

**POTENCIAL GRAVITACIONAL, DENSIDAD
SUPERFICIAL Y VELOCIDAD CIRCULAR PARA
MODELOS PLANOS DE GALAXIAS**

JERSON IVAN REINA MEDRANO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2004**

**POTENCIAL GRAVITACIONAL, DENSIDAD
SUPERFICIAL Y VELOCIDAD CIRCULAR PARA
MODELOS PLANOS DE GALAXIAS**

JERSON IVAN REINA MEDRANO

Trabajo de Grado para optar al título de físico

Director
GUILLERMO A. GONZÁLEZ V.
Físico , Ph. D.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2004**

*A la memoria de mi padre,
Marco Aurelio Reina Q.*

*A mi madre,
Aura Luz Medrano "Lucerito".*

*Sin ellos no hubiera sido posible,
Gracias.*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

Al colega y amigo Javier Fernando Ramos Caro.

A Maria Fernanda Barrera.

A mis hermanos Cesar Augusto y Marco Aurelio.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

A la Universidad Industrial de Santander.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	9
1. MODELOS PLANOS DE GALAXIAS	14
1.1. INTRODUCCIÓN	14
1.2. POTENCIAL GRAVITACIONAL	15
1.3. DENSIDAD SUPERFICIAL Y VELOCIDAD CIRCULAR . . .	19
1.4. ESTABILIDAD DEL MODELO	21
2. SOLUCION GENERAL PARA EL POTENCIAL $\Phi(\mathbf{R}, z)$	25
2.1. INTRODUCCIÓN	25
2.2. EL SISTEMA DE COORDENADAS	26
2.3. SOLUCION GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE . .	32
3. MODELOS PARTICULARES	39

	2
3.1. INTRODUCCIÓN	39
3.2. DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA Y POTENCIAL GRAVI- TACIONAL	40
3.3. VELOCIDAD CIRCULAR	47
3.4. ESTABILIDAD DEL MODELO	51
CONCLUSIONES	55
BIBLIOGRAFÍA	57

LISTA DE FIGURAS

2.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas	30
3.1. Densidad superficial de masa	46
3.2. Curvas de rotación 1	49
3.3. Curvas de rotación 2	50
3.4. Curvas de rotación 3	51
3.5. Curvas de Estabilidad 1	53
3.6. Curvas de Estabilidad 2	54
3.7. Curvas de Estabilidad 3	54

LISTA DE TABLAS

3.1. Valores de C_{2n} para $m = 0, \dots, 5$	43
---	----

TÍTULO: POTENCIAL GRAVITACIONAL, DENSIDAD SUPERFICIAL Y VELOCIDAD CIRCULAR PARA MODELOS PLANOS DE GALAXIAS.¹

Jerson Ivan Reina Medrano²

Palabras Claves

1. Astrofísica. 2. Modelos de discos. 3. Coordenadas esferoidales oblatas.
4. Ecuacion de Laplace. 5. Potencial gravitacional.

Resumen

Se presenta un formalismo para obtener modelos planos de galaxias fundamentado en la determinación de un potencial gravitacional apropiado. Posteriormente, a partir de este potencial, se obtienen la densidad superficial de la distribución de materia así como la velocidad circular de las estrellas y el momentum angular por unidad de masa.

Dada la forma discoidal de la fuente, se utiliza el sistema de coordenadas esferoidales oblatas para solucionar la ecuación de Laplace. Dicha solución es sometida a ciertas condiciones físicas de contorno, con el fin de encontrar un potencial gravitacional apropiado para una distribución discoidal de materia. Además de las condiciones de contorno mencionadas anteriormente, el potencial gravitacional es sometido a un ajuste de las constantes que aparecen en él, con el fin de que represente una familia de discos que posean densidades superficiales de masa con un comportamiento razonablemente aceptable.

¹Trabajo de grado.

²Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

La densidad superficial de masa se calcula a partir de la ley de Gauss, la velocidad circular por medio de las ecuaciones cinemáticas del movimiento circular, y el momentum angular por unidad de masa se obtiene de la relación directa que existe con la velocidad circular. En los tres casos la herramienta principal que se utiliza para calcularlos es el potencial gravitacional. Finalmente se toman algunos casos particulares del potencial gravitacional, cada uno representando un término de la familia de discos caracterizados por una densidad superficial de masa, una velocidad circular y el momentum angular por unidad de masa.

**Title: GRAVITATIONAL POTENTIAL, SURFACE
DENSITY AND CIRCULAR SPEED FOR FLAT
GALAXY MODELS³**

Jerson Ivan Reina Medrano.⁴

Key words

1. Astrophysics. 2. Disk models. 3. Oblate spheroidal coordinates.
4. Laplace's equation. 5. Gravitational potential.

Abstract

A formalism to obtain flat galaxy models is presented. The formalism is based in the obtention of an appropriated gravitational potential. The surface density of the matter distribution, the circular speed and the specific angular momentum of the stars are then obtained from the gravitational potential.

Due to the disklike nature of the source, oblate spheroidal coordinates are used in order to solve the Laplace's equation. The obtained solution is then restricted by some physical boundary conditions that leads to gravitational potentials corresponding to disklike configurations of matter. The constants of the general solution so obtained are then adjusted by requiring that the gravitational potential leads to a family of disks which surface densities that presents a physically reasonable behavior.

The surface density is computed by means of the Gauss law, the circular speed by means of the kinematical equations of the circular motion and the specific

³Undergraduate thesis.

⁴Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. GONZÁLEZ VILLEGAS, Guillermo.

angular momentum is obtained directly from the circular speed. The three properties are computed using mainly the gravitational potential. Finally, some particular cases are taken, corresponding to particular members of the family of disks, characterized by a surface density, a circular speed and a specific angular momentum.

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista observacional las galaxias se encuentran en un gran rango de formas, tamaños y masas pero pueden ser agrupadas útilmente en cuatro principales grupos de acuerdo al sistema de clasificación de Hubble:

Galaxias elípticas. Las simbolizó con la letra E y las subdividió en ocho clases, desde la E0 (las de forma totalmente esférica) hasta la E7, según sean más o menos elípticas y fusiformes. En estas galaxias la concentración de estrellas va disminuyendo desde el núcleo, que es muy pequeño y brillante, hacia sus bordes. Estas galaxias contienen una gran concentración de estrellas viejas, y algunas estrellas en formación, y en general poco gas y polvo cósmico.

Galaxias espirales. Se designan con la letra S; constan de dos brazos que nacen tangencialmente de la espiral más básica (S0), hacia puntos diametralmente opuestos. Se dividen en normales (S..) y barradas (SB..). Dependiendo del menor o mayor desarrollo que posea cada brazo, se le asigna una letra a, b ó c (Sa, Sb, Sc, SBa, SBb, SBc). Estas galaxias están constituidas por discos aplanados que albergan algunas estrellas viejas y una gran concentración de estrellas jóvenes, además de abundante gas y polvo cósmico. Los brazos espirales suelen ser las regiones que con mayor frecuencia albergan estrellas jóvenes brillantes y nubes de gas. En las galaxias espirales, alrededor del centro orbi-

tan estrellas y nubes de gas. En ellas, las estrellas describen órbitas circulares con períodos del orden de cientos de millones de años, y a velocidades que aumentan conforme crecen las distancias al centro.

Galaxias lenticulares. Existen otras galaxias intermedias entre elípticas y espirales, llamadas lenticulares o lenticulares normales, identificadas como SO y clasificadas en los grupos SO1, SO2 y SO3. A su vez se distinguen las lenticulares barradas (SBO) que se clasifican en el grupo 1 (SBO1), grupo 2 (SBO2) y grupo 3 (SBO3), según presente la barra más o menos definida y brillante.

Galaxias irregulares. Por su parte, las galaxias irregulares se simbolizan con la letra I ó IR, aunque suelen ser enanas o poco comunes. Pertenecen a éste grupo aquellas galaxias cuyo aspecto no presentan estructura y simetría bien definidas. Se clasifican en irregulares tipo 1, que contienen gran cantidad de estrellas jóvenes y material interestelar, e irregulares tipo 2, menos frecuentes y con dificultad para la identificación individual de su contenido. Las galaxias irregulares se sitúan generalmente próximas a galaxias más grandes, y suelen contener grandes cantidades de estrellas jóvenes, gas y polvo cósmico.

Hay tres regiones que se logra diferenciar en una galaxia; el disco aplanado, el bulbo del núcleo y el enorme halo, en donde la mayoría del material en cada región se encuentra en forma de estrellas. El disco de la galaxia contiene estrellas, gas y polvo, siendo estas características lo que conforma el material interestelar. El gas es en su mayor parte átomos y moléculas de hidrógeno. Las partículas de polvo son pequeñas, alrededor de un micrón y pueden estar compuestas de acero, grafitos, silicatos o alguna mezcla de todas esas. El núcleo galáctico es la porción central de la galaxia, no se puede observar directamente, pero observaciones hechas desde otras galaxias, infieren que la mayoría de las estrellas situadas son viejas. El halo de la galaxia es la región esférica

alrededor del núcleo de la galaxia. Contiene estrellas, la mayoría todas en cúmulos globulares.

La mayoría de la luz emitida por una galaxia espiral típica viene desde el disco galáctico. Si la masa de tal galaxia está igualmente concentrada en el disco es una pregunta que solamente puede ser contestada por el estudio de la dinámica del sistema. Pero podemos anticipar que una fracción substancial de la masa de la galaxia está concentrada en el disco, la cual puede ser aprovechada para calcular el campo gravitacional generado por un disco idealizado de espesor cero.

Son varios los casos en que se han modelado galaxias espirales teniendo en cuenta unicamente el disco, como el caso de H. C. Plummer [17], quien en 1911 a partir del potencial gravitacional caracterizado por ser una función de $R^{-1/2}$, pudo calcular la densidad volumétrica de masa que genera dicho potencial. Un modelo como estos es comunmente llamado un par potencial-densidad. De igual manera en 1956, Kuzmin [10] introdujo un par potencial-densidad tal como Plummer. Esta vez Kuzmin modeló el disco a partir de un potencial gravitacional que depende de las variables (R, z) , donde comprobó que dicho potencial era generado por una densidad superficial de masa $\Sigma_k(R)$, calculado por medio de la ley de Gauss. Este modelo también fue conocido como el modelo 1 de Toomre [19]. En 1975 Miyamoto y Nagai [13] modelaron una galaxia a partir de un potencial de disco con unas características particulares. Este potencial depende de las variables (R, z) y además de unas constantes (b, c) , las cuales mediante una escogencia apropiada representan el potencial hallado por Plummer cuando $a = 0$, ó representaba el potencial de Kuzmin cuando $b = 0$, por otro lado, dependiendo de la escogencia de las constantes (b, c) el potencial de Miyamoto y Nagai puede representar el potencial de cualquier cosa, desde un disco delgado infinitesimal hasta un sistema esférico. Siguiendo

con la secuencia de los modelos realizados por Plummer y Kuzmin, Miyamoto y Nagai encontraron también, a partir de la solución de la ecuación de Poisson la densidad volumétrica de masa que generaba su potencial gravitacional, la cual, obviamente representaba la densidad de materia encontrada por Plummer y Kuzmin para $a = 0$ y $b = 0$ respectivamente. Cabe resaltar dentro de toda esa gama de modelos de disco los modelos realizados por Mestel y Kalnajs [12, 8], en donde prácticamente la mecánica del modelo es igual a la realizada por los autores mencionados anteriormente. Basados en la existencia de un potencial gravitacional, hallar la densidad de materia que genera dicho potencial. Una característica particular de todos los modelos mencionados es que el disco presenta una extensión infinita.

El trabajo que presentamos a continuación está encaminado a modelar galaxias de disco, caracterizadas por un potencial gravitacional, una densidad superficial de masa y una velocidad circular de rotación. La herramienta principal para el cálculo de todas las propiedades que describen nuestro modelo es el potencial gravitacional. Vamos a calcularlo en regiones libres de materia, debido a que en principio no sabemos como es la forma de la distribución de materia que lo crea, razón por la cual solucionaremos la ecuación de Laplace sometida a ciertas condiciones físicas de contorno que garantizan que el potencial hallado describa discos de extensión finita. El sistema de coordenadas utilizado para resolver la ecuación de Laplace será el sistema de las coordenadas oblatas, pues es el que mejor se adapta a la simetría presente en la fuente de campo gravitacional. Conocida la forma que adquiere el potencial, emprenderemos la tarea de calcular la densidad superficial de masa que crea dicho potencial. Para esto hacemos uso de la ley de Gauss. Para esta propiedad haremos un análisis gráfico donde mostraremos que la densidad de materia en el disco se encuentra continuamente distribuida, más que concentrada dentro de

una discreta masa puntual. La velocidad circular de rotación será deducida a partir de las ecuaciones cinemáticas del movimiento circular, en donde notaremos que dependerá netamente del potencial gravitacional. También se define el momentum angular por unidad de masa, cuyas gráficas serán analizadas para establecer un criterio para la estabilidad del modelo.

Lo anterior será elaborado en tres capítulos. Así, en el capítulo 1 se definen en forma general la forma como obtener el potencial gravitacional, la densidad superficial de masa, la velocidad circular y la estabilidad del modelo. En el capítulo 2, se introduce el sistema de las coordenadas oblatas y posteriormente se solucionará la ecuación de Laplace en éste sistema de coordenadas, obteniendo de esta manera la forma general que adquiere el potencial gravitacional. Finalmente, en el capítulo 3 se hace una recopilación de todo lo dicho en los capítulos precedentes. Principalmente se toman casos particulares de la solución obtenida para el potencial gravitacional, y se encontrará para cada caso la correspondiente densidad superficial de masa, la velocidad circular y la estabilidad. También se analizará gráficamente cada una de las propiedades del modelo.

Capítulo 1

MODELOS PLANOS DE GALAXIAS

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los aspectos principales necesarios para la construcción de modelos planos de galaxias. La obtención de modelos planos de galaxias se fundamenta en determinar inicialmente un potencial gravitacional apropiado y, a partir de éste, obtener la densidad superficial de la distribución de materia así como la velocidad circular y el momentum angular por unidad de masa.

De acuerdo con lo anterior, en la sección 1.2 presentaremos los aspectos fundamentales de la teoría del potencial necesarios para obtener el potencial gravitacional para una distribución de materia dada. Luego, en la sección 1.3, presentamos en forma general el procedimiento necesario para obtener la densidad superficial de masa, la velocidad circular y el momentum angular por unidad de masa. Finalmente, en la sección 1.4, se formula un criterio de estabilidad del modelo con respecto a perturbaciones radiales, fundamentado en el com-

portamiento del momentum angular por unidad de masa.

1.2. POTENCIAL GRAVITACIONAL

El concepto de campo gravitacional es simplemente la forma de describir la región circundante a un centro de fuerza, o fuente del campo gravitacional, dentro de la cual esa fuerza actúa. Dicha región circundante a la fuente es un conjunto de valores vectoriales los cuales están ligados a cada punto en el espacio en cada instante en el tiempo; si una partícula de prueba hipotética fuera colocada en algún punto dado en un instante de tiempo específico, esta sentiría una fuerza, cuya magnitud y dirección puedan ser deducidas del valor del campo gravitacional asociado con esa posición y tiempo.

El campo gravitacional se define mediante la relación

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza gravitacional y m la masa de la partícula de prueba. Como se puede observar, el carácter vectorial del campo gravitacional viene dado por la relación directa que existe con la fuerza gravitacional entre dos partículas, una de masa M , situada en un punto \mathbf{x}' , y una de masa m , situada en \mathbf{x} , dada por la ley de gravitación universal de Newton

$$\mathbf{F} = GMm \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (1.2)$$

y así, podemos escribir el campo gravitacional como:

$$\mathbf{g} = GM \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (1.3)$$

en donde $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ es la distancia entre \mathbf{x} y \mathbf{x}' y G es la constante de proporcionalidad de Cavendish.

Ahora bien, debemos tener en cuenta que una galaxia típica tiene aproximadamente 10^{11} estrellas, por lo que debemos tratar la masa como una distribución continua de materia caracterizada por una densidad $\rho(\mathbf{x}')$. De acuerdo con esto, (1.3) adopta la forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int_V \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d^3x'. \quad (1.4)$$

Si definimos el potencial gravitacional $\Phi(\mathbf{x})$ como:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3x', \quad (1.5)$$

y notando que

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (1.6)$$

entonces podemos relacionar el campo gravitacional con una función escalar $\Phi(\mathbf{x})$, de la siguiente manera [6]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla \int_V \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3x', \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (1.7b)$$

Como el campo es determinado por el gradiente de un potencial, la fuerza gravitacional es conservativa. Ahora el problema del campo gravitacional se redujo a encontrar una función escalar llamada potencial, que por su carácter escalar nos permite visualizar de una manera más fácil el comportamiento del campo gravitacional, pues en la mayoría de casos el mejor camino para encontrar el campo es primero calcular dicho potencial y después tomar su gradiente.

Si tomamos la divergencia de (1.4), encontramos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (1.8)$$

Ahora, dado que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5}, \quad (1.9)$$

cuando $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$ podemos cancelar el factor $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2$ del numerador y el denominador del último término en esta ecuación para concluir que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0, \quad (1.10)$$

para todo $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$. Por lo tanto, cualquier contribución a la integral (1.8) debe venir desde el punto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, y podemos así restringir el volumen de integración a una esfera pequeña de radio h centrada sobre este punto.

Puesto que, para h suficientemente pequeño, la densidad es aproximadamente constante a través de este volumen, podemos tomar $\rho(\mathbf{x}')$ fuera de la integral. De manera que los términos dentro del integrando pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3x' \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot d^2\mathbf{S}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En el último paso en esta secuencia utilizamos el teorema de la divergencia para expresar la integral de volumen mediante una integral de superficie.

Ahora bien, sobre la esfera $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$ y así tenemos que $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})h d^2\Omega$, donde $d^2\Omega$ es un pequeño elemento de ángulo sólido. Así, la ecuación (1.10) toma la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_S d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

Si ahora sustituimos de (1.7b) para $\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$, obtenemos la ecuación de Poisson que relaciona el potencial Φ con la densidad ρ mediante la siguiente ecuación:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.13)$$

Podemos concluir diciendo que el problema del campo gravitacional se reduce a solucionar la ecuación de Poisson. La ecuación anterior representa la forma usual de calcular el potencial gravitacional en la región dentro de la cual se encuentra la fuente, o la densidad de materia. Dicha ecuación suele ser complicada de solucionar debido a su carácter no homogéneo, determinado por la forma de la distribución de materia, que en muchos casos puede ser una función complicada de las coordenadas utilizadas en el problema. Por otro lado, en el caso de regiones que estén libres de materia, $\rho = 0$, la ecuación (1.13) se reduce a:

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (1.14)$$

conocida como la ecuación de Laplace que, en general, es más fácil de resolver.

Retomemos ahora la ecuación (1.13) e integremos a ambos lados sobre un volumen arbitrario que contiene una masa total M , con lo que se obtiene:

$$4\pi G \int_V \rho \, d^3x = 4\pi GM = \int_V \nabla^2\Phi \, d^3x. \quad (1.15)$$

Aplicando el teorema de la divergencia tenemos

$$4\pi GM = \int_S \nabla\Phi \cdot d^2\mathbf{S}. \quad (1.16)$$

Este resultado se conoce como la **Ley de Gauss**, la cual puede escribirse en palabras como [6]: *La integral de la componente normal de $\nabla\Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa contenida dentro de dicha superficie.*

En un problema general en el cual se tenga una distribución de materia contenida en una región finita, debemos resolver la ecuación de Poisson (1.13) en el interior de dicha región, así como la ecuación de Laplace (1.14) en el exterior de ésta; además, debemos exigir que las soluciones interior y exterior coincidan en la superficie frontera de la región considerada, con el fin de garantizar

la continuidad del potencial gravitacional Φ en todo el espacio; sin embargo, para el caso que nos interesa, en el cual tenemos una distribución de materia en forma de disco confinada en el plano $z = 0$, el problema se simplifica. En este caso, sólo es necesario resolver la ecuación de Laplace en el exterior de la distribución de materia, mientras que el problema interior se reduce a la asignación de condiciones de frontera apropiadas para garantizar la obtención de una distribución de materia físicamente aceptable.

1.3. DENSIDAD SUPERFICIAL Y VELOCIDAD CIRCULAR

Hasta el momento hemos encontrado la formulación que nos permite encontrar el potencial, en regiones libres de materia, para cualquier sistema de coordenadas utilizando la ecuación (1.14). Vamos ahora a particularizar nuestro problema para obtener, a partir de un potencial dado Φ , las variables físicas que caracterizan el modelo que nos interesa; es decir, vamos a considerar que las galaxias pueden representarse como discos delgados formados por una distribución continua de estrellas, axialmente simétrica, caracterizada por una densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ y por un potencial gravitacional $\Phi(R, z)$, donde (R, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales [2].

Supondremos igualmente que, además de la simetría axial, el potencial gravitacional posee simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$; esto es,

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \quad (1.17)$$

lo que implica que la componente normal del gradiente de Φ , $\partial\Phi/\partial z$, satisface la relación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, z), \quad (1.18)$$

donde suponemos que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula sobre el plano $z = 0$, que es la región en la cual se encuentra la distribución de materia que representa la galaxia. Lo anterior quiere decir que en el plano $z = 0$ las líneas de campo cambian su dirección, como debe esperarse debido a que el campo gravitacional es un campo de atracción.

Dado un potencial $\Phi(R, z)$ con las propiedades anteriores, la densidad $\Sigma(R)$ correspondiente a la distribución superficial de materia puede obtenerse utilizando la ley de Gauss, la cual implica que

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_{z=0+} - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_{z=0-} \right\}.$$

Usando entonces la condición (1.18), obtenemos finalmente el resultado

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_{z=0+}. \quad (1.19)$$

La densidad superficial $\Sigma(R)$ es diferente de cero como consecuencia de la suposición de que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula sobre el plano $z = 0$.

De igual manera, conociendo el potencial gravitacional puede determinarse una propiedad importante de una distribución discoidal de materia como lo es su **velocidad circular** $V_c(R)$, definida como la velocidad de una partícula de prueba en una órbita circular de radio R . La velocidad circular puede obtenerse fácilmente empleando las ecuaciones cinemáticas del movimiento circular, y teniendo en cuenta que la aceleración en la dirección radial está dada por la componente radial del gradiente de Φ , $\partial\Phi/\partial R$; esto es,

$$V_c^2 = R \left[\frac{\partial\Phi}{\partial R} \right]_{z=0}. \quad (1.20)$$

Otra cantidad físicamente importante del modelo es la magnitud del momento angular por unidad de masa de las partículas que se mueven en órbitas

circulares. Como consecuencia de la simetría axial del campo gravitacional del modelo considerado, la componente z del momentum angular de las partículas permanece constante [7]. Para el caso de las partículas describiendo órbitas circulares en el plano $z = 0$, la magnitud del momentum angular por unidad de masa puede calcularse fácilmente y está dada por

$$h = RV_c. \quad (1.21)$$

Así entonces, utilizando la expresión (1.20) para la velocidad circular, tenemos que

$$h^2 = R^3 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{z=0}; \quad (1.22)$$

es decir, h puede obtenerse también a partir del potencial dado Φ .

1.4. ESTABILIDAD DEL MODELO

Vamos ahora a estudiar la estabilidad de los discos obtenidos con respecto a perturbaciones radiales, para lo cual determinaremos las condiciones necesarias para la existencia de órbitas circulares estables. Dichas condiciones pueden obtenerse mediante un análisis del comportamiento de la energía de la partícula en función de la coordenada radial R .

La energía total por unidad de masa para una partícula sometida a la acción de un campo gravitacional axialmente simétrico puede escribirse como

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + \Phi(R, z), \quad (1.23)$$

donde v es la magnitud de la velocidad de la partícula. Restringiéndonos al caso de órbitas en el plano ecuatorial, $z = 0$, y escribiendo v en las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) , tenemos que

$$\varepsilon = \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{R^2 \dot{\phi}^2}{2} + \Phi(R, 0). \quad (1.24)$$

En las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) , la velocidad circular V_c puede escribirse como

$$V_c = R\dot{\phi}, \quad (1.25)$$

y así el momentum angular por unidad de masa h toma la forma

$$h = R^2\dot{\phi}. \quad (1.26)$$

Reemplazando entonces $\dot{\phi}$ de (1.26) en (1.24), encontramos que

$$\varepsilon = \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{h^2}{2R^2} + \Phi(R, 0), \quad (1.27)$$

quedando así el problema reducido a un sólo grado de libertad.

La ecuación (1.27) puede escribirse convenientemente como

$$\varepsilon = \frac{\dot{R}^2}{2} + V_{ef}, \quad (1.28)$$

donde el **potencial efectivo** V_{ef} se define como

$$V_{ef} = \frac{h^2}{2R^2} + \Phi(R, 0). \quad (1.29)$$

De esta manera vemos como la coordenada R desempeña el papel de x en un movimiento unidimensional y el término correspondiente a $\dot{\phi}$, despejada mediante (1.26), desempeña el papel de una adición a la energía potencial, comunmente denominado “*potencial centrifugo*”.

Con el fin de determinar la posibilidad de tener órbitas circulares estables, debemos analizar la existencia o no de puntos críticos en el potencial efectivo V_{ef} . Los puntos en que V_{ef} es mínimo se denominan puntos de equilibrio estable; es decir, si la partícula se desplaza ligeramente de tal posición, se verá sometida a una fuerza recuperadora que tenderá a volverla a ella. Por otro lado, los puntos en que V_{ef} es máximo se denominan puntos de equilibrio inestable. En teoría,

una partícula en reposo en tales puntos permanecerá allí en reposo, dado que la fuerza efectiva es nula, pero si se le suministra una ligera perturbación, la fuerza actuante sobre ella tenderá a alejarla cada vez más de dicha posición de equilibrio.

Derivando la ecuación (1.29) respecto a R e igualando a cero, se obtiene

$$\frac{dV_{ef}(R)}{dR} = -\frac{h^2}{R^3} + \frac{\partial\Phi}{\partial R} = 0;$$

es decir,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{h^2}{R^3}. \quad (1.30)$$

Esta última ecuación es la condición para la existencia de órbitas circulares, la cual es equivalente a la ecuación (1.22), garantizándose así la posibilidad de tener órbitas circulares. Calculando ahora la segunda derivada de V_{ef} encontramos

$$\frac{d^2V_{ef}}{dR^2} = \frac{1}{R^3} \left[\frac{3h^2}{R} + R^3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} \right]. \quad (1.31)$$

Usando (1.30), el anterior resultado puede escribirse como

$$\frac{d^2V_{ef}}{dR^2} = \frac{1}{R^3} \left[3R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial R} + R^3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} \right] = \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^3 \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right]. \quad (1.32)$$

Utilizando nuevamente (1.30), podemos reemplazar la expresión en el parentesis en (1.32) por h^2 , con lo que el criterio de la segunda derivada del potencial efectivo se reduce a:

$$\frac{d^2V_{ef}}{dR^2} = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (h^2) > 0. \quad (1.33)$$

Como podemos ver de esta última ecuación, el problema de la estabilidad de nuestro modelo se reduce al análisis del signo de la derivada del momentum angular por unidad de masa h .

Como sabemos, los puntos críticos en que la segunda derivada de una función es positiva, representan los mínimos, ó puntos de equilibrio estable, mientras

que los puntos críticos en que la segunda derivada es negativa, representan los máximos ó puntos de equilibrio inestable. De acuerdo con esto, los modelos de discos serán estables contra perturbaciones radiales cuando el momentum angular por unidad de masa h sea una función monotonamente creciente de la coordenada radial R .

Capítulo 2

SOLUCION GENERAL PARA EL POTENCIAL $\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{z})$

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a resolver la ecuación de Laplace (1.14) con el fin de obtener un potencial gravitacional Φ con las características necesarias para describir modelos discoidales de galaxias de radio finito. Para obtener tal solución debemos imponer condiciones de frontera apropiadas sobre la componente de la derivada del potencial en la dirección normal al disco, de modo que la densidad superficial de masa se anule fuera de éste. Ahora bien, si utilizamos las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) , las condiciones de contorno necesarias para satisfacer el requerimiento anterior llevan a un problema de frontera de difícil solución, dado que dichas coordenadas no están adaptadas a la geometría de la fuente del campo gravitacional.

De acuerdo con lo anterior introduciremos, en la sección 2.2, un sistema de coordenadas que nos permita expresar, de manera natural, nuestro modelo

de galaxia como un disco delgado de radio finito. Para tal fin utilizaremos el sistema de coordenadas esferoidales oblatas. La ventaja con este sistema de coordenadas radica en que, no solamente describe apropiadamente la simetría contenida en nuestro problema, sino que también es uno de los once sistemas de coordenadas en que la ecuación de Laplace (1.14) se puede resolver de manera exacta mediante la técnica de separación de variables, por lo que las ecuaciones diferenciales allí presentes tendrán una sencilla forma de solucionar, como lo veremos en en la sección 2.3, y la estructura matemática del campo gravitacional tendrá una forma explícita simple.

2.2. EL SISTEMA DE COORDENADAS

El sistema de coordenadas esferoidales oblatas es generado tomando una familia de elipses e hipérbolas confocales y rotandolas alrededor del eje menor de las elipses. Estas elipses e hipérbolas tienen sus focos comunes en $y = a$, $y = -a$, de manera que el semieje menor b estará ubicado en la dirección del eje Z , mientras que sobre el eje Y estará ubicado el semieje mayor c [14].

Empecemos por considerar el plano YZ de las coordenadas elípticas planas y definamos la ecuación de cada elipse coordenada como

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$y = c \operatorname{sen}(u), \quad (2.2a)$$

$$z = b \operatorname{cos}(u). \quad (2.2b)$$

Recordando que la la distancia focal y los semiejes satisfacen la relación

$$a^2 = c^2 - b^2, \quad (2.3)$$

podemos parametrizar c y b como

$$c = a \cosh(v), \quad (2.4a)$$

$$b = a \sinh(v), \quad (2.4b)$$

en donde el parámetro a es constante para todas las elipses, mientras que v caracteriza a cada elipse coordenada. Introduciendo estas últimas ecuaciones en (2.2a) y (2.2b), obtenemos las ecuaciones que definen a cada elipse coordenada:

$$y = a \cosh(v) \sen(u), \quad (2.5a)$$

$$z = a \sinh(v) \cos(u). \quad (2.5b)$$

Las otras curvas coordenadas de este sistema son las hipérbolas focalizadas en $y = \pm a$, cuya ecuación es

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.6)$$

la cual puede parametrizarse como:

$$y = c \cosh(v), \quad (2.7a)$$

$$z = b \sinh(v). \quad (2.7b)$$

En este caso la distancia focal y los semiejes se relacionan mediante la ecuación

$$a^2 = c^2 + b^2. \quad (2.8)$$

de modo que podemos expresar c y b como,

$$c = a \sen(u), \quad (2.9a)$$

$$b = a \cos(u), \quad (2.9b)$$

siendo u el parametro que caracteriza a cada hipérbola coordenada.

De igual manera como lo hicimos para las elipses, reemplazando (2.9a) y (2.9b) en (2.7a) y (2.7b), encontramos las ecuaciones que definen a cada hipérbola coordenada.

$$y = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u), \quad (2.10a)$$

$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u). \quad (2.10b)$$

Podemos ver que estas últimas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (2.5a) (2.5b), que definen a cada elipse coordenada. Esto quiere decir que podemos asociar a cada punto del sistema de coordenadas cartesianas (y, z) un punto que es la intersección de las elipses e hipérbolas (v, u) , con lo cual podemos establecer (2.5a) y (2.5b), como las transformaciones que relacionan el sistema de coordenadas cartesiano (y, z) y el sistema de coordenadas elípticas planas (v, u) .

Ahora bien, para obtener el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, rotamos el sistema de coordenadas elípticas planas alrededor del eje z un ángulo ϕ . Anteriormente ubicamos las elipses e hipérbolas confocales sobre el plano YZ , ahora al hacer la rotación, ubiquémonos sobre el plano RZ , en donde los puntos ubicados sobre este tienen coordenadas elípticas (2.5a) y (2.5b) dadas por:

$$R = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u), \quad (2.11a)$$

$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u). \quad (2.11b)$$

Como el ángulo formado por los planos XZ y RZ es ϕ , el cual varía entre $0 < \phi \leq 2\pi$, las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas

(R, ϕ, z) se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = R \cos(\phi), \quad (2.12a)$$

$$y = R \operatorname{sen}(\phi), \quad (2.12b)$$

$$z = z. \quad (2.12c)$$

Reemplazando (2.11a) y (2.11b) en las expresiones anteriores obtenemos:

$$x = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u) \cos(\phi), \quad (2.13a)$$

$$y = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(\phi), \quad (2.13b)$$

$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u), \quad (2.13c)$$

expresiones que relacionan el sistema de coordenadas cartesianas con el sistema de coordenadas esferoidales oblatas.

Con el fin de obtener unas expresiones más convenientes para nuestros propósitos posteriores, hacemos el cambio de variable

$$\xi = \operatorname{senh}(v), \quad (2.14a)$$

$$\eta = \cos(u), \quad (2.14b)$$

con $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Reemplazando entonces en (2.13a) - (2.13c), obtenemos

$$x = a \sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\phi), \quad (2.15a)$$

$$y = a \sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2} \operatorname{sen}(\phi), \quad (2.15b)$$

$$z = a \xi \eta. \quad (2.15c)$$

Estas últimas ecuaciones son las transformaciones entre el sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y el sistema de coordenadas (ξ, η, ϕ) , las cuales comunmente se denominan también como coordenadas esferoidales oblatas.

Las relaciones anteriores nos permiten también expresar las transformaciones entre el sistema de coordenadas cilíndricas (R, z) y las coordenadas esferoidales oblatas (ξ, η) , dadas por:

$$R^2 = a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (2.16a)$$

$$z = a\xi\eta. \quad (2.16b)$$

Finalmente, con (2.16a) y (2.16b), hemos encontrado la forma más usual y conveniente de expresar el sistema de las coordenadas esferoidales oblatas, cuyas superficies coordenadas son esferoides oblatos, con ecuación

$$\frac{R^2}{a^2(1 + \xi^2)} + \frac{z^2}{a^2\xi^2} = 1, \quad (2.17)$$

para ξ constante, e hiperboloides de una hoja con ecuación

$$\frac{R^2}{a^2(1 - \eta^2)} - \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1, \quad (2.18)$$

para η constante.

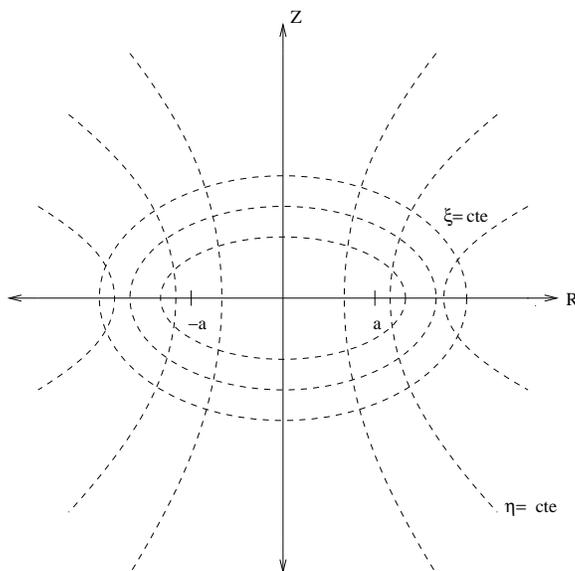


Figura 2.1: Coordenadas Esferoidales Oblatas

Vamos ahora a expresar las variables $\xi = \sinh(v)$ y $\eta = \cos(u)$ explícitamente en términos de R y z , para simplificar los procedimientos necesarios al realizar más adelante los cálculos de la densidad superficial de masa y la velocidad circular. Para esto despejemos η de (2.16b) y reemplacemos en (2.16a), obteniendo

$$0 = a^2\xi^4 + \xi^2(a^2 - z^2 - R^2) - z^2.$$

Despejando entonces ξ^2 , tenemos que

$$\xi^2 = \frac{-(a^2 - z^2 - R^2) + \sqrt{(a^2 - z^2 - R^2)^2 + 4a^2z^2}}{2a^2}. \quad (2.19)$$

donde tomamos el signo positivo considerando que $0 \leq \xi < \infty$. Si ahora definimos,

$$R_+^2 = R^2 + (z + ia)^2, \quad (2.20a)$$

$$R_-^2 = R^2 + (z - ia)^2, \quad (2.20b)$$

podemos escribir la solución de la ecuación cuadrática (2.19) como

$$\xi = \frac{R_+ + R_-}{2a}. \quad (2.21)$$

Realizando el mismo procedimiento que se utilizó para ξ , encontramos análogamente que para η se obtiene

$$\eta = \frac{R_+ - R_-}{2ia}. \quad (2.22)$$

Esta coordenada presenta una discontinuidad en el plano $z=0$, puesto que su valor cambia de signo al atravesar el plano $z = 0$; es decir, $\lim_{z=0^-} \eta = -\lim_{z=0^+} \eta$.

Para terminar, sólo nos falta definir los factores de escala, los cuales se definen como [2]:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2, \quad (2.23)$$

donde los q_i son las coordenadas curvilineas, con $i = 1, 2, 3$, y cada subíndice representa a ξ, η, ϕ respectivamente. De acuerdo con (2.15a)-(2.15c), los factores de escala son:

$$h_\xi = a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2}}, \quad (2.24a)$$

$$h_\eta = a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad (2.24b)$$

$$h_\phi = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}. \quad (2.24c)$$

Como veremos en la siguiente sección, la forma general de la ecuación de Laplace se expresa en términos de los factores de escala, por lo que estas últimas ecuaciones serán de gran utilidad en la solución de dicha ecuación.

2.3. SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DE LAPLACE

Ahora volvemos a nuestro problema principal de determinar el potencial gravitacional para puntos exteriores a la galaxia. Como vimos anteriormente, con la obtención de dicho potencial emprenderemos la tarea de encontrar la distribución de masa y velocidad que nos da el conjunto completo de cantidades físicas importantes que describen nuestro modelo. En esta sección nuestro objetivo es encontrar la forma general que adquiere el potencial, para lo cual será necesario resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, cuya solución estará dada en términos de los polinomios de Legendre de primera clase y las funciones de Legendre de segunda clase [2, 16].

Si tomamos el caso en que $\xi = 0$ en (2.16a) y (2.16b), tenemos que $z = 0$ y $0 \leq R \leq a$, lo cual representa un disco delgado de radio $R = a$. Entonces,

en el disco ξ es igual a 0, mientras que η , según (2.16a) y (2.16b), adquiere el siguiente valor:

$$\eta = \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Con el fin de obtener una distribución de materia discoidal de extensión finita con una densidad superficial de masa distinta de cero, imponemos las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0; \quad R \leq a, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0; \quad R > a, \quad (2.27)$$

con lo que se garantiza que la distribución de masa está confinada al disco $z = 0, 0 \leq R \leq a$.

En coordenadas curvilíneas ortogonales (q_1, q_2, q_3) , la ecuación de Laplace está dada por la siguiente expresión [2]:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \right) = 0, \quad (2.28)$$

donde los coeficientes h_i son los factores de escala, que relacionan las coordenadas curvilineas (q_1, q_2, q_3) con las coordenadas cartesianas (x, y, z) , y están dados por (2.24a)-(2.24c). Introduciendo los factores de escala en (2.28) y realizando las correspondientes simplificaciones algebraicas, da como resultado la expresión que representa la ecuación de Laplace axialmente simétrica en coordenadas esferoidales oblatas, que se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (2.29)$$

Nuestro problema a seguir es el de encontrar la solución general que adopta $\Phi(\xi, \eta)$, para lo cual basta con resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que aparecen en (2.29).

El camino más fácil para tratar una ecuación diferencial parcial como (2.29) es transformarla en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual se puede hacer si hacemos una separación de variables escogiendo [2, 16]

$$\Phi(\xi, \eta) = M(\xi)N(\eta). \quad (2.30)$$

Introduciendo la función (2.30) en (2.29), y dividiendo el resultado por $\Phi(\xi, \eta)$, obtenemos

$$\frac{1}{M} \frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{dM}{d\xi} \right] + \frac{1}{N} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] = 0. \quad (2.31)$$

Como podemos ver claramente, la ecuación anterior viene representada por dos bloques de funciones, uno que sólo depende de ξ y otro que sólo depende de η , por lo que ahora podemos igualar cada lado de la ecuación a una constante de separación j , que escogemos de manera que

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 + 1) \frac{dM}{d\xi} \right] - jM = 0, \quad (2.32)$$

y

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + jN = 0. \quad (2.33)$$

Esta última ecuación no es más que la conocida ecuación de Legendre.

La ecuación (2.32), aunque no es exactamente igual a esta última, es bastante parecida y puede adoptar la misma forma si definimos

$$\xi = i\varepsilon,$$

de modo que

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varepsilon}.$$

Reemplazando lo anterior en (2.32), obtenemos,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{dM}{d\varepsilon} \right] + jM = 0, \quad (2.34)$$

que es idéntica a (2.33), la ecuación de Legendre pero esta vez para M .

El método utilizado para resolver las ecuaciones (2.33) y (2.34), es plantear soluciones en series de potencias de la forma:

$$N(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{k+n}, \quad (2.35a)$$

$$M(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^{k+n}. \quad (2.35b)$$

Derivando estas expresiones y reemplazando en (2.33) y (2.34), respectivamente, encontramos que las soluciones propuestas divergen; por lo tanto, para resolver este problema las series deben cortarse escogiendo apropiadamente la constante de separación j a fin de que los coeficientes de las series, a_n y b_n , sean cero despues de un determinado valor, de modo que las series infinitas se reduzcan a polinomios finitos.

Fácilmente se puede probar que la constante de separación debe escogerse en la forma $j = n(n+1)$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, con lo que (2.33) y (2.34) adquieren la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dN}{d\eta} \right] + n(n+1)N = 0. \quad (2.36a)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{dM}{d\varepsilon} \right] + n(n+1)M = 0, \quad (2.36b)$$

cuyas soluciones son [5, 14]:

$$N = A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta), \quad (2.37a)$$

$$M = D_n P_n(i\xi) + E_n Q_n(i\xi), \quad (2.37b)$$

en donde los P_n son los polinómios de Legendre y los Q_n son las funciones de Legendre de segunda clase, A_n, B_n, D_n, E_n son constantes arbitrarias.

Es conveniente escribir los P_n y los Q_n de argumento imaginario de la siguiente manera [5]:

$$p_n(\xi) = i^{-n} P_n(i\xi), \quad (2.38a)$$

$$q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi), \quad (2.38b)$$

de modo que cuando n es cero o un entero positivo tenemos las siguientes expresiones:

$$p_n(\theta) = (-1)^n \frac{1}{n!} (\text{sen } \beta)^{n+1} \left(\frac{d}{\text{sen } \beta d\beta} \right)^n (\text{cosec } \beta), \quad (2.39a)$$

$$q_n(\theta) = \frac{1}{n!} (\text{sen } \beta)^{n+1} \left(\frac{d}{\text{sen } \beta d\beta} \right)^n (\beta \text{ cosec } \beta), \quad (2.39b)$$

siendo $\theta = \cot \beta$.

Con lo dicho anteriormente (2.37b), se puede reescribir de la siguiente manera

$$M = H_n p_n(\xi) + K_n q_n(\xi), \quad (2.40)$$

de modo que, de acuerdo con (2.30), la solución general para la ecuación de Laplace se escribe como

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} [H_n p_n(\xi) + K_n q_n(\xi)] [A_n P_n(\eta) + B_n Q_n(\eta)]. \quad (2.41)$$

Sin embargo, la ecuación anterior no es todavía el resultado final que hemos estado buscando en esta sección. Falta someter esta ecuación a ciertas condiciones físicas de contorno.

La primera condición de contorno que debemos imponer es que a una distancia suficientemente grande de la fuente del campo gravitacional, el potencial gravitacional debe anularse; es decir,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi(\xi, \eta) = 0. \quad (2.42)$$

Para que esta condición se satisfaga debemos tener en cuenta que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_n(\xi) = \infty,$$

para $n > 0$, y

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} q_n(\xi) = 0,$$

lo que implica que en (2.41) debemos hacer $H_n=0$ para que se cumpla la condición (2.42).

La otra condición de contorno que debemos plantear es que sobre el eje de simetría, $\eta = \pm 1$, se debe garantizar que el potencial no presente singularidades. Para que esta condición se cumpla debemos tener en cuenta que

$$Q_n(\pm 1) = \infty. \quad (2.43)$$

Esto implica que sea necesario hacer $B_n=0$ en (2.41) para que esta condición se satisfaga. Estas dos condiciones de contorno simplifican la expresión encontrada inicialmente para $\Phi(\xi, \eta)$, quedando entonces como

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n q_n(\xi) P_n(\eta), \quad (2.44)$$

donde C_n es una constante arbitraria y el signo menos se escoge teniendo en cuenta que el potencial gravitacional es atractivo.

Ahora bien, dada la discontinuidad de la coordenada η sobre el disco, la solución debe escogerse en términos de polinomios de Legendre y funciones de Legendre de orden par para garantizar que el potencial sea continuo, con lo que (2.44) se puede escribir así [11]:

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta). \quad (2.45)$$

Este es el resultado que hemos venido buscando a lo largo de este capítulo y que en adelante será de crucial importancia, debido a que es la base fundamental

en el desarrollo de las otras dos cantidades importantes que describen nuestro modelo, la densidad superficial de masa y la velocidad circular, que serán analizadas en nuestro siguiente capítulo para una serie de modelos particulares obtenidos tomando valores específicos para las constantes C_{2n} en la solución general (2.45).

Capítulo 3

MODELOS PARTICULARES

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo aplicaremos los conceptos y definiciones presentados en los capítulos anteriores para estudiar algunos modelos particulares de galaxias discoidales, tomando casos particulares de la solución general para el potencial gravitacional obtenida en el capítulo anterior. Los casos particulares serán escogidos asignando valores apropiados a las constantes C_{2n} con el fin de que el potencial gravitacional represente una familia de discos que posean densidades superficiales de masa con un comportamiento razonablemente aceptable.

De acuerdo con lo anterior, en la sección 3.2, obtenemos la expresión general para la densidad superficial de masa de la familia de modelos obtenida usando la solución general (2.45). A continuación, formulamos un criterio para la escogencia de las constantes C_{2n} exigiendo que la densidad superficial de masa de los discos obtenidos presente un máximo en el centro del disco, disminuyendo luego hasta anularse en el borde del disco. En la sección 3.3 obtenemos la expresión general para la velocidad circular asociada a los modelos considerados.

En ambos casos consideramos varios miembros de la familia y estudiamos su comportamiento mediante un análisis gráfico de las densidades y velocidades correspondientes. Finalmente, en la sección 3.4, analizamos la estabilidad de los modelos con respecto a perturbaciones radiales estudiando, también gráficamente, el comportamiento del momentum angular por unidad de masa.

3.2. DENSIDAD SUPERFICIAL DE MASA Y POTENCIAL GRAVITACIONAL

Retomando lo dicho en el capítulo 1, la densidad superficial de masa para una distribución superficial de materia axialmente simétrica viene dada por

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0}, \quad (3.1)$$

en donde Φ es el potencial Newtoniano encontrado al final del capítulo anterior, dado por

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.2)$$

así que un conocimiento del potencial gravitacional nos permite determinar la expresión correspondiente para $\Sigma(R)$.

Derivando (3.2) con respecto a z , obtenemos

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi G} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} \left[P_{2n}(\eta) \frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial z} + Q_{2n}(i0) \frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial z} \right], \quad (3.3)$$

en donde

$$\frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial z} = i Q'_{2n}(i0) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (3.4)$$

y

$$\frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial z} = P'_{2n}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Por otro lado, utilizando (2.20a) - (2.22), encontramos que

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{a\eta}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

Los valores de ξ y η están determinados por las condiciones $\eta = \sqrt{1 - (R/a)^2}$ y $\xi = 0$, con el fin de restringirnos al disco galáctico.

Reemplazando estos valores de ξ y η en (3.3), obtenemos

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+2} C_{2n} P_{2n}(\eta) Q'_{2n}(i0). \quad (3.8)$$

Utilizando las formulas de recurrencia de los polinomios de Legendre [2], y recordando que en el disco $\xi=0$, tenemos que

$$Q'_{2n}(i0) = -(2n+1)Q_{2n+1}(i0); \quad (3.9)$$

así, al reemplazar en (3.8), encontramos finalmente que

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{2n} (2n+1) P_{2n}(\eta) Q_{2n+1}(i0). \quad (3.10)$$

Esta expresión nos da entonces la densidad superficial de masa para las galaxias asociadas con el potencial (3.2).

Vamos ahora a escoger las constantes C_{2n} de manera que el potencial gravitacional (3.2) represente una familia de discos que posean densidades superficiales de masa con un comportamiento razonablemente aceptable; para ser más precisos, vamos a escoger dichas constantes exigiendo que la densidad superficial de masa de los discos obtenidos presente un máximo en el centro del disco, disminuyendo luego hasta anularse en el borde del disco.

Teniendo en cuenta (3.10), vamos a suponer que la densidad superficial puede escribirse de la siguiente manera

$$\Sigma(R) = \frac{F(\eta)}{2\pi a G \eta}, \quad (3.11)$$

en donde $F(\eta)$ debe ser una función tal que cumpla con la condición

$$M = \int_0^a \Sigma(R) dA, \quad (3.12)$$

en donde M es la masa total del disco y dA es el elemento diferencial de área. Igualmente, debemos exigir que:

$$\Sigma(a) = 0, \quad (3.13a)$$

$$\Sigma(0) = \Sigma_{max}. \quad (3.13b)$$

Una escogencia posible para la función $F(\eta)$ que satisface las condiciones requeridas es [11]

$$F(\eta) = (2m + 1) \frac{MG}{a} \eta^{2m}, \quad (3.14)$$

donde m es un entero positivo. Con esta escogencia de $F(\eta)$, la densidad superficial de masa, para $m \neq 0$, presenta el comportamiento deseado por nuestro modelo.

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (3.10), la función $F(\eta)$ puede escribirse en la forma

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (3.15)$$

con

$$K_{2n} = (-1)^{n+1} (2n + 1) Q_{2n+1}(i0) C_{2n}. \quad (3.16)$$

Lo anterior es equivalente a decir que la función $F(\eta)$ puede expresarse como una expansión de Legendre; es decir, como un desarrollo en una serie de polinomios de Legendre [2, 9]. La suposición de que la serie (3.15) converge a (3.14) en el intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ exige que $F(\eta)$ y $F'(\eta)$ sean, al menos, seccionalmente continuas en este intervalo. Los coeficientes K_{2n} se encuentran entonces multiplicando la serie por $P_{2m}(\eta)$ e integrando término a término.

m	n=0 C_0	n=1 C_2	n=2 C_4	n=3 C_6	n=4 C_8	n=5 C_{10}
m=0	$\frac{MG}{a}$					
m=1	$\frac{MG}{a}$	$\frac{MG}{a}$				
m=2	$\frac{MG}{a}$	$\frac{10MG}{7a}$	$\frac{3MG}{7a}$			
m=3	$\frac{MG}{a}$	$\frac{5MG}{3a}$	$\frac{9MG}{11a}$	$\frac{5MG}{33a}$		
m=4	$\frac{MG}{a}$	$\frac{20MG}{11a}$	$\frac{162MG}{143a}$	$\frac{4MG}{11a}$	$\frac{7MG}{143a}$	
m=5	$\frac{MG}{a}$	$\frac{25MG}{13a}$	$\frac{18MG}{13a}$	$\frac{10MG}{17a}$	$\frac{35MG}{247a}$	$\frac{63MG}{4199a}$

Tabla 3.1: Valores de C_{2n} para $m = 0, \dots, 5$.

Usando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre [2], obtenemos

$$K_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^1 F(\eta) P_{2n}(\eta). \quad (3.17)$$

Evaluando la integral, ver referencias [2, 3, 9], la ecuación anterior se expresa de la siguiente forma:

$$K_{2n} = \frac{(4n+1)MG}{2a} (2m+1) \left[\frac{2\pi^{1/2} 2^{-(2m+1)} \Gamma(2m+1)}{\Gamma(1+m-n) \Gamma(m+n+3/2)} \right]. \quad (3.18)$$

Igualando entonces (3.16) y (3.18), y utilizando las propiedades de la función Gamma, obtenemos:

$$C_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} (4n+1) (2m+1)! \Gamma(m-n+1/2)}{(2n+1) 2^{2n+1} (2m-2n)! \Gamma(m+n+3/2) Q_{2n+1}(i0)} \frac{MG}{a}, \quad (3.19)$$

de modo que para $n > m$, $C_{2n} = 0$. Así, escogiendo las constantes C_{2n} de esta manera, garantizamos que (3.11) representa una familia de discos con densidad superficial de masa asociada dada por:

$$\Sigma_m(R) = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2} \left[1 - \frac{R^2}{a^2} \right]^{m-1/2}, \quad (3.20)$$

donde M es la masa de cada disco y $0 \leq R \leq a$. En la tabla 3.1 se presentan los valores de las constantes C_{2n} para $m = 0, \dots, 5$.

Utilizando los valores de la tabla 3.1, los cuatro primeros miembros de la familia de discos tienen los siguientes potenciales asociados Φ_m :

$$\Phi_0(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a} \cot^{-1} \xi, \quad (3.21)$$

$$\Phi_1(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + \frac{(3\eta^2 - 1)}{4} [(3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi] \right], \quad (3.22)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + \mathbf{K}(3\eta^2 - 1) + \mathbf{L}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right], \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\xi, \eta) &= -\frac{MG}{a} \left[\cot^{-1} \xi + \mathbf{N}(231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5) \right] \\ &\quad -\frac{MG}{a} \left[\frac{7}{6} \mathbf{K}(3\eta^2 - 1) + \frac{21}{11} \mathbf{L}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

en donde

$$\mathbf{K} = \frac{5}{14} [(3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi],$$

$$\mathbf{L} = \frac{3}{448} \left[(35\xi^4 + 30\xi^2 + 3) \cot^{-1} \xi - 35\xi^3 - \frac{55}{3}\xi \right],$$

$$\mathbf{N} = \frac{5}{8448} \left[(231\xi^6 + 315\xi^4 + 105\xi^2 + 15) \cot^{-1} \xi - 231\xi^5 - 238\xi^3 - \frac{231}{5}\xi \right].$$

Las densidades superficiales de masa correspondientes a los anteriores potenciales son:

$$\Sigma_0(R) = \frac{M}{2\pi a}(a^2 - R^2)^{-1/2}, \quad (3.25)$$

$$\Sigma_1(R) = \frac{3M}{2\pi a^3}(a^2 - R^2)^{1/2}, \quad (3.26)$$

$$\Sigma_2(R) = \frac{5M}{2\pi a^5}(a^2 - R^2)^{3/2}, \quad (3.27)$$

$$\Sigma_3(R) = \frac{7M}{2\pi a^7}(a^2 - R^2)^{5/2}. \quad (3.28)$$

Con el fin de analizar gráficamente el comportamiento de las densidades, es conveniente introducir la cantidad adimensional $\tilde{\Sigma}_m(\tilde{R})$, definida mediante la relación

$$\tilde{\Sigma}_m(\tilde{R}) = \frac{\pi a^2}{M}\Sigma_m(R), \quad (3.29)$$

en donde

$$\tilde{R} = \frac{R}{a}, \quad (3.30)$$

para $0 \leq \tilde{R} \leq 1$. De acuerdo con esto, podemos reescribir (3.20) de la siguiente manera:

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{R})_m = \frac{2m+1}{2}(1 - \tilde{R}^2)^{m-1/2}. \quad (3.31)$$

En la figura 3.1 representamos gráficamente el comportamiento de la densidad superficial de masa para los modelos correspondientes a $m = 0, \dots, 8$.

El primer miembro de la familia de discos expresado en (3.21), es decir el término monopolar, presenta una singularidad de la densidad superficial de masa sobre el borde del disco, como se ve en la figura 3.1. Este caso no representa alguna significación física de interés debido a que en el borde del disco, según

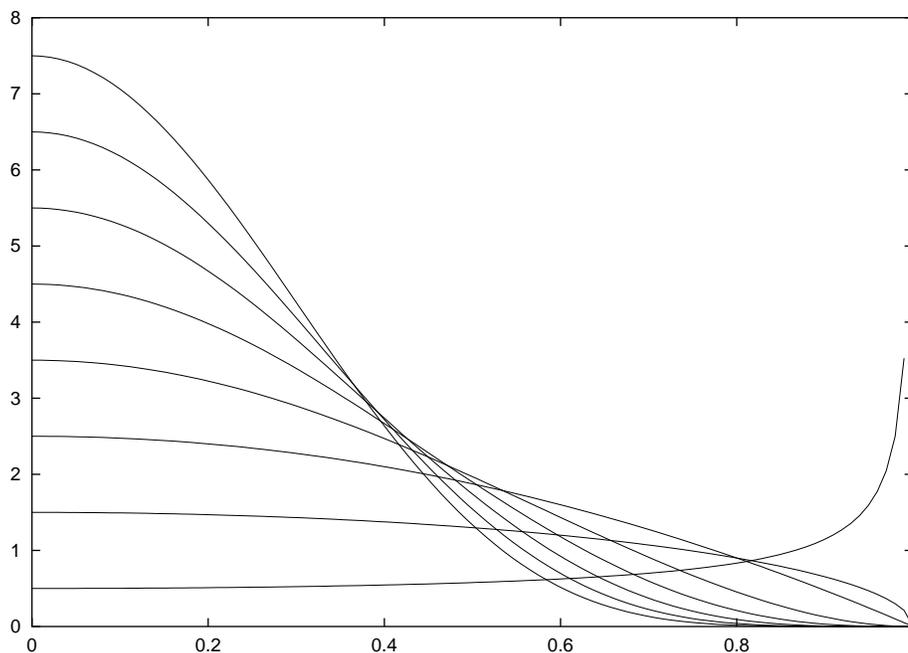


Figura 3.1: Gráfica de $\tilde{\Sigma}$ contra \tilde{R} para los primeros ocho miembros de la familia de discos. El término $m = 0$ representa la curva que tiene una densidad máxima de 0.5 en el centro del disco, y tiende a infinito en $\tilde{R} = 1$. Las curvas de densidad superficial de masa cuyos valores en el centro del disco son 1.5, 2.5, 3.5, ..., corresponden a $m = 1, 2, 3, \dots$, respectivamente.

(3.13a), la densidad debe ser cero. El segundo miembro de la familia, es decir la superposición del término monopolar y cuadrupolar, presenta un mejor comportamiento de la densidad superficial de masa, pues para este caso toma un valor máximo en el centro del disco y cero sobre el borde de este, como se ve en (3.26), cumpliendo con lo requerido en (3.13a) y (3.13b). El tercer y siguientes miembros tienen un comportamiento de $\tilde{\Sigma}_m(\tilde{R})$ con las mismas características como en el caso anterior, con la diferencia que a medida que se toma un término mayor en la familia de discos la densidad superficial de masa se va a concentrar más cerca del centro del disco.

3.3. VELOCIDAD CIRCULAR

La otra propiedad física de interés para nuestro modelo es la velocidad circular la cual, como mostramos en el capítulo 1, viene dada por:

$$V_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (3.32)$$

De igual manera que en la sección anterior, con el conocimiento de Φ , podemos hallar V_c derivando (3.2) con respecto a R , obteniendo

$$V_c^2(R) = -R \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} \left[P_{2n}(\eta) \frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial R} + Q_{2n}(i0) \frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial R} \right], \quad (3.33)$$

en donde,

$$\frac{\partial Q_{2n}(i0)}{\partial R} = i Q'_{2n}(i0) \frac{\partial \xi}{\partial R}, \quad (3.34)$$

y

$$\frac{\partial P_{2n}(\eta)}{\partial R} = P'_{2n}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial R}. \quad (3.35)$$

al igual que en la sección anterior, utilizando (2.20a) - (2.22), tenemos que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial R} = 0, \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial R} = -\frac{R}{a^2 \eta}. \quad (3.36b)$$

Reemplazando lo anterior en (3.33), obtenemos

$$V_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i0) P'_{2n}(\eta), \quad (3.37)$$

donde, como en el caso de la densidad superficial de masa, expresamos el resultado en términos de la coordenada adimensional $\tilde{R} = R/a$.

Finalmente con (3.37) hemos encontrado la forma general de la velocidad circular de rotación que describe nuestro modelo. El inconveniente con esta expresión radica, básicamente, en que la serie infinita no se puede expresar como una

función $G(\eta)$ que nos permita obtener una forma compacta de V_c^2 , tal como lo hicimos en la sección anterior para $\tilde{\Sigma}(\tilde{R})$. Este inconveniente no presenta gran problema, pues si tomamos término a término de la serie (3.37), con ayuda de las tablas de los polinomios y funciones de Legendre [2], se obtiene igualmente el resultado de V_c^2 , con la diferencia que las expresiones algebraicas resultantes requieren de cuidado al simplificar.

De acuerdo con lo anterior, la velocidad circular para los primeros seis miembros de la familia de discos está dada por:

$$V_{c_0}^2 = 0, \quad (3.38)$$

$$V_{c_1}^2 = \frac{3\pi MG}{4a} \tilde{R}^2, \quad (3.39)$$

$$V_{c_2}^2 = \frac{15\pi MG}{32a} \tilde{R}^2(4 - 3\tilde{R}^2), \quad (3.40)$$

$$V_{c_3}^2 = \frac{105\pi MG}{256a} \tilde{R}^2(5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8), \quad (3.41)$$

$$V_{c_4}^2 = \frac{315\pi MG}{4096a} \tilde{R}^2(-35\tilde{R}^6 + 120\tilde{R}^4 - 144\tilde{R}^2 + 64), \quad (3.42)$$

$$V_{c_5}^2 = \frac{3465\pi MG}{65536a} \tilde{R}^2(63\tilde{R}^8 - 280\tilde{R}^6 + 480\tilde{R}^4 - 384\tilde{R}^2 + 128). \quad (3.43)$$

Con el fin de analizar gráficamente el comportamiento de las velocidades circulares, al igual como hicimos en el caso de las densidades superficiales, es conveniente introducir cantidades adimensionales; por lo tanto, definimos la velocidad circular adimensional como $\tilde{V}_{c_m}(\tilde{R}) = (\frac{a}{MG})^{1/2} V_{c_m}$. En las figuras 3.2 - 3.4 se muestran las curvas de rotación correspondientes a los modelos de discos obtenidos tomando $m = 0, \dots, 30$.

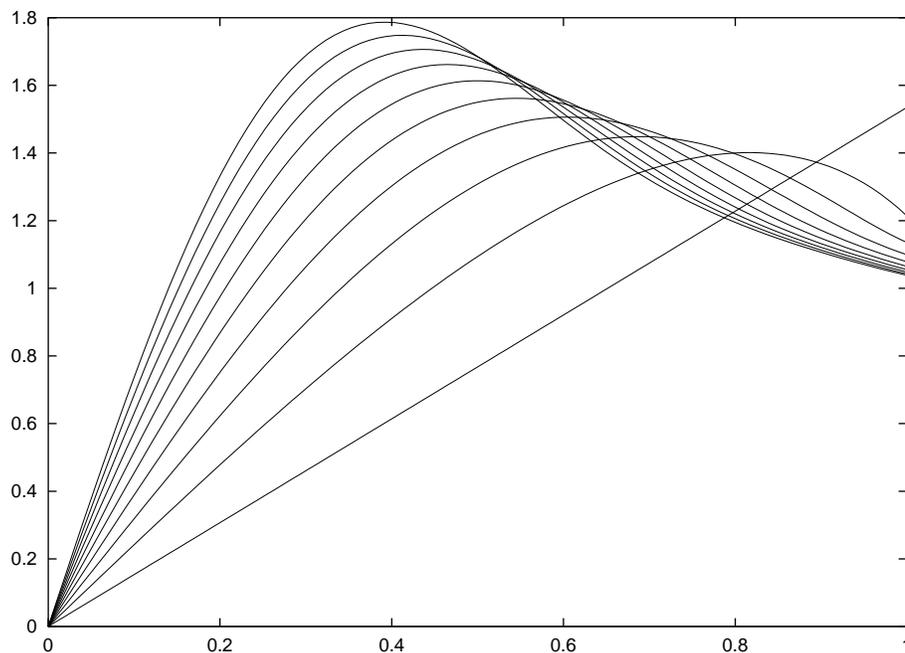


Figura 3.2: Gráfica de \tilde{V}_c en función de \tilde{R} para los primeros once miembros de la familia de discos. La línea recta que se observa representa la velocidad circular para $m = 1$. Las curvas de rotación para $m = 2, \dots, 10$, son las que siguen a la línea recta, respectivamente.

En la figura 3.2 se representan las velocidades circulares asociadas con los primeros 11 términos de la familia de discos. Como el potencial (3.21) permanece constante en el disco, la velocidad circular asociada con dicho potencial es cero. La curva de rotación correspondiente a $m = 1$ presenta un comportamiento lineal en función del radio del disco, como se observa en la gráfica. La curva de rotación asociada con el tercer miembro de la familia de discos presenta un comportamiento diferente a los dos casos anteriores; en este caso, se puede ver que a medida que la distribución de estrellas disminuye, la velocidad circular aumenta hasta un radio crítico. Cuando llega a dicho radio crítico la densidad de estrellas en ese punto alcanza la velocidad circular máxima, y a partir de este punto la densidad de estrellas continua disminuyendo, al igual que la velocidad circular.

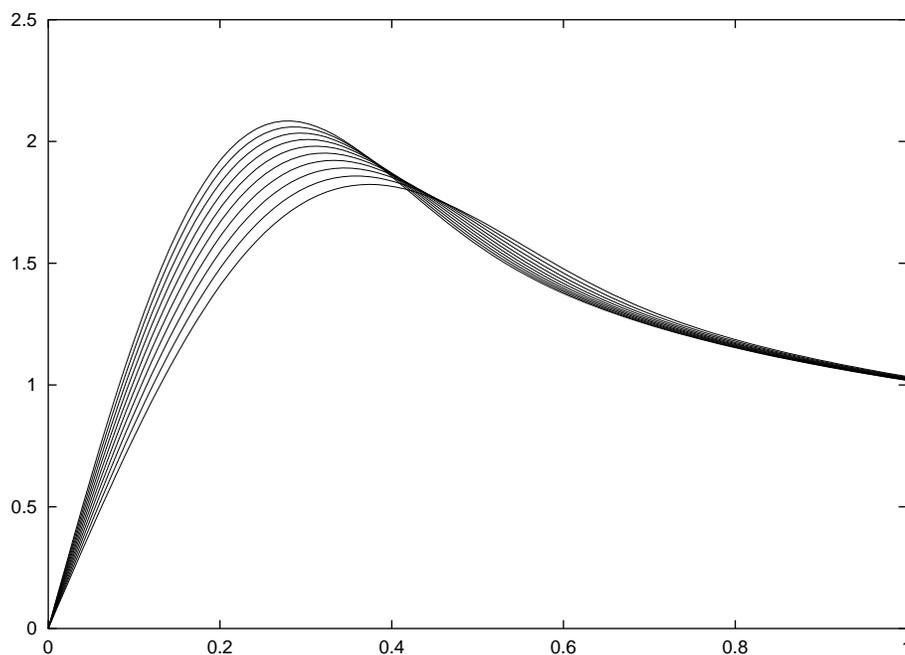


Figura 3.3: Gráfica de \tilde{V}_c Vs \tilde{R} para $m = 11, \dots, 20$. El comportamiento y las características de estas curvas son similares a las de la figura 3.2.

Las siguientes curvas de rotación en la figura 3.2, tienen un comportamiento con las mismas características como el caso anterior. Las figuras 3.3 y 3.4, muestra las curvas de rotación asociadas con los veinte siguientes términos de la familia de discos, separados de diez en diez respectivamente, las cuales presentan un comportamiento similar a las de la figura 3.2 con $m \geq 2$. En estas figuras se puede apreciar que a medida que se va tomando un término mayor de la familia de discos, la velocidad circular se hace máxima para un punto crítico que se encuentra cada vez más cerca al centro de la galaxia, aproximándose en el borde del disco a uno.

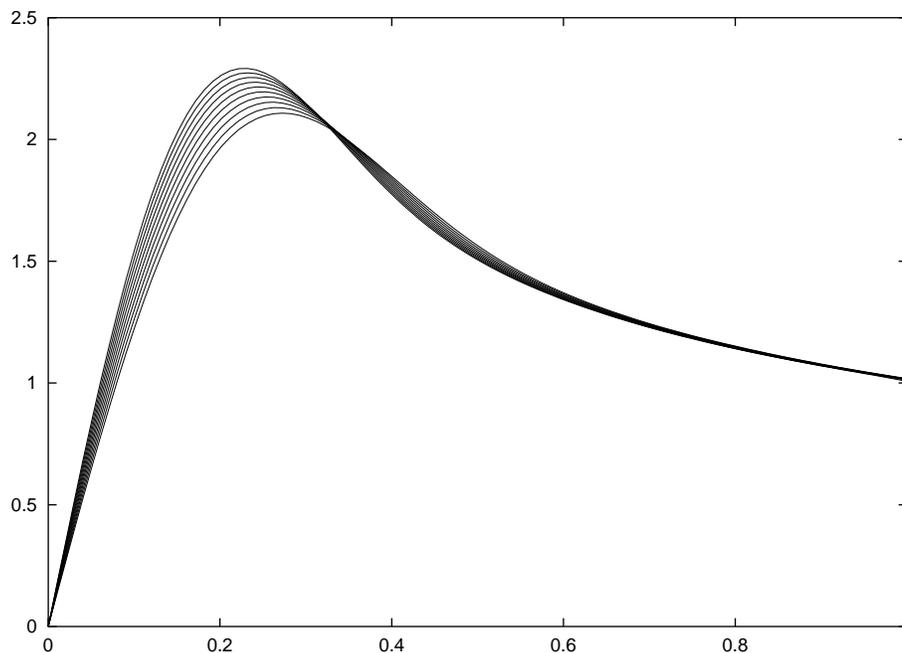


Figura 3.4: Gráfica de \tilde{V}_c contra \tilde{R} para $m = 21, \dots, 30$.

3.4. ESTABILIDAD DEL MODELO

La última propiedad que nos falta particularizar para terminar con nuestro modelo es el momentum angular por unidad de masa h , definido como

$$h^2 = R^3 \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (3.44)$$

$$h = R V_c. \quad (3.45)$$

Entonces, con el conocimiento de la velocidad circular podemos saber la forma general que adquiere el momentum angular por unidad de masa h , para lo cual basta con reemplazar (3.37) en (3.45), obteniendose

$$h = \frac{a \tilde{R}^2}{(1 - \tilde{R}^2)^{1/4}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} C_{2n} Q_{2n}(i0) P'_{2n}(\eta) \right)^{1/2}, \quad (3.46)$$

donde, como en el caso de la velocidad circular, expresamos el resultado en términos de la coordenada adimensional $\tilde{R} = R/a$.

De acuerdo con lo anterior, el momentum angular por unidad de masa para los primeros cinco miembros de la familia de discos está dada por:

$$h_0 = 0 \quad (3.47)$$

$$h_1 = \left(\frac{3\pi aMG}{4} \right)^{1/2} \tilde{R}^2 \quad (3.48)$$

$$h_2 = \left(\frac{15\pi aMG}{32} \right)^{1/2} \tilde{R}^2 (4 - 3\tilde{R}^2)^{1/2} \quad (3.49)$$

$$h_3 = \left(\frac{105\pi aMG}{256} \right)^{1/2} \tilde{R}^2 (5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8)^{1/2} \quad (3.50)$$

$$h_4 = \left(\frac{315\pi aMG}{4096} \right)^{1/2} \tilde{R}^2 (-35\tilde{R}^6 + 120\tilde{R}^4 - 144\tilde{R}^2 + 64)^{1/2}. \quad (3.51)$$

Como vimos en el capítulo 1 los modelos de discos serán estables contra perturbaciones radiales cuando el momentum angular por unidad de masa h sea una función monotonamente creciente de la coordenada radial R . Así entonces, con el fin de analizar el comportamiento de la estabilidad del modelo, es conveniente introducir cantidades adimensionales; por lo tanto, definimos el momentum angular por unidad de masa adimensional como $\tilde{h}_m = \left(\frac{1}{aMG} \right)^{1/2} h$

En la figura 3.5 se muestra las curvas de momentum angular h para los primeros cinco miembros de la familia de discos. Para el término $m = 1$ la curva del momentum angular h presenta en todo momento pendiente positiva, concluyendo según lo dicho anteriormente, que este disco es siempre estable. El disco que corresponde al término $m = 2$, permanece estable hasta que el momentum angular por unidad de masa alcanza su valor máximo en $\tilde{R} \approx 0,95$. A partir

de este punto el disco es inestable. Para el disco con $m = 3$ el comportamiento de la estabilidad es similar al caso anterior, con la diferencia que el máximo del momentum angular específico, lo alcanza para un valor menor de \tilde{R} . Las

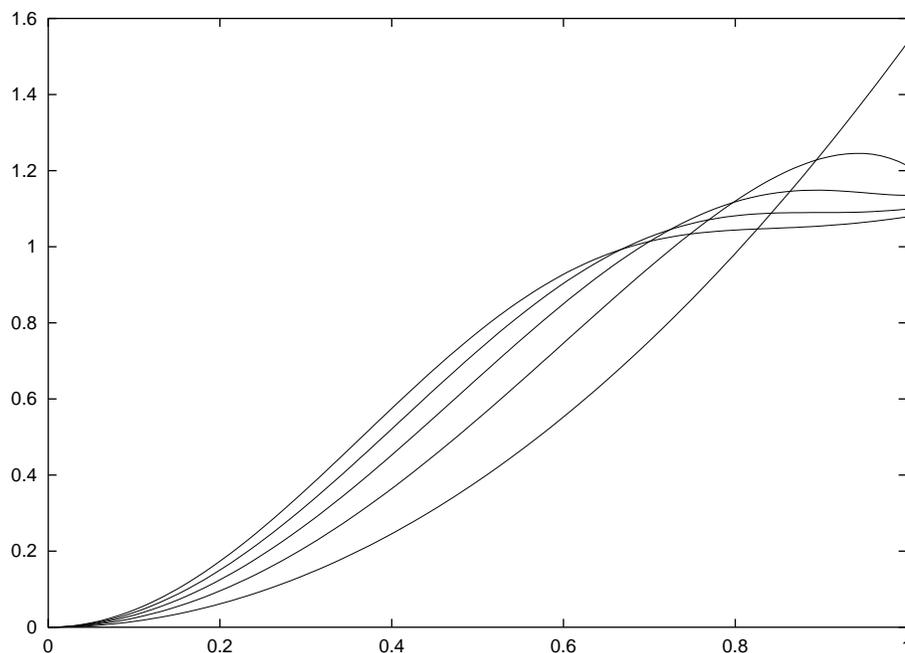


Figura 3.5: Gráfica de h_m contra \tilde{R} para $m = 1, \dots, 5$.

siguientes curvas de momentum angular por unidad de masa en la figura 3.5, correspondientes a la familia de discos para $m = 4, 5$, permanecen siempre estables, pues siempre son monotonamente crecientes. Si tomamos términos mayores en la familia de discos, las curvas de momentum angular h muestran pendientes que son siempre positivas, por tanto estables figura 3.6 y 3.7. En todos los casos mencionados anteriormente, a excepción de $m = 1$, el momentum angular por unidad de masa tiende a uno cuando $\tilde{R} \rightarrow 1$.

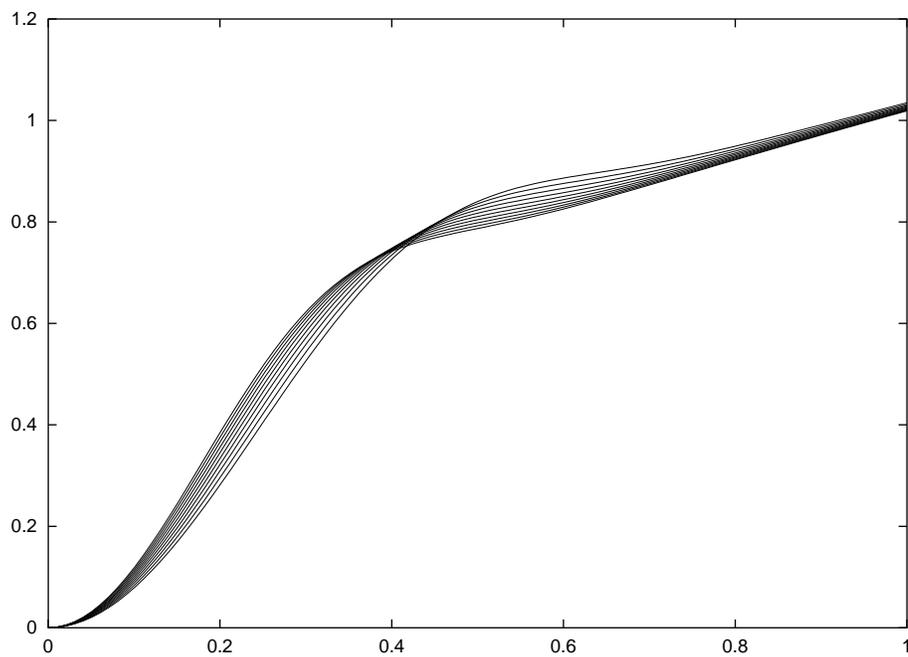


Figura 3.6: Gráfica de h_m contra \tilde{R} para $m = 11, \dots, 20$.

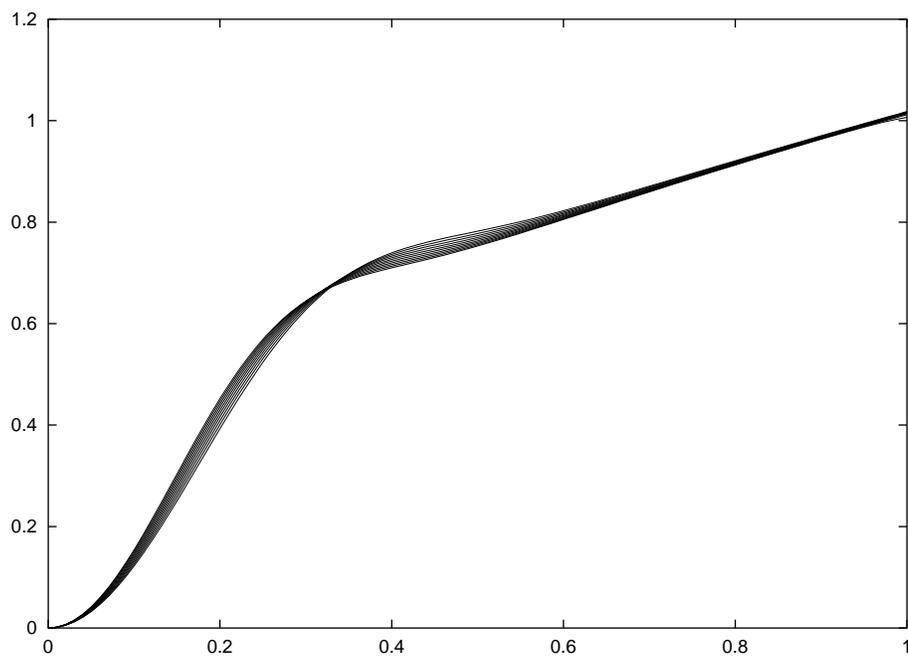


Figura 3.7: Gráfica de h_m contra \tilde{R} para $m = 21, \dots, 30$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró cómo, a partir del potencial gravitacional $\Phi(R, z)$, obtenido mediante la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas oblatas, y con una escogencia apropiada de las constantes (3.19), se obtiene una familia de discos caracterizados por su densidad superficial de masa y su velocidad circular de rotación, obtenidas mediante (3.20) y (3.37).

Para los primeros treinta miembros de esta familia de discos, se hizo para cada uno, un análisis gráfico de la densidad superficial de masa, la velocidad circular de rotación y la estabilidad analizada mediante las curvas de momentum angular por unidad de masa. De este análisis se puede concluir lo siguiente:

1. El primer miembro de la familia de discos, presenta una densidad superficial de masa asociada con una singularidad de masa en el borde del disco y una velocidad circular de rotación nula, debido a que el potencial gravitacional asociado con este disco permanece constante dentro del disco.
2. Para el segundo miembro de la familia de discos, la densidad superficial de masa tiene un comportamiento mejor que el caso anterior. En este caso en el centro del disco se encuentra concentrada la mayor parte de la masa del disco y comienza a decaer cuando se acerca al borde del disco,

mientras que su velocidad circular describe un comportamiento que es función lineal del radio del disco.

3. En general, para los otros miembros de esta familia, las curvas de densidad superficial de masa muestran que la masa se va encontrar concentrada cada vez más cerca del centro de la galaxia, a medida que se tome un término mayor de la familia de discos, hasta que tiende a cero en el borde del disco. Para las curvas de rotación, el pico de velocidad máxima se va acercando más al centro del disco cada vez que se tome un término mayor de la familia de discos, y tienden a uno cuando se acercan al borde del disco.

Los gráficos de la velocidad circular concuerdan con la curva de rotación que obtuvo Van Albada [20] para la galaxia NGC 3198, y las curvas de densidad superficial de masa se comportan como las obtenidas por Sibgatullin y Manko [18].

Se ha mostrado que los modelos de discos galácticos, son a menudo altamente inestables [6], pero esta inestabilidad puede ser suprimida si las curvas de rotación presentan un pico de velocidad máxima cerca al centro del disco tal como los que obtuvimos. Es por esta razón que nuestro modelo presenta un comportamiento que es siempre estable, a excepción del término $m = 2, 3$, en donde el disco permanece estable hasta cierto punto.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Applied Mathematics series .55 (AMS-55), National Bureau of standards , U.S. Department of Commerce (1978).
- [2] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. Third edition (1985).
- [3] BATEMAN, H. *Higher Transcendental Functions*. McGraw Hill, New York, vol 1, capítulo III (1953).
- [4] BATEMAN, H. *Higher Transcendental Functions*. McGraw Hill, New York, vol 2, p. 179 (1953). .
- [5] BATEMAN, H. *Partial Diferential Equations*. Dover (1944).
- [6] BINNEY, J and TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press. (1987).
- [7] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. Addison Wesley (1991).
- [8] KALNAJS, A. J. *Astrophys. J.*, vol 205 pp 745 (1976).
- [9] KELLOG, O. D. *Foundations of Potential Theory*.Dover (1953).

- [10] KUZMIN, G. *Astron. Zh.*, vol 33 pp 27 (1956).
- [11] LETELIER, P. S. and OLIVEIRA, S. R. *Exact self-gravitating disks and rings: a solitonic approach*. *J. Math. Phys.* vol 28, pp 165-170 (1987).
- [12] MESTEL, L. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol 126 pp 553 (1963).
- [13] MIYAMOTO, M. S. and Nagai, R. *Publ. Astron. Soc. Japan.* vol 27, pp 533 (1975).
- [14] MOON, P. and SPENCER, D. *Field Theory for Engineers*. D. Van Nostrand Company. (1961).
- [15] MORGAN, T. and MORGAN, L. *The Gravitational Field of a Disk*. *Phys. Rev.* vol 183, No 5 (1969).
- [16] MORSE, P. M. and FESBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw Hill, New York (1953).
- [17] PLUMMER, H. C. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol 28, pp 460-471 (1911).
- [18] SIBGATULLIN, N. R. and GARCIA, A. A. and MANKO, V. S. *The Rotation Curve and Mass-Distribution in Highly Flattened Galaxies*. astro-ph/0211009.
- [19] TOOMRE, A. *Astroph. J.*, vol 138 pp 385 (1962).
- [20] VAN ALBADA, T. S. et al. *Distribution of Dark Matter in the Spiral Galaxy NGC 3198*. *The Astrophysical Journal*. vol 295, pp 305-313 (1985).
- [21] ZEILIK, M. *Astronomy: The evolving Universe*. Harper & row, publishers, New York. Third edition (1982).