultado que ya está probado]

Se tiene que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$ (1)

(este resultado lo pueden comprobar en los ejemplos que utilizaron en GeoGebra). A su vez se tiene que $\lim_{x\to a} g(x) = M$ entonces $\lim_{x\to a} |g(x) - M| = 0$ (2)

Queremos ver que $\lim_{x\to a} |f(x) + g(x) - (M+L)| = 0$

Por definición de valor absoluto sabemos que

$0 \leq |f(x) + g(x) - (M+L)|$

$0 \leq |f(x) + g(x) - M - L|$

$0 \leq |f(x) - L + g(x) - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$

por el teorema de compresión, como:

$\lim_{x\to a} 0 = 0$ y $\lim_{x\to a} |f(x) - L| + |g(x) - M|$

por lema, teniendo (1) y (2), se tiene que

$\lim_{x\to a} |f(x) - L| + |g(x) - M| = 0$

entonces como

$0 \leq |f(x) - L + g(x) - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$

se tiene

$= \lim_{x\to a} |f(x) - L + g(x) - M|$

$= \lim_{x\to a} |f(x) + g(x) - (L+M)|$

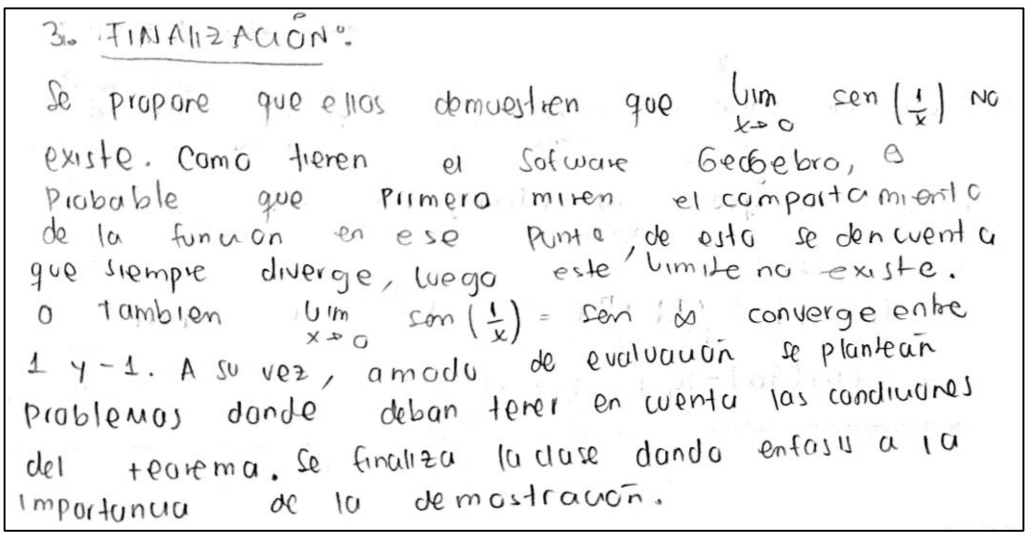
$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Figura 43. Demostración de Estefany, límite de una suma de funciones

En la demostración de la suma de límites, podemos evidenciar que Estefany se interesa en que el estudiante comprenda lo que se quiere demostrar, puesto que el inicio de la clase lo hace con preguntas introductorias que motivan al estudiante a conocer la propiedad, realizar varios ejemplos y generalizar; después de tener claridad que la propiedad se cumple, propone hacer una demostración formal deductiva, pues deja de lado los ejemplos y, además, tiene en cuenta otras propiedades ya vistas. Esta profesora en formación dice que “es importante que los estudiantes entiendan primero bien la propiedad y luego con preguntas motivarlos a hacer una demostración en la que se vea que se cumple para todos los casos”.

La demostración del límite que no existe, Estefany la hizo teniendo en cuenta desde un principio el uso del software GeoGebra (figura 44), propuso que los estudiantes utilicen la representación gráfica para analizar el comportamiento de la función cerca del valor $x = 0$ y con ello se convenzan que efectivamente el límite no existe al tomar como posibles valores los reales en el intervalo [0,1].



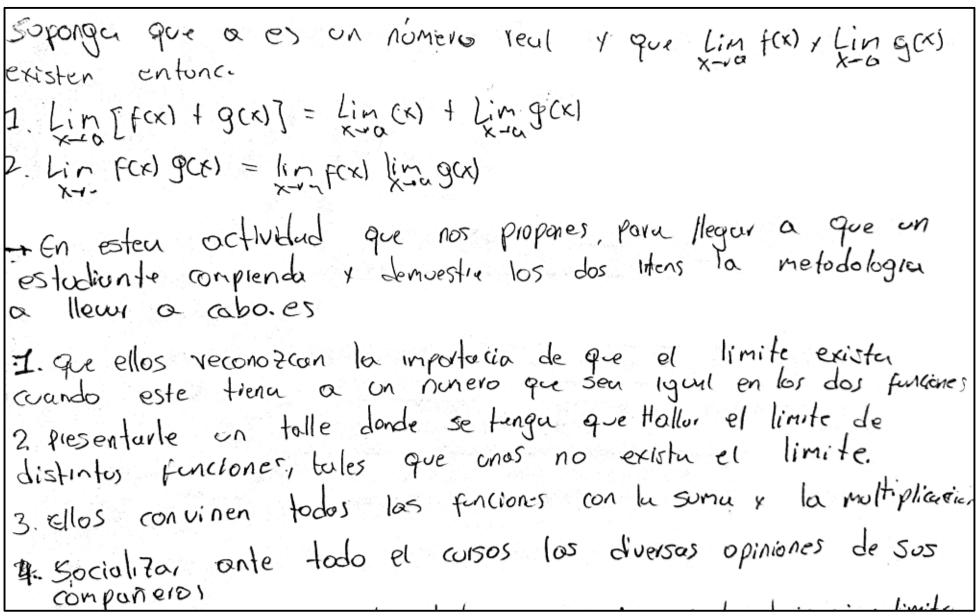
3. FINALIZACIÓN:
Se propone que ellos demuestren que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. Como tienen el Software Geogebra, es probable que primero miren el comportamiento de la función en ese punto, de esta se den cuenta que siempre diverge, luego este límite no existe. O también $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}(\infty)$ converge entre 1 y −1. A su vez, a modo de evaluación se plantean problemas donde deban tener en cuenta las condiciones del teorema. Se finaliza la clase dando énfasis a la importancia de la demostración.

Figura 44. Demostración de Estefany de un límite que no existe

La finalización de la clase que planeó Estefany fue realizar la demostración del límite que no existe y enfatizar en la importancia de la demostración. Su proceso de evaluación lo sugirió que fuese continuo, es decir, mediante la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas. Evidenciamos en el caso de Estefany que el significado de la demostración que ella ha negociado es que ésta debe ser primero porque el estudiante está convencido que la propiedad se cumple; *la demostración se puede construir con los estudiantes; debe presentar generalidad y además que la misma sea explicativa para la comprensión de los alumnos.*

El caso de David

David plantea como objetivo de la clase: "usar ejemplos específicos acerca de los límites para luego llegar a realizar una conclusión o generalización identificando los patrones que se repiten". En la planeación de su clase, menciona que mediante un taller (el cual no explicita en su propuesta) se presenten límites donde algunos existan y otros no, luego combinen estos límites con la suma y producto para que los mismos estudiantes evidencien las propiedades (figura 45).



Suponga que a es un número real y que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen entonc.

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a}(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

→ En esta actividad que nos propones, para llegar a que un estudiante comprenda y demuestre los dos itens la metodologia a llevar a cabo. es

1. que ellos reconozcan la importacia de que el limite exista cuando este tiena a un numero que sea igual en los dos funciones
2. presentarle un talle donde se tenga que Hallar el limite de distintos funciones, tales que unos no exista el limite.
3. ellos convinen todos las funciones con la suma y la multiplicaci
4. Socializar ante todo el cursos los diversas opiniones de sus compañeros

Figura 45. Inicio de la clase de propiedades de límites de David

Para finalizar la clase de las propiedades de los límites (suma y producto), David mostró que una forma de hacerlo es mediante los mismos ejemplos que llevó a cabo anteriormente el estudiante, se dé cuenta de dichas propiedades y saquen sus propias conclusiones acerca de las condiciones que se deben cumplir para que la suma o el producto de límites exista. También, expresó: "más que una demostración rigurosa es que ellos se convenzan de que los patrones que se observan se cumplen para cualquier función siempre que el límite exista" (figura 46).

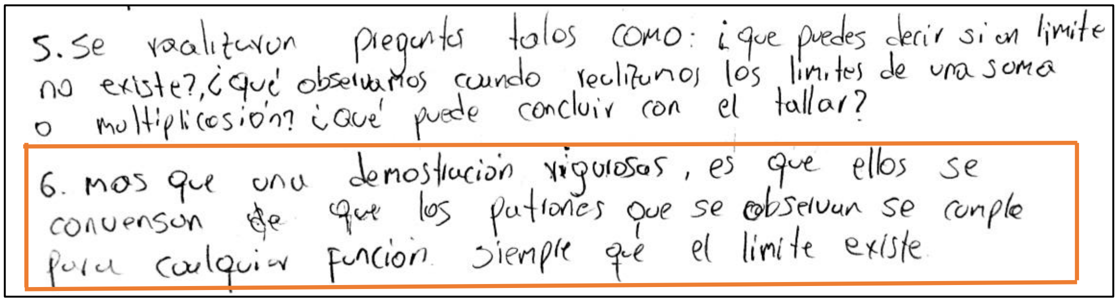
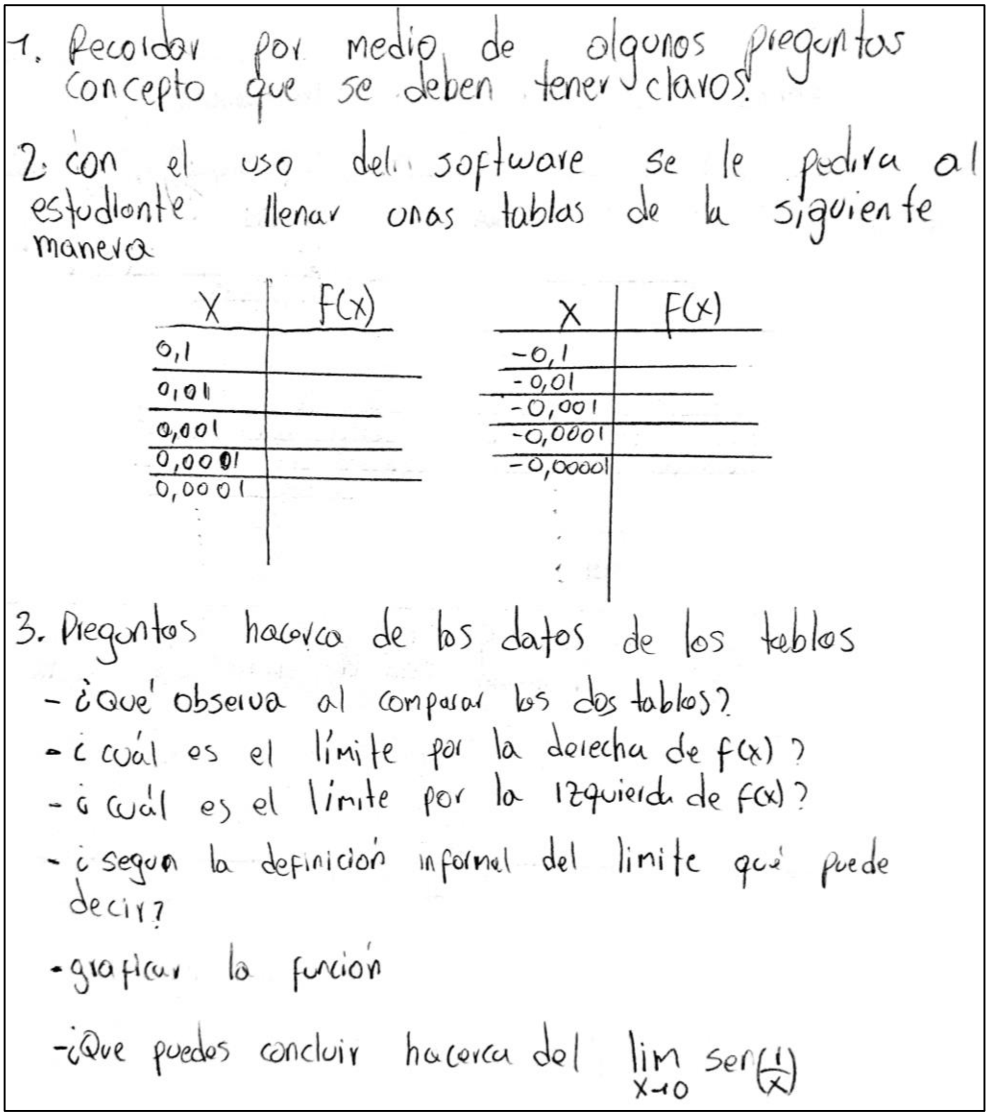

5. Se realizaron preguntas tales como: ¿que puedes decir si un limite no existe?, ¿qué observamos cuando realizamos los limites de una soma o multiplicasión? ¿Qué puede concluir con el tallar?
6. mas que una demostración rigurosas, es que ellos se convenson de que los patrones que se observan se cumple para cualquier función siempre que el limite existe.

Figura 46. Preguntas y conclusión de la clase de propiedades de los límites

En cuanto a la demostración del límite que no existe, David propuso hacer una actividad con la ayuda del software GeoGebra en la que tubularmente, el estudiante se dé cuenta que al acercarse por izquierda y por derecha del valor $x = 0$ la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ toma muchos valores posibles y que sus argumentos estén basados en la definición informal de límite (figura 47). Resaltamos la estrategia que plantea David en considerar el uso de GeoGebra, aunque en su planeación no explicita totalmente su uso, es importante el uso que le da para mirar lo que sucede en la función cada vez que se hacen mejores aproximaciones en el valor del límite.



1. Recordar por medio de algunos preguntas concepto que se deben tener claros.

2. con el uso del software se le pedira al estudiante llenar unas tablas de la siguiente manera

X	F(X)
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	
0,0001	
⋮	

X	F(X)
-0,1	
-0,01	
-0,001	
-0,0001	
-0,00001	
⋮	

3. Preguntas hacerca de los datos de los tablas
- ¿Qué observa al comparar los dos tablas?
- ¿cuál es el límite por la derecha de f(x)?
- ¿cuál es el límite por la izquierda de f(x)?
- ¿segun la definición informal del limite qué puede decir?
- graficar la función
- ¿Que puedes concluir hacerca del $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Figura 47. Demostración de David de un límite que no existe

Podemos identificar que David no se preocupó por trabajar la formalidad de una demostración de las propiedades de los límites en el aula, sino que el estudiante se convenza que eso se cumple por medio de varios ejemplos. La manera en la que David está tomando la demostración es que esta se debe hacer cuando sea necesario hacerla y cuando se hace, la demostración debe ser rigurosa, es decir, que para este profesor en formación la demostración debe ser un medio de comunicación en lenguaje algebraico.

El caso de Nicolás

Nicolás planteó el objetivo: “explicar a los estudiantes del curso de cálculo diferencial las propiedades de límites, con ayuda de un software dinámico con el fin de que ellos puedan aplicar los conceptos aprendidos en la solución de problemas”. La planeación de la clase, Nicolás la inicia haciendo preguntas como: ¿qué pasa cuando sumas dos funciones? ¿qué características tiene la nueva función con respecto a las otras? (figura 48), esto con el fin que los estudiantes recuerden propiedades de las funciones para entrar luego con los límites de la suma y el producto y puedan sacar sus primeras conclusiones acerca de las propiedades de los límites,

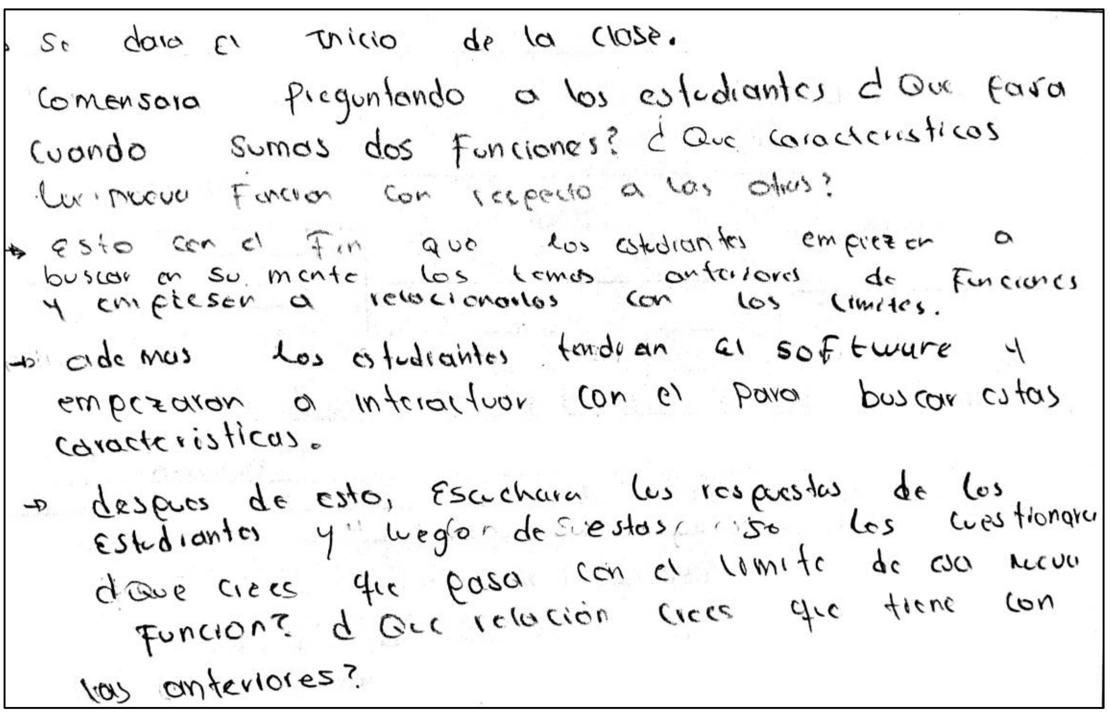
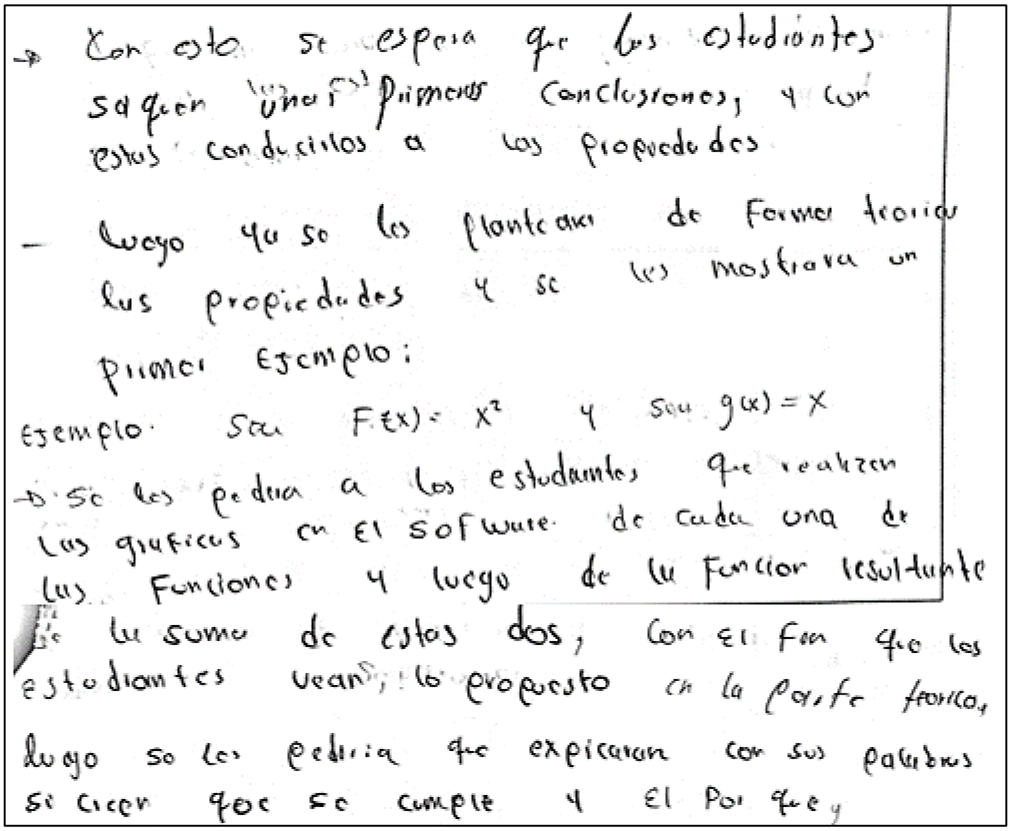

Se dara el Inicio de la clase.
Comensara preguntando a los estudiantes ¿Que Pasa cuando sumas dos Funciones? ¿Que caracteristicas tiene la nueva Funcion con respecto a las otras?
→ esto con el Fin que los estudiantes empiezen a buscar en su mente los temas anteriores de Funciones y empiesen a relacionarlos con los limites.
→ ademas los estudiantes tendran el software y empezaron a interactuar con el para buscar estas caracteristicas.
→ despues de esto, Escuchara las respuestas de los estudiantes y luego de sus respuestas los cuestionara ¿Que crees que pasa con el limite de esa nueva Funcion? ¿Que relación crees que tiene con las anteriores?

Figura 48. Inicio de la clase de propiedades de límites de Nicolás

Para continuar con la clase, Nicolás propuso que se mostraría un primer ejemplo con las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$ (figura 49), que ellos las grafiquen en GeoGebra para que comprueben lo propuesto anteriormente y preguntarles acerca del porqué se están cumpliendo la propiedad de la suma de límites. El ejemplo planteado Nicolás mencionó que “se espera que los estudiantes lleguen a la conclusión de la propiedad y sean capaces de justificarlas” y con este mismo ejemplo planteó la siguiente pregunta: ¿Qué pasa ahora si no está sumando sino multiplicando?; con esto él espera que los estudiantes miren más ejemplos para que “construyan la propiedad”.


→ Con esto se espera que los estudiantes saquen unas primeras conclusiones, y con estas conducirlos a las propiedades.

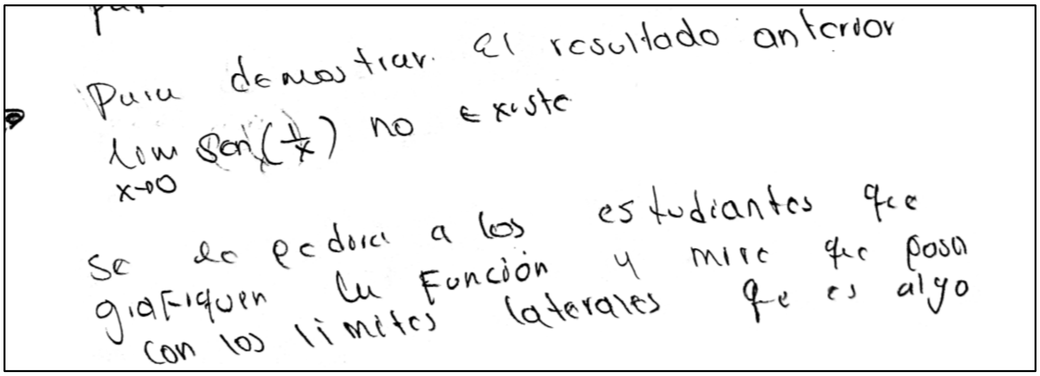
– Luego ya se les plantearía de forma teórica las propiedades y se les mostraría un primer ejemplo:

Ejemplo: Sea $F(x) = x^2$ y sea $g(x) = x$

→ Se les pedirá a los estudiantes que realicen las gráficas en el software de cada una de las funciones y luego de la función resultante de la suma de estos dos, con el fin que los estudiantes vean lo propuesto en la parte teórica, luego se les pediría que explicaran con sus palabras si creen que se cumple y el por qué,

Figura 49. Ejemplo para propiedades de límites de Nicolás

Por último, para demostrar el límite que no existe (figura 50), Nicolás propuso graficar la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para observar los límites laterales cuando x tiende a 0 y concluir a partir de ahí.



Para demostrar el resultado anterior
$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe

Se le pediría a los estudiantes que grafiquen la Función y mire que paso con los limites laterales que es algo

Figura 50. Demostración de Nicolás de un límite que no existe

Podemos identificar que Nicolás no se interesó por presentar en una sesión de clase la formalidad de una demostración de las propiedades de los límites, sino que el estudiante repase primero la suma y el producto de funciones para luego generalizar con las propiedades de los límites. Esto sucede porque este profesor en formación no considera tan relevante demostrar formalmente estas propiedades de los límites, sino que simplemente los estudiantes las conozcan por medio de la exploración de varios ejemplos y generalicen a partir de ahí; todo este proceso no lo considera como demostración. El significado de la demostración que podemos identificar en Nicolás es que ésta debe ser un medio de comunicación en lenguaje algebraico.

5.6.1 Significados de la demostración negociados en el taller de límites. Los significados de la demostración que encontramos en el taller de límites fueron mediante el análisis de las planeaciones de clase individuales para un curso de cálculo, en el que se incluyeron demostración de algunas propiedades de límites, las planeaciones incluyeron herramientas como el uso del software GeoGebra como apoyo para que los estudiantes comprendan los conceptos y busquen regularidades mediante el estudio del comportamiento de funciones en un punto específico y la observación de varios ejemplos. Los significados encontrados en las planeaciones fueron: **la demostración presenta generalidad**, pues para conocer una propiedad se pueden hacer ejemplos al inicio, pero luego al hacer la demostración se debe hacer sin el uso de ellos; **la demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico**, porque la forma de presentar la demostración debe ser usando el álgebra; **la demostración como medio de comprensión**, debido a que debe proporcionar al estudiante entender en lo que consisten las propiedades; **La demostración como medio de descubrimiento**, pues mediante actividades introductorias definidas por el profesor estratégicamente, direccionan al estudiante al descubrimiento de una propiedad; **La demostración como medio de explicación**, pues debe mostrar el porqué de la propiedad.

5.7 Taller de derivadas e integrales

A continuación, mostramos evidencias de la planeación de una clase en diferentes temas distribuidos en tres grupos que se formaron para la realización del taller de derivadas e integrales. Esta distribución obedece a mirar cómo fue la negociación que tuvieron principalmente los profesores en formación Estefany, Carolina, Manuel, Nicolás y David, al interactuar con sus compañeros.

Grupo: Estefany – Nicolás – Juliana

Este grupo se ha conformado por tres profesores en formación, dos de ellos Estefany y Nicolás pertenecen al grupo de la muestra principal de esta investigación y en quienes encontramos los siguientes significados de la demostración hasta el momento; para Estefany la demostración es un medio de explicación, de verificación, de comprensión, de descubrimiento y aquella que presenta generalidad; para Nicolás en todos los talleres anteriores se ha evidenciado el significado de la demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico y como medio de explicación en una sola ocasión. En el caso de Juliana es una profesora en formación que durante el desarrollo de la investigación por observaciones del investigador tiene como significado de la demostración aquella que presenta generalidad, hace uso exclusivo del álgebra, como medio de explicación y como medio de sistematización. Estos significados de la demostración se evidenciaron en cada uno para esta actividad y donde ellos llegaron a algunos acuerdos en su planeación de clase.

A este grupo se le asignó demostrar el Teorema Del Valor Medio para Integrales. Mostramos algunos apartados de conversaciones que se dieron entre ellos.

Nicolás: ¿Hay que enseñar el teorema o hay que demostrarlo?

Juliana: Claro, usted va a enseñar el teorema y pues para que sea válido tiene que hacer la demostración.

[Empiezan a estudiar el teorema del valor medio desde un libro de texto]

Nicolás: Entonces, que el estudiante construya el concepto.

Juliana: ¿Que construya? Ellos no lo van a construir.

Nicolás: Ah bueno, no tanto.

Estefany: Entonces, ¿vamos a hacer una clase magistral?

Nicolás: Si, esto es lo mismo, ellos deben tener los conceptos previos claros.

Estefany: Tenemos que mirar primero las condiciones del teorema.

Estefany: ¿Cómo lo hacemos, haciendo preguntas para que ellos como que lleguen a construirlo?

Juliana: Yo pienso en mostrarles la afirmación (teorema) y ponerlo a consideración a ellos si lo consideran verdad o no. Para incentivarlos, colocarles ejercicios como ejemplos genéricos para que ellos vean si se cumplen o no y por qué creen que se cumple.

En este momento, hay diferentes posturas en cada uno de ellos, que evidencian los significados de la demostración que tenían hasta el taller anterior. Nicolás se muestra indeciso acerca de lo que se tiene que hacer, no muestra claridad en las ideas; en el caso de Juliana ella quiere mostrar el enunciado del teorema y luego hacer ejemplos; a Estefany, no le parece muy bien hacer una clase "magistral" que es cuando el profesor es el principal protagonista y no da lugar a la participación de los estudiantes; por tanto, sugiere trabajar de una manera constructiva, donde los estudiantes se comprometan en llegar junto con el profesor al teorema. Continúa la conversación en un momento en el que llego como investigador a preguntarles cómo van en la planeación:

Estefany: Es que estábamos discutiendo el uso de GeoGebra en la demostración del teorema.

Juliana: Pero siendo realistas, por lo general no hay acceso al uso de computadores, solo el uso del tablero, por lo general, en las clases de matemáticas no se hace uso de GeoGebra.

Estefany: Aunque se podría considerar una clase especial y hacer uso de la tecnología. Hay que incluir lo que estamos aprendiendo porque si no, ¿entonces?... Haciendo los estudiantes los ejemplos, dirán si se cumple o no, si de pronto no se cumple es porque no colocaron la función continua u otra cosa.

Juliana: Listo, entonces a modo de pregunta, se llega a que sí se cumple y entonces se les presenta el teorema.

Nicolás no ha dicho nada hasta el momento acerca de esa primera parte de la planeación.

Juliana: Nicolás, ¿qué piensa de lo que estamos haciendo?

Nicolás: Pues, se puede trabajar sobre el teorema o se puede ir construyendo… viendo las ideas previas de los temas y las condiciones que se necesitan para el teorema y se van presentando para ir construyendo el teorema. Entonces ustedes dirán cuál será el objetivo para saber qué es lo que se va a hacer.

Juliana: Que ellos entiendan las condiciones para poder presentarles la demostración.

Nicolás: Sería importante que ellos supieran para qué es ese teorema, o sea para qué se puede utilizar, porque si lo hacemos es mostrarle la demostración y luego un ejercicio, pues eso no sirve de nada para que los estudiantes aprendan, es bueno cuando los estudiantes ven la importancia, por ejemplo si es una aplicación a la vida real.

Juliana: Pero es que hay muchas cosas en matemáticas que no tienen una aplicación directa en la vida real de los estudiantes.

Nicolás: Pues no, pero en este caso estamos en cálculo y podemos hacerlo mediante problemas, en cálculo es un poco más asequible.

[Empiezan a buscar un problema en el libro]

Estefany: Bueno Nicolás, usted más o menos ¿cómo es que quiere?

Nicolás: Que la presentación del teorema sea más por medio de resolución de problemas, cómo se puede ir aplicando, para que por medio del problema se pueda ir explicando qué es lo que se debe hacer.

Estefany: Listo le presentamos un problema, vemos ellos que hacen y luego miramos el teorema.

Nicolás: Pues yo quiero ver el teorema, pero poner un problema para que comprendan mejor y se puede hacer al final luego de presentar el teorema.

Juliana: O sea como una aplicación…Entonces lo que dicen es: ¿presentar el teorema, demostrarlo y poner el problema?

Estefany y Nicolás: No, no, tampoco así.

Juliana: Si, si, si, si, entonces nos estamos contradiciendo, a mi cuando lo vi, fue mostrar el teorema, una gráfica, ejemplo y ya. Centrémonos en esto otra vez. Podemos ir construyendo la situación y haciéndoles preguntas a ellos, como ¿qué pasa si variamos la función, la altura, para que ellos lo vayan viendo primero entre todos construyendo?

Nicolás: No podemos hacerlo como aprendimos nosotros, porque hay que ponernos en el papel de los estudiantes para que ellos aprendan realmente. Hay que entender a los estudiantes y repartir bien el tiempo.

Podemos evidenciar que Nicolás empieza a opinar con ideas más claras lo que quiere desarrollar en la clase; menciona que no sería lo más adecuado enseñar como a él le enseñaron, sino hacer más participativo al estudiante como aplicación a la resolución de problemas.

[Empiezan a escribir en la hoja los objetivos y la demás planeación de la clase]

Estefany: Cuando le hacemos esta pregunta ¿qué es lo primero que se piensa? Hacer un ejemplo ¿cierto? (se refiere a la pregunta en inicio de la planeación)

Nicolás: Si, eso

Estefany: Darles el espacio para que ellos planteen varios casos, digamos que no soy de matemáticas, que estoy como en el colegio.

Juliana: Pues si no soy de matemáticas, busco ejemplos.

Estefany: Si, que ellos mismos se den cuenta de lo que pasa.

Nicolás: Si, exacto, se les piden que los hagan y que la respuestas de los estudiantes no sean porque si, entonces se les pregunta ¿cómo lo demostraría con un ejemplo?

Estefany: Si les da que no, entonces revisar las condiciones del teorema.

Nicolás y Juliana: Pero eso es después.

Nicolás: Se les incentiva que construyan ejemplos y no dárselos, se estimula para que lo realicen, porque no todo lo que uno planea es lo que va a salir en el aula de clase.

Estefany: Cuando ellos se den cuenta, se les pregunta ¿cómo podemos demostrar esto?

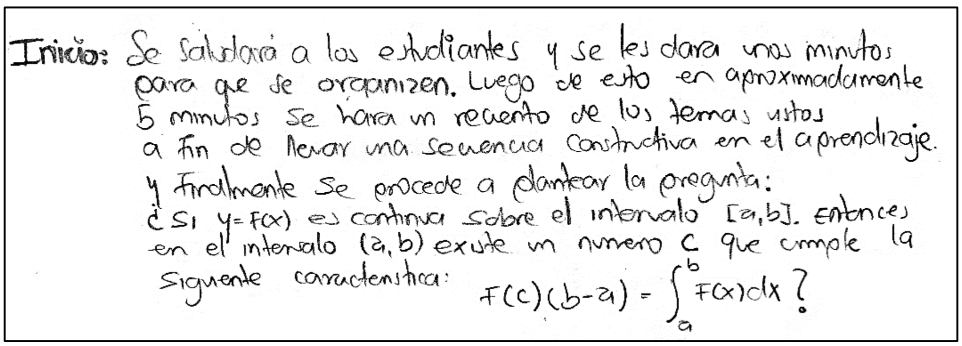
Nicolás: Pues se puede hacer la demostración por medio de preguntas, es una demostración en la que participan los estudiantes, porque una cosa es hacer la demostración usted y otra en la que ellos participen.

Juliana: Si, preguntas claves, ¿cómo serían?

Nicolás: Preguntas en las que se les va diciendo a ellos, bueno y ahora ¿cómo podemos demostrar esto?

Estefany: Se puede hacer que se presenten distintas formas de demostrar de los estudiantes se ponen a consideración de todos y se van descartando las que no responden con la ayuda de todos.

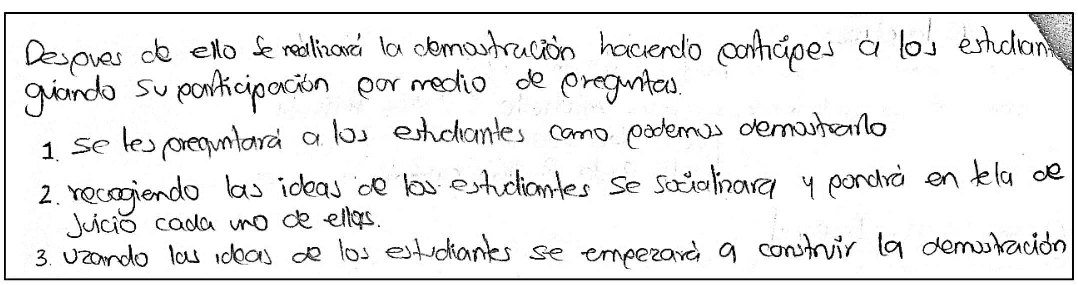
En este grupo de profesores en formación, hubo al principio diferentes opiniones en cuanto a cómo debería ser la clase, luego del debate llegaron a acuerdos y prepararon la clase de la siguiente forma: primero, plantearon el objetivo “que el estudiante comprenda el teorema de valor medio para integrales” y el inicio de la clase (figura 51).



Inicio: Se saludará a los estudiantes y se les dara unos minutos para que se organizen. Luego de esto en aproximadamente 5 minutos se hara un recuento de los temas vistos a fin de llevar una secuencia constructiva en el aprendizaje. y finalmente se procede a plantear la pregunta: ¿Si $y=f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a,b]$. Entonces en el intervalo (a,b) existe un numero c que cumple la siguiente caracteristica: $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$?

Figura 51. Inicio de clase del TVM para integrales.

Planean iniciar la clase con una pregunta clave, la cual va directamente relacionada con el enunciado del teorema de valor medio para integrales con el fin de que los estudiantes empiecen a explorar por medio de ejemplos. Para Estefany, Nicolás y Juliana se ha hecho importante motivar en los estudiantes en que ellos mismos empiecen a explorar propiedades y condiciones que se deben cumplir para responder a la pregunta y hacerlos partícipes de la demostración (figura 52).



Despues de ello se realizará la demostración haciendo participes a los estudian guiando su participación por medio de preguntas.

1. se les preguntará a los estudiantes como podemos demostrarlo
2. recogiendo las ideas de los estudiantes se socializara y pondrá en tela de juicio cada uno de ellas.
3. uzando las ideas de los estudiantes se empezará a construir la demostración

Figura 52. Motivación para hacer la demostración

En la construcción de la demostración no se descarta el uso de GeoGebra para explorar diferentes funciones y conjeturar acerca de la primera pregunta planteada. La demostración que proponen los profesores en formación (figura 53) que se puede realizar en el aula de clase es la siguiente.

Demostración del teorema (*)

Para esto veamos 2 casos, cuando f es constante y cuando no

Caso 1: F es constante:

Si F es constante en el $[a,b]$ el resultado es trivial puesto que C puede ser cualqüer punto.

Caso 2: Si F no es constante

Si F no es constante en $[a,b]$ elegimos $m = \min F(x)$ y $M = \max F(x)$ entonces, tenemos que $m \leq F(x) \leq M$ tal que $x \in [a,b]$, Por propiedades de comparación tenemos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b F(x)\,dx \leq M(b-a)$$

ahora:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b F(x)\,dx \leq M$$

Dado que F es continua el Teorema de valor Intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b F(x)\,dx$ en algún punto $c \in [a,b]$. Queda demostrado que $\exists c$ tal que $F(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b F(x)\,dx$, es decir $F(c)(b-a) = \int_a^b F(x)\,dx$ ■

Teorema (*)

Sea $y=f(x)$ continua en $[a,b]$ Entonces en el intervalo abierto $[a,b]$ $\exists c$ tal que

$$F(c)(b-a) = \int_a^b F(x)\,dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Figura 53. Demostración del teorema de valor medio para integrales

La demostración que planean posiblemente hacer en el aula de clase está presente en algunos libros de texto de Cálculo, es una demostración deductiva formal, en ese momento se dejan los ejemplos de lado para presentar la demostración. Es importante resaltar que estos profesores en formación han realizado aportes en cuanto al significado de la demostración de cada uno y que puede negociar con otros participantes de la comunidad.

Como evaluación de la clase, los tres profesores en formación planean lo siguiente (figura 54).

Finalización: Se plantea un problema, donde se pueda evidenciar la utilidad del teorema del valor medio para integrales.

actividad evaluativa: Encuentre la altura $f(c)$ de un rectángulo de modo que el área A bajo la gráfica de $y = x^2+1$ sobre $[-2,2]$ sea la misma que $F(C)(2-(2)) = 4F(C)$

Solución: los estudiantes deben encontrar la solución al problema y el docente intervendra en cada grupo. (la actividad se desarrollara en grupos de 2); la intervención del docente será orientadora buscando comprobar o verificar que los estudiantes comprendan en su totalidad el teorema.

Finalmente, luego se socializará las soluciones hechas por los grupos y con esto llegar a la solución

Figura 54. Finalización de la clase del teorema de valor medio para integrales

En el caso de Nicolás, él durante el transcurso del tiempo que se desarrolló la comunidad de práctica presentó un significado de la demostración predominante: *la demostración es aquella que presenta generalidad y hace uso exclusivo del álgebra*. En este taller, Nicolás empieza a ver la demostración como un proceso que se puede ir construyendo con los estudiantes, haciendo uso de los ejemplos para lograr una mejor comprensión del enunciado, aun así, que la demostración sea entendible y que tenga aplicación, por tanto su significado se ha ampliado y ahora considera que la demostración: *se puede construir con los estudiantes, es comunicativa, la demostración sirve como medio de descubrimiento y es aquella que presenta generalidad.*

En el caso de Juliana fue flexible a la hora de planear la clase, al inicio quería una clase en la que se mostrara el teorema, se demostrara y ya, pero con la interacción de los otros profesores en formación estuvo de acuerdo en hacerlo de otra manera. Y en el caso de Estefany, ella siempre ha tenido una visión amplia de la demostración, considerando diferentes posturas, diferentes tipos de demostración tanto para elaborar sus demostraciones, como para llevar en el aula de clase.

Fue importante la interacción que hubo entre los profesores en formación, puesto que cada uno con sus ideas acerca de la planeación de una clase y también acerca de la demostración. Hubo negociación de los significados por parte de Nicolás y Juliana, puesto que por la interacción en el grupo, al compartir experiencias y confrontar las ideas del otro, empezaron a considerar nuevas formas de presentar la demostración en el aula, esto hace parte de la negociación de significados vista desde la teoría de la práctica social de Wenger (2001), que no necesariamente siempre debe haber acuerdo entre los miembros de la comunidad, pero en este caso se dio esa ampliación de sus significados, lo cual proporciona una base para aplicar en una experiencia futura como profesores en ejercicio.

Grupo: Nicolle – David – Carolina

Este grupo se ha conformado por tres profesores en formación, dos de ellos David y Carolina pertenecen al grupo de la muestra principal de esta investigación y en quienes encontramos los siguientes significados de la demostración hasta el momento; para David la demostración es un medio de verificación, de comprensión, de comunicación en lenguaje algebraico, aquella que presenta generalidad y como contenido; para Carolina es un medio de verificación, de sistematización, de comunicación, de comunicación en lenguaje algebraico y aquella que presenta generalidad. En el caso de Nicolle es una profesora en formación que durante el desarrollo de la investigación por observaciones del investigador tiene como significado de la demostración aquella que presenta generalidad, hace uso exclusivo del álgebra y como medio de explicación. Estos significados de la demostración se evidenciaron en cada uno para esta actividad y donde ellos llegaron a algunos acuerdos en su planeación de clase.

Este grupo le correspondió planear la clase donde tuvieron que demostrar el Teorema del Valor Medio para Derivadas.

[Empiezan a comprender por ellos mismos en qué consiste el teorema, para ello tienen como libro guía el Zill]

Carolina: Si no se ve en un ejemplo, es complicado demostrarlo.

Nicolle: Si vamos a dar el teorema no podemos dejar sin demostrarlo, pobres muchachos de ingeniería que no saben demostrar y para dejarlo de tarea no me parece. David, ¿demostramos o no demostramos?

David: No entiendo porque en el libro dan el teorema van a demostrarlo y resultan haciendo un ejemplo.

Nicolle: Aunque si, el ejemplo no coincide mucho con la demostración, ¿empezamos con ejemplo?

David: no, pero es que si empezamos con ejemplo estamos enseñando al estudiante a que todo lo aprenda de manera algorítmica mecánica.

Carolina: ¿Porque? ¿A usted un teorema no le parece mejor para entender hacer un ejemplo? O ¿primero la demostración y ahí si el ejemplo?

David: No, no porque primero llevar al estudiante para que vea qué necesita para hacer la demostración.

Carolina: Pues lo que utiliza el teorema del valor medio es el teorema de rolle y eso ya está demostrado, ya saben eso, lo de la recta secante, lo de la pendiente, yo sigo diciendo que primero los ejemplos.

Nicolle: Si primero ejemplos.

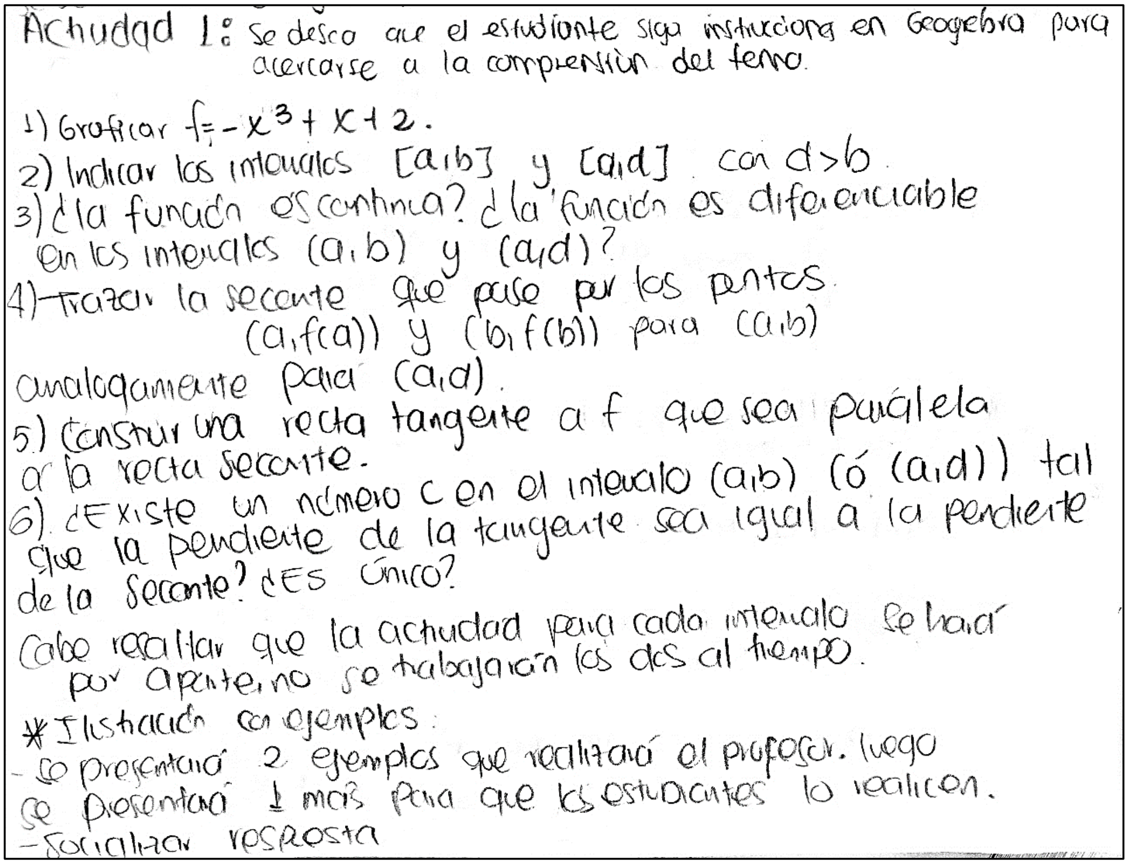
Carolina: Como el teorema dice que valor medio uno tiende a pensar que es la mitad entre los dos puntos, pero por eso vamos a utilizar GeoGebra. Usted que dice, ¿demostrarlo o no?

Nicolle: Yo digo que sí, porque a veces uno no sabe si el profesor está diciendo la verdad siempre, porque se puede cumplir en algunos ejemplos, en cambio en una demostración se cumple para todo.

David: Yo digo que no demostrarlo. Uno viendo cuando era estudiante de cálculo I, cuando uno ve estos temas y se enfrenta a un problema, intenta colocar la fórmula a ver si le sale o no.

Carolina: Si, en cálculo I, si el profesor dice que las bolas son blancas pues son blancas, uno se traga el cuento porque no ha estudiado lo suficiente para ser crítico si se lo cree o no se lo cree. Entonces ¿demostramos o no? [Risas] eso es lo que toca hacer y nosotros perdiendo el tiempo en decidir eso.

En la conversacion que mantienen David, Carolina y Nicolle, al inicio no están convencidos en dar o no la dmeostración en la clase, pero se dan cuenta que eso es lo que tienen que hacer y la forma en que lo planean es utilizando primero una función continua en un intervalo (figura 55).


Actividad 1: Se desea que el estudiante siga instrucciones en Geogebra para acercarse a la comprensión del tema.

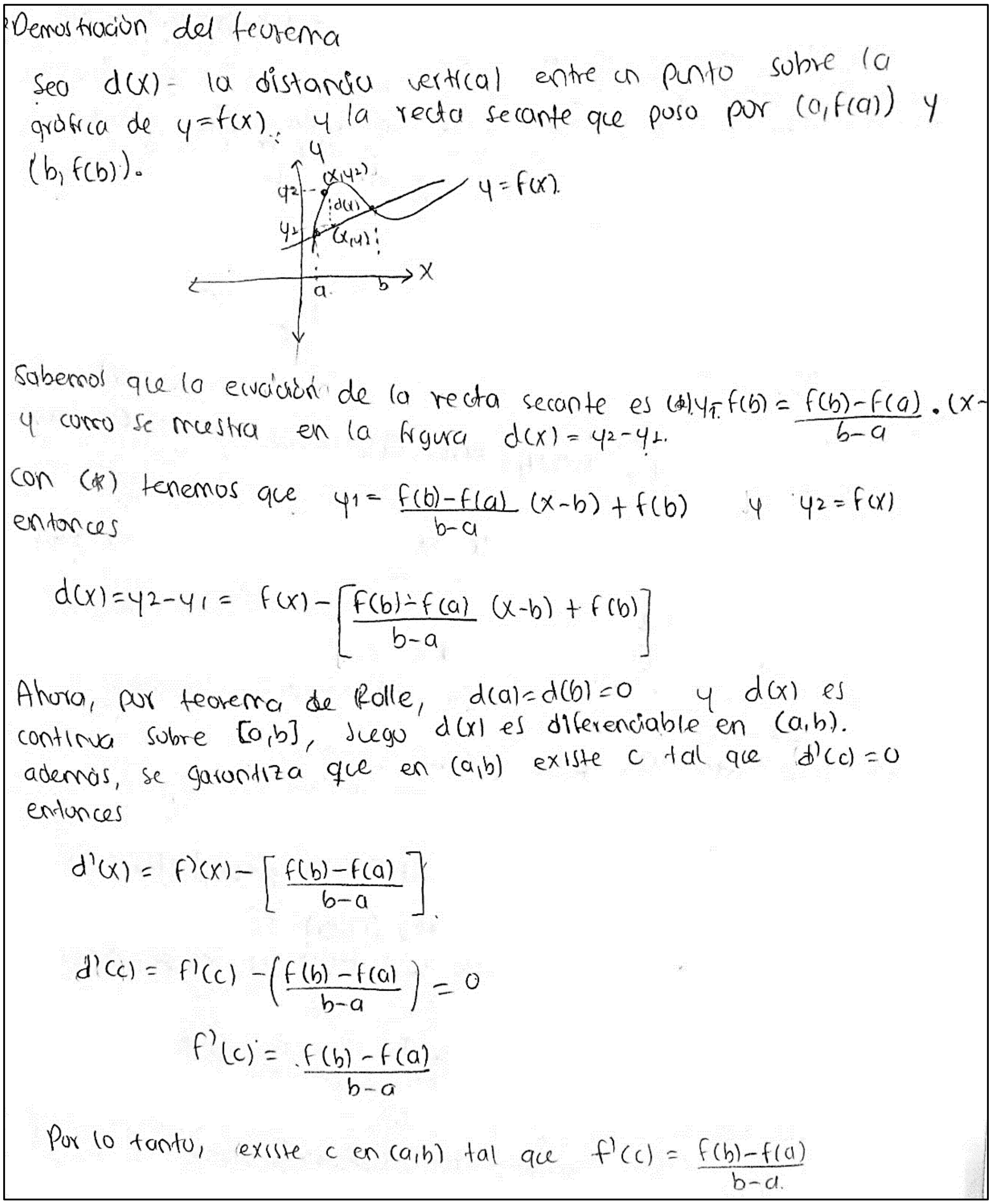
1) Graficar $f=-x^3+x+2$.
2) Indicar los intervalos $[a,b]$ y $[a,d]$ con $d>b$.
3) ¿la función es continua? ¿la función es diferenciable en los intervalos (a,b) y (a,d)?
4) Trazar la secante que pase por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ para (a,b)
analogamente para (a,d).
5) Construir una recta tangente a f que sea paralela a la recta secante.
6) ¿Existe un número c en el intervalo (a,b) (ó (a,d)) tal que la pendiente de la tangente sea igual a la pendiente de la secante? ¿Es único?

Cabe resaltar que la actividad para cada intervalo se hará por aparte, no se trabajarán los dos al tiempo.

* Ilustración con ejemplos:
- Se presentará 2 ejemplos que realizará el profesor. luego se presentará 1 más para que los estudiantes lo realicen.
- Socializar respuesta

Figura 55. Construcción con los estudiantes la propiedad del teorema de valor medio para derivadas

Al iniciar la clase con esta actividad, tiene como objetivo que los estudiantes trabajen primero con un ejemplo para que se empiecen a dar cuenta de lo que sucede dadas unas condiciones (las del teorema) y tratar con la función llegar a concluir que se cumple es esta función. Con apoyo en el software GeoGebra facilita al estudiante la construcción de las gráficas y las herramientas necesarias para comprender el tema en ese ejemplo. Luego de esa introducción realizan la demostración (figura 56) para que los estudiantes se den cuenta que se cumple en general para cualquier función que cumpla las condiciones del teorema.



Demostración del teorema

Sea $d(x)$ - la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y=f(x)$, y la recta secante que pasa por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

Sabemos que la ecuación de la recta secante es $(*)\ y_1 - f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-$ y como se muestra en la figura $d(x) = y_2 - y_1$.

Con $(*)$ tenemos que $y_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$ y $y_2 = f(x)$ entonces

$$d(x) = y_2 - y_1 = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)\right]$$

Ahora, por teorema de Rolle, $d(a)=d(b)=0$ y $d(x)$ es continua sobre $[a,b]$, luego $d(x)$ es diferenciable en (a,b). además, se garantiza que en (a,b) existe c tal que $d'(c)=0$ entonces

$$d'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right].$$

$$d'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por lo tanto, existe c en (a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Figura 56. Demostración del teorema de valor medio para derivadas

La demostración que planean hacer del teorema de valor medio para derivadas, es una demostración ya deductiva formal, aunque el estudiante ya tiene idea de lo que sucede gracias al ejemplo del inicio.

Respecto a los significados de la demostración de los profesores en formación, se pudo evidenciar que en el caso de Carolina y Nicolle mantienen sus significados que han tenido a lo largo del curso, Nicolle desde el inicio de la comunidad ha contemplado la posibilidad de tener diferentes tipos de demostración y su utilidad dentro de las clases de matemáticas. Carolina ha avanzado en las ideas que la demostración *se puede dar mediante la motivación en los estudiantes por conocer lo que sucede con un enunciado cuando se cumpla en todos los casos*. David en los últimos talleres había mostrado que para él *la demostración es aquella que presenta generalidad, haciendo uso exclusivo del álgebra*, y esto es lo que llegan a realizar, pero primero con una motivación que es la de conocer a partir de un ejemplo que sucede para cualquier función; esto es algo que el empezó a hacer negociación de sus propios significados de la demostración, vista desde la teoría de la práctica social de Wenger (2001), y que en gran parte estuvo influenciado por los aportes de sus compañeros, especialmente Nicolle.

5.6.1 Significados de la demostración negociados en el taller de derivadas e integrales. Los significados de la demostración negociados en el taller de derivadas e integrales fueron en general algunos de los ya mencionados en talleres anteriores, sin embargo, en este taller encontramos que estos se dieron por consenso entre los profesores en formación que estaban distribuidos en los grupos de trabajo para la planeación de la clase, pues como vimos, algunos de ellos hicieron ampliación de sus significados por medio de la negociación dentro de la comunidad.

Los significados negociados fueron**: la demostración presenta generalidad**, pues en ella no se utilizan ni se hace referencia a ejemplos particulares; **la demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico**, porque de las formas más aceptadas por la comunidad matemática es aquella que está escrita haciendo uso principal del álgebra; **la demostración como medio de comunicación**, se trata de verla como una forma de dar a conocer resultados matemáticos; **la demostración como medio de descubrimiento**, pues con las preguntas adecuadas y la exploración de los estudiantes, se pueden descubrir las propiedades y teoremas; **la demostración como medio de comprensión**, debido a que proporciona en el estudiante entender en qué consiste y para qué la proposición a demostrar.

6. Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación que participan en un curso de didáctica del cálculo y que reflexionan sobre el proceso de la demostración. La negociación de significados bajo la perspectiva de la teoría de la práctica social es el proceso mediante el cual experimentamos el mundo y se reorganizan las interpretaciones de las ideas propias o de forma colectiva mediante la interacción en clase (Wenger, 2001). Es así como la principal fuente de información de nuestra investigación fueron las discusiones en las sesiones de clase y las herramientas documentales llevadas con los profesores en formación, bajo la concepción de una comunidad de práctica de clase.

Es necesario reconocer que la demostración no siempre tiene que estar escrita en un sistema algebraico, haciendo alusión a un sentido estrictamente formal y a veces poco entendible para el lector; también entran en juego otros procesos, como el proceso de comunicación y el proceso de representación que son complementarios al proceso de demostración. Muchas veces, los profesores o estudiantes confunden una demostración porque está escrita y representada en lenguaje algebraico, pero puede no estar del todo bien; por ejemplo, el lenguaje natural retórico es otro medio de comunicación y muchas veces convence más al lector por su grado de comprensión.

Al considerar significados de la demostración en un sentido más amplio, incluyendo diferentes tipos, ya sea en la educación primaria, media o superior, tal y como lo señala Hernández (2017): “se avanza también en una mirada de la demostración no sólo como un producto acabado de las matemáticas, sino como un proceso que incluye acciones de argumentar, conjeturar, entre otras”. De cierta manera con esta visión de la demostración, se está promoviendo en desarrollar en los estudiantes la comprensión de los conceptos matemáticos, donde ellos sean también partícipes en la construcción de razonamiento matemático.

La experiencia de tomar un curso de formación universitaria bajo la concepción de comunidad de práctica de clase, como un escenario de aprendizaje continuo, puede ser considerada para futuras implementaciones en cursos que se incluyan en programas de formación de profesores. Esto se hace importante para crecer como comunidad, pues la participación e interacción entre los profesores en formación, el liderazgo compartido, el compromiso mutuo con la práctica y la reflexión acerca de la práctica futura como profesores, producen experiencias que luego se constituyen en una negociación de significados (acuerdos y desacuerdos) que cada profesor adquiere.

En nuestra investigación no hicimos un seguimiento individual de cada profesor en formación acerca de sus significados de la demostración, sin embargo, podemos afirmar que algunos de ellos se mantuvieron en una participación periférica, interviniendo en pocas ocasiones en las discusiones de grupo; aunque esto no quiere decir que no avancen en su proceso de aprendizaje, de acuerdo con Lave y Wenger (1991) aún quienes tienen una participación periférica también ganan diversas perspectivas sobre la práctica que se lleva a cabo en la comunidad, es así como en nuestro grupo de estudio encontramos profesores en formación que avanzaban en construir sus propios significados y posturas acerca de la enseñanza de la demostración. Por otra parte, pudimos evidenciar que en los participantes de la comunidad, en su mayoría, lograron una participación plena, participando activa y protagónicamente en las actividades del curso de Didáctica del Cálculo, avanzando en las discusiones que influyeron en la negociación de significados de la demostración.

Respecto a la negociación de significados, bajo la concepción de una comunidad de práctica de clase, encontramos que los significados de la demostración negociados por los profesores en formación corresponden a un proceso de negociación que se dio en sus trayectorias académicas. Esto señala que este proceso de negociación está sujeto a una serie de acontecimientos sociales e históricos dentro de las comunidades donde se desarrolla (Camargo, 2010; Godino y Recio, 2001; Hernández, 2017). Cualquier transformación de los significados en los miembros de la comunidad tuvieron que ser resultados de negociaciones dentro de la misma. Resaltamos que algunos profesores en formación transformaron sus significados de la demostración, pasando de considerarla exclusivamente formalista en el sentido que tiene que ser como un medio de verificación de una propiedad y que su forma de comunicación sea únicamente algebraica, esto pasó a considerarse también demostraciones no tan formales, por ejemplo demostraciones basadas en ejemplos o que utilizan algún tipo de representación diferente al algebraico. Estos significados pasaron a ser mejor utilizados y asumidos por los miembros de la comunidad para una futura aplicación en su vida profesional.

6.1 Significados de la demostración de los profesores en formación

En cuanto a los cuatro profesores en formación que tomamos como principal referencia para el análisis de nuestra investigación (Estefany, David, Carolina y Nicolás) encontramos que hicieron avances en la negociación de significados de la demostración, contando desde sus ensayos escritos acerca de su experiencia en los cursos de cálculo de la universidad. Presentamos un resumen en una tabla (tabla 14) de los significados que surgieron en cada taller para cada uno de los cuatro; en ella se muestra de manera horizontal cada profesor en formación y en forma vertical cada uno de los talleres. Podemos evidenciar que los significados de la demostración se fueron ampliando, es decir, los que encontramos en los últimos talleres no son los únicos, sino que se conservan muchas ideas y significados de los anteriores surgiendo nuevas ideas que clasificamos en las categorías.

- En el caso de Estefany, siempre estuvo abierta a nuevas consideraciones y posturas tanto de sus compañeros como de autores citados en la teoría acerca de ver la demostración matemática en el aula. Desde el inicio de la comunidad de práctica, Estefany consideraba que pueden existir diferentes tipos de la demostración que se pueden presentar en los estudiantes y que incluso ella misma aplicaba en sus cursos de la universidad; Ella fue una de las profesoras en formación cuya participación dentro de la comunidad fue plena, de las que más aportaba en las discusiones del grupo.
- En el caso de David, su participación no fue plena en todas las sesiones de clase, sin embargo, iba mejorando en su manera de expresar ideas a medida que avanzaba el curso. Siempre se mostró receptivo y desde el principio tuvo una inclinación hacia el significado de la demostración como un contenido y como aquella que presenta generalidad. Al final del curso, sus argumentos mostraron que el interés aumentó por enseñar en un futuro la demostración en el aula desde diferentes posturas, atendiendo a la pluralidad de respuestas que pueden tener los estudiantes y en las que se puede reforzar.
- En el caso de Carolina, los significados de la demostración que mostró desde el inicio en el ensayo acerca de sus experiencias en cálculo, fueron varios como verificación, comunicación y sistematización, pero como se fue evidenciado en los siguientes talleres su significado predominante era que la demostración es un medio de comunicación en lenguaje algebraico y esto se evidenció en sus respuestas a los talleres, sin embargo, en las planeaciones de clase empezó a negociar otros significados de manera que amplió su visión acerca de la misma.

- En el caso de Nicolás, su participación siempre fue plena, en cada sesión expresó sus dudas y posturas claramente acerca del papel de la demostración en el aula lo que permitió conocer acerca de sus significados de la demostración. Aunque en las experiencias de los cursos de cálculo en la universidad no tuvo acercamiento a la demostración, en los demás talleres fue un profesor que mantuvo una postura en que es aquella que presenta generalidad y es un medio de comunicación en lenguaje algebraico, esto estuvo influenciado por lo que sus profesores le enseñaron que debía ser. Sin embargo, sin perder estos significados, en las planeaciones de clase por la interacción con sus compañeros de la comunidad amplió sus posturas en considerar otras formas de demostrar y llevarla al aula.

Tabla 2.

Significados negociados de la demostración en cada taller por los profesores en formación

	PROFESOR EN FORMACIÓN			
TALLER	**Estefany**	**David**	**Carolina**	**Nicolás**
Experiencias	La demostración como medio de verificación	La demostración como contenido	La demostración como medio de sistematización	
		La demostración como medio de verificación	La demostración como medio de verificación	
		La demostración como medio de comprensión	La demostración como medio de comunicación	
Diagnóstico	La demostración presenta generalidad	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico
	La demostración como medio de explicación			
Variación	La demostración presenta generalidad	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico
Funciones	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico
	La demostración como medio de comprensión	La demostración presenta generalidad		La demostración como medio de explicación
Límites	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico	La demostración presenta generalidad	La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico
	La demostración como medio de explicación		La demostración como medio de comprensión	
	La demostración como medio de descubrimiento			
Derivadas e Integrales	La demostración como medio de descubrimiento	La demostración como medio de descubrimiento	La demostración como medio de descubrimiento	La demostración como medio de descubrimiento
	La demostración presenta generalidad	La demostración presenta generalidad	La demostración presenta generalidad	La demostración presenta generalidad
	La demostración como medio de comprensión	La demostración como medio de comprensión	La demostración como medio de comprensión	La demostración como medio de comprensión

6.2 Caracterización de los significados de la demostración negociados en la comunidad de práctica de clase

La caracterización de los significados de la demostración negociados en la comunidad de práctica de clase se hizo mediante las ideas que surgieron en cada uno de los talleres aplicados, teniendo en consideración que algunos de estos significados estuvieron presentes en más de un taller.

6.2.1 La demostración como medio de verificación. El significado de la demostración vista como verificación surgió cuando los profesores en formación sostuvieron que la demostración es un medio para conocer que una determinada proposición se cumple, ya sea en uno o varios casos y con eso se alcanza un grado de convicción de que se cumple en general. Por ello, este significado influye en establecer la verdad de una afirmación.

Tener la convicción de validez que una conjetura es verdadera es un prerrequisito para la búsqueda de la demostración, pues para alcanzar la convicción, se busca que la proposición se cumpla en muchos casos e incluso se intentan construir contraejemplos al mismo tiempo, ya que estos pueden sacar a la luz contradicciones, errores o supuestos no explícitos (De Villiers, 1993).

6.2.2 La demostración como medio de explicación. El significado de la demostración vista como un medio de explicación se dio cuando los profesores en formación no se quedaban con ver o proporcionar una respuesta con apariencia de tener formalidad o de verificar la propiedad en algún caso, sino también en conocer porqué se cumple la propiedad; que el lector comprenda la misma al leerla detalladamente.

Este significado proporciona información sobre por qué un argumento es cierto. En este sentido Bell (1976) y De Villiers (1993) indican que, no solamente es adquirir un grado de confianza en validar una conjetura, es más que eso, en una demostración se espera que proporcione el porqué de esa verdad. Para Hanna (2000) la función adicional más importante de la demostración es la de la explicación; la mejor demostración, es una que no solo establece la verdad de un teorema sino que también ayuda a entenderlo, esto produce que la demostración se haga más persuasiva y, por lo tanto, más probable de ser aceptada.

6.2.3 La demostración como medio de sistematización. El significado de la demostración visto como medio de sistematización surgió entre los participantes de la comunidad cuando ellos mencionaron la necesidad que hay en que la demostración debe ser muy bien organizada, donde se utilicen adecuadamente los conectores lógicos entre proposiciones que son verdaderas, esto con el fin de dar forma para ser leída por la comunidad matemática. Organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Entre las funciones de la sistematización como señala De Villiers (1993) está: “verifica y simplifica las teorías matemáticas, integrando conceptos, afirmaciones y teoremas entre sí, consiguiendo una presentación económica de los resultados”. En este significado, lo principal es la organización lógica de los enunciados que se saben que son verdaderos.

6.2.4 La demostración como medio de descubrimiento. El significado de la demostración vista como un medio de descubrimiento surgió en la comunidad como una necesidad para resaltar que es importante cuando se involucra en el aula de clase al estudiante en la construcción de las demostraciones; utilizar propiedades vistas para que junto con el profesor se lleguen a nuevos resultados para luego formalizarlos, algunos profesores en formación la asociaron como una forma a seguir.

Como señala Pedemonte (2008), entre otros, la demostración es más "accesible" para los estudiantes si se desarrolla una actividad argumentativa para la construcción de una conjetura. Cuando la enseñanza de la demostración se basa principalmente en el aprendizaje "reproductivo", es decir, cuando las demostraciones se les presentan a los estudiantes ya finalizadas sin involucrarlos en su construcción, parece fracasar. Por el contrario, cuando se presentan problemas abiertos a los estudiantes en los que se requiere una conjetura, parecen ser extremadamente eficaces para introducir el aprendizaje de la demostración, porque la actividad argumentativa parece favorecer la construcción de una demostración.

6.2.5 La demostración como medio de comunicación. El significado de la demostración vista como medio de comunicación recae en la importancia que señalan los profesores en formación de la investigación, que la demostración debe ser una forma de comunicar teoría matemática entre la comunidad matemática y especialmente en el aula de clase desde niveles primarios de la educación. Este significado tiene como objetivo transmitir el conocimiento matemático; como señala De Villiers (1993) se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos. Es una manera de informar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos.

6.2.6 La demostración como contenido. El significado de la demostración vista como contenido se evidenció en las posturas de algunos profesores en formación que negociaron en sus trayectorias académicas.

Este significado implica otra forma de tener en cuenta los significados, puesto que independientemente del tipo de demostración que se realice, ésta es vista como un contenido que se tiene que abordar en la clase de matemáticas, en otras palabras, es ver la demostración como un tema que se incluye en el currículo de los programas educativos.

6.2.7 La demostración como medio de comprensión. El significado de la demostración vista como una manera de adquirir comprensión acerca de una proposición matemática, se refiere a que esta es una manera en la que los estudiantes cuando tienen acceso a la demostración, esta les proporciona un buen grado de aceptación porque es entendible y confiable de asimilar.

Como señala Healy y Hoyles (2000), en el aula de clase los estudiantes prefieren argumentos narrativos, diagramas o ejemplos, pues están más cerca de su propia manera de justificar de acuerdo a su competencia matemática. A menudo, hay demostraciones que no convencen a los estudiantes, en ocasiones por el grado de abstracción o por la forma de mostrarla, por ello, en ocasiones tienen que hacer comprobaciones empíricas para comprenderlas.

6.2.8 La demostración presenta generalidad. El significado de la demostración como aquella en la que se presenta generalidad se pudo ver en los momentos en los que los profesores en formación expresaron que la demostración es aquella en la que hay generalidad; no es tan relevante en este caso la forma de la demostración.

Puede ser de tipo retórico, verbal, algebraico, gráfico, o mezcla entre ellas, las justificaciones que se hacen deben mostrar generalidad, que no se quede solamente en uno o algunos casos, sino que se pueda ver que la proposición se cumple en general para cualquier caso que se quiera tomar.

6.2.9 La demostración como medio de comunicación en lenguaje algebraico. El significado de la demostración vista como comunicación en lenguaje algebraico, surgió entre los participantes de la comunidad de práctica de clase, cuando las demostraciones de los demás son aceptadas cuando presentan como principal lenguaje el álgebra, incluso también cuando en la producción de sus demostraciones esta es la forma de comunicarlas;

De acuerdo con Pedemonte (2008), la demostración rigurosa es generalmente considerada como una secuencia de fórmulas dentro de un sistema dado, cada fórmula es un axioma o derivable de una fórmula anterior por una regla del sistema; la demostración algebraica aparece como una estructura gramatical constituida por una secuencia de fórmulas conectadas por reglas de cálculo. En esta forma de demostración influye totalmente el álgebra. Se resta importancia al uso de otro lenguaje como el gráfico, retórico o uso de ejemplos.

6.3 Perspectivas de Investigación.

Los resultados de esta investigación nos informan que los significados de la demostración que presentan la mayoría de profesores en formación, se ubican dentro de una perspectiva estrictamente formalista, para ellos las demostraciones que se lleven en el aula deben ser de tipo formal deductivo, aunque esto fue cambiando un poco o mucho en algunos de ellos, pues sus reflexiones apuntaron en que en su práctica ya profesional, se debería dar mayor protagonismo a los estudiantes en el aula, para que ellos puedan ir construyendo su conocimiento matemático y comprendan las proposiciones y teoremas.

Reconocemos que en nuestra investigación, por la cuestiones de tiempo hicieron falta más o mejores espacios para que los profesores en formación llevaran a cabo sus ideas propuestas en los talleres con estudiantes a su cargo, esto proporcionaría más información para evidenciar la apropiación de los profesores en formación de los significados que cada uno de ellos estaba negociando.

Es importante resaltar, que así como se hizo en la presente investigación, sería interesante seguir construyendo espacios de reflexión dentro de los programas de formación de profesores de matemáticas, en el que se atienda los aspectos formales y no tan formales acerca de la demostración matemática lo que posibilitará la discusión acerca de la práctica de la enseñanza y su motivación a mejorar; de esta manera se estaría atendiendo en considerar la demostración como un proceso desde un sentido amplio y que se incluya desde edades tempranas y no solamente al ingresar a la universidad. Así mismo, resulta interesante conocer acerca del aprendizaje de la demostración de los estudiantes a los cuales los profesores en formación planean hacer sus clases.

Referencias bibliográficas

Arnal, A., y Oller, A. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 135-157.

Balacheff, N. (1988). *Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics*. En D. Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics, 4*(1), 23−40.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Clark, P. (2005). *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course* (Tesis doctoral). Department of Philosophy, Arizona State University.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17* (1), 39-44. México.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"* (26), 15−30.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33*(3), 1−8.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249 - 264). Rotterdam: Sense Publishers.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista científica, 20*, 56-71.

Fiallo, J., y Gutiérrez, A. (2017) Analysis of the cognitive or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics* 96 (2), 145-167.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. A. (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 45–51). Paris: IGPME.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21(1)*, 6 - 13.

Hanna, G., y Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877 –908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5 - 23.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III (Vol. 7, pp. 234 - 283)*. Providence, EEUU: American Mahematical Society.

Hernández, E. (2017). *Significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial para ingeniería* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia, Antioquia, Colombia.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación acción*. Laertes. Barcelona.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University Press.

Llinares, S. (2000). *Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas*. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), Educaçao matemática em Portugal, España e Italia (pp. 109-132). Lisboa: SEM-SPCE.

López, E. (2017). *Procesos de argumentación y de demostración de estudiantes en curso de precálculo* (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

Marrades, R., Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87 - 125.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. (Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques, 25*(3), 313-348.

Pfeiffer, K. (2011). Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: observations from proof validation and evaluation performances. *Tesis doctoral*. Galway, Irlanda: National University of Ireland.

Shulman, S. (1987). *Knowledgw and teaching: foundations of the new reforms*. Harvard Educactional Review, 57(1), 1-22.

Wenger, E. (1998). *Comminities of practice. Learning, meaming and identity*. Cambridge, Cambridge University.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona, Paidós. Traducción de Genis Sánchez Barberán.

Wenger, E., McDermott, R. A., & Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge.* Cambridge, Massachusetts: Harvard Business Press.