

APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

MÓNICA ALEYDA ADARME BARAJAS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

MÓNICA ALEYDA ADARME BARAJAS

**Trabajo de Grado para optar el título de
Especialista en Educación Matemática**

**Dirigida por
JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
Doctor**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN.....	13
1. ANTECEDENTES.....	17
1.1.. La semejanza en el proceso enseñanza y aprendizaje.....	17
1.1.1. La proporcionalidad y semejanza.....	17
1.1.2. Aportes al mejoramiento en la enseñanza y aprendizaje.....	19
1.2.. La semejanza en el currículo escolar.....	21
1.2.1 El currículo a nivel nacional.....	21
1.2.2 Los textos escolares.....	22
1.3.. El modelo de Van Hiele en el diseño del currículo.....	24
1.3.1 Características del modelo.....	25
2. MARCO TEÓRICO.....	28
2.1.. Fundamentación matemática sobre el concepto de semejanza de triángulos.....	28

2.2..	La semejanza como objeto de estudio.....	29
2.2.1	Las formas de representación de la semejanza de triángulos.....	29
2.2.2	La clase de tarea para la semejanza de triángulos.....	31
2.3..	El modelo de Van Hiele como orientador en la enseñanza de la semejanza de triángulos.....	32
2.3.1	Descripción de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza de triángulos.....	35
3.	METODOLOGÍA DEL ESTUDIO.....	40
3.1..	Elementos metodológicos sobre la actividad de los estudiantes.....	40
3.2..	La recolección de la información.....	41
3.2.1	Las producciones escritas.....	41
3.2.2	Grabaciones de video.....	42
3.3..	Procedimiento para el análisis de datos.....	42
3.4..	Descripción de la población.....	43

3.4.1	Los estudiantes.....	44
3.4.2	El colegio.....	44
4.	LA EXERIMENTACIÓN.....	46
4.1..	Diseño del experimento.....	46
4.1.1	Las actividades según el tipo de representación.....	46
4.1.2	Las actividades según la clase de tarea.....	47
4.1.3	Las actividades según el modelo de Van Hiele.....	48
4.1.4	La metodología en el desarrollo de las actividades.....	50
4.2..	Contenido matemático de las actividades.....	51
5.	ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN.....	53
5.1	Caracterización de las respuestas de los estudiantes según el nivel de razonamiento.....	54
5.1.1	Respuestas de los estudiantes, como avance en su nivel de razonamiento.....	54

5.2	Síntesis y conclusiones.....	96
6.	CONCLUSIONES GENERALES Y LIMITACIONES.....	100
6.1	Del diseño e implementación de actividades.....	100
6.2	De la actividad de los estudiantes.....	101
6.3	Limitaciones del estudio.....	102
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
	ANEXOS: LAS ACTIVIDADES DE LA EXPERIMENTACIÓN.....	107

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A: Actividad 1.....	109
ANEXO B: Actividad 2.....	110
ANEXO C: Actividad 3.....	112
ANEXO D: Actividad 4.....	113
ANEXO E: Actividad 5.....	115
ANEXO F: Actividad 6.....	117
ANEXO G: Actividad 7.....	118
ANEXO H: Actividad 8.....	120
ANEXO I: Actividad 9.....	121
ANEXO J: Actividad 10.....	123
ANEXO K: Actividad 11.....	124
ANEXO L: Actividad 12.....	125
ANEXO M: Actividad 13.....	127

ANEXO N: Actividad 14.....	128
ANEXO O: Test diagnóstico.....	130

RESUMEN

TITULO: APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

AUTOR: MÓNICA ALEYDA ADARME BARAJAS

PALABRAS CLAVES: semejanza de triángulos según modelo de Van Hiele

La propuesta presenta una experiencia en el aula cuyos objetivos son el diseño e implementación de actividades mediadas por la estructura del modelo de Van Hiele, para la enseñanza del concepto de semejanza en triángulos y el análisis de las formas de razonamiento de los estudiantes a través del desarrollo de las actividades.

Una de las temáticas abordadas es la noción intuitiva del concepto a partir de las características físicas de los triángulos semejantes. Los estudiantes con las primeras actividades, muestran dificultad en la comprensión de los términos “se parecen” y “la misma forma”, por la poca comprensión en la diferencia entre estos. Otra dificultad que surge de los razonamientos de los estudiantes es determinar si son o no de la misma forma las figuras con distinta posición. De ahí que la fase de explicitación es una de las partes importantes del modelo, con mayor necesidad en el proceso enseñanza aprendizaje, porque se logra confrontar ideas entre estudiantes y entre profesor y estudiantes, permitiendo clarificar las dificultades que surgen en el proceso, por ejemplo en relación con la noción intuitiva de triángulos semejantes, queda claro que “conservan la forma”, pero no necesariamente el tamaño, ni tampoco la posición.

En conclusión podemos afirmar que nuestro estudio cumple con los objetivos propuestos porque a través del diseño e implementación de actividades, con la metodología de aprendizaje guiado, se logra que los estudiantes aprendan el concepto de semejanza en forma secuencial y detallada desde la noción intuitiva, pasando por las propiedades y relaciones matemáticas tales como: factor de semejanza, construcciones geométricas de triángulos semejantes, razones de perímetros, alturas y áreas entre las figuras semejantes y por último el uso de criterios para demostrar la semejanza.

*Proyecto de grado

**Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Director Jorge Fiallo Leal

SUMMARY

TITLE: TRIANGLES SIMILARITY LEARNING

AUTHOR: MÓNICA ALEYDA ADARME BARAJAS

KEY WORDS: similarity of triangles by means of Van Hiele's model

This proposal introduces a classroom experience which objectives are to design and implement mediated activities by means of Van Hiele's model, in order to teach the concept of similarity of triangles and the analysis of ways of student's reasoning through the development of activities.

One of the issues under discussion is the intuitive notion of the concept from the physical characteristics of similar triangles. Students show in their first activities comprehension difficulties about terms like "they look alike" and "they are the same shape", because of the poor comprehension in the difference of both of them. Another difficulty that appears at student's reasoning is defining if the shapes with a different position are similar to each other or not. Based on that fact, the explanation stage is one of the most important parts of the model, with a greater need in the teaching and learning process because it is possible to manage to get students confront ideas between themselves and their teacher; letting, in this manner, make clear the difficulties that appear in the process. For instance, dealing with the intuitive notion of similar triangles, it is clear that they "keep the shape" but not necessarily their size or position.

In conclusion, we can state that our study fulfills the objectives proposed, because through the design and implementation of activities with the methodology of guided learning, we can manage to get students learn the concept of similarity in a sequenced and detailed way from the intuitive notion, including properties and mathematical relationships such as: similarity factor, geometric constructions of similar triangles, reasons of perimeters, heights and areas between similar shapes, and finally, the use of criteria to demonstrate similarity.

Graduate Project

Science Faculty

School of Mathematics

Director Jorge Fiallo Leal

INTRODUCCIÓN

Este trabajo lo iniciamos dada la necesidad que tenemos los educadores, de compartir experiencias que favorezcan el proceso enseñanza aprendizaje en el aula. Compartimos el principio de enseñanza propuesto por la NCTM 2000 (*National Council of Teachers of Mathematics*) que afirma: “Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien”, en este sentido, es bueno realizar como primer paso, un diagnóstico que vislumbre lo que saben los estudiantes, sobre el tema de estudio que se desea iniciar, para enfocarlo en lo que deseamos que aprendan, motivarlos e incluso persuadirlos a que lo interioricen, retando a los estudiantes con actividades que generen curiosidad, expectación y buen trabajo.

Moreno y Uribe (2002), afirman que “la enseñanza de la geometría se aborda en forma tradicional, mediante la presentación de una serie de definiciones y fórmulas proporcionadas por el profesor, ilustrada con algunos ejemplos, que los estudiantes se limitan a transcribir para luego memorizarlo y así poder resolver las pruebas de conocimiento o evaluaciones”. En consecuencia, tenemos en nuestras manos, el aportar un granito de arena que permita, enriquecer la práctica pedagógica a la que hemos sido llamados. El interés del estudio sobre el aprendizaje del concepto de semejanza radica, en las diversas dificultades que a través de la experiencia como profesores de matemáticas de secundaria, hemos evidenciado en los estudiantes al resolver problemas donde se involucra dicho concepto. Gualdrón (2011) presenta un estudio detallado de la semejanza de figuras planas, en donde coincide con otros investigadores en que “los estudiantes tienen bajos niveles de comprensión de conceptos relacionados con la semejanza”. Él considera como causas fundamentales de ello el modo en que se

realiza la enseñanza de este tema, limitada comúnmente a la noción intuitiva y la presentación de condiciones matemáticas básicas.

Por otra parte, al revisar algunos textos escolares de las editoriales más conocidas en nuestro país, se verifica que no tienen en cuenta las características particulares de una Educación Matemática de calidad, propuesta por la NCTM (2000), en donde se establece que el aprendizaje de la geometría debe apuntar a que el estudiante describa relaciones y razone sobre los objetos de estudio, más que aprenda definiciones. Además proponen que el tema de proporcionalidad, debe ocupar un buen lugar en el currículo escolar, en el cual se encuentra inmerso, la semejanza.

Hace algunos años, en los programas de matemáticas elaborados por los profesores y en los libros de textos, se planeaba de último la geometría, incurriendo en la falencia de que al estar al final, por la limitante del tiempo, se trabajaba de manera muy abstracta y con excesivo formulismo. Esta forma de trabajo no interesaba en nada a los estudiantes, que veían a la geometría una rama de las matemáticas tortuosa y difícil. Freudenthal (1987; citado en Pozo, 1993), considera que:

“El aprendizaje de las matemáticas es un continuo avance en el proceso de esquematización del estudiante, y este proceso se ve mejorado cuando el mismo estudiante es el que ha de encontrar su propio procedimiento que lleve a la solución”

Por tanto, es necesario ofrecer una enseñanza que enfatice la interrelación de las ideas matemáticas, lo que permite a los estudiantes no solo aprender matemáticas sino también ser conscientes de la utilidad de las matemáticas en su entorno. El éxito se basa en la habilidad para pensar y actuar creativamente ante situaciones propuestas. El estudio que pretendemos iniciar nos motiva a indagar y buscar

respuestas a la pregunta: ¿Qué razonamientos de los niveles 1 y 2 de Van Hiele, evidencian los estudiantes de octavo grado del Centro Educativo Colegio Marta, respecto al aprendizaje de la semejanza de triángulos?

En relación con nuestro estudio, para resolver la pregunta anterior, proponemos la tarea de identificar las maneras que tienen los estudiantes de adquirir conocimientos en el tema de semejanza de triángulos; para ello planteamos el siguiente objetivo general:

- Analizar la evolución del razonamiento en los niveles 1 y 2 según el modelo de Van Hiele, en el aprendizaje de la semejanza de triángulos de los estudiantes de octavo grado del Centro Educativo Colegio Marta.

El anterior objetivo se descompone en los siguientes dos objetivos específicos:

- Diseñar e implementar actividades mediados por la estructura del modelo de Van Hiele, para la enseñanza del concepto de semejanza en triángulos.
- Analizar las formas de razonamiento de los estudiantes en el aprendizaje de la semejanza de triángulos a través del desarrollo de las actividades.

Consideramos que los resultados y conclusiones que arroje este estudio, pueden ayudarnos a construir explicaciones sobre las maneras como razonan los estudiantes durante la solución de tareas de semejanza en triángulos.

Este informe se inicia con una revisión de los antecedentes sobre aspectos importantes al tema en estudio (capítulo 1). La revisión incluye: tesis doctorales sobre implementación de unidades didácticas (principalmente en el tema de semejanza), las propuestas curriculares que el Ministerio de Educación Nacional

dispone para la enseñanza de la semejanza, características generales y uso del modelo de Van Hiele en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Continuamos el informe con el desarrollo del marco teórico (capítulo 2), que contiene la fundamentación matemática y algunas particularidades en el manejo del concepto de semejanza en triángulos. La caracterización de cada nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele y sus descriptores como orientadores en el proceso.

Seguido, se encuentra la metodología del estudio (capítulo 3), en la que aparece la descripción de instrumentos, el procedimiento para el análisis de los datos y una breve descripción de la población. En la experimentación (capítulo 4) se especifica el diseño de actividades, ajustadas desde el marco teórico y el modelo de Van Hiele.

Posteriormente, se llega al análisis de la experimentación (capítulo 5), se analizan las respuestas de los estudiantes al enfrentarse a tareas de semejanza de triángulos, con el fin, de poder determinar su avance en su nivel de razonamiento. Al finalizar se hace una síntesis de la evolución general de los niveles, alcanzado por los estudiantes gestores del estudio.

Por último se dan las conclusiones generales y las limitaciones e implicaciones del estudio (capítulo 6), se hace una reflexión alrededor de los objetivos propuestos y los resultados obtenidos en el estudio. Finaliza este informe con el anexo 1 que contiene las actividades desarrolladas por bloques según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Este estudio es el resultado de aproximadamente un año de trabajo, iniciando con la búsqueda del director, seguido de la aprobación del proyecto de la Especialización y finalizando con la elaboración del informe.

1.

ANTECEDENTES

El principal objetivo de este capítulo es, sintetizar las diversas publicaciones de diferentes investigaciones realizadas hasta ahora sobre el tema de semejanza y la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. El resultado del análisis de dichas investigaciones nos permitirá conocer los antecedentes de la problemática alrededor del objeto en estudio y así poder delimitar nuestro trabajo.

Presentaremos resultados y conclusiones sobre investigaciones que influyen directamente en nuestro estudio. El capítulo está dividido en tres secciones, a saber, la semejanza en el proceso enseñanza y el aprendizaje, la semejanza en el currículo escolar colombiano y el modelo de razonamiento de Van Hiele en el diseño curricular.

1.1. LA SEMEJANZA EN EL PROCESO ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

1.1.1. La proporcionalidad y semejanza

Al relacionar dos triángulos semejantes, se mantienen propiedades métricas como la amplitud de ángulos homólogos y la proporcionalidad entre las longitudes de lados correspondientes. Por tanto, al estudiar la semejanza de triángulos está implícito el concepto de proporcionalidad entre longitudes. Esto nos indica hacer una revisión de investigaciones que han detectado dificultades alrededor de las temáticas.

Las siguientes son investigaciones que han tratado de identificar la naturaleza de la dificultad con el concepto de semejanza; por ejemplo Chazan (1988; citado en Gualdrón, 2011), señala aspectos que inciden en el aprendizaje de la semejanza como: las nociones de semejanza, y el razonamiento proporcional que son errores comunes que manifiestan los estudiantes.

En cuanto a las nociones de semejanza, Chazan (1988) propone, que el uso cotidiano de la palabra “semejante” entendido como “parecido” podría inducir error en los estudiantes al trabajar este término en el contexto matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes pueden pensar que todos los rectángulos son semejantes porque son parecidos en su forma y todos tienen cuatro ángulos rectos. El concepto que implica la semejanza de dos figuras es el de dos figuras “de la misma forma”, aunque pueden ser de distinto tamaño; es necesario, tener claro que esta igualdad de forma implica la igualdad de ángulos homólogos junto con la proporcionalidad de lados homólogos. Algunos investigadores sugieren que una manera de enfrentar esta situación con los estudiantes es plantear tareas donde deban asociar figuras semejantes o “de la misma forma” y “parecidas” como forma especial de clasificación de figuras. Teniendo en cuenta esta sugerencia en el diseño de actividades se planteará a los estudiantes que clasifiquen triángulos “de la misma forma” y “parecidos” para aclarar la noción intuitiva de semejanza de triángulos.

La semejanza de triángulos incluye la idea de proporcionalidad aritmética ampliada a situaciones geométricas. En cuanto al razonamiento proporcional, uno de los errores que los estudiantes cometen por el afán de solucionar tareas de proporcionalidad, es la llamada “estrategia aditiva” (o error aditivo), que consiste en calcular la diferencia entre las cantidades dadas y emplearla en el cálculo de la cantidad desconocida. Por ejemplo al determinar el largo de un rectángulo A cuyo ancho mide 5 cm y es semejante a otro rectángulo B de ancho 2 cm y largo 3 cm. La estrategia aditiva incorrecta sería: “como la diferencia entre los anchos de los

rectángulos es $5\text{ cm} - 2\text{ cm} = 3\text{ cm}$, entonces el rectángulo A tiene por largo $3\text{ cm} + 3\text{ cm} = 6\text{ cm}$, siendo 7,5 el valor correcto proporcional”. Este error ha sido identificado por varios investigadores entre ellos Piaget, Freudenthal, entre otros. Fiol (1992; citado en Gualdrón, 2011) plantea que se debe ubicar al estudiante frente a problemas prácticos, estructurados para que, inevitablemente se cuestione de este tipo de error y puedan contribuir a que el estudiante lo evite y responda correctamente.

La proporcionalidad en el sentido geométrico se suele trabajar usando la transformación ampliación (o reducción) de figuras. En algunas de las actividades propuestas para los estudiantes, se trabajó situaciones de semejanza de triángulos, con ampliaciones o reducciones a un triángulo dado, indicando las medidas de los lados correspondientes de los dos triángulos, con el fin de generar estrategias visuales y aritméticas, para ayudar al estudiante (a evitar o superar el error) cuestionándole sobre la estrategia aditiva.

1.1.2. Aportes al mejoramiento en la enseñanza y aprendizaje

Existen muy pocas propuestas que planteen estrategias para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza. Encontramos un libro que incluye propuestas generales para la enseñanza de la semejanza, que titula “Proporcionalidad Geométrica y Semejanza” (Grupo Beta, 1997) y por otro lado, trabajos de investigación, que el mismo autor ha desarrollado, tendientes a ofrecer posibilidades de mejoramiento del concepto de semejanza (Gualdrón, 2011).

El Grupo Beta (1997) aporta orientaciones y sugerencias metodológicas para profesores, en el tema de proporcionalidad geométrica y semejanza. La propuesta está constituida por los siguientes aspectos: Un marco legislativo (caso de España), la semejanza en el currículo (por ciclos), bases teóricas sobre

proporcionalidad y semejanza (fundamentación matemática) y una alternativa metodológica (para su enseñanza y aprendizaje). La propuesta es un modelo curricular abierto y flexible, cuenta con tareas de reflexión sobre los conceptos expuestos y notas didácticas que pueden ser utilizadas por el profesor en la preparación de sus clases cuando aborde estos temas.

En cuanto al estudio de triángulos semejantes, el grupo Beta afirma “que tienen una dificultad añadida con respecto a los rectángulos semejantes, y consiste en que mientras en estos los ángulos son todos iguales, rectos, en los triángulos pueden ser todos diferentes”. Por tanto sugieren comenzar el estudio con triángulos equiláteros (para que el estudiante, posiblemente interprete que los ángulos en los triángulos semejantes han de ser iguales), pasando a los rectángulos (para que identifiquen y comparen los ángulos homólogos aunque aparezcan dibujados en distinta posición) y por último trabajar con casos generales (para que posiblemente, identifiquen todas las propiedades que mantienen los triángulos semejantes). En nuestro estudio, seguimos las orientaciones y sugerencias anteriores, para el diseño de actividades en la parte inicial del modelo de Van Hiele (cuyo primer nivel de razonamiento es exclusivamente visual).

Gualdrón (2011), realizó una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje en el concepto de semejanza de figuras planas, en donde participaron un profesor de matemáticas y 27 estudiantes de un curso de décimo grado con edades comprendidas entre 14-16 años, abordó la enseñanza de la semejanza junto con los conceptos de homotecia, el teorema de Thales (que ya reconocían los estudiantes) y aplicaciones. Los resultados del estudio sugirieron que la conexión entre los temas de semejanza, homotecia y el teorema de Thales fue altamente positiva, dado que las formas de razonamiento de los estudiantes aumentaron e incluyeron más argumentos de tipo matemático en sus respuestas, permitiendo así

ampliar el listado inicial de caracterizaciones para los cuatro niveles de razonamiento.

En conclusión, se evidencia que existen relativamente muy pocas propuestas que estén relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de semejanza, por tanto, esto nos motiva a realizar el trabajo que nos hemos trazado sobre el estudio de la semejanza de triángulos.

1.2 LA SEMEJANZA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

1.2.1 El currículo a nivel nacional

En Colombia, después de dos reformas curriculares propuestas por el MEN, en los años 70 y 80 respectivamente y de acuerdo al plan decenal, apareció la propuesta de los *Lineamientos Curriculares* (M.E.N., 1998) para el área de matemática (derivada de la Ley 115 de 1994). El objetivo de los Lineamientos consistió en orientar a las instituciones educativas en la construcción de su propio currículo escolar e incluir el enfoque de resolución de problemas para la enseñanza de la matemática. Los Lineamientos Curriculares permitieron la consolidación de proyectos educativos institucionales (PEI), los cuales debían tener en cuenta las necesidades e intereses de la comunidad educativa y la cultura; sin embargo, esta propuesta generaba una desigualdad, en el sentido de que si cada institución diseñaba y ejecutaba con autonomía su propio currículo, todos los estudiantes del país no tendrían la posibilidad de recibir el mismo nivel de educación.

Como una forma de solucionar en parte esta situación, el MEN, presentó en el año 2002, una serie de documentos *-Estándares Básicos de Competencia-*, que contiene criterios claros sobre lo que deben saber los estudiantes. Los Estándares Básicos de matemáticas se formularon por grupos de grados de: primero a

tercero, cuarto y quinto, sexto y séptimo, octavo y noveno, y décimo y undécimo, además están organizados en cinco pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Para el caso de preescolar (que es obligatorio) se dan orientaciones generales.

El tema de semejanza aparece en el documento de Estándares para los grados octavo y noveno, con los siguientes objetivos:

- *Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre sólidos.*
- *Resolver y justificar problemas con criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas (MEN, 2003).*

En la actualidad, se ha intensificado el estudio de la geometría por la incidencia que tienen en las Pruebas Saber a nivel nacional, permitiendo el desarrollo del mismo pensamiento. Según Los Lineamientos Curriculares se debe procurar que todo nuevo concepto sea aprendido de forma activa y creativa por el estudiante, para que él elabore su propio conocimiento. Se debe vivenciar los elementos geométricos desde lo cercano, con trabajos manuales de recortar, pegar, modelar y a través de la utilización de instrumentos de medida sobre objetos reales.

1.2.2 Los textos escolares

Al analizar algunos textos escolares de editoriales reconocidas a nivel nacional, se puede verificar que en la sección de geometría y en particular de la semejanza, se sigue el modelo tradicional, que consiste en presentación de definiciones, ejemplos, criterios o teoremas y ejercicios, se nota una disminución de la

simbología y demostración de los criterios. Esto justifica en parte la pobre comprensión que los estudiantes tienen del tema en estudio.

Comparando algunos textos del 2007, 2009 y 2010, de diferentes editoriales, vemos que no es notorio el cambio en el desarrollo del tema de semejanza de triángulos, abarcando 4, 6 y 10 páginas respectivamente. En el texto del 2007 para el grado 8°, inician con el tema de congruencia, definen figuras congruentes y triángulos congruentes, muestran los pasos para construir con compás un triángulo congruente a uno dado, se enuncian los criterios o teoremas de congruencia con ejemplos, y luego se pide el desarrollo de ejercicios sobre el tema. En el mismo texto para grado 9° se trabaja el teorema de Thales, se enuncia el Teorema Fundamental de la Semejanza y los criterios con ejemplos y luego proponen un gran número de ejercicios para decidir la semejanza de triángulos.

En el texto del 2009, para el grado 8°, se define el concepto de semejanza y se enuncian los criterios para luego, solucionar ejercicios donde falta un valor (ya sea ángulo o lado correspondiente). Para el grado 9° proponen el teorema de Thales en una sección aparte, la semejanza de triángulos junto con los criterios, y por último una serie de ejercicios.

En el texto del 2010 para el grado 8° plantean la congruencia, criterios de congruencia y proponen el uso de los criterios para realizar algunas demostraciones de triángulos congruentes, además dedican unas dos páginas con un ejemplo concreto sobre el uso tecnológico del Software Cabri para construcción de triángulos. Para el grado 9° desarrollan el tema de semejanza, tratan el concepto de razón y proporción, rectas cortadas entre paralelas, el teorema de Thales, polígonos semejantes, triángulos semejantes y criterios de semejanza de triángulos, aparece solo la demostración del Teorema Fundamental de la Semejanza de triángulos y ejercicios propuestos.

En síntesis, los libros de texto, plantean la semejanza como un caso particular de la congruencia, los conceptos y teoremas básicos no están explícitamente conectados, minimizan los problemas de demostración y se incrementan los de cálculo.

1.3 EL MODELO DE VAN HIELE EN EL DISEÑO DEL CURRÍCULO

En esta parte se describe el modelo de Van Hiele destacando los dos elementos fundamentales: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Se pretende mostrar algunas investigaciones que han usado el modelo como marco de referencia en sus investigaciones y lo han validado como una buena estrategia para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Los profesores holandeses de matemáticas Pierre Marie y Dina Van Hiele-Geldof, presentaron, en sus tesis doctorales, un modelo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría (Van Hiele, 1957) y una aplicación del modelo en un curso de geometría (Van Hiele-Geldof, 1957). Según los autores del modelo, los estudiantes guiados por actividades diseñadas de acuerdo a las fases de aprendizaje definidas en el modelo, van alcanzando en forma ordenada los cinco niveles de razonamiento.

Burguer y Shaughnessy (1986), realizan un estudio con estudiantes (de grados 1 hasta 12 y un estudiante de matemáticas de la universidad) mediante el uso de la entrevista clínica. Este trabajo permitió una primera caracterización de los cuatro niveles de razonamiento de Van Hiele, referente al estudio de figuras geométricas de triángulos y cuadriláteros. Concluyen los investigadores que “*los niveles de Van Hiele son útiles para describir los procesos de pensamiento de los estudiantes en actividades de polígonos.*” Con este tipo de investigaciones podemos cimentar las bases de nuestro estudio sobre la semejanza de triángulos.

Jaime (1993) realiza un estudio sobre las isometrías en el plano (traslación, rotación y simetría) con estudiantes de 6º a 8º, basado en modelo de Van Hiele. Logró especificar un listado de descriptores para las isometrías del plano, en los tres primeros niveles de razonamiento. La autora considera que los estudiantes mejoraron en su nivel de razonamiento al terminar su ciclo de estudio, aunque pocos alcanzaron completamente el segundo nivel de razonamiento.

Por último, Gualdrón (2011), mediante la experimentación de una unidad de enseñanza sobre la semejanza de figuras planas, logró afinar un listado inicial de descriptores del nivel de Van Hiele sobre la semejanza, que había planteado en su trabajo anterior - Gualdrón (2006) - sobre semejanza de polígonos, para los dos primeros niveles de razonamiento. En el análisis del nivel de razonamiento que alcanzaron los estudiantes involucrados en nuestro estudio, se tuvo en cuenta estos descriptores que listaremos en detalle en el próximo capítulo.

1.3.1 Características del modelo

Jaime (1993) hace una descripción detallada de las características generales de los cinco niveles de razonamiento extraídas de varias publicaciones, principalmente de Burguer y Shaughnessy (1986), Hoffer (1981) y Jaime, Gutiérrez (1990 b). La idea de este apartado es presentar los elementos fundamentales del modelo, en forma resumida.

El modelo de razonamiento de Van Hiele, se caracteriza por dos aspectos importantes: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, que corresponden respectivamente a lo descriptivo e instructivo del modelo. Los niveles de razonamiento son una secuencia ordenada de cinco niveles, que permiten categorizar las formas de razonamiento geométrico que los estudiantes van alcanzando, pudiéndose valorar el progreso de éstos, a través del

reconocimiento, el análisis, la clasificación, la deducción formal y la demostración de rigor.

Las fases de aprendizaje son directrices para los profesores, con el fin de favorecer el avance de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro inmediatamente superior. Las cinco fases a través de la información, la orientación dirigida, la explicitación, la orientación libre y la integración, dan pautas para el diseño de actividades o problemas particulares, que permiten fomentar el desarrollo de razonamientos matemáticos de los estudiantes.

Jaime (1993), sugiere que la fase de información puede ser obviada, a partir del segundo nivel de razonamiento en algunos casos, por ejemplo cuando el profesor tiene un conocimiento continuo de los estudiantes, es decir, si en los últimos años el profesor ha avanzado grado a grado con sus alumnos, tendrá claro los conocimientos previos y el nivel de razonamiento de cada uno de ellos. Otro caso, es cuando en un mismo curso se mantiene la continuidad de la temática y se produce el paso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al siguiente.

La situación de nuestro trabajo, ilustra el segundo caso expuesto anteriormente, por tanto, sólo desarrollaremos actividades para la fase de información del primer nivel de razonamiento. Además, con relación a la tercera fase (explicitación), Jaime (1993) sugiere que “no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades que lo permitan de las diferentes fases de aprendizaje”. Por tal motivo no elaboraremos para nuestro estudio, actividades específicas para esta fase, ya que estamos de acuerdo con Jaime, en mantener un diálogo permanente de discusión después de las actividades propuestas para las diferentes fases.

Los niveles de razonamiento y las fases de aprendizajes se exponen en detalle, de manera particular referente a la semejanza de triángulos, en el capítulo 2, teniendo en cuenta los aportes de los investigadores, que hemos analizado en este apartado, especialmente Gualdrón (2011).

2.

MARCO TEÓRICO

El principal objetivo de este capítulo es enunciar los referentes teóricos que hemos tenido en cuenta para estructurar el desarrollo de este estudio. El marco teórico pertinente en relación con los objetivos propuestos, está constituido por tres apartados: la fundamentación matemática sobre el concepto de semejanza de triángulos, la semejanza como objeto de estudio y el modelo de Van Hiele como orientador en la enseñanza de la semejanza de triángulos.

Presentaremos, al final de este capítulo, la relación entre los objetivos y los referentes teóricos que lo sustentan.

2.1. FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA SOBRE EL CONCEPTO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Según el Grupo Beta (1997), es importante el estudio del triángulo, porque cualquier polígono se puede descomponer en un conjunto de triángulos, de manera que el estudio de la semejanza de triángulos sirven para determinar posteriormente la semejanza de polígonos.

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados correspondientes proporcionales. Para verificar la semejanza, no es necesario comprobar que los tres ángulos homólogos sean iguales y sus tres lados homólogos proporcionales. Existen tres criterios que permiten asegurar la semejanza de triángulos:

Primer criterio: *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales son semejantes.*

Segundo criterio: *dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados homólogos proporcionales.*

Tercer criterio: *dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman. Grupo Beta (1997).*

2.2. LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ESTUDIO

En la enseñanza del concepto de semejanza de triángulos, es necesario tener en cuenta una serie de aspectos, que van desde el uso del lenguaje común (el término semejante como “parecido”), pasando por la idea intuitiva matemática (figuras de “la misma forma”) hasta el uso formal del concepto de semejanza de triángulos, que relaciona la forma geométrica con sus medidas, propiedades, etc. A continuación mencionamos algunas particularidades sobre las formas de representación y la clase de tarea, que implica el manejo del concepto de la semejanza de triángulos.

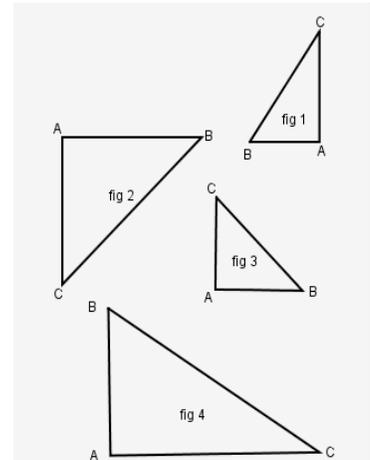
2.2.1 Las formas de representación de la semejanza de triángulos

Duval (1996, citado en Gualdrón 2011 p. 65-68) considera tres tipos de representación: el lenguaje simbólico, el lenguaje natural y el lenguaje figurativo. Estos se articulan en las actividades a desarrollar con los estudiantes.

Lenguaje simbólico: Hace referencia a las actividades donde los estudiantes deben interpretar las expresiones numéricas o literales que aparecen en lenguaje natural o figurativo. Generalmente cuando se presentan situaciones en lenguaje simbólico o natural es necesario apoyarse del lenguaje figurativo para comprender

e identificar los elementos numéricos o literales de los enunciados. En nuestro estudio usamos expresiones simbólicas generalmente para representar segmentos.

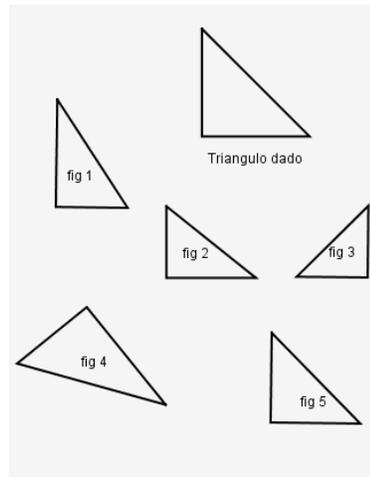
Por ejemplo, para nombrar el segmento P decimos el segmento de longitud AB, triángulo ABC, razón o cociente entre las longitudes de segmentos AC/AB. Un ejemplo es la actividad 8: *Los segmentos AB y AC se denominan los catetos y el segmento BC la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. ¿Cuáles de los triángulos rectángulos dados tienen la misma forma, es decir son semejantes? Justifique su elección después de hallar la razón entre los catetos y ángulos correspondientes.*



Lenguaje natural: En las actividades trabajadas, el lenguaje natural hace referencia a la descripción de una situación mediante frases, oraciones o proposiciones, sin mostrar ningún tipo de figura geométrica que lo oriente. Un ejemplo de este tipo de representación es la actividad 10, ítems (2) y (3): *Las medidas de los lados de dos triángulos son respectivamente: 4 cm, 5 cm, 7 cm y 12 cm, 15 cm, 21 cm. Si son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza entre los lados correspondientes de los triángulos? Justifique su respuesta. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos sean semejantes? Justifique su respuesta.*

Lenguaje figurativo: Corresponde a las actividades en las que el estudiante recibe la información en lenguaje natural acompañado de representación en forma de figura, la cual es necesaria para resolver la actividad planteada.

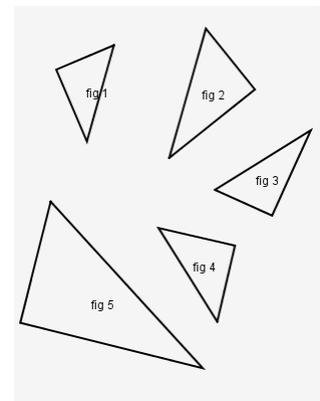
Un ejemplo de este tipo de representación es la actividad 3: *¿Cuáles de los triángulos tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen” al triángulo dado? Justifique sus respuestas.*



2.2.2 La clase de tarea para la semejanza de triángulos

En este estudio se plantearon actividades para que el estudiante identifique a través del proceso, el concepto de semejanza en triángulos y las características matemáticas que se cumplen. Para esto se han seleccionado las siguientes clases de tareas como son: de construcción, de comparación, de cálculo y de identificación de relaciones. A continuación se describen e ilustran cada una de ellas con ejemplos.

Tarea de identificación de relaciones: Son actividades que permiten la identificación de grupos de triángulos semejantes a través de las posibles relaciones que el estudiante pueda explorar al observar, al medir los triángulos dados. Un ejemplo es la actividad 4: *¿Cuáles de los siguientes triángulos tienen la misma forma? Justifique su elección.*



Tarea de construcción: Son actividades en las que se pide realizar alguna construcción geométrica de triángulos, utilizando la regla y el compás. Un ejemplo es la actividad 10, ítem (1): *Las medidas de los lados de dos triángulos son respectivamente: 4 cm, 5 cm, 7 cm y 12 cm, 15 cm, 21 cm. Construya con regla y compás los triángulos, ¿son semejantes los dos triángulos?*

Tarea de demostración: Son actividades en que los estudiantes deben abordarlas usando justificaciones matemáticas convincentes para determinar el valor de verdad de una proposición o afirmación. Un ejemplo claro es la actividad 12: *Demuestre a través de la construcción y el uso de criterios las siguientes preguntas: ¿Dos triángulos que tienen sus lados correspondientes proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos pares de lados proporcionales? Justifique sus respuestas.*

Tarea de cálculo: Son actividades en las que el estudiante debe calcular el perímetro o área de triángulos semejantes para establecer alguna relación entre sus medidas. Un ejemplo es la actividad 11, ítems (1) y (4): *Si los lados de un triángulo son 9 cm, 6 cm y 4 cm, calcular cuánto miden los lados de otro triángulo, si la razón entre los lados correspondientes de los dos triángulos es $\frac{2}{3}$. Hallar el área de los triángulos y calcular la razón entre ellas, encuentra alguna relación.*

2.3. EL MODELO DE VAN HIELE COMO ORIENTADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Los dos aspectos que contiene el modelo de Van Hiele, hacen parte de nuestro marco teórico, que al relacionarse orientan el trabajo propuesto, los aspectos son: el descriptivo (hace referencia a los niveles de razonamiento que van adquiriendo

los estudiantes) y el instructivo (hace referencia a las fases de aprendizaje, las cuales son pautas de organización en las actividades que el profesor debe diseñar).

Los niveles de razonamiento han sufrido cambios significativos desde su publicación. El mismo Van Hiele a través de las ideas y de las experiencias de otros investigadores aumentó el número de los niveles de razonamiento (que inicialmente eran tres, los niveles 2, 3 y 4 según el modelo actual), incluyó el nivel de reconocimiento (primer nivel) que es común entre los estudiantes y no descartó la existencia de un nivel superior al cuarto (quinto nivel). Varias publicaciones trabajan diferente la numeración de los niveles, unas lo hacen de 0 a 4 y otras de 1 a 5. Por comodidad seguiremos la propuesta de numerarlos de 1 a 5. En nuestro estudio nos interesa analizar los dos primeros niveles de razonamiento, pero haremos una breve descripción general, de cada uno de los cinco niveles y sus fases de aprendizaje.

Nivel 1: Reconocimiento

El aspecto fundamental de este nivel es que los estudiantes razonan basados únicamente en la observación de los objetos geométricos, describiéndolos en forma global, es decir, reconocen elementos físicos y usan propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar y clasificar los objetos de estudio, sin considerar explícitamente las características que lo componen.

Nivel 2: Análisis

La característica principal en este nivel de razonamiento es que los estudiantes razonan sobre los objetos geométricos a través de la experimentación, establecen propiedades matemáticas necesarias para el concepto en estudio, pero no las relacionan. Las demostraciones se llevan a cabo mediante la comprobación de algunos ejemplos.

Nivel 3: Clasificación

En este nivel la idea fundamental es que los estudiantes razonan sobre el orden lógico de las propiedades de los conceptos. Además, comprenden lo que es la definición matemática de un concepto y distinguen las propiedades suficientes y necesarias que lo determinan. Pueden comprender demostraciones realizadas por el profesor y adaptarlas a otra situación análoga.

Nivel 4: Deducción formal

La esencia de este nivel es que los estudiantes razonan formalmente comprendiendo la estructura axiomática de las matemáticas (términos indefinidos, axiomas, definiciones, teoremas, etc.). Es decir, por ejemplo, pueden reformular enunciados de problemas o teoremas con un lenguaje más preciso. Además, aceptan la posibilidad de obtener el mismo resultado desde distintos razonamientos o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5: Rigor

En este nivel, los estudiantes razonan en sistemas axiomáticos distintos de la geometría euclidiana, pueden comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.

Las fases de aprendizaje, son directrices que permiten al profesor una organización de las actividades con el fin de apoyar a los estudiantes en el desarrollo y avance de su nivel de razonamiento. Las fases están ligadas a cada nivel de razonamiento, es decir, en cada nivel el profesor propone actividades desde la primera fase hasta la quinta; al terminar esta última fase el estudiante debe haber alcanzado el siguiente nivel de razonamiento. A continuación se hace una breve descripción de cada una de las cinco fases de aprendizaje:

Fase 1: Información

En esta fase el profesor dialoga con los estudiantes y les informa la temática que van a iniciar, los objetivos y las actividades que planea resolver. Además, el profesor debe identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre el nuevo tema.

Fase 2: Orientación dirigida

En esta fase el profesor presenta gradualmente a los estudiantes actividades cortas (que ha seleccionado con cautela, para generar respuestas específicas) con el fin de que exploren el nuevo tema de estudio, descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos que deben interiorizar.

Fase 3: Explicitación

Es en esta fase el profesor, realiza una revisión del trabajo desarrollado, propiciando un ambiente de discusión entre él y los estudiantes y entre los mismos estudiantes, donde se den los comentarios sobre la formas de solución a las actividades propuestas anteriormente, resaltando elementos y métodos utilizados. Permitiendo el manejo adecuado del lenguaje técnico, las características, propiedades y relaciones que corresponde al tema objeto de estudio.

Fase 4: Orientación libre

En esta fase el profesor propone otras actividades diferentes a las que ya ha resuelto los estudiantes (con varias vías de solución), que permitan consolidar el aprendizaje realizado en las fases anteriores. La ayuda del profesor se debe limitar al máximo, de tal forma que los estudiantes sean quienes encuentren por sí mismos la solución.

Fase 5: Integración

En esta fase los estudiantes, con ayuda del profesor, hacen una recopilación de todo lo aprendido, con el objeto de integrar el conocimiento adquirido, los métodos y las formas de razonamiento que tenían inicialmente. Es una fase en la cual, las

actividades propuestas no deben implicar nuevos conocimientos, sino la organización de los ya adquiridos.

2.3.1 Descripción de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza de triángulos

En nuestro estudio, para el diseño de actividades y para el análisis sobre las formas de razonamiento de los estudiantes en la enseñanza de la semejanza de triángulos, nos basamos en la caracterización que propuso Gualdrón (2011), para la semejanza de figuras planas. Asociamos cada descriptor (del primer, segundo e inicios del tercer nivel de Van Hiele), al concepto de la semejanza de triángulos, no incluimos descriptores que relacionen el estudio formal de triángulos a escala, en posición de Thales, ni en disposición homotética, aunque en aplicaciones del concepto se relacionan.

Nivel 1 Reconocimiento

Los estudiantes en este nivel perciben la semejanza de triángulos en forma global, por lo que se considera que este nivel se caracteriza por:

- 1.1. Reconocen triángulos semejantes basándose en la apariencia de ellos, es decir, utilizan únicamente estrategias de tipo visual. Pueden presentarse casos en que no reconozcan la semejanza entre dos triángulos porque alguno esté girado.*
- 1.2. Ven los triángulos como un todo y describen las diferencias y similitudes entre ellos, usan términos como “más grande”, “más pequeño”, “estirado”, “ampliado”. Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos triángulos, podría decir “este triángulo no es tan alargado como éste”. También pueden incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.*

- 1.3. Empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza de triángulos, pero aún lo hacen de manera aislada. Por ejemplo, algunos pueden tomar medidas de los ángulos y darse cuenta que en los triángulos semejantes estos son iguales, solo que no lo ven como una condición necesaria para la semejanza.*
- 1.4. Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Thales. (Gualdrón, 2011, p. 209).*

Nivel 2 Análisis

Los estudiantes, en este nivel, se dan cuenta de que no es suficiente observar los triángulos y decidir la semejanza por su apariencia, sino que hay condiciones matemáticas entre sus elementos y propiedades que deben cumplir. Por lo anterior, los estudiantes logran:

- 2.1. Construir o dibujar triángulos semejantes a un triángulo dado teniendo en cuenta explícitamente aspectos matemáticos tales como la medida de los ángulos o las longitudes de los lados.*
- 2.2. Determinar aspectos matemáticos específicos de los triángulos semejantes, tales como la proporcionalidad de longitudes de los segmentos y la igualdad de las medidas de los ángulos, así que pueden inducir las condiciones necesarias para que los triángulos sean semejantes.*
- 2.3. Descubrir que la posición de los triángulos semejantes es irrelevante, es decir, que no es necesario que los triángulos semejantes tengan la misma posición.*
- 2.4. Comprender que los rectángulos coincidentes en un vértice y que comparten una diagonal son semejantes.*
- 2.5. Entender que la congruencia de triángulos es un caso particular de la semejanza de triángulos*
- 2.6. Inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos.*

- 2.7. Realizar construcciones o dibujos de triángulos semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si el triángulo resultante será una ampliación, una reducción o un triángulo idéntico al dado.*
- 2.8. Demostrar propiedades que tiene que ver con la semejanza de triángulos verificando que se cumplen en algunos casos.*
- 2.9. Utilizar la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas, por ejemplo determinar longitudes accesibles o inaccesibles. (Gualdrón, 2011, p. 209 - 210)*

Nivel 3 Clasificación

Los estudiantes en este nivel, establecen relaciones entre las propiedades matemáticas de la semejanza en triángulos y comprenden planteamientos en la solución de tareas, por tanto consideramos que los estudiantes alcanzan a:

- 3.1. Determinar empíricamente y justificar de manera deductiva informal las condiciones para la semejanza de triángulos (incluyendo los criterios AA, LLL, LAL).*
- 3.2. Distinguir entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de triángulos. Por ejemplo, ellos reconocen que, en los triángulos, es suficiente que dos ángulos correspondientes sean iguales para que sean semejantes. (Gualdrón, 2011, p. 210).*

En conclusión, para el logro del objetivo general propuesto en este estudio, que hace referencia a analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes de octavo grado del Centro Educativo Colegio Marta, en el aprendizaje de la semejanza de triángulos, para los niveles 1 y 2 según el modelo de Van Hiele, es necesario los diferentes elementos expuestos en el marco teórico que relacionamos a continuación con los objetivos específicos.

OBJETIVO ESPECÍFICO	REFERENTE TEÓRICO
<p>Diseñar e implementar actividades mediados por la estructura del modelo de Van Hiele, para la enseñanza del concepto de semejanza en triángulos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Fundamentación matemática. - Niveles y fases del modelo de Van Hiele. - Formas de representación de la semejanza de triángulos. -Tipos de actividades para la semejanza de triángulos.
<p>Analizar las formas de razonamiento de los estudiantes en el aprendizaje de la semejanza de triángulos a través del desarrollo de las actividades.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Niveles y fases del modelo de Van Hiele (descripción especificada para la semejanza de triángulos y propiedades).

3.

METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

Pensar en una metodología adecuada, requiere inicialmente de una reflexión que ayude a dar coherencia a los objetivos planteados y a los instrumentos que se usan. Abordamos este capítulo presentando los elementos metodológicos sobre la actividad de los estudiantes. Se enuncian los instrumentos para la recolección de la información, así como los procedimientos para el análisis de los datos, seguido, una descripción de la población. Finalmente se da un esquema de resumen.

3.1. ELEMENTOS METODOLÓGICOS SOBRE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

En nuestro estudio, trabajamos con seis estudiantes de octavo grado matriculados en el centro educativo Colegio Marta, que voluntariamente decidieron acoger esta propuesta. Consideramos este estudio como un estudio de casos múltiple, combinado con diferentes métodos para la obtención de la información cualitativa, con la finalidad de analizar las formas de razonamiento que alcanzan los estudiantes, en el aprendizaje de la semejanza de triángulos.

Evidenciar los razonamientos de los estudiantes, implica comprender el proceso que llevan a cabo según las actuaciones, afirmaciones y escritos que los estudiantes producen al desarrollar las actividades planteadas, para el aprendizaje de la semejanza, con el fin, de poder construir nuestra propia interpretación del evento. Este no es un estudio estadístico, el cual se puede generalizar a partir de

una muestra (como en las encuestas o experimentos), las características de toda una población, sino como específica Gualdrón (2011): se trata de una generalización analítica que se usa en el caso único o múltiple para representar o generalizar una teoría e incluso puede ilustrar a otros casos, que representen condiciones teóricas similares.

Por tanto, la generalización del estudio cualitativo en el que se encuentra el estudio de caso, no es un estudio probabilístico sino el desarrollo de una teoría que puede extenderse a otros casos parecidos.

3.2. LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

En nuestro estudio, el diseño de instrumentos pretende recoger las maneras de razonar de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de semejanza de triángulos a través de la aplicación del modelo de Van Hiele. Se han escogido dos medios para completar la información obtenida de los estudiantes como son: las producciones escritas y las grabaciones en video.

3.2.1 Las producciones escritas

El encuentro con los estudiantes se llevó a cabo en la jornada escolar, trabajando en promedio dos periodos de clase de 50 minutos por semana, cada estudiante desarrollaba las actividades correspondientes. Al finalizar la clase las producciones escritas, eran recogidas y revisadas, con el objeto de ver plasmado las formas de solución, si se notaba que faltaba información sobre el procedimiento utilizado, se motivaba al estudiante para que completara sus argumentos. La razón de la insistencia en la forma de escribir las estrategias de solución de cada actividad tenía la finalidad de poder determinar los

razonamientos usados por los estudiantes. Para completar la información se realizaron grabaciones de video.

3.2.2 Grabaciones de video

Es un instrumento válido para captar los razonamientos verbales de los estudiantes al momento de solucionar las tareas propuestas, lo que nos ayudó a completar la información obtenida en las producciones escritas, pues los estudiantes, después de haber razonado sobre la forma de solucionar cada actividad, muchos de ellos no las escribían en las hojas de trabajo, por tanto las grabaciones de video cumplían su función al captar el pensamiento y las actitudes de los estudiantes.

La cámara fijada captó los inicios de cada actividad y después se movilizaba para seguir el desarrollo de las tareas asignadas a los estudiantes, los movimientos de sus manos, los señalamientos que hacían sobre los procesos utilizados y la comunicación con el profesor. Para el desarrollo de la fase de explicitación, donde los jóvenes exponían abiertamente los razonamientos a sus compañeros y en compañía del docente clarifican las dudas del trabajo, la cámara era fijada en una esquina del salón.

3.3 PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS DE DATOS

Al iniciar la experimentación se usó un test diagnóstico (diseñado para estudiantes de quinto primaria) con el fin de determinar el nivel de Van Hiele en los temas, rectas paralelas y perpendiculares, ángulos y triángulos. El test contenía para cada temática, cuatro preguntas que correspondían respectivamente a cada uno de los cuatro niveles de razonamiento. Para determinar el nivel de razonamiento se decidió que si el estudiante no respondía correctamente la primera pregunta

(correspondiente al primer nivel), no se tenían en cuenta las tres preguntas siguientes (ver anexo 2).

El procedimiento para el análisis de datos se dio durante la recogida de la información a través de los dos medios anteriormente mencionados. Una vez terminada la experimentación se da inicio a la transcripción de las observaciones de clase a través de la edición de videos y organización de la información recolectada en las producciones escritas.

Con respecto a las producciones escritas, hemos realizado un análisis detallado de las respuestas, que los estudiantes ponen en manifiesto, al resolver las catorce actividades diseñadas para lograr el aprendizaje del concepto de semejanza en triángulos, apoyados de las grabaciones en video (en particular las transcripciones de aspectos que nos parecieron interesantes) que se captaron durante el desarrollo del estudio.

Para el análisis y asignación del nivel de razonamiento de los estudiantes, se tuvo en cuenta la lista de descriptores expuestos en el capítulo 2. Cada actividad se pensó enfocada a uno varios descriptores, en el caso en que se presentara dificultad para asignar un nivel general de razonamiento a un estudiante, porque él muestra dos niveles de razonamiento seguidos, debido al tránsito que está haciendo de un nivel inferior a otro de orden superior (observaciones que según los investigadores pueden aparecer), se asigna al estudiante, el nivel inferior de los dos que presenta, como una solución a esta posible dificultad.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

El trabajo se realizó de manera voluntaria con la participación de seis estudiantes de octavo grado. A continuación presentaremos las características más importantes de esta población.

3.4.1 Los estudiantes

Los estudiantes que hicieron parte de este estudio son integrantes del grado octavo del Centro Educativo colegio Marta. Estos estudiantes (14 a 17 años) asignaron espacios de sus horas libres para trabajar.

3.4.2 El colegio

El colegio donde se desarrolló nuestro trabajo, está ubicado en la vereda Marta, zona rural del municipio San Juan de Girón, a hora y media del casco urbano, en límites con Barrancabermeja. Es un Centro Educativo que tiene aprobado los grados desde el preescolar (o cero) hasta el octavo, aunque se atiende noveno grado.

Es importante resaltar que desde junio del 2010 hasta julio del 2011, los estudiantes no contaban con un profesor Licenciado en Matemáticas, por cuestiones de nombramiento y presupuesto municipal, además los docentes vinculados al Centro Educativo, especializados en otras áreas de conocimiento, se encargaban de impartir “el saber matemático”.

Por tanto, la labor del Licenciado en matemáticas e investigador de este proyecto (nombrado a partir del 2011), fue organizar las temáticas para lograr en parte nivelar a los estudiantes. Se puede decir que para el año 2012 la institución se encontró mejor organizada en lo académico, especialmente en el área de matemáticas.

En cuanto a recursos, El Centro Educativo presenta problemas de saneamiento básico, no cuenta con el servicio eléctrico, posee ocho computadores y seis

ventiladores que no se pueden aprovechar por este inconveniente. Dispone de dos salones para el bachillerato los cuales son compartidos (dos grados por salón), las altas temperatura (clima similar a Barrancabermeja) son un factor de incidencia en el aprendizaje.

A modo de resumen, elaboramos una tabla donde se relacionan los objetivos planteados, que pretendemos alcanzar, con los referentes teóricos y los componentes metodológicos (ampliación del cuadro que se presentó al final del capítulo 2).

OBJETIVO ESPECÍFICO	REFERENTE TEÓRICO	COMPONENTE METODOLÓGICO
Diseñar e implementar actividades mediados por la estructura del modelo de Van Hiele, para la enseñanza del concepto de semejanza en triángulos.	<ul style="list-style-type: none"> -Fundamentación matemática. -Niveles y fases del modelo de Van Hiele. -Formas de representación de la semejanza de triángulos. -Tipos de actividades para la semejanza de triángulos. 	<ul style="list-style-type: none"> -Propuestas metodológicas para la enseñanza de la semejanza de figuras. -Descriptor de los niveles 1 y 2 de Van Hiele.
Analizar las formas de razonamiento de los estudiantes en el aprendizaje de la semejanza de triángulos a través del desarrollo de las actividades.	-Niveles y fases del modelo de Van Hiele (descripción especificada para la semejanza de triángulos y propiedades).	<ul style="list-style-type: none"> -Test diagnóstico. -Experimentación. -Producciones escritas. -Grabaciones en video. -Descriptor de los niveles 1 y 2 de Van Hiele.

4.

LA EXPERIMENTACIÓN

4.1 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

La parte experimental de nuestro estudio está basado en el desarrollo de actividades para determinar la semejanza de triángulos. Las actividades 6, 7, 12 y 14(1) son tomadas de Gualdrón (2011) y las demás actividades, se han diseñado teniendo en cuenta las sugerencias metodológicas del Grupo Beta (1997) y los aspectos teóricos como el tipo de representación, la clase de tarea y el modelo de Van Hiele.

4.1.1 Las actividades según el tipo de representación

En la tabla 4.1 aparece la relación de cada actividad con el tipo de representación según la categoría de lenguaje natural, lenguaje figurativo y lenguaje simbólico. Depende de la actividad, se puede presentar que clasificada en la categoría de lenguaje natural o figurativo, también se clasifique en lenguaje simbólico. Por ejemplo la actividad 8 (es clasificada como lenguaje figurativo) y además es clasificada en la categoría del lenguaje simbólico, por las expresiones que aparecen en sus enunciados. Otro caso es la actividad 11, clasificada solo en lenguaje natural (ya que no incluye ningún tipo de figura) y además no contienen elementos simbólicos.

La actividad 14 está clasificada en las tres categorías porque se plantean situaciones que combinan los tres tipos de representación.

Actividad	Lenguaje natural	Lenguaje figurativo	Lenguaje simbólico
1		X	
2		X	
3		X	
4		X	
5		X	
6		X	
7		X	
8		X	X
9		X	X
10	X		
11	X		
12	X		
13		X	X
14	14(1)14(2)14(3)	14(4)14(5)	14(3)14(4)14(5)

Tabla 4.1 Clasificación de actividades de acuerdo al tipo de representación.

4.1.2 Las actividades según la clase de tarea

En la tabla 4.2 que se muestra a continuación, aparece la distribución de las actividades según la clase de tarea: de interpretación de relaciones, de cálculo, de construcción y de demostración.

En algunos casos se presenta una doble clasificación de la actividad, por ejemplo en la actividad 10, lo fundamental es la tarea de construcción de triángulos, para que el estudiante pueda visualizar, interpretar y explicar la semejanza, posteriormente, se propone la tarea de cálculo de las alturas para encontrar la razón entre ellas y así lograr identificar otras relaciones matemáticas, que encierra

la semejanza de triángulos. Otro ejemplo es la actividad 13 clasificada como tarea de interpretación de relaciones y de demostración de la semejanza.

Actividad	Tarea de Interpretación de relaciones	Tarea de cálculo	Tarea de construcción	Tarea de demostración
1	X			
2	X			
3	X			
4	X			
5	X			
6	X			
7	X			
8	X	X		
9	X	X		
10	10(3)	10(2)	10(1)	10(4)
11	11(3)	11(1)	11(2)	11(4)
12	X			X
13	X			X
14	14(1)	14(2)14(3)14(4)14(5)	14(2)	14(1)14(4)14(5)

Tabla 4.2 Clasificación de actividades de acuerdo al tipo de tarea.

4.1.3 Las actividades según el modelo de Van Hiele

Para el diseño de las actividades hemos tenido en cuenta el modelo de Van Hiele para los niveles 1 y 2. En el primer nivel debe quedar claro que la semejanza de triángulos puede verse como triángulos de la misma forma más no del mismo tamaño. En el siguiente nivel los estudiantes deberán comprender que la semejanza no se puede determinar únicamente por la forma sino que hay condiciones matemáticas que deben cumplirse.

Las primeras siete actividades están pensadas para el primer nivel, distribuidas así: las actividades 1 y 2 corresponden a la *fase de información*, en donde el profesor comenta con los estudiantes el tema de estudio que van a iniciar, las tareas que van a resolver, los métodos, el material que se va a utilizar, el lenguaje específico del nivel. Es la oportunidad para conocer las ideas previas de los estudiantes sobre el tema de estudio y su nivel de razonamiento.

Las actividades 3 y 4 planteadas para desarrollarlas en la *fase de orientación dirigida*, pretenden que los estudiantes exploren y concreten la noción intuitiva de la semejanza en triángulos. Además se espera que sean resueltas únicamente con estrategias visuales (aunque no se puede descartar el caso en que aparezcan razonamientos de nivel 2). La actividad 5 corresponde a la *fase de orientación libre*, cuya finalidad es consolidar lo aprendido en las fases anteriores. Las actividades 6 y 7 corresponden a la *fase de integración*, donde el estudiante sintetiza y aplica a otros casos lo que han venido aprendiendo a través del proceso y el desarrollo de fases.

Para el segundo nivel, como el campo de estudio se desarrollaba en forma continua, la *fase de información* en este nivel no se tuvo en cuenta. El conjunto de actividades de la 8 a la 12 se proponen para la fase de orientación dirigida del nivel 2, Se pretende con este grupo de actividades que el estudiante empiece a descubrir los componentes matemáticos que se deben tener en cuenta para decidir sobre la semejanza de triángulos y aprendan las propiedades o criterios que permiten demostrar si hay o no semejanza en triángulos.

La actividad 13 corresponde a la *fase de orientación libre*, es una actividad diferente a las que se han aplicado anteriormente, que permite consolidar el aprendizaje que han adquirido los estudiantes a través del proceso. Esta actividad plantea nuevas relaciones con varias formas de solución. La actividad 14 corresponde a la *fase de integración* del nivel 2, el ítem 14(1) se plantean

situaciones globales para que el estudiante sintetice lo que ha venido aprendiendo, tenga una visión general de los conceptos y las relaciones que se establecen en la semejanza. En los ítems 14 (2, 3, 4 y 5) se plantean diversas situaciones que permiten obtener respuestas específicas, las cuales pretenden integrar aún más los conocimientos y formas de razonamiento de los estudiantes, estas actividades no implican aprender nuevos conocimientos, sino organizar los ya adquiridos, por tanto se puede ver como una evaluación de la evolución de su nivel de razonamiento a través de los resultados del desarrollo escrito y verbal de las mismas.

4.1.4 La metodología en el desarrollo de las actividades

En la experimentación fue usada la metodología por descubrimiento guiado, dada la forma como se diseñaron las actividades, que plantean situaciones matemáticas permitiendo a los estudiantes reconocer las características y deducir las propiedades y definiciones del concepto en estudio.

Las actividades se planearon secuencialmente al iniciar cada clase, el profesor repartía la actividad correspondiente en fotocopia. Los estudiantes la desarrollaban la actividad en forma individual y el profesor solo guiaba al estudiante en el logro de los objetivos sin dar explicaciones de cómo solucionar la situación planteada, por ejemplo dialogaba con los estudiantes en el desarrollo de la actividad, preguntaba acerca de la resolución, si era necesario, les pedía ampliación en sus razonamientos escritos o verbales. Después se recogían las hojas de trabajo, luego se desarrollaba la puesta en común (*fase de explicitación*), donde los estudiantes exponían sus argumentos y el profesor intervenía aclarando las dudas que surgían del debate, resumía los resultados obtenidos y los estudiantes visualizaban la solución más apropiada para dicha actividad.

Las actividades fueron planeadas para desarrollarlas en siete sesiones de clase de 60 minutos cada una, pero realmente se usaron once sesiones de 60 minutos debido a que los estudiantes se tomaron más tiempo del planeado para algunas de las actividades. En promedio se desarrolló una sesión de clase por semana, no hubo actos de indisciplina, los estudiantes acogieron con responsabilidad el trabajo. El experimento se desarrolló en los meses de marzo, abril y mayo del año escolar 2012.

4.2 CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS ACTIVIDADES

En consecuencia con las directrices que propone el MEN y el análisis de algunas propuestas curriculares como la del Grupo Beta (1997) y el trabajo de Gualdrón (2011) que abordamos en el capítulo 1, nos ha permitido elaborar una serie de contenidos para el aprendizaje del concepto de la semejanza de triángulos, que se tuvo en cuenta en la elaboración de las actividades y que presentamos a continuación:

La noción intuitiva del concepto (Bloque de actividades 1 a la 7):

- Identificación de características físicas de los triángulos semejantes, por ejemplo se “conserva la forma”, pero no necesariamente el tamaño, ni tampoco la posición.
- Reconocimiento de los lados, vértices y ángulos correspondientes de dos triángulos semejantes.

El factor de semejanza (Actividades 8, 9 10(2) y 11(1)):

- Determinación del factor de semejanza en triángulos semejantes.

- Utilización del factor de semejanza en la construcción de triángulos semejantes.

Razón de perímetros y áreas de triángulos semejantes (actividades 10(d) y 11(d)):

- Razón entre perímetros.
- Razón entre áreas.

La semejanza de triángulos (actividades 12, 13 y 14):

- Criterios: AA, LLL y LAL.
- Demostración de semejanza en triángulos.

5.

ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Es nuestro propósito como docentes unirnos a los esfuerzos de la educación matemática, aportando ideas que contribuyan al proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto implica conocer o identificar las diversas formas de aprendizaje que siguen los estudiantes vinculados en un sistema escolar. En esta dirección, con nuestro trabajo haremos un aporte para la enseñanza del concepto de semejanza de triángulos, siguiendo los aspectos descritos en el marco teórico (capítulo 2), especialmente, analizando las formas de razonamiento utilizados por los estudiantes, que identificaremos a través de los niveles de Van Hiele, en las resolución de tareas propuestas sobre el estudio de dicho concepto. El presente capítulo está dedicado al análisis de las actividades de los estudiantes, elaboración de resultados y conclusiones.

Para lograr los objetivos vamos a analizar a dos de los seis estudiantes que fueron monitoreados continuamente, durante toda la experimentación para lograr determinar la evolución del razonamiento en el aprendizaje de la semejanza de triángulos. Se analizarán las producciones escritas y, las diferentes interacciones que hubo entre el estudiante y el profesor, con ayuda de las grabaciones en video. Las producciones de los demás estudiantes, se tendrán en cuenta en algunas situaciones relevantes que consideramos merecen ser expuestas para clarificar aún más la forma como se llevó a cabo la experimentación y su análisis.

5.1 CARACTERIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN EL NIVEL DE RAZONAMIENTO

En este apartado presentaremos los análisis de las diversas formas de solución a las tareas de semejanza de triángulos por parte de los estudiantes, como ejemplo de evidencia que nos permitió identificar la característica específica de los niveles de razonamiento. El análisis se enfocó en la asignación del nivel de razonamiento que mostró el estudiante durante la solución de la actividad. La asignación se realizó a partir de la lista de descriptores presentada en el capítulo 2, los cuales se encuentran organizados por una codificación de dos números, el primero representa el nivel y el segundo el descriptor, por ejemplo el código 1.2 representa el segundo descriptor del nivel 1, así el código 2.3 representa el tercer descriptor del nivel 2.

5.1.1 Respuestas de los estudiantes, como avance en su nivel de razonamiento

Las ideas de los alumnos son un elemento primordial en cualquier estudio o nuevo conocimiento que se desee enseñar. Por tanto la actividad inicial desarrollada por los estudiantes fue el test diagnóstico (ver anexo 2), que el profesor aplicó para reconocer el nivel de razonamiento sobre las concepciones básicas que tenían los alumnos de triángulos, rectas paralelas, rectas perpendiculares y ángulos. Se evidenció en los resultados que todos los estudiantes se encontraban en el nivel de reconocimiento (primer nivel de razonamiento de Van Hiele).

Presentaremos a continuación, parte de las actividades para la semejanza de triángulos, mostrando los tipos de respuesta obtenidas y analizándolas desde el

punto de vista de los niveles de razonamiento empleados. Las actividades completas se encuentran en el anexo 1.

Para la presentación de los datos y su análisis correspondiente, se ha tenido en cuenta la agrupación de las actividades según las fases de aprendizaje en cada nivel de razonamiento, indicadas en el capítulo 4 en la sección 4.1.3 y coinciden con las sesiones de clases en la experimentación.

Actividades 1 y 2. (Primera sesión)

Las dos primeras actividades se han planeado, para el desarrollo de la fase de información del primer nivel. La característica común de estas actividades, es que aparece el dibujo de triángulos, sobre los cuales los estudiantes deben responder a las indicaciones planteadas. En la actividad 1, un estudiante no comprendía con claridad los términos la “misma forma” y “se parecen”, al punto de confundirlos, además en la actividad 2, se presentó la inquietud si triángulos en diferente posición se podrían clasificar como de la misma forma o no.

Actividad 1 (Anexo 1)

En el análisis de esta actividad, encontramos el caso de Jorge, que justifica:

Jorge: *Los triángulos que tienen la misma forma al triángulo dado son: las figuras 3 y 5, tienen la misma forma y también tienen la misma inclinación hacia arriba. Los triángulos que se parecen al triángulo dado son: la figura 1 (tiene poca inclinación), la figura 2 (tiene mucha inclinación), la figura 3 (tiene la misma inclinación), la figura 4 (tiene mucha inclinación) y la figura 5 (tiene la misma inclinación).*

Identificamos en la primera respuesta, un razonamiento que asociamos con el **descriptor 1.1**, dado que reconoce la semejanza de los triángulos basándose en

la apariencia de ellas. Con el segundo razonamiento se evidencia que el estudiante piensa que todos los triángulos son parecidos.

Otro caso de mostrar es el de Franky, que justifica su elección determinando que:

Franky: *Las figuras 3 y 5 son iguales solo que son más pequeñas que la figura dada. Las figuras 1,2 y 4 son parecidas a la figura dada. La figura 1 es parecida a la dada pero está más alargada en su zona baja, las figuras 2 y 4 son parecidas, pero esta vez están alargadas hacia arriba.*

Se evidencia claridad en las ideas intuitivas del concepto, asignamos al razonamiento evidenciado en esta producción el **descriptor 1.2**, debido a que el estudiante reconoce la semejanza de los triángulos visualizándolas como un todo y se refiere a ellas con el término “más alargada hacia arriba o en la zona baja”.

Actividad 2 (Anexo 2)

Jorge justificó su elección argumentando que:

Jorge: *Los triángulos que tienen la misma forma son: el triángulo de la figura 1 tiene la misma inclinación siendo que esta volteado hacia abajo, la figura 2 tiene la misma forma pero está muy inclinado, la figura 3 tiene la misma forma pero no es tan inclinado, la figura 4 tiene la misma forma pero es muy inclinado, la figura 5 se parece y tiene la misma inclinación. Concluye diciendo los triángulos que se parecen al triángulo dado son: la figura 1 y 5 porque tienen la misma inclinación, las figuras que tiene la misma forma son la 1, 2, 3, 4 y 5.*

Se asigna el **descriptor 1.1**, porque Jorge, diferencia figuras semejantes basándose en la apariencia de ellas y no presenta dificultad en reconocer la semejanza de la figura 1 que está girada. Con el segundo razonamiento se evidencia que el estudiante piensa que todos los triángulos son de la misma forma.

De las actividades 1 y 2, podemos afirmar que Jorge no ha evolucionado en su razonamiento, pues continuó reconociendo la semejanza de los triángulos, fijándose en la apariencia de ellas, además tiene poca claridad de las nociones intuitivas de semejanza, al considerar que todos los triángulos son parecidos (en la actividad 1) y luego todos los triángulos tienen la misma forma (en la actividad 2), por ser triángulos en ambos casos.

En la solución de la actividad 2, Franky justifica:

Franky: *Las figuras parecidas son: la figura 2, (está alargada en la parte superior), la figura 3 (porque está alargada hacia los lados) y la figura 4 (está boca abajo y esta alargada en la parte baja). Las figuras iguales son: la figura 1 (que está boca abajo y tiene la misma forma) y la figura 5 es completamente igual al triángulo dado. Concluye que las figuras 1 y 5 tienen la misma forma porque sus ángulos tienen igualdad, las figuras 2, 3 y 4 son parecidas a la dada porque tiene ángulos y lados distintos.*

El estudiante con el primer razonamiento, evidencia el **descriptor 1.2** al identificar figuras semejantes basado en la apariencia de ellas. En el segundo razonamiento analiza de manera inconsciente una característica matemática de los triángulos equiláteros (igualdad en sus ángulos y lados), asignamos el **descriptor 1.3** porque empieza a percibir algunas características matemáticas, pero aún lo hace de manera aislada.

La evolución del razonamiento de Franky, se hace evidente inicialmente reconociendo triángulos semejantes, describiendo las diferencias y similitudes entre ellas, hasta llegar a identificar algunas características matemáticas usando estrategias de tipo visual.

Fase de explicitación, grabación en video.

En el desarrollo de esta fase se estableció un diálogo profesor y estudiantes, con el fin de clarificar las dudas que surgieron después de haber resuelto las actividades. Se propuso que los estudiantes confrontaran sus ideas y las defendieran hasta que ellos mismos comprendieran la forma más adecuada para solucionar la actividad. El profesor inició el diálogo que permitió la confrontación de las nociones intuitivas de la semejanza de triángulos como son, figuras de la misma forma y parecidas.

Profesor: *De acuerdo con las actividades desarrolladas hasta el momento, ¿qué interpretación hicieron del término parecido y la misma forma? ¿Cuáles triángulos consideraron ustedes de la misma forma en la actividad 1 y 2? Explique la estrategia que uso para la solución.*

Es esta fase Franky afirma que:

Franky: *Los triángulos de la misma forma son los que conservan su forma sin importar su tamaño,...como figuras parecidas son todas aquellas que tienen distinta forma porque están alargadas en la base o en la punta del triángulo con respecto a la figura dada.*

El estudiante Jorge no está de acuerdo con Franky planteando:

Jorge: *No estoy de acuerdo porque todos los triángulos tienen la misma forma. Los parecidos son aquellos que tienen la misma inclinación,...los de la misma forma son los triángulos que no tienen la misma inclinación,...*

Profesor: *Jorge ¿por qué piensa que todas las figuras tienen la misma forma?*

Jorge: *Porque son de la misma forma, es decir son triángulos*

Profesor: *Y las figuras parecidas a tu criterio ¿cómo son consideradas?*

Jorge: *Las figuras parecidas son las que tienen la misma inclinación*

Franky: *Considero que Jorge está confundido...*

El profesor intervino diciendo:

Profesor: *Hay dos conceptos en las tareas asignadas, los parecidos y de la misma forma, ¿son iguales para ti, Jorge?*

Jorge: *No*

Profesor: *¿En qué se diferencian?*

Jorge: *La misma forma son: si es un triángulo todos son un triángulo y ser parecidos es que tienen la misma inclinación.*

El profesor continúa escuchando los argumentos de los otros estudiantes, que intervienen para controvertir con lo expuesto por Jorge, se da cuenta que la mayoría de los estudiantes, tienen argumentos similares a los de Franky.

El profesor continuó:

Profesor: *Jorge, dese cuenta que usted hizo la misma clasificación de triángulos que Franky, lo único es que los llamó en forma contraria, es decir, a los de la misma forma los llamó parecidos y a los parecidos los llamó de la misma forma.*

Se hace la siguiente observación para que Jorge clarifique el significado de “triángulos de la misma forma” y “triángulos parecidos”, la misma forma significa que son triángulos que conservan su forma (para el caso de Jorge conservan la misma inclinación de la figura dada), y los parecidos son los que tienen características similares pero no conservan su forma (o inclinación).

Profesor: *Continuemos con la actividad 2 que tiene un ingrediente diferente, hay un triángulo volteado. ¿Cómo seleccionaron a los triángulos en esta actividad?*

Inició Franky, explicando el razonamiento de su producción escrita, luego afirmó Alirio:

Alirio: *Profe, cuando dicen que la figura 1 y la 5 de la actividad 2, son de la misma forma yo creo que no, porque la figura 1 no está igual (refiriéndose a la posición), la única que creo que es semejante, es la figura 5 que está igual.*

El profesor intervino:

Profesor: *Es decir, consideras que ¿las figuras que tienen la misma forma deben tener la misma posición?*

Alirio: *Sí, porque al estar volteada no tiene la misma forma.*

El profesor dijo:

Profesor: *Es importante debatir el razonamiento de Alirio, y pregunta ¿Quiénes más comparten esta idea?*

Los demás estudiantes, señalaron con la cabeza que no estaban de acuerdo con Alirio e interviene Ricardo:

Ricardo: *El triángulo de la figura 1 tiene la misma forma al triángulo dado, lo que pasa es que está al revés.*

Jonathan explicó:

Jonathan: *Son de la misma forma (hizo referencia a las figuras 1 y 5), porque si nos fijamos en los triangulitos que están en el interior del triángulo, ellos están apuntando hacia arriba, así que si volteáramos el triángulo, quedarían apuntando hacia abajo al igual que la figura dada, así que no cambia la forma.....*

El profesor preguntó a Alirio:

Profesor: *¿Quedó claro, que si se voltea un triángulo, no cambia su forma?*

El estudiante afirmó:

Alirio: *No, yo creo que si cambia.*

Franky insistió:

Franky: *No cambia porque, si observamos las puntas de cada triángulo su abertura o ángulo es distinta en los triángulos parecidos, pero, igual en los triángulos que tienen la misma forma, por tanto la figura 1 a pesar de que está volteada tiene la misma abertura en las puntas que la figura 5 y el triángulo dado, así que es de la misma forma.*

Profesor: *¿Cómo se verifica el razonamiento o criterio que usted está planteando?*

Franky: *Bueno profe, si tuviéramos un elemento de medida se podría ver mejor que en los triángulos parecidos los ángulos cambian drásticamente y que en los triángulos de la misma forma tendrán la misma medida en sus ángulos.*

Profesor: *Muy bien Franky*

El profesor solicitó traer para la próxima clase, instrumentos de medida como: el transportador, la regla y el compás.

Alirio continuó diciendo:

Alirio: *Si se mide un ángulo del triángulo dado y si se voltea el triángulo, ya no se puede medir ese mismo ángulo, tendría que voltear nuevamente el triángulo para volver a medir el ángulo.*

Franky refutó el argumento de Alirio, con la clasificación de triángulos, pero tuvo muchas inconsistencias al afirmar que los triángulos isósceles son los que tiene dos lados iguales y dos ángulos rectos. El profesor trató de indagar que otras ideas tenían los estudiantes sobre la clasificación de triángulos y lo único que halló, es que recordaban los nombres, pero, no tenían claro las características y diferencias.

Después de escuchar a sus compañeros, sin lograr persuadir a Alirio, el profesor, pidió a Alirio, que dibujara al respaldo de la hoja un triángulo para que verifique si al voltearlo el triángulo cambia de forma, el estudiante realizó el dibujo y clarificó su duda al girar varias veces el triángulo.

Se solucionó las dudas de Jorge y Alirio, se hizo la síntesis del debate donde quedó claro las nociones intuitivas del concepto de semejanza sin importar la posición, además se estableció un criterio razonable para determinar la semejanza de triángulos (analizar la abertura de los ángulos).

Actividad 3 y 4. (Segunda sesión)

En este bloque de actividades, se planeó para la fase de orientación libre. Se tuvo en cuenta la misma característica de la sesión anterior, es decir se propuso varios triángulos dibujados, en los que el estudiante debió responder a las preguntas planteadas.

Al desarrollar estas actividades, varios estudiantes tenían dudas porque usaron solamente razonamientos visuales. En vista de lo anterior, el profesor persuadió a los estudiantes, para que usaran otro tipo de estrategia, como por ejemplo, la estrategia que vislumbró Franky en la fase de explicitación (verificar la igualdad de los ángulos en triángulos de la misma forma).

Actividad 3 (Anexo 3)

Se presentaron dibujos de triángulos, los cuales deben clasificar como parecidos o de la misma forma a uno dado (rectángulo e isósceles).

En cuanto a las producciones escritas de Franky, el estudiante determina que:

Franky: Las figuras 1, 2 y 4 son parecidas porque tienen un lado más largo que el triángulo dado (haciendo referencia a un cateto en el triángulo rectángulo isósceles) y son de la misma forma las figuras 3 y 5 porque tienen dos lados de igual medida y sus ángulos son iguales al dado.

Al reproducir el video de la actividad 3, Franky (en diálogo con el profesor, sobre figuras de la misma forma), hizo el siguiente razonamiento:

Franky: Observo una regularidad en los triángulos con dos lados iguales, que la medida de sus ángulos son 45° , 90° y 45° , por tanto considero que los triángulos con estas características tienen la misma forma...

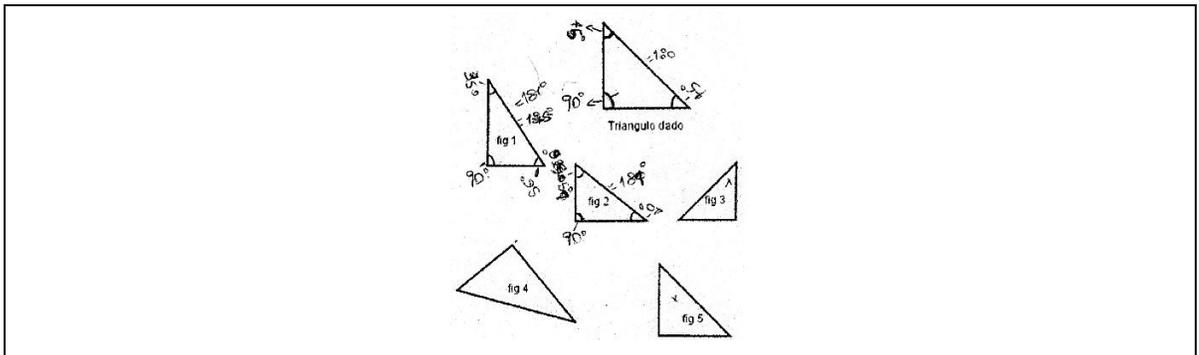


Figura 5.1 análisis gráfico de Franky en la actividad 3.

Se le asigna al primer razonamiento de Franky, el **descriptor 2.2** porque empezó determinar aspectos matemáticos específicos como la igualdad en la medida de los ángulos correspondientes que le permitieron analizar la semejanza. Al segundo razonamiento, se le asigna el **descriptor 2.5** porque el estudiante, empezó a inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos isósceles.

Jorge justificó sus razonamientos a través de la toma de medidas de los lados de cada triángulo y planteó que:

Jorge: Todos los triángulos son parecidos, pero solo tienen la misma forma las figuras 2, 3, y 5.

El profesor le preguntó a Jorge:

Profesor: *¿Por qué consideras que todos los triángulos son parecidos?*

Jorge: *Porque todas las figuras tienen los mismos ángulos (haciendo referencia al ángulo recto)*

Profesor: *Jorge, mida los ángulos de este triángulo.*

Jorge: *No recuerdo como medir ángulos.*

El profesor le explicó rápidamente como ubicar el transportador, para animarlo a medir los ángulos, pero el estudiante no se sentía muy seguro, entonces, el profesor lo invitó a tomar medidas de los lados con el fin de hallar alguna regularidad matemática. Jorge midió incorrectamente uno de los lados del triángulo dado, debido a esto no le permitió observar la semejanza de triángulos rectángulos isósceles. Jorge finalizó el desarrollo la actividad guiándose por la apariencia física de ellas. Se asigna el **descriptor 1.1**

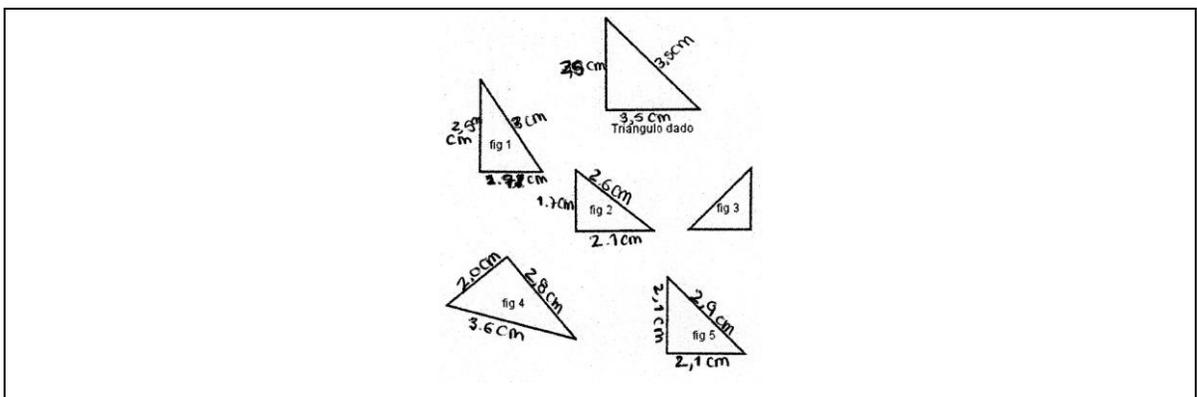


Figura 5.2 análisis gráfico de Jorge en la actividad 3.

Antes de seguir con la ejecución de la actividad 4, el profesor realizó el repaso sobre medición de ángulos, porque se evidenció en el desarrollo de la actividad 3, que la mayoría de los estudiantes no recordaban como medir ángulos, ni tampoco la propiedad que cumplen todo triángulo respecto a los ángulos internos (la suma

interna de sus ángulos es 180°). Estas dificultades se pueden observar en las figuras 5.1, 5.2 y 5.3.

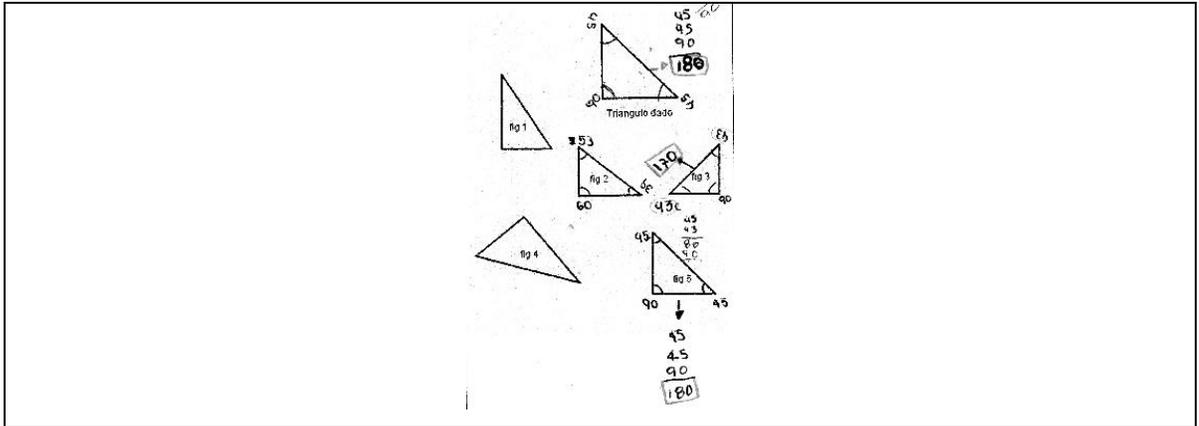


Figura 5.3 análisis gráfico de Jonathan en la actividad 3.

Actividad 4 (Anexo 4)

En esta actividad, se presentaron triángulos rectángulos (cuatro escalenos y uno isósceles). El estudiante debía reconocer figuras de la misma forma y parecidas. Jorge expresó su razonamiento de la siguiente forma:

Jorge: *Los triángulos que tiene la misma forma son la figura 2 y 3 porque tienen los mismos ángulos y los parecidos son las figuras 1, 2, 3 y 5 porque todos son escalenos.*

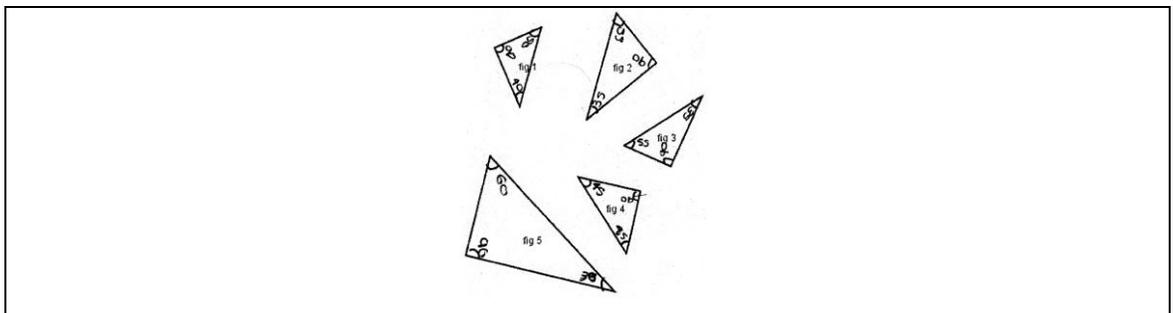


Figura 5.4 análisis gráfico de Jorge en la actividad 4.

Al razonamiento de Jorge, se le asigna el **descriptor 1.3** porque comenzó a percibir algunas características matemáticas para determinar la semejanza.

En la producción escrita de la actividad 4, Franky afirmó que:

Franky: *Las figuras 2 y 3 tienen la misma forma porque tienen la misma medida de en sus ángulos y las figuras 1, 3 y 5 son parecidas porque sus ángulos son desiguales.*

Al reproducir el video de la actividad 4, se observa que Franky usó el criterio de medir los ángulos de los triángulos, y obtuvo solo una pareja según la igualdad de ángulos correspondientes, pero visualmente cree que son tres los triángulos de la misma forma y dice:

Franky: *Profe, por un grado de diferencia en dos ángulos de la figura 5, no se puedo clasificar de la misma forma con respecto a estos dos triángulos (figuras 2 y 3), que si tienen igualdad en sus ángulos, aunque a simple vista pareciera que si son de la misma forma los tres triángulos (figuras 2, 3 y 5).*

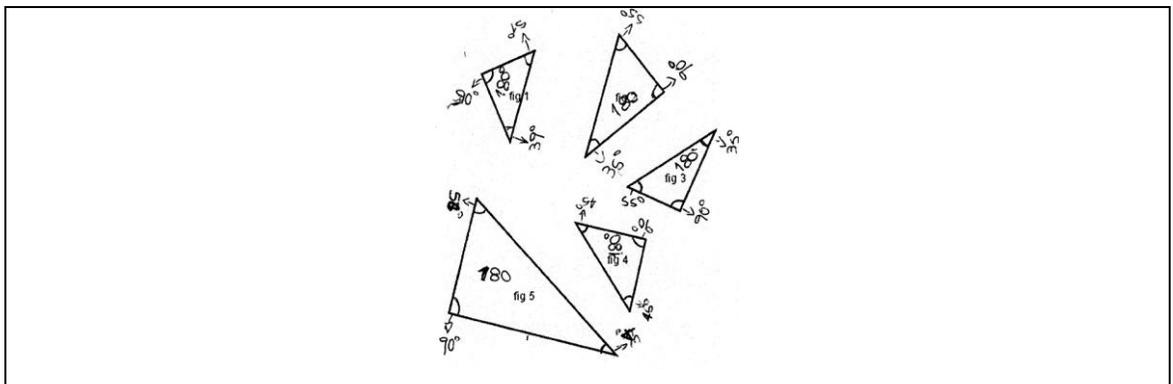


Figura 5.5 análisis gráfico de Franky en la actividad 4.

El estudiante solucionó esta actividad verificando nuevamente su razonamiento de igualdad de ángulos correspondientes para determinar sin dificultades la semejanza de triángulos. Se le asigna el **descriptor 2.2**. Se evidenció en su

argumento que reconoce triángulos no simplemente en por su apariencia, sino que ha descubierto uno de los criterios de la semejanza.

Fase de explicitación. (Tercera Sesión)

El profesor dialogó con los estudiantes sobre el trabajo realizado hasta el momento, con el fin de clarificar nuevamente las nociones intuitivas del concepto de semejanza. Explicó la clasificación de triángulos según sus lados y según sus ángulos, para relacionar identificar y clasificar los triángulos que aparecen en las cuatro actividades desarrolladas y así concretar la solución correcta en cada una de ellas.

Actividad 5.

Esta actividad se planeó para desarrollarla en la fase de orientación libre. La finalidad fundamental de esta actividad, es lograr consolidar lo que han aprendido los estudiantes sobre figuras de la misma forma y empezar a asociar ésta noción intuitiva con el concepto de semejanza de triángulos

Actividad 5 (Anexo 5)

Jorge en su producción escrita planteó que:

Jorge: *La figura N° 1, tiene la misma forma porque tiene los mismos ángulos, a pesar de que son escalenos. La figura N° 2, tiene la misma forma porque tiene los mismos ángulos, a pesar de que son isósceles.*

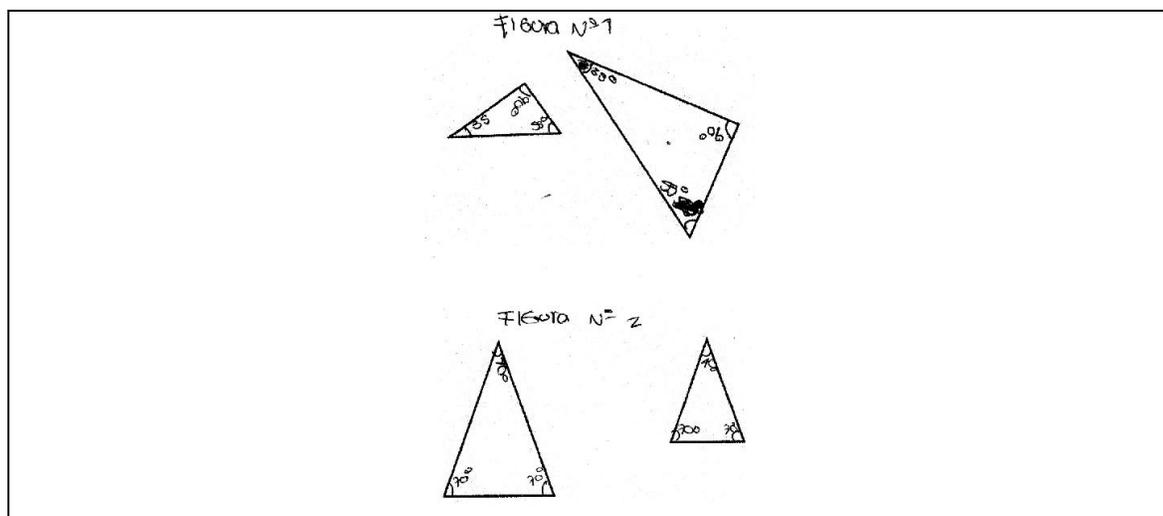


Figura 5.6 análisis gráfico de Jorge en la actividad 5.

A este razonamiento, le asignamos el **descriptor 2.2** porque asumió el criterio de la igualdad en los ángulos correspondiente de los triángulos, para determinar la semejanza, Además empezó a comprender que no importa la clase de triángulos, se pueden establecer relaciones de semejanza entre ellos.

En la producción escrita de Franky se encontró que:

Franky: *El par No 1 de triángulos son escalenos y tiene las mismas medidas en sus ángulos y así son iguales en su forma. El par No 2 son isósceles y son iguales en su forma puesto que sus ángulos son iguales y así son de la misma forma.*

Franky, siguió usando el mismo criterio para determinar la semejanza. Asignamos el **descriptor 2.8**, porque el estudiante demostró la semejanza al verificar, en varias situaciones que se cumple este criterio.

Actividad 6 y 7. (Cuarta sesión).

Las actividades 6 y 7 fueron diseñadas para desarrollar la fase de integración. Se pretendió que los estudiantes fusionaran el conocimiento adquirido de semejanza,

los métodos y las formas de razonamiento utilizados en las actividades anteriores, con la nueva situación, la semejanza en rectángulos.

Estas tareas tenían la finalidad de encontrar, otras relaciones matemáticas diferentes a la medición de ángulos, para establecer la semejanza de figuras (la proporcionalidad de lados correspondientes y el factor de semejanza).

Actividad 6 (Anexo 6)

En diálogo individual con el profesor, Franky y Jorge empezaron a encontrar relaciones individuales de cada rectángulo:

Franky: *Profe, encontré las siguientes relaciones, por ejemplo que el largo que es 5 cm de este rectángulo (se refiere a la figura 2) es el doble que su ancho, que es 2,5 cm.*

Jorge: *Profe, la figura 5 tiene la propiedad que el largo, es el doble del ancho.*

El profesor motivó a los estudiantes a que encontraran otros rectángulos que cumplieran con esa misma relación o relaciones diferentes, luego que justificaran su razonamiento.

Franky: *Mira profe, en este y este (hace referencia a las figuras 2 y 5) el largo es el doble del ancho y en estas (hace referencia a las figuras 1 y 3), que si al ancho se le suma uno más, da el largo del rectángulo.*

Profesor: *Esa propiedad sumativa se cumple en la primera pareja que relacionó*

Franky: *No, por eso estoy diciendo que estos dos (hace referencia a las figuras 2 y 5) tienen la misma forma y estos dos (hace referencia a las figuras 1 y 3) tienen la misma forma*

Profesor: *Usted cree que se puede usar esa propiedad sumativa, para identificar triángulos de la misma forma.*

Franky: *Sí, profe.*

En este razonamiento, el estudiante visualizó cada rectángulo como un todo, y trató de relacionarlo con otros, de dos formas: a través de un factor específico y a través de la adición de una cantidad. El profesor se percató que el estudiante puede dejarse guiar por el error aditivo para establecer semejanza, por tanto lo persuade diciéndole:

Profesor: *Entonces en esta pareja (hace referencia a las figura 2 y 5) se debe verificar el mismo criterio...*

Franky: *No profe, por eso digo que hay dos similitudes distintas...*

Profesor: *Si estableció un criterio entre largos y anchos de rectángulos semejantes, ese mismo criterio debe verificarse para otros semejantes, revise nuevamente otras parejas que se relacionen y visualice cuál de los dos criterios que ha mencionado se cumple más.*

Franky: *Profe, ya encontré otras similitudes. Aparte de las figuras 2 y 5, las figuras 3 y 6 también tienen en cuenta la multiplicación para relacionar los largos y los anchos, así que creo que el criterio para verificar la semejanza es la multiplicación de un factor.*

Profesor: *Explique lo que encontró:*

Franky: *que las figuras 2 y 5 tienen la misma forma, porque las figuras tienen el factor de que al multiplicar el ancho por dos, su largo es el resultado. También las figuras 3 y 6 tienen un factor semejante, en que al multiplicar el ancho de la figura 3 por dos, da la medida del ancho de la figura 6 y también pasa lo mismo con su largo (al multiplicarlo por dos). Las figuras 1 y 4 no son semejantes porque sus medidas no tienen ningún factor semejante...*

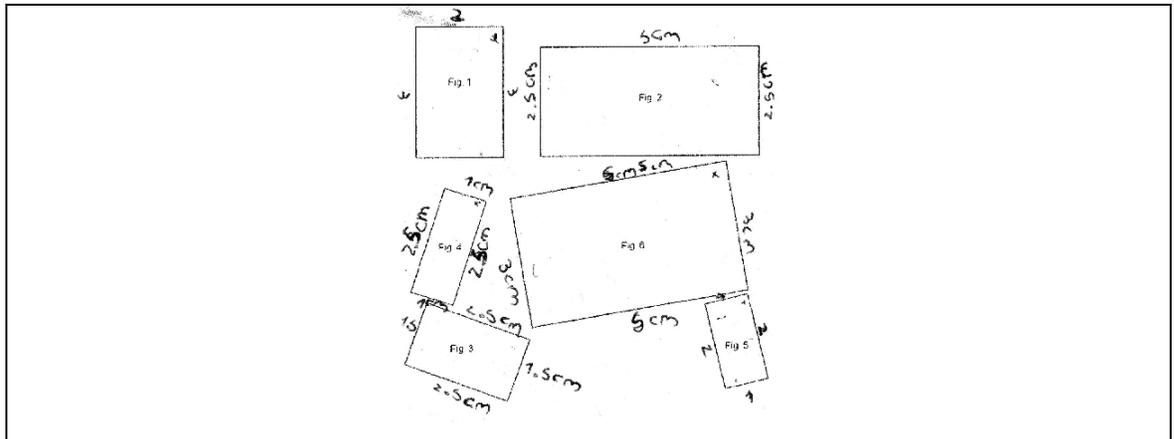


Figura 5.7 análisis gráfico de Franky en la actividad 6.

A este razonamiento le asignamos el **descriptor 2.2** porque determinó aspectos matemáticos de rectángulos semejantes como es el factor de semejanza e inconscientemente estipuló proporcionalidad entre lados correspondientes. Al final de su razonamiento, evitó el error aditivo, que es frecuente en el razonamiento de los estudiantes al enfrentasen a situaciones de este tipo.

El diálogo de Franky y el profesor, influyó en los razonamientos de algunos estudiantes que justificaron el desarrollo de la actividad en forma similar. Jorge después de medir los lados de los rectángulos, argumentó:

Jorge: *Los rectángulos que tienen la misma forma son las figuras 2 y 5 porque al sumar su ancho dos veces, da el largo del rectángulo, otra característica que tienen la figura 3 y 6 es que al multiplicar el ancho de la figura 3 por dos, me da el ancho de la figura 6 y al multiplicar el largo de la figura 3 por dos, me da el largo de la figura 6. En conclusión las figuras 2 y 5 tienen la misma forma, porque al multiplicar sus anchos por 2, me da los largos de los rectángulos...*

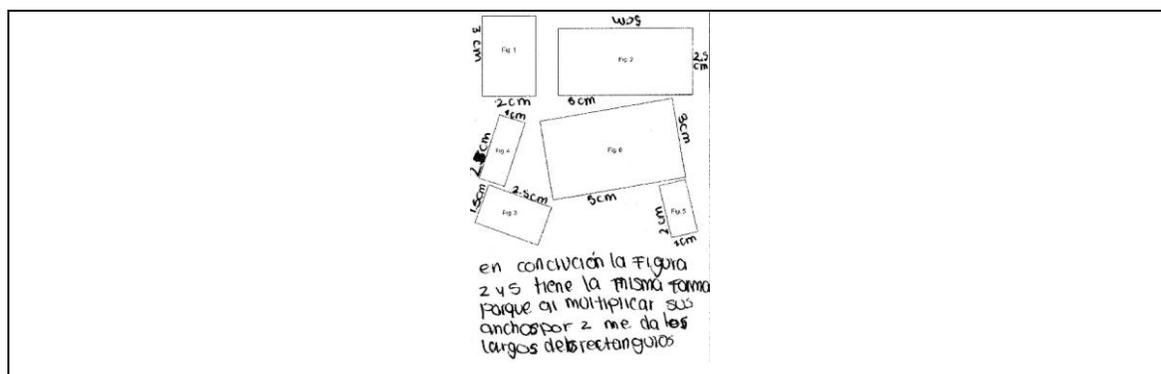


Figura 5.8 análisis gráfico de Jorge en la actividad 6.

Según el razonamiento que hizo Jorge a las figuras 2 y 5, encuentra rectángulos semejantes porque cumplen una relación entre el ancho y el largo de cada rectángulo (el largo es el doble de su ancho) Se le dificultó al estudiante analizar la relación entre los largos y los anchos correspondientes de dos rectángulos porque el factor de semejanza es racional, puesto que al referirse a las figuras 3 y 6, especificó la relación entre los lados correspondientes de los rectángulos y determina el factor de semejanza por ser un número entero, solo que no lo vio como una condición necesaria para la semejanza. Se le asigna a este razonamiento el **descriptor 1.3**.

El profesor en la fase de explicitación para la actividad 6, persuadió a los estudiantes para iniciar la socialización de sus razonamientos, respecto al análisis hecho sobre la clasificación de rectángulos semejantes. Con las estrategias aritméticas que los estudiantes detectaron, el profesor estableció las razones entre los largos y anchos correspondientes de cada par de rectángulos seleccionados. Los estudiantes lograron observar la igualdad de razones entre los lados correspondientes de rectángulos semejantes y al final se descartó la estrategia aditiva. El profesor concluye este diálogo, usando la palabra “proporcionalidad” en figuras semejantes, entendido como: la igualdad de razones entre lados correspondientes.

Actividad 7 (Anexo 7)

Se propuso un conjunto de seis rectángulos que comparten un mismo vértice, cinco de ellos sobrepuestos. Franky, realizó el trazo de varias diagonales que partieron el vértice común y estableció lo siguiente.

Franky: *Las figuras 1, 3, 4 y 5 tienen la misma diagonal, así que tienen la misma forma. Las figuras 2 y 6 son parecidas y la figura 2 es un cuadrado. La diagonal de las figuras 1, 3, 4 y 5 se produce por su proporcionalidad.*

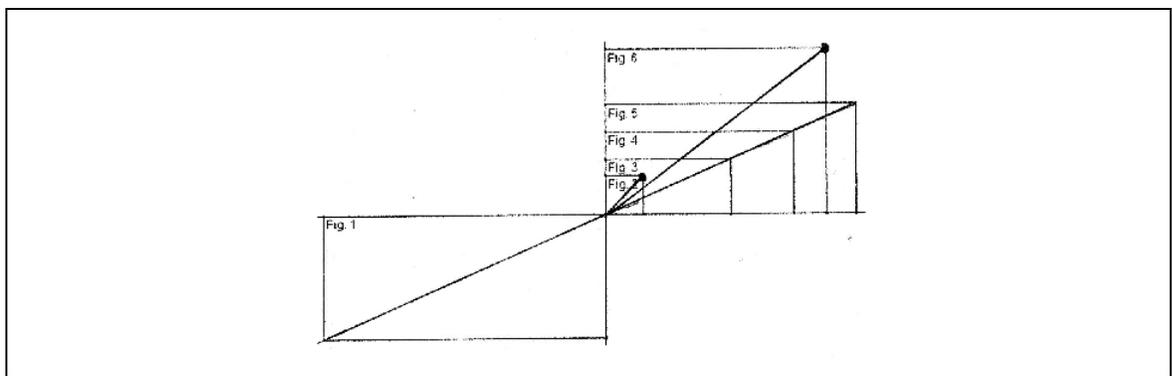


Figura 5.9 análisis gráfico de Franky en la actividad 7.

Se asigna a este razonamiento el **descriptor 2.4**, porque comprendió que los rectángulos coincidentes en un vértice, que comparten una diagonal son semejantes.

Jorge encontró las medidas de los lados de cada rectángulo, pero el estudiante no halló ninguna relación visible, porque no lo mencionó en su argumento. Luego trazó una diagonal que la comparten algunos rectángulos y estipuló:

Jorge: *Las figuras que son semejantes son las figuras 1, 3, 4 y 5 porque tienen una misma diagonal.*

A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.4**, porque Jorge al igual que Franky comprendió que los triángulos coincidentes en un vértice, que comparten una diagonal son semejantes.

Actividades 8 y 9. (Quinta sesión)

Este bloque de actividades, fue diseñado para el inicio de la fase de orientación dirigida del segundo nivel. Las actividades 8 y 9 son similares a las actividades anteriores por los dibujos de triángulos, pero con la diferencia de un cuadro comparativo que se debía llenar, con medidas específicas de los triángulos dados. La finalidad de este nuevo ingrediente, es que los estudiantes comprendieran mejor la noción intuitiva de razón y la equivalencia permanente en triángulos semejantes.

Actividad 8 (Anexo 8)

En esta actividad los estudiantes escribieron:

Jorge: *Las figuras que tienen la misma forma (medida) en sus ángulos son las figuras 1 y 4, también las figuras 2 y 3 tienen los mismos ángulos y también la misma forma por las razones....*

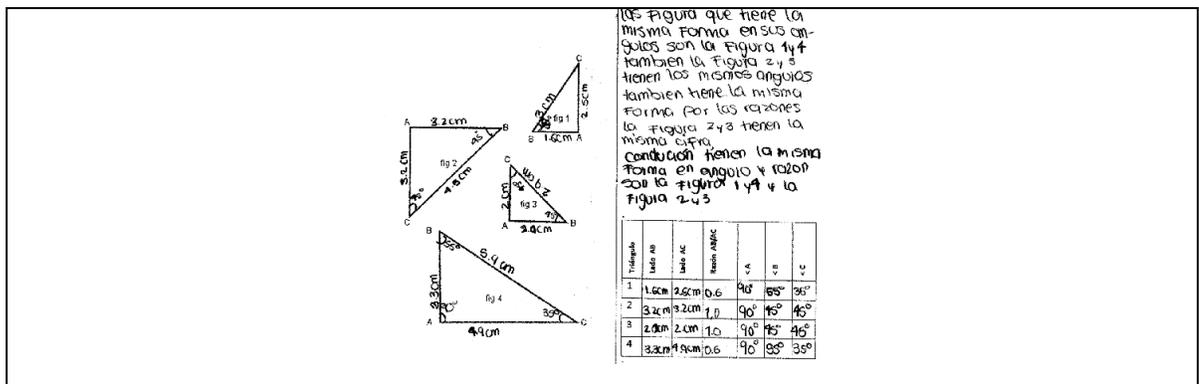


Figura 5.10 análisis gráfico de Jorge en la actividad 8.

Franky: *Son semejantes las figuras 1 y 4 y las figuras 2 y 3 porque sus ángulos son de igual medida, al igual que su razón.*

Se evidencia en ambos estudiantes los **descriptores 2.2 y 2.3** porque determinaron aspectos matemáticos como la igualdad de ángulos en triángulos semejantes y en sus razonamientos la posición de los triángulos semejantes es irrelevante.

Actividad 9 (Anexo 9)

En el desarrollo de esta actividad Jorge escribió:

Jorge: *Los triángulos que no tienen la misma forma son las figuras 2 y 3, y los que tienen la misma forma por la igualdad de sus ángulos y su razón son las figuras 1, 4 y 5.*

Al igual que en la actividad anterior Jorge hizo razonamientos similares, por tanto se evidencian los **descriptores 2.2 y 2.3**. Al reproducir la grabación de la actividad 9, Franky argumenta lo siguiente:

Franky: *Me he dado cuenta que sin necesidad de buscar los ángulos, las figuras 1, 4 y 5 son semejantes, porque sus razones son iguales entre lados correspondientes. Por la anterior actividad me di cuenta que las figuras que tenían la misma razón tenían la misma medidas de sus ángulos.*

En consecuencia Franky escribió en su hoja de trabajo:

Franky: *No tienen la misma forma las figuras 2 y 3 porque sus razones no son iguales y por lo tanto sus ángulos tampoco, y son semejantes las figuras 1, 4 y 5.*

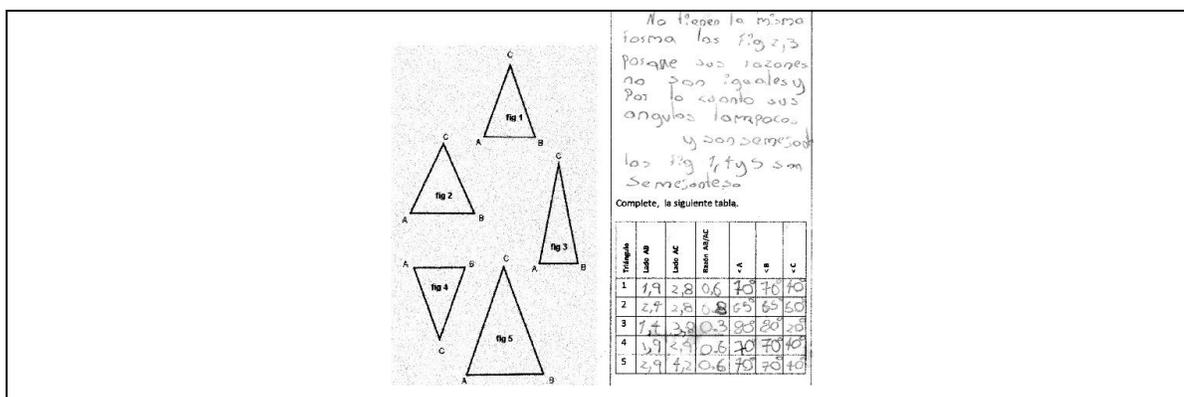


Figura 5.11 análisis gráfico de Franky la actividad 9.

Al primer razonamiento se le asigna el **descriptor 2.6** que hace referencia a inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza de triángulos. Y al segundo se le asigna el **descriptor 2.3**.

Actividades 10 a 12

Este bloque de actividades, fue diseñado para continuar la fase de orientación dirigida del segundo nivel. La característica general de estas actividades, fue la aplicación del concepto de semejanza en la construcción. Su diferencia con las actividades anteriores, es que aparecieron los enunciados sin ningún dibujo, queríamos que los estudiantes desarrollaran sus propios dibujos y expresaran sus ideas respecto de la semejanza de triángulos, y siguieran encontrando las condiciones matemáticas que la sustentan.

Actividad 10 (sexta sesión)

Actividad 10(1) y 10(2) (Anexo 10)

Los estudiantes realizaron la construcción del par de triángulos, cuyas medidas eran dadas y determinaron lo siguiente:

Jorge: Si son semejantes (los dos triángulos) en sus ángulos (iguales) y en sus razones (iguales), la razón entre sus lados correspondientes es 3.

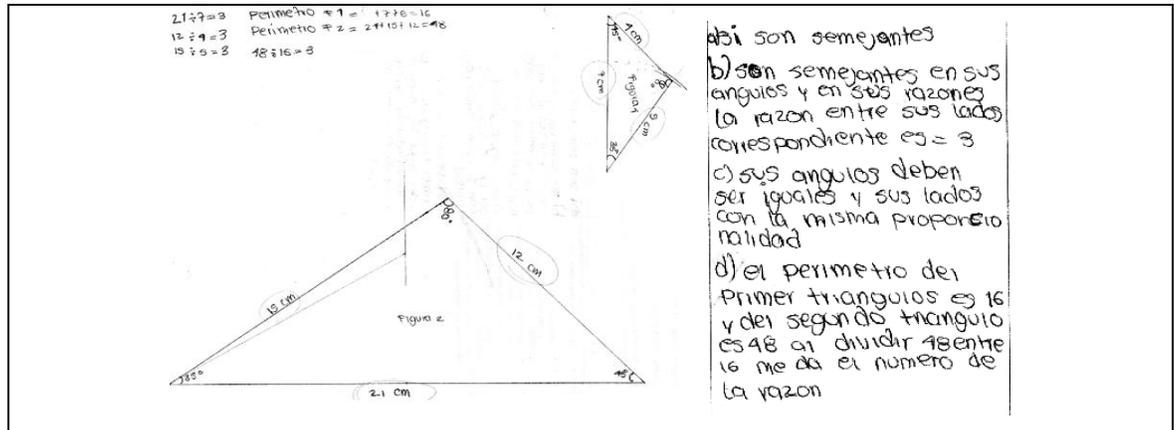


Figura 5.12 Construcción de triángulos y razonamiento de Jorge en la actividad 10(1) a la 10(4).

Franky: Si son semejantes (los dos triángulos) porque sus razones son iguales y así sus ángulos.

Los dos estudiantes demostraron la semejanza usando inconscientemente, dos criterios AAA y LLL verificando los ángulos y las razones de lados correspondientes, a estos razonamientos se le asignan el **descriptor 2.8**.

Actividad 10(3) (Anexo 10)

En esta actividad los estudiantes plantearon las condiciones necesarias para que dos triángulos fueran semejantes:

Jorge: Sus ángulos deben ser iguales y sus lados con la misma proporcionalidad.

Franky: La razón de sus lados correspondientes y sus ángulos tienen que ser iguales.

En la reproducción del video, Franky dialogó con el profesor y le afirmó:

Franky: *Sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales y la razón de semejanza es tres.*

Asignamos el **descriptor 2.2** a estos razonamientos, porque inducen las condiciones necesarias para la semejanza de triángulos.

Actividad 10(4) (Anexo 10)

Se pidió en esta actividad que demostraran si existía alguna relación entre los perímetros de cada triángulo. Los estudiantes establecieron que:

Jorge: *El perímetro del primer triángulo es 16 y del segundo triángulo es 48. Al dividir 48 entre 16 me da el número de la razón.*

Franky: *El perímetro de la figura 1 es 16 y el de la figura 2 es 48. La relación es que al multiplicar el perímetro de la figura 1 por tres (el factor de semejanza), el resultado es el perímetro de la figura 2.*

A estos razonamientos similares, le asignamos el **descriptor 2.8** porque demostraron de manera informal, propiedades que tienen que ver con la semejanza. Encontraron en los perímetros, la misma proporcionalidad que la de lados correspondientes.

Fase de explicitación de las actividades 8, 9 y 10

El profesor entregó las actividades ya desarrolladas, con el fin de que cada estudiante se ubicara en cada actividad y explicara el argumento usado para iniciar el debate, sobre las formas de solución y comprensión de condiciones necesarias en la semejanza de triángulos.

Se inicia con la actividad 8, el profesor pregunta:

Profesor: *¿Qué hicieron ustedes para la elección de semejanza en los triángulos que propone la actividad?*

Jorge: *Tomar la medida de los lados, de los ángulos y se halló la razón*

El profesor indaga sobre la idea que tienen los alumnos sobre la palabra correspondiente al preguntar:

Profesor: *¿Qué entienden por lados y ángulos correspondientes?*

Franky: *Qué son iguales*

Profesor: *No necesariamente la palabra correspondiente significa igualdad, por ejemplo en triángulos lados correspondientes son los lados de mayor longitud (o los de menor longitud) y ángulos correspondientes son los ángulos con mayor amplitud (o los de menor amplitud). Encuentre en la actividad lados y ángulos correspondientes.*

Franky: *El lado AB de la figura 4 hace correspondencia con el lado AB de la figura 1, porque son los lados más cortos de ambas figuras y el ángulo C hace correspondencia en las dos figuras, porque tiene la misma medida.*

El estudiante Franky, aclara que es importante mirar los lados correspondientes para hallar la razón de semejanza.

Profesor: *Muy bien. Ahora Víctor ¿Qué argumento empleó, para determinar la semejanza de triángulos?*

Víctor: *Medí los ángulos y seleccioné los triángulos que tienen sus ángulos iguales como semejantes.*

Profesor: *Muy bien Víctor, existe otra forma distinta que permitió determinar la semejanza.*

Jonathan: *Hallando la razón de sus lados correspondientes.*

Profesor: *Muy bien Jonathan, es decir tenemos dos criterios que ustedes mismos han encontrado desarrollando las actividades que son: ángulo, ángulo, ángulo (AAA) y lado, lado, lado, (LLL). ¿Qué significa cada uno?*

Jorge: *AAA significa que los ángulos correspondientes tienen que ser iguales*

Profesor: *Y el criterio LLL ¿qué significa?*

Franky: *Se debe hallar la razón de sus lados correspondientes y si son iguales entonces los triángulos son semejantes.*

Profesor: *Muy bien, mejorando el vocabulario vamos a llamar a las razones iguales como proporcionales. Por tanto, LLL significa tienen sus tres lados correspondientes proporcionales.*

Se pasó a la actividad 10 porque la actividad 8 y 9 eran muy similares.

Profesor: *Dadas las la longitud de los lados de los dos triángulos ¿qué medidas son correspondientes entre sí?*

Jorge: *4cm corresponde con 12cm, 5cm con 15cm y 7cm con 21cm.*

Profesor: *Muy bien Jorge. En esta actividad se les pedía también hallar la razón, si eran semejantes los dos triángulos.*

Jonathan: *Profe para hallar la razón se dividió los lados correspondientes y dio tres en todas las divisiones.*

Profesor: *Es decir los triángulos son semejantes ¿por qué?*

Franky: *Sus lados correspondientes son proporcionales.*

Profesor: *Muy bien Franky. Ahora quiero saber ¿Qué han entendido sobre el concepto de semejanza?*

Jonathan: *Profe que, figuras semejantes son figuras de la misma forma.*

Profesor: *Necesitarán tener el mismo tamaño*

Franky: *No.*

Franky: *Profe, pueden aparecer triángulos del mismo tamaño, pero si no hay igualdad en sus ángulos, no podemos decir que son semejantes.*

El estudiante hacía referencia a la actividad 4, en la que el triángulo número 5, le parecía semejante a otros dos, pero por la diferencia en un grado de dos de sus ángulos, lo descartó. Entonces el profesor le aclaró:

Profesor: *Triángulos congruentes, hace referencia a triángulos idénticos en sus medidas de lados y ángulos, este es un caso particular que estudiaremos en otra actividad más adelante.*

Actividad 11 (séptima sesión)

Actividad 11(1) y 11(2) (Anexo 11)

Jorge y Franky en sus producciones escritas argumentaron que, las medidas de otro triángulo semejante al dado (de dimensiones 9 cm, 6 cm y 4 cm) con razón de semejanza $2/3$ es respectivamente 6 cm, 4 cm y $8/3$ cm. Ambos estudiantes construyeron los dos triángulos, tomaron medidas de sus ángulos y verificaron la semejanza.

A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.7** porque realizaron la construcción de triángulos semejantes al darles el factor de semejanza.

Posteriormente, trazaron la altura vertical a la base de cada triángulo y midieron su longitud, hallaron su razón y determinaron:

Jorge: *La razón de los triángulos es 0,6.*

Jorge trazó las alturas de ambos triángulos, y encontró que la razón entre ellas era de 0,52 por un error en la construcción del triángulo pequeño ocasionado por el compás que utilizó. Esto le impidió encontrar la relación de las alturas en triángulos semejantes.

Franky: *Las alturas de los triángulos son 2,1 y 1,4 y su razón es $1,4 \div 2,1 = 0,6$*

El estudiante Franky, determinó en diálogo con el profesor que: la relación entre las alturas es la misma que la de los perímetros y la de los lados correspondientes en triángulos semejantes. Se le asigna a este razonamiento el **descriptor 2.8**

porque demostró de manera informal, propiedades que tienen que ver con la semejanza de triángulos.

Actividad 11(3) (Anexo 11)

Al preguntarle si son semejantes los triángulos y las condiciones que cumplen, argumentaron lo siguiente:

Jorge: *Si son semejantes cumplen las condición que sus ángulos (correspondientes) son iguales.*

Se asigna el **descriptor 2.2** porque continuó determinado la semejanza a través de condiciones matemáticas.

Franky: *Son semejantes porque al dividir sus alturas da la razón.*

The image shows handwritten work by Franky. On the left, there are two diagrams of triangles. The top diagram shows a triangle with base b and height h . The bottom diagram shows a triangle with base 6 and height 4 . Between the diagrams are calculations: $\frac{4}{1} = \frac{2}{3} = \frac{h}{3} = h = 4$, $\frac{4}{1} = \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2.6 = c$, and $\frac{4}{1} = \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6 = b$. To the right of the diagrams are four points of reasoning:

- a) Los lados del otro triángulo son $\frac{4}{1}$, $\frac{8}{3}$ y 6 cm
- b) Las alturas de los triángulos son 2.1 y 1.4 y su razón es $1.4 : 2.1 = 0.6$
- c) Son semejantes porque al dividir sus alturas da la razón
- d) La razón entre el área entre los dos triángulos son 0.4

Figura 5.13 Construcción de triángulos y razonamiento de Franky en la actividad 11(1) a la 11(4).

Con este razonamiento el estudiante continuó demostrando de manera informal, propiedades que tiene que ver con la semejanza. Se le asigna el **descriptor 2.8**.

Actividades 11(4) (Anexo 11)

En este ítem se les pedía a los estudiantes, que hallaran el área y la razón entre ellas, con el fin de verificar la existencia de alguna relación, similar a la relación estudiada entre los perímetros de figuras semejantes. Se les dio la fórmula del área del triángulo porque, algunos no la recordaban muy bien y otros no la sabían. Los estudiantes escribieron lo siguiente:

Franky: *La razón entre el área entre los dos triángulos son 0,4.*

El estudiante halló correctamente la razón de las áreas, pero no encontró ninguna relación similar al perímetro, alturas, y lados correspondientes de triángulos semejante. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.7** porque al realizar con precisión la construcción pudo encontrar este resultado a pesar de que no logró relacionarlo.

Jorge: *La relación que existe entre las áreas de los dos triángulos es 0,3.*

El estudiante tuvo inconvenientes al construir uno de los triángulos, la longitud de la altura cambió y en consecuencia la razón entre las áreas. Sin embargo realizó el mismo proceso que Franky y determinó un valor que no pudo relacionar. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.7**.

Fase de explicitación de la actividad 11

El profesor inicia esta fase preguntando:

Profesor: *¿Cómo hallaron la medida de los lados correspondientes, dado el factor de semejanza?*

Franky: *Se multiplicó la razón con la longitud de cada lado y así se obtuvo las longitudes de los lados correspondientes.*

Profesor: *Muy bien Franky, para verificar dividan las longitudes correspondientes del triángulo menor sobre la longitudes del triángulo mayor, les da 0.6666..., el valor decimal de 2/3.*

Profesor: *¿Qué criterio se usaron para comprobar que los triángulos son semejantes, teniendo en cuenta lo que hemos analizado?*

Franky: *Se Usaría el criterio LLL, porque sus lados son proporcionales.*

Jorge: *O también, el criterio AAA porque sus ángulos correspondientes son iguales.*

Profesor: *Muy bien, el factor de semejanza es equivalente a la razón de semejanza. Pasemos al último ítem que les pedía que demostraran si existía alguna relación entre las áreas de los dos triángulos.*

Los estudiantes socializaron los valores de la altura y área de cada triángulo, se encontraron diferencias al hallar la razón. Ninguno logró encontrar la relación que existe entre las áreas de triángulos semejantes.

El profesor explicó que, la razón entre las áreas de triángulos semejantes, es equivalente al cuadrado de la razón de semejanza.

Cuando el profesor determinó en el tablero la relación y halló la equivalencia numérica: $\frac{2}{3}^2 = 0,444 \dots$

Franky se sorprendió porque su razonamiento fue el más aproximado.

Actividad 12 (octava sesión)

La actividad propuesta tenía la finalidad de afianzar los dos criterios de semejanza, trabajados en las actividades anteriores e inducir un nuevo criterio. El papel del profesor fue fundamental para motivar a los estudiantes, que realizaran construcciones de triángulos distintos a los ya trabajados.

Actividades 12(1) (Anexo 12)

Al preguntar si podrían ser semejantes los triángulos que tienen solo dos pares de lados proporcionales. Los estudiantes realizaron lo siguiente:

Jorge realizó el dibujo de dos triángulos que propuso, uno con dimensiones 4 cm, 6 cm y 7 cm y el otro con medidas de 8 cm, 12 cm y 16 cm, respectivamente y afirmó:

Jorge: *No con dos lados proporcionales, no podemos asegurar la semejanza, porque al medir los ángulos, estos no son iguales.*

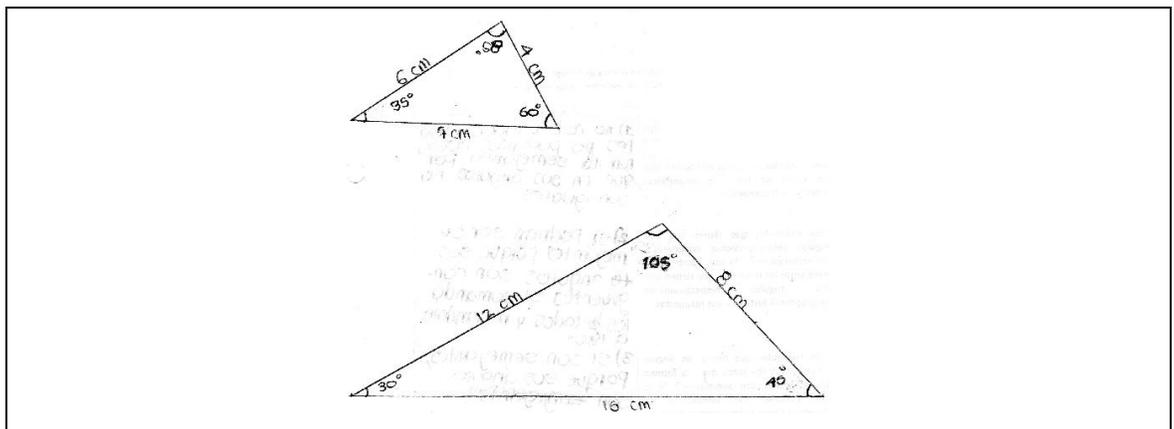


Figura 5.14 Construcción de triángulos de Jorge en la actividad 12(1).

Se asigna el **descriptor 2.8** al razonamiento que hizo Jorge, porque demostró con el criterio AAA que no son semejantes.

Franky planteó dos triángulos, uno con dimensiones 4 cm, 6 cm y 8 cm y el otro con medidas de 8 cm, 12 cm y 17 cm, respectivamente y escribe lo siguiente:

Franky: *No son semejantes puesto que al tener solo dos lados proporcionales sus ángulos cambiaron y no son iguales.*

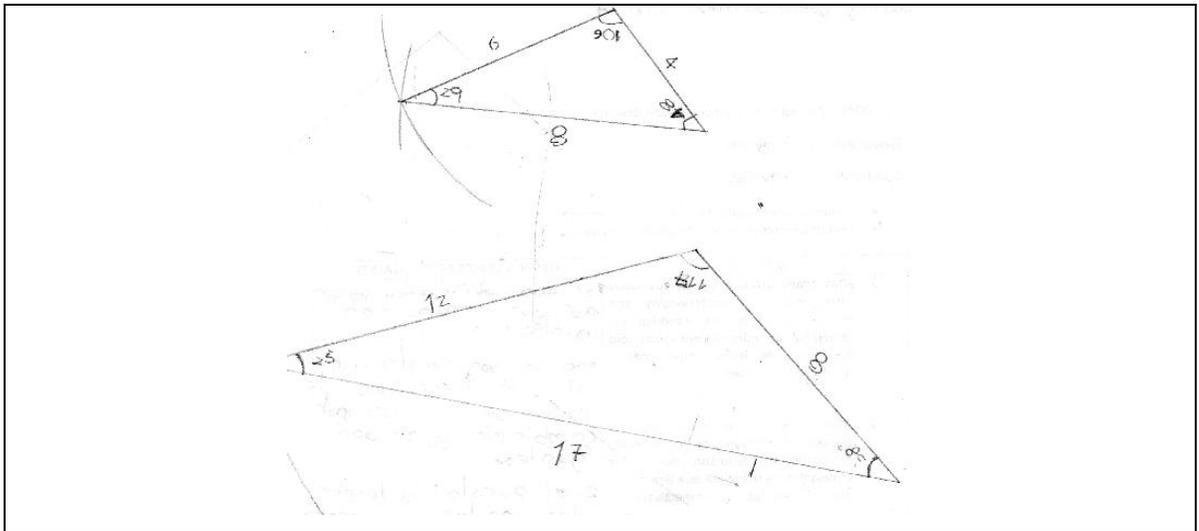


Figura 5.15 Construcción de triángulos de Franky en la actividad 12(1).

El estudiante demostró que no son semejantes al construir los triángulos, medir los ángulos y no encontrar la igualdad entre ángulos correspondientes. Se asigna el **descriptor 2.8**

Actividad 12 (2) (Anexo 12)

En esta actividad se les preguntó, si podría ser semejantes los triángulos que tienen solo dos ángulos respectivamente congruentes y los estudiantes respondieron:

Jorge: *Si son semejantes, porque sus ángulos son congruentes. Sí, sumando los dos ángulos y restándole a 180° se obtiene el otro ángulo congruente.*

Se asigna el **descriptor 2.8** al razonamiento que hizo Jorge, porque demostró que si son semejantes usando el criterio AA.

Franky: *Si son semejantes, puesto que al tener dos ángulos congruentes, el otro es igual porque la suma interna de los ángulos de todo triángulo es 180° .*

Se asigna el **descriptor 2.8** al razonamiento que hizo Franky, porque demostró la semejanza usando el criterio AA.

Actividad 12 (3) (Anexo 12)

Continúa la actividad, se pregunta si dos triángulos que tienen un ángulo congruente y los lados que lo forman proporcionales, son semejantes, a esta pregunta, los estudiantes respondieron:

Jorge: *Si son semejantes porque sus ángulos correspondientes son congruentes.*

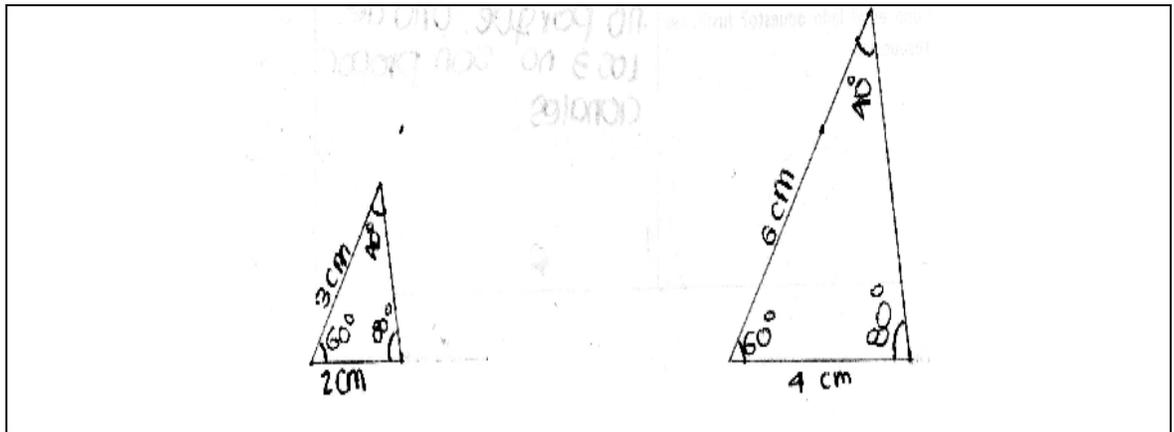


Figura 5.16 Construcción de triángulos de Jorge en la actividad 12(3).

El estudiante realizó la construcción de dos triángulos que tienen un ángulo congruente de 60° y los lados que lo forman proporcionales de 3 cm, 2 cm y 6 cm, 4 cm respectivamente, luego toma las medidas de los otros dos ángulos y se da cuenta que son congruentes. A este razonamiento le asignamos el **descriptor 2.7**.

Franky: *Si son semejantes, puesto que al construir los triángulos sus lados son proporcionales y los ángulos iguales.*

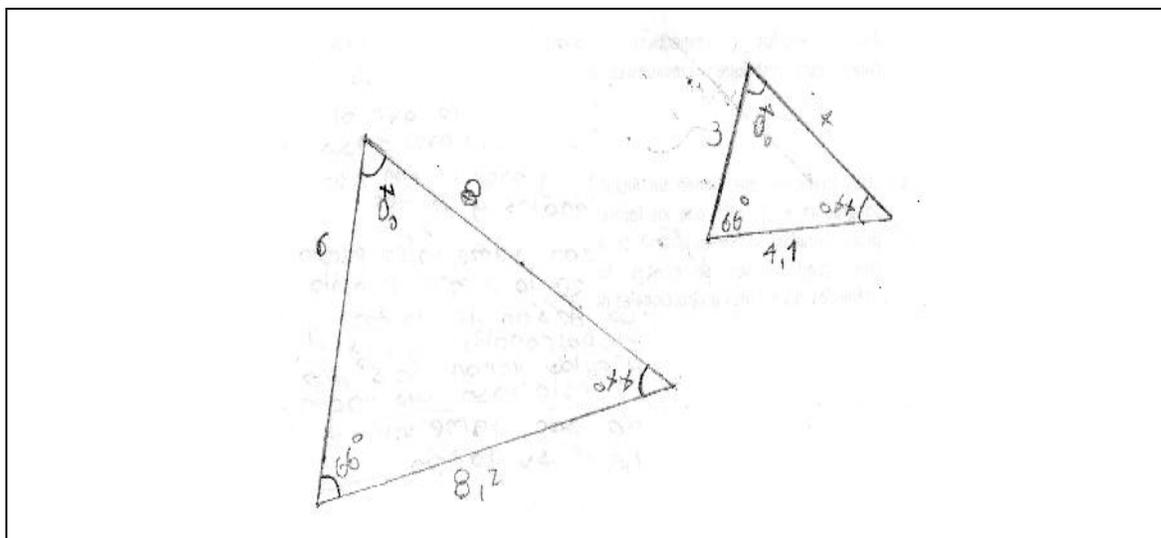


Figura 5.17 Construcción de triángulos de Franky en la actividad 12(3).

El estudiante realizó la construcción de dos triángulos que tienen un ángulo congruente de 70° y los lados que lo forman proporcionales de 3 cm, 4 cm y 6 cm, 8 cm respectivamente, luego tomó las medidas de los otros dos ángulos correspondientes y se dio cuenta que son iguales, además toma la medida del tercer lado de cada triángulo y observa que es proporcional (las medidas son 4,1 cm y 8,2 cm). A este razonamiento le asignamos el **descriptor 2.7**

Actividad 13 (novena sesión)

Esta actividad se planeó para desarrollar la fase de orientación libre. La actividad propone dibujos de tres parejas de triángulos. Con esta actividad se pretendió que el estudiante justificara la semejanza de triángulos usando los criterios de semejanza AA, LLL, LAL.

Actividad 13 (1) (Anexo 13)

La primera pareja de triángulos propuestos, son escalenos y obtusángulos. Jorge analiza la primera pareja de triángulos y realiza lo siguiente:

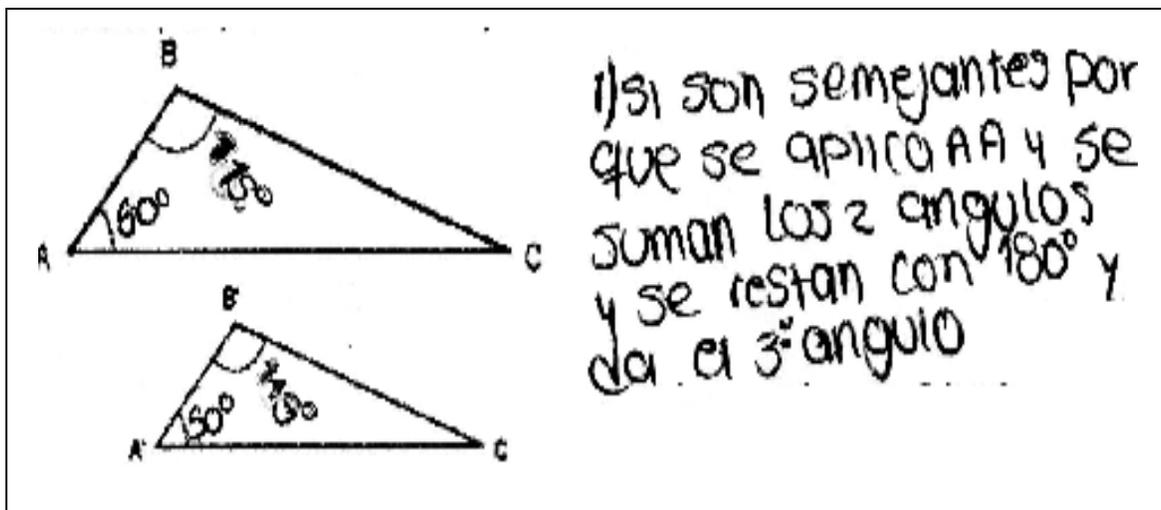


Figura 5.18 Razonamiento elaborado por Jorge en la actividad 13(1).

El estudiante midió dos ángulos correspondientes, verificó la congruencia de ellos y aplicó el criterio AA, para demostrar la semejanza. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 3.1** porque determinó y justificó de manera deductiva informal la condición suficiente para la semejanza de los triángulos.

El estudiante Franky resuelve la actividad en forma similar a Jorge y escribe:

Franky: *La primera pareja de triángulos son semejantes por el criterio AA, puesto que dos de sus ángulos, son iguales.*

A este razonamiento se le asigna el **descriptor 3.1**.

Actividad 13 (2) (Anexo 13)

La segunda pareja propuesta de triángulos, son rectángulos y escalenos. Por lo que los estudiantes determinaron la semejanza así:

Jorge: *Si son semejantes (la segunda pareja de triángulos) porque sus lados son proporcionales y su razón de semejanza es dos, se utilizó el criterio LLL para la semejanza.*

El estudiante midió la longitud del lado con menor longitud (que faltaba por medir), correspondiente a cada triángulo, luego determinó que los tres lados eran proporcionales, porque verificó la igualdad entre las razones de los lados correspondientes. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 3.1**

Para Franky, la segunda pareja de triángulos son semejantes, lo demuestra verificando la proporcionalidad de sus lados correspondientes y aplicando el criterio LLL.

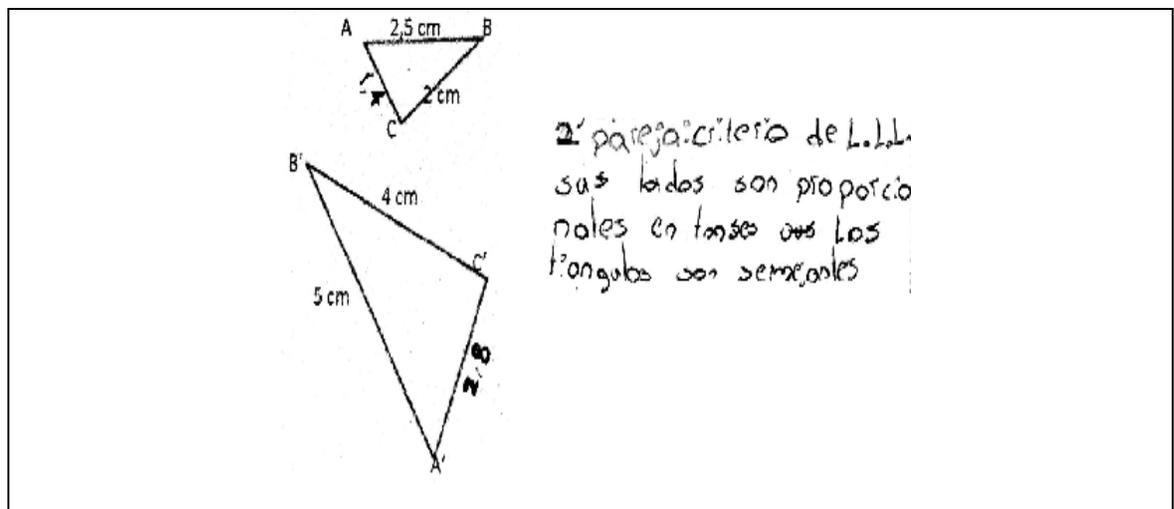


Figura 5.19 Construcción de triángulos de Franky en la actividad 13(2).

Por tanto al razonamiento de Franky se le asigna también el **descriptor 3.1**

Actividad 13(3) (Anexo 13)

En la tercera pareja de triángulos, se propuso triángulos isósceles congruentes, cuya finalidad era analizar la congruencia como caso particular de la semejanza. Los estudiantes resolvieron la actividad de la siguiente manera:

Jorge utilizó el criterio LLL para determinar la semejanza de los triángulos, como se muestra en la figura 5.19

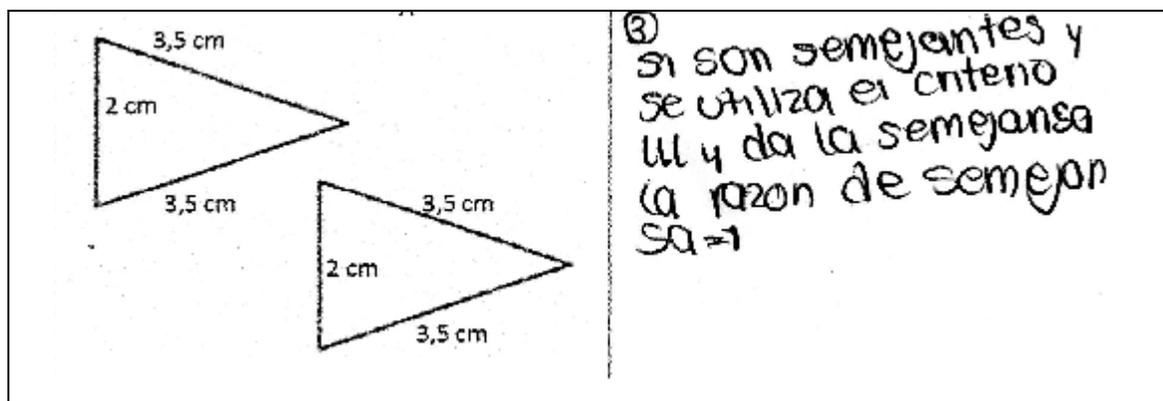


Figura 5.20 Razonamiento de Jorge en la actividad 13(3).

Franky analizó la actividad en forma similar:

Franky: *Sus lados son iguales y su razón es uno. Se utiliza el criterio LLL y así los triángulos son semejantes.*

Ambos estudiantes comprendieron, que la congruencia de triángulos es un caso particular de la semejanza, con razón de semejanza uno. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.5**.

Actividad 14 (décima y undécima sesión)

Esta actividad está planeada para desarrollar la fase de integración del nivel 2. Permitió evidenciar el nivel de razonamiento adquirido por los estudiantes al enfrentarse a diversas situaciones general sobre el concepto de semejanza. La actividad consistió en el desarrollo de cinco situaciones cada una apuntando a ciertos descriptores de los niveles 1 y 2, los cuales se podían resolver usando distintos razonamientos.

Actividad 14 (1) (Anexo 14)

Se pretendió que el estudiante determinara la semejanza de triángulos. El argumento de los estudiantes fue el siguiente:

Jorge: *Dos triángulos isósceles a veces son semejantes, siempre que los tres lados sean proporcionales, porque con dos lados no podemos garantizar la semejanza.*

Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes, porque cumplen con la proporcionalidad y sus ángulos son iguales.

Dos triángulos escalenos a veces son semejantes, siempre y cuando sus lados sean proporcionales y sus ángulos correspondientes sean iguales. ...

Se pudo asignar el **descriptor 3.2**, al razonamiento de Jorge, porque el estudiante distingue las condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de triángulos.

Franky: *Dos triángulos isósceles a veces son semejantes, puesto que al tener dos lados proporcionales y un no, la semejanza no se da. Son semejantes cuando sus lados correspondientes son proporcionales.*

Dos triángulos equivalentes son siempre semejantes, puesto que sus ángulos son iguales.

Dos triángulos escalenos a veces son semejantes. Son semejantes si sus lados son proporcionales.

Al igual que Jorge, Franky distingue las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de triángulos. Se le asigna también el **descriptor 3.2**.

Actividad 14 (2) (Anexo 14)

En esta actividad se dan las medidas de dos triángulos, se pide que construya los triángulos, determine si son semejantes y si lo son, halle la razón de semejanza.

En el desarrollo de la actividad, los estudiantes plantearon lo siguiente:

Jorge: *Si son semejantes los dos triángulos y la razón de semejanza es 0,6.*

El estudiante realizó la construcción de los triángulos dados, halló la razón de sus lados correspondientes y obtuvo la igualdad al determinar la razón de semejanza. Para este razonamiento se asigna el **descriptor 2.2**, porque Jorge determinó aspectos matemáticos específicos de la semejanza como la proporcionalidad de los lados.

Franky: *Si son semejantes, puesto la razón entre ellos es 0,6 y así sus ángulos son iguales.*

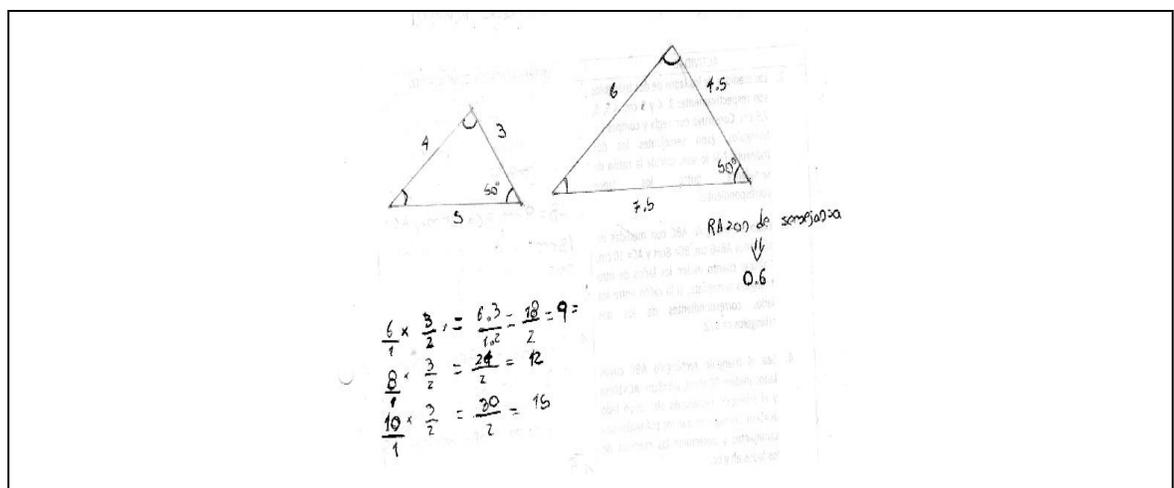


Figura 5.21 Construcción de triángulos elaborada por Franky en la actividad 14(2) y análisis de la actividad 14(3).

El estudiante construyó los triángulos, verificó la congruencia de un ángulo correspondiente y halló la razón de semejanza. Determinó la semejanza a través de la verificación de aspectos matemáticos como la igualdad de los ángulos correspondientes y la proporcionalidad de los lados. Se le asigna a este razonamiento el **descriptor 2.2**.

Actividad 14(3) (Anexo 14)

Jorge y Franky en sus producciones escritas argumentaron que, las medidas de otro triángulo semejante al dado (de dimensiones 6 cm, 8 cm y 10 cm) con razón de semejanza $\frac{3}{2}$ es respectivamente 9 cm, 12 cm y 15 cm.

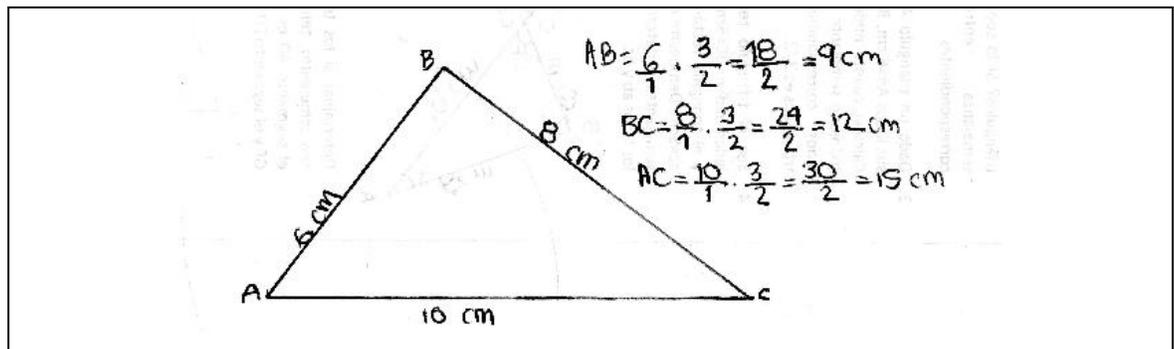


Figura 5.22 Construcción elaborada por Jorge en la actividad 14(3).

Jorge construyó triángulo dado, luego halló los lados correspondientes proporcionales al multiplicar cada longitud de los lados del triángulo por el factor de semejanza. Para este razonamiento se asigna los **descriptores 2.7 y 2.9**.

Franky halló los lados correspondientes proporcionales del triángulo dado (ver figura 5.20). Se le asigna a este razonamiento el **descriptor 2.9**, porque utiliza propiedades de la semejanza para determinar longitudes.

Actividad 14(4) (Anexo 14)

Jorge después de analiza la figura dada resuelve lo siguiente:

Jorge: *Son semejantes porque sus ángulos son de igual medida, por tanto sus lados son proporcionales, el lado ab del otro triángulo mide 4cm y el lado bc mide 3cm.*

Franky realizó un razonamiento similar al de Jorge, demostró la semejanza de triángulos usando el criterio AA.

4. Sea el triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden: $BC=6\text{cm}$, $AB=8\text{cm}$, $AC=10\text{cm}$ y el triángulo rectángulo abc, cuyo lado $ac=5\text{cm}$. Demuestre que los triángulos son semejantes y determine las medidas de los lados ab y bc.

se demuestra que los triángulos son semejantes con el criterio A.A.A
 el lado de BC y AB es $BC=3, AB=4$ así son correspondientes con razón de ~~proporcionalidad~~ 2

Figura 5.23 Razonamiento elaborada por Franky en la actividad 14(4).

Ambos estudiantes verificaron la semejanza al medir los ángulos correspondientes de ambos triángulos, luego encontraron el factor de semejanza analizando las longitudes dadas, por último usaron el factor de semejanza para hallar las longitudes faltantes de los triángulos. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 2.9** porque usaron la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas.

Actividad 14 (5) (Anexo 14)

En la actividad se plantean dos triángulos en posición de Tales, y se pide que determine si los dos triángulos son semejantes. Jorge analizó la actividad como se muestra en la figura 5.23

Determinar si los triángulos ABD y GBF son semejantes, teniendo en cuenta que el segmento AD es paralelo al segmento GF

1) según el criterio LAL los lados son proporcionales, la proporcionalidad es 1.3 y comparten el mismo ángulo y por tanto son semejantes los 2 triángulos

Figura 5.24 Razonamiento elaborada por Jorge en la actividad 14(5)

El estudiante demostró la semejanza de los dos triángulos usando el criterio LAL, al analizar la proporcionalidad de los lados que conforman el ángulo congruente. Se le asigna el **descriptor 3.1** porque justifica de manera informal las condiciones necesarias para la semejanza de triángulos.

Franky: *Se demuestra por el criterio LAL, que los triángulos son semejantes. Los lados GB y AB son proporcionales, también los lados BF y BD, con razón de proporcionalidad 0,75 y el ángulo de 70° (que forman los lados proporcionales) es común en los dos triángulos.*

El estudiante verificó la semejanza al medir el ángulo común para ambos triángulos, luego analizó la proporcionalidad al encontrar el factor de semejanza, por último usó el criterio apropiado para demostrar la semejanza. A este razonamiento se le asigna el **descriptor 3.1**

5.2 SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

Terminado el análisis de las respuestas de dos de los seis estudiantes que seleccionamos para determinar la evolución de su nivel de razonamiento, presentaremos una síntesis y las conclusiones que se extraen de dicho análisis.

Inicialmente los estudiantes mostraron dificultad con la comprensión de los términos “se parecen” y “la misma forma” al relacionarlos en la clasificación de triángulos. Luego de que los estudiantes comprendieran la diferencia entre ellas, fue muy positivo para entender la noción intuitiva del concepto de semejanza. Otra dificultad que surge de los razonamientos de los estudiantes fue: si las figuras con distinta posición podrían clasificarse como de la misma forma o no. De ahí que la explicitación es una de las fases con mayor necesidad en el proceso enseñanza aprendizaje, porque se logró confrontar ideas entre estudiantes y entre profesor y

estudiantes, permitiendo clarificar dudas de este tipo y otras muy similares que surgían en el proceso.

Se puede decir que el diseño de las actividades cumplió su objetivo fundamental, promover el desarrollo del razonamiento en estudiantes a través de tareas de cálculo, demostración, construcción e interpretación de relaciones. Se presentó el caso especial del estudiante Franky que en actividades diseñadas para el desarrollo del nivel 1, fue desarrollando argumentos propios del nivel 2, que influyeron en las formas de razonamiento de sus compañeros y en aportes al desarrollo de este estudio.

A continuación mostramos un esquema que resume la evolución de las formas de razonamiento usados por los estudiantes Jorge y Franky, en el aprendizaje del concepto de semejanza de triángulos. Se relaciona las actividades y los descriptores que asignamos según las respuestas dadas en las producciones escritas o grabaciones en video.

E/A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10 (1y2)	A10 (3)	A10 (4)	A11 (1y2)
Jorge	1.1	1.1	1.1	1.3	2.2	1.3	2.4	2.2 2.3	2.2 2.3	2.8	2.2	2.8	2.7
Franky	1.2	1.2	2.2 2.5	2.2	2.8	2.2	2.4	2.2 2.3	2.3 2.6	2.8	2.2	2.8	2.7

E/A	A11 (3)	A11 (4)	A12 (1)	A12 (2)	A12 (3)	A13 (1)	A13 (2)	A13 (3)	A14 (1)	A14 (2)	A14 (3)	A14 (4)	A14 (5)
Jorge	2.2	2.7	2.8	2.8	2.7	3.1	3.1	2.5	3.2	2.2	2.7 2.9	2.9	3.1
Franky	2.8	2.7	2.8	2.8	2.7	3.1	3.1	2.5	3.2	2.2	2.9	2.9	3.1

Figura 5.24 Esquema de relación de actividades y descriptores evidenciados por los estudiantes.

La figura 5.24 es un esquema de comparación que permite visualizar en forma global y resumida, la evolución del razonamiento en los niveles 1 y 2 del modelo de Van Hiele, de los dos estudiantes que analizábamos con detalle en este capítulo. Por ejemplo se observa que el estudiante Jorge, mostró dificultad al no, avanzar en su razonamiento durante el desarrollo de las tres primeras actividades, porque no comprendía, ni diferenciaba las relaciones “se parece” y “misma forma”.

Después de la aclaración hecha por el profesor sobre la medición de ángulos (antes de la actividad 4) y la influencia que Franky ejercía en el grupo (por sus constantes diálogos con el profesor, argumentando las estrategias de solución para las actividades), Jorge lograr evolucionar en su nivel razonamiento. Jorge mantiene la evolución en el nivel 2 de razonamiento, durante el desarrollo de actividades propuestas para este nivel y continúa así hasta el final de la experimentación e inclusive evidenciamos en él, razonamientos propios del nivel 3.

Por otra parte, el estudiante Franky desde el inicio de la experimentación, mostró evolución en su razonamiento, tanto que, a partir de la actividad 3 evidenció razonamientos propios del nivel 2 y mantuvo un avance superior en comparación con los avances de sus otros compañeros.

A Franky, se le facilitó el desarrollo las actividades, terminaba en tiempos cortos con razonamientos muy claros. Se puede afirmar que el estudiante alcanzó el nivel 2 de razonamiento y estaba en un proceso de transición al nivel 3, pero las actividades propuestas en este estudio fueron planeadas para evidenciar hasta el segundo nivel de razonamiento.

Las sesiones donde los estudiantes en su mayoría mostraron razonamientos propios del nivel 2, fueron la 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, Estamos de acuerdo en que la

sesión 5 permitió que los estudiantes, además de comprobar la semejanza con la igualdad de ángulos correspondientes, interpretaran la idea de razón y su equivalencia entre lados de triángulos semejantes. Desde ahí se inició claramente el estudio del concepto de semejanza en triángulos, a través de condiciones matemáticas.

En conclusión se puede afirmar que el modelo de Van Hiele es un buen orientador en el proceso enseñanza aprendizaje para la enseñanza de cualquier concepto geométrico o matemático. En relación con las pocas bases que mostraron los estudiantes al inicio del estudio (resultados del test diagnóstico), se puede afirmar que es posible lograr la evolución del razonamiento en forma secuencial y organizada con actividades cortas, donde sea el estudiante quien construya el nuevo conocimiento, sobre la experiencia y las concepciones iniciales, siendo el profesor un facilitador u orientador en el proceso, para lograr aprendizajes significativos.

6.

CONCLUSIONES GENERALES Y LIMITACIONES

Consideramos importante este capítulo, porque puede ser punto de referencia a futuras investigaciones. En los capítulos 2, 3 y 5 se fueron presentando conclusiones parciales relacionadas con cada uno de los objetivos propuestos, por consiguiente, iniciaremos presentando las conclusiones generales, y finalmente, las limitaciones que a través del estudio fueron detectadas.

Queremos resaltar que en nuestro estudio se han cumplido los objetivos propuestos (expuestos en la introducción inicial): diseñar e implementar actividades y analizar las formas de razonamiento en el aprendizaje de la semejanza de triángulos. El trabajo ha aportado información sobre la evolución del razonamiento de los estudiantes en un tema específico, coordinado por un profesor observador que hizo el papel de investigador.

6.1 DEL DISEÑO E IMPLEMENTACION DE ACTIVIDADES

El principal medio de recolección de la información, sobre la actividad de los estudiantes, fueron las tareas usadas para el estudio. En relación con el objetivo, el diseño e implementación de las actividades nos permitieron identificar su importancia en:

1. La organización, presentada por bloques de actividades en relación con las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Se evidenció en los

estudiantes el grado de dificultad en forma ascendente, entre diferentes bloques, del mismo nivel de razonamiento.

2. El desarrollo de la temática en forma secuencial y detallada, permitió al estudiante interpretar la semejanza desde la noción intuitiva, pasando por las propiedades matemáticas, factor de semejanza, construcciones geométricas de triángulos semejantes, razones de perímetros, alturas y áreas entre figuras semejantes y por último el uso de criterios para demostrar la semejanza.
3. Los objetivos que cada actividad que se pretendían alcanzar con el desarrollo de la misma.

Podemos afirmar, de acuerdo con los resultados obtenidos, que es posible el diseño de actividades con enfoques diferente a los propuestos en los libros de texto, que proponen diversas editoriales, para garantizar el aprendizaje de conceptos matemáticos.

6.2 DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

El pensar y actuar de los estudiantes nos han permitido caracterizar sus formas de razonamiento (de acuerdo con el listado de descriptores expuestos en el capítulo 2), en el desarrollo de tareas durante la experimentación, que hace referencia a uno de los logros planteados en el estudio. Los logros que se evidenciaron en relación con este objetivo son:

1. Se confirmó el listado de descriptores de los niveles 1 y 2 de razonamiento de Van Hiele para la semejanza de triángulos.
2. Se evidenció diferentes formas de razonar, al comienzo de la experimentación por parte de los estudiantes y esto generó inseguridad en

alguno de ellos (porque el profesor con la enseñanza tradicional no les permitía experimentar).

3. Fue evidente la influencia que ejerció uno de los estudiantes, sobre las formas de razonamiento de sus compañeros.
4. Los estudiantes se sentían más seguros al ver los dibujos de triángulos, para hacer sus razonamientos. En varias actividades no se daba el dibujo y ellos lo construían.

Aunque nuestro interés no era el de analizar específicamente la consecuencia de la aplicación de las actividades en el aprendizaje de los estudiantes, el profesor (investigador) conocedor de la problemática escolar de la institución, reconoce los buenos resultados obtenidos a través de la experimentación en comparación con las dificultades reales, al trabajar estos temas con la metodología tradicional.

6.3 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

En todo trabajo de este tipo, existen limitaciones que principalmente están determinadas por el tiempo que se requiere para su desarrollo y recursos con que se cuenta para la experiencia. En consecuencia las limitaciones que consideramos más relevantes son:

1. No haber incluido actividades que conectaran la semejanza con temas relacionados como: la homotecia y el teorema de Thales.
2. No haber incluido en las actividades el uso de herramientas tecnológicas como el Cabri, como apoyo en la enseñanza de la temática.

Limitaciones inevitables en el control de variables externas como:

3. Los estados de ánimo de los estudiantes.

4. La adecuación del aula de clase con la cámara filmadora y que en ocasiones era compartida con otro docente.
5. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema.
6. Las temperaturas en la Vereda Marta que sobrepasaba los 37°C.
7. La falta de luz constante en la institución educativa.

El trabajo, no fue solo enriquecedor para los estudiantes en el aprendizaje de la semejanza de triángulos, sino de igual forma para el profesor (investigador) quien manifestó, no haber realizado anteriormente, este tipo de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burger, W.F. y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17(1), pág. 31-48.

Corberán R. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la ESO basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: MEC, pp. 31-88.

Chazan, D. (1988). Similarity: *Exploring the understanding of a geometric concept. Technical report* (pág. 88-15). Cambridge, MA: Education Development Center.

Fiol, M.L. (1992). *Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: Visualización y computación*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Grupo Beta (1997). Proporcionalidad geométrica y semejanza. (Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje). Madrid: Editorial Síntesis.

Gualdrón, É. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2-3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 2(3), 237-251.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pág. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: *La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

M.E.N. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Libros y Libros S.A.

M.E.N. (2003). *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Moreno L. y Uribe L. (2002). Exploraciones acerca de ángulos congruentes a partir de ambientes de aprendizaje dinámicos. Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Series memorias MEN, (pág. 113 -120)

M.C.T.M. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. (Traducción al castellano).

Van Hiele P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral. University of Utrecht, Holanda. (Traducción al español).

ANEXOS: LAS ACTIVIDADES DE LA EXPERIMENTACIÓN

ACTIVIDADES 1 Y 2

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender la noción intuitiva “misma forma” de semejanza en triángulos a partir de situaciones propuestas.
- Comprender la noción intuitiva “ser parecido” de no semejanza en triángulos a partir de situaciones propuestas.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del primer nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Crear la necesidad de justificar lo observado, como medio de razonamiento.
- Promover la discusión sobre similitudes y diferencias de los dibujos planteados para: la comprensión de las nociones intuitivas de semejanza y no semejanza de triángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.

Estas dos primeras actividades fueron diseñadas para el desarrollo de la *fase de información* del primer nivel, en donde el profesor dialoga con sus estudiantes proporcionándoles información sobre: el tema de estudio, los recursos a utilizar, la metodología y el lenguaje específico (del nivel 1). Además es la oportunidad para que el profesor pueda identificar, las ideas previas de sus estudiantes y el nivel de razonamiento en el que se encuentran respecto a la temática.

Una característica común de estas actividades son los dibujos o gráficos con borde triangular, sobre los cuales los estudiantes deben observar y analizar para poderlos clasificarlos como figuras parecidas o de la misma forma. En esta fase

debe quedar claro que las figuras semejantes son aquellas de la misma forma, que conservan su forma más no el mismo tamaño.

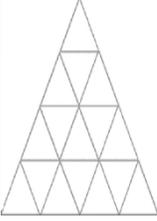
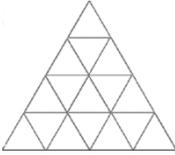
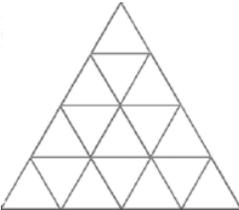
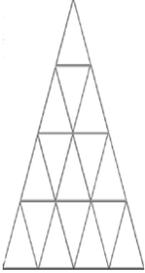
Es importante conocer las estrategias visuales que usan los estudiantes para resolver este tipo de actividades, por ello se sugiere para la *fase de explicitación* que, el profesor promueva el debate con sus estudiantes sobre porqué ciertos objetos tienen la misma forma y otros no, con el fin de incentivar a los estudiantes a que verbalicen estas reflexiones y estrategias de comparación.

ANEXO A: ACTIVIDAD 1 (Nivel 1 - Fase de información)

Tiempo estimado: 15 minutos

Objetivos de la actividad:

- Analizar y diferenciar las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar triángulos que tienen la misma forma y triángulos que son parecidos.

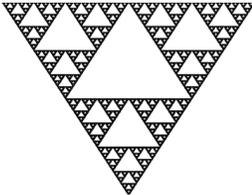
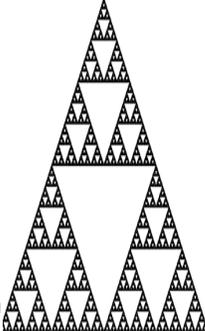
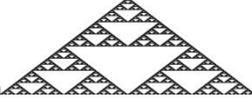
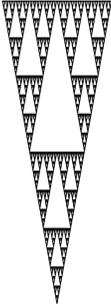
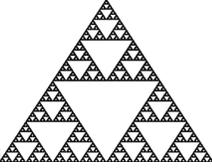
ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>a) Seleccione el triángulo o los triángulos que tienen la “misma forma” al triángulo dado.</p> <p>b) Seleccione el triángulo o los triángulos que “se parecen” al triángulo dado. Justifique sus respuestas en la columna derecha.</p> <div style="text-align: center;">  <p>TRIANGULO DADO</p> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 2</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 3</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 5</p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p>Fig. 4</p> </div>	<p>Esta actividad tiene como finalidad que el estudiante sea consciente y reflexione sobre términos cotidianos, como: la “misma forma” y “ser parecido”, desde el punto de vista matemático.</p> <p>Se pedirá a los estudiantes escribir en este espacio sus reflexiones y los criterios de comparación al resolver la actividad.</p> <p>Todas las representaciones son dibujos con borde triangular, se infiere que los trazos dentro de la figura, ayuden al estudiante a encontrar con facilidad la solución.</p> <p>Los dibujos que deben clasificar como de la misma forma son aquellos que no se deforman respecto del dado, sin importar su tamaño (Fig.3 y Fig. 5). A los demás los deben clasificar como parecidos al dado (Fig.1, Fig. 2 y Fig. 4).</p> <p>Algunas posibles justificaciones que pueden verbalizar los estudiantes, para decidir la noción intuitiva de la no semejanza (ser parecido) es, por ejemplo, que las figuras 2 y 4 se alargan verticalmente y que la figura 1 se contrae respecto al triángulo dado.</p>

ANEXO B: ACTIVIDAD 2 (Nivel 1 - Fase de información)

Tiempo estimado: 15 minutos

Objetivos de la actividad:

- Analizar y diferenciarlas nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar triángulos que tienen la misma forma y triángulos que son parecidos.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>a) Seleccione el triángulo los triángulos que tienen la “misma forma” al triángulo de Sierpinski.</p> <p>b) Seleccione el triángulo o los triángulos que “se parecen” al triángulo de Sierpinski. Justifique sus respuestas en la columna derecha.</p>  <p>TRIÁNGULO DE SIERPINSKI</p>  <p>FIG 1</p>  <p>FIG 2</p>  <p>FIG 3</p>  <p>FIG 4</p>  <p>FIG 5</p>	<p>Es una actividad que permite al estudiante seguir reflexionando sobre los criterios de comparación la “misma forma” y “ser parecido”.</p> <p>Nuevamente, se pedirá a los estudiantes escribir en este espacio sus reflexiones y los criterios de comparación al resolver la actividad.</p> <p>La solución la pueden obtener los estudiantes al observar los dibujos y clasificar como figuras de la misma forma (Fig.1 y Fig. 5), porque no se deforman respecto al triángulo dado, a pesar de que no conservan el mismo tamaño. A los demás los clasificarán como parecidos al triángulo de Sierpinski (Fig.2, Fig.3 y Fig. 4).</p> <p>Esta actividad puede ser resuelta por los estudiantes basándose en la apariencia de ellas, es decir, utilizando únicamente estrategias de tipo visual. Puede presentarse el caso, en que no reconozca la figura 1 como de la misma forma al triángulo dado porque está en diferente posición.</p>

ACTIVIDADES 3 Y 4

Objetivos de aprendizaje:

- Explorar y concretar la noción intuitiva “misma forma” de semejanza en triángulos a partir de situaciones propuestas.
- Explorar y concretar la noción intuitiva “ser parecido” de no semejanza en triángulos a partir de situaciones propuestas.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del primer nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Inducir a los estudiantes en el uso de otras estrategias que no sean únicamente de tipo visual sino más experimental como por ejemplo la toma de medidas (de ángulos y lados) de triángulos.
- Crear la necesidad de justificar lo observado, como medio de razonamiento.
- Promover la discusión sobre similitudes y diferencias de los dibujos planteados para: concretar las nociones intuitivas de semejanza y no semejanza de triángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.

Estas dos actividades fueron diseñadas para el desarrollo de la *fase de orientación dirigida* del primer nivel, con el fin de que los estudiantes exploren la semejanza de triángulos, descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos que deben interiorizar.

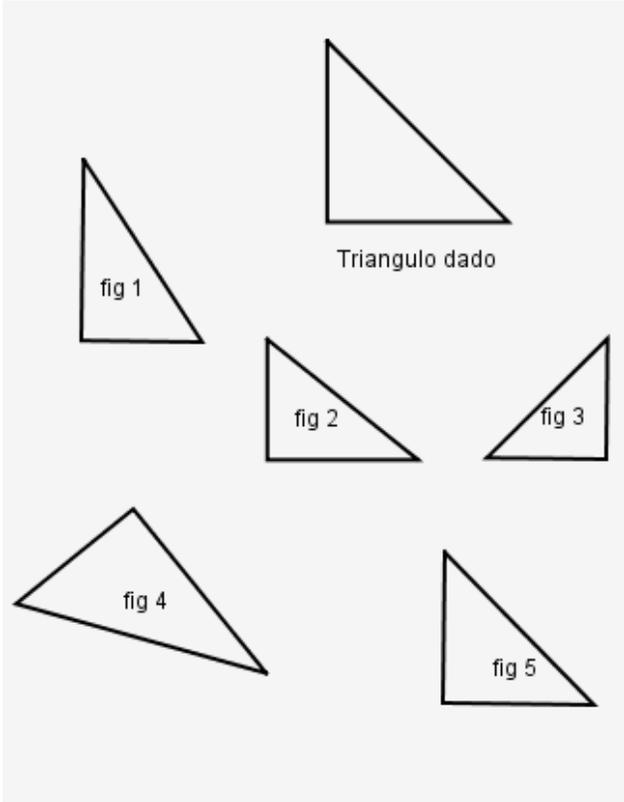
La característica común de estas actividades es similar a las dos primeras, por que se presentan dibujos de triángulos, para que el estudiante siga analizando descubra y concrete los criterios de comparación para clasificar triángulos de la “misma forma” y “parecidos”.

ANEXO C: ACTIVIDAD 3 (Nivel 1 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 20 minutos

Objetivos de la actividad:

- Explorar y concretar las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar triángulos que tienen la misma forma y triángulos que son parecidos.

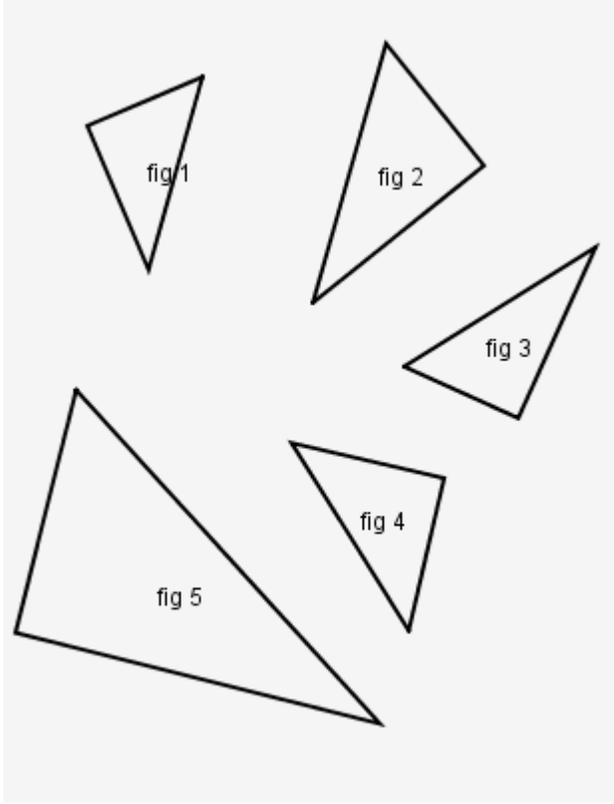
ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p data-bbox="298 625 925 747">¿Cuáles de los triángulos tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen” al triángulo dado? Justifique sus respuestas.</p> 	<p data-bbox="951 625 1534 793">Esta actividad se propone para que el estudiante siga analizando, descubra y concrete los criterios de comparación de la “misma forma” y “ser parecido”.</p> <p data-bbox="951 852 1534 974">Se pedirá a los estudiantes escribir en este espacio sus reflexiones y los criterios de comparación al resolver la actividad.</p> <p data-bbox="951 1033 1534 1344">La solución se obtiene al observar que todas las representaciones son triángulos rectángulos y solo tienen la misma forma aquellos triángulos (fig.3 y fig. 5), que tiene dos lados de igual medida, pues el triángulo dado es isósceles. A los demás triángulos los clasificarán como parecidos al dado (fig.1, fig.2 fig. 4 y fig.6).</p> <p data-bbox="951 1402 1534 1713">Los estudiantes pueden usar razonamientos únicamente de tipo visual o iniciar con otro tipo de razonamientos a través del uso de instrumentos como: la regla y el transportador. Por ejemplo, pueden explorar en triángulos de la misma forma, la regularidad de la igualdad en sus ángulos correspondientes.</p>

ANEXO D: ACTIVIDAD 4 (Nivel 1 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 20 minutos

Objetivos de la actividad:

- Explorar y concretar las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar triángulos que tienen la misma forma y triángulos que son parecidos.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p data-bbox="297 632 915 701">¿Cuáles de los siguientes triángulos tienen la misma forma? Justifique su elección.</p> 	<p data-bbox="938 632 1537 793">Esta actividad se propone con el fin de que el estudiante siga analizando (y concrete) los criterios de comparación sobre la “misma forma” y “ser parecido”.</p> <p data-bbox="938 856 1537 1018">Se espera que la dificultad de no reconocer dos triángulos de la misma forma por que estén en diferentes posiciones, se haya superado al finalizar el desarrollo de esta actividad.</p> <p data-bbox="938 1081 1537 1243">Puede que los estudiantes hagan una primera selección utilizando estrategias visuales y, posteriormente, confirmen su elección al usar instrumentos de medida.</p> <p data-bbox="938 1306 1537 1425">Los estudiantes pueden inferir que los triángulos de la misma forma son aquellos que tienen igual medida en sus ángulos correspondientes.</p>

ACTIVIDAD 5

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el término semejante al relacionarlo con la noción intuitiva “misma forma” a partir de la situación planteada.
- Comprender que la semejanza es una relación que se puede establecer en distintas clases de triángulos.
- Identificar elementos homólogos (lados) y elementos correspondientes (vértices y ángulos) en triángulos
- Crear la necesidad de justificar lo observado, como medio de razonamiento.
- Promover la discusión sobre similitudes y diferencias de los dibujos planteados para: concretar las nociones intuitivas de semejanza y no semejanza de triángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.

Esta actividad fue diseñada para el desarrollo de la *fase de orientación libre* del primer nivel, con el fin de que los estudiantes continúen explorando la semejanza de triángulos, descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos que involucra este concepto.

Se presenta el dibujo de triángulos, característica similar a las anteriores actividades, para que el estudiante siga analizando descubra los componentes matemáticos inmersos en el concepto de semejanza, como la igualdad de ángulos correspondientes.

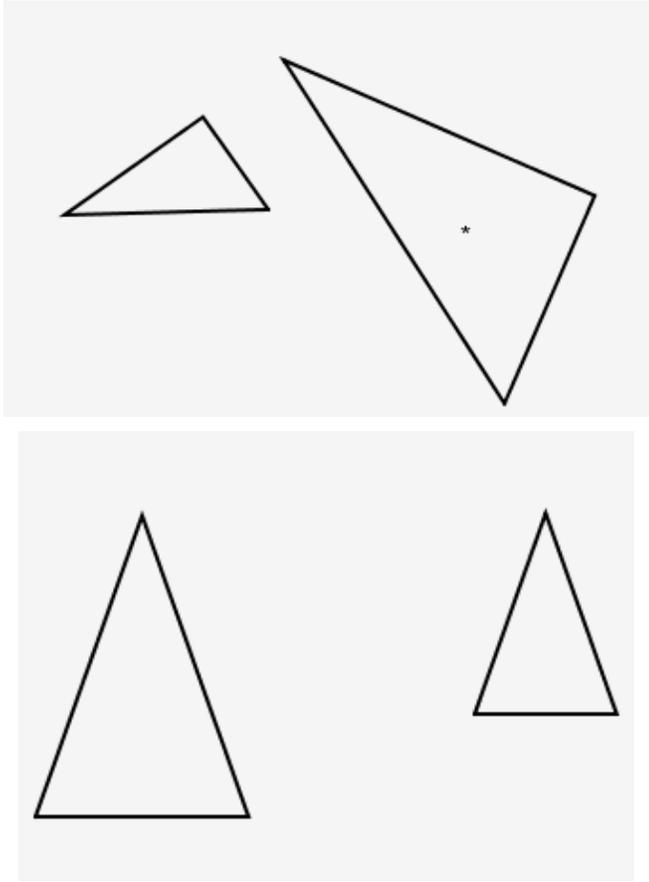
Es fundamental promover la participación y diálogo sobre las posibles relaciones que encuentren los estudiantes, usando estrategias de tipo visual o empleando el uso de medidas, para socializar la estrategia pertinente al resolver la actividad.

ANEXO E: ACTIVIDAD 5 (Nivel 1 - Fase de orientación libre)

Tiempo estimado: 20 minutos

Objetivos de la actividad:

- Relacionar las nociones intuitivas “misma forma” con “semejante”.
- Reconocer e identificar triángulos que tienen la misma forma (es decir, semejantes).

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p data-bbox="297 581 964 701">Determine si los siguientes pares de triángulos tienen la misma forma (es decir, son semejantes). Justifique su respuesta</p> 	<p data-bbox="987 581 1536 701">Esta actividad se propone con el fin de que el estudiante relacione triángulos de la “misma forma” como “semejantes”.</p> <p data-bbox="987 764 1536 1066">Puede haber estudiantes que hagan sus razonamientos utilizando estrategias visuales y, posteriormente, confirmen su elección tomando medidas, como por ejemplo medir ángulos e interpretar que, los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son iguales.</p> <p data-bbox="987 1129 1536 1528">Otra forma de solución, es la de recortar los triángulos y superponerlos (desde los tres vértices) para interpretar la igualdad de los ángulos correspondientes en triángulos de la misma forma o semejantes. En consecuencia ésta forma de solución permitirá aclarar cualquier duda sobre triángulos en distinta posición que pueden ser clasificados como semejantes.</p>

ACTIVIDADES 6 Y 7

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el término semejante al relacionarlo con la noción intuitiva “misma forma” a partir de las situaciones planteadas.
- Comprender que la semejanza es una relación que se puede establecer en distintas clases de figuras.
- Identificar elementos homólogos (lados) y elementos correspondientes (vértices y ángulos) en rectángulos.
- Crear la necesidad de justificar lo observado, como medio de razonamiento.
- Promover la discusión sobre similitudes y diferencias de los dibujos planteados para: concretar las nociones intuitivas de semejanza y no semejanza de rectángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.

Estas actividades fueron tomadas de Gualdrón (2011) (propuestas en su trabajo, en la fase de información del segundo nivel). Nosotros incluimos estas dos actividades, para el desarrollo de la *fase de integración* del primer nivel, por que permiten cuestionar a los estudiantes sobre las condiciones necesarias que se cumplen en la semejanza de figuras. Se presentan dibujos de rectángulos sobre los cuales, los estudiantes, deben analizar que la semejanza no solo se puede determinar por su apariencia física, sino que existen condiciones matemáticas que se deben cumplir como la igualdad de ángulos correspondientes y la proporcionalidad de lados homólogos.

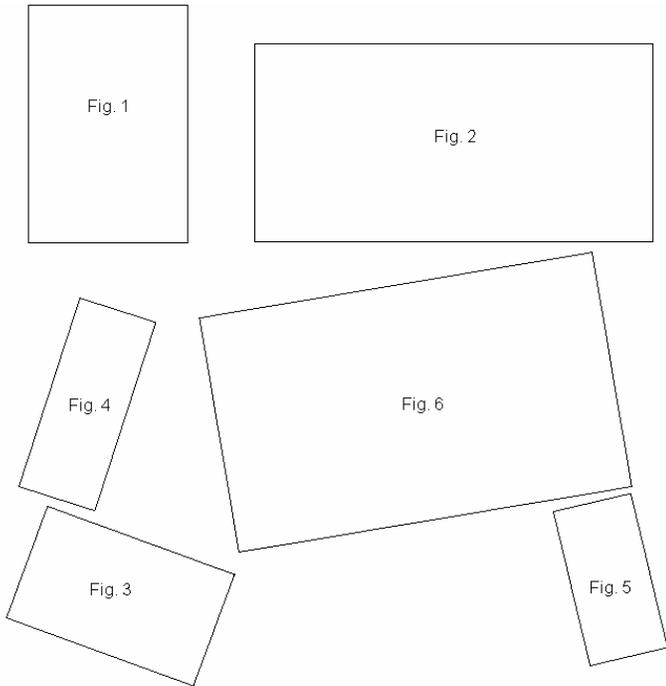
La finalidad de estas actividades era la exploración y análisis de lados homólogos en rectángulos para inferir el factor de semejanza y cuestionar sobre el error aditivo identificado por investigadores, que suelen presentarse al estudiar la proporcionalidad. Es importante que el profesor aclare que la proporcionalidad de lados homólogos se da usando la estrategia multiplicativa y no, usando la estrategia aditiva. También, si se presentan otros tipos de estrategias erróneas el profesor debe aprovechar la situación para aclarar y evitar que se sigan presentando.

ANEXO F: ACTIVIDAD 6 (Nivel 1 - Fase de integración)

Tiempo estimado: 20 minutos

Objetivos de la actividad:

- Relacionar las nociones intuitivas “misma forma” con “semejante”.
- Comprender que no todos los rectángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p data-bbox="297 625 993 699">¿Cuáles de los siguientes rectángulos tienen la misma forma (es decir, son semejantes)? Justifique su elección.</p>  <p>The activity shows six rectangles labeled Fig. 1 through Fig. 6. Fig. 1 is a vertical rectangle. Fig. 2 is a horizontal rectangle. Fig. 3, 4, and 5 are tilted rectangles. Fig. 6 is a large horizontal rectangle.</p>	<p data-bbox="1019 625 1536 743">Se pedirá a los estudiantes escribir en este espacio sus reflexiones y los criterios de comparación al resolver la actividad.</p> <p data-bbox="1019 810 1536 1108">Hasta aquí, se espera que los estudiantes hayan consolidado los criterios de comparación “misma forma” y “ser parecido”. Esta actividad permitirá, que los estudiantes no piensen que todos los rectángulos tienen la misma forma y que por lo tanto todos son semejantes.</p> <p data-bbox="1019 1171 1536 1520">Es importante que el profesor insista a los estudiantes en que a pesar de que los rectángulos, aparentemente, tienen la misma forma, realmente no es así. Incluso lo puede hacer dibujando dos rectángulos en el tablero uno, muy largo y poca anchura y otro, con similar anchura y altura.</p>

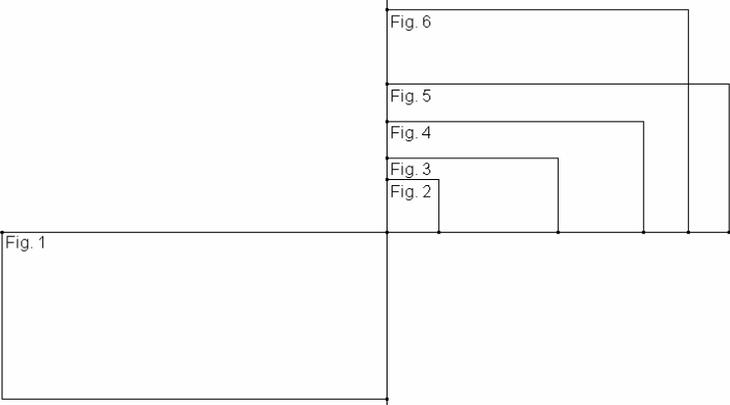
Actividad tomada de Gualdrón (2011).

ANEXO G: ACTIVIDAD 7(Nivel 1 - Fase de integración)

Tiempo estimado: 20 minutos

Objetivos de la actividad:

- Relacionar las nociones intuitivas “misma forma” con “semejante”.
- Comprender que no todos los rectángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p data-bbox="297 674 1040 747">¿Cuáles de los siguientes rectángulos tienen la misma forma(es decir, son semejantes)? Justifique su elección.</p> 	<p data-bbox="1063 674 1536 884">Esta actividad se propone para que el estudiante siga consolidando los criterios de comparación para determinar la semejanza de rectángulos</p> <p data-bbox="1063 947 1536 1157">Se espera que los estudiantes no piensen que todos los rectángulos son semejantes, por que sus ángulos son rectos o porque consideren que tienen la misma forma.</p> <p data-bbox="1063 1220 1536 1566">Una forma de solución, es trazar segmentos de recta que pasen por el vértice común de todos los rectángulos y los vértices opuestos. Dichos segmentos de recta que pasen por más de tres vértices, mostrarán grupos de rectángulos que tienen la misma forma.</p>

Actividad tomada de Gualdrón (2011).

ACTIVIDADES 8 Y 9

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Inferir las condiciones matemáticas necesarias y suficientes para la semejanza de triángulos.
- Comprender que existen justificaciones adecuadas, en este nivel de razonamiento, para la semejanza de triángulos.
- Promover la discusión y la participación para concretar el concepto de semejanza y no semejanza de triángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.
- Observar, analizar y justificar casos de semejanza de triángulos que se deciden con condiciones necesarias a través de la exploración de los casos planteados.

Estas actividades fueron diseñadas para el desarrollo de la *fase de orientación dirigida* del segundo nivel. Las tareas permiten que el estudiante explore, descubra y aprenda los componentes básicos de la red de conocimiento que se debe formar. Se espera que las respuestas específicas, lleven al estudiante a comprender propiedades matemáticas sobre la semejanza de triángulos.

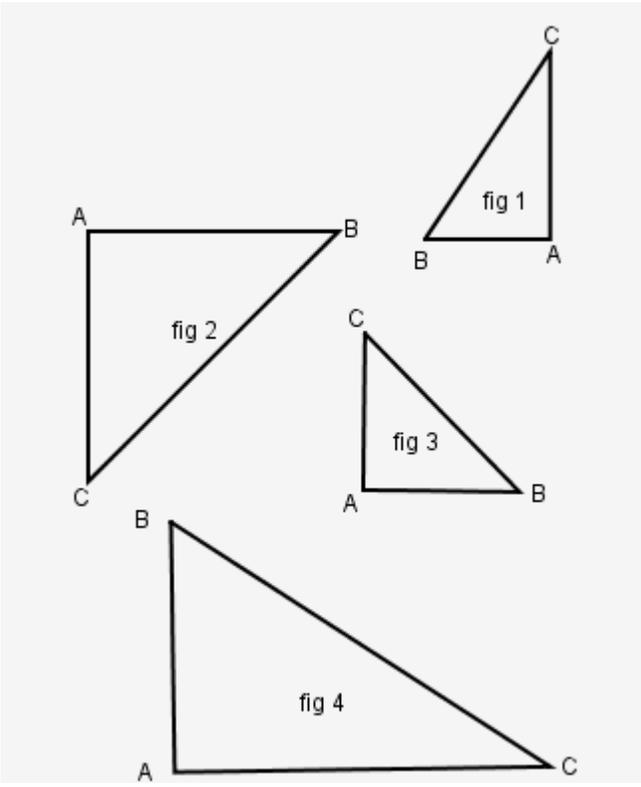
La finalidad de estas actividades era interpretar la noción intuitiva del concepto de razón entre las longitudes de triángulos y la proporcionalidad que existe entre triángulos semejantes. Se espera que con la actividad 9 terminen de consolidar la noción de semejanza de triángulos y de esta forma, la puedan aplicar en la resolución de diferentes situaciones.

ANEXO H: ACTIVIDAD 8 (Nivel 2 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 30 minutos

Objetivos de la actividad:

- Comprender que no todos los triángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.
- Comprender características de semejanza en triángulos.

ACTIVIDAD		OBSERVACIONES Y COMENTARIOS																																								
<p>Los segmentos AB y AC se denominan los catetos y el segmento BC la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC.</p> <p>¿Cuáles de los triángulos rectángulos dados tienen la misma forma, es decir son semejantes? Justifique su elección después de hallar la razón entre los catetos y ángulos correspondientes (completa el cuadro).</p> 		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Triángulo</th> <th>cateto AC</th> <th>cateto AB</th> <th>Razón AC/AB</th> <th>∠B</th> <th>∠C</th> <th>∠A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes inicialmente, usando estrategias visuales y posteriormente, corroborando sus apreciaciones, a través de la toma de medidas que indican en el cuadro, permitiendo la comparación de las longitudes de los lados, los ángulos y la razón entre los catetos de los triángulos rectángulo.</p> <p>Esta actividad puede ser aprovechada por el profesor, para motivar a los estudiantes a escribir sus argumentos sobre la relación de semejanza entre triángulos rectángulos y comprender así las características matemáticas que se deben cumplir en la semejanza de triángulos.</p>						Triángulo	cateto AC	cateto AB	Razón AC/AB	∠B	∠C	∠A	1							2							3							4						
Triángulo	cateto AC	cateto AB	Razón AC/AB	∠B	∠C	∠A																																				
1																																										
2																																										
3																																										
4																																										

ANEXO I: ACTIVIDAD 9 (Nivel 2 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 30 minutos

Objetivos de la actividad:

- Comprender que no todos los triángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.
- Comprender características de semejanza en triángulos.

ACTIVIDAD		OBSERVACIONES Y COMENTARIOS						
<p>Los segmentos AB y AC representan dos lados de diferente medida en el triángulo isósceles ABC. ¿Cuáles de los siguientes triángulos NO tiene la misma forma, es decir No son semejantes a los demás? Justifique su elección después de hallar la razón entre los catetos y ángulos correspondientes (completa el cuadro).</p>		Triángulo	Lado AC	Lado AB	Razón AC/AB	$\sphericalangle A$	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$
		1						
		2						
		3						
		4						
		5						
		<p>Esta actividad se propone con el fin de que el estudiante comprenda que no todos los triángulos isósceles tienen la misma forma aunque visualmente parecieran, además identifiquen el primer criterio de semejanza.</p> <p>Es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes inicialmente, usando estrategias visuales y posteriormente, utilizando instrumentos de medida para comparar la longitud de los lados, los ángulos y la razón entre dos lados distintos de cada triángulo.</p>						

ACTIVIDADES 10, 11 Y 12

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- determinar las condiciones matemáticas necesarias y suficientes para la semejanza de triángulos.
- Comprender la importancia del factor de semejanza en la construcción de triángulos semejantes.
- Promover la discusión y la participación para concretar el concepto de semejanza y no semejanza de triángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.
- Observar, analizar y justificar casos de semejanza de triángulos que se deciden con condiciones necesarias y suficientes a través de la exploración de los casos planteados.

Estas actividades fueron diseñadas para el desarrollo de la *fase de orientación dirigida* del segundo nivel. Las tareas permiten que el estudiante explore, descubra y aprenda los componentes básicos de la red de conocimiento que se debe formar. Se espera que las respuestas específicas, lleven al estudiante a comprender propiedades matemáticas sobre la semejanza de triángulos.

Se espera que con la actividad 11, los estudiantes concreten el concepto de semejanza de triángulos, al consolidar las condiciones matemáticas necesarias y suficientes, y de esta forma, las apliquen en la resolución de diferentes situaciones.

ANEXO J: ACTIVIDAD 10 (Nivel 2 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 30 minutos

Objetivos de la actividad:

- Identificar, comprender y justificar características de semejanza en triángulos.
- Comprender la relación entre los perímetros de figuras semejantes.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>Las medidas de los lados de dos triángulos son respectivamente: 4 cm, 5 cm, 7 cm y 12 cm, 15 cm, 21 cm.</p> <p>Resuelva lo siguiente:</p> <ol style="list-style-type: none">1. Construya con regla y compás los triángulos, ¿son semejantes los dos triángulos?2. Si son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza entre los lados correspondientes de los triángulos? Justifique su respuesta.3. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos sean semejantes? Justifique su respuesta.4. Si son semejantes, demuestre la relación que existe entre los perímetros hallando la razón entre ellos.	<p>Con la siguiente actividad pretendemos que el estudiante, logre explicar algunas características matemáticas de la semejanza en triángulos e identifique algunos de los criterios de semejanza.</p> <p>Se espera que los estudiantes comprendan la relación de igualdad entre la razón de semejanza y la razón entre los perímetros de los triángulos semejantes.</p>

ANEXO K: ACTIVIDAD 11 (Nivel 2 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 30 minutos

Objetivos de la actividad:

- Identificar, comprender y justificar características de semejanza en triángulos.
- Comprender la relación entre las áreas de figuras semejantes.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>Si los lados de un triángulo son 9 cm; 6 cm y 4 cm.</p> <p>Resuelva lo siguiente:</p> <p>a) Calcular cuánto miden los lados de otro triángulo, si la razón entre los lados correspondientes de los dos triángulos es $\frac{2}{3}$.</p> <p>b) Construir con regla y compás los dos triángulos. Dibujar las alturas y calcular la razón entre ellas.</p> <p>c) ¿los triángulos son semejantes? Si lo son, ¿qué condiciones se cumplen? Justifique su respuesta.</p> <p>d) Si son semejantes, demuestre la relación que existe entre las áreas hallando la razón entre ellas.</p>	<p>Con esta nueva actividad pretendemos que el estudiante comprenda algunos criterios de semejanza, conociendo la razón de semejanza, es importante que plantee sus argumentos, después de explorar e identificar las características que encierra el desarrollo de los ítems, incluyendo las tareas anteriormente trabajadas.</p> <p>Se espera que los estudiantes comprendan que al hallar la razón entre las alturas de los dos triángulos da como resultado el factor de semejanza entre los triángulos o que al hallar la razón entre las áreas se encuentra la razón de semejanza al cuadrado.</p>

ANEXO L: ACTIVIDAD 12 (Nivel 2 - Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado: 40 minutos

Objetivos de la actividad:

- Comprender y demostrar los criterios de semejanza de triángulos AA, LLL y LAL
- Decidir la semejanza de triángulos a través de los criterios de semejanza

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>Demuestre a través de la construcción y el uso de criterios las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none">1. ¿Dos triángulos que tienen sus lados correspondientes proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos pares de lados proporcionales? Justifique sus respuestas.2. ¿Dos triángulos que tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos ángulos respectivamente congruentes? Justifique sus respuestas.3. ¿Dos triángulos que tienen un ángulo congruente y los lados que los forman proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos cuyos lados proporcionales no son ambos del ángulo congruente, sino que uno es el lado opuesto? Justifique sus respuestas.	<p>Con la siguiente actividad pretendemos que el estudiante demuestre con sus argumentos, cada uno de los criterios de semejanza, después de explorar, visualizar y plantear las distintas posibilidades en la solución de las preguntas usando el dibujo o analizando las tareas anteriormente trabajadas.</p> <p>Después de la actividad se pretende generar discusión con los estudiantes para lograr identificar con claridad cada uno de los criterios de semejanza y la diferencia entre ellos.</p>

Actividad tomada de Gualdrón (2011).

ACTIVIDADES 13 Y 14

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Determinar las condiciones matemáticas necesarias y suficientes para la semejanza de triángulos.
- Comprender la importancia del factor de semejanza en la construcción de triángulos semejantes.
- Crear la necesidad de justificar lo observado, como medio de razonamiento.
- Promover la discusión sobre similitudes y diferencias de los dibujos planteados para: concretar las nociones intuitivas de semejanza y no semejanza de rectángulos y el proceso de razonamiento de Van Hiele.

Este bloque de actividades fue diseñado para el desarrollo de dos fases. La actividad 13 en la *fase de orientación libre* del segundo nivel, y la actividad 14 en la *fase de integración* del segundo nivel.

La actividad propuesta para la *fase de orientación libre* propone la consolidación del aprendizaje realizada en las anteriores fases. La tarea permite que el estudiante aplique los componentes básicos de la red de conocimiento que se debió formar. Se espera que los estudiantes usen varias vías de resolución para obtener las respuestas específicas sobre la semejanza de triángulos.

La actividad propuesta para la *fase de integración* permite evaluar en forma global el nivel de razonamiento adquirido por los estudiantes, no implica la aparición de nuevos conocimientos, sino la ejecución y organización de los ya adquiridos. No era necesaria proponer varias actividades, pero ante la necesidad de verla como una evaluación final se establecieron cinco tareas en esta actividad.

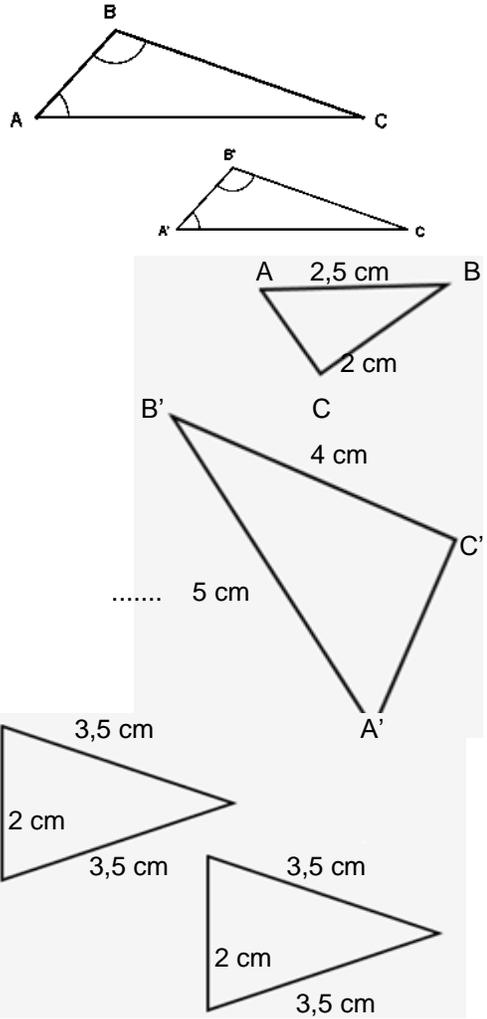
El profesor al finalizar cada actividad ayuda a los estudiantes a sintetizar lo que han aprendido, proporcionándoles observaciones generales, para que el estudiante pueda tener una visión global del concepto de semejanza y sus relaciones.

ANEXO M: ACTIVIDAD 13 (Nivel 2 - Fase de orientación libre)

Tiempo estimado: 10 minutos

Objetivos de la actividad:

- Demostrar la semejanza de triángulos a través de los criterios de semejanza AA, LLL y LAL.
- Comprender que la congruencia de triángulos es un caso particular de semejanza de triángulos.

ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>Demuestre si los dos pares de triángulos son semejantes, aplicando alguno de los criterios de semejanza (AA, LLL y LAL). Especifique el criterio que utilizó y estipule la razón de semejanza.</p>  <p>The diagrams illustrate various cases of triangle similarity and congruence. The top part shows two triangles with corresponding angles A and B marked. The middle part shows a small triangle ABC with sides AB = 2.5 cm and BC = 2 cm, and a larger triangle A'B'C' with side B'C' = 4 cm. The bottom part shows two triangles with sides 3.5 cm and 2 cm, illustrating congruence.</p>	<p>Con esta actividad se pretende que el estudiante aplique los criterios de semejanza. La idea fundamental es que los estudiantes reconozcan e identifiquen si un triángulo fue ampliado, reducido o no se modifica, lo anterior está relacionado con la razón o factor de semejanza, es decir, que al aplicarle a un triángulo un factor de semejanza menor que 1, el triángulo se reduce, que al aplicarle a un triángulo un factor de semejanza mayor que 1, el triángulo se amplía, y que al aplicarle a un triángulo el factor de semejanza 1, el triángulo no se modifica y se denominan congruentes.</p>

ANEXO N: ACTIVIDAD 14 (Nivel 2 - Fase de integración)

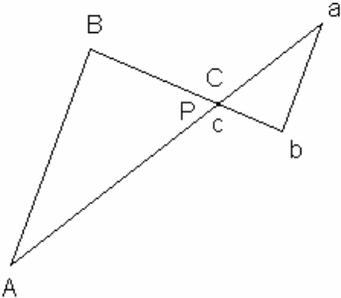
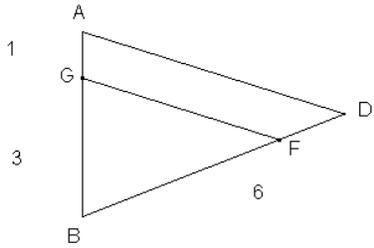
Tiempo estimado: 120 minutos

Objetivos de la actividad:

- Aplicar lo aprendido, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
- Analizar, comprender y justificar la semejanza a nivel global.

ACTIVIDAD					OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
1. Complete la siguiente tabla utilizando una "X" donde corresponda. Debe argumentar, para cada ítem, su respuesta. Puede utilizar argumentos de todo tipo (gráficos, analíticos, verbales, etc.).					<p>El profesor puede aprovechar esta actividad para insistir en los estudiantes que justifiquen la respuesta. Por tal motivo es importante que el profesor esté atento a que los estudiantes no sólo marquen la respuesta que consideren, sino que además la justifiquen.</p> <p>Esta es una actividad que permite estudiar la semejanza sin tener su dibujo previamente. La intención es que los estudiantes se animen a realizar los dibujos de los triángulos o figuras planteados como parte de su razonamiento.</p>
Ítem	¿Son semejantes?	Siempre	A veces	Nunca	
1	Dos triángulos isósceles				
2	Dos triángulos equiláteros				
3	Dos triángulos escalenos				
4	Dos triángulos rectángulos isósceles.				
5	Dos cuadrados				
6	Dos rectángulos				
7	Un rectángulo y un triángulo				
8	Un rectángulo y un cuadrado				
Si necesita espacio las argumentaciones las puede escribir al respaldo de la hoja.					

Actividad (ítem 1) tomada de Gualdrón (2011).

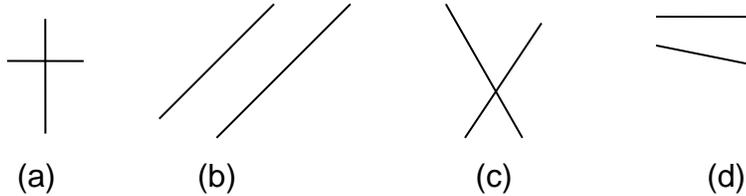
ACTIVIDAD	OBSERVACIONES Y COMENTARIOS
<p>2. Las medidas de los lados de dos triángulos son respectivamente: 3, 4 y 5 cm; 4.5, 6, 7.5 cm. Construya con regla y compás los triángulos, ¿son semejantes los dos triángulos? Si lo son, calcula la razón de semejanza entre los lados correspondientes.</p> <p>3. Dado un triángulo ABC con medidas en sus lados $AB=6$ cm, $BC= 8$cm y $AC= 10$ cm. Calcular cuánto miden los lados de otro triángulo semejante, si la razón entre los lados correspondientes de los dos triángulos es $3/2$.</p> <p>4. Sea el triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden: $BC=6$cm, $AB=8$cm, $AC=10$cm y el triángulo rectángulo abc, cuyo lado $ac=5$cm. Demuestre que los triángulos son semejantes y determine las medidas de los lados ab y bc.</p>  <p>5. Determinar si los triángulos ABD y GBF son semejantes, teniendo en cuenta que el segmento AD es paralelo al segmento GF.</p> 	<p>Se establecen estas actividades para concretar el nivel de razonamiento que han adquirido los estudiantes.</p> <p>Se espera que los estudiantes justifiquen usando los criterios y propiedades de triángulos semejantes, estudiados con anterioridad. La finalidad es sintetizar el concepto de semejanza e integrarlo en la solución de diversas situaciones.</p>

ANEXO O:

TEST DIAGNÓSTICO

En cada uno de los enunciados se presentan cuatro preguntas, sólo una de ellas es correcta. Analice la pregunta y marque con una X la respuesta correcta.

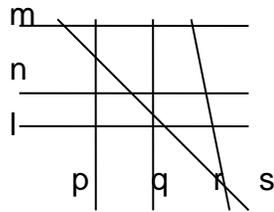
1. De los siguientes pares de rectas, ¿Cuáles son paralelas?



2. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumple en las rectas paralelas?

- (a) Al cortarse forman un ángulo recto (90°)
- (b) Se cortan entre sí.
- (c) Van en la misma dirección.
- (d) Son siempre horizontales.

3. Las rectas paralelas de la siguiente figura son:



- (a) $m y n$; $n y l$; $m y l$; $p y q$.
- (b) $m y n$; $n y l$; $q y r$; $p y s$.
- (c) $m y l$; $p y q$; $s y n$; $r y s$.
- (d) $m y s$; $s y p$; $m y p$; $p y q$.

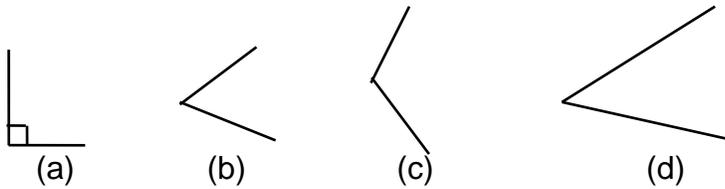
4. Si la recta t es paralela a la recta x y la recta x es paralela a la recta z se puede decir que:

- (a) Las rectas t y z son perpendiculares.
- (b) Las rectas t y z se cortan.
- (c) Las rectas t y z son paralelas.
- (d) Las rectas t y z forman un ángulo de 45° .

5. Las partes de un ángulo son:

- (a) Dos lados.
- (b) un lado y un vértice.
- (c) Un vértice y dos lados.
- (d) Un vértice.

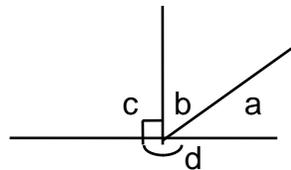
6. De los siguientes ángulos el de mayor amplitud es:



7. Cuáles de los ángulos anteriores son agudos:

- (a) El ángulo a y b
- (b) El ángulo b y c
- (c) El ángulo b y d
- (d) El ángulo a y c

8. En el siguiente gráfico para conocer el valor del ángulo b sólo basta saber:

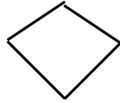


- (a) La medida del ángulo a
- (b) La medida del ángulo c

(c) La medida del ángulo d

(d) Un ángulo de media vuelta equivale a 180 grados.

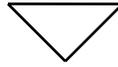
9. ¿Cuál de los siguientes polígonos es un triángulo?



(a)



(b)



(c)



(d)

10. Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene dos lados iguales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera en todo triángulo isósceles?

(a) Los tres lados tienen la misma medida.

(b) La medida de un lado es el doble de la medida del otro.

(c) Los tres ángulos tienen la misma medida.

(d) Tienen por lo menos dos ángulos con la misma medida.

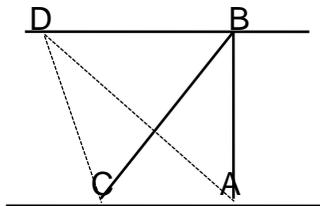
11. Los dos triángulos ABC y ADC de la siguiente figura están entre dos rectas paralelas. Si el área del triángulo ABC es de 8 cm cuadrados ¿Cuál es el área del triángulo ADC?

(a) 8 cm²

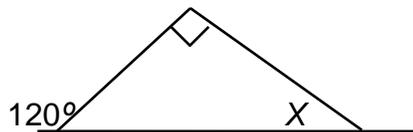
(b) 10 cm²

(c) 16 cm²

(d) 4 cm²



12. ¿En la siguiente figura cuál es la medida del ángulo X?



(a) 60°

(b) 30°

(c) 90°

(d) 150°

Actividad tomada de la tesis de maestría Fiallo (1996).