

**CÁLCULO ITERATIVO DE HOLOGRAMAS DE
FOURIER FRACCIONARIOS PARA EL DISEÑO
DE ELEMENTOS ÓPTICOS DIFRACTIVOS**

WILLIAM SALAZAR GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2011

CÁLCULO ITERATIVO DE HOLOGRAMAS DE FOURIER FRACCIONARIOS PARA EL DISEÑO DE ELEMENTOS ÓPTICOS DIFRACTIVOS

Trabajo de Grado para optar al título de Físico:

WILLIAM SALAZAR GONZÁLEZ

Director:

Dr. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2011

Cuán grande riqueza es, aún entre los pobres, el ser hijo de buen padre.

Dedicado a mi padre Gustavo Salazar A.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias principalmente a mi director de proyecto Rafael Torres por guíarme durante toda la ejecución de la investigación pues su valioso aporte, académico y personal, ayudó a aclarar mis ideas sobre la holografía y la óptica en general, dándome la motivación para trabajar con empeño y dedicación durante todo este tiempo.

También quiero agradecer al físico Alberto Patiño, quien me brindó de forma muy generosa su valiosa colaboración en un momento en el que la investigación se encontraba estancada, sin duda lo considero una gran persona y un gran profesional.

Finalmente quiero agradecer a todos los profesores de la escuela de física quienes me formaron como físico y como persona, sin duda sus invaluable enseñanzas me hacen sentir un gran orgullo, el cual es demasiado emotivo para describir. También agradezco a toda mi familia, en especial a mi padre a quien dedico este triunfo; a mi tío Mato por su ayuda económica, a mi novia Silvia Juliana y su familia, a mis amigos Luis Gabriel, Edgar José (Q.E.P.D), Alejo..., a mis compañeros de carrera y a todas esas valiosas personas que han contribuido de alguna forma a conseguir este logro.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	17
2. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER	20
2.1. Transformación de Fourier estándar	20
2.2. Transformación de Fourier fraccionaria	21
2.2.1. Definición y Propiedades	22
2.2.2. Cálculo de la Transformación de Fourier Fraccionaria Rápida	24
3. HOLOGRAMAS GENERADOS POR COMPUTADORA	28
3.1. Parámetros de medida	29
4. CÁLCULO DE CGH's CUANTIZADOS MEDIANTE EL MÉTODO DE WYROWSKI	30
4.1. Generalidades	30
4.2. Cálculo del holograma análogo	32
4.2.1. Uso Exclusivo del Grado de Libertad en la Fase	33
4.2.2. Uso de los Grados de Libertad en la Amplitud y en la Fase	36

4.3. Holograma cuantizado: Cuantización de la Estructura Análoga	38
4.3.1. Problema de Estancamiento	40
4.3.2. Método para Sobrellevar el Estancamiento	41
4.4. Ruido de <i>Speckle</i>	44
5. CÁLCULO DE CGH's ADAPTADOS A UN NUEVO COEFICIENTE DE	
CONVERGENCIA	46
5.1. CGH's análogos	47
5.1.1. CGH's análogos con el uso de un sólo un grado de libertad	47
5.1.2. CGH's análogos con el uso de ambos grados de libertad	48
5.2. CGH's cuantizados	50
5.2.1. Cuantización directa	50
5.2.2. Cuantización directa implementada al IFTA	51
5.2.3. Cuantización progresiva implementada al IFTA	51
5.3. CGH's para Señales <i>On-Axis</i> y/o <i>Off-Axis</i>	55
5.4. Coeficiente Parseval y Coeficiente Wyrowski	56
5.5. Otros Aspectos sobre el Algoritmo para el Cálculo de CGH's	61
6. CÁLCULO DE HOLOGRAMAS NUMÉRICOS POR TRANSFORMA-	
CIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA ADAPTADOS AL COEFICIENTE	
PARSEVAL	63
6.1. Problema de Estancamiento en el Cálculo de Hologramas Numéricos por	
Transformación de Fourier Fraccionaria	64

6.2. Algoritmo Para el Cálculo de Hogramas Numéricos de Fourier Fraccionarios	66
7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	71
BIBLIOGRAFÍA	74
A. CÓDIGO PARA CÁLCULO DE CGH'S DE FOURIER	77

Índice de figuras

2.1.	(a)Función rectángulo $\text{rect}(x)$. La magnitud de su transformada de Fourier fraccionaria de orden (b) $a=0.25$, (c) $a=0.50$ y (d) $a=1$	24
4.1.	ilustración de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$, la amplitud compleja $g(x)$ está dada dentro del campo total y la señal $f(x)$ dentro de la ventana de señal W	32
4.2.	Diagrama del algoritmo iterativo de Fourier (IFTA)	34
4.3.	Ilustración del estancamiento del proceso iterativo: (a)distribución inicial $ g_0(x) ^2$, distribuciones resultantes (b) $ \bar{g}_{20}(x) ^2$ y (c) $ \bar{g}_{1000}(x) ^2$	35
4.4.	Patrón de difracción de un holograma análogo	37
4.5.	Ilustración del efecto del operador cuantización para $Z=3$. Las líneas punteadas indican los umbrales	39
4.6.	Ilustración del proceso de estancamiento: estancamiento ocurre si los valores de $G_{j+1}(u)$ [partes sombreadas en (b)] no cambian lo suficiente para cruzar los niveles umbrales (líneas punteadas).	41
4.7.	Iustración del efecto del operador $Q3^P$	43

4.8. Ilustración de introducción del paso apropiado del operador de cuantización Q_3 durante la iteración desde (a)estructura analógica hasta (d)la distribución cuantizada.	43
4.9. Holograma cuantizado en 3 niveles e intensidad de luz difractada calculada	44
4.10. patrón de speckle	45
5.1. ilustración de (a) $f(x)$, (b) $F(u)$ análogo y (c)su patrón de difracción.	46
5.2. Ilustración del estancamiento del proceso iterativo: (a)distribución inicial $ g_0(x) ^2$, distribuciones resultantes (b) $ \bar{g}_{20}(x) ^2$ y (c) $ \bar{g}_{1000}(x) ^2$	48
5.3. gráfica del error en hologramas análogos	48
5.4. Evolución de la convergencia cuando una combinación de los dos grados de libertad son utilizados	49
5.5. (a) holograma; (b) módulo de patrón de Fraunhofer calculado; (c) Eficiencia de difracción vs. iteración	50
5.6. Patrón de difracción de holograma cuantizado directamente	51
5.7. Ilustración del efecto del operador de cuantización progresiva en una función senoidal para los $p=1, 4, 8$ y 10	52
5.8. (a)Holograma cuantizado en 2 niveles e (b)intensidad de luz difractada calculada	53
5.9. (a)Holograma cuantizado en 4 niveles e (b)intensidad de luz difractada calculada	54
5.10. Eficiencia de difracción Vs. Nivel de cuantización	55
5.11. (a)Señal <i>on-axis</i> y (b)señal <i>off-axis</i>	56
5.12. difracción de hologramas calculados con: (a)coeficiente wirowski y (b)coeficiente Parseval	58
5.13. Eficiencia de difracción en hologramas análogos calculados con ambos coeficientes	59

5.14. Medida de $10 * \lg(SNR)$ para ambos coeficientes	59
5.15. Medida de la entropía en el patrón de difracción calculados con ambos coeficientes	60
5.16. Medida de la entropía en el patrón de difracción calculados con ambos coeficientes	60
5.17. Gráfica de error contra iteraciones	62
6.1. (a)ilustración del holograma H y su patrón de difracción en el plano P_α (b)holograma H y su otro patrón de difracción en el plano P_β . W_1 y W_2 ventanas de señal respectivas	64
6.2. problema de estancamiento con la disminución del orden de la transformación. (a) $a=1$, (b) $a=0.9$, (c) $a=0.8$, (d) $a=0.7$, (e) $a=0.6$, (f) $a=0.5$, (g) $a=0.1$	65
6.3. Diagrama del algoritmo iterativo de la transformación de Fourier fraccionaria	68
6.4. patrones de difracción de holograma numérico de Fourier fraccionarios con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$	69
6.5. Eficiencias de difracción con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$	69

Índice de cuadros

2.1. Propiedades importantes de la TF	21
2.2. Propiedades importantes de la TFFr	23
4.1. Eficiencia de difracción y SNR para algunos niveles de cuantización	44
5.1. Eficiencia de difracción y SNR para algunos niveles de cuantización bajo el coeficiente Parseval.	54
5.2. SNR y eficiencia de difracción en señal <i>on-axis</i> y <i>offaxis</i>	56
5.3. SNR y eficiencia de difracción en ambos coeficientes	58
5.4. SNR y eficiencia de difracción con uso del nuevo criterio	61
6.1. Orden de la transformación y eficiencia de difracción	66
6.2. Eficiencia de difracción teórica y SNR para el holograma calculado	70
7.1. Eficiencia de difracción teórica y eficiencia de difracción calculada	73

Notación

Para efectos prácticos se usará la siguiente notación en este trabajo:

IFTA: algoritmo iterativo de la transformación de Fourier.

IFFTA: algoritmo iterativo de la transformación de Fourier fraccionaria.

CGH's: hologramas generados por computador.

TFFr: transformación de Fourier fraccionaria.

SNR: relación señal ruido.

ED: eficiencia de difracción.

***fft*:** fast Fourier transform.

TÍTULO: CÁLCULO ITERATIVO DE HOLOGRAMAS DE FOURIER FRACCIONARIOS PARA EL DISEÑO DE ELEMENTOS ÓPTICOS DIFRACTIVOS*.

AUTOR: Salazar González, William**

PALABRAS CLAVES: CGH'S, Hologramas Fresnel, holografía numérica, Fourier fraccionaria.

RESUMEN: En el cálculo de hologramas generados por computador o CGH's siempre se dan problemas de convergencia debido a las restricciones impuestas al elemento óptico difractivo, estas restricciones son las de modulo constante a la unidad para que sea posible el paso libre de energía y la cuantización de la fase para hacer posible la materialización. El camino para realizar estos cálculos con alta eficiencia de difracción es por medio de algoritmos iterativos como el IFTA con la implementación a éste de un coeficiente de convergencia apropiado.

En esta tesis se calculan hologramas numéricos de Fourier de sólo fase a través del IFTA implementando un coeficiente de convergencia basado en el principio de Parseval, el cual se desarrolla en el capítulo 4. Posteriormente se analizan los problemas de estancamiento durante el proceso iterativo. Finalmente bajo el mismo criterio se calculan hologramas numéricos de Fourier fraccionarios de sólo fase con un IFTA basado en el operador de transformación Fourier fraccionaria.

*Proyecto de Grado

**Facultad de ciencias. Escuela de Física. Rafael torres Amarís (director)

TITLE: ITERATIVE CALCULATION OF FOURIER HOLOGRAMS FOR DESIGNING DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS*.

AUTHOR: Salazar González, William.**

KEY WORDS: CGH'S, Fresnel holograms, numerical holography, Fractional Fourier .

DESCRIPTION: In calculation of computer generated holograms has always existed convergence problems because calculations produces approximations of the hologram, one of the causes of calculations produces approximations are the constraints imposes to the optical diffractive element, these one are keeping constant module in one, because then no energy is absorbed and the other constraints the phase must be quantized for practical reasons. The way for achieving this calculation is for the use of iterative algorithms called Iterative Fourier Transform Algorithm or IFTA that allows calculation of holograms with high efficiency diffraction, this calculation is divided in three steps: utilization as well of the Phase freedom as of the phase and amplitude freedom in calculation of analog structure and after quantization of analog structure. Although there are a lot of information about calculation of Fourier holograms, information about calculation of fractional holograms, isn't enough; the fractional holograms has the property of diffracting in the Fresnel plane several patterns. This work consist in calculate both kinds of holograms and is propose a coefficient of convergence.

*Senior thesis project

**Facultad de ciencias. Escuela de Física. Rafael torres Amarís (director)

1

INTRODUCCIÓN

Al principio, se estableció que un holograma era una grabación tangible de un patrón de intensidad que se formaba cuando una onda difractada por un objeto interfería con una onda coherente de referencia. Los primeros hologramas fueron formados por Gabor [1] en investigaciones para reducir aberraciones en microscopios de electrones. Estos hologramas fueron utilizados en experimentos ópticos para demostrar el conocido método de construcción de imágenes en dos pasos, el registro del patrón de difracción y la exposición de un haz luminoso a través del registro fotográfico, una vez revelado. Desde ese momento se hicieron numerosas investigaciones que arrojaron más formas de obtener hologramas, una gran cantidad de aplicaciones y un buen número de publicaciones internacionales[12].

En la época de los 60's surgió la alternativa de crear hologramas calculados a través de la computadora, conocidos en el ámbito científico como hologramas numéricos o hologramas generados por computadora CGH's (Computer Genarated Holography) [3]. El proceso se basa en definir un objeto determinado y mediante un proceso de difracción inversa se calcula la amplitud compleja, que se graba posteriormente en forma codificada en el holograma mediante algún proceso de grabado. Algunos algoritmos para el cálculo de estos hologramas son el IFTA [4], el método IFT sugerido por Gerchberg and Saxton [5] y el método NLS [6]. Estos hologramas han avanzado de la mano del mejoramiento de las capacidades de los computadores y de las técnicas para calcularlos además de generar un amplio campo de estudio en la óptica.

En 1980 Victor Namias definió la transformación de Fourier Fraccionario (TFFr), como una herramienta para solucionar ecuaciones diferenciales aplicada al oscilador armónico mecánico cuántico [7]. Esta herramienta dio un aporte sumamente importante al estudio de la holografía, pues permitió el cálculo de hologramas generados por computador capaces de generar múltiples patrones de difracción en el plano de Fresnel. Estos hologramas son conocidos como hologramas de Fourier fraccionarios [8] y son objeto de investigación actualmente.

La gran importancia científica de los hologramas de Fourier fraccionarios radica en que generan un gran motor de investigación. Los estudios realizados en los antiguos CGH's se hacen necesarios en los nuevos hologramas, esto sumado a las investigaciones actuales y a las aplicaciones tecnológicas que se generen. Se destacan dentro del estudio algunas aplicaciones relacionadas con capacidades de almacenamiento (almacenamiento holográfico) [10], procesamiento (redes ópticas) [11], entre otras aplicaciones ópticas.

Todo lo anteriormente señalado muestra una clara y firme tendencia de crecimiento en materia de investigación de la holografía numérica, pues el mejoramiento continuo en materia computacional impulsa el avance de las técnicas de cálculos de hologramas y por ende una mayor y mejor aplicabilidad.

El objeto de investigación de esta tesis es el cálculo de CGH's de Fourier y Fourier fraccionarios, cuya importancia ha sido mencionada anteriormente. Cabe mencionar que existe una gran variedad de dichos hologramas [12], pero el estudio se ha realizado sobre los de sólo fase, cuya fase es cuantizada por motivos explicados en el desarrollo del estudio.

La investigación consta básicamente de dos partes. La primera parte es referente al estudio y cálculo de hologramas numéricos de Fourier de sólo fase. La segunda parte estudia los mismos aspectos en hologramas numéricos de Fourier fraccionarios de sólo fase. Durante el desarrollo se muestra un análisis detallado del proceso de cálculo, que es hecho a través de un algoritmo iterativo. Se discuten diferentes problemas relacionados con el cálculo, dentro de los cuales se destacan la convergencia del proceso iterativo, los problemas de estancamiento, la cuantización de la fase, las técnicas de

disminución de ruido, entre otras. Entre los aportes generados se resalta en el capítulo 5 la implementación de un coeficiente de convergencia al algoritmo iterativo del cálculo.

2

TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

2.1. Transformación de Fourier estándar

Existe una variedad de convenciones para definir la transformación de Fourier \widehat{f} de una función f , una convención a menudo utilizada es

$$\widehat{f}(x') = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x x'} dx, \quad \forall x' \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

f puede ser reconstruida calculando la transformada de Fourier inversa de \widehat{f}

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x') e^{2i\pi x x'} dx', \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Algunas propiedades básicas de la transformación de Fourier son:

Cuadro 2.1: Propiedades importantes de la TF

n	propiedades	cálculo
1.	Regla de linealidad	$F[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \widehat{f}(x') + \beta \widehat{g}(x')$
2.	Regla de dualidad	$F[f(x)] = \widehat{f}(x') \longrightarrow F[\widehat{f}(x)] = f(-x')$
3.	Regla de cambio de escala	$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{ \alpha } \widehat{f}\left(\frac{x'}{\alpha}\right)$
4.	Conjugada	$F[\overline{f(x)}] = \overline{\widehat{f}(-x')}$
5.	Traslación	$F[f(x+k)] = e^{-ix'k} \widehat{f}(-x')$
6.	Modulación	$F[e^{ix'k} f(x)] = \widehat{f}(x' - k)$
7.	Teorema de Parseval	$\int_{\mathfrak{R}} f(x) ^2 dx = \int_{\mathfrak{R}} \widehat{f}(x') ^2 dx'$

2.2. Transformación de Fourier fraccionaria

La transformación de Fourier fraccionaria (TFFr) es la generalización de la transformación de Fourier clásica (TF). Esta depende de un parámetro α y puede ser representada como una transformación elevada a una potencia fraccionaria.

La TFFr tiene múltiples aplicaciones[9] en las áreas de la óptica y el procesamiento de señales,

entre ellas el cálculo de hologramas numéricos de Fresnel, además de generar una mayor riqueza investigativa en cualquier área donde la transformación de Fourier estándar sea utilizada, como es el caso los CGH's de Fourier que serán objeto de estudio en secciones posteriores.

2.2.1. Definición y Propiedades

La transformada de Fourier fraccionaria de una función f está dada por

$$F^\alpha[f](x') = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} e^{\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}} f(x) dx. \quad (2.3)$$

Este operador, para el valor de $\alpha = \pi/2$, se reduce al caso estándar de la transformación de Fourier. Cuando se evalúa la transformada de Fourier de una función rectángulo común (Figura 2.1). Es interesante ver la evolución de la función rectangular continuamente a la función sinc, tanto como a (teniendo que $\alpha = a\frac{\pi}{2}$) varía desde 0 hasta 1.

Existen otras definiciones de la TFFr que pueden ser encontradas en la literatura, las cuales son equivalentes a la definición original, entre estas es común el uso de:

$$F^\alpha[f(x')] = F(x) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} e^{-\frac{i}{2}x^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{2}x'^2 \cot \alpha} e^{-\frac{ixx'}{\sin \alpha}} f(x') dx. \quad (2.4)$$

$$F^\alpha[f(t)] = \sqrt{1 - i \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi(f^2 \cot \alpha - 2ft \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)} s(t) dt. \quad (2.5)$$

Es importante agregar que la TFFr no es la única transformación fraccionaria, se han establecido otras transformaciones de este tipo, lo cual ha dado una gran motivación al estudio de la óptica difractiva y al procesamiento de señales. En la literatura científica se pueden encontrar la transformación de Hartley fraccionaria, la transformación de seno fraccionaria, transformación de coseno fraccionaria, la transformación de paquete de onda fraccionaria, la transformación *wavelet* o ondúcu-

la fraccionaria, la transformación de Hilbert fraccionaria, entre otras.

Para la utilización de este operador en el cálculo numérico de hologramas, se debe discretizar antes de su implementación y posible aplicación en los algoritmos para cálculo de hologramas de Fourier estándar.

En la tabla 2.2 se muestran algunas propiedades importantes de la TFFr.

Cuadro 2.2: Propiedades importantes de la TFFr

n	propiedades	cálculo
1.	Regla de multiplicación	$F_{\alpha}(gf) = g(x \cos \alpha + \frac{1}{i} \sin \alpha \frac{d}{dx}) F_{\alpha}(f)$
2.	Regla de la división	$F_{\alpha}(f/x) = (i/\sin \alpha) \exp\left(-\frac{ix^2}{2}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left(+\frac{ix^2}{2}\right) F_{\alpha}(f) dx$
3.	Regla producto mixto	$F_{\alpha}\left(x \frac{d}{dx}\right) = -\sin \alpha (\sin \alpha + ix^2 \cos \alpha) F_{\alpha}(f) + x \cos 2\alpha \frac{d}{dx} F_{\alpha}(f) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{d^2}{dx^2} F_{\alpha}(f)$
4.	Regla de la derivación	$F_{\alpha}\left(\frac{df}{dx}\right) = (-ix \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dx}) F_{\alpha}(f)$ $F_{\alpha}\left(\frac{d^m}{dx^m}\right) = (-ix \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dx})^m F_{\alpha}(f)$
5.	Regla de la integración	$F_{\alpha} \int_a^x f(x) dx = \sec x \exp\left(-\frac{ix^2}{2} \tan \alpha\right) \int_a^x \exp\left(+\frac{ix^2}{2} \tan \alpha\right) F_{\alpha}(f) dx$
6.	Regla de traslación	$F_{\alpha} f(x+k) = \exp\left[-ik \sin \alpha \left(x + \frac{k}{2} \cos \alpha\right)\right] F_{\alpha}(f)_{[x+k \cos \alpha]}$
7.	Regla de la similitud	$F_{\alpha} f(-x) = F_{\alpha-\pi} f(x)$
8.	Regla de la convolución	$f^a * g = \exp(-ibt^2) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{ibt^2} g(t-\tau) e^{ib(t-\tau)^2} d\tau$, donde $b = 0.5 \cot(0.5\pi\alpha)$

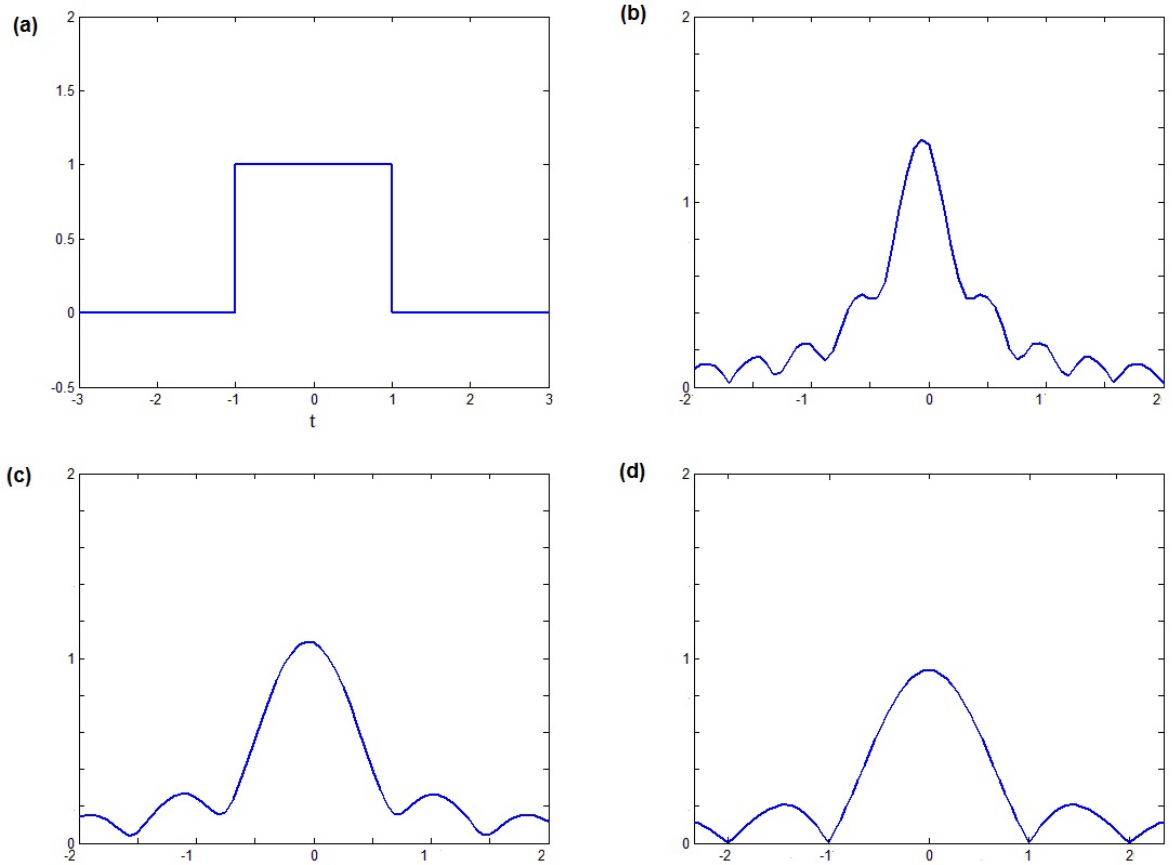


Figura 2.1: (a)Función rectángulo $\text{rect}(x)$. La magnitud de su transformada de Fourier fraccionaria de orden (b) $a=0.25$, (c) $a=0.50$ y (d) $a=1$.

2.2.2. Cálculo de la Transformación de Fourier Fraccionaria Rápida

La transformación de Fourier fraccionaria es miembro de una clase más de transformaciones que son algunas veces llamadas transformaciones canónicas lineales o transformaciones de fase cuadrática. Miembros de estas clases de transformaciones pueden ser divididas en una serie de simples operaciones, tales como multiplicación con una *chirp* (frecuencia que varía temporalmente), convolución con una *chirp*, escalamiento y transformada de Fourier ordinaria. A continuación se describe una descomposición particular para implementar un algoritmo.

Método

Inicialmente, se escoge dividir la transformación fraccionaria en una multiplicación por una *chirp*, seguida por una convolución por una *chirp*, seguida por otra multiplicación por una *chirp*. Manipulando (2.3) se llega a:

$$f_a = e^{-i\pi x^2 \tan(\alpha/2)} g'(x), \quad (2.6)$$

$$g'(x) = A_\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi \csc \alpha (x-x')^2} g(x') dx', \quad (2.7)$$

$$g(x) = e^{-i\pi x^2 \tan(\alpha/2)} f(x), \quad (2.8)$$

donde $g(x)$ y $g(x')$ representan resultados intermedios,

$$A_\alpha = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \quad (2.9)$$

y

$$\tan(\alpha/2) = \csc \alpha - \cot \alpha. \quad (2.10)$$

En el primer paso (2.8) se multiplica la función $f(x)$ por una función *chirp*.

En el segundo paso se convoluciona $g(x)$ con una función *chirp* como es mostrado en (2.7), de puede notar que donde $g(x)$ es de banda limitada, la función *chirp* puede ser también remplazada por su versión banda limitada sin ningún efecto, esto es

$$g'(x) = A_\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi \csc \alpha (x-x')^2} g(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} h(x-x') g(x') dx' \quad (2.11)$$

donde

$$h(x) = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} H(\nu) e^{i2\pi \nu x} d\nu \quad (2.12)$$

y donde

$$H(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\csc \alpha}} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i \frac{\pi \nu^2}{\csc \alpha}} \quad (2.13)$$

es la transformada de Fourier de $e^{i\pi \csc \alpha x^2}$. Es posible expresar $h(x)$ explícitamente en términos de una integral de Fresnel definida como:

$$F(z) = \int_z^0 e^{\frac{\pi z^2}{2}} dz. \quad (2.14)$$

Ahora, (2.7) puede ser muestreado, teniendo:

$$g' \left(\frac{m}{2\Delta x} \right) = \sum_{n=-N}^N h \left(\frac{m-n}{2\Delta x} \right) g \left(\frac{n}{2\Delta x} \right), \quad (2.15)$$

la convolución puede ser evaluada usando una transformación de Fourier rápida (fft).

Entonces, luego de llevar a cabo el último paso (ver 2.6), se obtienen muestras de $f_a(x)$ espaciadas $1/2\Delta x$. Donde se asume que todas las transformadas de $f(x)$ tienen banda limitada en el intervalo $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$, finalmente se diezman estas muestras por un factor de 2 para obtener muestras de $f_a(x)$ espaciadas en $1/\Delta x$.

El procedimiento empieza con N muestras espaciadas en $1/\Delta x$, que únicamente caracteriza la función $f(x)$, y retorna la misma para $f_a(x)$. Si se denota \mathbf{f} y \mathbf{f}_a vectores columnas con N elementos que contienen las muestras de $f(x)$ y $f_a(x)$, el procedimiento completo puede ser representado como:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{F}_I^a \mathbf{f}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F}_I^a = \mathbf{D} \mathbf{\Lambda} \mathbf{H}_{lp} \mathbf{\Lambda} \mathbf{J}. \quad (2.17)$$

Aquí, \mathbf{D} y \mathbf{J} son matrices representando el diezmado y el proceso de interpolación. $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal que corresponde la multiplicación por un *chirp* y \mathbf{H}_{lp} corresponde a la operación de convolución. Nótese que \mathbf{F}_I^a permite obtener las muestras de la a -ésima transformada en términos de las muestras de la función original, lo cual es un requerimiento básico para una definición de la matriz transformada de Fourier fraccionaria discreta. Las gráficas 2.1 mostradas en la sección anterior fueron calculadas con este método.

3

HOLOGRAMAS GENERADOS POR COMPUTADORA

La gran mayoría de los hologramas son hechos usando interferencia de luz coherente. Sin embargo, una significativa cantidad de estudios, han ofrecido métodos para crear hologramas por medio de cálculos en una computadora, que luego son transferidos a una transparencia por medio de algún proceso de construcción. las limitaciones en la creación de imágenes (2-dimensional o 3-dimensional) están dadas por la habilidad para calcular el holograma numéricamente en un intervalo de tiempo razonable y la habilidad para transferir ese resultado del cálculo a un medio transparente apropiado.

Los procesos de creación de hologramas generados por computador puedes ser divididos en dos partes[13]:

La primera parte es la etapa computacional, que envuelve el cálculo de los hologramas. Esta parte trata aspectos como el método a usar para calcular el holograma, en el cual se deben pensar aspectos como, el tipo de holograma [12], el algoritmo de cálculo, las restricciones impuestas sobre el holograma, el desarrollo de la transformación discreta de Fourier o Fresnel que es usualmente lograda con el algoritmo de la transformación de Fourier rápida (FFT), entre otras.

La segunda parte del problema es la transferencia de la representación decodificada del campo a una transparencia. Esta operación de impresión es restringida por la propiedades de la máquina

constructora utilizada ya sea sea un plotter, una impresora láser o alguna máquina litográfica de haz electrónico. En realidad el paso de una decodificación a menudo es influenciado por las propiedades de la máquina constructora que será utilizada. La mayoría de máquinas de impresión están capacitadas para dibujar pequeños rectángulos en diferentes ubicaciones sobre el plano de salida. En algunos casos estos rectángulos pueden ser dibujados en escala de grises, mientras en otros ellos son restringidos a valores binarios, es decir, transparente o opaco.

Muchos métodos para crear hologramas generados por computadora han sido descubiertos [12], pero en este desarrollo únicamente se citará el caso de hologramas iterativos de sólo fase cuantizada.

3.1. Parámetros de medida

Los parámetros de medida utilizados para medir la calidad de los cálculos realizados durante esta

investigación son: la eficiencia de difracción dada por: $\eta = \frac{\sum |g(x)|^2}{\sum_H |g(x)|^2}$ y la relación señal ruido dada

por: $SNR = \frac{P_{seal}}{P_{ruido}} = \frac{|g(x)|^2}{|c(x)|^2} = \frac{\sum_W |g(x)|^2}{\sum_W |f(x) - c_j g(x)|^2}$ [17]. En general los resultados de estas medidas

se encontrarán registrados en las distintas tablas de este libro con los respectivos análisis.

4

CÁLCULO DE CGH's CUANTIZADOS MEDIANTE EL MÉTODO DE WYROWSKI

4.1. Generalidades

Un proceso difractivo puede ser usado para manipular o controlar el comportamiento de campos ondulatorios. Para tal objetivo son utilizados de manera usual los elementos ópticos difractivos, los cuales pueden producir variaciones sobre la amplitud y la fase de un campo originando un fenómeno difractivo. El objetivo que se desea alcanzar es el cálculo de dicha estructura, cuya influencia sobre la fase de una onda sea tal, que la difracción de Fraunhofer forme una distribución de intensidad deseada, la influencia de la fase es quien interesa en este sentido, puesto que se asume que no hay absorción de energía.

La iluminación de tales estructuras difractivas conllevan al patrón de difracción de Fraunhofer dado por la amplitud compleja

$$f(x) = FT\{e^{i\phi(u)}\}, \quad (4.1)$$

donde FT indica la transformación de Fourier. El interrogante que se formula es cómo calcular una fase cuantizada $\phi(u)$ tal que una distribución de intensidad $|f(x)|^2$, la cual es llamada señal, sea obtenida.

La manera más intuitiva de tratar este problema es la siguiente: la transformada inversa de Fourier de $f(x)$, esto es $F(u) = |F(u)|e^{i\phi(u)} = FT^{-1}[f(x)]$, es calculada con una computadora $F(u)$ describe la estructura difractiva requerida necesaria para generar el patrón de difracción $f(x)$. Sin embargo para la mayoría de las señales sucede que, (1) el módulo de $F(u)$, $|F(u)|$, no es constante y (2) la fase $\phi(u)$ no está cuantizada, lo cual imposibilita la materialización de la estructura, debido a que las máquinas que fabrican el holograma sólo manejan hasta 5 niveles de fase. Un método simple para obtener una distribución de fase cuantizada en fase es despreciando la información de la amplitud de $F(u)$, es decir, fijar $|F(u)|$ igual a la unidad, y cuantizar la fase $\phi(u)$ directamente. Desafortunadamente luego de una o ambas modificaciones la difracción de Fraunhofer resulta ser una señal perturbada.

En orden para evitar perturbaciones la idea es empezar de la función $F(u)$ y hallar una nueva distribución $G(u) = |G(u)|e^{i\Gamma(u)}$, que satisfaga las condiciones

- (1) $|G(u)| = 1$
- (2) $\Gamma(u)$ cuantizado en Z niveles,

además del patrón de difracción de $G(u)$, $g(x) = FT(G(u))$, contiene la información de la intensidad de la señal $|f(x)|^2$.

Esta puede ser expresada como

$$|g(x)|^2 \sim |f(x)|^2, \quad x \in W, \quad (4.2)$$

donde W es definida como la ventana de señal, la cual es el área donde se encuentra lo que nos

interesa de la distribución $|g(x)|^2$. La figura 4.1 ilustra la relación entre $f(x)$ y $g(x)$ de acuerdo a la relación (4.2).

Este análisis se dividirá en dos etapas, la primera etapa se basará en el cálculo de hologramas análogos, en los cuales sólo se hace uso de la restricción de módulo constante y la fase se mantiene en los 256 niveles. En la segunda etapa la cuantización de la fase será el tema a tratar.

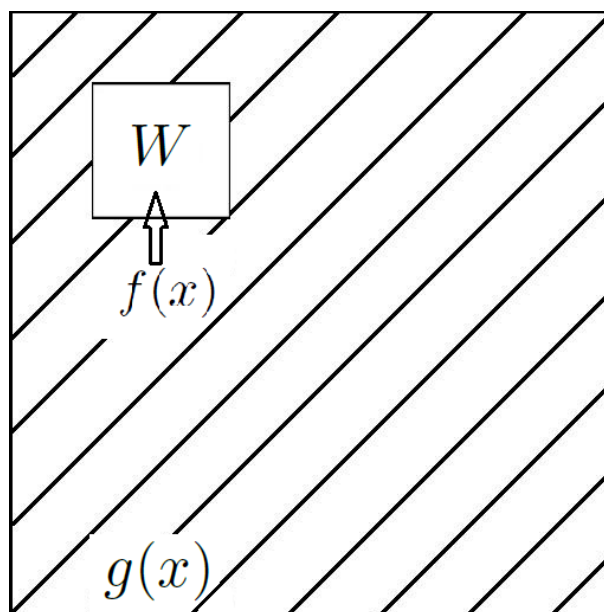


Figura 4.1: ilustración de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$, la amplitud compleja $g(x)$ está dada dentro del campo total y la señal $f(x)$ dentro de la ventana de señal W

4.2. Cálculo del holograma análogo

Para calcular hologramas generados por computador de tipo análogo se hace necesario el análisis de ambos grados de libertad, módulo y fase. Este análisis se hace detalladamente primero teniendo en cuenta sólo el grado de libertad de la fase y posteriormente el uso de ambos.

4.2.1. Uso Exclusivo del Grado de Libertad en la Fase

Para poder obtenerse un elemento difractivo con alta eficiencia de difracción, se puede tomar como primera aproximación que solamente el uso en la libertad de la fase sea requerido. Un método de búsqueda para una fase apropiada $\varphi(x)$ (ecuación (4.1)) es la aplicación de un algoritmo iterativo de la transformación de Fourier (IFTA) [15], este algoritmo conserva la información útil en cada iteración para lograr una mayor convergencia. En la figura 4.2 un diagrama de este algoritmo es mostrado, los operadores \underline{X} y \underline{U} expresan las reglas para satisfacer las restricciones en los planos x y u . Los operadores a usar son:

$$\underline{X}[\bar{g}(x)] = g_{j+1}(x) = \begin{cases} c_j |f(x)| e^{i\bar{\gamma}_j(x)}, & x \in W \\ 0, & x \notin W \end{cases} \quad (4.3)$$

y

$$\underline{U}[G_j(u)] = \bar{G}(u) = e^{i\Gamma_j(u)}, \quad (4.4)$$

$\gamma_j(x)$ es la fase de $\bar{g}_j(x)$ y $\Gamma_j(u)$ de $G_j(u)$. El factor c_j está dado por:

$$c_j = \frac{\sum f(x) \bar{g}_j^*(x)}{\sum |f(x)|^2}, \quad (4.5)$$

$\gamma_j(x)$ es la fase de $\bar{g}_j(x)$ y $\Gamma_j(u)$ la fase de $G_j(u)$. El factor c_j es un coeficiente de convergencia [17] conocido en la literatura como como factor de escalamiento, el asterisco denota el complejo conjugado.

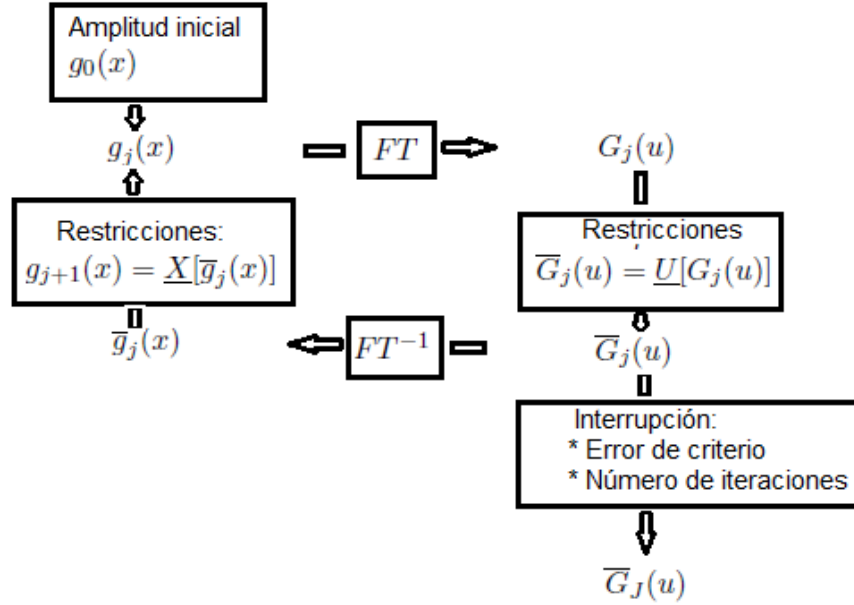


Figura 4.2: Diagrama del algoritmo iterativo de Fourier (IFTA)

El operador \underline{X} conserva la fase $\bar{\gamma}_j(x)$ dentro de W , reemplaza el módulo dentro de W por $c_j|f(x, y)|$, y elimina la amplitud compleja fuera de W . El último efecto nombrado del operador \underline{X} representa el uso de la libertad en la fase durante la iteración. El operador \underline{U} reemplaza el módulo de $G_j(u)$ por el valor 1, es decir, satisface las condiciones de módulo constante en el plano de Fourier. Ambos operadores satisfacen las restricciones en los planos x y u para un mínimo cambio de $\bar{g}_j(x)$ y $G_j(u)$ respectivamente.

Para implementar el algoritmo es necesario un $g_0(x)$ inicial. Se usa $g_0(x) = |f(x)|e^{i\varphi(x)}$ con una fase randómica φ , el ciclo iterativo se detiene cuando un ciclo de iteraciones se completa o un criterio cuantitativo de error se satisface, es decir, cierto nivel de ruido c_1 es permitido, dado por:

$$Error = \sum_w ||c_j f(x)|^2 - |g(x)|^2|^2 < c_1 \quad (4.6)$$

La pregunta que conviene hacerse hasta este momento es: ¿Cuál es el resultado de la técnica

iterativa?, lastimosamente la respuesta es: la iteración se estanca, todo parece indicar que no es posible obtener una fase dentro de W que lleve a un módulo constante en el plano de Fourier. La figura 4.3 ilustra esta situación. En la figura 4.3(a) la distribución inicial $|f(x)|^2$ es descrita. La señal es una imagen ubicada dentro de W . Figura 4.3(b) muestra $|\bar{g}_{20}|^2$, es decir la distribución después de la aplicación de \underline{X} . La señal está todavía perturbada, hay una distribución $c(x) \neq 0$ fuera de W . La situación no puede ser cambiada de manera significativa para un mayor número de iteraciones, como es mostrado para $|\bar{g}_{1000}(x)|^2$ en la figura 4.3(c).

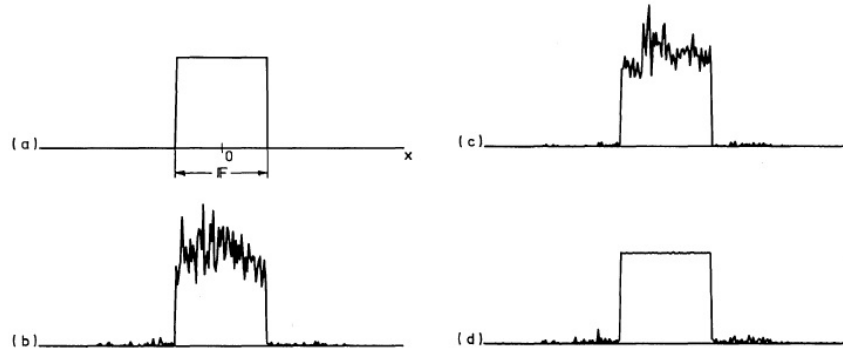


Figura 4.3: Ilustración del estancamiento del proceso iterativo: (a)distribución inicial $|g_0(x)|^2$, distribuciones resultantes (b) $|\bar{g}_{20}(x)|^2$ y (c) $|\bar{g}_{1000}(x)|^2$

En síntesis el procedimiento iterativo se estanca, entonces el nuevo interrogante que surge es: ¿Cuál es la razón de este estancamiento?.

Una técnica iterativa puede llevar a un resultado sólo si este resultado existe teóricamente, en la aplicación actual, la pregunta que surge es: ¿la utilización de la libertad de la fase es suficiente para asegurar un módulo constante en el plano de Fourier? Una formulación alternativa de esta pregunta es la siguiente: ¿existe una función de fase $e^{i\Gamma(u)}$, que posea una transformada de fourier que sea cero fuera de la región W de finito tamaño? Una apropiada $e^{i\Gamma(u)}$ debe ser de banda limitada, pero la única función de fase banda limitada es la función de fase lineal. Así para una señal, que consiste de más que un punto, la libertad de la fase no es suficiente para obtener un módulo constante en el plano de fourier. Para señales de forma general es necesario utilizar la libertad en amplitud, en adición a la libertad de la fase, para obtener un módulo constante en el plano de Fourier.

En conclusión, se quiere enfatizar que la falla en encontrar una fase apropiada $\varphi(x)$ no es causada por el cambio del proceso iterativo, pero si por el hecho de que muy probablemente no exista una solución del problema.

4.2.2. Uso de los Grados de Libertad en la Amplitud y en la Fase

El resultado de la sección anterior ofrece una forma de sobrellevar el estancamiento del proceso iterativo. El operador \underline{X} en la ecuación (4.3) será remplazado por

$$\underline{X}'[\bar{g}(x)] = g_{j+1}(x) = \begin{cases} c_j |f(x)| e^{i\bar{\gamma}_j(x)}, & x \in W \\ \bar{g}_j(x), & x \notin W. \end{cases} \quad (4.7)$$

El operador \underline{X}' no hace efecto sobre $\bar{g}_j(x)$ fuera de W ; La libertad en la amplitud es utilizada en adición a la libertad en fase. La figura 4.3(d) muestra el $|\bar{g}_{40}(x)|^2$ resultante después de 20 ciclos de iteraciones con \underline{X}' si $\bar{g}_{20}(x)$ mostrado en la figura 4.3(b) es usada como la distribución inicial, aunque se usaron cierto número de iteraciones para ambos ciclos iterativos, es conveniente usar el criterio de la ecuación (4.6). Debido al proceso iterativo, la señal que se tiene ahora es poco perturbada, es decir, una fase apropiada $\varphi(x)$ y un ruido permitido $c1$ han sido encontrados.

La implementación para un computador es la siguiente:

Se introduce una función $f(x)$ definida por

$$h(\vec{x}) = \sqrt{f(\vec{x})}, \quad (4.8)$$

cuya fase se toma aleatoria, puesto que toda función de la forma $f(\vec{x})e^{i\varphi}$ es aceptada como amplitud en el plano de difracción (tales funciones dan la misma distribución de intensidad). Esta función bidimensional es representada en una submatriz cuadrada (100x100), la submatriz cuadrada es ubicada dentro de una matriz de ceros (512x512), la submatriz será entonces la ventana de señal

que es el espacio de mayor interés.

En orden para lograr una alta eficiencia de difracción es importante mantener la energía de la distribución $c(x)$ tan pequeña como sea posible. Este resultado puede ser logrado con el siguiente procedimiento: El operador \underline{X} , acordado en la ecuación (4.3), es usado para los primeros ciclos de iterativos hasta que la utilización exclusiva de la fase libertad sea casi agotada por completo, es decir, la iteración se estanque. Entonces, el operador \underline{X}' , de acuerdo a la ecuación (4.7), es usado; es decir, una combinación de libertad en la amplitud y en la fase es utilizada. Para este caso se hace uso del criterio mencionado en la ecuación (4.6) en ambos ciclos, permitiendo un nivel de ruido conveniente.

La eficiencia de difracción de los hologramas análogos calculados se encuentra entre el 85% y 90% y los valores de la relación SNR (*Signal to Noise Ratio*) calculados fueron mayores que 10^4 . Un ejemplo de una distribución de fase resultante $\Gamma(u)$ es mostrada en la figura 4.4a y su patrón de difracción $|g(x)|$ en la figura 4.4b. El ruido alrededor de la señal representa el término $c(x)$.

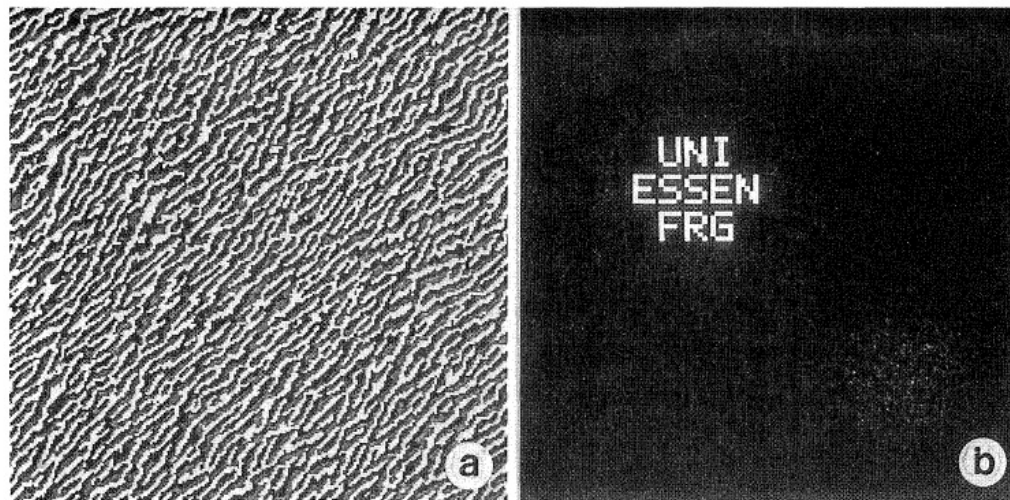


Figura 4.4: Patrón de difracción de un holograma análogo

4.3. Holograma cuantizado: Cuantización de la Estructura Análoga

El procedimiento descrito anteriormente resulta en una distribución $G(u) = e^{i\Gamma(u)}$ con una distribución de fase analógica* $\Gamma(u)$. Por razones de fabricación la estructura de un elemento difractivo es cuantizada, pues esta simplifica el proceso de producción. Se indica la versión cuantizada de $G(u)$ por $\bar{G}(u) = e^{i\bar{\Gamma}(u)}$ [4], donde $\bar{\Gamma}(u)$ es una distribución de fase cuantizada, es decir

$$\bar{\Gamma}(u) \in \{-\pi, -\pi + \Delta, \dots, \pi - \Delta\}, \quad (4.9)$$

con $\Delta = 2\pi/Z$. Z indica el número de niveles de fase.

En esta etapa es considerada la cuantización $\Gamma(u)$. Evidentemente, el resultado de la cuantización depende del cambio de la regla de la cuantización de la fase. uno directo está dado por el operador

$$\underline{QZ}[G(u)] = \bar{G}(u) \left\{ \begin{array}{l} e^{-i\pi}, \quad \Gamma(u) + \pi \leq 0.5\Delta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{i(-\pi+z\Delta)}, \quad (z - 0.5)\Delta < \Gamma(u) + \pi \leq (z + 0.5)\Delta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{i\pi}, \quad (Z - 0.5)\Delta < \Gamma(u) + \pi \end{array} \right. \quad (4.10)$$

* fase analógica hace referencia a que la fase está dada por valores continuos

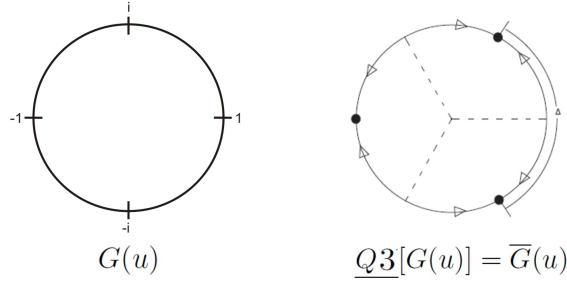


Figura 4.5: Ilustración del efecto del operador cuantización para $Z=3$. Las líneas punteadas indican los umbrales

Con el parámetro $z = 0, \dots, Z$. El efecto del operador cuantización QZ sobre $G(u)$ es ilustrado en la figura 4.5 para $Z = 3$. Las líneas punteadas indican los umbrales. Similar al operador en la sección anterior, QZ satisface las restricciones, en este caso la cuantización, para un cambio mínimo de $G(u)$. En el caso extremo $Z = 2$, $\overline{G}(u)$ sólo posee los valores extremos -1 y 1 . El cálculo de tales estructuras binarias es esencialmente equivalente al cálculo de un holograma digital binario [14]. La desventaja de hologramas binarios es la aparición de una señal gemela en el patrón de difracción de Fraunhofer resultante en una eficiencia de difracción menor al 50%. Además no es posible obtener una señal *on-axis*, es decir, $x_0 \neq 0$ es requerido.

En orden para discutir el efecto de la cuantización de una estructura difractiva de una señal en general, se expresa $\overline{G}(u)$ por la adición del término $Q(u)$ a $G(u)$,

$$\overline{G}(u) = G(u) + Q(u). \quad (4.11)$$

Entonces el espectro de $\overline{G}(u)$ está dado por

$$\overline{g}(x) = g(x) + q(x) \sim f(x - x_0) + c(x) + q(x). \quad (4.12)$$

$q(x)$ describe el ruido de cuantización. Para evitar perturbaciones es necesario que

$$q(x) = 0, \quad x \in W, \quad (4.13)$$

o

$$|f(x - x_0) + q(x)|^2 \sim |f(x - x_0)|^2, \quad x \in W, \quad (4.14)$$

con un cambio apropiado de el *offset* x_0 , el centro del ruido puede ser separado de la señal. De esta forma la condición anterior (4.13), puede ser satisfecha de una manera aproximada.

4.3.1. Problema de Estancamiento

Como una primera aproximación iterativa se usa el operador \underline{X}' y el operador $\underline{U} = \underline{QZ}$ de acuerdo a las ecuaciones (4.7) y (4.10). La amplitud $g(x)$, que corresponde a la distribución analógica $G(u) = e^{i\Gamma(u)}$, es tomada como la amplitud inicial. Desafortunadamente este proceso iterativo se estanca sin una reducción de error significativa luego de un par de ciclos iterativos. Para explicar este estancamiento [4], es de gran ayuda introducir el término

$$\bar{q}_j(x) = g_{j+1}(x) - \bar{g}_j(x), \quad (4.15)$$

que describe los cambios en el plano x causado por el operador \underline{X}' . La distribución $G_{j+1}(u)$ puede ser expresada por

$$G_{j+1} = \bar{G}_j(u) + \bar{Q}_j(u). \quad (4.16)$$

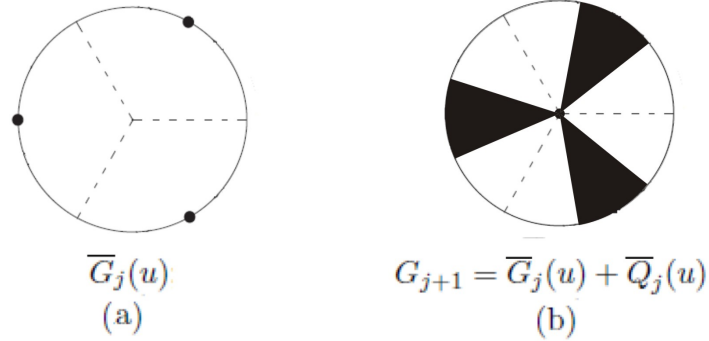


Figura 4.6: Ilustración del proceso de estancamiento: estancamiento ocurre si los valores de $G_{j+1}(u)$ [partes sombreadas en (b)] no cambian lo suficiente para cruzar los niveles umbrales (líneas punteadas).

\overline{Q}_j indica el cambio en el dominio de Fourier debido a las restricciones en el dominio espacial. El estancamiento aparece cuando la suma de $\overline{Q}_j(u)$ y $\overline{G}_j(u)$ no causa que valores del resultado $G_{j+1}(u)$ puedan ser localizados sobre el lado opuesto en el nivel umbral en comparación con el valor correspondiente de $\overline{G}_j(u)$. En este caso, la operación $\underline{QZ}[G_{j+1}(u)]$ resulta en $\overline{G}_j(u)$; es decir, $\overline{G}_{j+1}(u) = \overline{G}_j(u)$. Figura 4.6 ilustra esta situación de estancamiento. Las partes sombreadas en la figura 4.6(b) indican los valores de $G_{j+1}(u)$ dada para la suma de $\overline{G}_j(u)$ y $\overline{Q}_j(u)$. Debido a que no hay solapamiento de las partes sombreadas y las líneas umbrales, el proceso iterativo se estanca.

4.3.2. Método para Sobrellevar el Estancamiento

En orden para evitar el estancamiento es necesario incrementar la capacidad del IFTA para cambiar la distribución de fase durante la iteración, es decir la suma $\overline{G}_j(u) + \overline{Q}_j(u)$ debe permitir a cualquier valor de $\overline{G}_j(u)$ cruzar los niveles de umbral. Entonces, el hecho de que $\overline{G}_{j+1}(u) \neq \overline{G}_j(u)$ deberá ser asegurado.

La introducción de un paso apropiado [4] de la cuantización \underline{QZ} es una modificación propia del proceso iterativo. Una cuantización del paso apropiado significa que las J ciclo de iteraciones son subdivididas en P pasos. En el p -ésimo paso, se emplea

$$\underline{QZ}^P[G_j(u)] = \overline{G}_j(u) = \begin{cases} e^{-i\pi}, & \Gamma(u) + \pi \leq 0.5\Delta \cdot \epsilon^{(p)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{i(-\pi+z\Delta)},, & (z - 0.5\epsilon^{(p)})\Delta < \Gamma(u) + \pi \leq (z + 0.5\epsilon^{(p)})\Delta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{i\pi}, & (Z - 0.5\epsilon^{(p)})\Delta < \Gamma(u) + \pi \\ G_j(u), & \text{otro lugar} \end{cases} \quad (4.17)$$

con

$$0 < \epsilon^{(1)} < \epsilon^{(2)} < \dots \epsilon^{(P)} = 1 \quad (4.18)$$

y $z = 0, \dots, Z$. Figura 4.7 muestra el efecto del operador $\underline{U} = \underline{QZ}^P$ para $Z = 3$. las porciones gruesas del círculo indican los valores de $G_j(u)$ que no son aún influenciadas por el operador en el plano u . La distribución $\overline{G}_j(u)$ resulta. Debido a las restricciones en el plano x en el próximo ciclo, se obtiene $G_{j+1} = \overline{G}_j(u) + \overline{Q}_j(u)$ antes de la siguiente aplicación de \underline{QZ}^P . Debido a la introducción del paso apropiado de la restricción de la cuantización, el término $\overline{Q}_j(u)$ ahora causa que algunos valores de $\overline{G}_j(u)$ crucen los niveles de umbral. Este mecanismo es usado para evitar el estancamiento.

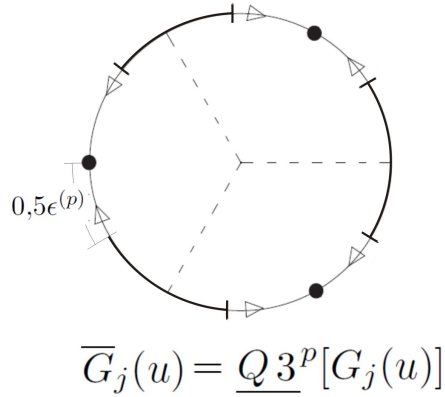


Figura 4.7: Ilustración del efecto del operador $Q3^P$.

En cada paso excepto en el último, los Q ciclo de iteraciones son representados. para $p = P$ la identidad $\underline{QZ} = \underline{QZ}^P$ es obtenida; es decir, en el último paso el operador de cuantización directa es alcanzado, y sólo un ciclo iterativo es realizado. Un cambio apropiado de los parámetros $\epsilon^{(p)}$ para $P = 10$ es $\epsilon^{(1)} = 0.3$, $\epsilon^{(2)} = 0.5$, $\epsilon^{(3)} = 0.6$, $\epsilon^{(4)} = 0.7$, $\epsilon^{(5)} = 0.75$, $\epsilon^{(6)} = 0.8$, $\epsilon^{(7)} = 0.85$, $\epsilon^{(8)} = 0.9$, $\epsilon^{(9)} = 0.95$ y $\epsilon^{(10)} = 1$. El paso apropiado de \underline{QZ} es ilustrado en la figura 4.8.

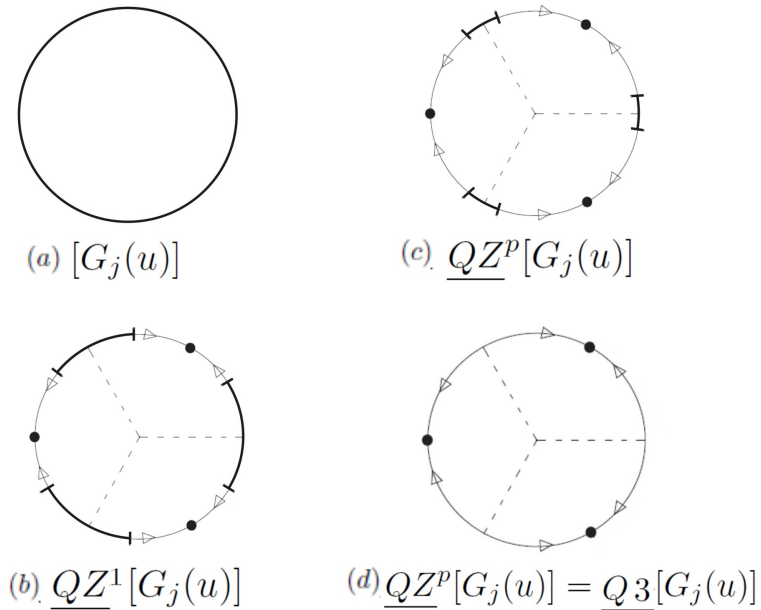


Figura 4.8: Ilustración de introducción del paso apropiado del operador de cuantización $Q3$ durante la iteración desde (a) estructura analógica hasta (d) la distribución cuantizada.

Luego de $J = Q(P - 1) + 1$ ciclos iterativos, este proceso iterativo lleva a una estructura cuantizada con una rata de SNR de aproximadamente 208 para $P=10$, $Q=5$ y $Z=3$. La figura 4.9a muestra la distribución de fase cuantizadas $\bar{\Gamma}_J(u)$ y figura 4.9b las distribución de la intensidad $|\bar{g}_J|^2$ de una señal para $Z=4$. En la tabla 4.1.

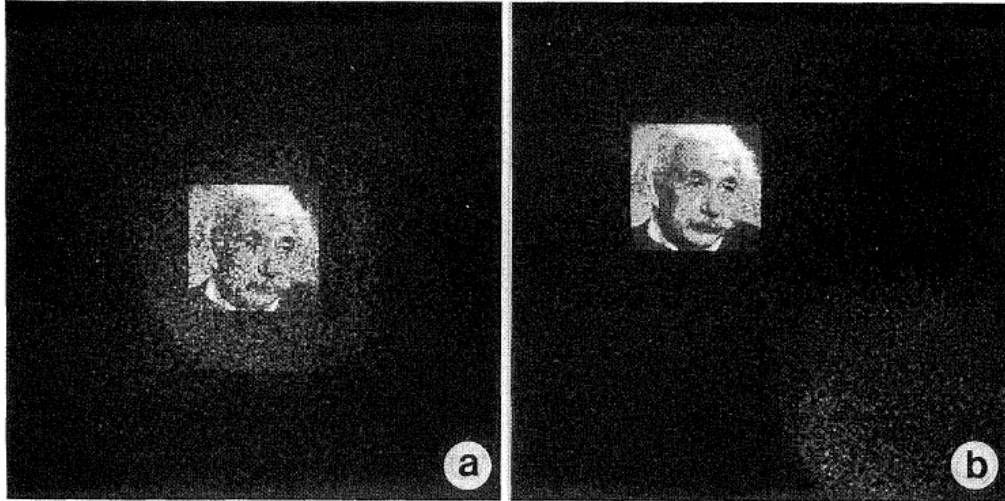


Figura 4.9: Holograma cuantizado en 3 niveles e intensidad de luz difractada calculada

Cuadro 4.1: Eficiencia de difracción y SNR para algunos niveles de cuantización

Z	Eficiencia de difracción	SNR
3	0.61	140
4	0.73	220

4.4. Ruido de *Speckle*

El efecto *speckle* es consecuencia de la interferencia de ondas que tienen fases diferentes. El resultado de esta interferencia es una distribución de máximos y mínimos en intensidad de luz que es estacionaria temporalmente pero aleatoria espacialmente, los picos individuales de intensidad representados en pequeñas manchas claras y oscuras son llamadas *speckle* o el agrupamiento de

estos *speckles* es denominado patrón de *speckle*. Si la superficie a iluminar es rugosa también produce este mismo efecto.

Si luz de baja coherencia (superposición de ondas con diferentes longitudes de onda) es usada, normalmente no será observado un patrón de *speckle*, debido a que el *speckle* producido por longitudes de ondas individuales tienen diferentes dimensiones y en consecuencia se promediarán unas con otras. Sin embargo, el patrón de *speckle* puede ser observado en luz policromática en algunas condiciones [[13]]. En la figura 4.10 se ilustra un patrón de *speckle* típico.

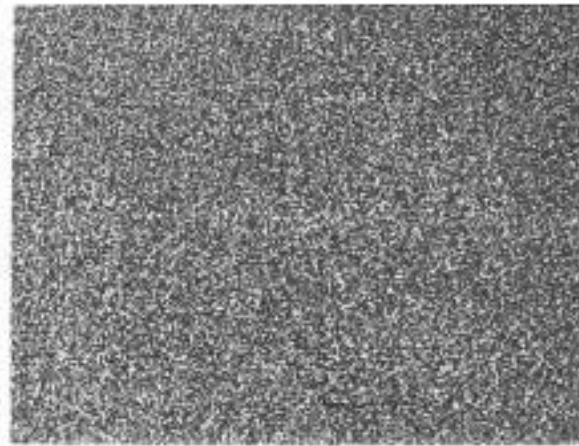


Figura 4.10: patrón de speckle

5

CÁLCULO DE CGH's ADAPTADOS A UN NUEVO COEFICIENTE DE CONVERGENCIA

En el capítulo anterior se discutió la necesidad de usar un algoritmo iterativo para el cálculo, el IFTA en este caso (4.2), pues un cálculo directo con las restricciones necesarias resulta en una señal perturbada tal como se ilustra en la figura 5.1.

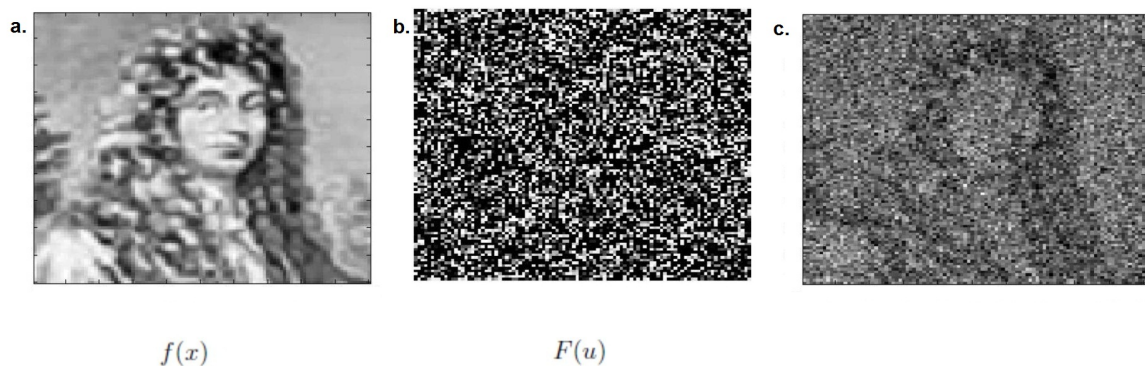


Figura 5.1: ilustración de (a) $f(x)$, (b) $F(u)$ análogo y (c) su patrón de difracción.

Implementado un coeficiente distinto de convergencia al algoritmo iterativo en el operador (4.3) es posible calcular hologramas con una alta eficiencia de difracción. El coeficiente alternativo es basa-

do en el principio de Parseval e impone la conservación de la energía durante el uso del operador \underline{X} en (4.3) y \underline{X}' en (4.7). Para efectos de nombrarlo se le llamará coeficiente Parseval y está dado por:

$$c_j = \frac{N_w}{\sum_w |f(x)|^2}, \quad (5.1)$$

con N el número de píxeles de la ventana de señal. A continuación se mostrarán resultados de hologramas calculados bajo el coeficiente de Parseval.

5.1. CGH's análogos

Como fue discutido anteriormente el cálculo de hologramas análogos se divide en dos etapas.

- La primera etapa es aquella donde sólo se hace uso de la libertad de la fase. La razón es que se puede pensar que eliminando el ruido fuera de la ventana de señal de manera directa, se puede tener un holograma óptimo con bajo nivel de ruido.
- La segunda etapa es tomando los dos grados de libertad, pues se observa que el ruido presente fuera de la ventana de señal tiene información valiosa que permite una mejor convergencia del holograma, entonces su presencia es necesaria.

Ambas etapas son ilustradas a continuación.

5.1.1. CGH's análogos con el uso de un sólo un grado de libertad

La imagen (5.2) muestra el estancamiento que se da en los hologramas análogos en hasta 1000 iteraciones, la gráfica (5.3) evidencia este estancamiento, donde se observa que la disminución del error es demasiado pequeña después de cierto número de iteraciones.



Figura 5.2: Ilustración del estancamiento del proceso iterativo: (a)distribución inicial $|g_0(x)|^2$, distribuciones resultantes (b) $|\bar{g}_{20}(x)|^2$ y (c) $|\bar{g}_{1000}(x)|^2$

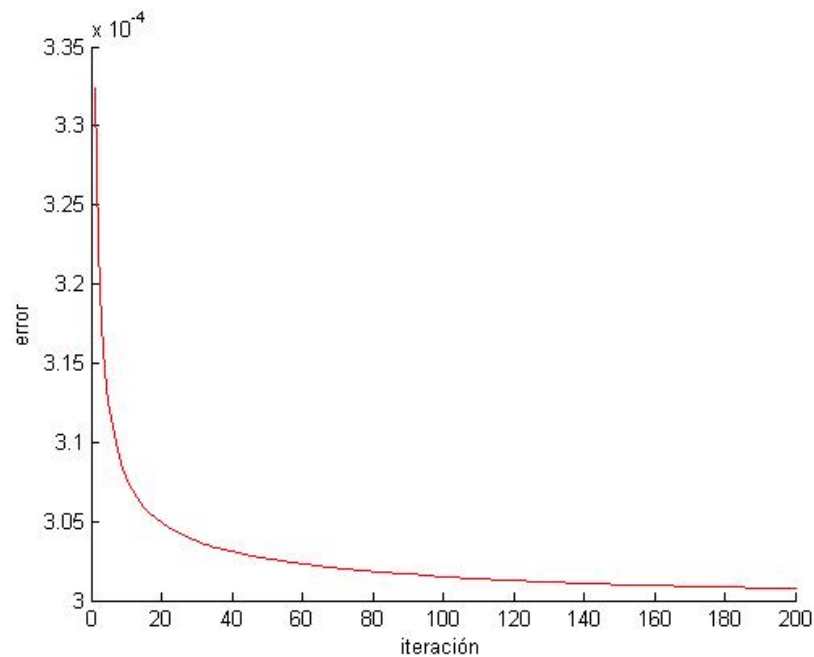


Figura 5.3: gráfica del error en hologramas análogos

5.1.2. CGH's análogos con el uso de ambos grados de libertad

Haciendo uso de los dos grados de libertad se supera el estancamiento en el uso de un grado de libertad, el holograma calculado mejora notoriamente tomando como distribución inicial el holograma obtenido en la etapa anterior. El mejoramiento progresivo del holograma análogo se muestra en la ilustración 5.4 para algunas iteraciones.



Figura 5.4: Evolución de la convergencia cuando una combinación de los dos grados de libertad son utilizados

En la gráfica 5.5c se observa el comportamiento de la eficiencia de difracción durante las iteraciones, en las iteraciones finales se aprecia que el cálculo del holograma análogo cae en un estancamiento, este estancamiento se debe principalmente a 2 razones:

- (a) Se está calculando una aproximación del hologramas, pues muy probablemente no existe una solución del problema.
- (b) No existen cambios abruptos o grandes saltos que permitan al cálculo ubicarse en diferentes puntos en la función error.

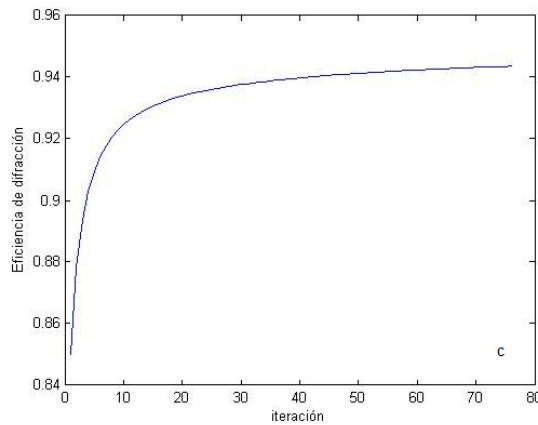
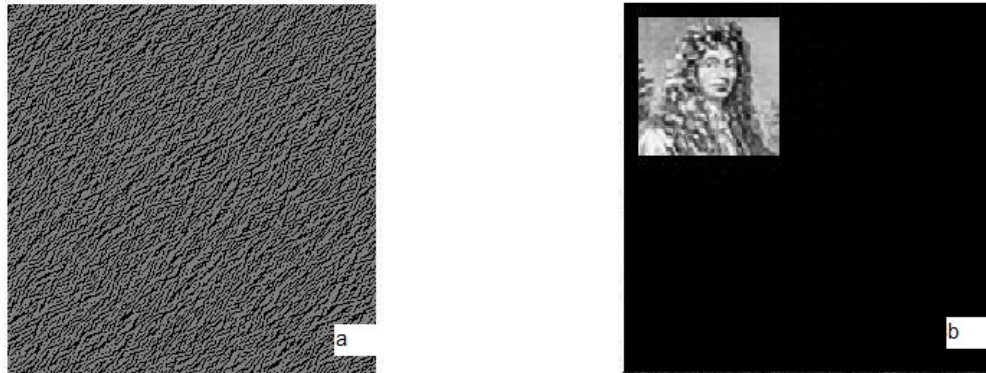


Figura 5.5: (a) holograma; (b) módulo de patrón de Fraunhofer calculado; (c) Eficiencia de difracción vs. iteración

5.2. CGH's cuantizados

La cuantización es fundamental para la materialización del holograma, pues las máquinas que realizan la manufactura sólo pueden tallar hasta 5 niveles de fase. La cuantización está dada por el operador que fue definido en (4.10).

5.2.1. Cuantización directa

La primera opción a implementar es cuantizar de manera directa el holograma análogo, pero esta resulta en un holograma demasiado perturbado, pues al cambiar la distribución de la fase se está

cambiando el resultado calculado que ofrecía una alta eficiencia de difracción.

La ilustración 5.6 muestra el patrón de difracción del holograma al cuantizar directamente 5.5.

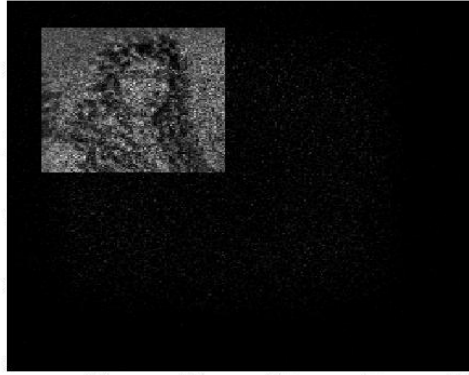


Figura 5.6: Patrón de difracción de holograma cuantizado directamente

5.2.2. Cuantización directa implementada al IFTA

Debido a que la cuantización directa genera un holograma con alto nivel de ruido, la solución al problema que se puede pensar de manera intuitiva es la implementación de la cuantización en el algoritmo iterativo, pero esta alternativa resulta en un estancamiento del proceso iterativo (ver sección 3.3.1).

5.2.3. Cuantización progresiva implementada al IFTA

Como ya había sido mencionado anteriormente (sección 3.3) la forma de sobrellevar el estancamiento es a través de una cuantización progresiva dada por la implementación de un paso apropiado. la ilustración 5.7 muestra de manera más didáctica el proceso de cuantización progresiva para algunos pasos.

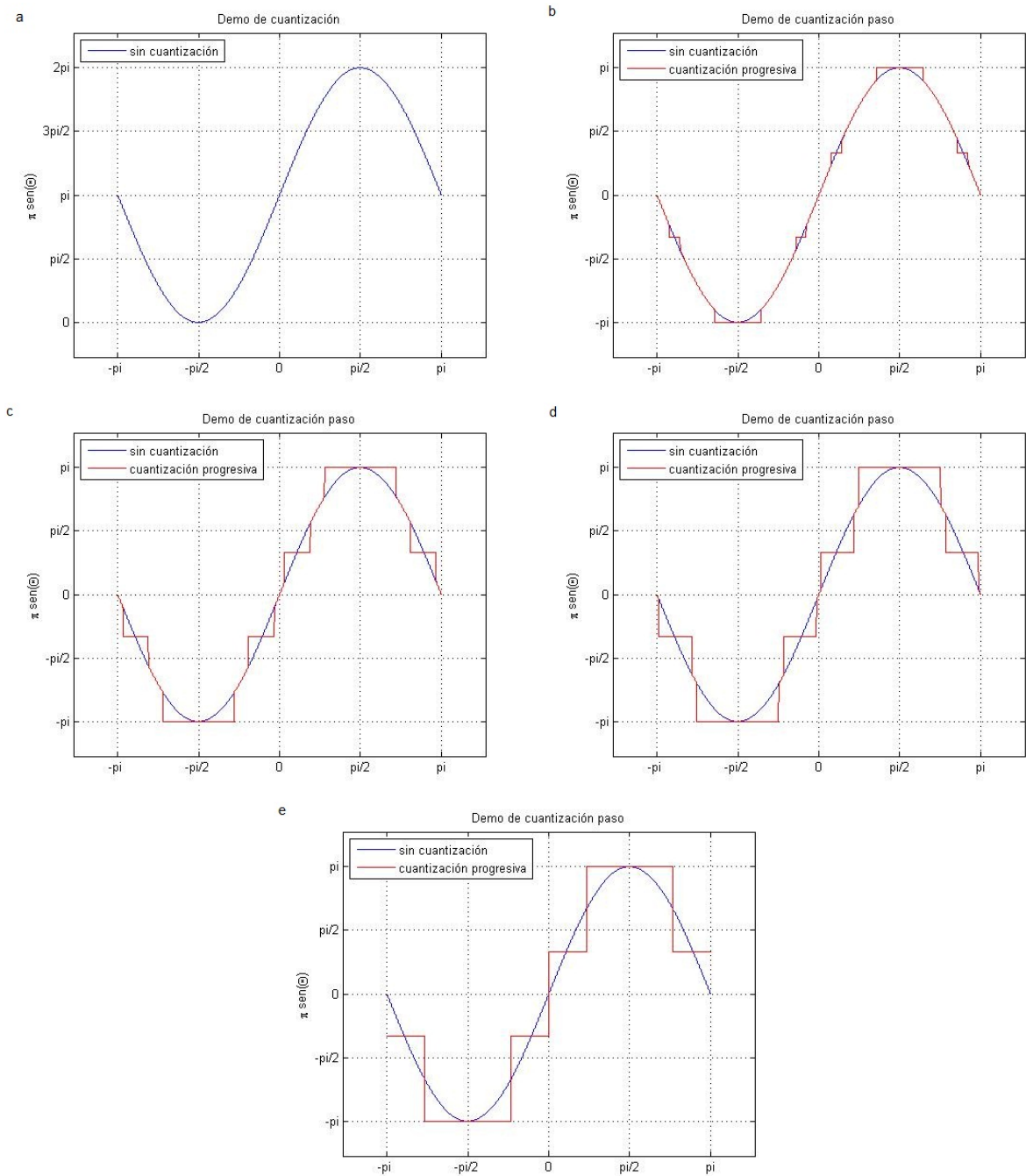


Figura 5.7: Ilustración del efecto del operador de cuantización progresiva en una función senoidal para los $p=1, 4, 8$ y 10 .

La figura 5.8a muestra el holograma con una distribución de fase cuantizada $\bar{\Gamma}_J(u)$ y figura 5.8b las distribución de la intensidad $|\bar{g}_J|^2$ de una señal para $Z=2$. En la tabla 4.1.

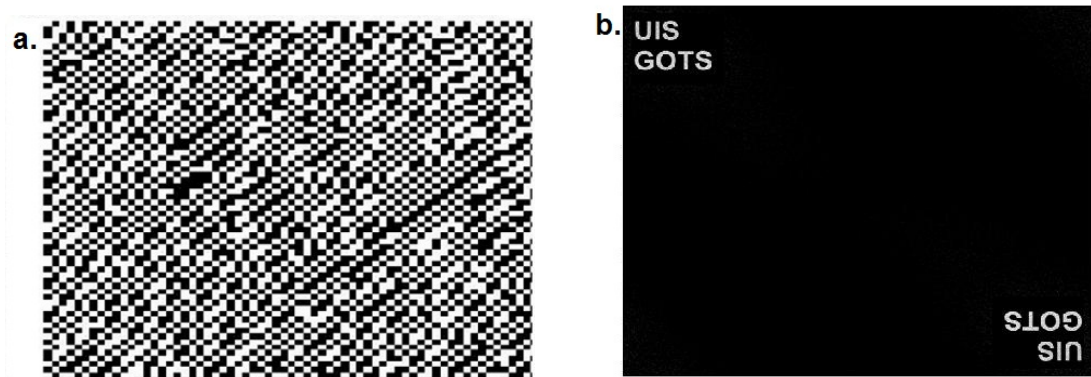


Figura 5.8: (a)Holograma cuantizado en 2 niveles e (b)intensidad de luz difractada calculada

Este tipo de holograma cuantizado en 2 niveles es conocido como holograma binario[14], y se caracteriza por la aparición de una imagen gemela, lo cual es una desventaja pues la eficiencia de difracción se hace menor del 50%. La aparición de esta imagen gemela es consecuencia de que se producen dos ordenes de difracción, 1 y -1.El holograma binario ofrece ventajas en la fabricación, pues al poseer sólo dos niveles de fase su tallado se hace con mayor exactitud.

Al calcular hologramas con mayor número de fase al binario ya no se presenta la imagen gemela, pues al aumentarse la eficiencia de difracción la mayor cantidad de energía se va concentrando en la ventana de señal y en el área fuera de la ventana de señal va disminuyendo. En la imagen 5.9 se muestra un holograma con $Z=4$ y su respectivo patrón de difracción.

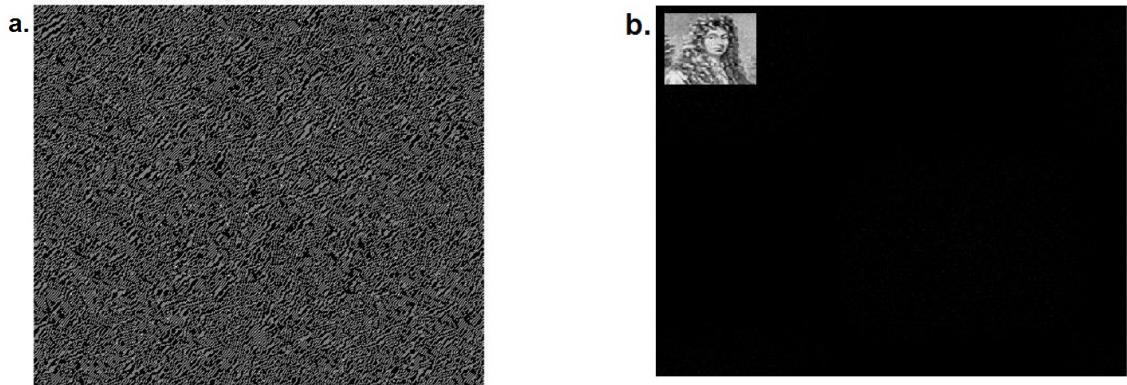


Figura 5.9: (a)Holograma cuantizado en 4 niveles e (b)intensidad de luz difractada calculada

En la gráfica 5.10 se observa que el comportamiento es diferente a los hologramas análogos, la razón es que bajo cada cambio de paso son menos los valores que no son tomados a cuantizar hasta el paso final donde todos los valores de fase son cuantizados a Z niveles, es decir en cada paso se restringe más el cálculo. Además se observa que el número de fases es proporcional a la eficiencia de difracción. En la tabla 5.1 se registran algunos datos de eficiencia y SNR para algunos niveles Z de cuantización.

Cuadro 5.1: Eficiencia de difracción y SNR para algunos niveles de cuantización bajo el coeficiente Parseval.

Z	Eficiencia de difracción	SNR
2	0.40	181
3	0.68	208
4	0.75	227

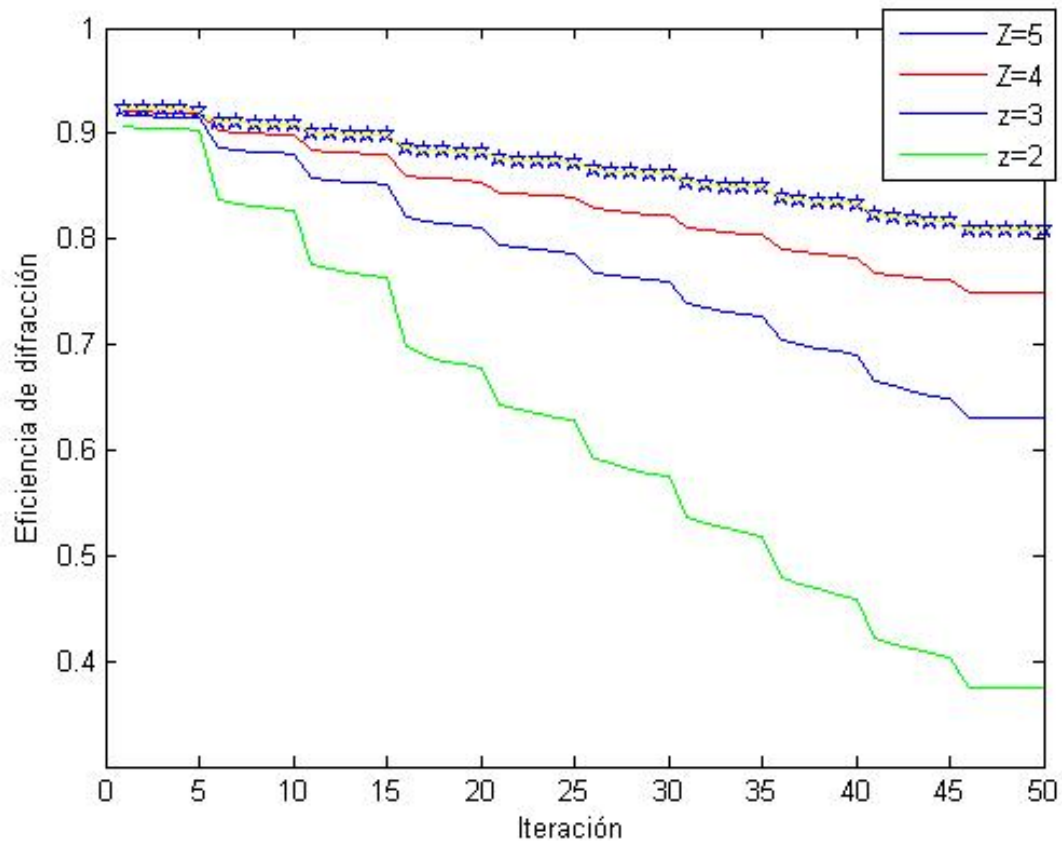


Figura 5.10: Eficiencia de difracción Vs. Nivel de cuantización

5.3. CGH's para Señales *On-Axis* y/o *Off-Axis*

En el cálculo de hologramas se define una terminología asociada con la ubicación de la ventana de señal. Cuando la ventana de señal está posicionada en el centro de la ventana de trabajo, esto es $x_0 = 0$, es definida como una señal *on-axis*. De modo contrario, es decir, $x_0 \neq 0$, la señal es definida como *off-axis*.

Realizando distintos cálculos se ha demostrado que las señales *off-axis* poseen una mayor eficiencia de difracción que las señales *on-axis*. La explicación a esta situación radica en el hecho de que con una ubicación apropiada de la ventana de señal se puede lograr separar el ruido de la señal, satisfaciendo así la condición de la ecuación (4.13). Los patrones de difracción mostrados en las

imágenes 5.11 y registrados en la tabla 5.2 ilustran esta situación.

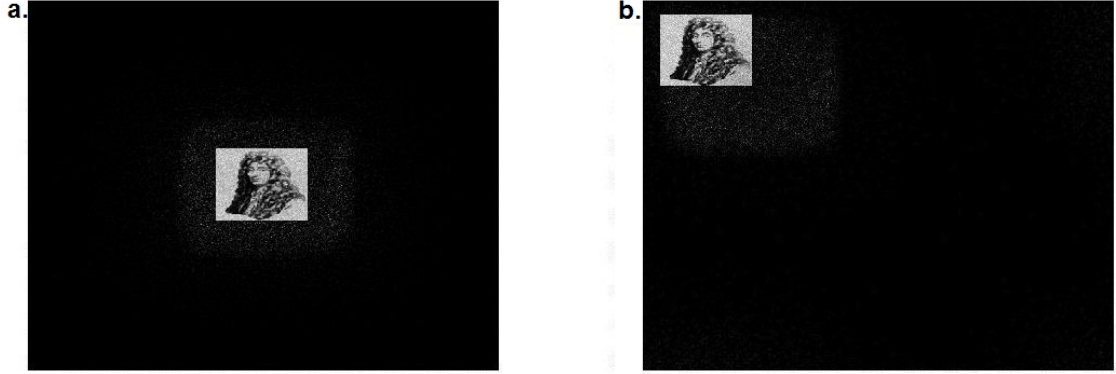


Figura 5.11: (a) Señal *on-axis* y (b) señal *off-axis*

Cuadro 5.2: SNR y eficiencia de difracción en señal *on-axis* y *off-axis*

Z=3	Eficiencia de difracción	SNR
<i>on-axis</i>	0.61	226
<i>off-axis</i>	0.64	305

Otra ventaja que presenta el cálculo de hologramas con señales *off-axis* es que durante la materialización del elemento óptico difractivo se generan errores de fabricación dados por imperfecciones en el tallado consecuentemente estas imperfecciones pueden producir la aparición de puntos luminosos en el centro o difracciones de orden cero al momento de la reconstrucción óptica. Esto evidencia una desventaja amplia del cálculo de hologramas numéricos con señales *on-axis* puesto que la información de interés puede coincidir en la misma ubicación con el punto luminoso.

5.4. Coeficiente Parseval y Coeficiente Wyrowski

En el cálculo de holograma el uso de un coeficiente de convergencia implementado al algoritmo de cálculo (para este caso el IFTA) es de vital importancia, pues la eficiencia de difracción de los

hologramas está netamente ligada a el uso del parámetro.

En muchos estudios es utilizado de manera clásica un coeficiente dado por Wyrowski [4] que ofrece buenos resultados (ver sección 3.2 y 3.3), pero en esta investigación de manera alternativa, se han calculado los hologramas con un coeficiente basado en el principio de conservación de energía o principio de Parseval (5.1), el cual se ha denominado coeficiente de Parseval (sección 3.4).

El uso de este coeficiente dentro del algoritmo iterativo de cálculo demuestra una menor presencia de ruido y una mejoría en la eficiencia de difracción en los hologramas calculados. En las gráficas 5.12 se observa la ventana de señal de patrones de difracción de dos hologramas, uno calculado con el coeficiente clásico dado por Wyrowski y otro por el coeficiente alternativo. En la gráfica 5.13 se muestra la eficiencia de difracción durante el ciclo iterativo para ambos coeficientes en hologramas análogos.

Aunque en el holograma calculado con el coeficiente de Wyrowski presenta menos convergencia, las curvas de eficiencia de difracción de ambas no muestran mucha diferencia. La razón de esta cercanía es que el cálculo de la eficiencia de difracción es basado en la medición de la energía en la ventana de señal, consecuentemente en la ventana de señal del holograma de Wyrowski la presencia de ruido introduce un valor de energía aumentando el valor numérico en la eficiencia difracción. Entonces esta medida no evidencia con claridad la diferencia en la convergencia del cálculo entre ambos coeficientes por lo que hace necesario otras medidas.

En la gráfica 5.14 se ilustra el SNR durante el ciclo iterativo del holograma análogo se puede observar que la diferencia entre ambas medidas marca una mayor diferencia, esto es consecuencia de que el coeficiente parseval presenta una mayor disminución del error en comparación con el coeficiente Wyrowski.

La entropía Shannon es definida como la cantidad de ruido o desorden que contiene o libera un sistema, está dada por

$$E(x_i) = \sum_{i=1}^N -p \log_2(p(x_i)), \quad (5.2)$$

donde p contiene el histograma para la intensidad de la imagen [23]. En 5.15 se ilustra la medida de la entropía de Shannon en la ventana de señal, se observa que inicialmente la entropía es alta para ambos coeficientes dada la mayor presencia de ruido durante el inicio del ciclo iterativo pero luego la entropía es mucho menor en el coeficiente Parseval que en el de Wyrowski. De lo que se concluye que la cantidad de ruido es mucho mayor en el coeficiente de Wyrowski lo que aumenta la aleatoriedad del cálculo en cada iteración.

En 5.16 se ilustra la medida de la entropía de manera global, fuera y dentro de la ventana de señal, se observa que la entropía en el coeficiente de Parseval es mucho mayor, de este comportamiento puede ser interpretado que hay un aumento en la entropía fuera de la ventana de señal para que se disminuya la entropía al interior de esta.

Ambas gráficas muestran diferencias más notables que en 5.13 para el cálculo de hologramas con ambos coeficientes, evidenciando un mejor comportamiento de los hologramas calculados con el coeficiente de Parseval.

Cuadro 5.3: SNR y eficiencia de difracción en ambos coeficientes

Z=3	Eficiencia de difracción	SNR
Wyrowski	0.62	140
Parseval	0.68	208

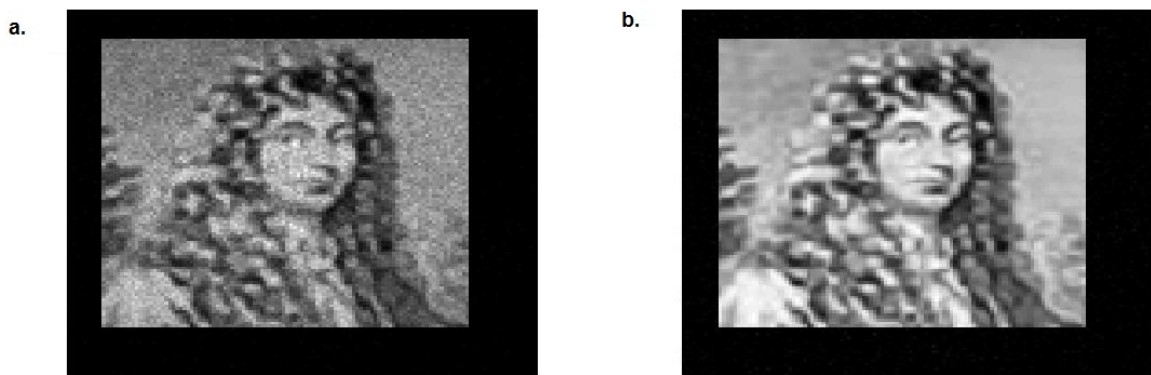


Figura 5.12: difracción de hologramas calculados con: (a) coeficiente wyrowski y (b) coeficiente Parseval

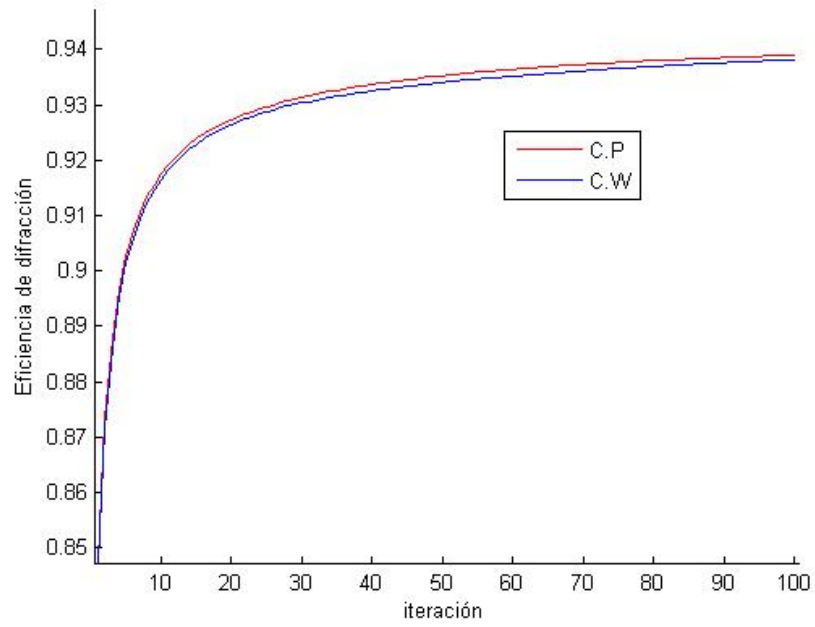


Figura 5.13: Eficiencia de difracción en hologramas análogos calculados con ambos coeficientes

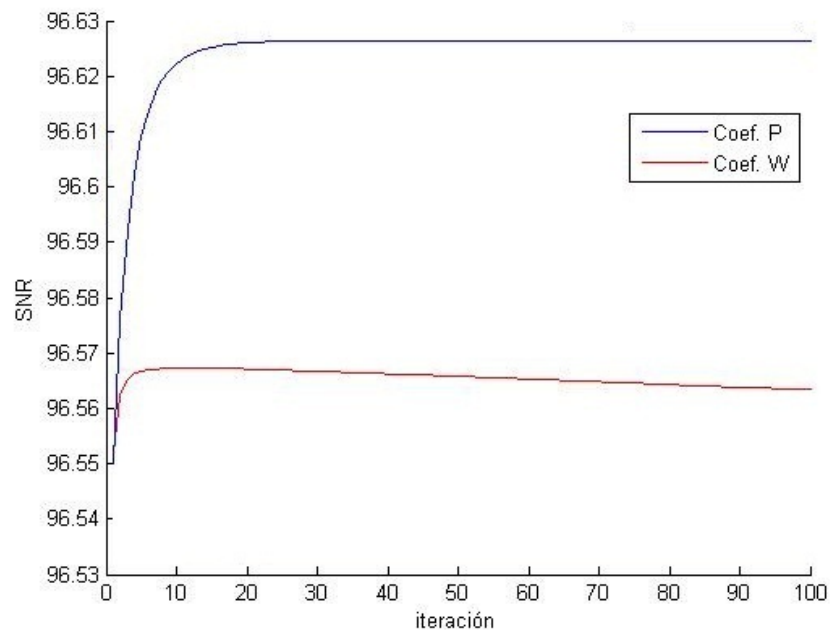


Figura 5.14: Medida de $10 * \lg(SNR)$ para ambos coeficientes

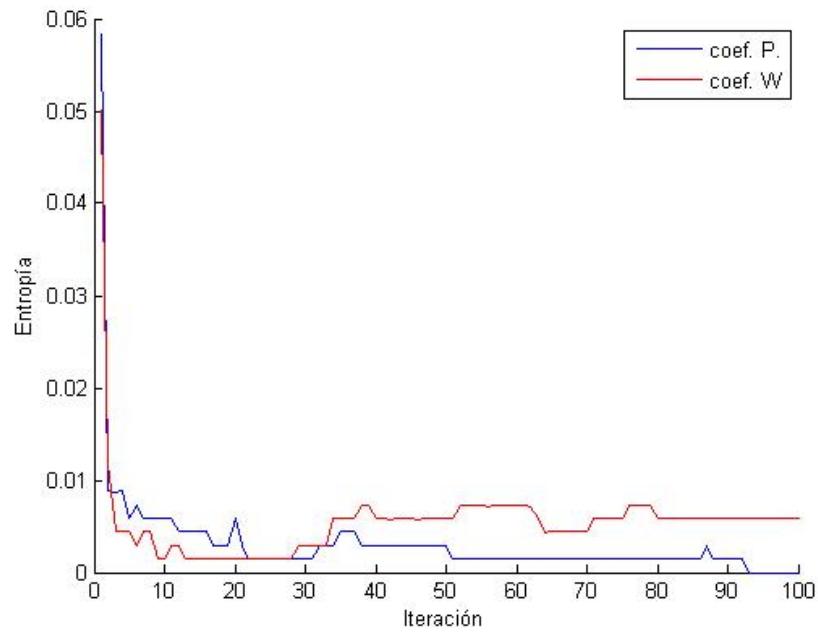


Figura 5.15: Medida de la entropía en el patrón de difracción calculados con ambos coeficientes

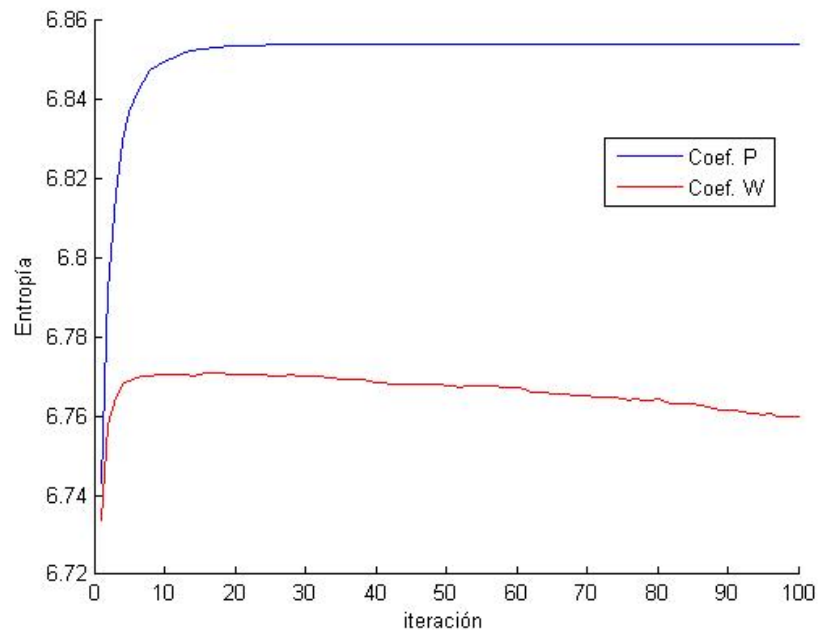


Figura 5.16: Medida de la entropía en el patrón de difracción calculados con ambos coeficientes

5.5. Otros Aspectos sobre el Algoritmo para el Cálculo de CGH's

Anteriormente se mostró la necesidad de usar un operador de cuantización progresiva para evitar el estancamiento dado por la cuantización directa (ver ecuación 17). El criterio usado para el cambio de paso durante este proceso fue un número “q” de iteraciones. La utilización de un criterio de error durante los dos primeros ciclos de iteraciones, el uso exclusivo de la libertad de la fase y el posterior uso de ambos grados de libertad amplitud y fase, ambos en el holograma análogo, hace pensar que este criterio de error puede ser introducido en el operador de cuantización progresiva, de manera que para ir de un paso a otro se permitirá un error y no un número de iteraciones dado.

El valor que se toma de criterio de error, es un promedio del error obtenido en un determinado número de iteraciones en cada paso, en la tabla 5.4 se muestran los resultados obtenidos en este nuevo criterio para el cambio de paso y en la gráfica 5.17 se observa el comportamiento del error a medida que el algoritmo itera.

Cuadro 5.4: SNR y eficiencia de difracción con uso del nuevo criterio

Regla	Eficiencia de difracción	SNR
5 iteraciones	0.75	227
criterio de error	0.81	303

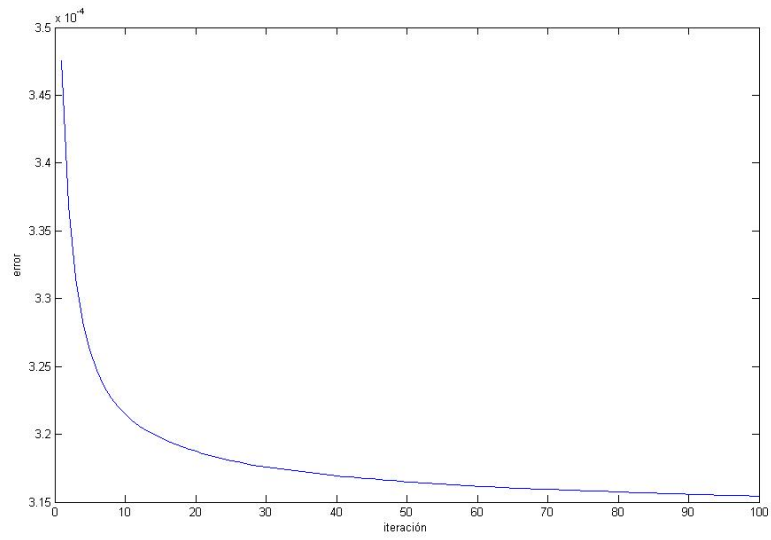


Figura 5.17: Gráfica de error contra iteraciones

6

CÁLCULO DE HOLOGRAMAS NUMÉRICOS POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA ADAPTADOS AL COEFICIENTE PARSEVAL

Los hologramas numéricos de Fresnel son una de las aplicaciones dadas gracias al uso de la transformación de Fourier fraccionaria. Básicamente estos hologramas tienen la facultad de reconstruir varias imágenes [8] dada la difracción de Fresnel de múltiples hologramas localizados en diferentes distancias del plano imagen (ver Figura 6.1).

Es bastante común el uso de estos hologramas en el campo de la encriptación de datos y en la fabricación de hologramas de seguridad con marcas de agua. En la literatura científica también son conocidos como hologramas digitales de Fresnel en cascada o CFDH's (*cascaded Fresnel digital hologram*).

El objetivo que se pretende alcanzar en esta sección es el cálculo de dichos hologramas y el análisis

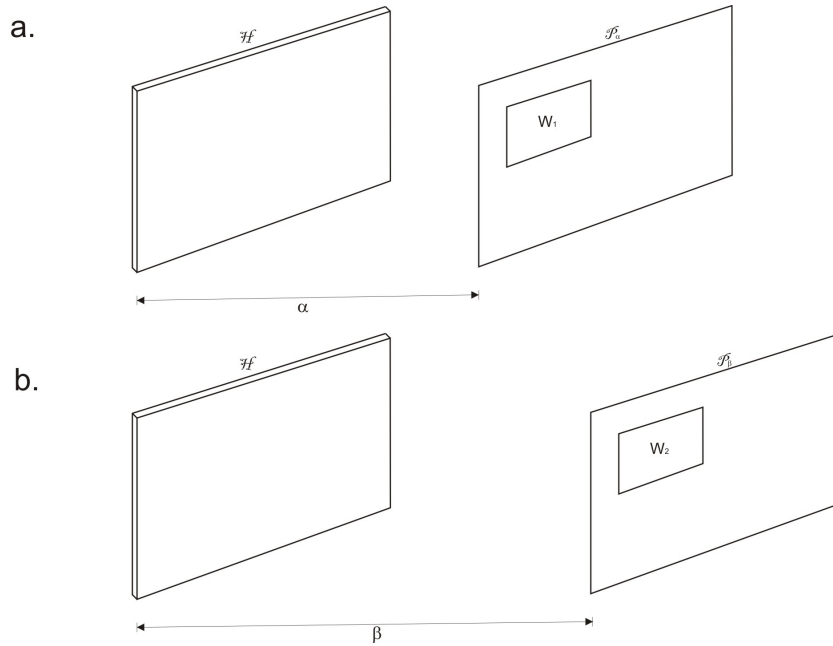


Figura 6.1: (a)ilustración del holograma H y su patrón de difracción en el plano P_α (b)holograma H y su otro patrón de difracción en el plano P_β . W_1 y W_2 ventanas de señal respectivas

competente a los problemas de convergencia y alta eficiencia de difracción, haciendo uso de las herramientas iterativas que fueron de gran efectividad en el cálculo de hologramas de Fourier ordinarios.

6.1. Problema de Estancamiento en el Cálculo de Hologramas Numéricos por Transformación de Fourier Fraccionaria

Durante el cálculo de los hologramas numéricos de Fresnel con un solo patrón de difracción, es decir, haciendo uso del IFTA (ver gráfica 4.2) pero con la utilización de la transformación de Fourier fraccionaria, se observa un estancamiento en los ordenes menores a 1. Este problema de estancamiento se puede interpretar claramente de los cálculos de las eficiencias de difracción de los hologramas calculados en distintos órdenes (ver cuadro 6.1). Una posible explicación a este

problema, puede ser el hecho de que no exista una aproximación de la solución con una buena eficiencia de difracción y un SNR bajo para los órdenes inferiores en la transformación de Fourier fraccionaria; pueden existir algunas formas de solucionar este problema de estancamiento, una de ellas puede ser la búsqueda de un coeficiente implementado en el algoritmo que permita una mayor convergencia en ordenes menores a 1, otra posible solución podría surgir de un análisis exhaustivo en el algoritmo utilizado para implementar la TFFr.

Para los estudios posteriores se utilizarán ordenes entre 1 y 0.9, el problema del estancamiento en órdenes inferiores se deja como un problema abierto.

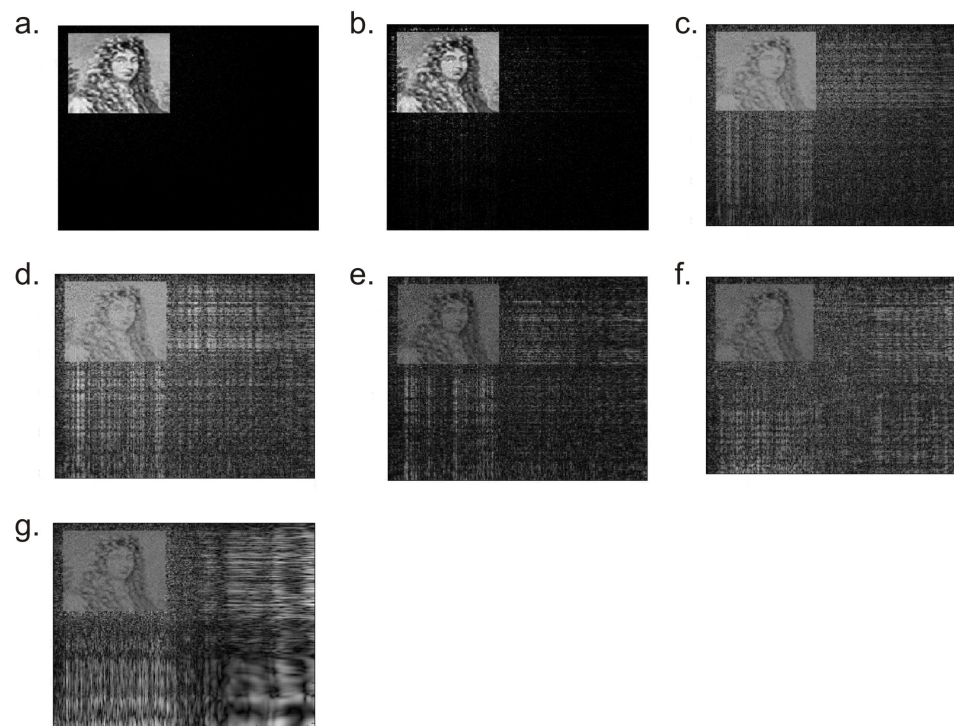


Figura 6.2: problema de estancamiento con la disminución del orden de la transformación. (a) $a=1$, (b) $a=0.9$, (c) $a=0.8$, (d) $a=0.7$, (e) $a=0.6$, (f) $a=0.5$, (g) $a=0.1$

Cuadro 6.1: Orden de la transformación y eficiencia de difracción

orden	Eficiencia de difracción	SNR
1	0.91	399
0.9	0.68	401
0.8	0.4	360
0.7	0.21	140
0.6	0.13	107
0.5	0.05	148
0.4	0.03	146
0.3	0.07	121
0.2	0.06	103
0.1	0.05	127

6.2. Algoritmo Para el Cálculo de Hologramas Numéricos de Fourier Fraccionarios

Similar al procedimiento para obtener hologramas de Fourier de sólo fase, un método de búsqueda de una fase apropiada φ para obtener hologramas de Fresnel, es la aplicación de un algoritmo iterativo de transformación de Fourier fraccionaria. En la figura 6.3 se muestra un diagrama de este algoritmo, nótese que para pasar de $g_j^\alpha(\vec{r})$ a $g_j^\beta(\vec{q})$ es necesaria una transformación de orden $\beta - \alpha$; los operadores U , X y Y expresan en este caso las reglas para satisfacer los constreñimientos en los planos P^α , P^β y el plano del holograma. Se usan los siguientes operadores:

$$Y[\bar{g}_j^\alpha(\vec{r})] = g_{j+1}^\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} g_0^\alpha(\vec{r})e^{i\Psi_j(\vec{r})}, & \vec{r} \in W_r \\ \mathfrak{F}^\alpha[G_i](\vec{r}), & \vec{r} \notin W_r \end{cases} \quad (6.1)$$

$$U[\bar{g}_j^\beta(\vec{q})] = g_j^\beta(\vec{q}) = \begin{cases} g_0^\beta(\vec{q})e^{i\phi_j(\vec{q})}, & \vec{q} \in W_q \\ \mathfrak{F}^{\alpha-\beta}[g_i](\vec{q}), & \vec{q} \notin W_q \end{cases} \quad (6.2)$$

$$X[G_j(\vec{s})] = \bar{G}_j(\vec{q}) = e^{i\varphi_i(\vec{s})}, \quad (6.3)$$

donde $\Psi_j(\vec{r})$ es la fase de $\bar{g}_j^\alpha(\vec{r})$, $\phi_j(\vec{q})$ es la fase de $\bar{g}_j^\beta(\vec{q})$ y $\varphi_i(\vec{s})$ la fase de $G_j(\vec{s})$.

El operador Y mantiene la fase $\Psi_j(\vec{r})$ dentro de W_r , reemplaza el módulo dentro de W_r por $g_0^\alpha(\vec{r})$ y no elimina la amplitud compleja fuera de W_r . De manera similar el operador U mantiene la fase $\phi_j(\vec{q})$ dentro de W_q , reemplaza el módulo dentro de W_q por $g_0^\beta(\vec{q})$ y no elimina la amplitud compleja fuera de W_q . Los efectos de ambos operadores fuera de las ventanas de señales, representan el uso de ambos grados de libertad, amplitud y fase, durante la iteración. El operador X reemplaza el módulo de $G_j(\vec{s})$ por el valor de 1, es decir satisface el constreñimiento de módulo constante para permitir el máximo paso de energía.

En el proceso realizado anteriormente se tiene aún una fase analoga $\varphi_i(\vec{s})$ en la distribución $e^{i\varphi_i(\vec{s})}$, Esta fase debe ser discretizada de manera similar a la fase de los hologramas de Fourier para poder realizarse su materialización.

En la figura 6.4 se ilustra el patrón de difracción de un holograma numérico de Fresnel calculado con el algoritmo mencionado anteriormente, en 6.5 se observa el comportamiento de la eficiencia de difracción en ambos órdenes.

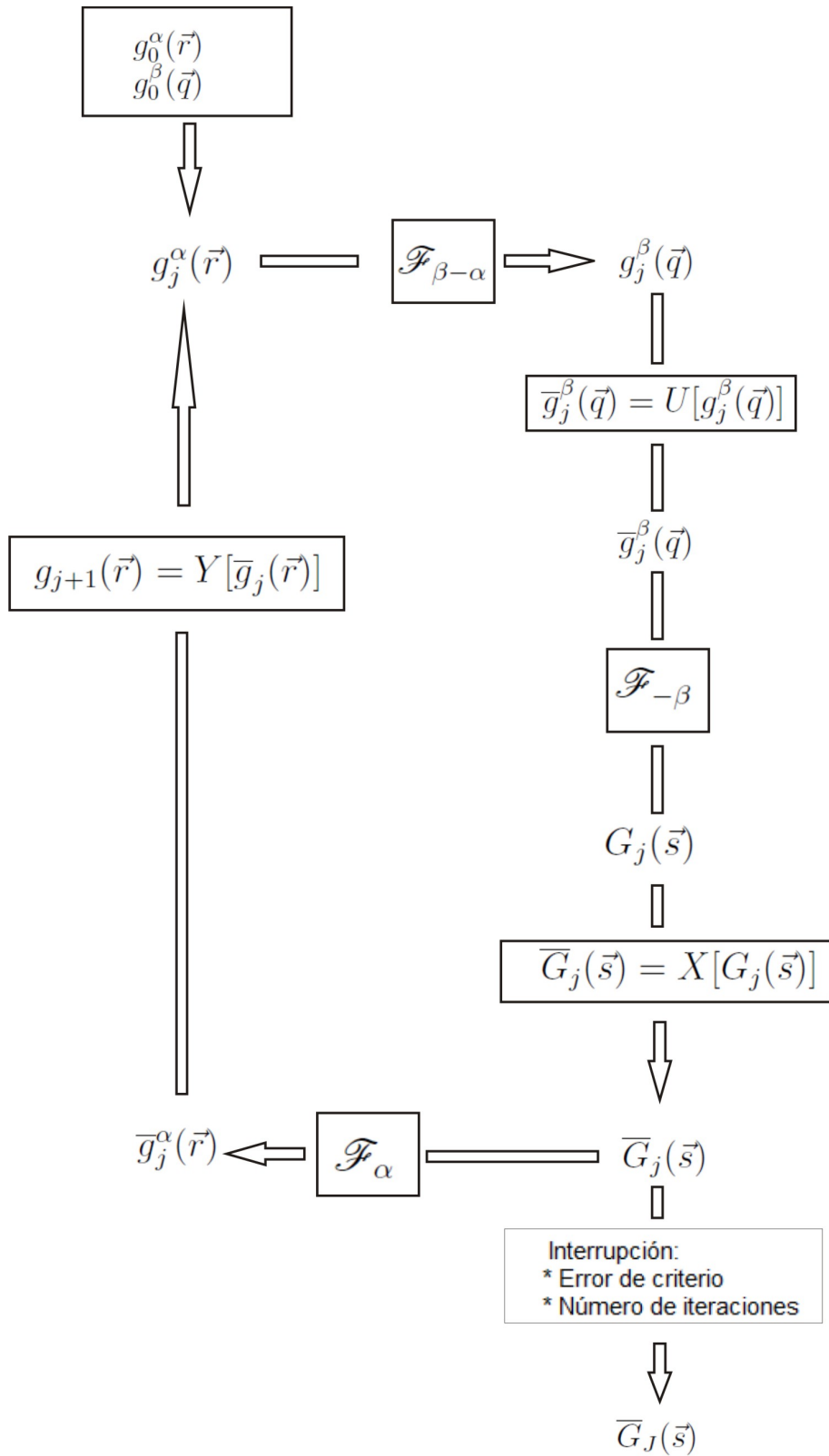


Figura 6.3: Diagrama del algoritmo iterativo de la transformación de Fourier fraccionaria

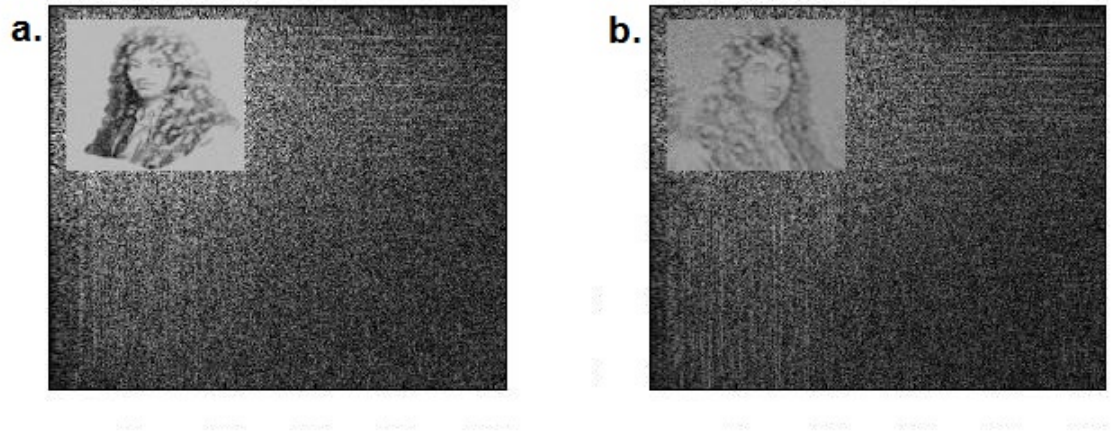


Figura 6.4: patrones de difracción de holograma numérico de Fourier fraccionarios con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$

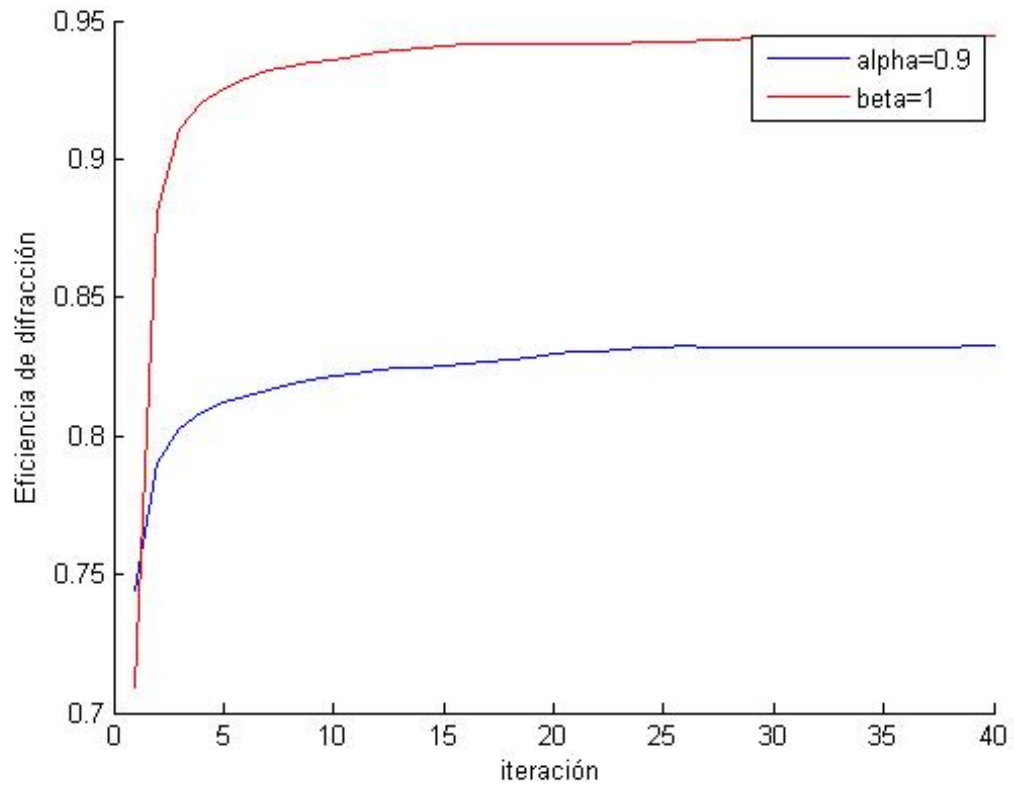


Figura 6.5: Eficiencias de difracción con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$

Cuadro 6.2: Eficiencia de difracción teórica y SNR para el holograma calculado

Z	Orden	η	SNR
4	α	0.64	201
-	β	0.71	227

7

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

- El algoritmo usado en el cálculo de hologramas de Fourier se encuentra compuesto por tres etapas, la primera etapa es el cálculo de hologramas haciendo uso único del grado de libertad de la fase, donde se elimina la amplitud compleja fuera de la ventana de señal. En la segunda etapa se hace uso de ambos grados de libertad, permitiendo la amplitud compleja fuera de la señal. En la tercera etapa se discretiza el holograma analógico resultante de la segunda etapa a través de un proceso de paso progresivo. Con la división en estas etapas se lograron mayores eficiencias de difracción en los resultados.
- En esta investigación se lograron los objetivos de cálculo de holograma numérico de Fourier bajo otro coeficiente de convergencia distinto al de Wyrowski [4], se describió el desarrollo del operador de transformación de Fourier fraccionaria, implementación de este operador al algoritmo iterativo para el cálculo de hologramas y cálculo de hologramas numéricos de Fresnel bajo el mismo coeficiente de convergencia usado en el cálculo de hologramas de Fourier.
- Una de las tantas razones por la que se dificultó el cálculo de los hologramas numéricos, es el hecho de que sumado a la restricción de módulo constante, la fase debe estar discretizada a Z niveles. En esta investigación se lograron buenos resultados de cálculos de hologramas con estas restricciones obteniendo eficiencias de difracción considerablemente buenas.
- Se puede observar en las tablas la relación que existe entre la eficiencia de difracción y el

SNR, lo que muestra los datos registrados es que al aumento de eficiencia de difracción se da un aumento del SNR, una posible explicación a este comportamiento se puede atribuir al hecho de que la SNR aumenta en cantidad al existir menor nivel de ruido y la disminución de presencia de ruido es característica de una alta eficiencia en difracción.

- Aunque en los hologramas calculados con el coeficiente de Wyrowski presentaron menos convergencia (ver 5.12), las curvas de eficiencia de difracción de ambas no mostraron mucha diferencia (ver 5.13). Se concluye que la razón de esta cercanía es que el cálculo de la eficiencia de difracción es basado en la medición de la energía en la ventana de señal, consecuentemente en la ventana de señal del holograma de Wyrowski la presencia de ruido introduce un valor de energía aumentando el valor numérico en la eficiencia difracción. Entonces estas medidas no evidenciaron con claridad la diferencia en la convergencia del cálculo entre ambos coeficientes por lo que hizo necesaria otras medidas (ver 5.14 y 5.15).

- La medida de SNR para ambos coeficientes dada en la figura (5.14), evidenció una amplia diferencia entre ambos. De este comportamiento se concluye que hay una mejor relación SNR en los hologramas calculados con el coeficiente de Parseval consecuencia de una menor cantidad de ruido presente en comparación con los hologramas calculados con el coeficiente Wyrowski.

- Es preciso mencionar que la cuantización en Z niveles de los hologramas es exclusivamente debido al proceso de materialización, algunos autores como Goodman definen la eficiencia de difracción como $\bar{\eta} \approx (\text{sinc}(1/Z))^2 \cdot \eta$, donde η es la eficiencia de difracción de la estructura analógica [13]. Dejando la eficiencia de difracción teórica calculada con esta fórmula como $\eta_{teorica}$ y la eficiencia calculada en el cuadro (4.1) como $\eta_{calculada}$, se agrupan los datos y el cálculo de error en la tabla 7.1 dada a continuación.

Cuadro 7.1: Eficiencia de difracción teórica y eficiencia de difracción calculada

Z	$\eta_{calculada}$	$\eta_{teorica}$	error porcentual
2	0.40	0.37	3
3	0.68	0.62	6
4	0.75	0.73	2

- Las máquinas encargadas de tallar el holograma tienen la capacidad de fabricar hologramas de hasta 5 niveles de fase, pero la precisión del tallado es inversamente proporcional al número de estos niveles; por lo cual los hologramas binarios se materializan con mayor precisión y los de 5 niveles introducen un mayor error de fabricación. Este aspecto muestra que aunque la cuantización en un mayor número de niveles de fase del hologramas conlleva a una mejor eficiencia de difracción como se observó en los resultados obtenidos, también representa inconvenientes para la materialización del elemento óptico difractivo. Razones como la anterior permiten pensar a futuro en mejorar los cálculos, de tal manera que se puedan calcular hologramas cuantizados en 2 y 3 niveles de fase con la mayor eficiencia de difracción posible.
- Por cuestiones temporales, en esta investigación sólo se mencionan aspectos del cálculo numéricos de hologramas. Existen tratamiento a otros aspectos relacionados con los hologramas numéricos tales como la aparición del ruido coherente al momento de la reconstrucción óptica, estos problemas ya han sido tratados con técnicas implementadas en el mismo algoritmo de cálculo de los hologramas [8]. Como un trabajo a futuro se podría generar un estudio sobre el problema, analizar las técnicas existentes e intentar mejoras o buscar otras técnicas alternativas para la disminución de ruidos coherentes implementadas al mismo algoritmo.
- En los algoritmos utilizados para el cálculo de hologramas numéricos se definió un coeficiente, éste permitió el cumplimiento de la ley de Parseval y una mayor convergencia en el cálculo. Por la experiencia obtenida en esta investigación es acertado afirmar que el uso de un coeficiente diferente o uno adicional, puede llevar a una mayor convergencia en el cálculo del holograma, esto se puede evidenciar en una mayor cantidad del SNR, el estudio de un nuevo coeficiente

se deja como motivación para posteriores investigaciones.

- Para los hologramas numéricos de múltiples patrones de difracción existe una limitación en el operador de la transformación de Fourier fraccionaria, pues sólo es posible calcular hologramas cuyo orden de transformación se encuentre entre 0.9 y 1, en órdenes inferiores surgen problemas en la convergencia del cálculo y por consiguiente resulta una baja eficiencia de difracción.
- En teoría, la mayoría de las aplicaciones potenciales de la holografía tradicional tales como el almacenamiento de información y obtención de imágenes tridimensionales, pueden ser posibles en la holografía generada por computador. Sin embargo, estas situaciones están limitada por la capacidad de procesamiento de los computadores. Aún si los patrones de hologramas deseados pudieran ser calculados, los actuales hologramas que se fabrican dependen de factores tales como los materiales en los cuales son impresos y las limitaciones de la manufactura misma. Como un trabajo posterior se podría investigar en profundidad acerca de estas aplicaciones y las limitaciones mencionadas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. Gabor. A new microscope principle. *Nature*, 161 :777, 1948.
- [2] A. Beléndez. Holography: science, art and technology. *Rev. Bras. Ensino Fís.* vol.31 no.1 São Paulo Apr. 2009
- [3] A. W. Lohmann and D. P. Paris, Binary Fraunhofer Holograms, Generated by Computer, *Appl. Opt.* 6, 1739 (1967).
- [4] F. Wyrowski. Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized, blazed phase structures. *Journal of the Optical Society of America A* 7, 961-969 (jun 1990).
- [5] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. SA practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures, *J. Opt. Soc. Am.* 35, 237-246 (1972).
- [6] C. Chen and A. A. Sawchuk. Nonlinear least-squares and phase-shifting quantization methods for diffractive optical element design. *APPLIED OPTICS* Vol. 36, No. 29, 7297-7306 (1997)
- [7] Victor Namias, The Fractional Fourier Transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths. Appls.*, **25**, 241-265, (1980).
- [8] Torres, Rafael. Holografía numérica por transformación de fourier fraccional. Proyecto Fin de Carrera, Maestría en Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia (2003).
- [9] Torres, Rafael. Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico. Proyecto Fin de Carrera, Doctorado en Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia (2008).

- [10] J.F. Heanue, M.C. Bashaw, and L. Hesselink. Volume holographic storage and retrieval of digital data. *Science*, 265:749-752, 1994.
- [11] Y. Owechko and B.H. Soffer. Holographic neural networks based on multi-grating processes. In B. Javidi and J.L. Horner, editors, *Real-Time Optical Information Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [12] Tricoles, G. "Computer generated holograms: an historical review". *Appl. Opt.* 26, 20.(1987).
- [13] Goodman, Joseph. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw Hill, New York, 1996.
- [14] W. Lee, Binary computer-generated holograms, *Appl. Opt.* 18, 3661-3665 (1979)
- [15] S. H. Tao and X. Yuan. Practical implementation of the phase-quantization technique in an iterative Fourier-transform algorithm, *Appl. Opt.* Vol. 43, No. 10, 2089-2092 (2004)
- [16] 2005 , Prakash Mehta, <http://www.Hololight.net>, All Rights Reserved.
- [17] F. Fetthauer, C. Stroot, O. Bryngdahl. On the quantization of holograms with the iterative Fourier transform algorithm, *Com. Opt.* Vol. 136, 7-10 (1997)
- [18] Deng, Shaogeng and Liu Liren. Cascaded Fresnel digital hologram and its application to watermarking. *Optica Applicata*, Vol XXXVI, No. 2-3. (2006).
- [19] Brigham, Oren. *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [20] Sundararajan D. *The Discrete Fourier Transform Theory, Algorithms and Application*. World Scientific Publishing, New Jersey, 2001.
- [21] Leng Yi Ren. *Computer Generated Holography*. Thesis submitted in partial fulfillment for the requirements for the degree of bachelor of science, Department of physics, Faculty of science, National University of Singapore, 2009.
- [22] P. Hariharan, *Optical Holography: Principles, techniques and applications*. Cambridge University Press, New York, 1986.
- [23] Gonzalez, R.C., R.E. Woods, S.L. Eddins, *Digital Image Processing Using MATLAB*, New Jersey, Prentice Hall, 2003, Chapter 11.

Apéndice A

CÓDIGO PARA CÁLCULO DE CGH'S DE FOURIER

```
clear all
clc
%-----
global Z n m delta N Xo Yo;
%niveles de cuantización
Z=4;
delta=2*pi/Z;

%introducir imagen y definir tamaño ventana de señal nxm
n=100;
m=100;
h=double((imread('huygens.jpg')));
h=h(:,:,1);
h = imresize(h, [n m]);
g=sqrt(h);
energiah=sum(sum(h));

%Tamaño holograma N
```

```

N=512;
w=zeros(N);

%ubicación ventana de señal en la posición (Xo,Yo)
Xo=11;
Yo=11;
w(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)=g;

%stepwise
epsilon=[0.3 0.5 0.6 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1];

%-----
%agregandofasealeatoria\\
w=(N/sqrt(sum(sum(h))))*w.*exp(i*2*pi*rand(N));
%-----
%solo fase-----
for iten=1:100
g=N*ifftshift(ifft2(fftshift(w)));

teta=angle(g);

g1=exp(i*teta);

G=(1/N)*ifftshift(fft2(fftshift(g1)));
%figure(1)
%imagesc(abs(G).^2);colormap(gray)
% imagesc(log(1+abs(G)));colormap(gray)

phi=i*angle(G);
w(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)=(N/sqrt(sum(sum(h)))*(sqrt(h)).*(exp(phi(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1))));

```

```

end

pause

%amplitud y fase-----
for ite=1:100
    g=N*ifftshift(fft2(fftshift(G)));
    teta=angle(g);
    g1=exp(i*teta);

    G=(1/N)*ifftshift(fft2(fftshift(g1)));

    %figure(1)
    %imagesc(abs(G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)).^2);colormap(gray)
    c=(sum(sum(abs(G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)).^2))/(energiah));

    phi=i*angle(G);

    G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)=(sqrt(c*h)).*(exp(phi(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)));
end

pause

pause

%cuantización progresiva-----
for ci=1:10
    for ite=1:5
        g=N*ifftshift(fft2(fftshift(G)));
        %-----
        %cuantización

```

```

teta=angle(g);
U=teta+pi;
[o]=find(U<=(0.5*delta*epsilon(ci)));
teta(o)=-pi;
    for z=1:Z
        [y]=find(((z-(0.5*epsilon(ci)))*delta)<U & U<=((z+(0.5*epsilon(ci))))*delta);
        teta(y)=-pi+(z*delta);
    end

[u]=find(U>((Z-0.5*epsilon(ci))*delta));
teta(u)=pi;

%-----
g1=exp(i*teta);

G=(1/N)*ifftshift(fft2(fftshift(g1)));

% figure(1)
% imagesc(abs(G).^2);colormap(gray)
c=(sum(sum(abs(G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)).^2))/(energiah));

ED=sum(sum(abs(G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)).^2))/sum(sum(abs(G).^2));
phi=i*angle(G);

G(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)=(sqrt(c*h)).*(exp(phi(Xo:Xo+m-1,Yo:Yo+n-1)));

end
end

```