

ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES ADQUIRIDAS POR UNA
ARQUITECTURA DE ÚNICO PÍXEL BASADO EN GRADIENTE DESCENDIENTE

DEYBY STEVENSON BONZA MARQUEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
2019

ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES ADQUIRIDAS POR UNA
ARQUITECTURA DE ÚNICO PÍXEL BASADO EN GRADIENTE DESCENDIENTE

DEYBY STEVENSON BONZA MARQUEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero de Sistemas

Director

YURI HERCILIA MEJÍA MELGAREJO
Doctorado en Ingeniería Informática y Automática

Codirector:

HENRY ARGUELLO FUENTES
Ph.D en Ingeniería Eléctrica y Computación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA

2019

DEDICATORIA

Dedico este libro a mi familia y a las personas allegadas

A mi familia, por brindarme el apoyo durante toda mi vida, pero especialmente en la carrera universitaria.

A mi madre, por los consejos valiosos que me daba desde pequeño, por los valores y principios con los que me crío. A mi padre, al igual que mi mamá por la educación que me brindó y la oportunidad de estudiar una carrera profesional.

A mi hermana, que hizo parte de la compañía estos últimos años y que me veo motivado a darle un buen ejemplo para que siga los caminos de la educación y tome algunos hábitos de estudio a lo largo de su vida.

A mis amigos, compañeros de la carrera que siempre fueron unos grandes motivadores en los momentos más necesitados.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mi mamá, Mireya Marquez, y mi papá, Jorge Bonza, por todo el apoyo incondicional que me han brindado desde el momento que nací, gracias a ellos he alcanzado muchos logros que me llenan y me hacen feliz. Uno de ellos es culminar la etapa de estudio universitario con una carrera profesional. Desde pequeño siempre crecí con muchas aspiraciones y deseos, las cuales se han venido cumpliendo por la motivación que ellos dos me dan ya que siempre recibo como respuesta un SÍ a los nuevos propósitos que me planteo en la vida. Agradezco también a mi hermana que es una de las personas más cercanas, que también a lo largo de mi vida me ha apoyado en muchas cosas positivas que han traído cosas buenas a mi vida. Ella siempre está dispuesta a escuchar mis historias y mis consejos para aplicarlos en su vida.

Agradezco a mis compañeros de carrera que ahora son mis amigos, a lo largo de la carrera se ha creado un vínculo de amistad gracias a compartir diferentes materias de la carrera que dan la oportunidad de conocer nuevas personas y aprender de ellos. Cada persona que uno conoce en la vida siempre le va aportar algo que aprender ya sea positivo o negativo. Agradezco al grupo de investigación HDSP que me ha brindado el acompañamiento durante todo este tiempo, que me ha enseñado el hábito de estudiar y la disciplina necesaria para llevarlo a cabo, además que cuenta con excelentes lugares de estudio que motivan a seguir adelante con cada proyecto que se plantea.

Agradezco a mi tutora, Yuri Mejía, por todo el conocimiento que ha compartido conmigo, las técnicas de estudio, metodologías de trabajo y además la paciencia que ha tenido durante este tiempo. Además, considero que es una persona que admiro como persona y como profesional.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. OBJETIVOS	15
2. MARCO TEÓRICO	16
2.1. TEORÍA DE MUESTREO COMPRESIVO	16
2.1.1. Modelo matemático de adquisición compresiva	16
2.1.2. Escasez	17
2.1.3. Incoherencia de muestreo	17
2.2. IMÁGENES DE ÚNICO PÍXEL	18
2.3. MATRIZ DE MUESTREO (PATRONES DE ILUMINACIÓN)	20
2.3.1. Aleatoria	20
2.3.2. Matriz de muestreo basada en matrices Hadamard	20
2.3.3. Diccionarios de Imágenes	22
2.4. SUAVIDAD DE IMÁGENES	23
2.5. FILTRADO ESPACIAL	24
2.5.1. Filtro paso bajo Gaussiano	26
3. METODOLOGÍA	27
3.1. PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO	27
4. MATERIALES Y MÉTODOS	30
4.1. ENFOQUE DE FILTRADO EN LA RECONSTRUCCIÓN	30
4.2. ALGORITMO PROPUESTO	31
4.3. CONJUNTO DE DATOS SINTÉTICOS	32

4.4. ADQUISICIÓN DE LA SEÑAL CON ARQUITECTURA DE IMÁGENES DE ÚNICO PÍXEL.	33
4.5. MÉTRICAS DE RENDIMIENTO	34
4.5.1. Error Cuadrático Medio (MSE)	34
4.5.2. Proporción Máxima de Señal a Ruido (PSNR)	35
5. SIMULACIONES Y RESULTADOS	36
5.1. RESULTADOS NUMÉRICOS	36
5.1.1. Cálculo de la discrepancia para las imágenes	36
5.1.2. Reconstrucción de las imágenes	36
5.1.3. Resultados con matriz de muestreo Hadamard	38
5.2. RESULTADOS VISUALES	39
5.3. ANÁLISIS DE LAS MÉTRICAS DE CALIDAD	42
5.3.1. Resultados de PSNR	42
5.3.2. Resultados de MSE	44
6. CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFÍA	48

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Adquisición de la señal con tecnología de único píxel:	20
Figura 2. Una vecindad de 3×3 sobre un punto (i, j) en una imagen:	25
Figura 3. Imágenes utilizadas en las pruebas las simulaciones. (Superior) Imágenes originales. (Inferior) Imágenes después de eliminar coeficientes y reconstruirlas (escasas).	33
Figura 4. Adquisición de la señal con tecnología de único píxel, sistema activo con fuente de luz incluida.	34
Figura 5. Resultados de la reconstrucción en términos de PSNR y MSE para las imágenes: el Ratón, la Te y la estrella. Alternando la matriz de muestreo aleatoria y Hadamard. Usando el enfoque de filtros y sin filtro.	40
Figura 6. Resultados de la reconstrucción en términos de PSNR y MSE para las imágenes: el Rostro y la Casa. Alternando la matriz de muestreo aleatoria y Hadamard. Usando el enfoque de filtros y sin filtro.	41
Figura 7. Resultados de reconstrucción ed PSNR para matriz de muestreo aleatoria.	43
Figura 8. Resultados de reconstrucción en PSNR para matriz de muestreo Hadamard.	44
Figura 9. Resultados de reconstrucción en MSE para matriz de muestreo Aleatoria.	45
Figura 10. Resultados de reconstrucción en MSE para matriz de muestreo Hadamard.	46

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Valores de discrepancia local y discrepancia global para las imágenes originales y las imágenes escasas.	36
Tabla 2. Resultados en términos de PSNR [dB] para matriz de muestreo aleatoria.	37
Tabla 3. Resultados en términos de MSE para matriz de muestreo aleatoria.	38
Tabla 4. Resultados en términos de PSNR para matriz de muestreo Hadamard.	38
Tabla 5. Resultados en términos de MSE para matriz de muestreo Hadamard.	39

RESUMEN

TÍTULO: ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES ADQUIRIDAS POR UNA ARQUITECTURA DE ÚNICO PÍXEL BASADO EN GRADIENTE DESCENDIENTE *

AUTOR: DEYBY STEVENSON BONZA MARQUEZ **

PALABRAS CLAVE: MUESTREO COMPRESIVO, IMÁGENES DE ÚNICO PÍXEL, MÉTODO GRADIENTE DESCENDIENTE, FILTRADO ESPACIAL.

DESCRIPCIÓN:

La técnica de muestreo compresivo permite recuperar información de una señal a partir de pocas mediciones, con el supuesto de que la señal es de baja densidad en una base de representación dada. El proceso de medición consiste en obtener combinaciones lineales o proyecciones de dicha señal en este caso en un sistema de medición compresivo de único píxel. Una vez adquirida la señal comprimida, un algoritmo de reconstrucción recupera la señal original.

El enfoque tradicional se basa en resolver un problema de optimización convexa sin restricciones que consiste en la minimización de una función objetivo que incluye un término de fidelidad y un término que promueve la reconstrucción de señales de baja densidad. La restricción más explotada para la reconstrucción es la baja densidad de las imágenes en ciertas bases, sin embargo, las imágenes cumplen otras características como la suavidad, es decir, las imágenes naturales no presentan fuertes cambios de intensidad en las vecindades espaciales. Incluir este tipo de restricciones al problema de reconstrucción original conlleva a obtener imágenes de alta calidad.

En este proyecto se implementa un algoritmo basado en gradiente descendiente que incluye un paso de filtrado espacial para promover la suavidad en la imagen reconstruida. La inclusión de este filtro mejora los resultados de reconstrucción en hasta 10.14 dB en PSNR.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías de Sistemas. Director: Yuri Mejía, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

ABSTRACT

TITLE: RECONSTRUCTION ALGORITHM FOR ACQUIRED IMAGE BY SINGLE PIXEL ARCHITECTURE BASED ON DESCENT GRADIENT. *

AUTHOR: DEYBY STEVENSON BONZA MARQUEZ **

KEYWORDS: COMPRESSIVE SENSING, SINGLE PIXEL IMAGING, GRADIENT METHOD, SPATIAL FILTERING.

DESCRIPTION:

Compressive sampling technique allows to recover signal information from a few measurements, with the assumption that the signal has low density in a given representation base. The measurements process consists of obtaining linear combinations or projections of a target signal in this case a single-pixel compressive measurement system. Once the compressed signal is acquired, a reconstruction algorithm recovers the original signal.

The traditional approach is based on solving an unrestricted convex optimization problem that consists in minimizing an objective function that includes a fidelity term and a term that promotes the reconstruction of low density signals. The most exploited restriction for reconstruction is the low density of images in certain bases, however, the images fulfill other characteristics such as smoothness, that is, natural images do not show strong changes of intensity in spatial neighborhoods. Including this type of restrictions on the original reconstruction problem leads to obtaining high quality images.

In this project, an algorithm based on a descendant gradient is implemented that includes a spatial filtering step to promote smoothness in the reconstructed image. The inclusion of this filter improves the reconstruction results by up to 10.14 dB in PSNR.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas. Director: Yuri Mejía, Doctorado en Ingeniería Informática y Automática.

INTRODUCCIÓN

Un sistema de único píxel es una nueva técnica de adquisición de imágenes 2D con un fotodiodo en lugar de un arreglo de sensores 2D convencional, esta tecnología usa un modulador de luz (matriz de muestreo) como un difusor o un modulador de luz espacial programable para manipular la luz. La luz correlacionada es finalmente recogida por un fotodiodo (medidas)¹.

La estructura de los patrones de modulación que se implementan influyen en la reconstrucción de la escena en este trabajo se usan dos métodos para obtener las muestras, una es partir de patrones aleatorios y la otra es la implementación de una matriz usando la técnica basada en transformadas de Hadamard ².

La escena puede ser reconstruida a partir de los patrones de modulación y las medidas correlacionadas correspondientes a la arquitectura de único píxel, implementando un algoritmo de reconstrucción. En este trabajo se usa un algoritmo basado en gradiente descendiente que se categoriza como un algoritmo iterativo lineal para encontrar una aproximación de la imagen original tomando pasos a lo largo del gradiente negativo de la función a optimizar ³.

Las imágenes naturales son suaves, es decir, sus píxeles tienen valores cercanos

¹ B. LIHENG y col. "Experimental comparison of single-pixel imaging algorithms". En: *Journal of the Optical Society of America A* 35.1 (2018), pág. 78.

² YAAKOV TSAIG y DAVID L. DONOHO. "Extensions of compressed sensing". En: *Signal Processing* 86.3 (2006), págs. 549-571.

³ YURI MEJIA y HENRY ARGUELLO. "Filtered gradient reconstruction algorithm for compressive spectral imaging". En: *Optical Engineering* 56.4 (2016), pág. 041306.

en ciertos vecindarios. Esta propiedad de suavidad puede explotarse en el proceso iterativo de reconstrucción. En este trabajo se propone incluir un paso de filtrado espacial para mejorar la reconstrucción en una arquitectura de único pixel.

Se usaron cinco tipos de imágenes las cuales cuentan con diferentes características físicas como la resolución y propiedades de suavidad. Se puede concluir que para todas las imágenes utilizadas es favorable el algoritmo con filtrado, puesto que presentan un resultado de hasta 10.14dB de PSNR mejor en comparación con el enfoque tradicional del gradiente (Sin Filtro).

Las imágenes naturales, o sea suaves cuentan con un propiedad muy valiosa que permiten una reconstrucción más aproximada a la imagen original, los experimentos se llevaron a cabo con un 25 % de las medidas, un 90 % de escasos.

1. OBJETIVOS

Objetivo general

- Diseñar un algoritmo de reconstrucción de imágenes adquiridas por una arquitectura de único píxel basado en la técnica de gradiente descendiente incluyendo restricciones de filtrado espacial que mejoran la calidad de los resultados en un menor número de iteraciones.

Objetivos específicos

- Seleccionar filtros espaciales que promuevan la uniformidad en las imágenes naturales;
- Diseñar un algoritmo de reconstrucción de imágenes adquiridas por una arquitectura de único píxel basado en la técnica de gradiente descendiente incluyendo restricciones de filtrado espacial;
- Implementar los algoritmos de adquisición de imágenes con una arquitectura de único píxel y de reconstrucción basado en la técnica de gradiente descendiente incluyendo restricciones de filtrado espacial;
- Comparar el algoritmo planteado en la investigación con un algoritmo estándar analizando el tiempo de ejecución y la calidad de las reconstrucciones.

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo presenta un enfoque para obtener la reconstrucción de una imagen a partir de los patrones de iluminación y las medidas comprimidas de diferentes imágenes. Por lo tanto, este capítulo describe algunos conceptos generales como: muestreo compresivo, imágenes de único píxel, matrices de muestreo y propiedades de suavidad en las imágenes.

2.1. TEORÍA DE MUESTREO COMPRESIVO

La técnica de muestreo compresivo permite recuperar información de una señal a partir de pocas mediciones, con el supuesto de que la señal es de baja densidad en una base de representación dada. Adicionalmente, el proceso de medición consiste en obtener combinaciones lineales o proyecciones de dicha señal en un sistema de medición específico.

2.1.1. Modelo matemático de adquisición compresiva El muestreo compresivo tiene como objetivo principal medir y comprimir una señal en un único proceso, por tanto, este procedimiento requiere un número de muestras mucho menor al dictado por el criterio de Nyquist que dice que la frecuencia de muestreo de una señal analógica debe ser dos veces la frecuencia máxima de la señal para garantizar su reconstrucción ⁴.

El proceso de medición de la imagen consiste en representar una señal a partir de una combinación lineal de pocas señales elementales extraídas de una colección

⁴ UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA. FACULTAD DE INGENIERÍA. CENTRO DE ESTUDIOS Y EDUCACIÓN CONTÍNUA. *Revista FI-UPTC : publicación del Centro de Estudios y Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, CEDEC.* Vol. vol. num.

fija como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ son las medidas adquiridas, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ es la representación vectorial de una imagen de entrada y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ es la matriz de muestreo con $M \ll N$.

2.1.2. Escasez Una imagen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ se dice que es S -sparse si esta puede ser bien aproximada usando únicamente $S \ll N$ coeficientes en alguna transformada lineal $\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\theta}$, donde Ψ es la base de representación y $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de coeficientes de transformación que tiene a lo sumo S entradas diferentes de cero. Entonces, el problema de muestreo compresivo puede verse como recuperar una señal \mathbf{x} dado el vector de medidas $\mathbf{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$, donde $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ es conocida como la matriz de muestreo compresivo y $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ es la matriz que representa a la arquitectura de muestreo.

El concepto de representación escasa se refiere a la característica de la señal $\boldsymbol{\theta}$ en la que la mayoría de sus coeficientes son cercanos a cero y solo unos pocos son relativamente grandes que poseen toda la información. Por lo tanto, cuando una señal es escasa se pueden descartar sus coeficientes despreciables sin mucha pérdida perceptual. El principio de escasez actúa como una medida para determinar qué tan eficientemente se pueden adquirir señales no adaptativas, ya que las señales con alta escasez pueden ser adquiridas con un número pequeño de medidas.

2.1.3. Incoherencia de muestreo Dado un par de ortobases $(\Phi, \Psi) \in \mathbb{R}^{N \times N}$. La primera base Φ es usada para el muestreo de un objeto \mathbf{x} y la segunda es usada representar el mismo objeto \mathbf{x} . La coherencia entre la base de muestreo Φ y la base

de representación Ψ está dada por:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \text{máx}(|\Phi\Psi|) \quad (2)$$

donde $\text{máx}(\cdot)$ retorna el valor máximo en su argumento y $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{N}]$. La coherencia mide la mayor correlación entre cualquier par de elementos de Φ y Ψ . Si este par de bases contiene elementos correlacionados su valor de coherencia será grande, de otro modo su valor será pequeño satisfaciendo las restricciones de CS ya que entre mayor sea el valor de incoherencia menor serán las medidas necesarias para capturar la señal x ⁵.

2.2. IMÁGENES DE ÚNICO PÍXEL

Un prototipo de una cámara de único píxel fue presentado por Baraniuk *et al.* ⁶⁷ de la universidad de RICE usando matrices aleatorias binarias de 0/1 para Φ . En lugar de grabar píxeles de la escena que se está viendo, las cámaras de único píxel detectan directamente la información geométrica y estructural mediante la recopilación de proyecciones aleatorias utilizando un arreglo de microespejos digitales, el cual requiere sólo un sensor fotosensible en lugar de millones.

Este píxel en realidad es una proyección comprimida de información de multipíxeles. Esto significa que el paso de compresión se ha cortado porque la compresión se realiza mediante imágenes ópticas en sí, lo que es útil para reducir la adquisición

⁵ DAVID CASASENT y DEMETRI PSALTIS. "Position, rotation, and scale invariant optical correlation". En: *Applied Optics* 15.7 (1976), pág. 1795.

⁶ RICHARD BARANIUK. "Compressive Sensing [Lecture Notes]". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 24.4 (2007), págs. 118-121.

⁷ M.F. DUARTE y col. "Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling". En: *undefined* vol.num (2008).

de datos, la energía y el espacio de almacenamiento. Además, se necesitan menos detectores de luz en las cámaras de único píxel, lo que ahorra el costo de detectores. También puede funcionar más fácil con poca luz y fuera del espectro de luz visible, por lo que es potencial para la visión nocturna y la imagen infrarroja. La cámara de un solo píxel es básicamente una computadora óptica que comprende dos lentes, un detector de fotón único, un convertidor de analógico a digital y un dispositivo digital de micro-espejo (DMD). Un esquema óptico primario de la cámara de un solo píxel se puede encontrar en ⁷.

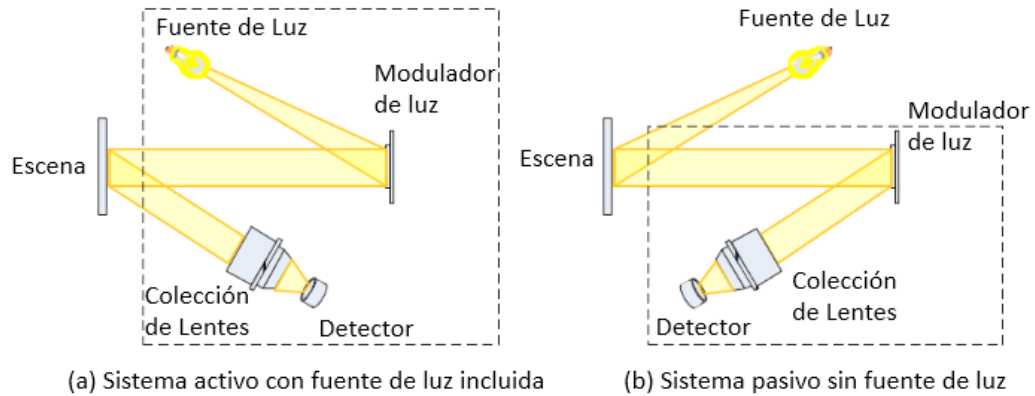
En una interpretación matemática, primero se vectoriza la imagen 2-D en una señal 1-D $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N\}$ y se ensambla la matriz 2-D Φ usando un vector $\Phi_m = \{\Phi_{m,1}, \dots, \Phi_{m,i}, \dots, \Phi_{m,N}\}$ ($m = 1, \dots, M$) en cada fila donde $M \ll N$.

El campo de la luz reflejada es direccionado en el único fotodiodo por lentes para obtener las correspondientes medidas $\mathbf{y}_m = \sum_{i=1}^N \Phi_{m,i} \mathbf{x}_i$. Se repite M veces usando diferentes Φ_m para obtener todas las medidas ⁸.

La figura 1 ilustra las dos formas de adquisición de la señal implementando la tecnología de único píxel. La figura 1(a) corresponde al sistema activo de imágenes de único píxel con la fuente de luz incluida: El modulador de luz está ubicado entre la fuente de luz activa y la escena. La figura 1(b) corresponde al sistema pasivo sin fuente de luz: El modulador de luz está ubicado entre la escena y el módulo de detección, esta configuración no necesita de una fuente de luz activa incluida.

⁸ JIANWEI MA. "Single-Pixel Remote Sensing". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 6.2 (2009), págs. 199-203.

Figura 1. Adquisición de la señal con tecnología de único píxel:



2.3. MATRIZ DE MUESTREO (PATRONES DE ILUMINACIÓN)

2.3.1. Aleatoria Uno de los primeros prototipos de cámaras de imágenes de único píxel fue presentada por Baraniuk de la Universidad de Rice usando matrices binarias Φ aleatorias con entradas $\{0, 1\}$ ⁶⁷. La construcción de la matriz de muestreo consiste en generar M vectores aleatorios $\Phi_m = \{\Phi_{m,1}, \dots, \Phi_{m,N}\}$ ($m = 1, \dots, M$) en cada fila dónde $M \ll N$ para generar la matriz de muestreo $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

Una propiedad que es importante definir es la cantidad de luz que permite pasar la matriz de muestreo. Esta propiedad se conoce como la transmitancia, se puede definir como el porcentaje de luz que pasa a través del sistema óptico, tal que, por ejemplo, una transmitancia del 10 % permitirá pasar sólo el 10 % de la luz. En términos matemáticos una transmitancia del 10 % hará que $0.1N$ elementos aleatoriamente seleccionados sean 1 en cada fila de Φ .

2.3.2. Matriz de muestreo basada en matrices Hadamard

Propiedades de la matriz Hadamard Una matriz Hadamard es una matriz \mathbf{H} de $n \times n$ con entradas ± 1 que satisface $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = n\mathbf{I}$. El nombre es derivado de los siguientes teoremas de Hadamard ⁹.

Teorema 1 Sea $\mathbf{X} = (x_{ij})$ una matriz real $n \times n$ donde sus entradas satisfacen $|x_{ij}| \leq 1$ para todo i, j . Entonces $|\det(\mathbf{X})| \leq n^{n/2}$. La igualdad se mantiene si y sólo si \mathbf{X} es una matriz Hadamard.

Teorema 2 Si una matriz Hadamard de orden n existe, entonces $n = 1$ o 2 o $n \equiv (\text{mod } 4)$.

Implementación En este caso, se construye una matriz de muestreo con el propósito de recuperar una señal escasa a partir de una cantidad mínima de medidas usando la técnica basada en la transformada de Hadamard. Para esto, se forma una matriz cuadrada $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a partir de la permutación aleatoria por filas de una matriz Hadamard del mismo tamaño. Dado un M_t , se forma la correspondiente $M_t \times N$ matriz Φ_t tal que

$$\Phi_t = \sqrt{\frac{N}{M_t}} \Phi_{1:M_t}, \quad (3)$$

donde $\Phi_{1:M_t}$ denota la submatriz de Φ correspondiente a las primeras M_t filas. El factor de escala asegura que las columnas de Φ_t tenga norma unitaria. Note que las cámaras de único píxel pueden implementar Φ_t simplemente deteniendo el proceso de medición especificado por Φ antes de las primeras M_t medidas sean obtenidas.

⁹ QUEEN MARY y UNIVERSITY OF LONDON. *Hadamard matrices*, <http://www.maths.qmul.ac.uk/~Isocher/designtheory.org/library/encyc/topics/had.pdf>.

2.3.3. Diccionarios de Imágenes En este caso, se recolecta un número de imágenes ejemplares (imágenes de entrenamiento) para formar un diccionario de imágenes para un escenario específico. Después, los patrones de iluminación óptimos son diseñados con base a las características comunes extraídas a partir del diccionario de imágenes y puede ser aplicado a cualquier imagen similar. Sea M la cantidad de imágenes de entrenamiento y cada imagen es representada en un vector fila de tamaño N . Una matriz 2-D A de tamaño $M \times N$ puede ser construida a partir de todas las imágenes de entrenamiento. El siguiente paso es realizar un análisis de componentes principales (PCA) ¹⁰¹¹.

Utilizando la descomposición de valores propios, la matriz A de entrenamiento puede expresarse como:

$$A = P\Delta Q = WQ \quad (4)$$

donde P es la matriz de vectores propios de AA^T de tamaño $M \times K$, Q es la matriz de vectores propios de $A^T A$ de tamaño K y Δ es la matriz diagonal que contiene los K valores propios más grandes para AA^T y $A^T A$ ($1 \leq K \leq N$). Además, A puede ser representado como una multiplicación de una matriz de coeficientes de pesos W de tamaño $M \times K$ y una matriz de patrones bases Q .

La construcción de la matriz Φ consiste en encontrar Q que contiene los valores más representativos de la matriz A , y a partir de esta matriz se puede formar la matriz Φ de tamaño $K \times N$ con la transpuesta de las $k - \text{simas}$ columnas de la matriz Q que

¹⁰ HAO GAO y col. "Robust principal component analysis-based four-dimensional". En: *Physics in Medicine and Biology* 56.11 (2011), págs. 3181-3198.

¹¹ WEN-KAI YU y col. "Adaptive compressive ghost imaging based on wavelet trees". En: *Optics Express* 22.6 (2014), pág. 7133.

representan los vectores propios más grandes ¹².

2.4. SUAVIDAD DE IMÁGENES

Las imágenes naturales son suaves en su dominio espacial. Esta propiedad se percibe en la característica de que los píxeles cercanos tienden a tener valores similares, se puede referir a esta propiedad diciendo que imágenes naturales son suaves ¹³, lo que también puede representarse en que las imágenes naturales son una combinación lineal de sus píxeles vecinos, esto es $\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{x}$, donde \mathbf{W} es una matriz de ponderación.

Las principales hipótesis del porqué las imágenes son suaves son:

[1] Nuestro mundo físico tiene la propiedad de que los ambientes son suaves, y las imágenes simplemente reflejan esta realidad física. Las restricciones físicas y tecnológicas de los generadores de imágenes (propiedades de los lentes) tienden a crear imágenes suaves, independientemente de si el ambiente es suave o no.

Uriel Feige ¹³ define una métrica para caracterizar la suavidad en las imágenes, denominada discrepancia. Una imagen $I_{n,m}$ es un arreglo de píxeles 2-D con n filas y m columnas. Un píxel p tiene un valor real $x_p \in [0, 1]$. Numerando los píxeles en $I_{n,m}$ por (i, j) con $0 \leq i < n$ y $0 \leq j < m$, dos píxeles (i_1, j_1) y (i_2, j_2) son adyacentes si $i_1 = i_2$ y $|j_1 - j_2| = 1$, o $j_1 = j_2$ y $|i_1 - i_2| = 1$. Un par de píxeles adyacentes se refiere a un borde en la imagen y un conjunto de bordes en la imagen es denotado por E tal que $|E| = 2nm - n - m$. La discrepancia de dos píxeles p y q es una medida que expresa qué tan diferentes son sus valores. Se consideran dos formas diferentes

¹² SHUMING JIAO. "Design of optimal illumination patterns in single-pixel imaging using image dictionaries". En: vol.num (2018).

¹³ URIEL FEIGE y URIEL. "Why are Images Smooth?" En: vol. vol. num. 2015, págs. 229-236.

para medir la discrepancia, *discrepancia lineal* $D_1(p, q) = |x_p - x_q|$ y *discrepancia cuadrática* $D_2 = (x_p - x_q)^2$.

La discrepancia local LD_1 y discrepancia global GD_1 de una imagen $I_{n,m}$ es la discrepancia promedio de un par de píxeles adyacentes. Se denota por:

$$LD_1 = \frac{1}{|E|} \sum_{(p,q) \in E} |x_p - x_q| \quad y \quad LD_2 = \frac{1}{|E|} \sum_{(p,q) \in E} (x_p - x_q)^2. \quad (5)$$

$$GD_1 = \frac{1}{n^2m^2} \sum_{p \in I; q \in I} |x_p - x_q| \quad y \quad GD_2 = \frac{1}{n^2m^2} \sum_{p \in I; q \in I} (x_p - x_q)^2. \quad (6)$$

Una imagen puede ser suave en varios sentidos diferentes. Una sensación de ser suave es la de tener una discrepancia local baja. Una consecuencia de esta suavidad es que la imagen se puede comprimir: atraviesa todos los píxeles a través de alguna ruta conectada (por ejemplo, fila por fila en forma de serpiente), por cada nuevo píxel que se encuentra se tiene una estimación previa de su valor, basada en el píxel que lo precede. Otra sensación de ser suave es tener una baja discrepancia global. Esta es una noción más fuerte que la baja discrepancia local, debido a la siguiente proposición ¹³.

2.5. FILTRADO ESPACIAL

La mayoría de los métodos de filtrado presentan una noción importante de que cada píxel de la imagen de salida se calcula desde una vecindad local del píxel correspondiente en la imagen de entrada. Una de las operaciones de filtrado utilizadas para mejorar la calidad de las imágenes es la operación de filtrado para suavizar ¹⁴.

Las operaciones de suavizado se utilizan para disminuir los efectos negativos que se pueden presentar en una imagen digital como consecuencia de un sistema de

¹⁴ LINDA G. SHAPIRO y GEORGE C. STOCKMAN. *Computer vision*. Vol. 1. 1. 2001, pág. 580.

muestreo pobre del canal de transmisión, por ejemplo, ruido.

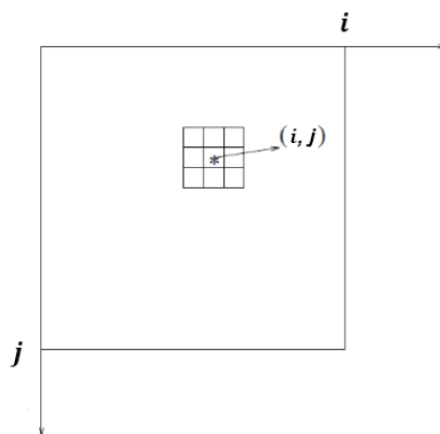
Dada una imagen $I(i, j)$ de tamaño $N \times N$, el valor de la intensidad de gris en la de la imagen suavizada $G(i, j)$ en el punto (i, j) se obtiene promediando los valores de intensidad de grises de los puntos de I contenidos en una cierta vecindad de (i, j) definido por

$$G(i, j) = \frac{1}{C} \sum_{(n,m) \in S} I(n, m), \quad (7)$$

donde $(i, j) = 0, 1, \dots, N - 1$, S es el conjunto de coordenadas de los puntos vecinos a (i, j) , incluyendo el propio (i, j) y C es el número de puntos de vecindad.

Una de las formas de realizar el proceso de suavizado es mediante una matriz bidimensional llamada máscara, la cual se mueve a lo largo de la imagen donde cada valor de la ventana debe ser multiplicado por el valor del píxel de la vecindad de la imagen de entrada. El píxel de salida es un promedio (o algunas veces la suma) de esos valores ¹⁵. La figura 2 muestra el proceso de filtrado que se hace por medio de una máscara la cual se mueve a lo largo de la imagen.

Figura 2. Una vecindad de 3×3 sobre un punto (i, j) en una imagen:



¹⁵ ARIYAN ZAREI. "Improve CAPTCHA's Security Using Gaussian Blur Filter". En: (2014).

2.5.1. Filtro paso bajo Gaussiano Una operación de procesamiento de imágenes que promueve la suavidad es el filtrado espacial con filtro pasa bajas.

Los filtros Gaussianos simulan una distribución Gaussiana bivalente. El valor máximo aparece en el pixel central y disminuye hacia los extremos tanto más rápido cuanto menor sea el parámetro de desviación típica σ . El resultado será un conjunto de valores entre 0 y 1. La máscara de tipo Gaussiano es:

$$h_g = (n_1, n_2) = e^{-(n_1^2 + n_2^2)/(2\sigma^2)}$$
$$h = (n_1, n_2) = \frac{h_g(n_1, n_2)}{\sum_{n_1} \sum_{n_2} h_g} \quad , \quad (8)$$

donde n_1 y n_2 son las dimensiones de la máscara.

3. METODOLOGÍA

3.1. PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO

La reconstrucción de una imagen x a partir de las medidas $y = \Phi x$ puede realizarse a partir de plantear un problema de muestreo compresivo y solucionarlo por optimización convexa. Este problema consiste en minimizar una función objetivo que incluye un término de fidelidad, que estima el error cuadrático entre las medidas y el producto de la matriz de muestreo compresivo y la imagen estimada, y un término de regularización, que induce la escasez. Este problema se puede expresar como:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - A\theta\|_2^2 + \tau \|\theta\|_1, \quad (9)$$

donde θ es la representación escasa de x en una base Ψ , tal que $x = \Psi\theta$, $A = \Phi\Psi$ y τ es el parámetro de regularización que pondera la importancia del término que promueve la escasez ¹⁶¹⁷¹⁸. Cuando la solución a la ecuación (9) es no negativa, siguiendo el planteamiento de Figueredo et al. ¹⁹, el problema se puede reescribir

¹⁶ E.J. CANDÉS, J. ROMBERG y T. TAO. "Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.2 (2006), págs. 489-509.

¹⁷ E.J. CANDÉS y M.B. WAKIN. "An Introduction To Compressive Sampling". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 25.2 (2008), págs. 21-30.

¹⁸ D.L. DONOHO. "Compressed sensing". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.4 (2006), págs. 1289-1306.

¹⁹ M FIGUEIREDO, R NOWAK y S J WRIGHT. "Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems, IEEE J". En: *Sel. Top. Signa* vol.4 (2007), 1pp586-597.

como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} (\tau \mathbf{1}_n - \mathbf{A}^T \mathbf{y})^T \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\theta} \geq 0. \quad (10)$$

donde $\mathbf{1}_n$ es un vector de n unos.

La ecuación (10) se puede ver como un problema cuadrático con restricciones (BCQP, del inglés *Bound Constrained Quadratic Programming Problem*) dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \quad \mathbf{c}^T \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} \equiv \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} F, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\theta} \geq 0, \quad (11)$$

donde $\mathbf{c} = (\tau \mathbf{1}_n - \mathbf{A}^T \mathbf{y})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

En este trabajo se implementó un algoritmo de gradiente descendiente tomando pasos a lo largo del gradiente negativo de la función a optimizar, dado por:

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \nabla F(\boldsymbol{\theta}^{(k)}), \quad (12)$$

donde $\nabla F(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ es el gradiente de la función F , α es el tamaño del paso, $k = 0, 1, \dots$ es la iteración. El gradiente $\nabla F(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ es calculado como:

$$\nabla F(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbf{c} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^{(k)} = \tau \mathbf{1}_n - \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{(k)}), \quad \text{si } \tau \mathbf{1}_n < \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (13)$$

para asegurar que la restricción de la señal es positiva. Ahora reemplazando (13) en (12) teniendo en cuenta que $\mathbf{A} = \Phi \Psi$, la secuencia del gradiente para el problema (11) está dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha (\tau \mathbf{1}_n - \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{(k)})) \\ &= \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \tau \mathbf{1}_n) \\ &= \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \Psi^T (\Phi^T \Phi \Psi \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \Phi^T \mathbf{y}) - \alpha \tau \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Uno de los criterios de parada del método de gradiente descendiente es que la diferencia entre la iteración actual y la anterior se reduzca hasta cierto umbral, esto es $\|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| \leq \delta_1$. La diferencia entre iteraciones $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ está dada por:

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)} = \alpha \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x}_{apro}^{(k)}) \quad (15)$$

donde $\mathbf{x}_{ref} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$ y $\mathbf{x}_{apro}^{(k)} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}^{(k)}$.

La diferencia en (15) llega a su valor mínimo cuando $\mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x}_{apro}^{(k)} = 0$, es decir, cuando $\mathbf{x}_{ref} = \mathbf{x}_{apro}^{(k)}$. Note que una aproximación de tosca de referencia podría ser $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$, en donde se asume que $\boldsymbol{\Phi}^T \cong \boldsymbol{\Phi}^{-1}$. Sin embargo, en un escenario real $\boldsymbol{\Phi}^T$ es una aproximación imprecisa de $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$, por tanto, se podría mejorar la aproximación con otras suposiciones.

4. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1. ENFOQUE DE FILTRADO EN LA RECONSTRUCCIÓN

La restricción más explotada para la reconstrucción es la baja densidad de las imágenes en ciertas bases, sin embargo, las imágenes cumplen otras características como la suavidad, es decir, las imágenes naturales no presentan fuertes cambios de intensidad en las vecindades espaciales. Dado que la operación de convolución de la imagen con una máscara de filtrado espacial es lineal, esta operación puede representarse como el producto matricial entre la imagen a filtrar y una matriz que efectúa la operación de filtrado.

Recordando del capítulo 2, la actualización del gradiente está dada por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \boldsymbol{\Psi}^T (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}) - \alpha \tau \mathbf{1}_n \\ &= \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{x}_{aprox}^{(k)} - \mathbf{x}_{ref}) - \alpha \tau \mathbf{1}_n\end{aligned}\tag{16}$$

como $\mathbf{x}_{ref} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$ se aproxima a la imagen que se está reconstruyendo, pero dada la compresión podría perder sus características de suavidad, y dado que $\mathbf{x}_{aprox}^{(k)} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ es la estimación de la imagen en cada iteración y debería adquirir propiedades de suavidad, el enfoque propuesto se basa en suavizar, a partir de un filtro espacial paso bajo, estos dos términos.

Específicamente, dada una matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que representa la operación de filtrado espacial, ésta se incluiría en el paso iterativo del gradiente como:

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{W} (\mathbf{x}_{aprox}^{(k)} - \mathbf{x}_{ref}) - \alpha \tau \mathbf{1}_n\tag{17}$$

El nuevo criterio de parada incluyendo el enfoque del filtrado se modifica como:

$$\left\| \mathbf{W}\mathbf{x}_{ref} - \mathbf{W}\mathbf{x}_{apro}^{(k)} \right\|_2^2 = \left\| \mathbf{x}_{Wref} - \mathbf{x}_{Wapro}^{(k)} \right\|_2^2 < \delta, \quad (18)$$

donde $\mathbf{W}\mathbf{x}_{ref} = \mathbf{x}_{Wref}$, $\mathbf{W}\mathbf{x}_{apro}^{(k)} = \mathbf{x}_{Wapro}^{(k)}$ y $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz de convolución que representa la operación de filtrado.

4.2. ALGORITMO PROPUESTO

El Algoritmo 1 muestra el enfoque de filtrado en el gradiente para recuperar una imagen desde sus medidas comprimidas de una arquitectura de único píxel. En la línea 2, se calcula la versión filtrada de \mathbf{x}_{ref} . En la línea 7, se hace el filtrado del producto $\mathbf{x}_{\mathbf{W}_{apro}}^{(k)} = \mathbf{W}\Phi^T\Phi\mathbf{x}^{(k)}$ para obtener una versión suave de la reconstrucción en cada iteración. La actualización se realiza en la línea 9, que corresponde a la iteración del gradiente descendiente con el término adicional \mathbf{W} que incluye el paso del filtrado.

Algoritmo 1: Método de Gradiente Descendiente con Filtrado

entrada: $\mathbf{y}, \Phi, \Psi, \mathbf{W}, \tau, \delta, \theta^{(0)}$

salida : $\theta^{(k+1)}$

```

1  $\mathbf{x}_{ref} \leftarrow \Phi^T \mathbf{y};$ 
2  $\%$  (Calcular la  $\mathbf{x}_{ref}$  filtrada)  $\mathbf{x}_{Wref} \leftarrow \mathbf{W}\mathbf{x}_{ref};$ 
3  $k \leftarrow 0;$ 
4  $\mathbf{x}_{\mathbf{W}}^0 \leftarrow 0;$ 
5 while  $\left\| \mathbf{x}_{Wref} - \mathbf{x}_{\mathbf{W}_{apro}}^{(k)} \right\| > \delta$  do
6    $\mathbf{x}^{(k)} \leftarrow \Psi \theta^{(k)};$ 
7    $\%$  (Filtrado  $\mathbf{x}^{(k)}$ )  $\mathbf{x}_{\mathbf{W}_{apro}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{W}\Phi^T\Phi\mathbf{x}^{(k)};$ 
8   Escoger el tamaño del paso  $\alpha_k > 0;$ 
9    $\%$ (Actualizar)  $\theta^{(k+1)} \leftarrow \theta^{(k)} - \alpha^{(k)}(\tau \mathbf{1}_n - \Psi^T(\mathbf{x}_{Wref} - \mathbf{x}_{\mathbf{W}_{apro}}^{(k)}));$ 
10   $k \leftarrow k + 1;$ 

```

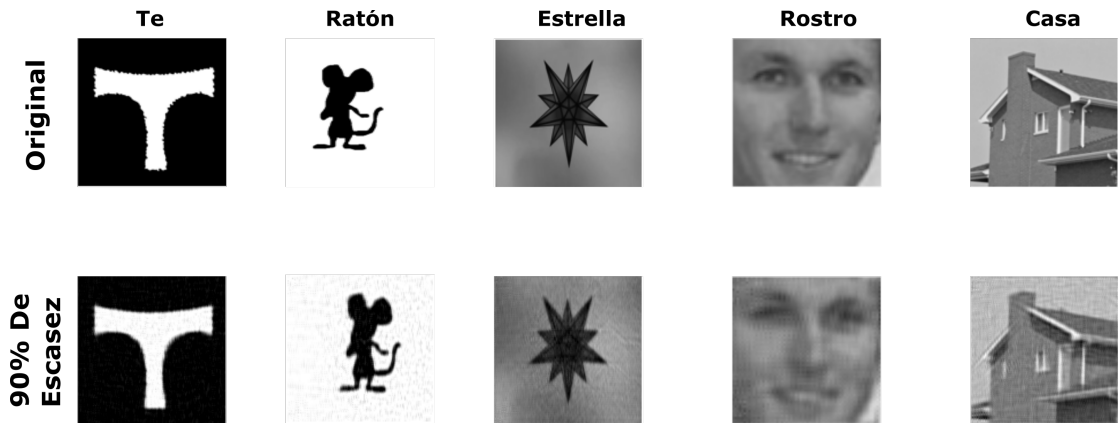
4.3. CONJUNTO DE DATOS SINTÉTICOS

En este trabajo se usó un grupo de cinco imágenes en escala de grises, seleccionadas teniendo en cuenta su suavidad y tamaño. Con éstas se simulan las mediciones de un sistema de único píxel.

Dado que para realizar la reconstrucción por muestreo compresivo se asume escasas en la imagen que se reconstruirá, se utilizaron imágenes con esta propiedad. Para esto se establece que se realizarán las pruebas con el 10% de los coeficientes diferentes de cero (imagen con 90% de escasas). Específicamente, se representa la imagen original x en la base de representación Wavelet 2D $\theta = \Psi'x$, posteriormente se umbralizan los coeficientes tal que solo el 10% se mantengan diferentes de cero $\hat{\theta}$, luego se reconstruye la imagen escasa a partir de la transformación inversa $x = \Psi\hat{\theta}$.

La figura 3 muestra las cinco imágenes seleccionadas en la parte superior las imágenes originales y en la parte inferior las imágenes escasas. De izquierda a derecha las imágenes tienen las siguientes características: la Te es una imagen de 128×128 de resolución, es a blanco y negro y presenta un índice de discrepancia global de 3.04×10^{-1} , el Ratón es una imagen de 128×128 de resolución, es a blanco y negro, presenta un índice de discrepancia global de 2.09×10^{-1} , la estrella es una imagen de 128×128 de resolución, es a blanco y negro, presenta un índice de discrepancia global de 4.12×10^{-2} , el Rostro es una imagen de 64×64 de resolución, es a blanco y negro y presenta un índice de discrepancia global de 1.83×10^{-2} y finalmente la Casa es una imagen de 64×64 de resolución, es a blanco y negro y presenta un índice de discrepancia global de 5.98×10^{-2} .

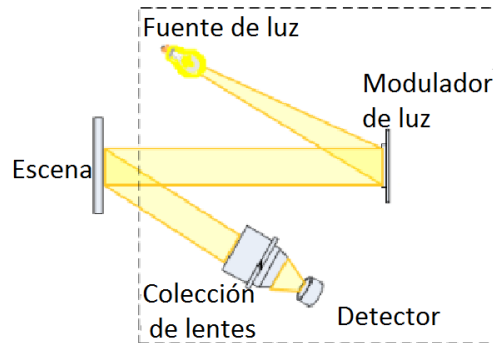
Figura 3. Imágenes utilizadas en las pruebas las simulaciones. (Superior) Imágenes originales. (Inferior) Imágenes después de eliminar coeficientes y reconstruirlas (escasas).



4.4. ADQUISICIÓN DE LA SEÑAL CON ARQUITECTURA DE IMÁGENES DE ÚNICO PÍXEL.

La figura 4 es un sistema que produce imágenes 2D a partir de un fotodiodo en lugar del enfoque tradicional con arreglos de sensores 2D. Para adquirir los datos, se ilumina la escena con un modulador de luz, posteriormente estas señales emitidas por la escena son procesadas por una colección de lentes que finalmente enfocarán la información en único píxel. Cada proceso se realiza varias veces para adquirir una muestra de la imagen cambiando el patrón que modula la luz.

Figura 4. Adquisición de la señal con tecnología de único píxel, sistema activo con fuente de luz incluida.



En este trabajo se implementaron, por simulación, dos tipos de matrices de muestreo $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ donde $M \ll N$ y N es el tamaño de la imagen vectorizada. Una de ellas consiste en una matriz aleatoria binaria con transmitancia de 1 %, esto quiere decir que el 99 % de sus entradas son cero. Se usó una baja transmitancia porque en experimentos previos se obtuvieron los mejores resultados de reconstrucción con dicha transmitancia. Para la segunda matriz de muestreo se implementó una matriz Hadamard donde inicialmente se crea una matriz $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a partir de esta matriz se hace una permutación por filas y se eligen aleatoriamente M filas de esta matriz para crear la matriz $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

4.5. MÉTRICAS DE RENDIMIENTO

La calidad de la reconstrucción fue evaluada en términos de las métricas: Error cuadrático medio (MSE, del inglés *Mean Square Error*) y Proporción Máxima de Señal a Ruido (PSNR, del inglés *Peak Signal-to-Noise Ratio*). Estos resultados fueron analizados calculando el promedio de 10 reconstrucciones de una imagen específica.

4.5.1. Error Cuadrático Medio (MSE) El Error cuadrático medio es el promedio de las distancias al cuadrado para un píxel correspondiente en dos imágenes. Para

dos bloques de imágenes x y y , si los píxeles en x son x_1, x_2, \dots, x_p y los píxeles en y son y_1, y_2, \dots, y_p , entonces el valor del Error cuadrático medio entre x y y se calcula por

$$MSE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (y_i - x_i)^2. \quad (19)$$

Por lo tanto, el MSE es una medida de error basada en píxeles. El PSNR es derivado de MSE. Estas evaluaciones basadas en errores absolutos no solo se utilizan para medir la calidad de la imagen, sino también para medir casi todos los tipos de señales ²⁰.

4.5.2. Proporción Máxima de Señal a Ruido (PSNR) El PSNR es una medición de procesamiento de la señal que compara una señal recibida o procesada con su correspondiente señal original. Esta comparación permite cuantificar qué tanto una señal procesada es fiel a la original, también permite identificar posibles ruidos o distorciones de la señal. Se puede decir que el PSNR representa la relación directa de una señal antes y después de un proceso de degradación. Matemáticamente, el PSNR puede calcularse a partir de

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (20)$$

donde MAX es el valor más grande de la señal y MSE está dado por la ecuación (19). En el caso de una imagen en escala de grises de 8 bits, $MAX = 255$. El valor final de PSNR está dado en decibeles (dB) ²¹.

²⁰ JIANJI WANG y col. "Associations among Image Assessments as Cost Functions in Linear Decomposition: MSE, SSIM, and Correlation Coefficient". En: vol.num (2017).

²¹ FERNANDO A. FARDO y col. "A Formal Evaluation of PSNR as Quality Measurement Parameter for Image Segmentation Algorithms". En: vol.num (2016).

5. SIMULACIONES Y RESULTADOS

Los resultados del trabajo fueron obtenidos a partir de cinco imágenes de tamaños 128×128 y 64×64 que presentan características diferentes, una de ellas es la suavidad cuantificada por las métricas de discrepancia. El objetivo de este capítulo consiste en determinar la calidad de la reconstrucción, además hacer una comparación en las reconstrucciones sin filtro y con filtro.

5.1. RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1.1. Cálculo de la discrepancia para las imágenes La Tabla 1 muestra los resultados del cálculo de discrepancia local (DL) y de discrepancia global (DG) cuadráticas calculados a partir de las ecuaciones (5) y (6), tanto para las imágenes originales como para su versión escasa. Según los resultados, se puede determinar que las imágenes escasas son más suaves en términos de discrepancia que sus versiones originales. Particularmente, las imágenes Rostro y Estrella son las más suaves dado que sus índices de discrepancia son los más bajos.

Nombre	Imagen Original		Imagen Escasa	
	DL	DG	DL	DG
Te	0.0088	0.3114	0.0057	0.3041
Ratón	0.0096	0.2184	0.007	0.2097
Estrella	0.0022	0.0434	0.0014	0.0413
Rostro	0.0011	0.0183	0.0011	0.0183
Casa	0.0034	0.0636	0.0028	0.0598

Tabla 1. Valores de discrepancia local y discrepancia global para las imágenes originales y las imágenes escasas.

5.1.2. Reconstrucción de las imágenes A continuación se puede evidenciar los resultados de reconstrucción en términos de PSNR y MSE en dos escenarios

sin ruido y adicionando un ruido de 20dB a las mediciones. Cada una de ellas fue muestreada con un 25% de sus medidas y fue reconstruida utilizando el algoritmo de Proyección de Gradiente para la Reconstrucción Escasa (GPSR) en su forma tradicional (Sin Filtro) y con una modificación de filtrado espacial. Para este trabajo se implementaron se implementaron dos filtros Gaussianos paso bajo. Para el primer filtro *imfilter* con dimensiones 5×5 y con una desviación $\sigma = 1, 2$, para el segundo filtro *imgaussfilt* con dimensiones 5×5 y una desviación estandar de $\sigma = 2.5$. Para estos dos filtrados se presentaron buenos resultados en comparación con otros tipos de filtros que no son paso bajo.

Resultados con matriz de muestreo aleatoria La Tabla 2 presenta los resultados de reconstrucción en PSNR en el caso en el que las medidas se obtienen con una matriz de muestreo aleatoria. Para cualquier imagen resulta una mejora en la reconstrucción utilizando el filtrado espacial en términos de PSNR, por ejemplo, superó la reconstrucción Sin Filtro en hasta 8.22 [dB] para la imagen del Ratón usando el filtro *Imfilter*. Incluso cuando se adiciona ruido a la medidas la reconstrucción es mejor cuando se implementan los filtros.

	PSNR					
	Sin ruido			SNR=20dB		
	SinFiltro	Imfilter	imgaussfilt	SinFiltro	Imfilter	imgaussfilt
Te	14.75	20.82	20.51	12.43	17.3	18.37
Ratón	14.14	22.36	20.89	10.68	12.1	12.89
Estrella	23.28	26.65	26.75	17.88	19.25	20.22
Rostro	23.39	27.9	30.71	19.09	19.82	22.07
Casa	19.34	24.14	23.03	16.48	18.22	19.2

Tabla 2. Resultados en términos de PSNR [dB] para matriz de muestreo aleatoria.

Según la tabla 3, para los resultados en términos del error cuadrático medio (se tienen en cuenta los valores cercanos a cero puesto que estos representan una similitud mayor entre la imagen reconstruida con la original) se evidencia que adi-

cionando ruido a las medidas la reconstrucción es mucho mejor usando el algoritmo con filtrado en comparación con la reconstrucción hecha por el algoritmo sin filtro.

	MSE					
	Sin ruido			SNR=20dB		
	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt
Te	3.3×10^{-2}	2.3×10^{-2}	9.7×10^{-3}	5.6×10^{-2}	1.9×10^{-2}	1.4×10^{-2}
Ratón	3.5×10^{-2}	6.3×10^{-3}	8.1×10^{-3}	8.5×10^{-2}	5.9×10^{-2}	4.7×10^{-2}
Estrella	5.5×10^{-3}	1.6×10^{-3}	1.7×10^{-3}	1.6×10^{-2}	1.1×10^{-2}	9.9×10^{-3}
Rostro	5×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1×10^{-3}	1.3×10^{-2}	7.9×10^{-3}	5.7×10^{-3}
Casa	5×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1×10^{-3}	1.3×10^{-2}	7.9×10^{-3}	5.7×10^{-3}

Tabla 3. Resultados en términos de MSE para matriz de muestreo aleatoria.

5.1.3. Resultados con matriz de muestreo Hadamard Al momento de implementar la matriz de muestreo Hadamard se obtuvo mejores resultados de reconstrucción en términos de PSNR en comparación con la matriz aleatoria, implementada anteriormente. Por ejemplo, en este caso según la tabla 4 la reconstrucción con filtrado superó en hasta 10.14[dB] que corresponde a la imagen del Rostro.

	PSNR					
	Sin ruido			SNR=20dB		
	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt
Te	19.33	24.58	25.31	18.95	23.52	24.33
Ratón	15.17	21.02	24.18	15.11	19.28	21.80
Estrella	20.58	27.1	30.3	20.60	25.39	27.98
Rostro	21.12	26.02	31.26	20.11	24.19	28.65
Casa	18.40	22.76	24.25	18.3	21.57	23.16

Tabla 4. Resultados en términos de PSNR para matriz de muestreo Hadamard.

Los resultados para el Error cuadrático medio según la tabla 5 fueron relativamente pequeños, se puede afirmar que la implementación de la matriz de muestreo Hadamard junto con el filtrado mejoran los resultados en la reconstrucción de las imágenes incluso cuando se tiene ruido adicional en la señal.

	MSE					
	Sin ruido			SNR=20dB		
	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt	SinFiltro	Imfilter	Imgaussfilt
Te	1.1×10^{-2}	3.4×10^{-3}	3×10^{-3}	1.3×10^{-2}	4.4×10^{-3}	3.7×10^{-3}
Ratón	3.9×10^{-2}	7.9×10^{-3}	3.8×10^{-3}	3.2×10^{-2}	1.2×10^{-2}	1.19×10^{-2}
Estrella	1.3×10^{-2}	2.9×10^{-3}	1.6×10^{-3}	1.4×10^{-2}	2.9×10^{-3}	1.6×10^{-3}
Rostro	8.9×10^{-3}	2.6×10^{-3}	7.2×10^{-4}	8.9×10^{-3}	3.9×10^{-3}	1.5×10^{-3}
Casa	1.4×10^{-2}	5.5×10^{-3}	3.3×10^{-3}	1.7×10^{-2}	7.1×10^{-3}	4.3×10^{-3}

Tabla 5. Resultados en términos de MSE para matriz de muestreo Hadamard.

5.2. RESULTADOS VISUALES

La figura (5) representa los resultados visuales de la reconstrucción para las imágenes de: el Ratón, la Te y la Estrella, respectivamente. En ellos se puede apreciar la calidad de la reconstrucción a partir de comparar la imagen original con la aproximación de la imagen reconstruida, las cuales presentan una mejor definición que aquellas donde se usó el filtrado en el algoritmo de GPSR. Para la figura (6) representa los resultados visuales de la reconstrucción de las imágenes: el Rostro y la Casa. Estas dos imágenes se caracterizan por tener una resolución de 64×64 y poseen una discrepancia global baja, por lo tanto se evidenciaron buenos resultados de reconstrucción.

Figura 5. Resultados de la reconstrucción en términos de PSNR y MSE para las imágenes: el Ratón, la Te y la estrella. Alternando la matriz de muestreo aleatoria y Hadamard. Usando el enfoque de filtros y sin filtro.

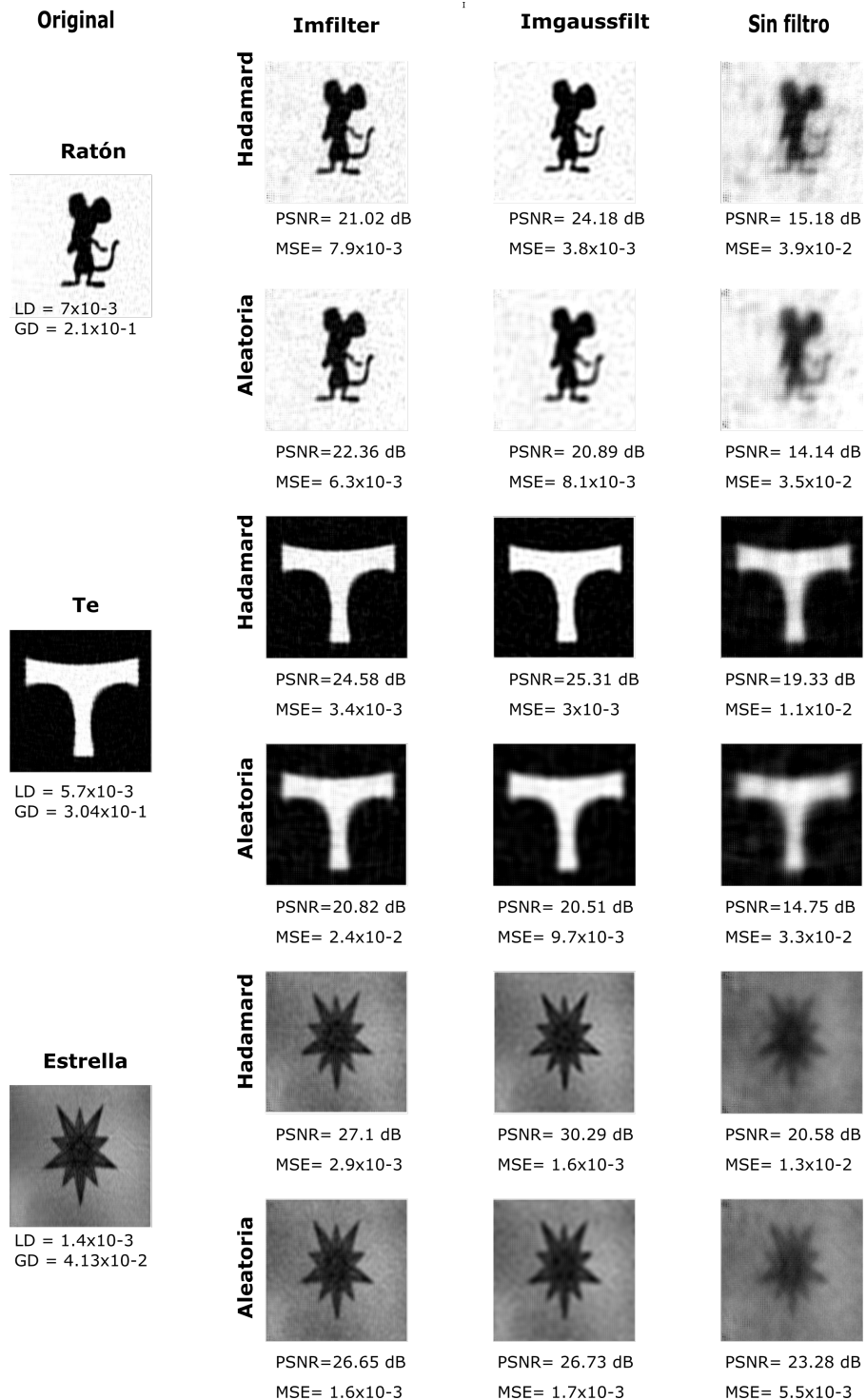
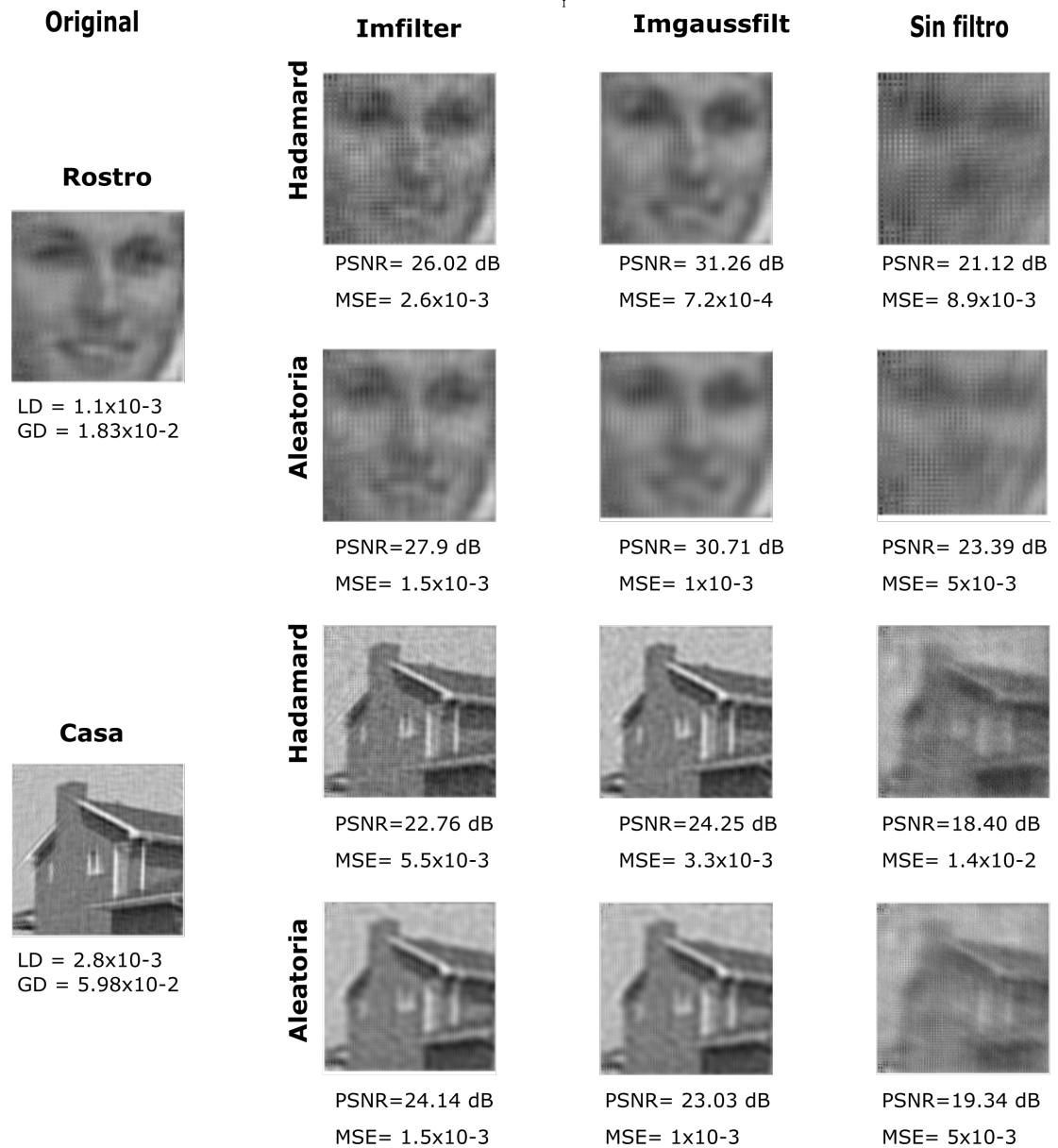


Figura 6. Resultados de la reconstrucción en términos de PSNR y MSE para las imágenes: el Rostro y la Casa. Alternando la matriz de muestreo aleatoria y Hadamard. Usando el enfoque de filtros y sin filtro.



Los resultados anteriores (figuras 5 y 6) fueron obtenidos a partir de imágenes en escala de grises usando un 25% de sus medidas y con un 90% de escases. La implementación de la matriz Hadamard ayudó a la mejora significativa de la recons-

trucción en comparación con la matriz de muestreo aleatoria, así mismo se puede notar que las imágenes suaves y la escasas de cada una de ellas presentan una mejor reconstrucción.

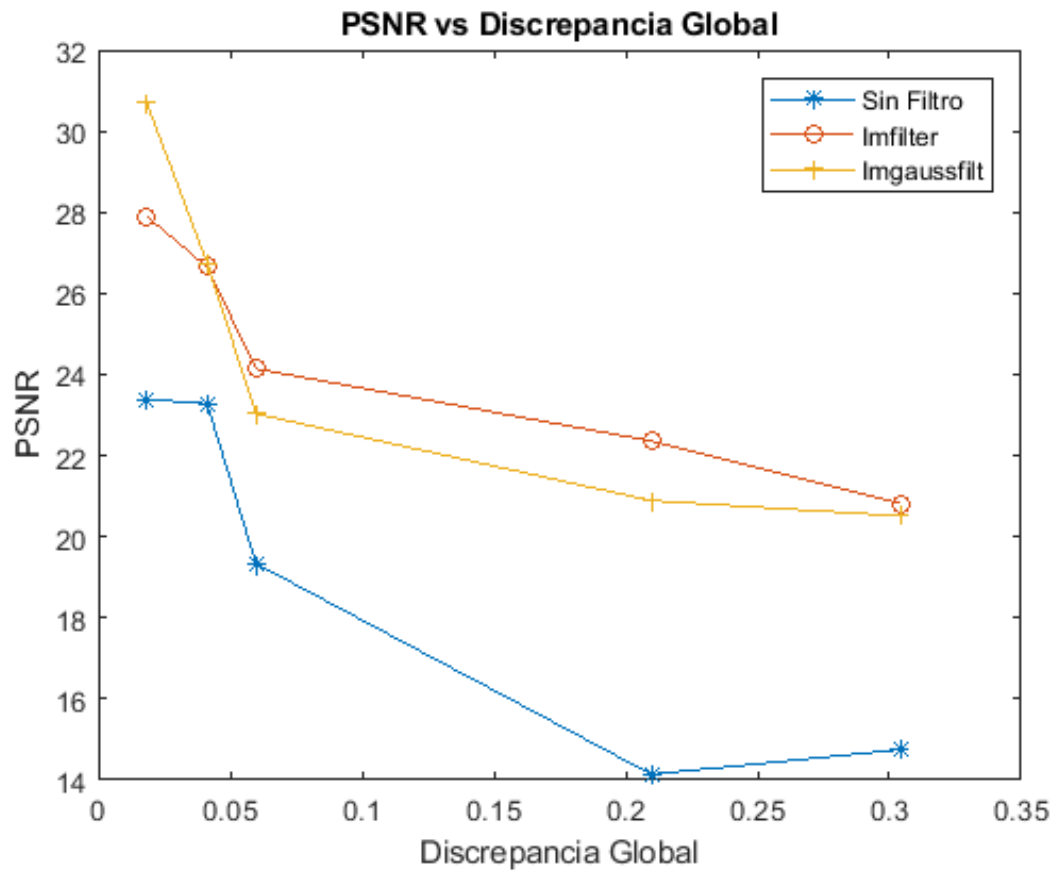
5.3. ANÁLISIS DE LAS MÉTRICAS DE CALIDAD

5.3.1. Resultados de PSNR Los valores finales de PSNR para cada imagen fueron calculados con el promedio de diez simulaciones cada una. Esta métrica representa una forma de medir qué tan buena fue la reconstrucción de la imagen, un valor alto de esta métrica indica que la aproximación de la imagen tiene una alta relación con la imagen original.

Los símbolos $(*, +, o)$ corresponde a una imagen del proyecto que están ordenadas de izquierda a derecha de la forma: el Rostro, la Estrella, la Casa, el ratón y la Te. Siendo el Rostro la imagen más suave y la Te la imagen menos suave en términos de discrepancia, en las figuras 7 y 8.

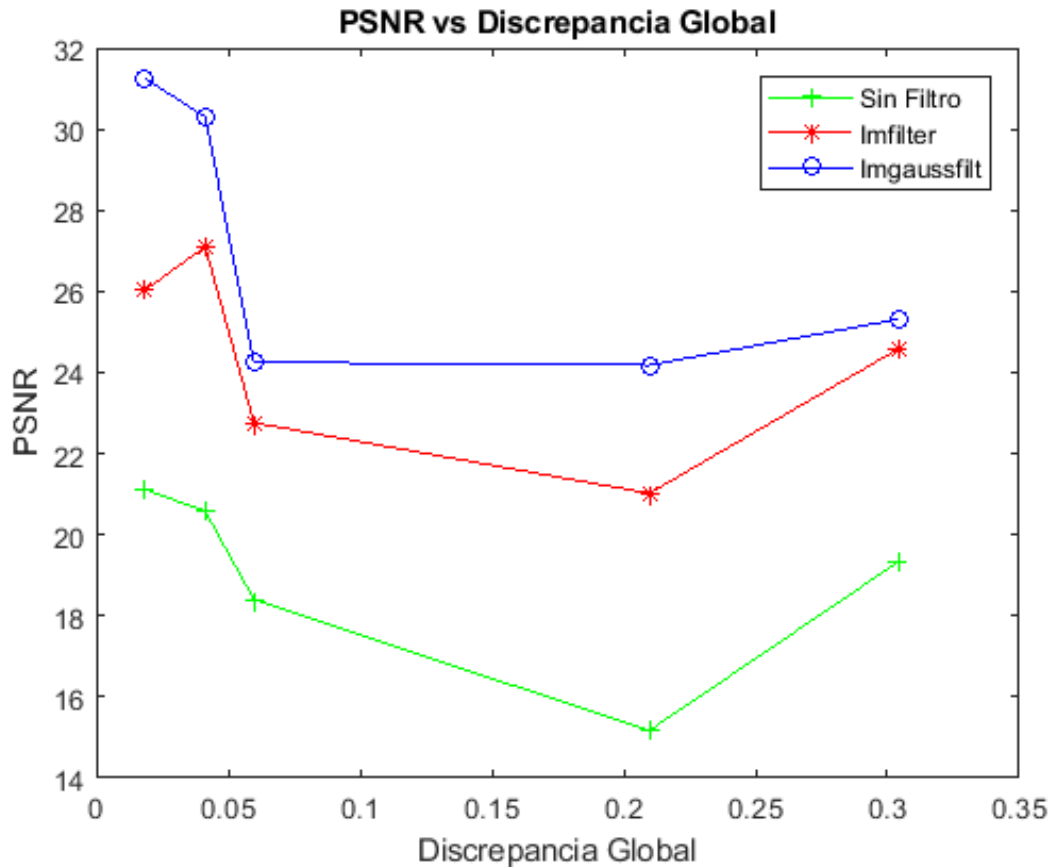
La figura (7) muestra los valores de PSNR para cada una de las imágenes. En todos los casos se puede evidenciar que la reconstrucción mejora cuando se implementa el filtrado y que la calidad de la imagen en términos de PSNR es inversamente proporcional al valor de discrepancia global de cada imagen.

Figura 7. Resultados de reconstrucción ed PSNR para matriz de muestreo aleatoria.



Para la figura 8 la matriz de muestreo que se implementó aportó a la mejora en la reconstrucción de la imagen, a su vez se evidenció que para todos los casos los resultados de las imágenes reconstruidas con la implementación del filtrado superan al enfoque tradicional del GPSR(SinFiltro).

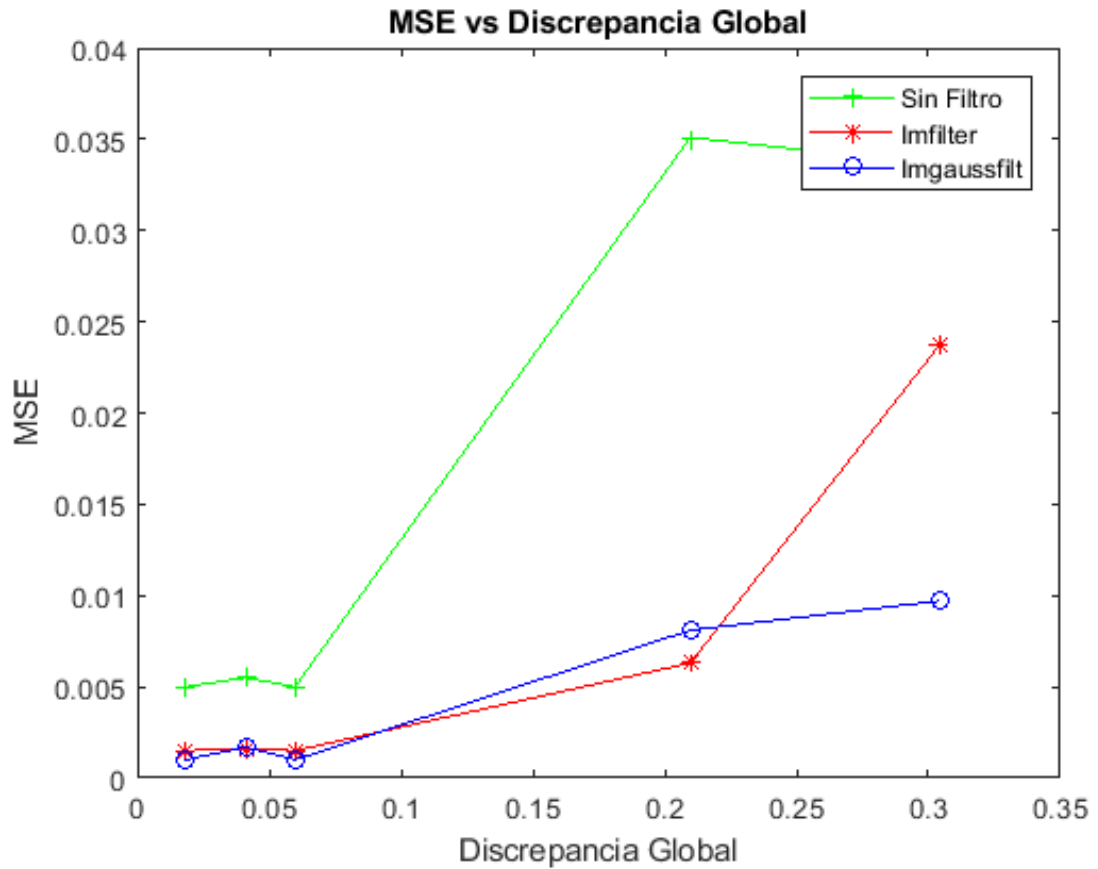
Figura 8. Resultados de reconstrucción en PSNR para matriz de muestreo Hadamard.



5.3.2. Resultados de MSE Los valores de MSE para cada imagen fueron calculados por un promedio de varias iteraciones, con el mismo orden anterior donde Los símbolos (*, +, o) corresponde a una imagen del proyecto que están ordenadas de izquierda a derecha de la forma: el Rostro, la Estrella, la Casa, el ratón y la Te. Siendo el Rostro la imagen más suave y la Te la imagen menos suave en términos de discrepancia, en las figuras 9 y 10.

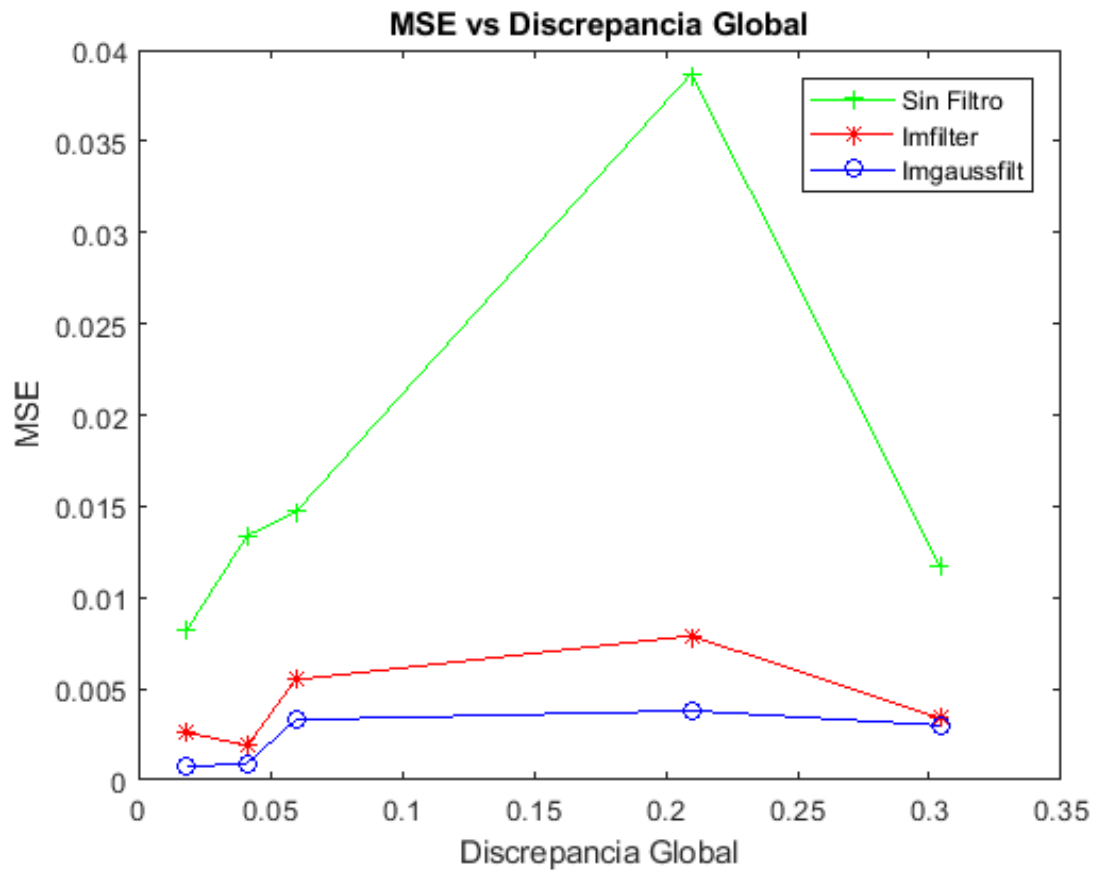
Para la figura (9) los valores de MSE están en un rango menor por lo tanto aquellos resultados donde es muy pequeño la reconstrucción es mucho mejor, esto sucede con las tres primeras imágenes que corresponden a: el Rostros, la Estrella y la Casa.

Figura 9. Resultados de reconstrucción en MSE para matriz de muestreo Aleatoria.



Cuando se muestrea la señal con la matriz de Hadamard la reconstrucción de las imágenes con el filtrado representan valores bajos de MSE, vea figura 10. En cambio con el enfoque tradicional del GPSR sin filtro presenta valores altos lo que quiere decir que no es favorable en términos de resolución.

Figura 10. Resultados de reconstrucción en MSE para matriz de muestreo Hadamard.



6. CONCLUSIONES

Se implementó un algoritmo de reconstrucción basado en gradiente descendiente donde adicionalmente se usa un filtrado espacial pasa baja que permite suavizar la aproximación de la imagen en cada iteración. Éste se basa en la suposición de que las imágenes naturales cuentan con la propiedad de suavidad.

Se usaron cinco tipos de imágenes las cuales cuentan con diferentes características físicas como la resolución y propiedades de suavidad. Se puede concluir que para todas las imágenes es favorable la reconstrucción que incluye el paso de filtrado, puesto que presentan un resultado de hasta 10.14dB de PSNR mejor en comparación con el enfoque tradicional del GPSR (Sin Filtro).

Se concluye que la relación entre el valor de discrepancia global que representa la suavidad de la imagen es inversamente proporcional a la calidad de la reconstrucción. La implementación del filtrado presentó una mejora representativa para las cinco imágenes que se usaron y que los resultados de PSNR eran inversamente proporcional al valor de discrepancia global que representa la suavidad de la imagen.

BIBLIOGRAFÍA

- BARANIUK, RICHARD. "Compressive Sensing [Lecture Notes]". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 24.4 (2007), págs. 118-121 (vid. págs. 18, 20).
- CANDES, E.J., J. ROMBERG y T. TAO. "Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.2 (2006), págs. 489-509 (vid. pág. 27).
- CANDES, E.J. y M.B. WAKIN. "An Introduction To Compressive Sampling". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 25.2 (2008), págs. 21-30 (vid. pág. 27).
- CASASENT, DAVID y DEMETRI PSALTIS. "Position, rotation, and scale invariant optical correlation". En: *Applied Optics* 15.7 (1976), pág. 1795 (vid. pág. 18).
- CONTÍNUA., UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA. FACULTAD DE INGENIERÍA. CENTRO DE ESTUDIOS Y EDUCACIÓN. *Revista FI-UPTC : publicación del Centro de Estudios y Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, CEDEC*. Vol. vol. num (vid. pág. 16).
- DONOHO, D.L. "Compressed sensing". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.4 (2006), págs. 1289-1306 (vid. pág. 27).
- DUARTE, M.F. y col. "Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling". En: *undefined* vol.num (2008) (vid. págs. 18-20).
- FARDO, FERNANDO A. y col. "A Formal Evaluation of PSNR as Quality Measurement Parameter for Image Segmentation Algorithms". En: vol.num (2016) (vid. pág. 35).

FEIGE, URIEL y URIEL. "Why are Images Smooth?" En: vol. vol. num. 2015, págs. 229-236 (vid. págs. 23, 24).

FIGUEIREDO, M, R NOWAK y S J WRIGHT. "Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems, IEEE J". En: *Sel. Top. Signa* vol.4 (2007), 1pp586-597 (vid. pág. 27).

GAO, HAO y col. "Robust principal component analysis-based four-dimensional". En: *Physics in Medicine and Biology* 56.11 (2011), págs. 3181-3198 (vid. pág. 22).

JIAO, SHUMING. "Design of optimal illumination patterns in single-pixel imaging using image dictionaries". En: vol.num (2018) (vid. pág. 23).

LIHENG, B. y col. "Experimental comparison of single-pixel imaging algorithms". En: *Journal of the Optical Society of America A* 35.1 (2018), pág. 78 (vid. pág. 13).

MA, JIANWEI. "Single-Pixel Remote Sensing". En: *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 6.2 (2009), págs. 199-203 (vid. pág. 19).

MARY, QUEEN y UNIVERSITY OF LONDON. *Hadamard matrices*, <http://www.maths.qmul.ac.uk/~Isoicher/designtheory.org/library/encyc/topics/had.pdf> (vid. pág. 21).

MEJIA, YURI y HENRY ARGUELLO. "Filtered gradient reconstruction algorithm for compressive spectral imaging". En: *Optical Engineering* 56.4 (2016), pág. 041306 (vid. pág. 13).

SHAPIRO, LINDA G. y GEORGE C. STOCKMAN. *Computer vision*. Vol. 1. 1. 2001, pág. 580 (vid. pág. 24).

- TSAIG, YAAKOV y DAVID L. DONOHO. "Extensions of compressed sensing". En: *Signal Processing* 86.3 (2006), págs. 549-571 (vid. pág. 13).
- WANG, JIANJI y col. "Associations among Image Assessments as Cost Functions in Linear Decomposition: MSE, SSIM, and Correlation Coefficient". En: vol.num (2017) (vid. pág. 35).
- YU, WEN-KAI y col. "Adaptive compressive ghost imaging based on wavelet trees". En: *Optics Express* 22.6 (2014), pág. 7133 (vid. pág. 22).
- ZAREI, ARIYAN. "Improve CAPTCHA's Security Using Gaussian Blur Filter". En: (2014) (vid. pág. 25).