CONJUGACIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS NUMERABLES CON ÓRBITAS DENSAS

JHON FREDDY PEREZ REMOLINA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

CONJUGACIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS NUMERABLES CON ÓRBITAS DENSAS

JHON FREDDY PEREZ REMOLINA

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

DEDICATORIA

A mi madre, Solangel Perez.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente a todas las personas que hicieron parte de este camino durante mi maestría. Especialmente a mi madre, Solangel; mi familia; mi pareja Xime; mi gran amigo Víctor; a mi director tesis y amigo, Carlos Uzcátegui. Gracias por todo el apoyo brindado durante este proceso.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

pág.

RESUMEN

TÍTULO: CONJUGACIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS NUMERABLES CON ÓRBITAS DENSAS [*]

AUTOR: JHON FREDDY PEREZ REMOLINA [**]

PALABRAS CLAVE: CONJUGACIÓN, COMPLEJIDAD, SISTEMAS DINÁMICOS, DINÁMICA TOPOLÓGICA, ÓRBITAS DENSAS.

DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico (discreto) es un par (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua. Si además X es numerable, diremos que el sistema (X, f) es un sistema dinámico numerable. Dado un punto $x \in X$, la órbita de x es el conjunto $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, donde f^n denota la composición de f n-veces. Diremos que un sistema (X, f) tiene órbita densa si existe un punto $x \in X$ cuya órbita es densa en X. Dados dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g), diremos que son topologicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

En el presente trabajo abordamos principalmente dos aspectos. El primero está relacionado con la existencia de sistemas dinámicos numerables con órbitas densas. En el 2018, los autores de [1], plantean la siguiente pregunta: dado un ordinal numerable α, ¿existe un sistema dinámico $(\omega^\alpha + 1, f)$ que tenga una órbita densa? En esta tesis damos una respuesta afirmativa a dicha pregunta. En realidad, demostramos que dado un espacio métrico compacto numerable X, existe un sistema dinámico (X, f) con órbita densa.

El segundo aspecto estudiado está relacionado con la complejidad de la relación de conjugación en la clase de sistemas dinámicos numerables con órbitas densas, utilizando herramientas de la teoría descriptiva de conjuntos. En este trabajo abordamos esta cuestión obteniendo cotas superiores e inferiores para este problema de clasificación. Más precisamente, demostramos que la complejidad de la relación de conjugación en esta clase de sistemas está acotada superiormente por la relación $=^+$, correspondiente a la igualdad de subconjuntos numerables del conjunto de Cantor. Asimismo, en el caso particular de $\omega^2 + 1$ probamos que la relación identidad sobre el conjunto de Cantor constituye una cota inferior.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

[1] Salvador García, Yackeline Rodríguez y Carlos Uzcátegui. «Cardinality of the Ellis semigroup on compact metric countable spaces». En: *Semigroup Forum* 97 (2018), 162–176.

ABSTRACT

TITLE: CONJUGACY IN COUNTABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH DENSE ORBITS [*]

AUTHOR: JHON FREDDY PEREZ REMOLINA [**]

KEYWORDS: CONJUGACY, COMPLEXITY, DYNAMICAL SYSTEMS, TOPOLOGICAL DYNAMICS, DENSE ORBITS.

DESCRIPTION:

A (discrete) dynamical system is a pair (X, f), where X is a compact metric space and $f\colon X \to X$ is a continuous function. If, in addition, X is countable, we say that (X, f) is a countable dynamical system. Given a point $x \in X$, the orbit of x is the set where f^n denotes the n-times composition of f. We say that a system (X, f) has a dense orbit if there exists a point $x \in X$ whose orbit is dense in X. Given two dynamical systems (X, f) and (Y, g), we say that they are topologically conjugate if there is a homeomorphism $\varphi : X \to Y$ such that $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

In this work, we mainly address two aspects. The first one is related to the existence of countable dynamical systems with dense orbits. In 2018, the authors of [1] posed the following question: given a countable ordinal α, does there exist a dynamical system $(\omega^\alpha + 1, f)$ with a dense orbit? In this thesis, we provide an affirmative answer to this question. Actually, we show that for every countable compact metric space X, there exists a dynamical system (X, f) with a dense orbit.

The second aspect studied concerns the complexity of the conjugacy relation in the class of countable dynamical systems with dense orbits, using tools from descriptive set theory. In this work, we address this question by obtaining upper and lower bounds for this classification problem. More precisely, we prove that the complexity of the conjugacy relation in this class of systems is bounded above by the relation $=^+$, which corresponds to equality of countable subsets of the Cantor set. Furthermore, in the particular case of $\omega^2 + 1$, we show that the identity relation on the Cantor set constitutes a lower bound.

---

[*] Master Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Un *sistema dinámico* (*discreto*) es un par (X, f) donde X (llamado *espacio de fase*) es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. El estudio de los sistemas dinámicos tiene como propósito fundamental estudiar las propiedades de las órbitas bajo f, es decir, los conjuntos de la forma

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\},$$

donde $x \in X$. Los sistemas dinámicos han sido ampliamente estudiados y la literatura sobre ellos es bastante extensa. Sin embargo, los *sistemas dinámicos numerables*, es decir, aquellos en los que el espacio de fase es numerable, han recibido menos atención.

El propósito de este trabajo es estudiar y clasificar, en cierto sentido, los sistemas dinámicos numerables. Para ello, usamos la *conjugación topológica*, la cual es una herramienta clásica y ampliamente conocida en la literatura, que permite identificar cuándo dos sistemas presentan la misma "estructura dinámica".

Formalmente, dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son *conjugados* (*topológicamente conjugados*) si existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

conmuta, es decir, $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Si fijamos el espacio de fase X, la conjugación genera una relación de equivalencia sobre el espacio de las funciones continuas de X en sí mismo.

Aunque a lo largo de este trabajo se desarrolla teoría para sistemas dinámicos numerables en general, nuestro interés se centra en aquellos *sistemas con órbita densa*, es decir, sistemas en los que existe un punto cuya órbita es densa en todo el espacio de fase. Debido a la relevancia de este tipo de sistemas para este trabajo, introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{OD}(X) = \{f \in \mathcal{C}(X,X) : \exists\, x \in X \text{ con } \overline{\mathcal{O}_f(x)} = X\}.$$

Por conveniencia (aunque abusando de la terminología), nos referiremos a $\mathcal{OD}(X)$ como el espacio de los sistemas dinámicos con órbita densa sobre X.

Durante las últimas décadas, una de las ramas de la *Teoría Descriptiva de Conjuntos*, conocida como *Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante* (en inglés, *Invariant Descriptive Set Theory*), ha ocupado un lugar central en el estudio de problemas de clasificación en sistemas dinámicos (ver por ejemplo [1], [2], [3] y [4]). Esta disciplina estudia la complejidad de los subconjuntos invariantes de relaciones de equivalencias definidas en un espacio polaco (es decir, un espacio completamente metrizable y segundo numerable). Las técnicas provenientes de esta teoría no solo permiten medir la complejidad de los problemas de clasificación, sino también situarlos dentro de una jerarquía de relaciones de equivalencias.

En este contexto se han obtenido resultados importantes acerca de la complejidad de la conjugación para distintos espacios de fase. Por ejemplo, Hjorth demostró que el problema de clasificación de homeomorfismos de $[0,1]$ bajo conjugación tiene la misma complejidad que $E^{\infty}_{S_\infty}$, la relación de isomorfismos de grafos sobre $\mathbb{N}$ (Sec. 4.2 [5]). Más recientemente, Bruin y Vejnar extendieron el resultado de Hjorth para funciones continuas del intervalo $[0,1]$ (Th. 17 [2]). Por otro lado, Camerlo y Gao probaron los mismos resultados anteriormente mencionados para funciones sobre el espacio de Cantor (Th. 5 [6]).

---

[1] Ruiwen Li y Bo Peng. *Isomorphism of pointed minimal systems is not classifiable by countable structures*. Preprint. 2024. arXiv: `2401.11310 [math.LO]`.

[2] Henk Bruin y Benjamin Vejnar. «Classification of one dimensional dynamical systems by countable structures». En: *The Journal of Symbolic Logic* 88.2 (2023), 562–578.

[3] Konrad Deka et al. *Bowen's Problem 32 and the conjugacy problem for systems with specification*. 2025. arXiv: `2501.02723 [math.LO]`.

[4] Benjamin Vejnar. *Classification complexity of chaotic systems*. 2025. arXiv: `2401.16983 [math.DS]`.

[5] Greg Hjorth. *Classification and Orbit Equivalence Relations*. Vol. 75. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.

[6] Riccardo Camerlo y Su Gao. «The Completeness of the Isomorphism Relation for Countable Boolean Algebras». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 353.2 (2001), págs. 491-518.

Los principales aportes de este trabajo se pueden resumir en dos aspectos. En primer lugar, estudiamos la existencia de sistemas dinámicos numerables con órbitas densas. En segundo lugar, analizamos la complejidad del problema de clasificación de estos tipos de sistemas bajo conjugación topológica. A continuación, explicaremos con más detalles los resultados obtenidos.

En el Capítulo 2 presentamos ejemplos y resultados fundamentales sobre los sistemas dinámicos numerables con órbita densa. En particular, siguiendo las ideas desarrolladas por Bobok en [7], respondemos afirmativamente a la pregunta planteada por los autores en Q. 4.5 [1]:

Dado un ordinal numerable $\alpha > 0$*, ¿existe una función continua* $f : \omega^\alpha + 1 \to \omega^\alpha + 1$ *que admita una órbita densa?*

En realidad, mostramos un resultado más general: para cada espacio métrico compacto numerable X, existe una función continua $f : X \to X$ que admite una órbita densa, es decir, $\mathcal{OD}(X) \neq \emptyset$ (Teorema 2.2.1).

En el Capítulo 3 analizamos el problema de clasificación de sistemas dinámicos numerables bajo conjugación para distintas familias de sistemas, con énfasis principalmente en los sistemas dinámicos numerables con órbita densa. Para enunciar algunos de los resultados relevantes de este capítulo es necesario introducir la relación de equivalencia $=^+$, la cual se conoce como la relación de *igualdad de subconjuntos numerables de Cantor*. Formalmente, para cada $\overline{x} = (x_n), \overline{y} = (y_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$,

$$\overline{x} =^+ \overline{y} \iff \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Inspirados por las ideas presentadas por Kaya en [8], obtenemos, entre otros, los siguientes:

(1) (Teorema 3.3.22) Sea X un espacio métrico compacto numerable. La complejidad de la conjugación sobre $\mathcal{OD}(X)$ está acotada superiormente por la relación $=^+$.

[7] Jozef Bobok. «Chaos in countable dynamical system». En: *Topology and its Applications* 126.1 (2002), págs. 207-216.

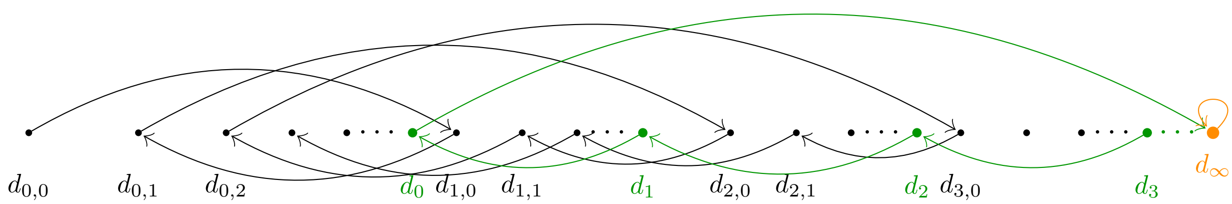
[8] Burak Kaya. «The complexity of topological conjugacy of pointed Cantor minimal systems». En: *Archive for Mathematical Logic* 56.1-2 (2017), págs. 215-235.

(2) (Teorema 3.3.23) La complejidad de la conjugación sobre $\mathcal{OD}(\omega^2+1)$ está acotada inferiormente por la relación $\mathrm{Id}(2^{\mathbb{N}})$ (identidad de Cantor) y acotada superiormente por la relación $=^+$.

En el Capítulo 4 tratamos otro aspecto del espacio $\mathcal{OD}(X)$. Para explicarlo, necesitamos introducir las siguientes ideas. Para empezar, notemos que el espacio ω^2+1 se puede representar como un subconjunto de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\omega^2+1=\{d_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}\cup\{d_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{d_\infty\}\subseteq\mathbb{R},$$

donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $(d_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente (*s.e.c.*) que converge a d_m, y la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *s.e.c.* que converge a d_∞. Teniendo esto en cuenta, a continuación representamos gráficamente un ejemplo de sistema dinámico con órbita densa (ω^2+1, f) construido en [1].



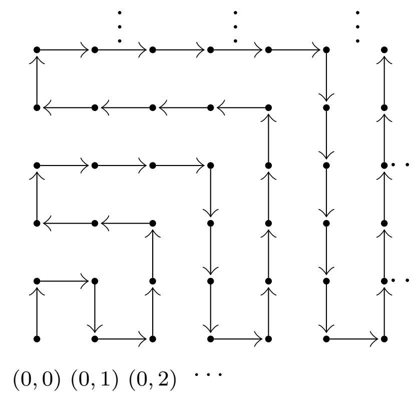
De lo anterior se puede observar que la órbita de $d_{0,0}$ es justamente $\{d_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$. Esto implica que la función $e_f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ dada por

$$e_f(n,m)=k \iff f^k(d_{0,0})=d_{n,m},$$

es una enumeración de $\mathbb{N}^2$ (biyección entre $\mathbb{N}^2$ y $\mathbb{N}$). Intuitivamente, e_f ordena las parejas (n,m) según el orden en el que los puntos $d_{n,m}$ van apareciendo en la órbita de $d_{0,0}$.

En general, a cualquier sistema dinámico (ω^2+1,f) con $f\in\mathcal{OD}(\omega^2+1)$ le asociamos una enumeración e_f de $\mathbb{N}^2$ de manera similar a la definida en el párrafo anterior (esta relación entre sistemas dinámicos con órbita densa y enumeraciones fue observada en [9]). En este sentido, es natural preguntarse si cualquier enumeración de $\mathbb{N}^2$ proviene de algún sistema (ω^2+1,f) con $f\in\mathcal{OD}(\omega^2+1)$ (es decir, si es igual a e_f para alguna f). La respuesta es negativa, justamente la siguiente enumeración h es un ejemplo de ello (Ejemplo 4.1.3).

[9] Jhon Perez. «El semigrupo de Ellis de un sistema dinámico sobre un espacio métrico compacto numerable». Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2023.



En el Capítulo 4 formalizamos y generalizamos las ideas anteriormente mencionadas, obteniendo así una relación entre los sistemas dinámicos con órbita densa sobre $\omega^k + 1$ y enumeraciones de $\mathbb{N}^k$. Denotaremos con $\mathcal{E}_k$ a la familia de enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ que provienen de sistemas (ω^k+1, f) con $f \in \mathcal{OD}(\omega^k+1)$. Entre los resultados más relevantes se encuentran los siguientes:

(1) (Teorema 4.2.2 & Teorema 4.2.5) Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{E}_k$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Si $k > 1$, existen $2^{\aleph_0}$ enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ que no provienen de sistemas dinámicos con órbita densa.

(2) (Teorema 4.3.1) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_k$ es un subconjunto boreliano en el espacio de todas las biyecciones de $\mathbb{N}^k$ en $\mathbb{N}$.

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos se destacan unos tipos de sistemas a los cuales se les llama *caóticos*. Este concepto de caos alude a la impredecibilidad o a la complejidad de las órbitas de los puntos. En la literatura se han propuesto diversas nociones de caos, entre las más clásicas se encuentran el caos en el sentido de Devaney, Li-Yorke, Martelli y algunas medidas de caos como la entropía topológica.

No obstante, en el contexto numerable ningún sistema dinámico resulta ser caótico en los sentidos mencionados anteriormente. En efecto, un sistema es caótico en el sentido de Devaney si es transitivo y el conjunto de puntos periódicos es denso. Sin embargo, como se establece en la Proposición 2.1.5, ningún sistema dinámico numerable puede ser transitivo y, por lo tanto, tampoco puede ser caótico en este sentido. Esta falta de transitividad se debe a que, para cualquier punto con órbita densa, dicha órbita coincide con el conjunto de puntos aislados. Este hecho, además, implica que ningún sistema dinámico numerable pueda ser caótico en el sentido de Martelli. En cuanto a la entropía topológica, Bobok menciona en [7] que todo sistema dinámico numerable posee entropía nula, de modo que tampoco puede considerarse caótico desde esta perspectiva.

Por otra parte, una nueva noción de caos fue introducida por Schweizer y Smítal en 1994 en el artículo [10], la cual llamaron *caos distributivo*. En dicho trabajo, los autores usaron ideas de la teoría de los espacios métricos probabilísticos para desarrollar una nueva definición de caos.

En el Capítulo 5 revisamos esta nueva noción de caos en sistemas dinámicos numerables siguiendo el trabajo de Bobok en [7]. En este artículo, el autor establece una relación entre el caos distributivo y la estructura topológica del espacio de fase. En este apartado, presentamos en detalle la prueba de que si X es un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| \leq 1$ [11], entonces ningún sistema dinámico (X, f) es distributivamente caótico. Mientras que la segunda parte del resultado de Bobok, correspondiente al caso $|X^{(2)}| > 1$, no se incluye aquí, pues consideramos que la demostración expuesta en [7] es incompleta.

---

[10] Berthold Schweizer y Jaroslav Smítal. «Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 344 (1994), págs. 737-754.

[11] $X^{(2)}$ denota el conjunto de puntos límites de X'.

1. PRELIMINARES

1.1. TOPOLOGÍA GENERAL

Comenzamos esta sección introduciendo la notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Para un espacio topológico X y $A \subseteq X$. Denotaremos por

$$\overline{A}^X \quad \text{y} \quad \text{Int}_X(A),$$

la clausura y el interior de A en X, respectivamente. Cuando no haya riesgo de ambigüedad, omitiremos la referencia al espacio y escribiremos simplemente $\overline{A}$ y Int(A).

Denotamos por X' la *derivada* (*de Cantor-Bendixson*) de X, definida como

$$X^{(1)} = X' = \{x \in X : x \text{ es un punto límite de } X\}.$$

De manera análoga, definimos la *segunda derivada de* X como

$$X^{(2)} = (X')'.$$

Usaremos $I(X)$ para referirnos al conjunto de puntos aislados de X.

Si X es un espacio topológico y Y un conjunto, denotamos con X^Y el espacio de funciones de Y en X, dotado con la topología producto. De igual forma, si $k \in \mathbb{N}$ consideramos el producto cartesiano X^k con la topología producto.

Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ una función. Diremos que una función $t : \text{Dom}(t) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ extiende a s si Dom$(s) \subseteq$ Dom(t) y $t(x) = s(x)$ para cada $x \in$ Dom(s). En este caso, escribimos $s \preceq t$.

Para cada función $s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, definimos

$$N_s = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k} : s \preceq h\}.$$

Proposición 1.1.1. *Sea ρ la colección definida por*

$$\{N_s : s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \textit{ con } \text{Dom}(s) \textit{ finito}\}.$$

Entonces ρ es una base para la topología producto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$ donde $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta.

Denotaremos por $B(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones biyectivas de X en Y. Notemos que si $s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ con $\text{Dom}(s)$ finito y $N_s \cap B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \neq \emptyset$, entonces s es inyectiva. Por la Proposición 1.1.1, la colección

$$\{N_s : s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \text{ con } \text{Dom}(s) \text{ finito y } s \text{ inyectiva}\},$$

es una base para $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.

Sea ahora X un espacio métrico compacto. Denotaremos con $\mathcal{C}(X, X)$ al espacio de funciones continuas de X en sí mismo, dotado con la topología compacta–abierta definida en $\mathcal{C}(X, X)$, es decir, la topología generada por los conjuntos de la forma

$$[K, U] = \{f \in \mathcal{C}(X, X) : f(K) \subseteq U\},$$

donde K es compacto y U es abierto de X. Denotaremos con Homeo(X) al espacio de homeomorfismos de X en sí mismo con la topología relativa que hereda de $\mathcal{C}(X, X)$.
La composición de funciones es continua cuando se considera la topología compacta abierta. Una demostración de este hecho puede encontrarse en Th. 3.4.2 [12].

Teorema 1.1.2. *Sea X un espacio localmente compacto. Entonces la función $\circ$: $\mathcal{C}(X, X) \times \mathcal{C}(X, X) \to \mathcal{C}(X, X)$ dada por $\circ(f, g) = f \circ g$ es continua.*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 1.1.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $k \in \mathbb{N}$. La función $f \mapsto f^k$ es continua sobre $\mathcal{C}(X, X)$.*

Demostración. Sea $\sigma : \mathcal{C}(X, X) \to \mathcal{C}(X, X)$ dada por $\sigma(f) = f^k$. Notemos que

$$\sigma = \gamma \circ \beta,$$

donde $\gamma : \mathcal{C}(X, X) \to \mathcal{C}(X, X)^k$ y $\beta : \mathcal{C}(X, X)^k \to \mathcal{C}(X, X)$ están dadas por

$$\gamma(f) = (f, \ldots, f) \quad \text{y} \quad \beta(f_1, \ldots, f_k) = f_1 \circ \cdots \circ f_k.$$

[12] Ryszard Engelking. *General Topology*. Vol. 6. Sigma series in pure mathematics. Heldermann, 1989.

Es claro que γ es una función continua. Además, β es continua por el Teorema 1.1.2. De lo anterior concluimos que σ es continua. $\square$

Proposición 1.1.4. *Sea X un espacio métrico, compacto y $Y \subseteq X$ abierto-cerrado no vacío. Entonces la función* $\mathrm{Ext}_{Y,X} : \mathcal{C}(Y,Y) \to \mathcal{C}(X,X)$ *dada por*

$$\mathrm{Ext}_{Y,X}(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in Y, \\ x & \textit{si } x \notin Y, \end{cases}$$

es continua.

Demostración. En efecto, sean $f \in \mathcal{C}(Y,Y)$ y $[K,U]$ un abierto subbásico de $\mathcal{C}(X,X)$ tal que $\mathrm{Ext}_{Y,X}(f) \in [K,U]$. Consideremos $W = [K \cap Y, U \cap Y]$. Ahora notemos que

$$\mathrm{Ext}_{Y,X}[W] \subseteq [K,U].$$

Así, concluimos que $\mathrm{Ext}_{Y,X}$ es una función continua. $\square$

Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice que es *denso en ninguna parte* si su clausura tiene interior vacío, es decir, $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Decimos que A es *magro* si

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

donde cada A_n es denso en ninguna parte. El complemento de un conjunto magro es llamado *comagro*. La siguiente observación es una herramienta útil para identificar conjuntos comagros.

Observación 1.1.5. *Un subconjunto $A \subseteq X$ es comagro si, y solo si, contiene la intersección numerable de una familia de abiertos densos.*

Definición 1.1.6. Un espacio topológico X es un *espacio de Baire*, si la intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X.

Entre los ejemplos clásicos de espacios de Baire se encuentran: el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ y el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

El siguiente teorema es un resultado clásico de topología, una demostración puede consultarse en Th. 8.4 [13]. Recordemos que un espacio topológico X es completamente metrizable si admite una métrica completa compatible con su topología.

Teorema 1.1.7. *(Teorema de Categoría de Baire) Todo espacio completamente metrizable es un espacio de Baire.*

Denotaremos por Clopen(X) la familia de todos los subconjuntos abierto-cerrados de X.

Proposición 1.1.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces* Clopen(X) *es finito o numerable.*

Demostración. Como X es métrico compacto, se tiene que X es segundo numerable. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abiertos para X. Afirmamos que cada conjunto abierto-cerrado A, es unión finita de abiertos de $\mathcal{U}$.

En efecto, como A es abierto y $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base, tenemos que

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{n_i}.$$

Por otro lado, como A también es cerrado y X compacto, se tiene que A también es compacto. Esto implica que existen $n_{i_0}, \ldots, n_{i_k}$ tal que

$$A = \bigcup_{l=0}^{k} U_{i_l}.$$

Así, hemos demostrado que cada abierto-cerrado es unión finita de elementos de $\mathcal{U}$. De lo anterior, concluimos que Clopen(X) es a lo más numerable. □

Recordemos que un espacio topológico X es cero-dimensional si existe una base de abierto-cerrados para X. El siguiente resultado se sigue de la Proposición 1.1.8.

Corolario 1.1.9. *Si X es métrico compacto cero-dimensional, entonces* Clopen(X) *es una base numerable de X.*

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado, cuyo enunciado está inspirado en un teorema de Taĭmanov y su prueba sigue las mismas ideas presentadas en Th. 3.2.1 [12]. Este nos provee condiciones necesarias y suficientes para extender funciones continuas definidas sobre un denso.

---

[13] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*. Springer New York, NY, 1995.

Teorema 1.1.10. *Sean X, Y espacios topológicos con Y compacto Hausdorff y segundo numerable. Sea $\mathcal{U}$ una base numerable de abiertos para Y. Si $D \subseteq X$ es un subespacio denso en X y $f : D \to Y$ es una función continua, entonces las siguientes son equivalentes:*

(1) f tiene una extensión continua sobre X.

(2) Para cada $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, si $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, entonces

$$\overline{f^{-1}[\overline{U_1}]}^X \cap \overline{f^{-1}[\overline{U_2}]}^X = \emptyset.$$

Demostración. Sea $F : X \to Y$ una extensión continua de $f : D \to Y$. Para cada $U \subseteq Y$ tenemos que

$$F^{-1}[\overline{U}] \text{ es cerrado en } X.$$

Además, como F es una extensión de f, se tiene que $f^{-1}[\overline{U}] \subseteq F^{-1}[\overline{U}]$. Por lo tanto, para cada $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ con $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, se cumple que

$$\overline{f^{-1}[\overline{U_1}]}^X \cap \overline{f^{-1}[\overline{U_2}]}^X \subseteq \overline{F^{-1}[\overline{U_1}]}^X \cap \overline{F^{-1}[\overline{U_2}]}^X = \emptyset.$$

Lo anterior prueba que *(1)* implica *(2)*.

Veamos que *(2)* implica *(1)*. Para cada $x \in X$ consideremos

$$\mathcal{F}_x = \{\overline{f[D \cap W]} : W \subseteq X \text{ es abierto de } X \text{ y } x \in W\}.$$

Como D es denso en X, tenemos que $\mathcal{F}_x$ es una colección de subconjuntos no vacíos cerrados de Y.

Afirmación 1: $\bigcap \mathcal{F}_x \neq \emptyset$. Veamos que $\mathcal{F}_x$ tiene la propiedad de intersecciones finitas. En efecto, sean $W_1, \ldots, W_k \subseteq X$ abiertos de X con $x \in W_i$ para cada i. Notemos que

$$\overline{f[D \cap W]} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \overline{f[D \cap W_i]},$$

donde $W = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$. Como $\overline{f[D \cap W]} \neq \emptyset$ (por la densidad de D), concluimos que $\mathcal{F}_x$ tiene la propiedad de intersecciones finitas. Finalmente, como Y es compacto, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}_x \neq \emptyset$.

Afirmación 2: $\bigcap \mathcal{F}_x$ tiene exactamente un punto. Por contradicción, supongamos que existen $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$ y $y_1, y_2 \in \bigcap \mathcal{F}_x$. Como Y es compacto Hausdorff, tenemos que Y es normal, por lo tanto, existen abiertos $V, W \subseteq Y$ tales que $y_1 \in V$, $y_2 \in W$ y $\overline{V} \cap \overline{W} = \emptyset$.

Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 \subseteq V$ y $U_2 \subseteq W$. Por lo tanto, $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Por hipótesis tenemos que

$$\overline{f^{-1}[\overline{U_1}]} \cap \overline{f^{-1}[\overline{U_2}]} = \emptyset.$$

Esto implica que $\overline{f^{-1}[U_1]} \cap \overline{f^{-1}[U_2]} = \emptyset$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x \notin \overline{f^{-1}[U_1]}$, es decir, $x \in X \setminus \overline{f^{-1}[U_1]}$. Por otro lado, por definición de $\mathcal{F}_x$ tenemos que

$$\begin{aligned} y_1 \in \bigcap \mathcal{F}_x &\subseteq \overline{D \cap (X \setminus \overline{f^{-1}[U_1]})}, \\ &= \overline{f^{-1}[D \setminus \overline{f^{-1}[U_1]}]}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pero notemos que

$$U_1 \cap f^{-1}[D \setminus \overline{f^{-1}[U_1]}] = \emptyset,$$

por lo tanto $y_1 \notin \overline{f^{-1}[D \setminus \overline{f^{-1}[U_1]}]}$. Pero esto contradice (1.1).

Afirmación 3: La función $F : X \to Y$ dada por

$$F(x) := \text{ el único punto de } \bigcap \mathcal{F}_x,$$

es continua. En efecto, sea $x \in X$ y $V \subseteq Y$ con $F(x) \in V$. Por definición de $\mathcal{F}_x$ se tiene que

$$\bigcap \mathcal{F}_x \subseteq V.$$

Como Y es compacto, existen $W_1, \ldots, W_k \subseteq X$ abiertos con $x \in W_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$, tal que

$$\bigcap \mathcal{F}_x \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \overline{f[D \cap W_i]} \subseteq V.$$

Ahora consideremos $W = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$. Afirmamos que $F(W) \subseteq V$. En efecto, tomemos $w \in W$, entonces

$$\bigcap \mathcal{F}_w \subseteq \overline{f[D \cap W]} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \overline{f[D \cap W_i]} \subseteq V.$$

Lo anterior implica que $F(w) \in V$.

Para finalizar, notemos que F extiende a f, ya que si $x \in D$, entonces

$$\bigcap \mathcal{F}_x = \{f(x)\}.$$

De todo lo anterior, concluimos que F es una extensión continua de f. $\square$

1.1.1. Espacios numerables Debido a la importancia de los espacios métricos compactos numerables en este trabajo, dedicaremos esta sección a presentar algunos resultados fundamentales sobre ellos.

Iniciamos esta sección enunciando el teorema de representación de los espacios métricos compactos numerables, un resultado clásico debido a Sierpiński. Antes de presentarlo, introducimos la siguiente notación.

Recordemos que si X es un conjunto totalmente ordenado, entonces la colección

$$\{(a, b) : a, b \in X \text{ con } x < y\},$$

es una base para una topología de X, donde $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. La topología generada por esta base es conocida como la *topología del orden*.

Debido a que cada ordinal es un conjunto bien ordenado, en particular es un conjunto totalmente ordenado, consideraremos cada ordinal como un espacio topológico con la topología del orden. Denotaremos con $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Teorema 1.1.11. *(Ver [14]) Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces X es homeomorfo a $k \cdot \omega^\alpha + 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$ ordinal numerable.*

Como consecuencia del Teorema de la Categoría de Baire, obtenemos el siguiente resultado, clave para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces $I(X)$ es denso en X.*

Demostración. Dado que X es métrico compacto, tenemos que X es completamente metrizable, por lo tanto, es un espacio de Baire. Mostraremos que $I(X)$ es intersección

---

[14] Stefan Mazurkiewicz y Waclaw Sierpiński. «Contribution à la topologie des ensembles dénombrables». En: *Fundamenta Mathematicae* 1.1 (1920), págs. 17-27.

numerable de abiertos densos. En efecto, para cada $y \in X \setminus I(X)$ definimos el abierto $U_y = X \setminus \{y\}$. Como y no es un punto aislado, tenemos que U_y es denso en X. Por otro lado,

$$I(X) = \bigcap_{y \in X \setminus I(X)} U_y.$$

Debido a que X es numerable, tenemos que $X \setminus I(X)$ es numerable. En consecuencia, $I(X)$ es intersección numerable de abiertos densos. Pero X es un espacio de Baire, entonces $I(X)$ debe ser denso en X. □

Mostraremos que todo espacio métrico numerable es cero-dimensional. La prueba que realizaremos se encuentra en la demostración del Teorema 5.79 del libro de Topología de Carlos Ivorra [15].

Teorema 1.1.13. *Si X es un espacio métrico y numerable, entonces X es cero–dimensional.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$. Veamos que existe V abierto-cerrado tal que $x \in V \subseteq U$. Dado que X es métrico, tenemos que X es normal. Además $\{x\}$ y $X \setminus U$ son cerrados disjuntos. Así, por el lema de Urysohn, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] = 1$.

Como X es numerable, tenemos que $f[X] \subseteq [0,1]$ es numerable. Por lo tanto, existe $c \in [0,1] \setminus f[X]$. Ahora notemos que,

$$V = f^{-1}[[0,c]] = f^{-1}[[0,c)].$$

De lo anterior, concluimos que V es un conjunto abierto-cerrado y que $x \in V \subseteq U$. □

Recordemos que si X es un espacio métrico compacto, entonces X es segundo numerable, es decir, tiene una base de abiertos numerable. Si además X es numerable, se puede encontrar una base de abierto-cerrados numerable para X, más aún, Clopen(X) es una base numerable de X.

Proposición 1.1.14. *Sea X un espacio métrico, compacto y numerable. Entonces,* Clopen(X) *es una base numerable para X.*

---

[15] El libro no se encuentra publicado en una editorial, sin embargo, se puede consultar en `https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf`

Demostración. El resultado se obtiene inmediatamente usando el Teorema 1.1.13 y el Corolario 1.1.9. $\square$

Para finalizar esta sección, mostraremos que si X es un espacio métrico compacto numerable, entonces Homeo(X), el espacio de autohomeomorfismos sobre X, no es numerable. Denotaremos con S_∞ el conjunto de funciones biyectivas de $\mathbb{N}$ en sí mismo.

Lema 1.1.15. *Si X es un espacio métrico compacto numerable, entonces* Homeo(X) *tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. En virtud del Teorema 1.1.11, existe un subconjunto $C \subseteq X$ que es abierto-cerrado, tal que C es homeomorfo a $\omega + 1$. Por lo tanto, basta con probar que Homeo$(\omega + 1)$ no es numerable. En efecto, consideremos la función φ : Homeo$(\omega + 1) \to S_\infty$ dada por $\varphi(h) = h|_\omega$. Esta función es biyectiva, y como $|S_\infty| = 2^{\aleph_0}$, se concluye que $2^{\aleph_0} = |$Homeo$(\omega + 1)|$. En consecuencia, Homeo(C) también tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.

Ahora bien, cada homeomorfismo $h \in$ Homeo(C) se puede extender a un homeomorfismo $\widehat{h} \in$ Homeo(X) definiendo

$$\widehat{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in C, \\ x, & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Así, se obtiene una inyección de Homeo(C) en Homeo(X), por lo que

$$2^{\aleph_0} \leq |\text{Homeo}(C)| \leq |\text{Homeo}(X)|.$$

Finalmente, notemos que $2^{\aleph_0}$ es el mayor tamaño posible para Homeo(X), ya que Homeo$(X) \subseteq X^X$ y X es numerable. $\square$

1.2. TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

La teoría descriptiva de conjuntos clásica fue desarrollada por matemáticos como Baire, Borel, Sierpiński, entre otros. Su objetivo principal es estudiar la *complejidad descriptiva* de los subconjuntos de los números reales que surgen en diversas áreas de las matemáticas, como el análisis o la topología.

Una parte significativa de este trabajo estará dedicada a examinar la complejidad descriptiva de ciertos conjuntos y relaciones de equivalencia que aparecen en el contexto de los sistemas dinámicos.

En esta sección introduciremos algunos de los conceptos fundamentales de la teoría descriptiva de conjuntos. Para el desarrollo de esta sección tomaremos como referencia principal el libro de Kechris, *Classical Descriptive Set Theory* [13].

Definición 1.2.1. Un espacio topológico X se dice que es *polaco*, si es separable y completamente metrizable.

Ejemplo 1.2.2.
1. Si A es un conjunto numerable. Entonces A es polaco con la topología discreta.
2. $\mathbb{R}$ con la topología usual.
3. El producto numerable de espacios polacos es polaco. En particular, el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ y el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ son polacos, donde $2 = \{0,1\}$ y $\mathbb{N}$ tienen la topología discreta.
4. El grupo simétrico S_∞.
5. Todo espacio métrico compacto.

Teorema 1.2.3. *(Th. 4.19 [13]) Si X es métrico compacto, entonces $\mathcal{C}(X,X)$ es polaco.*

A continuación, enunciamos un teorema clásico de la teoría descriptiva de conjuntos, debido a Alexandrov y Lavrentiev. Recordemos que un conjunto es G_δ si es intersección numerable de abiertos.

Teorema 1.2.4. *(Th. 3.11 [13]) (Alexandrov & Lavrentiev) Un subespacio de un espacio polaco es polaco si, y solo si, es un conjunto G_δ.*

Ejemplo 1.2.5. El grupo de autohomeomorfismos Homeo(X) de un espacio métrico compacto X es un conjunto G_δ de $\mathcal{C}(X,X)$. Por lo tanto, es un espacio polaco.

Recordemos que $B(X,Y)$ denota al conjunto de todas las funciones biyectivas de X en Y. El siguiente resultado es una aplicación del Teorema 1.2.4.

Proposición 1.2.6. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es un espacio polaco con la topología relativa que hereda de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$.*

Demostración. Debido al Teorema 1.2.4 basta con ver que $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$. Sean $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{N}^k$ y $n, j \in \mathbb{N}$. Definamos

$$I_{n,j} = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k} : h(q_n) \neq h(q_j)\},$$

y

$$S_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k} : h(q_m) = n\}.$$

Es fácil ver que $I_{n,j}$ y S_n son abiertos para todo $n, j \in \mathbb{N}$. Además,

$$B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j<n} I_{n,j}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n\right).$$

De lo anterior, se concluye que $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es G_δ. $\square$

Los siguientes dos resultados que presentaremos son resultados técnicos muy conocidos dentro de la literatura. El propósito de presentarlos es argumentar que cada subconjunto comagro de un espacio polaco perfecto (es decir, sin puntos aislados) tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Proposición 1.2.7. *(Cor. 6.5 [13]) Todo espacio polaco no numerable contiene una copia del conjunto de Cantor y, en consecuencia, tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Proposición 1.2.8. *(Prop. 8.23 [13]) Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es comagro, entonces existen conjuntos G y M tales que G es G_δ, M es magro y $A = G \cup M$.*

Proposición 1.2.9. *Sea X un espacio polaco sin puntos aislados y $A \subseteq X$ comagro. Entonces A tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.8, $A = G \cup M$, donde G es G_δ y M es magro. Notemos que G no puede ser magro, ya que si fuera magro tendríamos que A también es magro. Por otro lado, como X no tiene puntos aislados, G no puede ser numerable. Por lo tanto, G es un conjunto G_δ no numerable.

Además, por el Teorema 1.2.11, tenemos que G es un espacio polaco. Así, G es un espacio polaco no numerable. Luego, G tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$ por la Proposición 1.2.7. $\square$

Sea X un espacio polaco. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *boreliano* si pertenece a la σ-álgebra generada por los abiertos de X, es decir, la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos abiertos de X. Denotaremos con $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra generada por los abiertos, la cual llamaremos la σ-álgebra de Borel.

Definimos por inducción transfinita sobre α las colecciones de subconjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ para $\alpha \geq 1$ ordinal numerable. Empezamos definiendo

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) := \text{la colección de abiertos de } X.$$

Para $\alpha \geq 1$ y $A \subseteq X$,

$$A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \iff X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X),$$

Si $\alpha > 1$ y $A \subseteq X$, entonces

$$A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \iff A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \text{ donde } B_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_n} \text{ con } \beta_n < \alpha.$$

Las colecciones definidas anteriormente forman lo que se conoce como la jerarquía de Borel. Esto se debe a que un conjunto $A \in \mathcal{B}(X)$ si, y solo si, $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ para algún $\alpha < \omega_1$, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable.

Definición 1.2.10. Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Decimos que:

1. A es *analítico*, si existe un espacio polaco Y y un conjunto boreliano $B \subseteq X \times Y$, tal que
$$A = \mathrm{Pr}_1(B),$$
donde $\mathrm{Pr}_1 : X \times Y \to X$ es la proyección en la primera coordenada.

2. A es *coanalítico*, si $X \setminus A$ es analítico.

El siguiente teorema es de gran importancia dentro de la teoría descriptiva de conjuntos, pues proporciona una herramienta muy útil para determinar cuándo un conjunto es boreliano.

Teorema 1.2.11. *(Th. 14.11 [13]) (Souslin) Sea X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Entonces A es boreliano si, y solo si, A es analítico y coanalítico.*

Un *espacio de Borel* es un par $(X, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra sobre X. En un espacio de Borel decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es boreliano si $A \in \mathcal{B}$.

Definición 1.2.12. Un espacio de Borel $(X, \mathcal{B})$ es un *espacio de Borel estándar* si existe una topología polaca τ sobre X tal que $\mathcal{B}$ coincide con la σ-álgebra de Borel generada por τ.

Ejemplo 1.2.13. 1. Todo espacio polaco $(X, \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel, es un espacio Borel estándar.

2. Sea X un espacio polaco. Denotamos con $F(X)$ al espacio de todos los subconjuntos cerrados de X y $\mathcal{S}$ la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma

$$\{F \in F(X) : F \cap U \neq \emptyset\},$$

con $U \subseteq X$ abierto. Entonces $(F(X), \mathcal{S})$ es un espacio Borel estándar, el cual es llamado la *estructura de Effros Borel* (puede consultar más sobre este espacio en Sec. 12.C [13]).

Recordemos que si X es un espacio polaco y $Y \subseteq X$, entonces Y es polaco si, y solo si, Y es un conjunto G_δ en X. No obstante, en el contexto de los espacios de Borel estándar se tiene un resultado más general. Denotamos por $\mathcal{B} \upharpoonright Y$ la restricción de la σ-álgebra $\mathcal{B}$ al conjunto Y, es decir, $\mathcal{B} \upharpoonright Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}$.

Teorema 1.2.14. *(Cor. 13.4 [13]) Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio Borel estándar y $Y \subseteq X$ con $Y \in \mathcal{B}$. Entonces, $(Y, \mathcal{B} \upharpoonright Y)$ también es un espacio Borel estándar.*

A partir del teorema anterior se deduce el siguiente resultado.

Corolario 1.2.15. *Si X es un espacio polaco y $Y \subseteq X$ es un conjunto boreliano. Entonces Y es un espacio Borel estándar con la topología relativa que hereda de X.*

Sean $(X, \mathcal{B})$ y $(Y, \mathcal{S})$ dos espacios Borel estándar. Decimos que una función $f : X \to Y$ es *boreliana* (o *Borel medible*), si $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{S}$.

De aquí en adelante, siempre que no haya riesgo de ambigüedad, omitiremos mencionar explícitamente la σ-álgebra, y nos referiremos simplemente a X como un espacio Borel estándar.

Teorema 1.2.16. *(Th. 15.6 [13]) Sean X, Y dos espacios Borel estándar no numerables. Entonces X y Y son Borel isomorfos, es decir, existe $f : X \to Y$ biyectiva, tal que f y f^{-1} son borelianas.*

Las relaciones que estudiaremos en secciones posteriores de este trabajo pueden interpretarse como relaciones inducidas por acciones de grupo. Por lo tanto, presentaremos brevemente esta noción.

Recordemos que un grupo topológico es un grupo $(G, \cdot)$ con una topología sobre G tal que las funciones $(x, y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas. Diremos que $(G, \cdot)$ es un *grupo polaco*, si $(G, \cdot)$ es un grupo topológico y además G es polaco.

Ejemplo 1.2.17. 1. $(\mathbb{R}, +)$ con la suma y topología usual.

2. El grupo de permutaciones S_∞ con la composición de funciones.

3. El grupo de autohomeomorfismos Homeo(X) con la composición de funciones donde X es un espacio métrico compacto.

Sea G un grupo y X un conjunto. Diremos que una función $a : G \times X \to X$ es una acción (por izquierda) del grupo G sobre X, si para todo $x \in X$ y $h, g \in G$ se cumple que $a(1_G, x) = x$ y

$$a(g, a(h, x)) = a(gh, x),$$

donde 1_G es la identidad del grupo G. Si G es además un grupo topológico y X un espacio topológico (Borel estándar), diremos que la acción a es continua (boreliana), si $a^{-1}[U]$ es abierto (boreliano) para todo U abierto (boreliano) de X.

Teorema 1.2.18. *(Th. 15.14* [13]*) (Miller) Sean G un grupo polaco, X un espacio Borel estándar y $a : G \times X \to X$ una acción de grupo boreliana. Entonces, para cada $x \in X$ el conjunto*

$$\{a(g, x) : g \in G\} \textit{ es boreliano}.$$

Terminamos esta sección introduciendo la noción de árbol, la cual usaremos posteriormente en el Capítulo 3.

Sea A un conjunto no vacío. Denotamos con $A^{<\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones finitas sobre A, es decir,

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.$$

Para dos sucesiones finitas $s = (s_1, \ldots, s_m)$ y $t = (t_1, \ldots, t_n)$, decimos que t es *segmento inicial de* s, y lo denotamos por $t \subseteq s$, si $n \leq m$ y $t = (t_1, \ldots, t_n) = (s_1, \ldots, s_n)$.

Definición 1.2.19. Sea $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$. Diremos que T es un árbol sobre A, si T es cerrado bajo segmentos iniciales, es decir, para cada $s \in T$, si $t \subseteq s$ entonces $t \in T$.

1.3. RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y REDUCIBILIDAD BORELIANA

La Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante se ocupa del estudio de la complejidad de las relaciones de equivalencia y de los conjuntos invariantes asociados a ellas. Su herramienta central es la noción de *reducibilidad boreliana*. En esta sección introduciremos este concepto, así como algunos de los teoremas fundamentales de la teoría. Usaremos como referencia general para esta sección el libro de Gao, *Invariant Descriptive Set Theory* [16].

Definición 1.3.1. Sean X, Y espacios Borel estándar y E, F relaciones de equivalencia sobre X y Y respectivamente. Decimos que E es *Borel reducible a* F (denotamos esto por $E \leq_B F$), si existe una función boreliana $f : X \to Y$, tal que para cada $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Si $E \leq_B F$ podemos pensar que E es, a lo sumo, tan compleja como F, pues toda la información de E está codificada en F bajo una función boreliana. Es fácil verificar que $\leq_B$ es reflexiva, es decir, $E \leq_B E$, y también transitiva, en el sentido de que si $E \leq_B F$ y $F \leq_B G$, entonces $E \leq_B G$.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de relaciones de equivalencia.

Ejemplo 1.3.2. (1) Sea X un espacio polaco. Definimos $\mathrm{Id}(X)$ como la relación de igualdad, es decir,

$$\mathrm{Id}(X) = \{(x, x) \in X^2 : x \in X\}.$$

(2) Sea $\sim$ la relación de similaridad sobre el espacio de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas complejas $M_n(\mathbb{C})$, dada por: para cada $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$$A \sim B \iff \exists C \in GL_n(\mathbb{C})\ A = CBC^{-1}.$$

(3) La relación E_0 sobre $2^{\mathbb{N}}$ se define de la siguiente manera: para cada $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$x\ E_0\ y \iff \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geq k\ x(n) = y(n).$$

Esta relación se conoce como la relación de *igualdad eventual*.

---

[16] Su Gao. *Invariant Descriptive Set Theory*. Chapman y Hall/CRC, 2008.

(4) Sea E_v la relación de Vitali sobre $\mathbb{R}$, definida por:

$$x \; E_v \; y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

(5) La relación $=^+$ sobre $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ se define de la siguiente forma: para cada $\overline{x} = (x_n)$ y $\overline{y} = (y_n)$ en $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$,

$$\overline{x} =^+ \overline{y} \iff \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta relación se conoce como *igualdad de subconjuntos numerables de Cantor*.

Proposición 1.3.3. $=^+$ *es una relación boreliana, vista como subconjunto de* $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$*.*

Demostración. En efecto, notemos que si $\overline{x} = (x_n), \overline{y} = (y_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, entonces

$$\overline{x} =^+ \overline{y} \iff \forall n \in \mathbb{N} \, \exists m \in \mathbb{N} \, (x_n = y_m) \; \wedge \; \forall m \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N} \, (x_n = y_m).$$

Si fijamos $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que el conjunto

$$A_{n,m} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : x_n = y_m\},$$

es cerrado. Por lo tanto, $=^+$ es $\mathbf{\Pi}^0_3$. $\square$

Pasamos ahora a presentar ejemplos que ilustran el comportamiento de las relaciones de equivalencia previamente definidas bajo la reducibilidad boreliana.

Ejemplo 1.3.4. (1) $\sim \leq_B$ Id$(M_n(\mathbb{C}))$. En efecto, consideremos $J : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ donde $J(A)$ es la forma canónica de Jordan de la matriz A. Entonces,

$$A \sim B \iff J(A) = J(B).$$

Más aún, J es una función boreliana.

(2) Id$(2^{\mathbb{N}}) \leq_B E_0$. Fijemos $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una biyección. Definimos $\eta : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ como

$$\eta(x)(n) = x(i), \text{ si } n = h(j, i) \text{ para algún } j \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que η es una reducción entre Id$(2^{\mathbb{N}})$ y E_0. Notemos que si $\eta(x)E_0\eta(y)$, entonces existe N tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $\eta(x)(n) = \eta(y)(n)$, es decir,

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \ \big(h(i,j) \geq \mathbb{N} \to x(i) = y(i)\big).$$

De lo anterior, se concluye que si $\eta(x)E_0\eta(y)$, entonces $x = y$. Además, no es difícil verificar que η es boreliana.

(3) $E_0 \leq_B =^+$. La estrategia es codificar cada clase de equivalencia de E_0 de manera única y boreliana, es decir, construir una función $\eta : 2^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ tal que $\eta(x)$ enumera los elementos de $[x]_{E_0}$.

Una forma de hacer esto es la siguiente: sea $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ una biyección y definamos η como

$$\eta(x)(n) := x \text{ con las primeras } |s(n)| \text{ coordenadas remplazadas por } s(n).$$

Así, $\{\eta(x)(n) : n \in \mathbb{N}\} = [x]_{E_0}$. Nuevamente omitiremos la prueba de que η es en realidad una función boreliana.

(4) $E_v \leq_B E_0$ y $E_0 \leq_B E_v$. Omitiremos los detalles de esta afirmación, pero puede consultarse una demostración en Prop. 6.1.4 [16].

Si E y F son relaciones de equivalencia tales que $E \leq_B F$ y $F \leq_B E$ diremos que E y F son *Borel equivalentes* o *Borel birreducibles*, y escribimos $E \sim_B F$. Por otro lado, si $E \leq_B F$ pero $F \not\leq_B E$ decimos que F es *estrictamente más compleja que* E, denotamos esto por $E <_B F$.

Con esta nueva notación, tenemos que $E_v \sim_B E_0$, es decir, E_v y E_0 son Borel birreducibles.

Dado un conjunto $A \subseteq X$ y una relación de equivalencia E sobre X, denotamos por $E \restriction A$ la restricción de E al conjunto A, es decir,

$$E \restriction A = E \cap A^2.$$

Es fácil mostrar que $E \restriction A$ es una relación de equivalencia sobre A.

Lema 1.3.5. *(Lem. 10.3.4 [16]) Definamos*

$$C = \{(x_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : \forall n \neq m \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x_n \neq x_m\}.$$

Entonces C es un subconjunto boreliano de $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ y, además, $=^+ \restriction C \sim_B =^+$.

Definición 1.3.6. Sea X un espacio Borel estándar y E una relación de equivalencia sobre X. Diremos que E es *suave* (o *concretamente clasificable*), si existe un espacio polaco Y, tal que $E \leq_B \text{Id}(Y)$.

Del ejemplo 1.3.4(1), tenemos que la relación de similaridad de matrices es suave. Por otro lado, es bien conocido que E_0 no es una relación suave Prop. 6.1.7 [16].

Nuestra intuición al interpretar la relación $E \leq_B F$ es que E es, a lo sumo, tan compleja como F, tal como se mencionó anteriormente. En particular, si F es boreliana (considerada como subconjunto de $Y \times Y$), cabría esperar que E también lo sea. Este hecho, efectivamente, se verifica en general. Aunque este resultado aparece como un ejercicio en Ex. 5.1.5 [16], debido a que lo utilizaremos más adelante, incluiremos a continuación su demostración.

Proposición 1.3.7. *Sea X, Y espacios Borel estándar y E, F relaciones de equivalencia sobre X y Y respectivamente. Si $E \leq_B F$ y F boreliana (como subconjunto de Y^2), entonces E también es boreliana.*

Demostración. Dado que $E \leq_B F$ existe $f : X \to Y$ boreliana, tal que para cada $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Definamos $g : X^2 \to Y^2$ como $g(x, y) = (f(x), f(y))$. No es difícil verificar que g es una función boreliana. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}[F] &= \{(x, y) \in X^2 : (f(x), f(y)) \in F\}, \\ &= \{(x, y) \in X^2 : f(x)Ff(y)\}, \\ &= E. \end{aligned}$$

De este modo, como F es un conjunto boreliano, concluimos que E también es boreliano. $\square$

El siguiente teorema, conocido como el *teorema de dicotomía de Silver*, hace parte de los teoremas de dicotomía más importantes dentro de la Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante.

Teorema 1.3.8. *(Th. 5.3.5 [16]) (Silver) Sea E una relación de equivalencia coanalítica definida en un espacio Borel estándar X. Entonces,*

$$E \leq_B \mathsf{Id}(\mathbb{N}) \quad o \quad \mathsf{Id}(2^{\mathbb{N}}) \leq_B E.$$

Cerramos esta sección con una figura que ilustra cómo se relacionan, bajo la reducibilidad boreliana, algunas de las relaciones de equivalencia previamente mencionadas. En esta, una flecha indica que la relación superior es estrictamente más compleja que la inferior. El lector interesado puede consultar una gráfica más completa acerca de la reducibilidad en Fig. 15.1 y 15.2 [16].

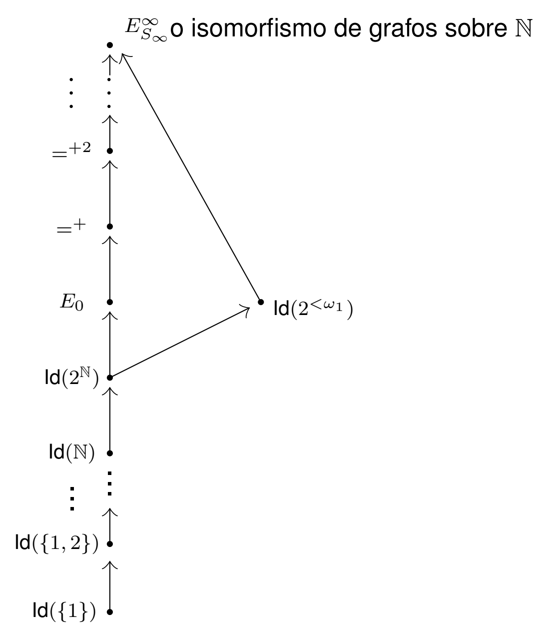


Figura 1.1: Comportamiento de la reducibilidad boreliana para algunas relaciones

1.4. DINÁMICA TOPOLÓGICA

Recordemos que un sistema dinámico (discreto) es un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Dado un punto $x \in X$, definimos la órbita de X como el conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Si $f^n(x) = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$, diremos que x es un *punto periódico* y su periodo es l, donde

$$l = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}.$$

Denotaremos con Per(f) al conjunto de puntos periódicos de (X, f).

En esta sección introducimos los conceptos de conjunto ω-límite y medidas invariantes asociadas a sistemas dinámicos.

1.4.1. Conjuntos ω-límite Dado un sistema dinámico (X, f) y un punto $x \in X$, se define el conjunto ω-límite (omega-límite) de x, como el conjunto de puntos límite de la sucesión $(f^n(x))$, el cual será denotado por $\omega(x, f)$. Equivalentemente, el conjunto omega-límite se puede definir como

$$\omega(x, f) = \{y \in X : \exists\, (n_k) \subseteq \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente tal que } (f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}} \to y\}.$$

Observación 1.4.1. *Si $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z y $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces $z \in \omega(x, f)$. En efecto, basta con notar que se puede encontrar una subsucesión (n_{k_i}) de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente.*

Iniciamos esta sección enunciando tres resultados clásicos sobre los conjuntos ω–límite, a los cuales omitiremos sus demostraciones. Sin embargo, el lector interesado puede consultarlas en el libro [17].

Proposición 1.4.2. *(Prop. 12.6 y 12.7 [17]) Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Entonces se tienen las siguientes:*

1. *$\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado no vacío de X.*

2. *$f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$.*

Proposición 1.4.3. *(Prop 12.9 [17]) Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si $U \subseteq X$ es abierto y además $\omega(x, f) \subseteq U$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$ si $n \geq K$.*

---

[17] Jefferson King y Héctor Méndez. *Sistemas dinámicos discretos*. Editorial UNAM, 2014.

Proposición 1.4.4. *(Prop. 12.10* [17]*) Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* $x \in X$ *con* $\omega(x, f)$ *finito. Si* $z \in \omega(x, f)$*, entonces* $\mathcal{O}_f(z) = \omega(x, f)$*. En particular,* $z \in \mathrm{Per}(f)$*.*

Aunque el siguiente resultado es fácil de demostrar, resulta útil en la demostración de algunos resultados posteriores.

Lema 1.4.5. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* $x \in X$*. Si la órbita de* x *es infinita, entonces* $\omega(x, f) \subseteq X'$*.*

Demostración. Por absurdo supongamos que existe $y \in \omega(x, f)$ tal que y es aislado en X. Por definición, existe $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $f^{n_i}(x) \to y$. Por otro lado, dado que y es aislado, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq i_0$, entonces $f^{n_i}(x) = y$. Esto implica que la órbita de x es finita, lo cual es una contradicción. □

A continuación enunciamos un lema cuya conclusión motiva el nombre que le hemos asignado. Este resultado será utilizado en los Capítulos 3 y 5.

Lema 1.4.6. *(Lema de sincronización) Sean* (X, f) *un sistema dinámico,* $x \in X$ *y* $z \in \omega(x, f)$*. Si* $\omega(x, f)$ *es finito, entonces para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d(f^{m+i}(x), f^i(z)) < \epsilon \textit{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $z \in \omega(x, f)$. Dado que $\omega(x, f)$ es finito, por la Proposición 1.4.4, tenemos que $\omega(x, f) = \mathcal{O}_f(z)$. Supongamos que $|\omega(x, f)| = k$, entonces $f^k(z) = z$. Para cada $i = 0, 1, \ldots, k-1$ tomemos $V_i \subseteq X$ abiertos tales que

- $f^i(z) \in V_i$ para cada $i < k$,
- $\mathrm{Diám}(V_i) < \epsilon$ para cada $i < k$,
- $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $i \neq j$.

Por la Proposición 1.4.3, tenemos que $f^n(x) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i$ si $n \geq K$ para algún cierto $K \in \mathbb{N}$.

Afirmación: Existe $K' \geq K$ tal que para cada $n \geq K'$ tenemos que si

$$f^n(x) \in V_{i(n)}, \text{ entonces } f^{n+1}(x) \in V_{i(n)+1 \text{ (mód } k)},$$

Supongamos por contradicción que existe una sucesión $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente con $n_0 \geq K$ tal que

$$f^{n_j}(x) \in V_{i(j)} \text{ y } f^{n_j+1}(x) \notin V_{i(j)+1 \text{ (mód } k)}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n_j \equiv l(\text{mod } k)$ para algún $l < k$, y que $f^{n_j}(x)$ es convergente (por compacidad).

Además, dado que $\omega(x, f) \cap V_l = \{f^l(z)\}$, tenemos que $\lim f^{n_j}(x) = f^l(z)$. Por comodidad, denotemos $l + 1 = l + 1$ (mód k). Por otro lado, por la continuidad de f se sigue que

$$\lim f^{n_j+1}(x) = f^{l+1}(z) \in V_{l+1},$$

pero esto contradice el hecho de que $f^{n_j+1}(x) \notin V_{l+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De lo anterior, concluimos que la afirmación es verdadera.

Sea $m \geq K'$ tal que $f^m(x) \in V_0$, el cual existe debido a que $z \in V_0 \cap \omega(x, f)$. Por lo tanto, tenemos que $d(f^m(x), z) < \epsilon$. Además, $f^{m+1}(x) \in V_1$, luego $d(f^{m+1}(x), f^1(z)) < \epsilon$. Por inducción podemos probar que $d(f^{m+i}(x), f^i(z)) < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, concluimos la prueba. □

El siguiente es un resultado técnico el cual caracteriza, bajo ciertas condiciones, la convergencia de iteradas de x. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$m\mathbb{N} + n = \{m \cdot i + n : i \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 1.4.7. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$ con órbita infinita tal que el conjunto omega-límite $\omega(x, f)$ es finito con $l = |\omega(x, f)|$ y $\mathcal{O}_f(x) \subseteq I(X)$. Si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces las siguientes son equivalentes:*

(1) La sucesión $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge,

(2) $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisface las siguientes:

(a) Existe un único $j \in \mathbb{N}$ con $0 \leq j < l$ tal que

$$\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (l\mathbb{N} + j) \text{ es infinito, y}$$

(b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : n_k = m\}$ es finito.

Demostración. Escribamos $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ y supongamos que $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z. Por el principio del palomar sabemos que existe al menos un j con $0 \leq j < l$ tal que

$A \cap (l\mathbb{N} + j)$ es infinito. Veamos que este j es único. Por contradicción, supongamos que existen $0 \leq i < j < l$ tal que

$$A \cap (l\mathbb{N} + i) \text{ y } A \cap (l\mathbb{N} + j)$$

son infinitos. Dado que A es infinito, por la Observación 1.4.1 tenemos que $z \in \omega(x, f)$. Por otro lado, como $\omega(x, f)$ es finito, existe $\epsilon > 0$ tal que si $y_0, y_1 \in \omega(x, f)$ y

$$y_0 \neq y_1, \text{ entonces } d(y_0, y_1) \geq \epsilon.$$

Por el Lema 1.4.6, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{m+r}(x), f^r(z)) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para cada } r \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Dado que $(f^n(x))_{n \in A}$ converge a z, y $A \cap (l\mathbb{N} + j)$ y $A \cap (l\mathbb{N} + l)$ son infinitos, existen $n_{k_0} \in (l\mathbb{N} + i)$ y $n_{k_1} \in (l\mathbb{N} + j)$ tal que $m \leq n_{k_0}, n_{k_1}$ y

$$d(f^{n_{k_0}}(x), z) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(f^{n_{k_1}}(x), z) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Como $m \leq n_{k_0}$ y $m \leq n_{k_1}$, tenemos que

$$m + r_0 = n_{k_0} \quad \text{y} \quad m + r_1 = n_{k_1} \text{ para algún } r_0, r_1 \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Notemos que r_1 y r_2 no pueden ser congruentes módulo l. Esto implica que $f^{r_0}(z) \neq f^{r_1}(z)$. Por otro lado, de (1.2) se tiene que

$$d(f^{m+r_0}(x), f^{r_0}(z)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(f^{m+r_1}(x), f^{r_1}(z)) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.5}$$

Usando las ecuaciones (1.3) y (1.5) concluimos que $d(f^{r_0}(z), z) < \epsilon$ y $d(f^{r_1}(z), z) < \epsilon$. Pero esto contradice la elección del epsilon.

La condición (b) es sencilla de ver, ya que si suponemos por absurdo que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $K \in \mathbb{N}$ existe un $k \geq K$ con $n_k < m$, existiría una subsucesión $(n_{k_i}) \subseteq (n_k)$ que es eventualmente constante con valor p. Por lo tanto, $f^p(x) \in \omega(x, f)$, lo cual es absurdo, ya que por el Lema 1.4.5 tendríamos también que $f^p(x) \in X'$.

Recíprocamente, supongamos que se tienen las condiciones (a) y (b). Sea $j \in \mathbb{N}$ el que se obtiene de suponer (a). Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$A \subseteq l\mathbb{N} + j$. Dado que X es compacto, existen una subsucesión $(n_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ y $z \in X$ tal que

$$(f^{n_{k_i}}(x))_{i\in\mathbb{N}} \text{ converge a } z.$$

Afirmamos que $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z. Debido a (b), podemos concluir que $\{n_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito. Esto implica que $z \in \omega(x, f)$, por la Observación 1.4.1. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que si $y_0, y_1 \in \omega(x, f)$ y $y_0 \neq y_1$, entonces $d(y_0, y_1) \geq \epsilon$. Por otro lado, usando el Lema 1.4.6 tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{m+r}(x), f^r(x)) < \epsilon/2 \text{ para cada } r \in \mathbb{N}.$$

Sea $i_0, r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_{i_0}} \geq m$ y

$$d(f^{n_{k_{i_0}}}(x), z) < \epsilon/2. \tag{1.6}$$

Como $n_{k_{i_0}} \geq m$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_{i_0}} = m + r_0$. Por lo tanto, se tiene que

$$d(f^{n_{k_{i_0}}}(x), f^{r_0}(z)) < \epsilon/2. \tag{1.7}$$

Notemos que por (1.6) y (1.7) se concluye que $d(f^{r_0}(z), z) < \epsilon$, esto implica que $f^{r_0}(z) = z$. Así, concluimos que $r_0 \in l\mathbb{N}$, ya que z tiene periodo l.

Finalmente, tomemos $K' \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K'$ entonces $n_k \geq n_{k_{i_0}}$. Como n_k y $n_{k_{i_0}}$ están en $l\mathbb{N} + j$, se tiene que

$$n_k = n_{k_{i_0}} + p_k l = m + r_0 + p_k l,$$

para algún $p_k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$d(f^{n_k}(x), f^{r_0+p_k l}(z)) < \epsilon.$$

Pero r_{i_0} y $p_k l$ son múltiplos de l, luego $f^{r_{i_0}+p_k l}(z) = z$, lo cual implica que $d(f^{n_k}(x), z) < \epsilon$. De lo anterior, concluimos que $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z. □

El siguiente lema se refiere a un caso muy específico de un sistema dinámico numerable; sin embargo, será útil más adelante.

Lema 1.4.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que X es homeomorfo a $\omega + 1$. Si para cada $x \in I(X)$ se tiene que x no es periódico, entonces $f(d) = d$, donde $\{d\} = X \setminus I(X)$.*

Demostración. Notemos que para cualquier punto $x \in X$ tenemos que $\omega(x, f)$ es finito. En efecto, si $\mathcal{O}_f(x)$ es finita, claramente $\omega(x, f)$ es finito. Por otro lado, si $\mathcal{O}_f(x)$ es infinita, por el Lema 1.4.5 tenemos que $\omega(x, f) \subseteq X'$. Pero $|X'| = |\{d\}| = 1$, entonces $\omega(x, f)$ es finito.

En particular $\omega(d, f)$ es finito. Afirmamos que $I(X) \cap \omega(d, f) = \emptyset$. En efecto, si $x \in I(X) \cap \omega(d, f)$, entonces x debe ser periódico, por la Proposición 1.4.4, lo cual contradice nuestra hipótesis. Además, por la Proposición 1.4.2 tenemos que $\omega(y, f) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{d\} = \omega(d, f)$. De este modo, concluimos que $f(d) = d$. □

Finalizamos esta sección presentando el siguiente resultado.

Proposición 1.4.9. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico,* $x \in X$ *y* $z \in \omega(x, f) \cap \text{Per}(f)$*. Si* z *es aislado en* $\omega(x, f)$*, entonces* $\omega(x, f)$ *es finito.*

La demostración que presentamos a continuación es una adaptación del Lema 2.1.7 de [18]. Para facilitarla, introduciremos primero un caso particular.

Lema 1.4.10. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico,* $x \in X$ *y* $z \in \omega(x, f)$*. Si* z *es aislado en* $\omega(x, f)$ *y* $f(z) = z$*, entonces* $\omega(x, f) = \{z\}$*.*

Demostración. (Lema 1.4.10) Dado que z es aislado en $\omega(x, f)$, tenemos que $\{z\}$ es abierto en $\omega(x, f)$. Supongamos por absurdo que $\omega(x, f) \neq \{z\}$, por lo tanto, $\omega(x, f) \setminus \{z\}$ es cerrado no vacío de X. Por la normalidad de X, existen U y V abiertos de X tales que

- $z \in U$,
- $\omega(x, f) \setminus \{z\} \subseteq V$,
- $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Por la Proposición 1.4.3 existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U \cup V$ para cada $n \geq K$. Además, existe una sucesión $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente con $n_0 \geq K$ tal que

$$f^{n_i}(x) \in U \text{ y } f^{n_i+1}(x) \in V \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f^{n_i}(x)$ y $f^{n_i+1}(x)$ son sucesiones convergentes. Por lo tanto, $f^{n_i}(x) \to z$ ya que $\overline{U} \cap \omega(x, f) = \{z\}$. Además, por continuidad

[18] Andrew Barwell. «ω-limits sets of discrete dynamical systems». Tesis doct. University of Birmingham, 2010.

de f, tenemos que $f^{n_i+1}(x) \to f(z) = z$. Pero $f^{n_i+1}(x) \in V$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto $f(z) = z \in \overline{V}$. Así, $z \in \overline{U} \cap \overline{V}$, lo cual es absurdo. De lo anterior, concluimos que $\omega(x, f) = \{z\}$. $\square$

Demostración. (Proposición 1.4.9) Sea $z \in \omega(x, f) \cap \mathrm{Per}(f)$. Supongamos que $f^k(z) = z$ y que z es aislado en $\omega(x, f)$. Como $z \in \omega(x, f)$ existe $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $f^{n_i}(x) \to z$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n_i \equiv j (\text{mód } k)$ para algún $j < k$. Mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} f^{k\cdot n+j}(x) = z$$

En efecto, consideremos $g = f^k$, entonces $z \in \omega(f^j(x), g)$ y además, $\omega(f^j(x), g) \subseteq \omega(x, f)$, por lo tanto, z es aislado en $\omega(f^j(x), g)$. Por otro lado, tenemos que $g(z) = f^k(z) = z$, es decir, z es un punto fijo de g. Así, por el Lema 1.4.10, concluimos que $\omega(f^j(x), g) = \{z\}$, esto es $\lim_{n\to\infty} f^{k\cdot n+j}(x) = z$.

Sea $y \in \omega(x, f)$ tal que $f^{k-j}(z) = y$. Entonces por la continuidad de f, tenemos que para cada $i < k$

$$\lim_{n\to\infty} f^{k\cdot n+i}(x) = f^i(y).$$

De lo anterior, concluimos que $\omega(x, f)$ es finito. $\square$

1.4.2. Medidas invariantes

Definición 1.4.11. Sea X un conjunto y $\mathcal{S}$ una σ-álgebra sobre X. Una medida sobre $(X, \mathcal{S})$ es una función $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{S}$ disjunta dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

En este trabajo solo consideraremos las medidas de probabilidad de Borel, es decir, medidas definidas sobre la σ-álgebra de Borel tal que $\mu(X) = 1$.

Sean (X, f) un sistema dinámico y μ una medida sobre X. Diremos que μ es *invariante* (o f*-invariante*), si

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}[A]),$$

para todo subconjunto boreliano A de X.
Terminamos este capítulo con el siguiente lema, tomado de Lem. 2.1 [7]. Dado que una demostración completa de la primera parte resulta demasiado extensa para nuestros fines, presentaremos únicamente un bosquejo.

Lema 1.4.12. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces:*

(1) Sean $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{i < n : f^i(x) \in F\}| > 0,$$

entonces existe una medida μ sobre X f-invariante tal que $\mu(F) > 0$.

(2) Si para algún $x \in X$ y una medida f-invariante μ se tiene que $\mu(\{x\}) > 0$, entonces x es un punto periódico.

Antes de proceder con el bosquejo de la demostración, enunciaremos dos resultados técnicos que necesitaremos. Omitiremos aquí la definición y los detalles relacionados con la topología débil estrella en espacios de medida; el lector interesado puede consultar Ch. 2 [19] para una presentación completa.

Proposición 1.4.13. *(Ex. 2.1.1 y Lem. 2.2.4 [19]) Sea X un espacio métrico compacto. Entonces tenemos lo siguiente:*

(1) Sean (μ_n) y μ medidas sobre X. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a μ, con la topología débil estrella si, y solo si,

$$\limsup \mu_n(C) \leq \mu(C) \text{ para todo cerrado } C \subseteq X.$$

(2) Sea $f : X \to X$ una función continua y μ una medida sobre X. Definimos

$$\mu^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\Big(\mu(A) + \mu(f^{-1}[A]) + \cdots + \mu(f^{-(n-1)}[A])\Big).$$

[19] Marcelo Viana y Krerley Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.

Entonces la sucesión $(\mu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos un punto de acumulación. Más aún, cada punto de acumulación de $(\mu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una medida f-invariante.

Demostración. (Lema 1.4.12)

1. Sea $\nu = \delta_y$ la medida de Dirac en y, es decir, la medida dada por

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin A, \\ 1 & \text{si } y \in A. \end{cases}$$

   Usando la segunda parte de la Proposición 1.4.13 con la medida ν y la función f, tenemos que existe una medida μ f-invariante. Ahora notemos que

$$\nu^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\Big|\{i < n : f^n(y) \in A\}\Big|.$$

   Dado que μ es punto de acumulación de $(\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, por la parte 1 de la Proposición 1.4.13, tenemos que

$$\mu(F) \geq \limsup \frac{1}{n}\Big|\{i < n : f^i(y) \in F\}\Big| > 0.$$

2. Dado que μ es f-invariante, tenemos que

$$\mu(\{x\}) = \mu(f^{-i}[\{x\}]) \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

   Si x no fuera un punto periódico de f, tendríamos que la colección $\{f^{-i}[\{x\}]\}_{i\in\mathbb{N}}$ es disjunta dos a dos. Pero $\mu(\{x\}) > 0$, por lo tanto

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-i}[\{x\}]\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(f^{-i}[\{x\}]) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\{x\}) = \infty.$$

   Lo cual contradice que μ sea una medida de probabilidad.

□

2. SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITA DENSA

Este capítulo es una introducción al estudio de los sistemas dinámicos numerables con órbita densa. Presentaremos algunos ejemplos que ilustran este tipo de sistemas, junto con algunos resultados de gran importancia para el desarrollo de este trabajo. El resultado principal de este capítulo lo presentamos en la segunda sección, donde demostramos que, para cada espacio métrico compacto numerable, existe una función continua que admite una órbita densa.

2.1. INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico (X, f) es llamado un *sistema dinámico numerable* si el espacio X, además de ser métrico compacto, es numerable.

Definición 2.1.1. Sea un (X, f) un sistema dinámico. Decimos que (X, f) tiene *órbita densa* si existe un punto $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

A continuación se presentarán ejemplos de sistemas dinámicos numerables con órbita densa definidos sobre distintos espacios de fase. Antes de ello, estableceremos cierta notación que será utilizada a lo largo de este trabajo.

De acuerdo con el teorema de Mazurkiewicz y Sierpiński (véase el Teorema 1.1.11), el espacio métrico compacto numerable más "sencillo" es $\omega + 1$, el cual podemos ver simplemente como una sucesión convergente. En este sentido, para evitar el uso explícito de la notación ordinal (y abusando un poco de la notación), supondremos que

$$\omega + 1 = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\} \subseteq \mathbb{R},$$

donde $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_∞.

De manera análoga, notemos que $k \cdot \omega + 1$ puede interpretarse como k sucesiones convergentes dispuestas una después de la otra, pegadas hacia la derecha. Así, vamos a suponer que

$$k \cdot \omega + 1 = \bigcup_{i=0}^{k-1} D_i \subseteq \mathbb{R},$$

donde $D_i = \{d_{i,n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_i\}$ y $(d_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_i. Supondremos además que $d_i < d_{i+1,0}$ para cada $i = 0, \ldots, k-1$.

Ejemplo 2.1.2. (1) Definamos $f_1 : \omega + 1 \to \omega + 1$ como sigue:

$$f_1(x) = \begin{cases} d_{n+1} & \text{si } x = d_n, \\ d_\infty & \text{si } x = d_\infty. \end{cases}$$

En la siguiente figura se ilustra la función f_1.

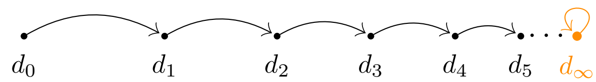


Figura 2.1: Sistema dinámico $(\omega + 1, f_1)$ con órbita densa

Es sencillo probar que f_1 es una función continua, y además, $\overline{\mathcal{O}_{f_1}(d_0)} = \omega + 1$.

(2) Sea $k > 1$ y fijemos $X = k \cdot \omega + 1$. Definiremos una función continua $f_k : X \to X$ de la siguiente manera:

$$f_k(x) = \begin{cases} d_{n+1,m} & \text{si } x = d_{n,m} \text{ y } n < k, \\ d_{0,m+1} & \text{si } x = d_{k,m}, \\ d_{n+1} & \text{si } x = d_n \text{ y } n < k, \\ d_0 & \text{si } x = d_k. \end{cases}$$

A continuación presentamos la gráfica de la función f_k en el caso cuando $k = 4$.

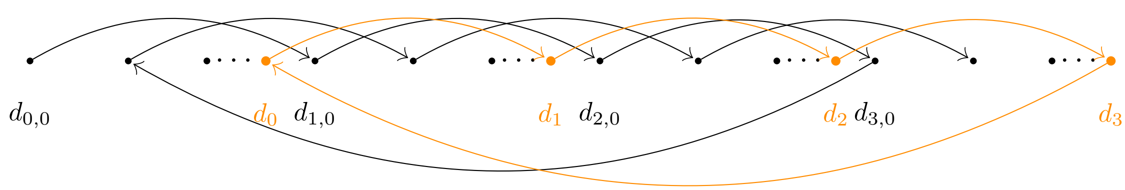


Figura 2.2: Función f_k cuando $k = 4$

No es difícil verificar que f_k es una función continua sobre X, y que la órbita de $d_{0,0}$ es densa en X.

(3) La siguiente figura es una representación gráfica de un sistema dinámico con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$.

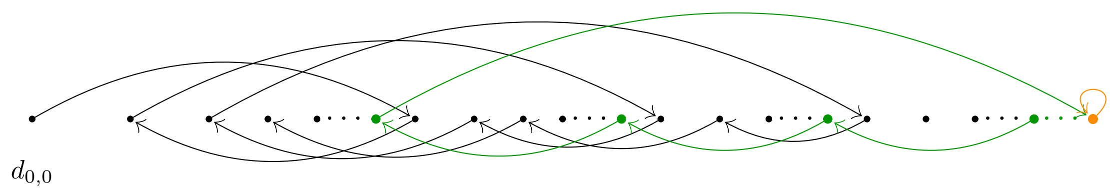


Figura 2.3: Ejemplo de un sistema dinámico (ω^2+1, f) con órbita densa

> Los puntos negros representan los puntos aislados de ω^2+1, los demás corresponden a los puntos límite. Verificar que la figura anterior representa un sistema dinámico con órbita densa sobre ω^2+1 (donde $d_{0,0}$ es el punto con órbita densa) requiere de cierto trabajo. No obstante, omitimos esos detalles por ahora, ya que en los Capítulos 4 y 3 profundizaremos en estos sistemas.

Una propiedad en común que tienen los ejemplos presentados anteriormente es que existe *un único punto con órbita densa*. Además, dicha órbita *coincide con el conjunto de puntos aislados* del espacio. Este hecho no es exclusivo de esos ejemplos, tal como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico numerable y $w \in X$. La órbita de w es densa en X si, y solo si, $\mathcal{O}_f(w) = I(X)$.*

Demostración. Sea $w \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(w)$ es densa en X. Claramente se tiene que

$$I(X) \subseteq \mathcal{O}_f(w).$$

Supongamos que $f^k(w)$ es un punto límite para algún $k \in \mathbb{N}$. Dado que $I(X)$ es infinito, tenemos que la órbita de w también es infinita. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(w)$ es un punto aislado.

Por otro lado, como f^{n-k} es continua y $f^{n-k}(f^k(w)) = f^n(w)$, existe $W \subseteq X$ abierto, tal que $f^k(w) \in W$ y $f^{k-n}(W) = \{f^n(w)\}$. Pero $f^k(w)$ es un punto límite, por lo tanto W debe ser infinito, así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > k$ y $f^m(w) \in W$. De lo anterior, concluimos que $n - k + m \neq n$ y

$$f^{n-k+m}(w) = f^{n-k}(f^m(w)) = f^n(w),$$

lo que implica que $\mathcal{O}_f(w)$ es finita. Lo cual es una contradicción. □

El siguiente corolario se deduce inmediatamente a partir de la proposición anterior.

Corolario 2.1.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico numerable y $w \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f(w)} = X$. Si para algún $y \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}_f(y)} = X$, entonces $w = y$.*

Recordemos que un sistema dinámico (X, f) es *transitivo* si para cada par de abiertos no vacíos U, V existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n[U] \cap V \neq \emptyset$. La siguiente proposición muestra que no existen sistemas transitivos en el contexto numerable.

Proposición 2.1.5. *Cualquier sistema dinámico numerable (X, f) no es transitivo.*

Demostración. Sean $x_0 \in I(X)$. Supongamos que $I(X) \subsetneq \mathcal{O}_f(x_0)$. Sea $x_1 \in I(X) \backslash \mathcal{O}_f(x_0)$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n[\{x_0\}] \cap \{x_1\} = \emptyset$.

Ahora supongamos que $I(X) \subseteq \mathcal{O}_f(x_0)$. Esto implica que la órbita de x_0 es densa, así, por la Proposición 2.1.3 se tiene que $I(X) = \mathcal{O}_f(x_0)$. Luego, $f^n[\{f(x_1)\}] \cap \{x_1\} = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De todo lo anterior, concluimos que (X, f) no es transitivo. $\square$

Es bien conocido que si X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados y (X, f) tiene una órbita densa, entonces la colección de puntos con órbita densa bajo f es densa en X. En particular, esto implica que debe haber más de un punto con órbita densa. Por otro lado, el hecho de que X sea métrico compacto sin puntos aislados implica que X no es numerable (en realidad, X tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$). En conclusión, si X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados (y por lo tanto no numerable), entonces para cada sistema dinámico (X, f) existen al menos dos puntos con órbita densa.

A partir de esta observación y del Corolario 2.1.4, planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 2.1.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Supongamos que, para cada sistema dinámico (X, f) con órbita densa, existe un único punto x_0 tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x_0)} = X$. ¿Entonces X es numerable?*

2.2. EXISTENCIA DE SISTEMAS DINÁMICOS CON ÓRBITA DENSA

Tal como se mencionó al inicio de este capítulo, el objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Existe una función continua $f : X \to X$ que admite una órbita densa.*

Dado un espacio X con las condiciones previamente mencionadas, construiremos una función $f : X \to X$ que posea una órbita densa. La construcción que presentamos a continuación es una ligera modificación de la propuesta por Bobok en Lem. 3.3 [7]. En realidad, Bobok construye un homeomorfismo con la propiedad de que existe un punto cuya $\mathbb{Z}$–órbita es densa en X. Si bien el propósito de Bobok no era exhibir funciones con esta característica, sino utilizar dicha construcción en el estudio del caos distributivo en sistemas dinámicos numerables, aquí adaptamos su idea con el fin de obtener un sistema dinámico con órbita densa.

Comenzamos introduciendo las herramientas necesarias para el desarrollo de esta sección. Recordemos que la segunda derivada de X se define como

$$X^{(2)} = (X')'.$$

Sea X un espacio métrico compacto numerable tal que $|X^{(2)}| > 1$. En base al teorema de Mazurkiewicz y Sierpiński (ver el Teorema 1.1.11), es posible encontrar un subespacio $\widehat{X} \subseteq [0, 2]$ (dotado con la topología usual) homeomorfo a X', el cual satisface las siguientes condiciones:

(C1) $\min \widehat{X} = 0$ y $\max \widehat{X} = 2$,

(C2) $\min(\widehat{X})' = 0$ y $\max(\widehat{X})' = 1$,

(C3) Para cada $x \in (\widehat{X})' \setminus \{0\}$, x es un punto límite bilateral de $\widehat{X}$.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, para cada espacio métrico compacto numerable X, fijaremos un subespacio $\widehat{X} \subseteq [0, 2]$ homeomorfo a X' que satisface las condiciones **(C1), (C2)** y **(C3)**.

Además, para cada X, fijaremos una partición $\{Y_X, Z_X\}$ de $I(\widehat{X})$ tal que, para todo $x \in (\widehat{X})' \setminus \{0\}$, el punto x es un punto límite bilateral tanto de Y_X como de Z_X, y adicionalmente, el punto 0 es un punto límite de ambos conjuntos. Por conveniencia, en lo que sigue denotaremos simplemente por $\{Y, Z\}$ a dicha partición.

Consideremos $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$ dada por

$$g(i) = \frac{1}{i + 1}.$$

Definición 2.2.2. Sean $B \subseteq \mathbb{R}$, $F \subseteq B$ y $\epsilon > 0$. Decimos que F ϵ-genera a B, si para cada $x \in B$ existe $y \in F$ tal que $|x - y| < \epsilon$.

Sea X un espacio métrico, compacto y numerable con $|X^{(2)}| > 1$. Diremos que una colección $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos no vacíos de $I(\widehat{X})$ es un *conjunto g-admisible* (o simplemente, *admisible*) para X, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Cada conjunto M_i es finito, $M_{2i} \subseteq Y$ y $M_{2i+1} \subseteq Z$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
- El conjunto M_i $g(i)$-genera a Y si i es par, y M_i $g(i)$-genera a Z si i es impar.

Proposición 2.2.3. *Sea X un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$, entonces existe un conjunto $\mathcal{M}$ admisible para X.*

Demostración. Dado que $Y, Z \subseteq [0, 2]$, dividamos el intervalo $[0, 2]$ en $\lceil 4/g(i) \rceil$ ($\lceil x \rceil$ denota la función techo) subintervalos de longitud $g(i)/2$. Ahora, definamos M_i, un subconjunto finito de Y (o Z, dependiendo de la paridad de i), tal que M_i contenga al menos un punto de cada subintervalo. No es difícil verificar que M_i $g(i)$-genera a Y o Z. $\square$

Sean X métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$ y $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un conjunto admisible para X. Definimos $X(\mathcal{M}) \subseteq [0, 2] \times [0, 1]$ como

$$X(\mathcal{M}) = \widehat{X} \times \{0\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \times \{g(i)\}.$$

Probaremos que, si $\mathcal{M}$ es un conjunto admisible para X, entonces $X(\mathcal{M})$ es un subespacio métrico compacto numerable de $[0, 2] \times [0, 1]$ con la topología usual que hereda de $\mathbb{R}^2$. Más aún, probaremos que $X(\mathcal{M})$ es homeomorfo a X.

Lema 2.2.4. *Sea X un espacio métrico compacto numerable con $|X^2| > 1$. Si $\mathcal{M}$ es un conjunto admisible para X, entonces $X(\mathcal{M})$ es homeomorfo a X.*

Demostración. De acuerdo con el teorema de Mazurkiewicz y Sierpiński (ver Teorema 1.1.11), basta con mostrar que $X(\mathcal{M})'$ es homeomorfo a X'. Afirmamos que

$$X(\mathcal{M})' = \widehat{X} \times \{0\}.$$

En efecto, sea $x = (u, v)$ con $v = g(i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $u \in M_i$. Dado que M_i es finito, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \min\{g(i-1) - g(i), g(i) - g(i+1)\} \quad \text{y} \quad (u - \delta, u + \delta) \cap M_i = \{u\}.$$

Así, por la elección de δ, se concluye que $B_\delta(u,v) \cap X(\mathcal{M}) = \{(u,v)\}$, donde $B_\delta(u,v)$ denota la bola con centro en (u,v) y radio δ, es decir,

$$B_\delta(u,v) = X(\mathcal{M}) \cap (u-\delta, u+\delta) \times (v-\delta, v+\delta).$$

Esto muestra que (u,v) con $v \neq 0$ no puede ser un punto límite. Luego

$$X(\mathcal{M})' \subseteq \widehat{X} \times \{0\}.$$

Veamos ahora que $\widehat{X} \times \{0\} \subseteq X(\mathcal{M})'$. Sea $(u,0) \in \widehat{X} \times \{0\}$. Veamos que $(u,0) \in X(\mathcal{M})'$. Notemos que basta con tomar $u \in I(\widehat{X})$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $u \in Y$. En este caso, para cada $\delta > 0$ tal que

$$(u-\delta, u+\delta) \cap I(\widehat{X}) = \{u\},$$

se tiene que $B_\delta(u,0) \cap X(\mathcal{M})$ es infinito, pues si tomamos $g(i) < \delta$ con i par, tendríamos que $u \in M_i$, ya que M_i $g(i)$-genera a Y y $g(i) < \delta$. Por lo tanto, $(u, g(i)) \in B_\delta(u,0)$ para una cantidad infinita de i's. $\square$

Sea X un espacio métrico compacto y numerable X con $|X^{(2)}| > 1$ y $\mathcal{M}$ un conjunto admisible para X. Construiremos una función continua

$$F : X(\mathcal{M}) \to X(\mathcal{M})$$

que admite una órbita densa.

Antes de definir F, introduciremos la siguiente notación: si $A \subseteq [0,2]$, definimos

$$A^- = A \setminus \{\text{ínf}\, A\}, \qquad A^+ = A \setminus \{\sup A\}.$$

Consideremos las funciones $T_A^- : A^- \to A$ y $T_A^+ : A^+ \to A$ dadas por

$$T_A^-(x) = \sup(A \cap [0,x)), \qquad T_A^+(x) = \text{ínf}(A \cap (x,2]).$$

Notemos que estas funciones no siempre están bien definidas, ya que no es posible asegurar en general que $T_A^-(x)$ o $T_A^+(x)$ pertenezcan a A. Para nuestro propósito, nos interesa que dichas funciones estén bien definidas cuando A sea un conjunto finito, Y o Z (recordemos que $\{Y, Z\}$ es la descomposición de $I(\widehat{X})$ fijada para cada X).

Condiciones suficientes sobre A, para que T_A^- y T_A^+ estén bien definidas son las siguientes:

(I) Para cada $x \in A^+$ existe $y \in A$ tal que $(x, y) \cap A = \emptyset$.

(II) Para cada $x \in A^-$ existe $y \in A$ tal que $(y, x) \cap A = \emptyset$.

Notemos que cualquier conjunto finito (con más de un elemento) satisface estas condiciones. Asimismo, mostraremos a continuación que los conjuntos Y y Z también cumplen con (II) y (I).

Proposición 2.2.5. *Sean X un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$ y $\{Y, Z\}$ la descomposición de $I(\widehat{X})$. Si $A \in \{Y, Z\}$, entonces A satisface* (I) *y* (II)*.*

Demostración. Sea $A \in \{Y, Z\}$. Veamos que A satisface (I), es decir, para cada $x \in A^+$ existe $y \in A$ tal que $(x, y) \cap A = \emptyset$. Dado que $(\widehat{X})' \subseteq \overline{A}$, se tiene que $A' = (\widehat{X})'$.
Primero consideremos el caso en el que existe al menos un punto límite de A por encima de x. Tomemos

$$z = \inf\{w \in A' : w > x\}.$$

Como A' es cerrado, tenemos que $z \in A'$. Ahora recordemos que $z \in (\widehat{X})' = A'$ es un punto límite bilateral de A, por lo tanto, tenemos lo siguiente:

(1) $[x, z] \cap A$ es infinito (en particular, no es vacío), y

(2) el único punto límite de $[x, z] \cap A$ es z (por la elección de z).

De lo anterior, observemos que debe existir un punto $y \in A \cap (x, z)$, con $(x, y) \cap A = \emptyset$.
Nos resta analizar el caso donde no existe ningún punto límite de A por encima de x. En este caso, basta con tomar $z = 2$, y por un argumento similar al anterior se concluye que debe existir un $y \in Y$ con la propiedad deseada. Así, mostramos que A satisface (I).

Finalmente, para ver que A satisface (II), es suficiente con considerar

$$z = \sup\{w \in A' : w < x\},$$

el cual existe ya que 0 es punto límite de A. Luego, se analiza el intervalo (z, x) de forma análoga al procedimiento utilizado previamente. $\square$

Para ilustrar el comportamiento de las funciones T_A^- y T_A^+, presentamos la siguiente figura.

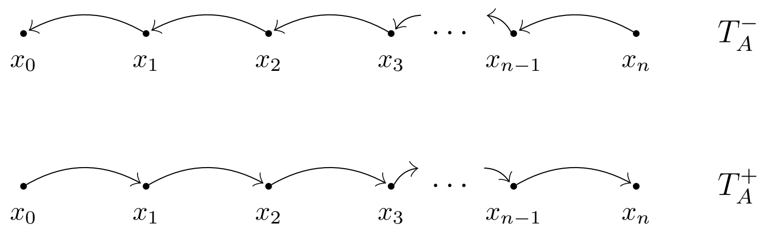


Figura 2.4: Funciones T_A^+ y T_A^- con $A = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$

Proposición 2.2.6. *Sean X un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$ y $\{Y, Z\}$ la descomposición de $I(\widehat{X})$. Si A es finito y tiene más de un elemento, o $A \in \{Y, Z\}$. Entonces, las funciones T_A^- y T_A^+ son inyectivas, y además,*

$$T_A^-[A^-] = A^+ \quad \textit{y} \quad T_A^+[A^+] = A^-.$$

Demostración. Por definición, es claro que T_A^- y T_A^+ son inyectivas. Sea $x \in A^+$. Entonces existe $y \in A$, tal que $y > x$ $(x, y) \cap A = \emptyset$. Así, tenemos que $y \in A^-$, y además, $T_A^-(y) = x$. Lo anterior prueba que $A^+ \subseteq T_A^-[A^-]$.

Si $T_A^-(x) = \sup A$, para algún $x \in A^-$, entonces $x > \sup A$, lo cual es una contradicción. Así, concluimos que $T_A^-[A^-] = A^+$. La igualdad $T_A^+[A^+] = A^-$ se prueba de manera totalmente análoga. $\square$

Ya tenemos todo lo necesario para definir $F : X(\mathcal{M}) \to X(\mathcal{M})$.

- Para $(x, 0) \in \widehat{X} \times \{0\}$, definimos

$$F(x,0) = \begin{cases} (x,0) & \text{si } x \in (\widehat{X})', \\ (T_Y^+(x), 0) & \text{si } x \in Y^+, \\ (T_Z^-(x), 0) & \text{si } x \in Z, \\ (\max Z, 0) & \text{si } x = \max Y. \end{cases} \tag{2.1}$$

- Para $(x, g(i)) \in M_i \times \{g(i)\}$ para algún $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$F(x, g(i)) = \begin{cases} (T^{+}_{M_i}(x), g(i)) & \text{si } i \text{ es par y } x \in M_i^{+}, \\ (\max M_{i+1}, g(i+1)) & \text{si } i \text{ es par y } x = \max M_i, \\ (T^{-}_{M_i}(x), g(i)) & \text{si } i \text{ es impar y } x \in M_i^{-}, \\ (\min M_{i+1}, g(i+1)) & \text{si } i \text{ es impar y } x = \min M_i. \end{cases} \tag{2.2}$$

A continuación, calculamos algunas iteraciones de F para el punto $x_0 = (\min M_0, g(0))$. Asumamos que $M_0 = \{m_0 < m_1 < \ldots < m_k\}$. Entonces $x_0 = (m_0, g(0))$ y

- $F(x_0) = F(m_0, g(0)) = (m_1, g(0))$,
- $F(m_1, g(0)) = (m_2, g(0))$.
- $F(m_k, g(0)) = (L, g(1))$, donde $L = \max M_2$.

Para ilustrar con mayor claridad la construcción de la función F, presentamos a continuación una gráfica de F en $[0,2]\times[0,1]$, correspondiente al caso en que $X = 2\cdot\omega^2+1$.

Los puntos de color rojo y verde representan los puntos de los conjuntos Y y Z, respectivamente. Es importante aclarar que en esta figura los puntos de los conjuntos Y y Z se encuentran intercalados. En general, esto no necesariamente es así. Sin embargo, con el fin de ejemplificar la construcción, optamos por hacerlo de esta manera.

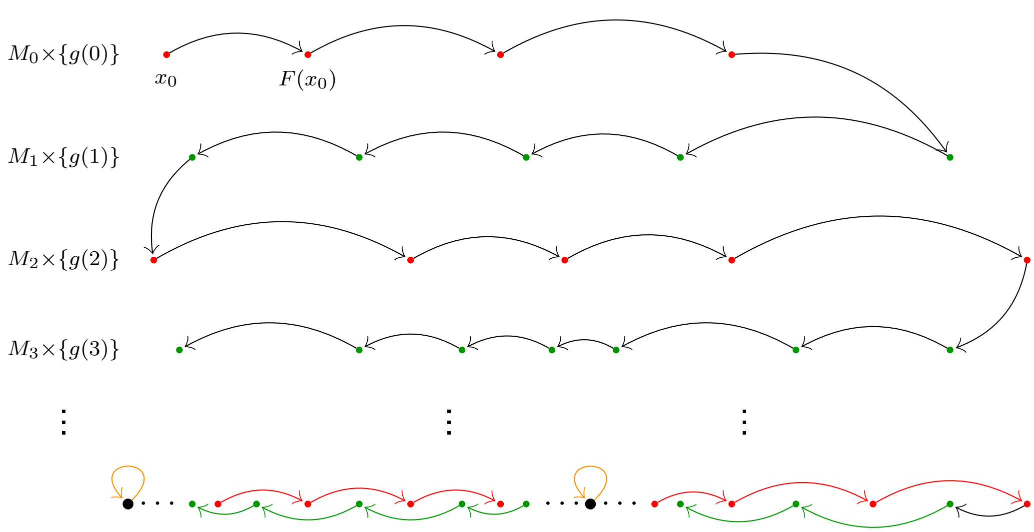


Figura 2.5: Función $F : X(\mathcal{M}) \to X(\mathcal{M})$ cuando $X = 2 \cdot \omega^2 + 1$

Lema 2.2.7. *Sean X un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$ y $\mathcal{M}$ un conjunto admisible para X. Entonces, la función $F : X(\mathcal{M}) \to X(\mathcal{M})$ construida anteriormente, es continua.*

Demostración. Probaremos la continuidad en cada punto. Sea $(x, y) \in X(\mathcal{M})$ y consideremos lo siguientes casos:

Caso 1: Si $(x, y) \in X(\mathcal{M}) \setminus (\widehat{X} \times \{0\})$. En este caso no hay nada que hacer, ya que (x, y) es un punto aislado de $X(\mathcal{M})$.

Caso 2: Si $(x, 0) \in I(\widehat{X}) \times \{0\}$. Por definición de F tenemos que $F(x, 0) = (y, 0)$ para algún $y \in I(\widehat{X})$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos la bola abierta de radio ϵ con centro $(y, 0)$, denotada por

$$B_\epsilon(y, 0) = X(\mathcal{M}) \cap (y - \epsilon, y + \epsilon) \times [0, \epsilon).$$

Como x, y son puntos aislados en X_B, existe $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que

$$(x - \delta, x + \delta) \cap \widehat{X} = \{x\} \text{ y } (y - \delta, y + \delta) \cap \widehat{X} = \{y\}. \tag{2.3}$$

Afirmamos que

$$B_\delta(x, 0) \subseteq F^{-1}[B_\epsilon(y, 0)].$$

En efecto, sean $(u_1, v_1) \in B_\delta(x, 0) \setminus \{(x, 0)\}$. Debido a (2.3), tenemos que $u_1 = x$ y $v_1 = g(i)$ para algún i, con $g(i) < \delta$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que i es par (si i es impar se procede de forma análoga considerando Z en lugar de Y), entonces M_i $g(i)$-genera a Y, por lo que también, M_i δ-genera a Y. Por lo tanto, en vista de (2.3) tenemos que $x, y \in Y$, luego, por definición de F (véase (2.2)), se concluye que

$$F(u_1, v_1) = F(x, v_1) = (u_2, v_2) = (y, g(i)),$$

es decir, $F(u_1, v_1) = (y, g(i)) \in U_\epsilon((y, 0))$, ya que $g(i) < \delta < \epsilon$. De este modo, concluimos lo deseado.

Caso 3: Si $(x, 0) \in ((\widehat{X})' \setminus \{0\}) \times \{0\}$. Por definición de F (ver (2.1)), se tiene que $F(x, 0) = (x, 0)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $(x, 0) \in B_\epsilon(x, 0)$. Dado que x es punto bilateral tanto de Y como de Z, existen puntos $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ y $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que

$$x - \epsilon < z_0 < x - \delta < x < x + \delta < y_0 < x + \epsilon,$$
$$\delta < \min\Big\{\frac{1}{2}|x - y_0|, \frac{1}{2}|x - z_0|, \epsilon - |x - y_0|, \epsilon - |x - z_0|\Big\}.$$

Afirmamos que $B_\delta(x, 0) \subseteq F^{-1}[B_\epsilon(x, 0)]$. En efecto, sea $(u_1, v_1) \in B_\delta(x, 0)$, entonces tenemos los siguientes casos para v_1.

Caso 3.1: Si $v_1 = 0$, entonces $u_1 \in (\widehat{X})'$ o $u_1 \in I(\widehat{X})$. Si $u_1 \in (\widehat{X})'$, no hay nada que hacer, ya que $F(u_1, v_1) = (u_1, v_1) \in B_\delta(x, 0)$. Supongamos que $u_1 \in I(\widehat{X})$, dado que $I(\widehat{X}) = Y \cup Z$, tenemos que $u_1 \in Y$ o $u_1 \in Z$. Asumamos que $u_1 \in Y$, entonces

$$u_1 < T_Y^+(u_1) < x, \text{ si } u_1 < x$$

o

$$u_1 < T_Y^+(u_1) \leq y_0, \text{ si } u_1 > x.$$

En cualquier caso, concluimos que $F(u_1, v_1) \in B_\epsilon(x, 0)$. Si $u_1 \in Z$, con un argumento similar se prueba el mismo resultado.

Caso 3.2: Si $v_1 = g(i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que i es par (el caso impar se trata de forma análoga). Entonces $u_1 \in M_i \subseteq Y$. Afirmamos que $u_1 < y_0 - \delta$. En efecto, si no fuera así, es decir, si $y_0 - \delta \leq u_1$, entonces se tendría que $|y_0 - u_1| \leq \delta$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |x - y_0| &\leq |x - u_1| + |u_1 - y_0|, \\ &< \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Sin embargo, como $\delta < \frac{1}{2}|x - y_0|$, esto implica que $|x - y_0| < |x - y_0|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $u_1 < y_0 + \delta$.

Observemos además que $y_0 + \delta < x + \epsilon$, ya que $\delta < \epsilon - |x - y_0|$, por lo tanto, si se cumple que $T_{M_i}^+(u_1) \leq y_0 + \delta$, entonces

$$F(u_1, v_1) \in B_\epsilon(x, 0),$$

pues $F(u_1, v_1) = (T_{M_i}^+(u_1), v_1)$, por definición de F en (2.2).

De lo anterior, basta probar que $T^+_{M_i}(u_1) \leq y_0 + \delta$. Supongamos por contradicción que $T^+_{M_i}(u_1) > y_0 + \delta$. Como ya sabemos que $u_1 < y_0 + \delta$, entonces $y_0 \notin M_i$, más aún, por la definición de $T^+_{M_i}$, se tendría que

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap M_i = \emptyset.$$

Pero esto es contradictorio, ya que M_i $g(i)$-genera a Y, y dado que $g(i) < \delta$, tenemos que M_i δ-genera a Y. Por lo tanto, debe cumplirse que $T^+_{M_i}(u_1) \leq y_0 + \delta$.

Solo resta verificar la continuidad en $(0, 0)$. Sin embargo, este caso es análogo al caso 3, con la única diferencia de que se deben considerar vecindades unilaterales y tomar un punto $y_0 \in Y$ y $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que

$$0 < \delta < y_0 < \epsilon \text{ y } \delta < \text{mín}\left\{\frac{1}{2}|y_0|, \epsilon - |y_0|\right\}.$$

De lo anterior, concluimos que F es continua. $\square$

Lema 2.2.8. *Sean X un espacio métrico compacto numerable con $|X^{(2)}| > 1$ y $\mathcal{M}$ un conjunto admisible para X. Entonces, la órbita del punto $\overline{x} = (\text{mín}\, M_0, 1)$ bajo F, es densa en $X(\mathcal{M})$.*

Demostración. Mostraremos que $\mathcal{O}_F(\overline{x}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \times \{g(i)\}$. Por la definición de F, basta demostrar que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \times \{g(i)\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x}).$$

Procederemos por inducción sobre i. Para $i = 0$, se tiene que $M_0 \times \{1\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x})$ debido a la Proposición 2.2.6. Supongamos ahora que $M_i \times \{g(i)\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x})$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y veamos que también se tiene

$$M_{i+1} \times \{g(i+1)\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x}).$$

Supongamos que i es par (el caso en que i sea impar se trata de forma similar) Como $M_i \times \{g(i)\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x})$, en particular $(\text{máx}\, M_i, g(i)) \in \mathcal{O}_F(\overline{x})$. Luego,

$$F(\text{máx}\, M_i, g(i)) = (\text{máx}\, M_{i+1}, g(i+1)) \in \mathcal{O}_F(\overline{x}).$$

Por la Proposición 2.2.6, se concluye que

$$M_{i+1} \times \{g(i+1)\} \subseteq \mathcal{O}_F(\overline{x}).$$

Esto completa el paso inductivo. $\square$

Antes de realizar la demostración del Teorema 2.2.1, presentaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.9. *Sean X, Y espacios métricos compactos y $\varphi : Y \to X$ un homeomorfismo. Si (Y, g) es un sistema dinámico con órbita densa y $f : X \to X$ es dada por*

$$f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}.$$

Entonces (X, f) tiene órbita densa. Más aún, si $\overline{\mathcal{O}_g(z)} = Y$ para algún $z \in Y$, entonces $\overline{\mathcal{O}_f(\varphi(z))} = X$.

Demostración. Sea $y = \varphi(z)$, primero notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^n(y) = \varphi(g^n(z)).$$

Sea $U \subseteq X$ abierto. Dado que φ es continua, tenemos que $\varphi^{-1}[U] \subseteq Y$ es abierto también. Pero como la órbita de z bajo g es densa en Y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(z) \in \varphi^{-1}[U]$, es decir,

$$f^n(y) = \varphi(g^n(z)) \in U.$$

Así, concluimos que $\overline{\mathcal{O}_f(y)} = X$. $\square$

Ahora sí, ya tenemos todos los ingredientes para demostrar el Teorema 2.2.1.

Demostración. (*Teorema 2.2.1*) A partir del Lema 2.2.9, es suficiente con mostrar que existe un sistema dinámico (Y, g) con órbita densa tal que Y sea homeomorfo a X.

Iniciamos con el caso cuando $|X^{(2)}| \leq 1$. Debido al Teorema 1.1.11, tenemos que X es homeomorfo ya sea a $k \cdot \omega + 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$ o $\omega^2 + 1$. Pero recordemos que en el Ejemplo 2.1.2, construimos sistemas dinámicos con órbita densa para estos tipos de espacios, es decir, presentamos sistemas dinámicos con órbita densa (Y, g) donde Y es $k \cdot \omega + 1$ o $\omega^2 + 1$.

Supongamos ahora que $|X^{(2)}| > 1$. En este caso, basta con tomar $\mathcal{M}$ un conjunto admisible para X, el cual existe por la Proposición 2.2.3, y considerar $F : X(\mathcal{M}) \to X(\mathcal{M})$

la función continua que admite una órbita densa, construida previamente (véanse los lemas 2.2.7 y 2.2.8). Así, finalizamos la prueba, ya que $X(\mathcal{M})$ es homeomorfo a X, debido al Lema 2.2.4. $\square$

Denotaremos con $\mathcal{OD}(X)$ al conjunto de funciones continuas de X en sí mismo que admiten una órbita densa, es decir,

$$\mathcal{OD}(X) = \{f \in \mathcal{C}(X, X) : \exists z \in X \text{ con } \overline{\mathcal{O}_f(z)} = X\}.$$

Debido al Teorema 2.2.1, garantizamos que $\mathcal{OD}(X) \neq \emptyset$ para cada espacio métrico compacto numerable X.

Teorema 2.2.10. *Si X es un espacio métrico compacto numerable, entonces $\mathcal{OD}(X)$ es un boreliano de $\mathcal{C}(X, X)$. Más aún, $\mathcal{OD}(X)$ es $\mathbf{\Sigma}_4^0$.*

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}(X, X)$, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abiertos-cerrados no vacíos de X (ver Proposición 1.1.14) y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de X. Notemos que

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{OD}(X) &\iff \exists x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}(\ \mathcal{O}_f(x) \cap V_n \neq \emptyset\ ) \\ &\iff \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}(\ f^k(x_m) \in V_n\ ) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Definamos
$$E^m_{n,k} = \{f \in \mathcal{C}(X, X) : f^k(x_m) \in V_n\}.$$

Es sencillo ver que $E^m_{n,k}$ es cerrado. En efecto, si $f \notin E^m_{n,k}$, entonces, $f^k(x_m) \in X \setminus V_n$. Por lo tanto,
$$\mathcal{C}(X, X) \setminus E^m_{n,k} = \sigma^{-1}[U],$$
donde $\sigma : \mathcal{C}(X, X) \times \mathcal{C}(X, X) \to \mathcal{C}(X, X)$ y U están dados por

$$\sigma(f) = f^k \quad \text{y} \quad U = [\{x_m\}, X \setminus V_n].$$

Dado que σ es una función continua por la Proposición 1.1.3, concluimos que $E^m_{n,k}$ es cerrado.

Además, de la equivalencia en (2.4), tenemos que

$$\mathcal{OD}(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E^m_{n,k}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{OD}(X)$ es $\mathbf{\Sigma}^0_4$. $\square$

Aunque en general $\mathcal{OD}(X)$ es un conjunto $\mathbf{\Sigma}^0_4$ cuando X es un espacio métrico compacto numerable, puede ocurrir que en casos concretos su complejidad sea menor. Motivados por esto, formulamos la siguiente pregunta en el caso más sencillo, cuando $X = \omega + 1$.

Pregunta 2.2.11. *¿Se puede mejorar la cota de la complejidad de $\mathcal{OD}(\omega + 1)$?*

Por otro lado, puede demostrarse que si X es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{OD}(X)$ es un conjunto analítico. Esto nos lleva a la siguiente pregunta.

Pregunta 2.2.12. *¿Existe un espacio métrico compacto X tal que $\mathcal{OD}(X)$ no sea boreliano? En particular, ¿es $\mathcal{OD}([0, 1])$ boreliano?*

2.3. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES EN $\mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$

Recordemos que en el Ejemplo 2.1.2(3) presentamos un sistema dinámico con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$. El objetivo de esta sección es extender dicho ejemplo, construyendo funciones en $\mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ a partir de funciones continuas definidas sobre $(\omega^2 + 1)'$ que satisfacen ciertas condiciones. El resultado principal que obtendremos aquí será utilizado más adelante, en el Capítulo 3, para demostrar que existe una familia no numerable de funciones en $\mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ dos a dos no conjugadas.

Conviene señalar que los sistemas que construiremos aquí no son todos los sistemas posibles con órbita densa sobre ω^2+1. En particular, en Ex. 4.2 [1] los autores presentan un sistema dinámico (ω^2+1, f) donde $f \in \mathcal{OD}(\omega^2+1)$ y f es inyectiva. Sin embargo, este caso no está cubierto por nuestra construcción, pues todos los sistemas que desarrollaremos corresponden a funciones que no son inyectivas.

Para el desarrollo de este apartado X denotará a $\omega^2 + 1$. Es sencillo verificar que X es homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$ (con la topología usual que este hereda):

$$\{d_{(m,n)} : (m, n) \in \mathbb{N}^2\} \cup \{d_{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\} \subseteq \mathbb{R},$$

donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $(d_{(m,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a $d_{(m)}$, y la sucesión $(d_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_∞.

Por lo anterior, y abusando de la notación, escribimos

$$X := \{d_{(m,n)} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\} \cup \{d_{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\}.$$

Por otro lado, notemos que

$$I(X) = \{d_{(n,m)} : (n,m) \in \mathbb{N}\},$$

por lo tanto, $X' = \{d_{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\}$.

Observación 2.3.1. *Por la forma en que fue definido X, si $f : X \to X$ es una función, entonces toda la información de f se obtiene al observar cómo actúa sobre los subíndices de las d's. Por ello, por comodidad, y nuevamente abusando de la notación, escribimos $f(s) = t$ para indicar que $f(d_s) = d_t$, donde $s, t \in \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Definamos el conjunto $\mathcal{SOD}_1$ como el conjunto de funciones $F \in \mathcal{C}(X', X')$ tales que

(I) F es sobreyectiva,

(II) $F(d_\infty) = F(d_{(0)}) = d_\infty$,

(III) $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(d_{(0)}) = X' \setminus \{d_\infty\}$.

Teorema 2.3.2. *Sea $X = \omega^2 + 1$. Para cada $F \in \mathcal{SOD}_1$, existe $f \in \mathcal{C}(X, X)$ tal que (X, f) tiene órbita densa y $f|_{X'} = F$.*

Demostración. Construiremos $f : X \to X$ tal que la órbita de $d_{0,0}$ sea densa en X.

Teniendo en cuenta la Observación 2.3.1, definiremos f usando solamente los subíndices. De este modo, vamos a construir $f^k(0,0)$ por recursión sobre k de la siguiente manera:

1. $f(0,0) = (1,0)$.

2. Definimos $f^2(0,0) = F(1)^\frown j$, donde

$$j = \min\{i \in \mathbb{N} : F(1)^\frown i \notin \{(0,0), f(0,0)\}\}.$$

3. En general, supongamos que hemos definido $f^k(0,0)$, y denotemos con O_k el conjunto
$$O_k = \{(0,0), f(0,0), \ldots, f^k(0,0)\}.$$

Definiremos $f^{k+1}(0,0)$ como sigue. Sean m y j tal que $f^k(0,0) = (m,j)$, consideremos los siguientes casos para m.

Caso 1: Si $m = 0$. Definimos $f^{k+1}(0,0) = (j,0)$, donde

$$j = \min\{i \in \mathbb{N} : (i,0) \notin O_k\}.$$

Caso 2: Si $m \neq 0$ definamos $f^{k+1}(0,0) = F(m)^\frown j$, donde

$$j = \min\{i \in \mathbb{N} : F(m)^\frown i \notin O_k\}.$$

Para finalizar la definición de F, ponemos $f(x) = F(x)$ si $x \in X'$.

Veamos que f es continua y que $\mathcal{O}_f(d_{(0,0)}) = I(X)$, es decir,

$$\mathcal{O}_f(d_{(0,0)}) = \{d_{(n,m)} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Nuevamente por la Observación 2.3.1, mostraremos que $\mathcal{O}_f(0,0) = \mathbb{N}^2$.

Empecemos mostrando que $\{(0,m) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_f(0,0)$. Por inducción, sea $(0,m) \in \mathcal{O}_f(0,0)$. Por definición de f tenemos que

$$f(0,m) = (n,0) \text{ donde } n \neq 0.$$

Como $F \in \mathcal{SDO}_1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^k(n) = f^k(n) = (0)$. Por lo tanto, es fácil ver que $f^k(n,0) = (0, m+1)$. De este modo, tenemos que $(0, m+1) \in \mathcal{O}_f(0,0)$.

Continuaremos mostrando que $\{(m,0) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_f(0,0)$. Sea $(m,0)$ con $m \neq 0$. Dado que $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_f(0,0)$, tenemos que $\{f(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito y además, cada $f(0,n) = (k(n),0)$ donde $k(n) \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(0,n) = (k(n),0) \in \mathcal{O}_f(0,0) \quad \text{y} \quad k(n) > m.$$

Además, por como se define f en $(0,n)$, se debe tener que $(m,0) \in \mathcal{O}_f(0,0)$.

Finalmente, veamos que $\{(m,n) : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_f(0,0)$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por inducción sobre n mostraremos que $(m,n) \in \mathcal{O}_f(0,0)$. Supongamos que $(m,n) \in \mathcal{O}_f(0,0)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(0,0) = (m,n)$. Dado que

$$\{(j,0) : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_f(0,0) \quad \text{y} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-i}(m) \text{ es infinito}$$

(pues $F \in \mathcal{SOD}_1$), existe k' tal que $k' > k$ y $f^{k'}(0,0) = (j,0)$ donde $(j) \in f^{-i}(m)$ para algún $i > 1$. Por lo tanto,

$$f^{k'+i}(0,0) = (m,n') \text{ con } n' > n.$$

Si $n' = n+1$ ya esta. En caso contrario, si $n' > n+1$, se debe tener que $(m,n) \in \mathcal{O}_f(0,0)$ debido a que f se define usando mínimos. De lo anterior concluimos que $\mathcal{O}_f(0,0) = \mathbb{N}^2$, es decir, $\mathcal{O}_f(d_{0,0}) = I(X)$.

Veamos ahora que f es continua en cada punto. Sea $x \in X$.

Caso 1: Si $x = d_{m,n}$ para algún $m,n \in \mathbb{N}$. En este caso no hay nada que hacer por ser x un punto aislado.

Caso 2: Si $x = d_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $m \neq 0$, notemos que

$$f(\{d_{m,i} : i \in \mathbb{N}\}) \subseteq \{d_{n,i} : i \in \mathbb{N}\},$$

donde n es tal que $f(d_{(m)}) = d_{(n)}$, esto implica que f es continua en $d_{(m)}$. Si $m = 0$, notemos que $f(d_{0,i}) = d_{k_i,n}$ donde $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente. Por lo tanto, si $i \to \infty$, tenemos que $f(d_{0,i}) = d_{k_i,0} \to d_\infty$. Así, f es continua en $d_{(0)}$, ya que $f(d_{(0)}) = F(d_{(0)}) = d_\infty$.

Caso 3: Si $x = d_\infty$. Sea d_{m_i,n_i} una sucesión tal que $d_{m_i,n_i} \to d_\infty$ cuando $i \to \infty$. Por la construcción de X, tenemos que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ debe ser una sucesión estrictamente creciente. Además, $d_{m_i} \to d_\infty$ cuando $i \to \infty$, por lo tanto, $f(d_{(m_i)}) = d_{k_i} \to d_\infty$, por la continuidad de $F = f|_{X'}$ y por el hecho de que $f(d_\infty) = d_\infty$. Por otro lado, por la definición de f tenemos que

$$f(d_{m_i,n_i}) = d_{k_i,r_i} \text{ para algún } r_i \in \mathbb{N}.$$

Como $d_{(k_i)} \to d_\infty$, se debe tener que $k_i \to \infty$. Esto implica que $d_{k_i,r_i} \to d_\infty$. $\square$

Como se observa en la demostración del Teorema 2.3.2, el hecho de que la imagen de $d_{(0)}$ bajo F sea d_∞ carece de relevancia. En realidad, si fijamos un $n \in \mathbb{N}$ y $F \in \mathcal{C}(X',X')$

sobreyectiva tal que $F(d_{(n)}) = d_\infty$ y

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(d_{(n)}) = X' \setminus \{d_\infty\}.$$

Ajustando adecuadamente los índices en la prueba del Teorema 2.3.2, se puede construir una extensión continua de F que admita una órbita densa.

Tal como mencionamos al inicio de esta sección, existen funciones en $\mathcal{C}(X', X')$ que admiten extensiones continuas a funciones en $\mathcal{OD}(X)$ distintas de las construidas en este apartado. Esto motiva la siguiente cuestión.

Pregunta 2.3.3. *Sea $X = \omega^2 + 1$. ¿Qué funciones continuas $F \in \mathcal{C}(X', X')$ admiten una extensión $f \in \mathcal{OD}(X)$? En otras palabras, ¿cómo se puede caracterizar el conjunto*

$$\{\, F \in \mathcal{C}(X', X') : \exists f \in \mathcal{OD}(X) \text{ con } F = f\big|_{X'} \,\}?$$

3. CONJUGACIÓN TOPOLÓGICA

En este capítulo analizamos la *complejidad de la relación de conjugación topológica* en diversas clases de sistemas dinámicos numerables usando las técnicas mencionadas en la Sección 1.3. Este enfoque no solo nos permite medir la complejidad del problema de clasificación, sino que además nos permite situar el problema dentro de una jerarquía de relaciones de equivalencias.

En la literatura se han obtenido resultados importantes acerca de la complejidad de la conjugación en diferentes espacios de fase. Por ejemplo, Hjorth demostró que la relación de conjugación de homeomorfismos de $[0,1]$ es Borel birreducible con $E_{S_\infty}^{\infty}$, la relación de isomorfismos de grafos sobre $\mathbb{N}$ (Sec. 4.2 [5]). Más recientemente, Bruin y Vejnar extendieron el resultado de Hjorth para las funciones continuas (Th. 17 [2]). Por otro lado, Camerlo y Gao probaron los mismos resultados anteriormente mencionados para funciones sobre el espacio de Cantor (Th. 5 [6]). En conjunto, estos resultados muestran la alta complejidad de la conjugación en espacios como el intervalo $[0,1]$ y el conjunto de Cantor, puesto que $E_{S_\infty}^{\infty}$ es una relación analítica no boreliana (Sec. 13.1 [16]).

En contraste, hasta el momento no conocemos resultados acerca de la complejidad de la conjugación sobre sistemas dinámicos con órbitas densas. No obstante, sí se han encontrado avances para sistemas *minimales* (aquellos en los que todas las órbitas son densas). En esta dirección, Kaya demostró que la conjugación de sistemas dinámicos de Cantor minimales punteados es Borel bireducible a $=^+$, la relación de igualdad de subconjuntos numerables de Cantor (Th. 2 [8]).

El objetivo principal de este capítulo es presentar resultados acerca de la complejidad de la conjugación de sistemas dinámicos, especialmente, nos centramos en sistemas dinámicos con órbita densa. Aunque en espacios métricos compactos numerables no existen sistemas dinámicos minimales, mostraremos que las ideas de Kaya pueden adaptarse a este contexto. En particular, obtendremos una cota superior para la complejidad de la conjugación de sistemas con órbita densa, lo cual es una primera aproximación para conocer con exactitud la complejidad de esta clase de sistemas.

Los dos resultados más importantes de este capítulo son los siguientes (ver los teoremas 3.3.22 y 3.3.23):

Teorema A. Sea X un espacio métrico compacto numerable. La complejidad de la conjugación sobre $\mathcal{OD}(X)$, es decir, de los sistemas dinámicos con órbita densa en X, está acotada superiormente por la relación $=^+$.

Teorema B. La complejidad de la conjugación sobre $\mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ está acotada inferiormente por la relación Id$(2^{\mathbb{N}})$ y acotada superiormente por $=^+$.

Para este capítulo serán esenciales los conceptos básicos de la Teoría Descriptiva de Conjuntos y de la Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante, introducidos previamente en las secciones 1.2 y 1.3.

3.1. PRELIMINARES

Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos, decimos que f y g son *(topológicamente) conjugadas* si existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Llamaremos a φ una conjugación entre f y g. Si f y g son conjugadas, decimos que los sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son *isomorfos*. Cuando dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) son isomorfos, se espera que tengan las mismas "propiedades dinámicas". En este trabajo nos centraremos en estudiar la conjugación topológica cuando el espacio de fase está fijo, es decir, usaremos la conjugación para clasificar sistemas dinámicos de la forma (X, f) y (X, g).

Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, X)$ es *invariante bajo conjugación*, si $f \in \mathcal{A}$ y g es conjugada a f, entonces $g \in \mathcal{A}$. En este caso, la conjugación topológica genera una relación de equivalencia sobre $\mathcal{A}$, la cual denotaremos por $\mathbb{E}^X_{\mathcal{A}}$. Más precisamente, si $f, g \in \mathcal{A}$, entonces

$$f \mathbb{E}^X_{\mathcal{A}} g \iff \exists \varphi \in \text{Homeo}(X)\ (\varphi \circ f = g \circ \varphi).$$

Si no hay peligro de confusión sobre quién es X, escribimos $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$ en lugar de $\mathbb{E}^X_{\mathcal{A}}$.

Dentro de la teoría descriptiva de conjuntos surge de manera natural la pregunta acerca de si cada clase de equivalencia de $\mathbb{E}^X_{\mathcal{A}}$ es boreliana. Resulta que, siempre que $\mathcal{A}$ sea un subconjunto boreliano de $\mathcal{C}(X,X)$, la respuesta es afirmativa: cada clase de $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^X$ es boreliana. Probaremos este resultado a partir del teorema de Miller (ver Teorema 1.2.18), el cual es ampliamente conocido en la literatura de la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

Consideremos $T_{\mathcal{A}}^X : \text{Homeo}(X) \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida como

$$T_{\mathcal{A}}^X(\varphi, f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Más adelante, veremos que $T_{\mathcal{A}}^X$ es una acción (continua) del grupo $\text{Homeo}(X)$ sobre $\mathcal{A}$. Por otro lado, notemos que $T_{\mathcal{A}}^X$ induce la relación $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^X$. En efecto,

$$f \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^X g \iff \exists \varphi \in \text{Homeo}(X) \text{ tal que } g = T_{\mathcal{A}}^X(\varphi, f).$$

A continuación, mostraremos que $T_{\mathcal{A}}^X$ es una acción de grupo continua en el caso en que $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X,X)$.

Teorema 3.1.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $T^X : \text{Homeo}(X) \times \mathcal{C}(X,X) \to \mathcal{C}(X,X)$ dada por*

$$T^X(\varphi, f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Entonces T^X es una acción continua del grupo $\text{Homeo}(X)$ *sobre* $\mathcal{C}(X,X)$*.*

Demostración. Por comodidad, escribamos T en lugar de T^X. Claramente se tiene que $T(1_X, f) = f$ donde $1_X : X \to X$ es el homeomorfismo identidad. Sean $\varphi, \psi \in \text{Homeo}(X)$ y $f \in \mathcal{A}$. Notemos que

$$T(\varphi, T(\psi, f)) = (\varphi \circ \psi) \circ f \circ (\varphi \circ \psi)^{-1} = T(\varphi \circ \psi, f).$$

Luego T es una acción de grupo.

Ahora mostraremos que T es continua. Sean $(\varphi, f) \in \text{Homeo}(X) \times \mathcal{C}(X,X)$ y $[K,U]$ un abierto subbásico de $\mathcal{C}(X,X)$ donde K es compacto y U abierto de X, tal que $T(\varphi, f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in [K,U]$. Entonces

$$\varphi[f[\varphi^{-1}[K]]] \subseteq U,$$

luego $\varphi^{-1}[K] \subseteq f^{-1}[\varphi^{-1}[U]]$. Por continuidad de f y φ, tenemos que $f^{-1}[\varphi^{-1}[U]]$ es abierto. Además, como φ^{-1} es continua $\varphi^{-1}[K]$ es cerrado (compacto). Por la normalidad de X

existe $V \subseteq X$ abierto no vacío, tal que

$$\varphi^{-1}[K] \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}[\varphi^{-1}[U]].$$

Observemos que $\varphi^{-1}[K] \subseteq V$ es equivalente a $\varphi[X \setminus V] \subseteq X \setminus K$. Por otro lado, dado que $\overline{V}$ es compacto, tenemos que $f[\overline{V}] \subseteq \varphi^{-1}[U]$ es cerrado, nuevamente por normalidad, existe W abierto no vacío, tal que

$$f[\overline{V}] \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \varphi^{-1}[U].$$

Notemos que $\varphi[\overline{W}] \subseteq U$. Ahora consideremos el abierto

$$Z = ([X \setminus V, X \setminus K] \cap [\overline{W}, U]) \times [\overline{V}, W].$$

Claramente tenemos que $(\varphi, f) \in Z$. Luego solo nos resta probar que $T(Z) \subseteq [K, U]$. Sean $(\psi, g) \in Z$. De la definición de Z, tenemos que $\psi[X \setminus V] \subseteq X \setminus K$, $\psi[\overline{W}] \subseteq U$ y $g[\overline{V}] \subseteq W$. Dado que $\psi[X \setminus V] \subseteq X \setminus K$, concluimos que $\psi^{-1}[K] \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Luego

$$g[\psi^{-1}[K]] \subseteq g[\overline{V}] \subseteq W \subseteq \overline{W},$$

así, $\psi[g[\psi^{-1}[K]]] \subseteq U$. Por lo tanto, $\psi \circ g \circ \psi^{-1} \in [K, U]$. De lo anterior concluimos que $T[Z] \subseteq [K, U]$, luego T es continua. □

Corolario 3.1.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, X)$ una familia invariante bajo conjugación. Entonces $T_{\mathcal{A}}^{X}$ es una acción continua del grupo* Homeo(X) *sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea S : Homeo$(X) \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}(X, X)$ la restricción de T al conjunto Homeo$(X) \times \mathcal{A}$, donde T : Homeo$(X) \times \mathcal{C}(X, X) \to \mathcal{C}(X, X)$ es la acción de grupo definida en el Teorema 3.1.1.

Como T es continua, también lo es S. Además, dado que $\mathcal{A}$ es una familia invariante bajo conjugación, se tiene que

$$S[\text{Homeo}(X) \times \mathcal{A}] = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, X).$$

Esto implica que $T_{\mathcal{A}}^{X}$: Homeo$(X) \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ también es continua, ya que coincide con S en la regla de correspondencia. □

Proposición 3.1.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X,X)$ invariante bajo conjugación. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto boreliano de $\mathcal{C}(X,X)$, entonces cada clase de equivalencia de $\mathbb{E}^X_{\mathcal{A}}$ es boreliana.*

Demostración. Dado que $\mathcal{A}$ es boreliano, por el Corolario 1.2.15 tenemos que $\mathcal{A}$ es un espacio Borel estándar. Por otro lado, debido al Corolario 3.1.2 se tiene que $T^X_{\mathcal{A}}$ es una acción continua del grupo Homeo(X) sobre $\mathcal{A}$. Por lo tanto, por el teorema de Miller (véase el Teorema 1.2.18) concluimos que el conjunto

$$\{T^X_{\mathcal{A}}(\varphi, f) : \varphi \in \text{Homeo}(X)\} = [f]_{\mathbb{E}^X_{\mathcal{A}}},$$

es boreliano para cada $f \in \mathcal{A}$. $\square$

Finalizamos esta sección con un lema que resulta bastante útil para determinar cuándo dos sistemas dinámicos *no* son conjugados. Dado que su demostración es bastante sencilla, omitiremos los detalles de la prueba.

Lema 3.1.4. *Sean (X, f) y (X, g) dos sistemas dinámicos conjugados. Si $\varphi \in$ Homeo(X), es tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se cumple que*

$$\varphi[f^{-n}[x]] = g^{-n}[\varphi(x)].$$

Además, $|f^{-n}[x]| = |g^{-n}[\varphi(x)]|$.

3.2. CONJUGACIÓN SOBRE $\mathcal{C}(X,X)$

En esta sección nos centraremos en el estudio de la conjugación topológica sobre $\mathcal{C}(X,X)$. Denotaremos por $\mathbb{E}^X_C$ la relación de conjugación definida sobre este espacio de funciones.

El resultado principal que presentaremos establece que, para todo espacio métrico compacto numerable X, la relación de igualdad de subconjuntos numerables de Cantor, $=^+$, es Borel reducible a $\mathbb{E}^X_C$. Recordemos que la relación $=^+$ está definida sobre $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: para cada $\overline{x} = (x_n), \overline{y} = (y_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$,

$$\overline{x} =^+ \overline{y} \iff \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Anteriormente definimos el espacio $\omega+1$ como

$$\omega+1=\{d_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{d_\infty\}.$$

No obstante, en esta sección adoptaremos la notación

$$\omega+1=\{0,1,\dots\}\cup\{\omega\},$$

entendiendo que se trata del mismo espacio topológico, pero presentado bajo una notación más cómoda.

El siguiente teorema no es aún el resultado principal de esta sección; sin embargo, lo incluimos con el propósito de que el lector se familiarice con las técnicas que emplearemos más adelante en este capítulo.

Teorema 3.2.1. Id$(2^{\mathbb{N}})\leq_B \mathbb{E}_C^{\omega+1}$

Demostración. Fijemos $X=\omega+1$. Construiremos $H:2^{\mathbb{N}}\to\mathcal{C}(X,X)$ tal que si $\alpha,\beta\in 2^{\mathbb{N}}$ con $\alpha\neq\beta$, entonces $(H(\alpha),H(\beta))\notin\mathbb{E}_C$. Sea $\alpha\in 2^{\mathbb{N}}$, definimos recursivamente una partición $\mathcal{P}_\alpha=\{P_0,P_1,\dots,P_n,\dots\}$ de $\mathbb{N}$ como sigue:

- Definimos $P_0=\{0\}$ si $\alpha(0)=0$ o $P_0=\{0,1\}$ si $\alpha(0)=1$.
- Sea $m_1=\max P_0+1$, entonces $P_1=\{m_1\}$ si $\alpha(1)=0$ o $P_1=\{m_1,m_1+1,m_1+2\}$ si $\alpha(1)=1$.
- En general, sea $m_k=\max P_{k-1}+1$. Si $\alpha(k)=0$ definimos $P_k=\{m_k\}$, en caso contrario,

$$P_k=\{m_k,m_k+1,\dots,m_k+k+1\} \text{ si } \alpha(k)=1.$$

Para $\alpha\in 2^{\mathbb{N}}$, definimos $f_\alpha : X\to X$ como

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\omega & \text{si } x=\omega,\\ x & \text{si } x\in P_k \text{ y } |P_k|=1,\\ x+1 & \text{si } x\in P_k \text{ y } x+1\in P_k,\\ x-(k+1) & \text{si } x\in P_k,\ x+1\notin P_k \text{ y } |P_k|>1.\end{cases}$$

donde $\mathcal{P}_\alpha=\{P_0,P_1,\dots\}$ es la partición de $\mathbb{N}$ construida anteriormente. A continuación presentamos la gráfica de f_α cuando $\alpha=(0,1,0,1,0,0,\dots)$.

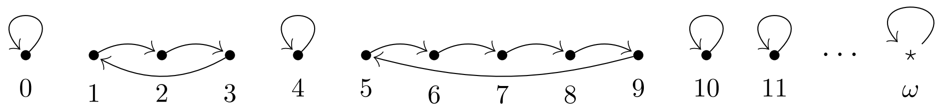


Figura 3.1: Representación de f_α si $\alpha = (0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$

A partir de la construcción de f_α, tenemos que

$$(X, f_\alpha) \text{ tiene un punto de periodo } k+2 \text{ si, y solo si, } \alpha(k) = 1.$$

Por otro lado, dado que f_α es biyectiva y $f_\alpha(\omega) = \omega$, tenemos que f_α es continua (homeomorfismo) para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$.

Definamos $H(\alpha) = f_\alpha$ y sean $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ tales que $\alpha \neq \beta$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(k) \neq \beta(k)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha(k) = 1$ y $\beta(k) = 0$. Por lo tanto, (X, f_α) tiene un punto de periodo $k+2$ y (X, f_β) no tiene puntos de periodo $k+2$. Así, tenemos que $H(\alpha)$ y $H(\beta)$ no son conjugadas. Por lo anterior, se cumple que

$$\alpha = \beta \iff H(\alpha)\mathbb{E}_{OD}H(\beta).$$

Continuaremos mostrando que H es continua. Sean $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ y $[K, U]$ un abierto subbásico de $\mathcal{C}(X, X)$ tal que $H(\alpha) = f_\alpha \in [K, U]$, donde $K, U \subseteq X$ con K compacto y U abierto. Veamos que $H^{-1}[[K, U]]$ es abierto.

Caso 1: K es finito. Si $K = \{\omega\}$ no hay nada que hacer, ya que $H^{-1}[[\{\omega\}, U]] = 2^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, vamos a suponer que $K \setminus \{\omega\} \neq \emptyset$. Sea $m = \max(K \setminus \{\omega\}) + 1$. Afirmamos que $U_{\alpha|_m} \subseteq H^{-1}[[K, U]]$. En efecto, recordemos que

$$U_{\alpha|_m} = \{\beta \in 2^{\mathbb{N}} : \alpha(k) = \beta(k) \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, m\}.$$

Sea $\beta \in U_{\alpha|_m}$, por construcción de las particiones $\mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{P}_\beta$, tenemos que $P_{\alpha,k} = P_{\beta,k}$ para cada $k = 0, 1, \dots, m$. Sea $A = \bigcup_{k=0}^{m} P_{\alpha,k}$, luego $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ si $x \in A$. Por otro lado, notemos que $m \leq \max P_{\alpha,m}$. Por lo tanto $K \subseteq A$, así, tenemos que

$$H(\beta)(x) = f_\beta(x) = f_\alpha(x) \in U,$$

para cada $x \in K$.

Caso 2: K es infinito. Como K es compacto, tenemos que $\omega \in K$, y dado que $f_\alpha(\omega) = \omega \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[m, \omega] \subseteq U$. Veamos que $U_{\alpha|_m} \subseteq H^{-1}[[K, U]]$.

Sea $\beta \in U_{\alpha|_m}$. Por construcción de f_β, tenemos que $f_\beta(x) \geq m$ si $x \in P_{\beta,k}$ con $k > m$. Por lo tanto, si $x \in K \cap P_{\beta,k}$ para algún $k > m$, entonces $H(\beta)(x) = f_\beta(x) \in [m, \omega] \subseteq U$. Por otro lado, si $x \in K \cap P_{\beta,k}$ con $k \leq m$, entonces

$$H(\beta)(x) = f_\beta(x) = f_\alpha(x) \in U.$$

Así, concluimos que $H(\beta)[K] \subseteq U$. $\square$

El siguiente corolario se sigue inmediatamente del Teorema 3.2.1.

Corolario 3.2.2. $\mathbb{E}_C^{\omega+1}$ *tiene una cantidad de* $2^{\aleph_0}$ *clases de equivalencia.*

Concluimos esta primera parte con un resultado que, si bien no es esencial para el desarrollo de este trabajo, responde a una pregunta natural que surge en el contexto de la Teoría Descriptiva de Conjuntos Invariante.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces $\mathbb{E}_C^X$ no es magra en $\mathcal{C}(X, X)^2$.*

Demostración. Sea x_0 un punto aislado de X. Entonces $\{x_0\}$ es abierto en X, así,

$$[X, \{x_0\}] = \{f \equiv x_0\},$$

donde $f \equiv x_0$ es la función constante x_0. Por lo tanto $\{(f, f)\}$ es un abierto (y cerrado) de $\mathcal{C}(X, X)^2$. Esto implica que cualquier conjunto que contenga a (f, f), debe contener también a (f, f) en su interior. Por lo tanto, $\mathbb{E}_C$ no es magra, ya que $(f, f) \in \mathbb{E}_C$. $\square$

3.2.1. $=^+$ es Borel reducible a $\mathbb{E}_C^X$ En este apartado refinaremos el Teorema 3.2.1 demostrando que la relación $=^+$, es decir, la igualdad de subconjuntos numerables del conjunto de Cantor, es Borel reducible a $\mathbb{E}_C^{\omega+1}$. Más aún, estableceremos que $=^+$ es Borel reducible a $\mathbb{E}_C^X$ para todo espacio métrico compacto numerable X.

Antes de presentar la demostración, introduciremos una construcción de funciones que desempeñará un papel central tanto en esta sección como en la siguiente.

Definición 3.2.4. Dados $P \subseteq \mathbb{N}$ infinito y $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Definimos el *árbol asociado a* (P, α), como el árbol $T_{P,\alpha}$ sobre $P^- = P \setminus \{m\}$, donde $m = \min P$ de la siguiente manera:

Consideremos $P^- = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ escrito como una enumeración creciente. Vamos a construir el árbol $T_{P,\alpha}$ como

$$T_{P,\alpha} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n,$$

tal que, para cada $s \in T_{P,\alpha}$ se tiene que $|s| = n$, si y solo si, $s \in S_n$.

Primero, definimos una sucesión de números naturales $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$l_0 = 1 \text{ y } l_{k+1} = l_k(1 + \alpha(k)).$$

l_k será el número de sucesiones de tamaño k que estarán en T_α, es decir, $l_k = |S_k|$. Construiremos los conjuntos S_k recursivamente como sigue:

- Si $n = 0$, entonces $S_0 = \{\emptyset\}$.
- Si $n = 1$, definimos $S_1 = \{\langle n_j \rangle : j = 1, \dots, l_1\}$.
- Supongamos que hemos definido S_k. Listamos todos las sucesiones de S_k y las ordenamos lexicográficamente:

  $$s_1 \preceq_{lex} s_2 \preceq_{lex} \cdots \preceq_{lex} s_{l_k}.$$

  Para continuar con la definición de S_{k+1} consideraremos los siguientes casos:

  Caso 1: $\alpha(k+1) = 0$. Definimos

  $$S_{k+1} = \{s_i\widehat{\ }(n_{l_k+i}) : i = 1, \dots, l_k\}.$$

  Caso 2: $\alpha(k+1) = 1$. En este caso,

  $$S_{k+1} = \{s_i\widehat{\ }(n_{l_k+2i-1}) : i = 1, \dots, l_k\} \cup \{s_i\widehat{\ }(n_{l_k+2i}) : i = 1, \dots, l_k\}.$$

Con esto hemos terminado la definición de el árbol asociado a (P, α).

A partir de la construcción anterior, observamos que para cada $n \in P^- = P \setminus \{m\}$ existe una única sucesión $s \in T_{P,\alpha}$ tal que $s\widehat{\ }n \in T_{P,\alpha}$ (ver la Figura 3.2).

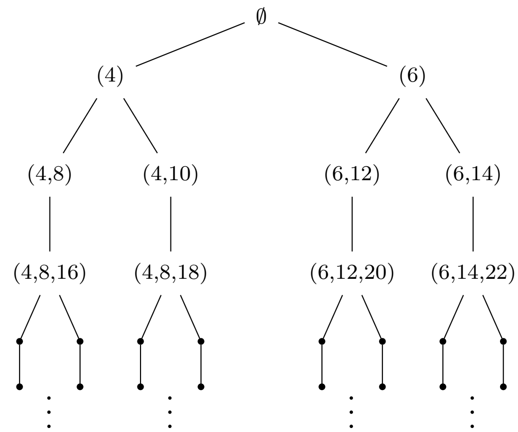


Figura 3.2: Árbol asociado al par $(2\mathbb{N}, \alpha)$ donde $\alpha = (1, 1, 0, 1, 0, \dots)$

La observación anterior, permite definir de manera natural una función de P^- en P asociada al par (P, α).

Definición 3.2.5. Sean $P \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $m = \text{mín}\, P$ y $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Definimos la *función asociada* a (P, α) como la función $f_{P,\alpha} : P \setminus \{m\} \to P$ dada por:

- $f_{P,\alpha}(n) = m$, si la sucesión (n) pertenece a $T_{P,\alpha}$.
- $f_{P,\alpha}(q) = r$, si existe $s \in T_{P,\alpha}$ tal que $s^\frown(r, q)$ y $s^\frown r$ están en $T_{P,\alpha}$.

Donde $T_{P,\alpha}$ es el árbol asociado al par (P, α), definido en 3.2.4.

Intuitivamente, la función $f_{P,\alpha}$ puede entenderse como una función que "codifica" la estructura del árbol $T_{P,\alpha}$. Su grafo representa esencialmente las aristas dirigidas de dicho árbol, lo cual puede apreciarse en la siguiente figura.

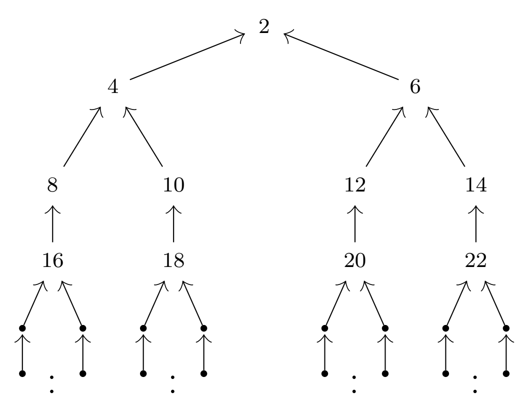


Figura 3.3: Función $f_{2\mathbb{N},\alpha}$ asociada al par $(2\mathbb{N}, \alpha)$ con $\alpha = (1, 1, 0, 1, 0, \dots)$

Debido a que $T_{P,\alpha}$ es un árbol que se extiende infinitamente y además es de ramificación finita (recordar la Definición 3.2.4), es decir, cada nodo tiene una cantidad finita de predecesores, tenemos que las funciones $f_{P,\alpha}$ cumplen que

$$f_{P,\alpha}^{-1}(y) \text{ es un conjunto finito no vacío, para cada } y \in P.$$

Lema 3.2.6. *Sean $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{N}$ subconjuntos infinitos y $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Entonces existe una función $\psi : P_1 \to P_2$ biyectiva, tal que*

$$\psi(m_1) = m_2 \;\; \textit{y} \;\; \psi(f_{P_1,\alpha}(x)) = f_{P_2,\alpha}(\psi(x)) \textit{ para todo } x \in P_1 \setminus \{m_1\},$$

donde $m_i = \min P_i$ para $i = 1, 2$.

Demostración. Definamos $\psi : P_1 \to P_2$ como sigue: primero $\psi(m_1) = m_2$. Ahora notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\big|\{s \in T_{P_1,\alpha} : |s| = k\}\big| = \big|\{s \in T_{P_2,\alpha} : |s| = k\}\big|.$$

Fijemos $k \geq 1$. Para cada $j = 1, 2$ consideremos $\{s_1^j, s_2^j, \ldots, s_l^j\} = \{s \in T_{P_j,\alpha} : |s| = k\}$ tales que

$$s_1^j \preceq_{lex} s_2^j \preceq_{lex} \cdots \preceq_{lex} s_l^j \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Definamos

$$\psi(\mathrm{Pr}_k(s_i^1)) = \mathrm{Pr}_k(s_i^2), \;\; \text{para } i = 0, \ldots, l,$$

donde $\mathrm{Pr}_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es la proyección en la k-ésima coordenada. No es difícil verificar que ψ satisface la condición del lema. $\square$

Con las herramientas desarrolladas en esta sección, estamos en condiciones de demostrar que $=^+$ es Borel reducible a $\mathbb{E}_C^X$, para todo espacio métrico compacto numerable X. Comenzaremos probando el caso particular $X = \omega + 1$.

De acuerdo con el Lema 1.3.5, para demostrar que $=^+ \leq_B \mathbb{E}_C^{\omega+1}$ basta con construir una función boreliana

$$H : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1),$$

siendo

$$\mathcal{D} = \{(x_n) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : \forall n \neq m \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x_n \neq x_m\},$$

y tal que, para cada $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{D}$, se cumpla

$$\overline{x} =^+ \overline{y} \iff H(\overline{x})\, \mathbb{E}_C^{\omega+1} H(\overline{y}).$$

Fijemos una partición $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ en conjuntos infinitos con $\min P_i < \min P_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $\overline{x} = (x_n) \in \mathcal{D}$. Para simplificar la notación, definimos

$$f_{n,x_n} = f_{P_n,x_n},$$

las funciones asociadas a (P_n, x_n) (ver Definición 3.2.5). Denotemos con $p_n = \min P_n$ y definamos $f_{\overline{x}} : \omega + 1 \to \omega + 1$, como la función dada por

$$f_{\overline{x}}(z) = \begin{cases} f_{n,x_n}(z) & \text{si } z \in P_n \setminus \{p_n\} \text{ para algún } n, \\ \omega & \text{si } z = p_n \text{ para algún } n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Notemos que $f_{\overline{x}}^{-1}(z)$ es finito para todo $z \in (\omega + 1) \setminus \{\omega\}$, por lo tanto, $f_{\overline{x}}$ es continua. La función H que usaremos como reducción la definimos como $H(\overline{x}) = f_{\overline{x}}$.

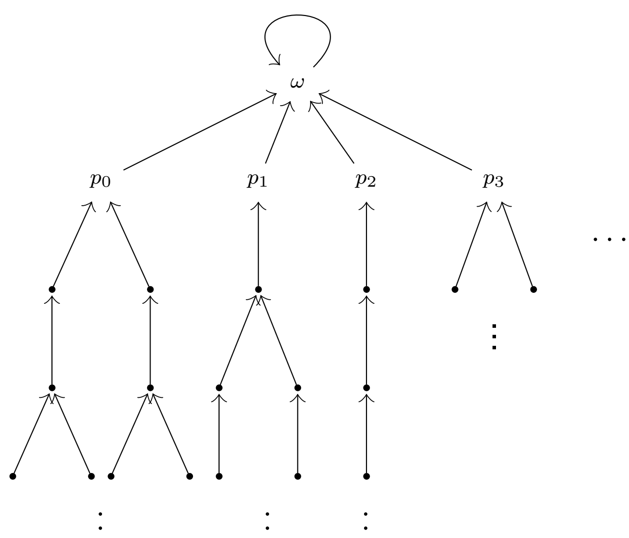


Figura 3.4: Función $f_{\overline{x}}$ donde $\overline{x} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$

Lema 3.2.7. *Si $\overline{x} =^+ \overline{y}$, entonces $f_{\overline{x}}$ y $f_{\overline{y}}$ son conjugadas.*

Demostración. Supongamos que $\overline{x} =^+ \overline{y}$, debemos encontrar $\varphi \in$ Homeo$(\omega + 1)$ tal que $\varphi \circ f_{\overline{x}} = f_{\overline{y}} \circ \varphi$. Definiremos φ parcialmente sobre cada P_n. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe un único

$m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_m$. Por el Lema 3.2.6 existe $\varphi_n : P_n \to P_m$ biyectiva tal que

$$\varphi_n(p_n) = p_m \text{ y } \varphi_n(f_{n,x_n}(z)) = f_{m,x_m}(\varphi_n(z)) \text{ para todo } z \in P_n \setminus \{p_n\}. \tag{3.2}$$

Definamos $\varphi : \omega + 1 \to \omega + 1$ como sigue:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_n(z) & \text{si } z \in P_n \text{ para algún } n, \\ \omega & \text{si } z = \omega. \end{cases}$$

Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_m$, se sigue que los conjuntos $\varphi_{n_1}(P_{n_1})$ y $\varphi_{n_2}(P_{n_2})$ son disjuntos siempre que $n_1 \neq n_2$. En consecuencia, la función φ es inyectiva ya que φ_n lo es y sus imágenes son disjuntas.

Por otro lado, dado que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_m = x_n$ (por definición de $\overline{x} =^+ \overline{y}$), tenemos que

$$\{i \in \mathbb{N} : P_i = \varphi_n(P_n)\} = \mathbb{N}.$$

Así, φ es sobreyectiva. De lo anterior, concluimos que φ es biyectiva, esto implica que φ es un homeomorfismo sobre $\omega + 1$.

Finalmente, a partir de la ecuación (3.2), es sencillo verificar que

$$\varphi \circ f_{\overline{x}} = f_{\overline{y}} \circ \varphi.$$

Esto demuestra que $f_{\overline{x}}$ y $f_{\overline{y}}$ son conjugadas. $\square$

Lema 3.2.8. *Si $f_{\overline{x}}$ y $f_{\overline{y}}$ son conjugadas, entonces $\overline{x} =^+ \overline{y}$.*

Demostración. Supongamos que $f_{\overline{x}}$ y $f_{\overline{y}}$ son conjugadas. Veamos que $\overline{x} =^+ \overline{y}$, es decir,

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}.$$

Mostraremos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$, queremos probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_m$. Sea $\varphi \in$ Homeo$(\omega + 1)$ un homeomorfismo tal que satisface $\varphi \circ f_{\overline{x}} = f_{\overline{y}} \circ \varphi$. Recordando que $p_n = \min P_n$ y la definición de φ dada en la ecuación (3.1), tenemos que

$$g(\varphi(p_n)) = \varphi(f(p_n)) = \varphi(\omega) = \omega,$$

luego $\varphi(p_n) \in g^{-1}(\omega) = \{\omega, p_0, p_1, \dots\}$. Como $\varphi(\omega) = \omega$, entonces $\varphi(p_n) = p_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $x_n = y_m$, en caso contrario, si $x_n \neq y_m$ existe

$$k = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_n(i) \neq y_m(i)\}.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_n(k) = 0$ y $y_m(k) = 1$. Entonces, por la definición de las funciones $f_{\overline{x}}$ y f_{n,x_n} (ver Definición 3.2.5), se obtiene

$$2 \cdot |f_{\overline{x}}^{-(k+1)}(p_n)| = |f_{\overline{y}}^{-(k+1)}(p_m)| = |f_{\overline{y}}^{-(k+1)}(\varphi(p_n))|,$$

lo cual contradice el Lema 3.1.4, por lo tanto, $x_n = y_m$. Así, concluimos que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{y_m : m \in \mathbb{N}\}.$$

La inclusión faltante se demuestra de forma análoga, por lo tanto $\overline{x} =^+ \overline{y}$. $\square$

Lema 3.2.9. *La función* $H : \mathcal{D} \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1)$ *dada por*

$$H(\overline{x}) = f_{\overline{x}},$$

es continua.

Demostración. En efecto, sean $\overline{x} \in \mathcal{D}$ y $[K, U]$ un abierto subbásico de $\mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1)$ tal que $f_{\overline{x}} \in [K, U]$.

Caso 1: K es finito. Si $K = \{\omega\}$, entonces $H^{-1}[[\{\omega\}, U]] = \mathcal{D}$, luego ya está. Supongamos que $K \setminus \{\omega\} \neq \emptyset$. Sea $L = \text{máx}(K \setminus \{\omega\})$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_N \geq L$. Entonces se tiene que

$$\overline{x} \in \{\overline{y} = (y_i) \in \mathcal{D} : y_j = x_j \text{ para todo } j = 0, \dots, N\} \subseteq H^{-1}[[K, U]].$$

Caso 2: K es infinito. Como K es compacto, entonces $\omega \in K$, por lo tanto $\omega \in U$, ya que $f_{\overline{x}}(\omega) = \omega$. Así, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que el intervalo $[M, \omega]$, se queda contenido en U. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_N \geq M$. Ahora notemos que si $z \in P_n$ con $n \geq N$ entonces

$$f_{\overline{y}}(z) \geq p_n \geq p_N \geq M,$$

para cualquier $\overline{y} \in \mathcal{D}$. Con esto en mente, es sencillo verificar que

$$\overline{x} \in \{\overline{y} = (y_i) \in \mathcal{D} : y_j = x_j \text{ para todo } j = 0, \ldots, N\} \subseteq H^{-1}[[K, U]].$$

De lo anterior, concluimos que H es continua. $\square$

Así, por los lemas 3.2.7, 3.2.8 y 3.2.9 se deduce el siguiente teorema.

Teorema 3.2.10. $=^+ \leq_B \mathbb{E}_C^{\omega+1}$.

Finalizamos este apartado con el resultado principal de la sección.

Teorema 3.2.11. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces, $=^+ \leq_B \mathbb{E}_C^X$.*

Demostración. Debido al Teorema 1.1.11, tenemos que X es homeomorfo a $k \cdot \omega^\alpha + 1$ para algún $\alpha \geq 1$ ordinal numerable y $k \geq 1$. Por lo tanto, existe un subconjunto $Y \subseteq X$ abierto-cerrado homeomorfo a $\omega + 1$. Fijemos $\gamma : Y \to \omega + 1$ un homeomorfismo.

Ahora consideremos $\sigma : \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1) \to \mathcal{C}(Y, Y)$ dada por

$$\sigma(f) = \gamma \circ f \circ \gamma^{-1}.$$

Notemos que σ es una función continua, y además,

$$f \mathbb{E}_C^{\omega+1} g \iff \sigma(f) \mathbb{E}_C^Y \sigma(g).$$

Por otro lado, sea $H : \mathcal{D} \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1)$ la función continua construida en el Lema 3.2.9. Recordemos que H está dada por $H(\overline{x}) = f_{\overline{x}}$. En base a lo anterior, definimos $G : \mathcal{D} \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}(X, X)$ como

$$G = \text{Ext}_{Y,X} \circ \sigma \circ H,$$

donde $\text{Ext}_{Y,X} : \mathcal{C}(Y, Y) \to \mathcal{C}(X, X)$ se define como

$$\text{Ext}_{Y,X}(f)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in Y, \\ z & \text{si } z \notin Y. \end{cases}$$

Como $Y \subseteq X$ es abierto-cerrado, se sigue que $\text{Ext}_{Y,X}$ está bien definida. Más aún, $\text{Ext}_{Y,X}$ es una función continua por la Proposición 1.1.4. Por lo tanto, G también es continua. Ahora veamos que G reduce $=^+$ a $\mathbb{E}_C^X$.

Si suponemos que $\overline{x} =^+ \overline{y}$, por el Lema 3.2.7 tenemos que $f_{\overline{x}}$ es conjugada a $f_{\overline{y}}$, por lo tanto, $\sigma(f_{\overline{x}})$ también es conjugada a $\sigma(f_{\overline{y}})$. Es decir, existe $\varphi \in$ Homeo(Y) tal que

$$\varphi \circ \sigma(f_{\overline{x}}) = \sigma(f_{\overline{y}}) \circ \varphi.$$

Luego $\psi =$ Ext$_{Y,X}(\varphi) \in$ Homeo(X) es una conjugación entre $G(\overline{x})$ y $G(\overline{y})$.

Recíprocamente, supongamos que $G(\overline{x})$ y $G(\overline{y})$ son conjugadas, es decir, existe $\varphi \in$ Homeo(X) tal que

$$\varphi \circ G(\overline{x}) = G(\overline{y}) \circ \varphi.$$

Supongamos que Y es fuertemente invariante bajo φ, es decir, $\varphi[Y] = Y$. Si suponemos esto, tenemos que $\psi = \varphi|_Y$ es una conjugación entre $\sigma(f_{\overline{x}})$ y $\sigma(f_{\overline{y}})$. Por lo tanto, $f_{\overline{x}}$ y $f_{\overline{y}}$ también son conjugadas, lo que implica que $\overline{x} =^+ \overline{y}$ por el Lema 3.2.8.

En virtud de lo anterior, solo queda verificar que $\varphi[Y] = Y$. Recordemos que Y es homeomorfo a $\omega + 1$, por lo tanto, posee un único punto límite, al que denotaremos por z_0. Debido a la construcción de $f_{\overline{w}}$, se tiene que $f_{\overline{w}}^{-1}[\omega]$ es infinito para todo $\overline{w} \in \mathcal{D}$. Más aún, ω es el único punto en $\omega + 1$ tal que su preimagen bajo $f_{\overline{w}}$ es infinita. Por otro lado, como $\gamma(\omega) = z_0$, tenemos que $\sigma(f_{\overline{w}})^{-1}[z_0] \subseteq Y$ también es infinito. Esto implica, por la definición de G, que $G(\overline{w})^{-1}[z_0]$ es infinito para todo $\overline{w} \in \mathcal{D}$. En realidad, z_0 es el único punto en X con tal propiedad.

Por otro lado, aplicando el Lema 3.1.4, obtenemos que

$$\varphi[G(\overline{x})^{-1}[z_0]] = G(\overline{y})^{-1}[\varphi(z_0)].$$

Por lo mencionado en el párrafo anterior se tiene que $G(\overline{x})^{-1}[z_0]$ es infinito, por lo tanto, $G(\overline{y})^{-1}[\varphi(z_0)]$ también es infinito. Así, concluimos que $\varphi(z_0) = z_0$.

Nuevamente, por como fueron construidas las funciones $f_{\overline{w}}$, se tiene que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f_{\overline{w}}^{-n}[\omega] = \omega + 1, \text{ para cada } \overline{w} \in \mathcal{D}.$$

De lo anterior, se deduce que $\bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma(f_{\overline{w}})^{-n}[z_0] = Y$. En consecuencia, obtenemos que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} G(\overline{w})^{-1}[z_0] = Y, \text{ para todo } \overline{w} \in \mathcal{D}.$$

Finalmente, usando de nuevo el Lema 3.1.4, concluimos que

$$\varphi[Y] = \varphi\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G(\overline{x})^{-n}[z_0]\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G(\overline{y})^{-n}[z_0] = Y.$$

Por lo tanto, $\varphi[Y] = Y$. $\square$

En el caso específico de $X = \omega + 1$, demostramos que $=^+$ es Borel reducible a $\mathbb{E}_C^X$. Sin embargo, queda abierta la cuestión de si $\mathbb{E}_C^X$ es boreliana.

Pregunta 3.2.12. *¿Es $\mathbb{E}_C^{\omega+1}$ una relación boreliana? Más generalmente, si X es un espacio métrico compacto numerable, ¿es $\mathbb{E}_C^X$ boreliana?*

Por otro lado, de manera natural podría pensarse que

$$\mathbb{E}_C^Y \leq_B \mathbb{E}_C^X,$$

cuando $Y \subseteq X$ es un subconjunto abierto-cerrado. Sin embargo, hasta donde sabemos, no existe un resultado que contradiga o confirme esta intuición. Observemos que, por ejemplo, en la demostración del Teorema 3.2.11 desempeñó un papel fundamental la función $H : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1)$ que reduce $=^+$ a $\mathbb{E}_C^{\omega+1}$. En base a lo anterior, planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 3.2.13. *Sean X un espacio métrico compacto numerable y $Y \subseteq X$ cerrado. ¿Es $\mathbb{E}_C^Y$ Borel reducible a $\mathbb{E}_C^X$?*

3.3. CONJUGACIÓN SOBRE $\mathcal{OD}(X)$

En esta sección estudiaremos la relación de conjugación restringida a $\mathcal{OD}(X)$, la cual denotaremos por $\mathbb{E}_{OD}^X$. La primera parte estará dedicada a determinar la cantidad de clases de equivalencia de $\mathbb{E}_{OD}^X$ cuando el espacio X es de la forma $k \cdot \omega + 1$ o $\omega^2 + 1$.

Posteriormente, analizaremos $\mathbb{E}_{OD}^X$ desde el punto de vista de la reducibilidad boreliana, mostrando que, para todo espacio métrico compacto numerable X, se cumple que

$$\mathbb{E}_{OD}^X \leq_B =^+ .$$

Antes de avanzar con este estudio, verificaremos que $\mathcal{OD}(X)$ efectivamente es una familia invariante bajo conjugación. Seguidamente, probaremos que cada clase de conjugación de $\mathbb{E}_{OD}^X$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$ siempre que X sea numerable.

Proposición 3.3.1. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $f, g \in \mathcal{C}(X, X)$ tales que f y g son conjugadas. Si $f \in \mathcal{OD}(X)$, entonces $g \in \mathcal{OD}(X)$. Más aún, si $\mathcal{O}_f(x)$ es densa en X, entonces $\mathcal{O}_g(\varphi(x))$ también es densa en X, donde φ es una conjugación entre f y g.*

Demostración. Dado que $f \in \mathcal{OD}(X)$ existe un punto cuya órbita es densa. Supongamos que la órbita de x bajo f es densa en X. Por otro lado, como f y g son conjugadas, existe $\varphi \in$ Homeo(X) tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi,$$

o equivalentemente $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Finalmente, por el Lema 2.2.9 se tiene el resultado. □

Gracias a la proposición anterior podemos trabajar con la relación $\mathbb{E}^X_{OD}$. A continuación, tal como se mencionó anteriormente, probaremos que si un sistema dinámico tiene órbita densa, entonces su clase de conjugación tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. Para ello, recordemos que $\mathbb{E}^X_{OD}$ es inducida por la acción de grupo T^X_{OD} : Homeo$(X) \times \mathcal{OD}(X) \to \mathcal{OD}(X)$ dada por

$$T^X_{OD}(\varphi, f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

El siguiente resultado es un lema técnico bastante sencillo de probar, por lo que omitiremos los detalles de su demostración.

Lema 3.3.2. *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, X)$ una familia invariante bajo conjugación. $T^X_{\mathcal{A}}(\psi, f) = T^X_{\mathcal{A}}(\varphi, f)$ si, y solo si, $f = (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ f \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$.*

Proposición 3.3.3. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Si $f \in \mathcal{OD}(X)$, entonces la clase de equivalencia $[f]_{\mathbb{E}_{OD}}$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Mostraremos que $|$Homeo$(X)| \leq |[f]_{\mathbb{E}_{OD}}|$. Para lograr esto basta con ver que la función

$$T^X_{OD}(\,\cdot\,, f) : \text{Homeo}(X) \to [f]_{\mathbb{E}_{OD}}$$

es inyectiva. Por comodidad, escribimos $T := T^X_{OD}$. Debido al Lema 3.3.2, tenemos que $T(\psi, f) = T(\varphi, f)$ es equivalente a

$$f = (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ f \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}.$$

Por lo tanto, basta con probar que si $T(\varphi, f) = f$, entonces $\varphi = 1_X$.

En efecto, sean $\varphi \in$ Homeo(X) tal que $T(\varphi, f) = f$ y $z \in X$ tal que la órbita de z bajo f es densa. Como $T(\varphi, f) = f$, tenemos entonces que φ es una conjugación entre f y f, es decir,

$$f \circ \varphi = \varphi \circ f.$$

Además, por la Proposición 3.3.1 tenemos que la órbita de $\varphi(z)$ bajo f es densa. Por otro lado, por la Proposición 2.1.3 existe un único punto con órbita densa bajo f y su órbita es el conjunto de puntos aislados de X. Por lo tanto $\varphi(z) = z$, y dado que $\varphi \circ f^k = f^k \circ \varphi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$f^k(z) = f^k(\varphi(z)) = \varphi(f^k(z)).$$

De lo anterior, tenemos que $\varphi(y) = y$ para todo $y \in X$ aislado. Debido a que el conjunto de puntos aislados $I(X)$ es denso en X y φ es continua, entonces $\varphi = 1_X$. Así, concluimos que $|$Homeo$(X)| \leq |[f]_{\mathbb{E}_{OD}}|$.

Finalmente, por el Lema 1.1.15, tenemos que Homeo(X) tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. De este modo, concluimos que $[f]_{\mathbb{E}_{OD}}$ también tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. $\square$

Corolario 3.3.4. *Si X es un espacio métrico compacto numerable, entonces $\mathcal{OD}(X)$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.*

3.3.1. Contando clases de equivalencia de $\mathbb{E}_{OD}^X$ En el Capítulo 2 presentamos varios ejemplos de sistemas dinámicos con órbita densa definidos sobre espacios de la forma $k \cdot \omega + 1$. Dada la relevancia de estos ejemplos para el desarrollo de la presente sección, los retomaremos a continuación.

Recordemos que

$$\omega + 1 = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \ \cup \ \{d_\infty\} \ \subseteq \ \mathbb{R},$$

donde $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_∞.

Para $k > 1$ definimos

$$k \cdot \omega + 1 = \bigcup_{i=0}^{k-1} D_i \ \subseteq \ \mathbb{R},$$

donde

$$D_i = \{d_{i,n} : n \in \mathbb{N}\} \ \cup \ \{d_i\}$$

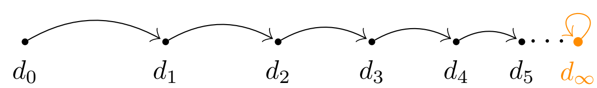
y $(d_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_i.

Supondremos, además, que $d_i < d_{i+1,0}$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

Ejemplo 3.3.5. (1) Definamos $f_1 : \omega + 1 \to \omega + 1$ como sigue:

$$f_1(x) = \begin{cases} d_{n+1} & \text{si } x = d_n, \\ d_\infty & \text{si } x = d_\infty. \end{cases}$$

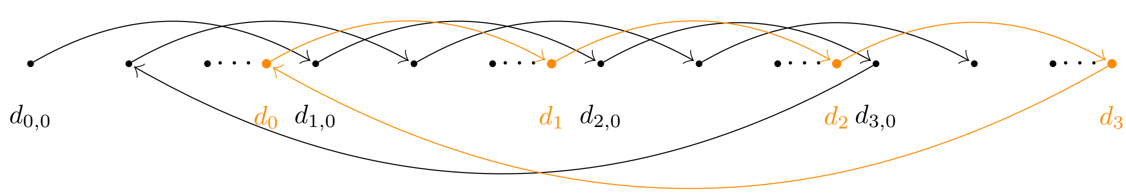
En la siguiente figura se ilustra la función f_1.



(2) Sea $k > 1$ y fijemos $X = k \cdot \omega + 1$. Definiremos una función continua $f_k : X \to X$ de la siguiente manera:

$$f_k(x) = \begin{cases} d_{n+1,m} & \text{si } x = d_{n,m} \text{ y } n < k, \\ d_{0,m+1} & \text{si } x = d_{k,m}, \\ d_{n+1} & \text{si } x = d_n \text{ y } n < k, \\ d_0 & \text{si } x = d_k. \end{cases}$$

A continuación presentamos la gráfica de la función f_k en el caso cuando $k = 4$.



Demostraremos que los ejemplos presentados anteriormente son los únicos (bajo conjugación) sistemas dinámicos con órbita densa sobre el espacio $k \cdot \omega + 1$ respectivamente, es decir, si $g \in \mathcal{OD}(k \cdot \omega + 1)$, entonces g es conjugada a f_k. Para hacerlo necesitaremos caracterizar la conjugación de sistemas dinámicos con órbita densa.

El siguiente resultado es una versión ligeramente distinta al lema 4.4 de [1], el cual se enuncia en el contexto de sistemas dinámicos minimales (es decir, aquellos en los que toda órbita es densa). Aunque en el contexto numerable no existen sistemas minimales, este lema puede adaptarse a nuestros propósitos si lo enunciamos de la siguiente manera.

Lema 3.3.6. *Sean X un espacio métrico compacto, $f, g \in \mathcal{OD}(X)$ y $x_0, x_1 \in X$ con órbitas densas en X bajo f y g, respectivamente. Las siguientes son equivalentes:*

(1) Existe $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ tal que $\varphi(x_0) = x_1$ y $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

(2) Para cada sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que

$$(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge si, y solo si, } (g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Demostración. Supongamos que existe $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ tal que $\varphi(x_0) = x_1$ y $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Sea $(n_k)_k$ una sucesión de números naturales. Ahora notemos que

$$\varphi(f^{n_k}(x_0)) = g^{n_k}(x_1).$$

De lo anterior, y debido a que φ y φ^{-1} son continuas, obtenemos que $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ converge si, y solo si, $(g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Recíprocamente, supongamos que para cada sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales se tiene que

$$(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge si, y solo si, } (g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Recordemos que la órbita de x_0 bajo f es densa en X. Teniendo esto en cuenta, definamos $\varphi : X \to X$ como

$$\varphi(x) = \begin{cases} g^n(x_1) & \text{si } x = f^n(x_0) \text{ para algún } n, \\ \lim_{k\to\infty} g^{n_k}(x_1) & \text{si } x = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_0) \text{ para alguna sucesión } (n_k)_{k\in\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Veamos que φ está bien definida. En efecto, sean $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de naturales tales que

$$x = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_0) = \lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x_0).$$

Definamos la sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como $r_{2i} = n_i$ y $r_{2i+1} = m_i$. Entonces,

$$\lim_{i\to\infty} f^{r_i}(x_0) = x.$$

Por hipótesis, se sigue $(g^{r_i}(x_1))_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, concluimos que $(g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(g^{m_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo punto. Esto muestra que $\varphi(x)$ esta bien definida.

Por un argumento análogo al anterior, se demuestra que φ es inyectiva. Veamos que φ es sobreyectiva. En efecto, sea $y \in X$. Como $\mathcal{O}_g(x_1)$ es densa en X, existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y = \lim_{k\to\infty} g^{n_k}(x_1).$$

Por hipótesis sabemos que $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. De este modo, si $x = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_0)$, claramente se tiene que $\varphi(x) = y$.

Como X es métrico compacto, para mostrar que φ es un homeomorfismo basta ver que φ es continua. Sea $z \in X$ y $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{i\to\infty} z_i = z$. Como la órbita de x_0 es densa en X, tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(n_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k^i}(x_0) = z_i.$$

Empezaremos construyendo dos sucesiones auxiliares. Primero notemos que

$$\varphi(z_i) = \lim_{k\to\infty} g^{n_k^i}(x_1).$$

Ahora definimos $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como sigue: para cada $i \in \mathbb{N}$, tomemos $k(i) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{n_{k(i)}^i}(x_0), z_i) < \frac{1}{i+1} \quad \text{y} \quad d(g^{n_{k(i)}^i}(x_1), \varphi(z_i)) < \frac{1}{i+1}.$$

Definamos $w_i = f^{n_{k(i)}^i}(x_0)$ y $y_i = g^{n_{k(i)}^i}(x_1)$. Veamos que $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a z. En efecto, sea $\epsilon > 0$, y tomemos $I \in \mathbb{N}$ tal que $2 < \epsilon(i+1)$ y $d(z_i, z) < \epsilon/2$ para cada $i \geq I$. Así, claramente se tiene que

$$d(w_i, z) \leq d(w_i, z_i) + d(z_i, z) < \epsilon.$$

Como $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a z, de la definición de φ tenemos que

$$\varphi(z) = \lim_{i\to\infty} g^{n_{k(i)}^i}(x_1) = \lim_{i\to\infty} y_i.$$

Ahora si mostraremos que $\varphi(z_i) \to \varphi(z)$. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y tomemos $I \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \geq I$ se tiene que $2 < \epsilon(i+1)$ y $d(y_i, \varphi(z)) < \epsilon/2$. Por lo tanto,

$$d(\varphi(z_i), \varphi(z)) \leq d(\varphi(z_i), y_i) + d(y_i, \varphi(z)) < \epsilon.$$

Así, concluimos que φ es continua. $\square$

Como aplicación del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.7. *Sea X un espacio métrico compacto numerable tal que X' es finito. Entonces $\mathbb{E}_{OD}$ tiene solo una clase de equivalencia, es decir, si $f, g \in \mathcal{OD}(X)$ entonces f y g son conjugadas.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{OD}(X)$, mostraremos que g es conjugada a f usando el Lema 3.3.6. Sean $x_0, x_1 \in X$ puntos tales que la órbita de x_0 y x_1 bajo f y g, respectivamente, son densas en X. En particular, tales órbitas son infinitas, esto implica, por el Lema 1.4.5, que $\omega(x_0, f), \omega(x_1, g) \subseteq X'$. Pero como X' es finito, concluimos que tanto $\omega(x_0, f)$ como $\omega(x_1, g)$ son finitos. Más aún, como las órbitas de x_0 y x_1 son densas en X, tenemos que $\omega(x_0, f) = \omega(x_1, g) = X'$.

Sea $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Veamos que

$$(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge si, y solo si, } (g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}.$$

En efecto, si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es finito, tenemos que $\{f^{n_k}(x_0) : k \in \mathbb{N}\}$ también es finito. Por lo tanto, si $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ debe ser eventualmente constante. Así, concluimos que $(g^{n_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ también debe converger. La recíproca se sigue por la simetría del argumento.

Ahora consideremos el caso cuando $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Usando que $\omega(x_0, f) = \omega(x_1, g)$ y el Lema 1.4.7, concluimos lo deseado. Ya que el lema anteriormente mencionado caracteriza la convergencia de $(f^{n_k}(x_0))$ a partir de condiciones sobre $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Y como $\omega(x_0, f) = \omega(x_1, g)$, el mismo resultado es válido para g. Esto quiere decir que la convergencia no depende de la función, sino de la sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

De acuerdo con el Teorema 3.3.7, si X es de la forma $k \cdot \omega + 1$, entonces $\mathbb{E}_{OD}^X$ posee únicamente una clase de equivalencia. En consecuencia, el siguiente espacio que consideraremos es $\omega^2 + 1$.

En contraste, cuando $X = \omega^2 + 1$ la relación $\mathbb{E}^X_{OD}$ tiene más de una clase de equivalencia y, de hecho, posee una cantidad no numerable de ellas. Antes de probar esto presentaremos ejemplos de dos funciones f y g definidas sobre $\omega^2 + 1$ que admiten una órbita densa pero que no son conjugadas. Para la construcción de estos ejemplos, recordemos que

$$X := \omega^2 + 1 = \{d_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\},$$

y que $X' = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\}$.

Ejemplo 3.3.8. Sea $F : X' \to X'$ dada por $F(d_0) = F(d_\infty) = d_\infty$ y $F(d_m) = d_{m-1}$ si $m \neq 0$. Notemos que F es continua, y satisface las condiciones del Teorema 2.3.2, por lo tanto, existe $f : X \to X$ tal que (X, f) tiene órbita densa y $F = f|_{X'}$. A continuación representamos de manera gráfica la función f.

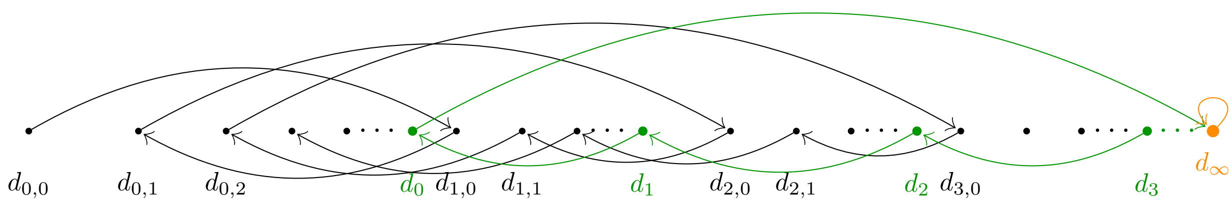


Figura 3.5: Sistema dinámico $(\omega^2 + 1, f)$ con órbita densa

Ejemplo 3.3.9. Consideremos $G : X' \to X'$ definida como:

- $G(d_0) = G(d_\infty) = d_\infty$,
- $G(d_1) = G(d_2) = d_0$, y
- $G(d_{2n+1}) = d_{2n-1}$ y $G(d_{2(n+1)}) = d_{2n}$ si $n \geq 1$.

Es sencillo ver que G es continua y satisface las condiciones del Teorema 2.3.2, luego existe $g : X \to X$ tal que $G = g|_{X'}$ y el sistema dinámico (X, g) tiene órbita densa. Gráficamente la función g se puede ver como:

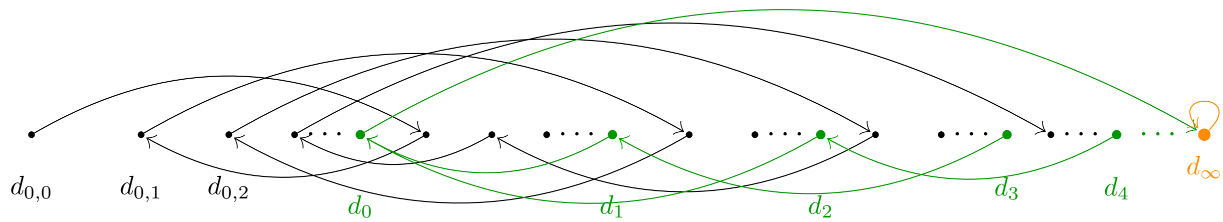


Figura 3.6: Sistema dinámico $(\omega^2 + 1, g)$ con órbita densa

Proposición 3.3.10. *Las funciones f y g definidas en los Ejemplos 3.3.8 y 3.3.9, respectivamente, no son conjugadas.*

Demostración. En realidad, mostraremos que F y G (también definidas en los ejemplos) no son conjugadas. Primero veamos que eso es suficiente para garantizar que f y g tampoco son conjugadas. Supongamos que F y G no son conjugadas. Por contrapositiva, supongamos que f y g son conjugadas, entonces existe $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ una conjugación entre f y g. Ahora notemos que $\varphi[X'] = X'$. Por lo tanto, si consideramos $\varphi' = \varphi|_{X'}$, tenemos que φ' es una conjugación entre $f|_{X'} = F$ y $g|_{X'} = G$.

Ahora mostraremos que F y G efectivamente no son conjugadas. Supongamos por absurdo que sí son conjugadas, luego existe una conjugación $\varphi : X' \to X'$ entre F y G, es decir, $\varphi \circ F = g \circ \varphi$. Notemos que d_∞ es el único punto límite de X', por lo tanto $\varphi(d_\infty) = d_\infty$. Por otro lado, como φ es una conjugación tenemos que

$$\varphi(F(d_0)) = G(\varphi(d_0)),$$

pero $F(d_0) = d_\infty$, por lo tanto $d_\infty = G(\varphi(d_0))$. De la definición de G, se tiene que $\varphi(d_0) = d_0$ o $\varphi(d_0) = d_\infty$. Pero el segundo caso no puede ocurrir, entonces $\varphi(d_0) = d_0$. Usando el Lema 3.1.4, tenemos que

$$|F^{-1}[d_0]| = |G^{-1}[\varphi(d_0)]| = |G^{-1}[d_0]|.$$

Pero esto es absurdo, ya que $F^{-1}[d_0] = \{d_1\}$ y $G^{-1}[d_0] = \{d_1, d_2\}$. Por lo tanto, F y G no pueden ser conjugadas. $\square$

La idea que utilizamos anteriormente para construir las funciones f y g se puede usar para obtener una colección infinita (del tamaño del continuo) de funciones con órbita densa sobre $\omega^2 + 1$ dos a dos no conjugadas.

Teorema 3.3.11. *El conjunto* $\left\{[f]_{\mathbb{E}_C} : f \in \mathcal{OD}(\omega^2+1)\right\}$ *tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$.

Demostración. Definamos $X = \omega^2 + 1$ y $X' = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\}$. Empezaremos construyendo funciones $F_\alpha : X' \to X'$ para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, tal que si $\alpha \neq \beta$ entonces F_α y F_β no son conjugadas. Sea $G_\alpha : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ la función asociada a $(\mathbb{N}, \alpha)$ definida en 3.2.5. A partir de G_α definimos $F_\alpha : X' \to X'$ como

$$F_\alpha(d_n) = \begin{cases} d_{G_\alpha(n)} & \text{si } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ d_\infty & \text{si } n = 0, \infty. \end{cases}$$

Intuitivamente, la función F_α define un árbol cuya raíz es d_0, y en el que cada nodo tiene uno o dos descendientes, según el valor de $\alpha(k)$ (recordar la Definición 3.2.5). Para ilustrar mejor esta construcción, a continuación representamos gráficamente la función F_α para un α particular.

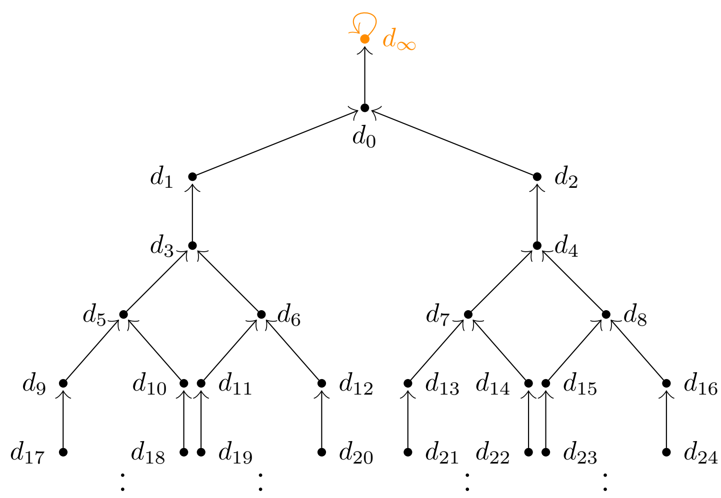


Figura 3.7: Función F_α si $\alpha = (1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$

No es difícil probar que F_α es una función continua sobre X'. Veamos que si $\alpha \neq \beta$, entonces F_α y F_β no son conjugadas. En efecto, supongamos por contradicción que $\alpha \neq \beta$ y que F_α y F_β son conjugados y sea $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X')$ tal que $\varphi \circ F_\alpha = F_\beta \circ \varphi$.

Definamos $k = \min\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \neq \beta(i)\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha(k) = 0$ y $\beta(k) = 1$. Entonces

$$F_\alpha^{-(k+1)}(d_0) \subsetneq F_\beta^{-(k+1)}(d_0),$$

por lo tanto,
$$|F_\alpha^{-(k+1)}(d_0)| \neq |F_\beta^{-(k+1)}(d_0)|.$$

Lo cual contradice el Lema 3.1.4. De este modo, concluimos que F_α y F_β no son conjugadas.

Por otro lado, debido a la forma en la que se construyó F_α, tenemos que F_α es sobreyectiva y que
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F^{-i}(d_0) = X' \setminus \{d_\infty\},$$

para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, F_α satisface las hipótesis del Teorema 2.3.2, luego existe $\widehat{F}_\alpha \in \mathcal{OD}(\omega^2+1)$ tal que $\widehat{F}_\alpha\Big|_{X'} = F_\alpha$.

De este modo, si $\alpha \neq \beta$, entonces $\widehat{F}_\alpha$ y $\widehat{F}_\beta$ no son conjugadas. En caso contrario, si $\widehat{F}_\alpha$ y $\widehat{F}_\beta$ fueran conjugadas, tendríamos que existe $\varphi \in$ Homeo(X) tal que
$$\varphi \circ \widehat{F}_\alpha = \widehat{F}_\beta \circ \varphi.$$

Por lo tanto, $\psi = \varphi|_{X'}$ sería una conjugación entre F_α y F_β. Lo cual es absurdo, pues F_α y F_β no son conjugadas. $\square$

Observemos que en la prueba anterior, las funciones construidas no eran conjugadas sobre $(\omega^2+1)'$. Esto era suficiente para mostrar que tales funciones no son conjugadas sobre ω^2+1. Es natural preguntarse si esta condición es necesaria, es decir, para cualquier par de funciones $f, g \in \mathcal{OD}(\omega^2+1)$, si f y g no son conjugadas, entonces $f|_{X'}$ y $g|_{X'}$ tampoco lo son.

La respuesta a la pregunta anterior es *no*. A continuación, presentaremos un ejemplo de dos funciones $f, g \in \mathcal{OD}(\omega^2+1)$ tales que no son conjugadas, pero $f|_{X'} = g|_{X'}$.

Ejemplo 3.3.12. Escribamos $X = \omega^2+1$ y consideremos $f : X \to X$ la función construida en el Ejemplo 3.3.8. Vamos a construir $h : X \to X$ tal que la órbita del punto $d_{0,0}$ sea densa bajo h y, además $h|_{X'} = f|_{X'}$. Definamos la órbita de $d_{0,0}$ a partir del siguiente diagrama.

$$
\begin{aligned}
&d_{0,0} \to d_{0,1},\\
&d_{0,1} \to d_{1,0} \to d_{0,2},\\
&d_{0,2} \to d_{2,0} \to d_{1,1} \to d_{0,3},\\
&d_{0,3} \to d_{3,0} \to d_{2,1} \to d_{1,2} \to d_{0,4},\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&d_{0,k} \to d_{k,0} \to d_{k-1,1} \to d_{k-2,2} \to \cdots \to d_{1,k-1} \to d_{0,k+1}.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, $h(d_{0,0}) = d_{0,1}$, $h^2(d_{0,0}) = h(d_{0,1}) = d_{1,0}$, $h^3(d_{0,0}) = h(d_{1,0}) = d_{0,2}$. Ahora notemos que h satisface lo siguiente:

(1) $h[\{d_{0,k} : k \geq 1\}] = \{d_{k,0} : k \geq 1\}$,

(2) $h[\{d_{1,k} : k \in \mathbb{N}\}] = \{d_{0,k} : k \geq 2\}$

(3) Para cada $i > 2$, $h[\{d_{i,k} : k \in \mathbb{N}\}] = \{d_{i-1,k} : k \geq 1\}$.

De lo anterior, si definimos

1. $h(d_0) = h(d_\infty) = d_\infty$,
2. $h(d_n) = d_{n-1}$ para $n > 1$,

tenemos que h es una función continua tal que $\overline{\mathcal{O}_h(d_{0,0})} = X$. Además, $f(x) = h(x)$ para todo $x \in X'$.

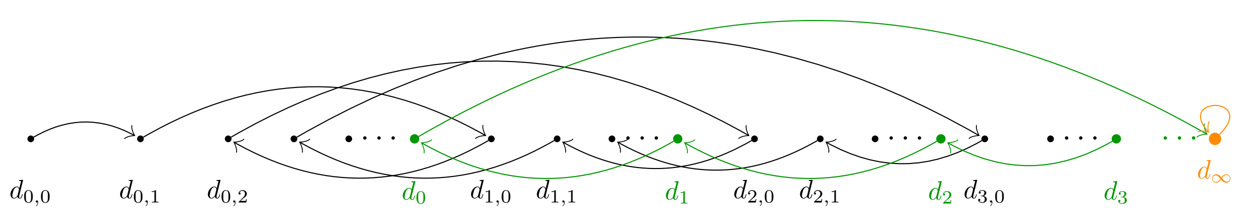


Figura 3.8: Sistema dinámico $(\omega^2 + 1, h)$ con órbita densa

Afirmamos que f y h no son conjugadas. Supongamos por contradicción que sí son conjugadas. Sea $\varphi \in \text{Homeo}(X)$ tal que

$$\varphi \circ f = h \circ \varphi.$$

Como φ es un homeomorfismo, tenemos que $\varphi(d_\infty) = d_\infty$. Por otro lado,

$$\varphi(f(d_0)) = \varphi(d_\infty) = d_\infty = h(\varphi(d_0)),$$

esto implica que $\varphi(d_0)$ es d_0 o d_∞. Pero el segundo caso no puede ocurrir, así que $\varphi(d_0) = d_0$. Por otro lado, notemos que $\varphi(d_{0,0}) = d_{0,0}$, pues $d_{0,0}$ es el único punto con órbita densa tanto para f como para h. Esto implica que

$$\varphi(f^k(d_{0,0})) = h^k(d_{0,0}) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Consideremos la sucesión $b(n) = n(n+3)/2$. Ahora notemos que

- $f^2(d_{0,0}) = d_{0,1}$, $h^2(d_{0,0}) = d_{1,0}$.
- $f^5(d_{0,0}) = d_{0,2}$, $h^5(d_{0,0}) = d_{1,1}$.
- En general,

$$f^{b(n)}(d_{0,0}) = d_{0,n} \quad \& \quad h^{b(n)}(d_{0,0}) = d_{1,n-1} \text{ para cada } n \geq 1.$$

Esto implica que $(f^{b(n)}(d_{0,0}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a d_0 y $(h^{b(n)}(d_{0,0}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a d_1. Pero esto no puede ser posible, ya que

$$\varphi(f^{b(n)}(d_{0,0})) = h^{b(n)}(d_{0,0}),$$

luego $\varphi(d_0) = d_1$ (por la continuidad de φ). Lo cual es absurdo, pues $\varphi(d_0) = d_0$. $\square$

Si definimos $H : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ como $H(\alpha) = \widehat{F}_\alpha$, donde $\widehat{F}_\alpha$ es la función construida en la demostración del Teorema 3.3.11, se puede probar que H es continua. Por lo tanto,

$$\text{Id}(2^{\mathbb{N}}) \leq_B \mathbb{E}_{OD}^{\omega^2+1}.$$

No obstante, probar la continuidad de H no es para nada trivial, pues los cálculos involucrados son bastante tediosos. Esto se debe a que $H(\alpha)$ corresponde a la extensión de F_α construida en el Teorema 2.3.2, donde F_α se define a partir de la función asociada al árbol $(\mathbb{N}, \alpha)$ (véase la Definición 3.2.5). La complejidad radica, en realidad, en el proceso de extensión, pues requiere recordar en detalle su construcción y analizar múltiples casos. Aún así, en la siguiente sección, obtendremos este mismo resultado a partir del teorema de dicotomía de Silver (véase el Teorema 3.3.23).

Presentamos a continuación algunas cuestiones relacionadas con el conteo de clases de equivalencia de $\mathbb{E}_{OD}^X$.

Pregunta 3.3.13. *Sea $X = \omega^\alpha + 1$, donde $\alpha > 2$ es un ordinal numerable. ¿$\mathbb{E}_{OD}^X$ tiene una cantidad no numerable de clases?*

Recordemos que en el caso $X = k\cdot\omega+1$, la relación $\mathbb{E}_{OD}^X$ posee exactamente una clase de equivalencia. En cambio, al considerar el siguiente espacio métrico compacto numerable más "complejo", $X = \omega^2 + 1$, el número de clases de equivalencia de $\mathbb{E}_{OD}^X$ asciende a $2^{\aleph_0}$. En otras palabras, $\mathbb{E}_{OD}$ pasa de tener una única clase a tener $2^{\aleph_0}$ clases de equivalencia. Este contraste nos conduce a plantear la siguiente cuestión.

Pregunta 3.3.14. *¿Existe un espacio métrico compacto X tal que $\mathbb{E}_{OD}^X$ tenga exactamente una cantidad numerable de clases?*

Por otro lado, a partir del Ejemplo 3.3.12, donde construimos dos funciones $f, h \in \mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ que no son conjugadas pero que coinciden en $(\omega^2 + 1)'$, surge de manera natural el siguiente interrogante.

Pregunta 3.3.15. *Sean $X = \omega^2 + 1$ y $f \in \mathcal{OD}(X)$. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto*

$$\left\{[g]_{\mathbb{E}_{OD}} : g \in \mathcal{OD}(\omega^2 + 1) \ \&\ g\big|_{X'} = f\big|_{X'}\right\}?$$

3.3.2. $\mathbb{E}_{OD}^X$ es Borel reducible a $=^+$ Finalizamos esta sección demostrando que, para todo espacio métrico compacto numerable X, se cumple que $\mathbb{E}_{OD}^X$ es Borel reducible a $=^+$. La demostración que presentamos se inspira en la idea presentada por Kaya en [8], donde establece que la conjugación de sistemas dinámicos minimales de Cantor punteados es Borel birreducible a $=^+$.

Recordemos que un sistema dinámico es *minimal* si toda órbita es densa en el espacio. Aunque no existen sistemas dinámicos numerables minimales, es posible adaptar las ideas de Kaya para concluir que $\mathbb{E}_{OD}^X$ es Borel reducible a $=^+$ cuando X es métrico compacto numerable.

Un *sistema dinámico punteado* es una tripleta (X, f, x), donde (X, f) es un sistema dinámico y $x \in X$. Nuestro interés se centra en un tipo de sistema dinámico punteado, el cual llamaremos sistema dinámico con órbita densa punteado. Aunque el concepto que definiremos no es estándar, resulta conveniente para nuestros propósitos.

Definición 3.3.16. Un *sistema dinámico con órbita densa punteado* es un sistema dinámico punteado (X, f, x) tal que $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = X$.

Sea X un espacio métrico compacto. Definimos $\mathcal{OD}_p(X)$ como el conjunto

$$\mathcal{OD}_p(X) = \{(f, x) \in \mathcal{C}(X, X) \times X : \overline{\mathcal{O}_f(x)} = X\}.$$

Abusando de la terminología, llamaremos a $\mathcal{OD}_p(X)$ el conjunto de sistemas dinámicos con órbita densa punteados sobre X.

Teorema 3.3.17. *Sea X un espacio métrico compacto cero-dimensional. Entonces $\mathcal{OD}_p(X)$ es un subconjunto boreliano de $\mathcal{C}(X, X) \times X$.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abierto-cerrados de X. Notemos que

$$(f, x) \in \mathcal{OD}_p(X) \iff \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^k(x) \in U_n.$$

De lo anterior, basta con ver que $A_n^k = \{(f, x) \in \mathcal{C}(X, X) \times X : f^k(x) \in U_n\}$ es boreliano para cada $n, k \in \mathbb{N}$. Fijemos $n, k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que A_n^k es abierto (abierto-cerrado). En efecto, consideremos $\sigma : \mathcal{C}(X, X) \times X \to X$ dada por $\sigma(f, x) = f^k(x)$. Ahora observemos que

$$\sigma = e_X \circ \beta,$$

donde $e_X : \mathcal{C}(X, X) \times X \to X$ es la función evaluación, es decir, $e_X(f, x) = f(x)$, y $\beta : \mathcal{C}(X, X) \times X \to \mathcal{C}(X, X) \times X$ está dada por

$$\beta(f, x) = (f^k, x).$$

Es bien conocido que la función evaluación sobre espacios compactos es continua. Además, por el Teorema 1.1.2 se tiene que la función $f \to f^k$ también es continua, esto implica que β es continua. De lo anterior, concluimos que σ es continua.

Finalmente, observemos que

$$A_n^k = \sigma^{-1}[[\{x\}, U_n]].$$

Por lo tanto, como A_n^k es abierto para todo $n, k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\mathcal{OD}_p(X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_n^k,$$

es un subconjunto $\mathbf{\Pi}^0_2$. $\square$

A continuación presentamos la definición de conjugación de sistemas dinámicos punteados, noción ampliamente utilizada en la literatura.

Definición 3.3.18. Dos sistemas dinámicos punteados (X, f, x) y (Y, g, y) se dicen *(topológicamente) conjugados* si existe un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

y, además, $\varphi(x) = y$.

En este contexto, definimos $\mathbb{F}^X$ como la relación de conjugación entre sistemas dinámicos con órbita densa punteados sobre X. Es decir, para $(f, x), (g, y) \in \mathcal{OD}_p(X)$

$$(f, x)\ \mathbb{F}^X\ (g, y) \iff \exists \varphi \in \text{Homeo}(X) \text{ tal que } \varphi(x) = y \text{ y } \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Recordemos que Clopen(X) denota la colección de todos los subconjuntos abiertos-cerrados de X. Dado un sistema dinámico punteado (X, f, x) y $U \in$ Clopen(X), definimos el *conjunto de tiempos de retorno del punto x al conjunto U* como

$$\text{Ret}_U(f, x) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U\}.$$

La colección de todos los conjuntos de tiempo de retorno asociados a (f, x) la denotaremos por Ret(f, x), la cual está dada por

$$\text{Ret}(f, x) = \big\{\text{Ret}_U(f, x) : U \in \text{Clopen}(X)\big\}.$$

A continuación, caracterizamos la conjugación de sistemas dinámicos punteados con órbita densa a partir de la colección de conjuntos de tiempos de retorno. La estrategia que empleamos se inspira en la utilizada por Kaya en [8]; no obstante, en su demostración resulta esencial que el espacio de fase sea el conjunto de Cantor. En contraste, el resultado que presentamos aquí es válido en un contexto más general y se apoya en un resultado de [1] (ver el Lema 3.3.6).

Lema 3.3.19. *Sea X un espacio métrico compacto y cero-dimensional. Para cada $(f, x), (g, y) \in \mathcal{OD}_p(X)$, se tiene que*

$$\text{Ret}(f, x) = \text{Ret}(g, y) \textit{ si, y solo si, } (f, x)\mathbb{F}^X(g, y).$$

Demostración. Supongamos que Ret(f,x) = Ret(g,y). Veamos que (f,x) y (g,y) son conjugados. Usaremos el Lema 3.3.6. Consideremos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales. Mostraremos que

$$(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge si, y solo si, } (g^{n_k}(y))_{y\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Supongamos que $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $z \in X$ y veamos que $(g^{n_k}(y))_{k\in\mathbb{N}}$ también converge. Por la compacidad de X, existe una subsucesión $(n_{k_i}) \subseteq (n_k)$ tal que $(g^{n_{k_i}}(y))_{y\in\mathbb{N}}$ converge para algún $y \in X$. Sea $U \in$ Clopen(X) tal que $y \in U$. Por lo tanto, existe $I \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq I$ entonces

$$g^{n_{k_i}}(y) \in U.$$

Es decir, $\{n_{k_i} : i \geq I\} \subseteq$ Ret$_U(g,y)$. Como Ret(g,y) = Ret(f,x), debe existir $V \in$ Clopen(X) tal que Ret$_U(g,y)$ = Ret$_V(f,x)$, por lo tanto,

$$\{n_{k_i} : i \geq I\} \subseteq \text{Ret}_V(f,x),$$

es decir, $f^{n_{k_i}}(x) \in V$ para cada $i \geq I$. Como $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z, tenemos entonces que $(f^{n_{k_i}}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ también converge a z. Así, $z \in \overline{V} = V$. Por otro lado, por definición de convergencia de la sucesión $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, entonces

$$f^{n_k}(x) \in V,$$

es decir, $\{n_k : k \geq K\} \subseteq$ Ret$_V(f,x)$ = Ret$_U(g,y)$. Por lo tanto,

$$g^{n_k}(y) \in U \text{ para cada } k \geq K.$$

Como $U \in$ Clopen(X) y Clopen(X) es una base para X (véase el Corolario 1.1.9), concluimos que $(g^{n_k}(y))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. La implicación faltante se prueba por la simetría del argumento anteriormente realizado. Por lo tanto, por el Lema 3.3.6, existe $\varphi \in$ Homeo(X) tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ y $\varphi(x) = y$, es decir, $(f,x)\mathbb{F}^X(g,y)$.

Veamos ahora que, si $(f,x)\mathbb{F}^X(g,y)$, entonces Ret(f,x) = Ret(g,y). En efecto, sea $U \in$ Clopen(X). Mostraremos que Ret$_U(f,x) \in$ Ret(g,y). Sea $\varphi \in$ Homeo(X) tal que $\varphi \circ f =$

$g \circ \varphi$ y $\varphi(x) = y$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\varphi(f^n(x)) = g^n(\varphi(x)) = g^n(y).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{Ret}_U(f,x) &= \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : g^n(y) \in \varphi[U]\}, \\ &= \text{Ret}_{\varphi[U]}(g,y). \end{aligned}$$

Como φ es un homeomorfismo, tenemos que $\varphi[U]$ también es abierto-cerrado. Por lo tanto, $\varphi[U] \in \text{Clopen}(X)$. Esto demuestra que

$$\text{Ret}(f,x) \subseteq \text{Ret}(g,y).$$

La inclusión restante se prueba de manera similar. □

Cada subconjunto de números naturales puede ser codificado como un elemento de Cantor usando la función característica. Más precisamente, la función $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to 2^{\mathbb{N}}$ dada por $\chi(A) = \chi_A$, donde χ_A es la función característica, es una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $2^{\mathbb{N}}$.

Por otro lado, recordemos que para cada espacio métrico, compacto y cero-dimensional, se tiene que Clopen(X) es una base numerable (ver Proposición 1.1.8).

Lema 3.3.20. *Sean X un espacio métrico compacto y cero-dimensional. Entonces la función $\Psi : \mathcal{OD}_p(X) \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ dada por*

$$\Psi(f,x) = (\chi(\text{Ret}_{G(j)}(f,x)))_{j\in\mathbb{N}},$$

donde $G : \mathbb{N} \to$ Clopen(X) es una biyección fija, es una función boreliana.

Demostración. Para evitar el exceso de notación, eliminaremos el uso explícito de la función χ, y escribimos simplemente

$$\Psi(f,x) = (\text{Ret}_{G(j)}(f,x))_{j\in\mathbb{N}},$$

entendiendo a Ret$_{G(j)}(f,x)$ como un elemento del conjunto de Cantor. Para cada $i \in \mathbb{N}$

definimos $\Psi_i : \mathcal{OD}_p(X) \to 2^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\Psi_i(f,x) = \mathsf{Ret}_{G(i)}(f,x).$$

Notemos que $\Psi(f,x) = (\Psi_i(f,x))_{i\in\mathbb{N}}$, por lo tanto, basta con ver que Ψ_i es una función boreliana para cada $i \in \mathbb{N}$. Fijado $i \in \mathbb{N}$, para mostrar que Ψ_i es boreliana, es suficiente con ver que para cada $j \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_{i,j} = \{(f,x) \in \mathcal{OD}_p(X) : j \in \mathsf{Ret}_{G(i)}(f,x)\},$$

es boreliano. Por definición del conjunto de retorno, tenemos que

$$(f,x) \in A_{i,j} \iff f^j(x) \in G(i).$$

Si definimos $\sigma_j : \mathcal{OD}_p(X) \to X$ como $\sigma_j(f,x) = f^j(x)$, tenemos que $A_{i,j} = \sigma_j^{-1}[G(i)]$. De lo anterior, si probamos que σ_j es una función boreliana, la prueba queda completada. Luego solo nos resta ver que σ_j es boreliana. En realidad, mostraremos que σ_j es continua. En efecto, observemos que $\sigma_j = e_X \circ \beta_j$, donde $\beta_j : \mathcal{OD}_p(X) \to \mathcal{C}(X,X) \times X$ está dada por

$$\beta_j(f,x) = (f^j, x),$$

y $e_X : \mathcal{C}(X,X) \times X \to X$ es la función evaluación, es decir, $e_X(f,y) = f(x)$. Es bien conocido que la función evaluación en espacios compactos es continua. Por otro lado, como la función $f \mapsto f^j$ es continua por la Proposición 1.1.3, es sencillo verificar que β_j también es continua. Así, σ_j es una función boreliana (continua). $\square$

En general, si X es un espacio métrico compacto cero-dimensional, se cumple que $\mathbb{F}^X$ es Borel reducible a $\mathbb{E}_{OD}^X$. No obstante, cuando X es además numerable, ambas relaciones resultan Borel equivalentes.

Teorema 3.3.21. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces*

$$\mathbb{E}_{OD}^X \sim_B \mathbb{F}^X.$$

En palabras, la conjugación de sistemas dinámicos con órbita densa sobre X, es Borel birreducible a la conjugación de sistemas dinámicos con órbita densa punteados sobre X.

Demostración. Veamos que $\mathbb{E}_{OD}^X \leq_B \mathbb{F}^X$. Dado que X es numerable, por el Corolario 2.1.4, si (X, f) tiene órbita densa, entonces existe un único punto cuya órbita es densa. Teniendo en cuenta lo anterior definimos $\gamma : \mathcal{OD}(X) \to \mathcal{OD}_p(X)$ dada por

$$\gamma(f) = (f, x), \text{ donde } x \text{ es el único punto con órbita densa bajo } f.$$

Notemos que si $\Gamma : \mathcal{OD}(X) \to X$ es definida como

$$\Gamma(f) = x, \text{ donde } x \text{ es el único punto con órbita densa bajo } f.$$

Entonces $\gamma(f) = (f, \Gamma(f))$. Por lo tanto, para probar que γ es boreliana, basta con ver que Γ es una función boreliana. En efecto, sea $U \subseteq X$ abierto. Ahora notemos que

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}[U] &= \{g \in \mathcal{OD}_p(X) : \exists y \in U \text{ tal que } \overline{\mathcal{O}_g(y)} = X\}, \\ &= \bigcup_{y \in U} A_y.\end{aligned}$$

Donde $A_y = \{g \in \mathcal{OD}(X) : \overline{\mathcal{O}_g(y)} = X\}$. Pero recordemos que anteriormente, en el Teorema 2.2.10, mostramos que A_y es un conjunto boreliano. Así, concluimos que $\Gamma^{-1}[U]$ es boreliano.

Por otro lado, es fácil verificar que γ satisface que para todo $f, g \in \mathcal{OD}(X)$,

$$f \mathbb{E}_{OD}^X g \iff \gamma(f) \mathbb{F}^X \gamma(g).$$

Así, concluimos que $\mathbb{E}_{OD}^X \leq_B \mathbb{F}^X$.

Ahora veamos que $\mathbb{F}^X \leq \mathbb{E}_{OD}^X$. En efecto, consideremos $\eta : \mathcal{OD}_p(X) \to \mathcal{OD}(X)$ dada por

$$\eta(f, x) = f.$$

Es claro que η es una función boreliana. Más aún, η es continua, ya que es la restricción de la función proyección. Además, es claro que

$$(f, x) \mathbb{F}^X (g, y) \iff \eta(f, x) \mathbb{E}_{OD}^X \eta(g, y),$$

para cada $(f, x), (g, y) \in \mathcal{OD}_p(X)$. De lo anterior, concluimos lo deseado. $\square$

Ya disponemos de todos los elementos necesarios para demostrar los dos resultados principales de este capítulo.

Teorema 3.3.22. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces $\mathbb{E}_{OD}^{X} \leq_B =^+$.*

Demostración. Debido a que $\mathbb{E}_{OD}^{X}$ es Borel birreducible a $\mathbb{F}^X$ (véase el Teorema 3.3.21), es suficiente con demostrar que $\mathbb{F}^X$ es borel reducible a $=^+$. Consideremos la función boreliana $\Psi : \mathcal{OD}_p(X) \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ definida en el Lema 3.3.20.

Ahora notemos que para cada $(f, x), (g, y) \in \mathcal{OD}_p(X)$, se tiene que

$$\text{Ret}(f, x) = \text{Ret}(g, y) \iff \Psi(f, x) =^+ \Psi(g, y).$$

Además, por el Lema 3.3.19 también se tiene que

$$(f, x)\mathbb{F}^X(g, y) \iff \text{Ret}(f, x) = \text{Ret}(g, y).$$

De lo anterior, concluimos que Ψ es una reducción boreliana de $\mathbb{F}^X$ a $=^+$. □

El siguiente resultado, si bien una parte es un caso particular del teorema anterior, resulta especialmente útil, ya que en combinación con el teorema de dicotomía de Silver, nos permitirá establecer que Id$(2^{\mathbb{N}})$ es una cota inferior para la complejidad de $\mathbb{E}_{OD}^{X}$ cuando $X = \omega^2 + 1$.

Teorema 3.3.23. *Sea $X = \omega^2 + 1$. Entonces,*

$$\text{Id}(2^{\mathbb{N}}) \ \leq_B \ \mathbb{E}_{OD}^{X} \ \leq_B =^+ .$$

Demostración. Por el Teorema 3.3.22 se tiene que $\mathbb{E}_{OD} \leq_B =^+$. Como $=^+$ es boreliana por la Proposición 1.3.3, tenemos que $\mathbb{E}_{OD}$ también es boreliana, debido a la Proposición 1.3.7. Así, por el teorema de Souslin (ver Teorema 1.2.11), concluimos que $\mathbb{E}_{OD}$ es coanalítica.

Por otro lado, a partir del Teorema 3.3.11, tenemos que $\mathbb{E}_{OD}$ tiene una cantidad no numerable de clases de equivalencia. Esto implica, por la dicotomía de Silver (ver Teorema 1.3.8), que Id$(2^{\mathbb{N}}) \leq_B \mathbb{E}_{OD}$. □

Con el objetivo de conocer exactamente la complejidad de $\mathbb{E}_{OD}^{X}$ planteamos la siguiente pregunta. Recordemos que E_0 está definida sobre $2^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: para cada

$\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$\alpha E_0 \beta \iff \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\ (\, \alpha(n) = \beta(n)\,).$$

Asimismo, E_0 es la relación boreliana menos compleja que no es suave (Th. 6.3.1 [16]). Más precisamente, si E es una relación boreliana con Id$(2^{\mathbb{N}}) <_B E$, entonces necesariamente $E_0 \leq_B E$.

Pregunta 3.3.24. *Sea $X = \omega^2 + 1$. ¿Cuál de las siguientes alternativas se cumple,*

$$\mathbb{E}_{OD}^{X} \leq_B E_0 \quad \textit{o} \quad E_0 \leq_B \mathbb{E}_{OD}^{X}?$$

3.4. CONJUGACIÓN SOBRE Homeo(X)

Finalizamos este capítulo analizando la complejidad de la conjugación topológica de homeomorfismos de X. Denotaremos por $\mathbb{E}_H^X$ la relación de conjugación restringida a Homeo(X), el grupo de homeomorfismos de X en sí mismo.

El siguiente resultado es bien conocido en la literatura, aunque usualmente no se presenta en el contexto de los sistemas dinámicos, sino como la acción de S_∞ sobre sí mismo por conjugación, puesto que Homeo$(\omega + 1)$ es homeomorfo a S_∞. No obstante, incluiremos aquí una demostración detallada de este hecho en el entorno de los sistemas dinámicos.

Si $f \in$ Homeo(X) y $x \in X$, denotaremos con $\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x)$ la $\mathbb{Z}$-órbita de x, es decir,

$$\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Teorema 3.4.1. *$\mathbb{E}_H^{\omega+1}$ es Borel birreducible a* Id$(2^{\mathbb{N}})$*.*

Demostración. Recordemos que la función continua $H : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}(\omega + 1, \omega + 1)$, definida en el Teorema 3.2.1, satisface que para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, $H(\alpha)$ es un autohomeomorfismo de $\omega + 1$. Por lo tanto, si definimos $G : 2^{\mathbb{N}} \to$ Homeo$(\omega + 1)$ como $G(\alpha) = H(\alpha)$, tenemos que G es una reducción continua de Id$(2^{\mathbb{N}})$ a $\mathbb{E}_H$.

Solo nos resta mostrar que, $\mathbb{E}_H$ es Borel reducible a Id$(2^{\mathbb{N}})$. La idea intuitiva se basa en observar la estructura de los ciclos de los homeomorfismos de $\omega+1$, este será el invariante de la conjugación que usaremos. Para ello, mostraremos que $\mathbb{E}_H$ es borel reducible a Id(Y), donde

$$Y = (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^{\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}} \quad \text{y} \quad \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

En efecto, consideremos G : Homeo$(\omega+1) \to Y$ definida como

$$G(f)(i) = \left|\{\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x) : x \in \mathbb{N} \;\&\; |\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x)| = i\}\right|.$$

Aquí $|A| = \infty$ significa que A es infinito. Afirmamos que G es una reducción de $\mathbb{E}_H$ a Id(Y). En efecto, supongamos que $f \mathbb{E}_H g$, es decir, existe $\varphi \in$ Homeo$(\omega+1)$, tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi \circ f^n = g^n \circ \varphi.$$

Por lo tanto,

$$\varphi[\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x)] = \mathcal{O}_g^{\mathbb{Z}}(\varphi(x)).$$

Esto implica que, si $i \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ y $|\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x)| = i$, entonces $|\mathcal{O}_g^{\mathbb{Z}}(\varphi(x))| = i$. Por lo tanto, $G(f)(i) \leq G(g)(i)$. Notemos que la desigualdad faltante se tiene por la simetría del argumento anteriormente realizado.

Supongamos que $G(f)(i) = G(g)(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$, es decir,

$$\left|\{\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x) : x \in \mathbb{N} \;\&\; |\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x)| = i\}\right| = \left|\{\mathcal{O}_g^{\mathbb{Z}}(y) : y \in \mathbb{N} \;\&\; |\mathcal{O}_g^{\mathbb{Z}}(y)| = i\}\right|.$$

Para cada $h \in$ Homeo$(\omega+1)$, definamos $A_i(h)$ como el conjunto

$$A_i(h) = \{\mathcal{O}_h^{\mathbb{Z}}(x) : x \in \mathbb{N} \;\&\; |\mathcal{O}_h^{\mathbb{Z}}(x)| = i\}.$$

Como $G(f)(i) = G(g)(i)$, los conjuntos $A_i(f)$ y $A_i(g)$ están en correspondencia uno a uno para cada i. Esto implica que existe una función $\psi_i : A_i(f) \to A_i(g)$ biyectiva. Construiremos $\varphi_i : \bigcup A_i(f) \to \bigcup A_i(g)$ de la siguiente manera: para cada $O \in A_i(f)$ fijemos $x_O, y_O \in X$ tal que

$$\mathcal{O}_f^{\mathbb{Z}}(x_O) = X \text{ y } \mathcal{O}_g^{\mathbb{Z}}(y_O) = \psi_i(O),$$

además,

$$\varphi(f^n(x_O)) = g^n(y_O),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. No es difícil ver que φ_i es una función bien definida. Más aún, φ_i es una biyección. Finalmente, consideremos $\varphi : \omega+1 \to \omega+1$, como

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } x \in A_i(f) \text{ para algún } i, \\ \omega & \text{si } x = \omega. \end{cases}$$

Como cada φ_i es biyectiva, es sencillo verificar que φ es una biyección, esto implica que φ es un homeomorfismo. Además, por la forma en cómo fueron construidas las funciones φ_i, se tiene que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Luego $f \mathbb{E}_H g$.

Solo nos resta probar que G es una función boreliana. Sean $n \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, veamos que el conjunto

$$B_{m,n} = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : G(f)(n) = m\},$$

es boreliano. Notemos que

$$B_{m,n} = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f \text{ tiene exactamente } m\ \mathbb{Z}\text{-órbitas disjuntas de longitud } n\}.$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $n \in \mathbb{N}^\star$. Definamos

$$C_{m,n} = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f \text{ tiene al menos } m\ \mathbb{Z}\text{-órbitas disjuntas de longitud } n\}.$$

Ahora notemos que

$$f \in C_{m,n} \iff \begin{cases} \exists s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}^n \forall i,j \in [1,m] \forall k,l \in [1,n]\ ((i,k) \neq (j,l) \to s_i(k) \neq s_j(l)), \\ \forall i \leq m\ \forall k \leq n,\ f(s_i(k)) = s_i(k+1 (\text{mód } n)). \end{cases}$$

Pero si fijamos $x, y \in \omega+1$, tenemos que el conjunto $\{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f(x) = y\}$ es cerrado. Por lo tanto, $C_{m,n}$ es F_σ, en particular boreliano. Ahora consideremos los siguientes casos.

Caso 1.1: $m = 0$. Notemos que $f \notin B_{0,n}$ si, y solo si, f tiene al menos una órbita $\mathbb{Z}$-órbita de longitud n. Por lo tanto, $B_{0,n} = \text{Homeo}(\omega+1) \setminus C_{1,n}$.

Caso 1.2: $m \geq 1$. En este caso, tenemos que $B_{m,n} = C_{m,n} \setminus C_{m+1,n}$.

Caso 1.3: $m = \infty$. Notemos que

$$B_{\infty,n} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^\star} C_{m,n}.$$

En cualquier caso, concluimos que $B_{m,n}$ es un conjunto boreliano.

Caso 2: $n = \infty$. Consideremos

$$E_{m,\infty} = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f \text{ tiene al menos } m\ \mathbb{Z}\text{-órbitas infinitas disjuntas}\}.$$

Notemos que $B_{0,\infty} = \text{Homeo}(\omega+1) \setminus E_{1,\infty}$. Si $m \in \mathbb{N}^\star$, entonces $B_{m,\infty} = E_{m,\infty} \setminus E_{m+1,\infty}$. Finalmente, si $m = \infty$ entonces

$$B_{\infty,\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^\star} E_{m,\infty}.$$

Por lo tanto, basta con ver que $E_{m,\infty}$ es un conjunto boreliano. En efecto, notemos que

$$f \in E_{m,\infty} \iff \exists s = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{N}^m\ \forall i \neq j \in [1,m]\big(\ s_i \neq s_j\ \&\ f \in D_s\big),$$

donde D_s está definido para cada $s = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{N}^m$, y está dado por

$$\begin{aligned} D_s = \big\{\ f \in \text{Homeo}(\omega+1) : \forall i \in [1,m],\ \mathcal{O}_f(s_i) \text{ es infinita,}& \\ \forall i \neq j \in [1,m],\ \mathcal{O}_f(s_i) \cap \mathcal{O}_f(s_j) = \emptyset\ \big\}.& \end{aligned}$$

Es suficiente con ver que D_s es boreliano para cada $s \in \mathbb{N}^m$. Fijemos $s \in \mathbb{N}^m$ y definamos D_s^l como

$$\begin{aligned} D_s^l = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : \forall i \in [1,m],\ |\{s_i, \ldots, f^{l-1}(s_i)\}| = l,& \\ \forall i \neq j \in [1,m],\ \{s_i, \ldots, f^{l-1}(s_i)\} \cap \{s_j, \ldots, f^{l-1}(s_j)\} = \emptyset\ \}.& \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $D_s = \bigcap_{l \in \mathbb{N}^\star} D_s^l$. Por otro lado, notemos que

$$f \in D_s^l \iff \begin{cases} \forall i \in [1,m],\ \forall 0 \leq p,q \leq l,\ f \notin F_{p,q}^{i,i}, \\ \forall i \neq j \in [1,m],\ \forall 0 \leq p,q \leq l,\ f \notin F_{p,q}^{i,j}. \end{cases}$$

Donde $F_{p,q}^{i,j} = \{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f^p(s_i) = f^q(s_j)\}$. Pero notemos que si fijamos $x, y \in$

$\omega + 1$, entonces el conjunto $\{f \in \text{Homeo}(\omega+1) : f^p(x) = f^q(y)\}$ es cerrado. Luego, $F^{i,j}_{p,q}$ también es cerrado. Por lo tanto, D^l_s es abierto, y en consecuencia, D_s es boreliano.

Finalmente, como Y es Borel isomorfo a $2^{\mathbb{N}}$, tenemos que existe un isomorfismo boreliano $\Gamma : Y \to 2^{\mathbb{N}}$. Así, $\Gamma \circ G : \text{Homeo}(\omega+1) \to 2^{\mathbb{N}}$ es una reducción boreliana entre $\mathbb{E}_H$ y $\text{Id}(2^{\mathbb{N}})$. $\square$

Proposición 3.4.2. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces $\mathbb{E}^X_H$ es Borel reducible a $\mathbb{E}^X_C$.*

Demostración. Notemos que la función identidad $\text{Id} : \text{Homeo}(X) \to \mathcal{C}(X,X)$ es una reducción continua entre $\mathbb{E}^X_H$ y $\mathbb{E}^X_C$. $\square$

Recordemos que $\omega^2 + 1$ puede interpretarse como ω copias de $\omega + 1$, junto con un punto límite. Por el teorema anterior, a cada homeomorfismo se le puede asociar un elemento de Cantor que determina por completo su clase de equivalencia. Esto sugiere que, de manera natural, a cada homeomorfismo de $\omega^2 + 1$ podría corresponderle una colección numerable de elementos de Cantor como un invariante de la conjugación. A partir de esta observación surge la siguiente pregunta.

Pregunta 3.4.3. *Si $X = \omega^2 + 1$. ¿$\mathbb{E}^X_H$ es Borel equivalente a $=^+$?*

4. ENUMERACIONES ASOCIADAS A SISTEMAS DINÁMICOS

Las enumeraciones explícitas de conjuntos específicos han aparecido en distintos contextos en matemáticas. Un ejemplo clásico es el de los números racionales. Sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable, pero las biyecciones explícitas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$ no son tan comunes, tal como lo señalan los autores en [20]. No obstante, existen construcciones concretas de enumeraciones de $\mathbb{Q}$ (véase, por ejemplo [21] y [22]). Una de estas construcciones explícitas proviene de la función $T : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dada por

$$T(x) = \frac{1}{2[x] - x + 1}.$$

Esta función tiene la propiedad de que la órbita del cero bajo T enumera a $\mathbb{Q}^+$ (ver [23]). Aunque esta función no es continua, ha sido estudiada desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, lo que muestra cómo las enumeraciones pueden surgir de manera natural en este contexto.

En una dirección similar, al estudiar sistemas dinámicos con órbita densa definidos en $\omega^2 + 1$, observamos una relación natural de dichos sistemas con las enumeraciones de $\mathbb{N}^2$. El objetivo de este capítulo es formalizar y generalizar dicha correspondencia, así como presentar algunos resultados sobre las enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ que se asocian a sistemas dinámicos con órbita densa definidos sobre espacios de la forma $\omega^k + 1$.

En este capítulo mostramos que el conjunto de enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ inducidas por sistemas dinámicos con órbitas densas tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Además, demostramos que la colección de tales enumeraciones sobre $\omega^k + 1$ define un subconjunto boreliano del espacio de todas las biyecciones de $\mathbb{N}^k$ en $\mathbb{N}$. Finalmente, veremos que, en el caso $k > 1$,

---

[20] Godofredo Iommi y Mario Ponce. «Odometers, Backward Continued Fractions, and Counting Rationals». En: *The American Mathematical Monthly* 132.4 (2025), págs. 333-349.

[21] Neil Calkin y Herbert Wilf. «Recounting the Rationals». En: *The American Mathematical Monthly* 107.4 (2000), págs. 360-363.

[22] Claudio Bonanno y Stefano Isola. «Orderings of the rationals and dynamical systems». En: *Colloquium Mathematicae* 116.2 (2009), págs. 165-189.

[23] Florin P Boca. «The distribution of rational numbers and ergodic theory». En: *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 62.1 (2017), págs. 41-62.

existen también $2^{\aleph_0}$ enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ que no están asociadas a sistemas dinámicos con órbita densa.

4.1. PRELIMINARES

Denotaremos con $\mathbb{N}^{\leq k}$ al conjunto de sucesiones de números naturales de longitud a lo más k, es decir,

$$\mathbb{N}^{\leq k} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{N}^i.$$

Además, si $s \in \mathbb{N}^m$ se diremos que s tiene longitud m y escribiremos $|s| = m$. La concatenación de una sucesión finita $s = (s_1, \ldots, s_j)$ con un número natural n, se define por

$$s^\frown n = (s_1, \ldots, s_j, n).$$

Para cada número natural $k \geq 1$, fijamos un conjunto

$$X_k = \{d_s : s \in \mathbb{N}^{\leq k}\} \cup \{d_\infty\} \subseteq \mathbb{R}$$

con las siguientes propiedades:

- Para cada $s \in \mathbb{N}^{\leq k-1}$, la sucesión $(d_{s^\frown n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_s.
- La sucesión $(d_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente que converge a d_∞.

No es difícil demostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, X_k (con la topología que hereda de $\mathbb{R}$) es homeomorfo a $\omega^k + 1$. Además, tenemos que

$$I(\omega^k + 1) = I(X_k) = \{d_s \in X_k : |s| = k\} = \{d_s \in X_k : s \in \mathbb{N}^k\}.$$

Por lo tanto, existe una biyección natural entre $I(\omega^k + 1)$ y $\mathbb{N}^k$.

A partir de la Proposición 2.1.3, y por el hecho de que

$$I(\omega^k + 1) = \{d_s : s \in \mathbb{N}^k\},$$

tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Sea (ω^k+1, f) un sistema dinámico. Supongamos que existe $s \in \mathbb{N}^k$ tal que la órbita de d_s es densa. La *enumeración asociada al sistema dinámico* (ω^k+1, f) es la función biyectiva $e_f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definida por

$$e_f(t) = m, \ \text{ si } \ d_t = f^m(d_s),$$

donde $e_f(s) = 0$.

Nuestro objetivo es analizar las propiedades topológicas del conjunto de enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ que provienen de sistemas dinámicos sobre ω^k+1 con órbita densa. A continuación introducimos formalmente el conjunto que será nuestro principal objeto de estudio. Recordemos que $\mathcal{OD}(X)$ denota al conjunto de funciones continuas de X en sí mismo que admiten una órbita densa, es decir,

$$\mathcal{OD}(X) = \{f \in \mathcal{C}(X,X) : \exists z \in X \text{ con } \overline{\mathcal{O}_f(z)} = X\}.$$

Además, recordemos que, de acuerdo con el Teorema 2.2.1, para todo espacio métrico compacto y numerable X se cumple que $\mathcal{OD}(X) \neq \emptyset$. En particular, para cada $k \geq 1$ se tiene que $\mathcal{OD}(\omega^k+1)$ no es vacío.

Definición 4.1.2. Para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$, definimos $\mathcal{E}_k$ como el conjunto

$$\mathcal{E}_k = \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : \exists\, f \in \mathcal{OD}(\omega^k+1) \text{ tal que } e_f = h\}.$$

Es muy natural pensar que no todas las enumeraciones de $\mathbb{N}^k$ provienen de sistemas dinámicos con órbita densa. En efecto, a continuación presentamos un ejemplo de una enumeración de $\mathbb{N}^2$ que no proviene de ningún sistema dinámico sobre ω^2+1.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la enumeración representada en la siguiente figura:

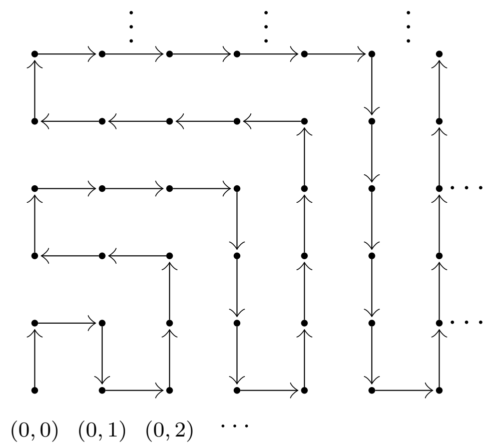


Figura 4.1: Enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sin sistema dinámico asociado

Afirmamos que $h \notin \mathcal{E}_2$. Por contradicción, supongamos que existe $f \in \mathcal{OD}(\omega^2 + 1)$ tal que $e_f = h$. Por definición de e_f, tenemos que f debe satisfacer que, para cada $s \in \mathbb{N}^2$

$$f(d_s) = d_t \text{ siempre que } h^{-1}(h(s) + 1) = t.$$

En particular, f cumple que

$$f(d_{0,n}) = \begin{cases} d_{1,n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ d_{0,n+1} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Lo cual implica que f no puede ser continua, ya que $(d_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a d_0, pero $(f(d_{0,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, debido a que tiene dos subsucesiones, $(f(d_{0,2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f(d_{0,2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$, que convergen a d_1 y d_0 respectivamente. $\square$

En general, no es posible asociar a cada enumeración h una función $g_h \in \mathcal{OD}(\omega^k + 1)$ tal que

$$e_{g_h} = h.$$

No obstante, sí es posible asociar a cada enumeración una función $f_h : I(\omega^k+1) \to \omega^k+1$, con la propiedad de que si f extiende continuamente a f_h, entonces $e_f = h$.

Definición 4.1.4. Dada una enumeración $h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$, la función asociada a h es la función $f_h : I(\omega^k + 1) \to \omega^k + 1$ dada por

$$f_h(d_s) = d_t \iff h^{-1}(h(s) + 1) = t.$$

para cada $s \in \mathbb{N}^k$.

Notemos que si $h \in \mathcal{E}_k$ y $e_g = h$, entonces $g|_{I(\omega^k+1)} = f_h$. Recíprocamente, si f_h admite una extensión continua sobre $\omega^k + 1$, esta extensión es única. Más aún, si g es tal extensión, entonces g admite una órbita densa y $e_g = h$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Proposición 4.1.5. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k &= \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : \exists f \in \mathcal{OD}(\omega^k + 1) \text{ tal que } e_f = h\}, \\ &= \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : f_h \text{ se puede extender continuamente a } \omega^k + 1\}.\end{aligned}$$

Debido a la relevancia que tiene $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ para este capítulo, recordemos que la colección

$$\{N_s : s : \text{Dom}(s) \to \mathbb{N} \text{ es inyectiva y Dom}(s) \text{ es finito}\},$$

donde

$$N_s = \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : h(x) = s(x) \text{ para cada } x \in \text{Dom}(s)\},$$

forma una base para la topología de $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.

4.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE $\mathcal{E}_k$

En esta sección presentamos algunos resultados relacionados con la familia $\mathcal{E}_k$. Comenzamos con un hecho bastante intuitivo: la familia $\mathcal{E}_k$ es invariante bajo cambios finitos. Es decir, si $h \in \mathcal{E}_k$ y e difiere de h únicamente en una cantidad finita de puntos, entonces también se tiene que $e \in \mathcal{E}_k$. A continuación, introducimos de manera formal lo que significa que una familia sea invariante bajo cambios finitos.

Sea X un conjunto. Si $\psi : X \to X$ es una función, definimos el soporte de ψ como

$$\text{sop}(\psi) = \{x \in X : \psi(x) \neq x\}.$$

Sea $\mathcal{A} \subseteq Y^X$ una colección de funciones de X en Y. Decimos que $\mathcal{A}$ es *invariante bajo cambios finitos*, si para cada $f \in \mathcal{A}$ y $\psi : X \to X$ biyectiva con soporte finito, se tiene que

$$f \circ \psi \in \mathcal{A}.$$

Proposición 4.2.1. *Para cada $k \geq 1$, $\mathcal{E}_k$ es invariante bajo cambios finitos.*

Demostración. Definamos $X = \omega^k + 1$ y consideremos

$$\Gamma = \{\alpha \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}^k) : \text{sop}(\alpha) \text{ es finito}\}.$$

Sean $\alpha \in \Gamma$ y $h \in \mathcal{E}_k$, mostraremos que $h \circ \alpha \in \mathcal{E}_k$. Dado que $h \in X$, existe $F_h : X \to X$ una extensión continua de f_h. Escribamos $g = h \circ \alpha$ y definamos $F_g : X \to X$ como

$$F_g(x) = \begin{cases} f_g(x) & \text{si } x \in I(X), \\ F_h(x) & \text{si } x \in X'. \end{cases}$$

Dado que el soporte de φ es finito, tenemos que h y g difieren en una cantidad finita de puntos. Además, por la definición de f_h (véase la Definición 4.1.4), tenemos que f_h y f_g también difieren en una cantidad finita de puntos. Esto implica también que

$$\{x \in X : F_g(x) \neq F_h(x)\} \subseteq I(X) \text{ es finito.}$$

De lo anterior, concluimos que F_g es una función continua. Por lo tanto, $g = h \circ \alpha \in \mathcal{E}_k$. $\square$

El hecho de que la familia $\mathcal{E}_k$ sea invariante bajo cambios finitos garantiza que $\mathcal{E}_k$ es infinita. No obstante, esta tiene la mayor cardinalidad posible, es decir, $2^{\aleph_0}$.

Teorema 4.2.2. *Para cada $k \geq 1$, la familia $\mathcal{E}_k$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.4 tenemos que $\mathcal{OD}(\omega^k + 1)$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. Ahora notemos que la función $f \mapsto e_f$ es inyectiva. Así, concluimos que $\mathcal{E}_k$ también tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. $\square$

A continuación, probaremos que $\mathcal{E}_k$ es un subconjunto denso de $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.

Proposición 4.2.3. *Para cada $k \geq 1$, la familia $\mathcal{E}_k$ es densa en $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.*

Demostración. Sea $a : \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ inyectiva con $\text{Dom}(a)$ finito. Mostraremos que $N_a \cap \mathcal{E}_k \neq \emptyset$.

Sea $h \in \mathcal{E}_k$. Consideremos $B = \text{Dom}(a) \cup h^{-1}[\text{Im}(a)]$ y definamos $\sigma : B \to B$ dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} h^{-1}(a(t)) & \text{si } t \in \text{Dom}(a), \\ j(t) & \text{si } t \notin \text{Dom}(a), \end{cases}$$

donde $j : B\backslash\text{Dom}(a) \to B\backslash h^{-1}[\text{Im}(a)]$ es una función biyectiva arbitraria pero fija. Notemos que σ es biyectiva y además,

$$a(t) = h(\sigma(t)) \text{ para cada } t \in \text{Dom}(a).$$

Para terminar, consideremos $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^k$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{si } t \in B, \\ t & \text{si } t \notin B. \end{cases}$$

Como B es finito, tenemos que el soporte de α es finito. Por lo tanto, $h \circ \alpha \in \mathcal{E}_k$ debido a la Proposición 4.2.1. Además, es claro que $h \circ \alpha \in N_a$. De lo anterior, concluimos que $N_a \cap \mathcal{E}_k \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_k$ es denso. $\square$

Si bien $\mathcal{E}_k$ es denso en $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$, cuando $k > 1$ dicho conjunto es pequeño topológicamente, en el sentido de que $\mathcal{E}_k$ es un conjunto magro.

Teorema 4.2.4. *Para cada $k \geq 2$, $\mathcal{E}_k$ es un subconjunto magro de $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.*

Demostración. Por comodidad, denotaremos con $\overline{m}$ la sucesión constante m de longitud $k-1$, es decir,

$$\overline{m} = (m, m, \ldots, m) \in \mathbb{N}^{k-1}.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, definamos

$$V_n^m = \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : |h^{-1}[h[\{\overline{0}\} \times \mathbb{N}] + 1] \cap \{\overline{m}\} \times \mathbb{N}| > n\}.$$

Veamos que V_n^m es abierto denso para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero demostraremos que V_n^m es abierto. En efecto, sea $h \in V_n^m$, es decir,

$$\left| h^{-1}[h[\{\overline{0}\} \times \mathbb{N}] + 1] \cap \{\overline{m}\} \times \mathbb{N} \right| > n.$$

Por lo tanto, existen números naturales $s_0, \ldots, s_n$ todos distintos, tales que

$$h^{-1}(h(\overline{0}^\frown s_i) + 1) \in \{\overline{m}\} \times \mathbb{N} \text{ para cada } 0 \leq i \leq n.$$

Definamos $a : \text{Dom}(a) \to \mathbb{N}$ dada por $a(t) = h(t)$ para cada $t \in \text{Dom}(a)$ y

$$\text{Dom}(a) = B \cup h^{-1}[h[B] + 1], \text{ donde } B = \{\overline{0}^\frown s_i : i = 0, \ldots, n\}.$$

Claramente $h \in N_a$, y además, $N_a \subseteq V_n^m$.

Ahora mostraremos que V_n^m es denso. Sea $a : \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ una función inyectiva con $\text{Dom}(a)$ finito. Como $\text{Dom}(a)$ es finito, existen números naturales $s_0, \ldots, s_n$ todos distintos, tales que

$$\overline{0}\widehat{\ }s_i,\ \overline{m}\widehat{\ }s_i \notin \text{Dom}(a) \text{ para cada } i = 0, \ldots, n.$$

Tomemos $h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ tal que:

(3) $h(t) = a(t)$ para cada $t \in \text{Dom}(a)$,

(3) $h(\overline{0}\widehat{\ }s_i) = L + 2i$,

(3) $h(\overline{m}\widehat{\ }s_i) = h(\overline{0}\widehat{\ }s_i) + 1$,

donde $L = \text{máx}\{a(t) + 1 : t \in \text{Dom}(a)\}$. De este modo, por la tercera condición tenemos que

$$h^{-1}(h(\overline{0}\widehat{\ }s_i) + 1) = \overline{m}\widehat{\ }s_i \text{ para cada } i = 0, \ldots, n.$$

Luego $h \in V_n^m \cap N_a$. Por lo tanto, V_n^m es denso en $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$.

Ahora consideremos $U_n = V_n^0 \cap V_n^1$. Claramente U_n es abierto denso. Definamos

$$U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Afirmamos que $U \subseteq (\mathcal{E}_k)^c$. En efecto, sea $h \in U$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1\}$ tenemos que

$$\left| h^{-1}[h[\{\overline{0}\} \times \mathbb{N}] + 1] \cap \{\overline{m}\} \times \mathbb{N} \right| > n. \tag{4.1}$$

La condición (4.1) en términos de la función f_h (ver Definición 4.1.4) es equivalente a lo siguiente: Para cada $n \in \mathbb{N}$,

- existen $\{u_0, \ldots, u_n\}, \{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{N}$, tales que

$$f_h(d_{s_i}) = d_{t_i}, \text{ donde } s_i = \overline{0}\widehat{\ }u_i \text{ y } t_i = \overline{0}\widehat{\ }v_i \text{ para cada } i = 0, \ldots, n, \text{ y}$$

- existen $\{u'_0, \ldots, u'_n\}, \{v'_0, \ldots, v'_n\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$f_h(d_{s'_i}) = d_{t'_i} \text{ donde } s'_i = \overline{0}\widehat{\ }u'_i \text{ y } t'_i = \overline{1}\widehat{\ }t'_i \text{ para todo } i = 0, \ldots, n.$$

Mostraremos que f_h no se puede extender continuamente sobre $\omega^k + 1$. En efecto, definamos $A = A_1 \cup A_2 \subseteq \mathbb{N}^k$, donde

$$A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{0}^\frown u_i : i = 0, \ldots, n\} \quad \text{y} \quad A_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{0}^\frown u_i' : i = 0, \ldots, n\}.$$

Notemos que A_1 y A_2 son conjuntos infinitos. Además, por la construcción de $\omega^k + 1$, tenemos que

$$(d_s)_{s \in A} \text{ converge a } d_{\overline{0}}.$$

Sin embargo, $(f_h(d_s))_{s \in A}$ no converge, ya que

$$(f_h(d_s))_{s \in A_1} \text{ converge a } d_{\overline{0}}, \quad \text{y} \quad (f_h(d_s))_{s \in A_2} \text{ converge a } d_{\overline{1}}.$$

De lo anterior concluimos que $h \notin \mathcal{E}_k$. Por lo tanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq (\mathcal{E}_k)^c,$$

luego $\mathcal{E}_2$ es magro. □

El teorema anterior establece que si $k \geq 2$, entonces $\mathcal{E}_k$ es magro, o de manera equivalente, $(\mathcal{E}_k)^c$ es comagro. En consecuencia, $(\mathcal{E}_k)^c$ es un subconjunto denso de $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$, puesto que $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es un espacio de Baire (polaco). De ello se deduce que $(\mathcal{E}_k)^c$ es infinito; sin embargo, aún resta determinar si es numerable o no. El siguiente resultado responde a esta cuestión.

Teorema 4.2.5. *Para cada $k \geq 2$, $(\mathcal{E}_k)^c$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Veamos que $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es un espacio perfecto, es decir, $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ no tiene puntos aislados.

Sea $h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ y $s : \text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ inyectiva con Dom(s) finito tal que $h \in N_s$. Veamos que

$$N_s \cap (B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \setminus \{h\}) \neq \emptyset.$$

Tomemos $\alpha \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}^k)$ tal que

$$\emptyset \neq \text{sop}(\alpha) \subseteq \mathbb{N}^k \setminus \text{Dom}(s).$$

Por lo tanto, $h \circ \alpha \in N_s$ y $h \neq h \circ \alpha$. Es decir,

$$h \circ \alpha \in N_s \cap (B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \setminus \{h\}).$$

Así, concluimos que $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ es perfecto.

Por el Teorema 4.2.4, tenemos que $(\mathcal{E}_k)^c$ es comagro. Finalmente, un comagro dentro de un espacio polaco perfecto debe tener tamaño $2^{\aleph_0}$ por la Proposición 1.2.9. Así, $(\mathcal{E}_k)^c$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$. $\square$

4.3. COMPLEJIDAD DE LA FAMILIA $\mathcal{E}_k$

Teorema 4.3.1. *Para cada $k \geq 1$, $\mathcal{E}_k$ es un subconjunto boreliano de $B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$. Más aún, $\mathcal{E}_k$ es $\mathbf{\Pi}^0_4$.*

Demostración. Fijemos $X = \omega^k + 1$ y sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de abierto-cerrados de X, la cual existe por la Proposición 1.1.14. A partir de la Proposición 4.1.5, tenemos que $h \in \mathcal{E}_k$ si, y solo si, f_h se puede extender continuamente a X. Así, junto con el Teorema 1.1.10, tenemos que

$$h \in \mathcal{E}_k \iff \forall n, m \in \mathbb{N}\big(U_n \cap U_m = \emptyset \to \overline{f_h^{-1}[U_n]}^X \cap \overline{f_h^{-1}[U_m]}^X = \emptyset\big). \tag{4.2}$$

Notemos que de la equivalencia (4.2), se tiene que

$$\mathcal{E}_k = \bigcap_{\substack{n,m \in \mathbb{N},\\ U_n \cap U_m = \emptyset}} A_{n,m}, \tag{4.3}$$

donde

$$A_{n,m} = \big\{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : \overline{f_h^{-1}[U_n]}^X \cap \overline{f_h^{-1}[U_m]}^X = \emptyset\big\}.$$

Por otro lado, es sencillo verificar que

$$\begin{aligned} h \notin A_{n,m} &\iff \exists z \in X\big(z \in \overline{f_h^{-1}[U_n]}^X \cap \overline{f_h^{-1}[U_m]}^X\big), \\ &\iff \exists z \in X\, \forall j \in \mathbb{N}\big(z \notin U_j \ \vee\ [U_j \cap f_h^{-1}[U_m] \neq \emptyset \ \wedge\ U_j \cap f_h^{-1}[U_n] \neq \emptyset]\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(A_{n,m})^c = \bigcup_{z \in X} \bigcap_{\substack{j \in \mathbb{N},\\ z \notin U_j}} B_j^n \cap B_j^m, \tag{4.4}$$

donde B_j^n está dado por

$$B_j^n = \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : U_j \cap f_h^{-1}[U_n] \neq \emptyset\}.$$

Afirmamos que B_j^n es un conjunto F_σ(es decir Σ_2^0) para cada $j, n \in \mathbb{N}$. En efecto, notemos que

$$B_j^n = \bigcup_{w \in U_j} \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : f_h(w) \in U_n\}.$$

Luego es suficiente con mostrar que $C_{w,n} = \{h \in B(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) : f_h(w) \in U_n\}$ es cerrado. Sea $h \notin C_{w,n}$, es decir, $f_h(w) \notin U_n$. Sean $s, t \in \mathbb{N}^k$ tal que $w = d_s$ y $f_h(w) = f_h(d_s) = d_t$.

Consideremos $a : \{s, t\} \to \mathbb{N}$ dada por $a(u) = h(u)$ para $u = s, t$. Afirmamos que

$$h \in N_a \subseteq (C_{w,n})^c.$$

Notemos que $h \in N_a$, y además, si $e \in N_a$, entonces, $e(s) = h(s)$ y $e(t) = h(t)$. Dado que $f_h(d_s) = d_t$, por definición de f_h se tiene que

$$h^{-1}(h(s) + 1) = t.$$

Por lo tanto, $h(t) = h(s) + 1$, así, $e(t) = e(s) + 1$. Ahora, por definición de f_e tenemos que

$$f_e(d_s) = d_t \in U_n.$$

Luego $e \in (C_{w,n})^c$.

Finalmente, de las ecuaciones (4.3) y (4.4), y del hecho de que B_j^n es $\mathbf{\Sigma}_2^0$, concluimos que $\mathcal{E}_k$ es $\mathbf{\Pi}_4^0$. $\square$

Por el teorema anterior, tenemos que en general $\mathcal{E}_k$ es $\mathbf{\Pi}_4^0$. Sin embargo, cuando $k = 1$ la complejidad disminuye, obteniendo así que $\mathcal{E}_1$ es abierto-cerrado. En realidad, $\mathcal{E}_1 = B(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Proposición 4.3.2. $\mathcal{E}_1 = B(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Demostración. Sea $h \in B(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Consideremos $f_h : I(\omega + 1) \to \omega + 1$ la función asociada a h. Afirmamos que f_h se puede extender continuamente a $\omega + 1$. En efecto, primero notemos que

$$\omega + 1 = \{d_{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_\infty\} = I(\omega + 1) \cup \{d_\infty\},$$

ahora definamos $F_h : \omega + 1 \to \omega + 1$ como

$$F_h(x) = \begin{cases} f_h(x) & \text{si } x \in I(\omega + 1), \\ d_\infty & \text{si } x = d_\infty. \end{cases}$$

Observemos que F_h es inyectiva, por lo tanto, $A = F_h[\{d_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}]$ es infinito. Además, por la topología de $\omega + 1$, tenemos que d_∞ es el único punto límite de A. De lo anterior, se concluye que F_h es continua. $\square$

Debido a la proposición anterior, en la que observamos que la complejidad de $\mathcal{E}_1$ se redujo de manera significativa, resulta natural plantear la siguiente pregunta.

Pregunta 4.3.3. *¿Es posible mejorar la cota de la complejidad de $\mathcal{E}_k$?*

5. CAOS DISTRIBUTIVO EN SISTEMAS DINÁMICOS NUMERABLES

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos se destacan unos tipos de sistemas a los cuales se les llama *caóticos*. Este concepto de caos alude a la impredecibilidad o a la complejidad de las órbitas de los puntos. En la literatura se han propuesto diversas nociones de caos, entre las más clásicas se encuentran el caos en el sentido de Devaney, Li-Yorke, Martelli y algunas medidas de caos como la entropía topológica.

No obstante, en el contexto numerable ningún sistema dinámico resulta ser caótico en los sentidos mencionados anteriormente. En efecto, un sistema es caótico en el sentido de Devaney si es transitivo y el conjunto de puntos periódicos es denso. Sin embargo, como se establece en la Proposición 2.1.5, ningún sistema dinámico numerable puede ser transitivo y, por lo tanto, tampoco puede ser caótico en este sentido. Esta falta de transitividad se debe a que, para cualquier punto con órbita densa, dicha órbita coincide con el conjunto de puntos aislados. Este hecho, además, implica que ningún sistema dinámico numerable pueda ser caótico en el sentido de Martelli. En cuanto a la entropía topológica, Bobok menciona en [7] que todo sistema dinámico numerable posee entropía nula, de modo que tampoco puede considerarse caótico desde esta perspectiva.

Por otra parte, una nueva noción de caos fue introducida por Schweizer y Smítal en 1994 en el artículo [10], la cual llamaron *caos distributivo*. En dicho trabajo, los autores usaron ideas de la teoría de los espacios métricos probabilísticos para desarrollar una nueva definición de caos. Posteriormente, este concepto fue extendido a cualquier espacio métrico compacto.

En este capítulo revisamos la noción de caos distributivo en sistemas dinámicos numerables presentada por Bobok. En este artículo, el autor establece una relación entre el caos distributivo y la estructura topológica del espacio de fase. Más precisamente, Bobok demuestra lo siguiente: sea X un espacio métrico compacto numerable, entonces

(1) Si $|X^{(2)}| \leq 1$, entonces cualquier sistema dinámico (X, f) no es distributivamente caótico.

(2) Si $|X^{(2)}| > 1$, entonces existe una métrica d compatible con la topología de X, y un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que (X, f) es distributivamente caotico.

En lo que sigue, presentamos con detalle la prueba correspondiente al inciso (1) del resultado de Bobok. En cuanto al inciso (2), consideramos que la demostración incluida en [7] se encuentra incompleta, por lo cual no incluimos resultados relacionados con esta parte.

No obstante, es pertinente señalar que, a partir de la construcción (del homeomorfismo f) realizada por Bobok en el inciso (2), fue posible realizar una adaptación que permitió probar que, para todo espacio métrico compacto numerable X, existe una función continua que admite una órbita densa, resultado que se presentó en el Capítulo 2 (ver Teorema 2.2.1).

5.1. PRELIMINARES

Fijado un espacio métrico compacto X, d una métrica compatible con la topología de X y una función $f \in \mathcal{C}(X, X)$. Definimos la función $\xi : X^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\begin{aligned} \xi(x, y, n, t) &:= \left|\{i \in \mathbb{N} : i < n \text{ y } \delta_{xy}(i) < t\}\right|, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)), \end{aligned}$$

donde $\delta_{xy}(i) = d(f^i(x), f^i(y))$ y $\chi_{[0,t)}$ es la función característica. Notemos que ξ depende tanto de la función f como de la métrica d, por lo cual deberíamos hacer referencia a f y d en la definición de ξ. Sin embargo, evitaremos mencionar f y d con el fin de mantener una notación más cómoda.

A partir de ξ definimos $\phi_{xy}^{(n)} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, la cual llamaremos *función de distribución* y está definida como

$$\phi_{xy}^{(n)}(t) = \frac{1}{n}\xi(x, y, n, t).$$

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de la definición de $\phi_{xy}^{(n)}$.

Proposición 5.1.1. *Sea X un espacio métrico compacto y $f \in \mathcal{C}(X, X)$. Para cada $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, la función $\phi_{xy}^{(n)}$ es creciente.*

Definimos ϕ_{xy} y $\phi_{xy}^{\star}$, funciones de *distribución inferior* y *distribución superior* respectivamente, las cuales están dadas por

$$\phi_{xy}(t) = \liminf_{n} \phi_{xy}^{(n)}(t), \text{ y } \phi_{xy}^{\star}(t) = \limsup_{n} \phi_{xy}^{(n)}(t).$$

Es bien conocido que el límite superior (e inferior) de funciones crecientes es una función creciente. Por lo tanto, las funciones ϕ_{xy} y $\phi^{\star}_{xy}$ son funciones crecientes. Lo anterior implica que ϕ_{xy} y $\phi^{\star}_{xy}$ son funciones integrables (Riemann integrables).

La *medida de caos distribucional* de (X, f) con respecto a la métrica d es el número

$$\mu(X, f, d) = \sup_{x,y \in X} \frac{1}{d_X} \int_0^{d_X} (\phi^{\star}_{xy}(t) - \phi_{xy}(t))dt,$$

donde d_X es el diámetro de X con respecto a la métrica d. Definimos también la *medida de caos* de (X, f) la cual está dada por

$$\mu(X, f) = \sup_{d} \mu(X, f, d) \in [0, 1],$$

donde el supremo es tomado sobre todas las métricas d que inducen la topología de X.

Definición 5.1.2. Un sistema dinámico (X, f) es *caótico* (*distributivamente caótico*) si $\mu(X, f) > 0$.

5.2. SISTEMAS DINÁMICOS NUMERABLES NO CAÓTICOS

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema, el cual hace parte de los resultados principales presentados por Bobok en [7].

Teorema 5.2.1. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Si $|X^{(2)}| \leq 1$, entonces (X, f) no es caótico para cada $f \in \mathcal{C}(X, X)$.*

Antes de dar una demostración del teorema anterior, presentaremos tres resultados técnicos que nos facilitarán la prueba.

Proposición 5.2.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y d una métrica compatible con la topología de X. Si $x, y \in$ Per(f), entonces $\phi_{xy} = \phi^{\star}_{xy}$.*

Demostración. Sea $t > 0$, mostraremos que $\phi_{xy}(t) = \phi^{\star}_{xy}(t)$, es decir, la sucesión $(\phi^{(n)}_{xy}(t))_n$ es convergente. Dado que x y y son puntos periódicos, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) = x$ y $f^m(y) = y$. Sea $r =$ mcm(n, m) (el mínimo común múltiplo), entonces $f^r(x) = x$ y $f^r(y) = y$. Notemos que

$$d(f^k(x), f^k(y)) = d(f^{k+r}(x), f^{k+r}(y)) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $\xi(x,y,k\cdot r,t) = k\cdot\xi(x,y,r,t)$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Definamos $D=\xi(x,y,r,t)$, y veamos que

$$\phi_{xy}^{(n)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)) \to \frac{D}{r} \text{ si } n\to\infty. \tag{5.1}$$

Notemos que para probar (5.1), es suficiente con mostrar que para cada $j<r$ se tiene que

$$\phi_{xy}^{(kr+j)}(t) = \frac{1}{kr+j}\sum_{i=0}^{kr+j-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)) \to \frac{D}{r} \text{ cuando } k\to\infty.$$

Sea $j<r$ fijo pero arbitrario y notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi_{xy}^{(kr+j)}(t) &= \frac{1}{kr+j}\sum_{i=0}^{kr+j-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)),\\
&= \frac{1}{kr+j}\left(\sum_{i=0}^{kr-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)) + \sum_{i=kr}^{kr+j-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i))\right),\\
&= \frac{1}{kr+j}\sum_{i=0}^{kr-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)) + \frac{1}{kr+j}\sum_{i=kr}^{kr+j-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)),\\
&= \frac{kD}{kr+j} + \frac{1}{kr+j}\sum_{i=kr}^{kr+j-1}\chi_{[0,t)}(\delta_{xy}(i)),\\
&\leq \frac{kD}{kr+j} + \frac{D}{kr+j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{kD}{kr+j} \leq \phi_{xy}^{(kr+j)}(t) \leq \frac{kD}{kr+j} + \frac{D}{kr+j}.$$

Así, cuando $k\to\infty$, tenemos que $\phi_{xy}^{(kr+j)}(t)$ converge a D/r, y dado que $j<r$ fue arbitrario. Concluimos que la sucesión $(\phi_{xy}^{(n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a D/r. $\square$

Proposición 5.2.3. *Sean (X,f) un sistema dinámico, d una métrica compatible con la topología de X y $x\in X$. Si $\omega(x,f)$ es finito, entonces existe $p\in\text{Per}(f)$ tal que $\phi_{xp}(t)=1$ para cada $t>0$.*

Demostración. Sea $t>0$ y $z\in\omega(x,f)$. Por el Lema 1.4.6, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{m+i}(x), f^i(z)) < t \text{ para todo } i\in\mathbb{N}.$$

Dado que $\omega(x,f) = \mathcal{O}_f(z)$ y z es un punto periódico, existe $p \in \omega(x,f)$ tal que $f^m(p) = z$. Por lo tanto,

$$d(f^{m+i}(x), f^{m+i}(p)) < t,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. De lo anterior, si $n \geq m$ entonces

$$\frac{1}{n}(n-m) \leq \frac{1}{n}\xi(x,p,n,t).$$

Luego $\phi_{xy}(t) = 1$. $\square$

Lema 5.2.4. *Sean (X,f) un sistema dinámico, d una métrica compatible con la topología de X y $x, y \in X$. Si existen $p, q \in$ Per(f) tales que $\phi_{xp}(t) = 1$ y $\phi_{yq}(t) = 1$ para cada $t > 0$, entonces*

$$\int_0^L (\phi^{\star}_{xy}(t) - \phi_{xy}(t))dt = 0,$$

donde $L =$ Diám(X).

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\phi_{xp}(t) = 1$ para cada $t > 0$, en particular $\phi_{xy}(\epsilon) = 1$. Así,

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\Big|\{i < n : \delta_{xp}(i) < \epsilon\}\Big|\right) = \lim_n \left(\frac{1}{n}\Big|\{i < n : \delta_{xp}(i) \geq \epsilon\}\Big|\right) = 0.$$

Por lo tanto, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big|\{i < k : \delta_{xp}(i) \geq \epsilon\}\Big| < k \cdot \epsilon \text{ para cada } k \geq k_1.$$

Análogamente se garantiza la existencia de $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\{i < k : \delta_{yq}(i) \geq \epsilon\}| < k \cdot \epsilon \text{ si } k \geq k_2.$$

Sean $K = \max\{k_1, k_2\}$ y $k \geq K$. Definamos

$$A = \{i < k : \delta_{xy}(i) < t\} \cup \{i < k : \delta_{xp}(i) \geq \epsilon\} \cup \{i < k : \delta_{yq}(i) \geq \epsilon\},$$

y

$$B = \{i < k : \delta_{pq}(i) < t + 2\epsilon\} \cup \{i < k : \delta_{xp}(i) \geq \epsilon\} \cup \{i < k : \delta_{yq}(i) \geq \epsilon\}.$$

Veamos que $\{i < k : \delta_{pq}(i) < t - 2\epsilon\} \subseteq A$. En efecto, supongamos por absurdo que no es así, entonces existe $i < k$ tal que $\delta_{pq}(i) < t - 2\epsilon$ pero $i \notin A$, es decir, $\delta_{xy}(i) \geq t$, $\delta_{xp}(i) < \epsilon$

y $\delta_{yq}(i) < \epsilon$, por lo tanto

$$\begin{aligned} t \leq \delta_{xy}(i) &\leq \delta_{xp}(i) + \delta_{pq}(i) + \delta_{yq}(i), \\ &< (t - 2\epsilon) + \epsilon + \epsilon = t. \end{aligned}$$

Lo cual es absurdo, de este modo, concluimos que $\{i < k : \delta_{pq}(i) < t - 2\epsilon\} \subseteq A$. Por un argumento similar al anterior, podemos concluir también que $\{i < k : \delta_{xy}(i) < t\} \subseteq B$.

Por otro lado, dado que

$$\xi(p, q, k, t - 2\epsilon) = |\{i < k : \delta_{pq}(i) < t - 2\epsilon\}| \leq |A| \leq \xi(x, y, k, t) + 2k\epsilon$$

y

$$\xi(x, y, k, t) = |\{i < k : \delta_{xy}(i) < t\}| \leq |B| \leq \xi(p, q, k, t + 2\epsilon) + 2k\epsilon,$$

tenemos que

$$\frac{1}{k}\xi(p, q, k, t - 2\epsilon) - 2\epsilon \leq \frac{1}{k}\xi(x, y, k, t) \leq \frac{1}{k}\xi(p, q, k, t + 2\epsilon) + 2\epsilon.$$

Tomando $\liminf$ en la primera desigualdad y $\limsup$ en la segunda, obtenemos

$$\phi_{pq}(t - 2\epsilon) - 2\epsilon \leq \phi_{xy}(t) \leq \phi^\star_{xy}(t) \leq \phi^\star_{pq}(t + 2\epsilon) + 2\epsilon,$$

esto implica que $\phi^\star_{xy}(t) - \phi_{xy}(t) \leq \phi^\star_{pq}(t + 2\epsilon) - \phi_{pq}(t - 2\epsilon) + 4\epsilon$, luego

$$\begin{aligned} \int_0^L (\phi^\star_{xy}(t) - \phi_{xy}(t))dt &\leq \int_0^L \left(\phi^\star_{pq}(t + 2\epsilon) - \phi_{pq}(t - 2\epsilon) + 4\epsilon\right) dt, \\ &= 4L\epsilon + \int_{2\epsilon}^{L+2\epsilon} \phi^\star_{pq}(t)dt - \int_{-2\epsilon}^{L-2\epsilon} \phi_{pq}(t)dt, \\ &= 4L\epsilon + \int_{L-2\epsilon}^{L+2\epsilon} \phi^\star_{pq}(t)dt + \int_{2\epsilon}^{L-2\epsilon} (\phi^\star_{pq}(t) - \phi_{pq}(t))dt - \int_0^{2\epsilon} \phi_{pq}(t)dt. \end{aligned}$$

Por la Proposición, 5.2.2 tenemos que $\phi^\star_{pq}(t) - \phi_{pq}(t) = 0$ para cada $t > 0$, además, $\phi^\star_{pq}(t), \phi_{pq}(t) \leq 1$, por lo tanto,

$$\left| \int_0^L (\phi^\star_{xy}(t) - \phi_{xy}(t))dt \right| \leq 4L\epsilon + 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon(L + 1).$$

Si tomamos $\epsilon \to 0$, concluimos lo deseado, es decir,

$$\int_0^L \phi^\star_{xy}(t) - \phi_{xy}(t)dt = 0.$$

$\square$

Ya tenemos todo lo necesario para demostrar el Teorema 5.2.1.

Demostración. (Teorema 5.2.1) Sea d una métrica sobre X que genere la misma topología de X. Veamos que $\mu(X, f, d) = 0$. En virtud del Lema 5.2.4, mostraremos que para cada punto $x \in X$, existe $p \in$ Per(f) tal que $\phi_{xp}(t) = 1$ para todo $t > 0$. Sean $t > 0$ y $x \in X$.

Caso 1: Si $\omega(x, f)$ es finito, por la Proposición 5.2.3 existe $p \in$ Per(f) con $\phi_{xp}(t) = 1$.

Caso 2: Si $\omega(x, f)$ es infinito, entonces la órbita de x es infinita, así, por el Lema 1.4.5, tenemos que $\omega(x, f) \subseteq X'$. Dado que $\omega(x, f)$ es infinito y X es compacto, $\omega(x, f)$ tiene al menos un punto de acumulación. Pero $|X^{(2)}| \leq 1$, entonces $\omega(x, f)$ tiene exactamente un punto límite, por lo tanto, $\omega(x, f)$ es homeomorfo a $\omega + 1$.

Sea $p \in \omega(x, f) \cap X^{(2)} = \{p\}$, veamos que $f(p) = p$. Primero notemos que cualquier punto $z \in \omega(x, f) \setminus \{p\}$ no puede ser periódico. En efecto, si z fuera periódico, por el Lema 1.4.9, z debería ser un punto límite de $\omega(x, f)$. Sin embargo, el único punto límite de $\omega(x, f)$ es p, lo cual es una contradicción.

Consideremos ahora el sistema dinámico (Y, g) donde $Y = \omega(x, f)$ y $g = f|_{\omega(x,f)}$. Como ningún punto de $Y \setminus \{p\}$ es periódico, aplicando el Lema 1.4.8, se concluye que $g(p) = p$, y por tanto $f(p) = p$.

Afirmamos que $\phi_{xp}(t) = 1$. En efecto, supongamos por contradicción que $\phi_{xp}(t) < 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
0 &< 1 - \liminf \frac{1}{n}\xi(x,p,n,t) \\
&= \limsup \left(1 - \frac{1}{n}\xi(x,p,n,t)\right) \\
&= \limsup \frac{1}{n}\Big|\big\{i < n : d(f^i(x), f^i(p)) \geq t\big\}\Big| \\
&= \limsup \frac{1}{n}\Big|\big\{i < n : d(f^i(x), p) \geq t\big\}\Big| \\
&= \limsup \frac{1}{n}\Big|\big\{i < n : f^i(x) \in F\big\}\Big|,
\end{aligned}$$

donde $F = (X \setminus B_t(p)) \cap \overline{\mathcal{O}_f(x)}$ y $B_t(p)$ es la bola con centro en p y radio t.

Por el Lema 1.4.12(1), existe una medida f-invariante μ tal que $\mu(F) > 0$. Además, observemos que

$$F = (X \setminus B_t(p)) \cap (\mathcal{O}_f(x) \cup \omega(x,f)).$$

Por lo tanto, para todo $z \in F$, se tiene que $\mu(\{z\}) = 0$. En efecto, si $\mu(\{z\}) > 0$, entonces, por el Lema 1.4.12(2), se deduce que z debe ser un punto periódico. Sin embargo, esto no es posible, ya que $z \in \mathcal{O}_f(x)$ o bien $z \in \omega(x,f) \setminus \{p\}$, y en ambos casos z no puede ser periódico.

Por otro lado, como F es numerable se tiene que

$$\mu(F) = \sum_{z \in F} \mu(\{z\}).$$

Pero, como ya se observó, $\mu(\{z\}) = 0$ para todo $z \in F$, lo que implica que $\mu(F) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $\mu(F) > 0$.

De lo anterior, se concluye que $\phi_{xp}(t) = 1$. $\square$

Tal como se mencionó al inicio de este capítulo, para cualquier espacio métrico compacto numerable X con $|X^{(2)}| > 1$, Bobok construye un homeomorfismo f y una métrica d, tal que $\mu(X,f,d) = 1$ (Th. 3.1 [7]). Sin embargo, no logramos encontrar una relación entre caos y órbitas densas.

Pregunta 5.2.5. *¿Existe $f \in \mathcal{OD}(2\omega^2 + 1)$ tal que $(2\omega^2 + 1, f)$ sea distributivamente caótico?*

BIBLIOGRAFÍA

Barwell, Andrew. «ω-limits sets of discrete dynamical systems». Tesis doct. University of Birmingham, 2010 (vid. pág. 40).

Bobok, Jozef. «Chaos in countable dynamical system». En: *Topology and its Applications* 126.1 (2002), págs. 207-216 (vid. págs. 12, 15, 42, 48, 118-120, 125).

Boca, Florin P. «The distribution of rational numbers and ergodic theory». En: *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 62.1 (2017), págs. 41-62 (vid. pág. 106).

Bonanno, Claudio y Stefano Isola. «Orderings of the rationals and dynamical systems». En: *Colloquium Mathematicae* 116.2 (2009), págs. 165-189 (vid. pág. 106).

Bruin, Henk y Benjamin Vejnar. «Classification of one dimensional dynamical systems by countable structures». En: *The Journal of Symbolic Logic* 88.2 (2023), 562–578 (vid. págs. 11, 64).

Calkin, Neil y Herbert Wilf. «Recounting the Rationals». En: *The American Mathematical Monthly* 107.4 (2000), págs. 360-363 (vid. pág. 106).

Camerlo, Riccardo y Su Gao. «The Completeness of the Isomorphism Relation for Countable Boolean Algebras». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 353.2 (2001), págs. 491-518 (vid. págs. 11, 64).

Deka, Konrad et al. *Bowen's Problem 32 and the conjugacy problem for systems with specification*. 2025. arXiv: `2501.02723 [math.LO]` (vid. pág. 11).

Engelking, Ryszard. *General Topology*. Vol. 6. Sigma series in pure mathematics. Heldermann, 1989 (vid. págs. 17, 19).

Gao, Su. *Invariant Descriptive Set Theory*. Chapman y Hall/CRC, 2008 (vid. págs. 30, 32-34, 64, 101).

García, Salvador, Yackeline Rodríguez y Carlos Uzcátegui. «Cardinality of the Ellis semigroup on compact metric countable spaces». En: *Semigroup Forum* 97 (2018), 162–176 (vid. págs. 8, 9, 12, 13, 59).

Hjorth, Greg. *Classification and Orbit Equivalence Relations*. Vol. 75. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000 (vid. págs. 11, 64).

Iommi, Godofredo y Mario Ponce. «Odometers, Backward Continued Fractions, and Counting Rationals». En: *The American Mathematical Monthly* 132.4 (2025), págs. 333-349 (vid. pág. 106).

Kaya, Burak. «The complexity of topological conjugacy of pointed Cantor minimal systems». En: *Archive for Mathematical Logic* 56.1-2 (2017), págs. 215-235 (vid. págs. 12, 64, 93, 95).

Kechris, Alexander. *Classical descriptive set theory*. Springer New York, NY, 1995 (vid. págs. 19, 25-29).

King, Jefferson y Héctor Méndez. *Sistemas dinámicos discretos*. Editorial UNAM, 2014 (vid. págs. 35, 36).

Li, Ruiwen y Bo Peng. *Isomorphism of pointed minimal systems is not classifiable by countable structures*. Preprint. 2024. arXiv: `2401.11310 [math.LO]` (vid. págs. 11, 83, 95).

Mazurkiewicz, Stefan y Waclaw Sierpiński. «Contribution à la topologie des ensembles dénombrables». En: *Fundamenta Mathematicae* 1.1 (1920), págs. 17-27 (vid. pág. 22).

Perez, Jhon. «El semigrupo de Ellis de un sistema dinámico sobre un espacio métrico compacto numerable». Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2023 (vid. pág. 13).

Schweizer, Berthold y Jaroslav Smítal. «Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 344 (1994), págs. 737-754 (vid. págs. 15, 118).

Vejnar, Benjamin. *Classification complexity of chaotic systems*. 2025. arXiv: 2401.16983 [math.DS] (vid. pág. 11).

Viana, Marcelo y Krerley Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016 (vid. pág. 42).