

Una unificación de los teoremas fundamentales del Análisis Funcional

Autor:

Inés Esperanza Angarita Leal

Director:

Ph.D. Michael Alexander Rincón Villamizar

Trabajo de grado para optar por el título de
Matemático

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Octubre de 2025



Tabla de Contenido

Introducción	3
1. Preliminares	4
1. Espacios de Banach	4
2. El Teorema de Hanh-Banach	6
2. Unificación de los teoremas fundamentales	19
Bibliografía	29

Resumen

TÍTULO: UNA UNIFICACIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL *

AUTOR: INÉS ESPERANZA ANGARITA LEAL **

PALABRAS CLAVE: ANÁLISIS FUNCIONAL, TEOREMA DE HAHN BANACH, PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME, TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA, TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo de grado se enmarca en el área del Análisis Funcional y se centra en el estudio de tres de los teoremas fundamentales: el Principio de Acotación Uniforme (PA), el Teorema de la Aplicación Abierta (AA), el Teorema del Gráfico Cerrado (GC) y el Teorema de Hahn-Banach (HB). Tradicionalmente, se conoce que las demostraciones de los tres primeros (PA, AA y GC) dependen del Teorema de Categoría de Baire, mientras que el Teorema de Hahn-Banach requiere del Lema de Zorn, lo cual sugiere independencia entre ambos grupos.

Partiendo de esta distinción, el presente trabajo aborda la pregunta natural de si el Teorema de Hahn-Banach (HB) puede, de hecho, implicar a los otros teoremas. Esta cuestión fue explorada de manera pivotal por Walter Roth en su artículo “A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces”, donde se demuestra que el Teorema de Hahn-Banach sí implica el Principio de Acotación Uniforme y el Teorema de la Aplicación Abierta (y, por consiguiente, su equivalente, el Teorema del Gráfico Cerrado).

El objetivo principal de esta tesis es realizar un análisis detallado de los resultados presentados por Roth, con un enfoque específico en comprender y desglosar la prueba de que el Teorema de Hahn-Banach implica el Principio de Acotación Uniforme y el Teorema de la Aplicación Abierta.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Michael Alexander Rincón Villamizar

Abstract

TITLE: A UNIFICATION OF THE FUNDAMENTAL THEOREMS OF FUNCTIONAL ANALYSIS *

AUTHOR: INÉS ESPERANZA ANGARITA LEAL **

KEYWORDS: FUNTIONAL ANALYSIS, HAHN BANACH THEOREM, UNIFORM BOUNDEDNESS PRINCIPLE, OPEN MAPPING THEOREM, CLOSED GRAPH THEOREM.

DESCRIPCIÓN:

This undergraduate thesis is situated within the field of Functional Analysis and focuses on the study of the fundamental theorems: the Uniform Boundedness Principle (UBP), the Open Mapping Theorem (OMT), the Closed Graph Theorem (CGT), and the Hahn-Banach Theorem (HBT). Traditionally, it is known that the proofs of the first three (UBP, OMT, and CGT) rely on the Baire Category Theorem, while the Hahn-Banach Theorem requires Zorn's Lemma, suggesting an independence between the two groups.

Building upon this distinction, this work addresses the natural question of whether the Hahn-Banach Theorem (HBT) can, in fact, imply the other theorems. This question was pivotally explored by Walter Roth in his article ".A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces", where he demonstrates that the Hahn-Banach Theorem does imply the Uniform Boundedness Principle and the Open Mapping Theorem (and, consequently, its equivalent, the Closed Graph Theorem).

The primary objective of this thesis is to conduct a detailed analysis of the results presented by Roth, with a specific focus on understanding and breaking down the proof that the Hahn-Banach Theorem implies the Uniform Boundedness Principle and the Open Mapping Theorem.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Michael Alexander Rincón Villamizar

Introducción

En cualquier curso básico de Análisis funcional se estudian los cuatro teoremas fundamentales: el *Principio de Acotación Uniforme* (abreviado PA), el *Teorema de la Aplicación Abierta* (abreviado AA), el *Teorema del Gráfico Cerrado* (abreviado GC) y el *Teorema de Hahn-Banach* (abreviado HB). De estos cursos sabemos también que en la demostración de los tres primeros se usa de una forma u otra el *Teorema de Categoría de Baire*, mientras que el último depende del *Lema de Zorn*. De cierto modo esto nos dice que los teoremas son independientes entre sí (aunque sabemos también que AA y GC son equivalentes).

Por lo anterior es natural preguntarse si HB implica los otros teoremas fundamentales. Esta pregunta fue estudiada por Walter Roth en su artículo [1]. En este artículo, Roth demuestra que HB implica PA y AA (y por lo tanto GC también). El objetivo de este trabajo es estudiar los resultados del artículo de Roth. Concretamente, queremos entender la prueba de que HB implica PA y AA.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dan las herramientas necesarias para entender los resultados principales del trabajo. Todo lo hecho aquí lo hemos tomado de [3] y [4].

1. Espacios de Banach

Definición 1.1. Sea X un \mathbb{K} -espacio vectorial. Una *norma* en X es una función $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x\| = 0$ si, y solo si, $x = 0$;
2. dados $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3. si $x, y \in X$, entonces $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X , el par $(X, \|\cdot\|)$ es llamado *espacio normado*.

Definición 1.2. Un *espacio de Banach* es un espacio normado el cual es completo con la métrica inducida por la norma.

Definición 1.3. Sean X y Y espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que el operador T es *acotado* si existe un número real $c > 0$ tal que para todo $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|.$$

La norma de T se define como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Definición 1.4. Si X es un \mathbb{K} -espacio vectorial, un *funcional lineal* es un operador lineal de X en \mathbb{K} . El *dual algebraico* de X es el conjunto de todos los funcionales lineales definidos en X y se denota por $X^\#$.

Definición 1.5. Sea E un espacio normado. El *dual topológico de E* es definido como el conjunto operadores lineales y acotados de E en \mathbb{K} . Este espacio se denotará aquí como E' .

Observación 1.6. El conjunto E' junto con la norma dada en la Definición 1.3, es un espacio de Banach. Una prueba de esto se puede encontrar en el Teorema 2.10-4 de [3].

A continuación enunciamos el Teorema de la Aplicación abierta, el Teorema del Gráfico cerrado y el Principio de Acotación uniforme. Estos teoremas son de gran importancia en Análisis funcional. Una prueba de estos puede ser encontrada en [2]. Como ya dijimos, el objetivo de este trabajo es presentar una prueba de estos teoremas usando como herramienta el Teorema de Hahn-Banach, otro resultado fundamental del análisis Funcional. Una prueba de estos puede ser encontrada en las secciones 2.2 y 2.3 de [4].

Teorema 1.7 (Teorema de la aplicación abierta). *Sean E y F espacios de Banach. Un operador lineal continuo y sobreyectivo $T: E \rightarrow F$ es una aplicación abierta, es decir, las imágenes de subconjuntos abiertos de E son subconjuntos abiertos de F .*

Definición 1.8. Sean E y F espacios normados. Si $T: E \rightarrow F$ es lineal, el **gráfico de T** es por definición el conjunto

$$G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F : x \in E\}.$$

Se dice que T tiene gráfico cerrado si $G(T)$ es un subconjunto cerrado de $E \times F$, donde $E \times F$ tiene la topología usual del producto cartesiano.

Teorema 1.9 (Teorema del Gráfico Cerrado). *Sean E y F espacios de Banach y $T: E \rightarrow F$ un operador lineal. Si el gráfico de T es cerrado, entonces T es acotado.*

Teorema 1.10 (Principio de acotación uniforme). *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia (no necesariamente numerable) de operadores lineales continuos de E en F . Suponga que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Entonces

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

En otras palabras, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|T_i x\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

2. El Teorema de Hanh-Banach

El objetivo de esta sección es probar el Teorema de Hanh-Banach. Como se sabe, este resultado tiene diversas aplicaciones en matemáticas. Dado que será usado para probar los otros teoremas fundamentales del Análisis funcional, presentaremos su prueba aquí. También mostramos algunas consecuencias.

Definición 1.11. Un funcional **sublineal** p en E es una función $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo x, y en E y $\lambda \geq 0$.

Lema 1.12. Sean X un \mathbb{R} -espacio vectorial y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sean Y un subespacio propio de X y $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $f(y) \leq p(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces existen un subespacio M de X con $Y \subsetneq M$ y $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que:

1. $\tilde{f}|_Y = f$;
2. $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$.

Demostración. Sean $x_0 \in X \setminus Y$ y $M = Y \oplus \langle x_0 \rangle$. Es claro que M es un subespacio de X tal que $Y \subsetneq M$. Si $y, y' \in Y$, entonces

$$f(y + y') \leq p(y + y') = p(y - x_0 + x_0 + y') \leq p(y - x_0) + p(x_0 + y').$$

Luego $f(y) - p(y - x_0) \leq p(y' + x_0) - f(y')$ para cualesquiera $y, y' \in Y$. Así

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0) : y \in Y\} \leq \inf\{p(y' + x_0) - f(y') : y' \in Y\}.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0) : y \in Y\} \leq \alpha \leq \inf\{p(y' + x_0) - f(y') : y' \in Y\}.$$

Definamos $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(y + tx_0) = f(y) + t\alpha$. Claramente \tilde{f} es una extensión lineal de f . Probemos que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$.

Caso 1: Si $y \in Y$ y $t > 0$, por la escogencia de α tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + tx_0) &= f(y) + t\alpha \\ &\leq f(y) + t \left(p\left(\frac{1}{t}y + x_0\right) - f\left(\frac{1}{t}y\right) \right) \\ &= p(y + tx_0). \end{aligned}$$

Caso 2: Para $t < 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y - tx_0) &= f(y) - t\alpha \\ &\leq f(y) - t \left(f\left(\frac{1}{t}y\right) - p\left(\frac{1}{t}y - x_0\right) \right) \\ &= p(y - tx_0). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Observación 1.13. Sea X un \mathbb{R} -espacio vectorial. Si \mathcal{C} es una cadena de subespacios de X (esto es, si $W, V \in \mathcal{C}$, entonces $W \subseteq V$ o $V \subseteq W$), tenemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subespacio de X .

Esto pues:

1. Como \mathcal{C} es una cadena, \mathcal{C} es no vacío, luego $\bigcup \mathcal{C}$ es no vacío.
2. Sean $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces existen $V, W \in \mathcal{C}$ con $x \in V$ y $y \in W$ tales que
 - Si $V \subseteq W$, $x \in W$ y $y \in W$, y como W es subespacio $(x + y) \in W \subseteq \bigcup \mathcal{C}$
 - Si $W \subseteq V$, $x \in V$ y $y \in V$, y como V es subespacio $(x + y) \in V \subseteq \bigcup \mathcal{C}$
3. Sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$. Como V es subespacio, $\lambda x \in V \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, luego $\bigcup \mathcal{C}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares.

Para la demostración del próximo teorema necesitamos el Lema de Zorn el cual enunciamos a continuación.

Lema 1.14 (Lema de Zorn). *Sea X un conjunto no vacío y parcialmente ordenado. Si cada cadena en X es acotada superiormente, entonces X tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.15 (Teorema de Hahn-Banach, versión vectorial). *Sea X un \mathbb{R} -espacio vectorial y $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea Y un subespacio de X y $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(y) \leq p(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces existe $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\tilde{f}|_Y = f$ y $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} la colección de pares (M_g, g) donde $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, M_g es un subespacio de X con $Y \subset M_g$, $g|_Y = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M_g$. En \mathcal{U} , definimos

$$(M_g, g) \preceq (M_h, h) \text{ si, y solo si, } M_g \subset M_h \text{ y } h|_{M_g} = g.$$

Observe que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ ya que $(Y, f) \in \mathcal{U}$. Usando el Lema de Zorn, mostraremos que \mathcal{U} contiene un elemento maximal. Sea \mathcal{C} una cadena en \mathcal{U} . Sea $W = \bigcup_{(M_g, g) \in \mathcal{C}} M_g$. Como \mathcal{C} es una cadena, W es un subespacio de X (vea la Observación 1.13). Es claro que $Y \subset W$. Si $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ es definida como $h(w) = g(w)$ si $w \in M_g$. Notemos que si $x \in M_g \cap M'_g$, como \mathcal{C} es una cadena, podemos suponer que $(M_g, g) \preceq (M'_g, g')$. Así $g(x) = g'(x)$. Esto demuestra que h está bien definida. Por construcción tenemos que $h|_Y = f$ y $h(x) \leq p(x)$ para cada $x \in W$. Luego $(W, h) \in \mathcal{U}$ y $(M_g, g) \preceq (W, h)$ para cada $(M_g, g) \in \mathcal{C}$.

Por el Lema de Zorn, existe $(M_h, h) \in \mathcal{U}$ maximal. Si tuviésemos que $M_h \neq X$, por el Lema 1.12, existen un subespacio M de X con $M_h \subset M$ y $\tilde{h}: M \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\tilde{h}|_{M_h} = h$ y $\tilde{h}(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Como $Y \subset M_h \subset M$, sigue que $\tilde{h}|_Y = f$. Concluimos que $(M, \tilde{h}) \in \mathcal{U}$, $(M_h, h) \neq (M, \tilde{h})$ y $(M_h, h) \preceq (M, \tilde{h})$. Esto contradice el hecho de que $(M_h, h) \in \mathcal{U}$ es maximal. Por tanto, $M_h = X$ y esto prueba el teorema. \square

Ahora presentaremos algunas consecuencias del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.16 (Teorema de Hahn-Banach, versión normada). Sean X un espacio normado, Y subespacio de X y $f \in Y^*$. Entonces existe $\tilde{f} \in X'$ tal que $\tilde{f}|_Y = f$ y $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

La demostración de este teorema puede encontrarse en la sección 4.3 de [3].

Definición 1.17. Sea X un espacio normado. Un *hiperplano afín* es un conjunto de la forma $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se usará la notación $H := [f = \alpha]$.

Definición 1.18. Sean X un espacio normado y A, B subconjuntos de X . Diremos que el hiperplano afín $[f = \alpha]$ *separa estrictamente* a A y B si

$$\sup\{f(x) : x \in A\} < \alpha < \inf\{f(x) : x \in B\}.$$

Se deducen directamente del Teorema de Hahn-Banach dos versiones geométricas, enunciaremos la segunda de ellas.

Teorema 1.19 (Teorema de Hahn-Banach, segunda versión geométrica). Sean X un espacio normado y $\emptyset \neq A, B$ subconjuntos convexos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano afín cerrado que separa estrictamente a A y B .

La prueba de este teorema puede encontrarse en [4], Teorema 1.7. En la figura ilustramos lo que nos dice el teorema.

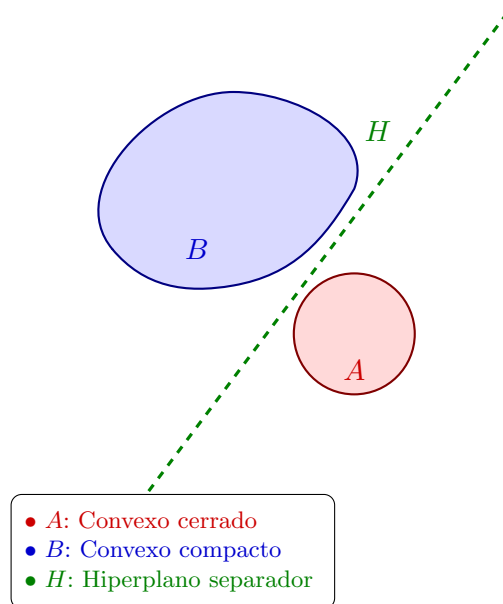


Figura 1.1: Separación estricta de convexos disjuntos en espacios normados.

Teorema 1.20. *Sea E un espacio normado. Si $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal, entonces existe un funcional lineal $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración.

- Caso 1: $p(x) = 0$, para cada $x \in E$, basta tomar $u = \mathbf{0}$.
- Caso 2: $p(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in E$. Sea $M = [x_0]$ y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(tx_0) = tp(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Debemos ver que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.
 - Si $t > 0$, entonces $f(tx_0) = tp(x_0) = p(tx_0)$.
 - Si $t < 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_0) &= tp(x_0) \\ &= -(-tp(x_0)) \\ &= -(p(-tx_0)). \end{aligned}$$

Ahora bien, $p(-tx_0) = p(tx_0 - 2tx_0) \leq p(tx_0) + 2p(-tx_0)$. Luego $-p(-tx_0) \leq p(tx_0)$, y en consecuencia, $f(tx_0) \leq p(tx_0)$.

Ahora, usando el Teorema 1.15, existe $u \in E^\#$ tal que $u(x) = f(x)$ para todo $x \in M$ y $u(y) \leq p(y)$ para todo $y \in E$. \square

Corolario 1.21. *Para todo funcional sublineal p en E y todo $x_0 \in E$, existe un funcional lineal $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ y $u(x_0) = p(x_0)$.*

Demostración. Sea $p': E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p'(x) = \inf\{p(x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) \mid \lambda \geq 0\}, \quad x \in E.$$

Veamos que p' es sublineal. Sean $x, y \in E$ dados. Por definición de ínfimo y p' , para todo $\epsilon > 0$ existen $\lambda, \mu \geq 0$ tales que

$$p'(x) \geq p(x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) - \epsilon, \quad \text{y} \quad p'(y) \geq p(y + \mu x_0) - \mu p(x_0) - \epsilon.$$

De ahí, junto con $p(x) + p(y) \geq p(x + y)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} p'(x) + p'(y) &\geq p(x + \lambda x_0 + y + \mu x_0) - (\lambda + \mu)p(x_0) - 2\epsilon \\ &\geq p(x + y + (\lambda + \mu)x_0) - (\lambda + \mu)p(x_0) - 2\epsilon, \end{aligned}$$

y como,

$$p'(x + y) \leq p(x + y + (\lambda + \mu)x_0) - (\lambda + \mu)p(x_0),$$

entonces $p'(x) + p'(y) \geq p'(x + y) - 2\epsilon$. Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos que

$$p'(x) + p'(y) \geq p'(x + y).$$

Veamos ahora que $p'(\alpha x) = \alpha p'(x)$ para cada $\alpha \geq 0$ y $x \in E$.

- Caso $\alpha = 0$. Es claro que vale que $p'(\alpha x) = \alpha p'(x)$.
- Caso $\alpha > 0$. Tenemos que

$$p'(\alpha x) = \inf\{p(\alpha x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) \mid \lambda \geq 0\}.$$

Si $\lambda = \alpha \cdot \mu$ con $\mu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} p'(\alpha x) &= \inf\{p(\alpha x + \alpha \mu x_0) - \alpha \mu p(x_0) \mid \mu \geq 0\} \\ &= \inf\{\alpha p(x + \mu x_0) - \alpha \mu p(x_0) \mid \mu \geq 0\} \\ &= \alpha \inf\{p(x + \mu x_0) - \mu p(x_0) \mid \mu \geq 0\}. \end{aligned}$$

Note que $\inf\{p(x + \mu x_0) - \mu p(x_0) \mid \mu \geq 0\} = p'(x)$. Entonces $p'(\alpha x) = \alpha p'(x)$.

Como acabamos de probar, p' es sublineal. Observemos también que $p'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, porque

$$p(x + \lambda x_0) \leq p(x) + p(\lambda x_0) \Rightarrow p(x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) \leq p(x).$$

Consecuentemente, $p(x + \lambda x_0) - \lambda p(x_0) \leq p(x)$.

Por el Teorema 1.20 existe $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. En particular, $u(x_0) \leq p(x_0)$. Queremos ver que $u(x_0) = p(x_0)$. Observe que tomando $\lambda = 1$ en la definición de p' obtenemos

$$\begin{aligned} p'(-x_0) &\leq p(-x_0 + 1 \cdot x_0) - 1 \cdot p(x_0) \\ &\leq p(0) - p(x_0) \\ &\leq -p(x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(-x_0) \leq p'(-x_0) \leq -p(x_0)$. Se sigue que $-u(x_0) \leq -p(x_0)$, es decir, $u(x_0) \geq p(x_0)$. De ahí que $u(x_0) = p(x_0)$. \square

Definición 1.22. Sea E un espacio normado. El *bidual de E* se define como el espacio dual de E' , es decir, $(E')'$. Se usará la notación E'' .

Lema 1.23. Sea E un espacio normado. La aplicación

$$\begin{aligned} J_E : E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto \phi_x, \end{aligned}$$

donde $\phi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $\phi_x(f) = f(x)$ para cada $f \in E'$, es lineal, inyectiva y preserva la norma.

Demostración.

- Lineal: Queremos ver que $J_E(\alpha x + \beta y) = \alpha J_E(x) + \beta J_E(y)$. Por definición de J_E ,

$$J_E(\alpha x + \beta y) = \phi_{\alpha x + \beta y}$$

donde $\phi_{\alpha x + \beta y}$ es el funcional en E'' que actúa sobre cualquier $f \in E'$ como:

$$\phi_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y).$$

Como f es funcional lineal,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Luego,

$$\phi_{\alpha x + \beta y}(f) = \alpha f(x) + \beta f(y). \quad (1.1)$$

Por otro lado, $\alpha J_E(x) + \beta J_E(y)$ es una combinación lineal en E , al evaluarla en un funcional $f \in E'$,

$$\begin{aligned} (\alpha J_E(x) + \beta J_E(y))(f) &= \alpha J_E(x)(f) + \beta J_E(y)(f) \\ &= \alpha \phi_x(f) + \beta \phi_y(f). \end{aligned}$$

Así,

$$(\alpha J_E(x) + \beta J_E(y))(f) = \alpha f(x) + \beta f(y). \quad (1.2)$$

Comparando (1.1) y (1.2),

$$\phi_{\alpha x + \beta y}(f) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha J_E(x) + \beta J_E(y))(f)$$

y como esto vale para cualquier $f \in E'$ arbitrario, se concluye que

$$J_E(\alpha x + \beta y) = \alpha J_E(x) + \beta J_E(y).$$

- Inyectiva y preserva la norma. Demostraremos primero que $\|\phi_x\| = \|x\|$. Usaremos para esto la definición de norma de un operador dada en la Definición 1.3, entonces

$$\|\phi_x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|\phi_x(f)|}{\|f\|}.$$

Sabemos que $\phi_x(f) = f(x)$, luego

$$\|\phi_x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Veamos que $\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|$.

- $\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$

Note que $\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$ Luego

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)|}{\|x\|} &\leq \|f\| \\ |f(x)| &\leq \|f\| \cdot \|x\| \\ \frac{|f(x)|}{\|f\|} &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Esto para cualquier $f \neq 0$, luego también para el supremo, de ahí que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|$$

- $\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \|x\|$ Sea $Y = \text{gen}\{x\} = \{tx : t \in \mathbb{K}\}.$ Defina

$$\begin{aligned} f_0 = Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ tx &\rightarrow t\|x\|. \end{aligned}$$

Entonces f_0 es lineal y

$$\begin{aligned} \|f_0\| &= \sup\{|f_0(tx)| : \|tx\| \leq 1\} \\ &= \sup\{t\|x\| : t\|x\| \leq 1\} = 1. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.16, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\| = 1$ y $f|_Y = f_0.$ Entonces

$$\frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Por lo tanto el supremo es al menos $\|x\|$, es decir,

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \|x\|.$$

De ahí que $\|\phi_x\| = \|x\|.$ Esto prueba que J_E es una isometría, y por lo tanto también es inyectiva. □

Definición 1.24. Sea E un espacio normado. La **aplicación canónica** de E en E'' es la aplicación definida en el Lema 1.23.

A continuación introducimos el polar de un subconjunto de un espacio normado.

Definición 1.25. Sea E un espacio normado, el **polar** de un subconjunto $X \subset E$ es el conjunto:

$$X^\circ = \{u \in E' \mid |u(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in X\} \subset E'.$$

Análogamente, el polar de $U \subset E'$ es:

$$U^\circ = \{x \in E \mid |u(x)| \leq 1 \text{ para todo } u \in U\} \subset E.$$

Lema 1.26. Sea E un espacio normado.

1. Si $X \subset E$, entonces $X^\circ \subset E'$ es cerrado.
2. Si $U \subset E'$, entonces $U^\circ \subset E$ es cerrado.

Demostración.

1. Note que si $X \subset E$

$$X^\circ = \bigcap_{x \in X} \{u \in E' \mid |u(x)| \leq 1\}.$$

Dado $x \in X$, considere el conjunto

$$B_x = \{u \in E' \mid |u(x)| \leq 1\}.$$

Note que cada B_x es la preimagen del intervalo cerrado $[-1, 1]$ bajo la función ϕ_x , definida en el Lema 1.23. Como $[-1, 1]$ es cerrado en \mathbb{R} , B_x es cerrado en E' . De ahí que X° es cerrado, pues es intersección de cerrados.

2. Note que si $U \subset E'$

$$U^\circ = \bigcap_{u \in U} \{x \in E \mid |u(x)| \leq 1\}.$$

Dado $u \in U$, considere el conjunto

$$C_u = \{x \in E \mid |u(x)| \leq 1\}.$$

La función $u : E \rightarrow \mathbb{R}$, pues $u \in E'$, luego como $[-1, 1]$ es cerrado en \mathbb{R} su preimagen C_u es cerrado en E . Por lo tanto U° es cerrado, pues es intersección arbitraria de cerrados.

□

Recordemos que si X es un espacio normado y M es un subespacio de X , X/M es el conjunto $\{x + M : x \in X\}$. Se sabe que X/M junto con la suma y multiplicación por escalar dadas por:

$$\begin{aligned}(x + M) + (y + M) &= (x + y) + M \\ \lambda(x + M) &= \lambda x + M\end{aligned}$$

es un espacio vectorial. Más aún, la aplicación

$$\begin{aligned}\|\cdot\| &= X/M \rightarrow \mathbb{K} \\ X &\rightarrow \|x + M\| = \inf\{\|x + m\| : m \in M\}\end{aligned}$$

es una norma si M es cerrado.

Lema 1.27. *Sea M un subespacio propio de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. $\pi_M : X \rightarrow X/M$, dado por $\pi_M(x) = x + M$ es un operador continuo y de norma 1.*

Demostración. Para $x \in X$, por definición de la norma cociente

$$\|\pi_M(x)\|_{X/M} = \|x + M\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|x + m\|_X.$$

Como $m = 0 \in M$, entonces

$$\inf_{m \in M} \|x + m\|_X \leq \|x + 0\| = \|x\|_X.$$

Luego $\|\pi_M(x)\|_{X/M} \leq \|x\|_X$. Así π_M es acotado. Veamos que $\|\pi_M\| = 1$. En efecto,

- $\|\pi_M\| \leq 1$, ya que

$$\|\pi_M\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\pi_M(x)\|_{X/M}}{\|x\|_X}.$$

Para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|\pi_M(x)\|_{X/M}}{\|x\|_X} \leq 1.$$

Luego,

$$\|\pi_M\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\pi_M(x)\|_{X/M}}{\|x\|_X} \leq 1.$$

- Probaremos ahora que $\|\pi_M\| \geq 1$. Queremos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$ y $\|x + M\|_{X/M} \geq 1 - \varepsilon$.

Fijemos $z \in X, z \notin M$. Sea $d = \|z + M\|_{X/M} > 0$. Para $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in M$ tal que $\|z + m_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. Definimos, $x_\varepsilon = \frac{z+m_\varepsilon}{\|z+m_\varepsilon\|}$. Luego, $\|x_\varepsilon\| = 1$. Entonces,

$$\|\pi_M(x_\varepsilon)\|_{X/M} = \frac{\|z + m_\varepsilon + M\|_{X/M}}{\|z + m_\varepsilon\|} = \frac{\|z + M\|_{X/M}}{\|z + m_\varepsilon\|} = \frac{d}{\|z + m_\varepsilon\|}.$$

Pero $\|z + m_\varepsilon\| < d + \varepsilon$, luego:

$$\|\pi_M(x_\varepsilon)\|_{X/M} > \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Como $d > 0$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{d}{d+\varepsilon} \rightarrow 1$. Por lo tanto $\|\pi_M\| \geq 1$.

□

Notación: Denotamos por B_E y B_F las bolas unitarias cerradas de E y F , respectivamente. Análogamente, denotamos por B_E° y B_F° las bolas unitarias abiertas.

Lema 1.28. *Sea M un subespacio propio de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Entonces, $\pi_M(B_X^\circ) = B_{X/M}^\circ$, donde $\pi_M : X \rightarrow X/M$ (dado por $\pi_M(x) = x + M$) es el operador continuo y de norma 1. Además π_M es abierta, esto es, si U es abierto en X , entonces $\pi_M(U)$ es abierto en X/M .*

Demostración.

- $\pi_M(B_X^\circ) \subset B_{X/M}^\circ$.
Si $x \in B_X^\circ$, entonces $\|x\| < 1$. Pero $\|\pi_M(x)\|_{X/M} \leq \|x\|$ y por definición de la norma cociente, $\|\pi_M(x)\|_{X/M} < 1$. Luego $\pi_M(x) \in B_{X/M}^\circ$.
- $B_{X/M}^\circ \subset \pi_M(B_X^\circ)$.
Sea $\hat{y} \in B_{X/M}^\circ$, entonces $\|\hat{y}\|_{X/M} < 1$. Por la definición de la norma cociente,

$$\|\hat{y}\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|y + M\| < 1.$$

Entonces existe $m_0 \in M$ tal que $\|y + m_0\| < 1$. Definimos $z = y + m_0$, note que $\|z\| = 1$ luego, $z \in B_X^\circ$ y $\pi_M(z) = z + M = (y + m_0) + M = y + M = \hat{y}$. Por lo tanto $\hat{y} \in \pi_M(B_X^\circ)$.

Para probar que π_M es abierta, probaremos primero que la imagen de toda bola abierta es una bola abierta.

Sea $x_0 \in X$ y $r > 0$. Note que $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X^\circ$. Entonces,

$$\pi_M(B_X(x_0, r)) = \pi_M(x_0 + rB_X^\circ) = \pi_M(x_0) + r\pi_M(B_X^\circ),$$

y como vimos antes $\pi_M(B_X^\circ) = B_{X/M}^\circ$. Luego,

$$\pi_M(B_X(x_0, r)) = \pi_M(x_0) + rB_{X/M}^\circ = B_{X/M}(\pi_M(x_0), r).$$

Esto prueba que π_M manda bolas abiertas de X en bolas abiertas de X/M .

Sea U abierto en X . Tomemos $\hat{u} \in \pi_M(U)$, con $u \in U$ tal que $\pi_M(u) = \hat{u}$. Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_X(u, r) \subset U$. Entonces,

$$\pi_M(B_X(u, r)) = B_{X/M}(\hat{u}, r) \subset \pi_M(U).$$

Así, la bola $B_{X/M}(\hat{u}, r)$ es un abierto en X/M que contiene a \hat{u} y está contenida en $\pi_M(U)$. Como \hat{u} es arbitrario, todo punto de $\pi_M(U)$ es interior, luego $\pi_M(U)$ es abierto. \square

El próximo teorema se conoce en la literatura como el Primer teorema de isomorfismos para espacios normados. Para comodidad del lector damos una prueba aquí.

Teorema 1.29. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ lineal y continua. Existe un único isomorfismo $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|) & \xrightarrow{T} & (Y, \|\cdot\|) \\ \pi_{\ker T} \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ (X/\ker T, \|\cdot\|) & & \end{array}$$

es conmutativo, esto es, $\tilde{T} \circ \pi_{\ker T} = T$. A su vez $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Más aún, si T es sobreyectiva, \tilde{T} es un isomorfismo sobreyectivo.

Demostración. Defina $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ por $\tilde{T}(\pi_{\ker T}(x)) = T(x)$ para todo $x \in X$. Veamos que está bien definida. Si $\pi_{\ker T}(x_1) = \pi_{\ker T}(x_2)$, entonces $(x_1 - x_2) + \ker T = 0 + \ker T$, luego $x_1 - x_2 \in \ker T$. De ahí que $T(x_1 - x_2) = 0$ y por la linealidad de T , $T(x_1) = T(x_2)$.

Entonces \tilde{T} está bien definida. Veamos ahora que \tilde{T} es lineal. Sean $[x]$ y $[y] \in X/\ker T$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que:

$$\begin{aligned} \tilde{T}([x] + [y]) &= \tilde{T}([x + y]) \\ &= T(x + y) \\ &= T(x) + T(y) \\ &= \tilde{T}([x]) + \tilde{T}([y]), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda[x]) &= \tilde{T}([\lambda x]) \\ &= T(\lambda x) \\ &= \lambda T(x) \\ &= \lambda \tilde{T}([x]) \end{aligned}$$

Por lo tanto \tilde{T} es lineal. Veamos ahora que \tilde{T} está acotada. Para $[x] \in X/\ker T$,

$$\|\tilde{T}([x])\|_Y = \|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X,$$

de donde $\|\tilde{T}([x])\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in \ker T$ tal que $\|x+z\| \leq \|[x]\| + \varepsilon$. Entonces,

$$\|\tilde{T}([x])\|_Y = \|T(x+z)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x+z\| \leq \|T\| \cdot (\|[x]\| + \varepsilon).$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, $\|\tilde{T}([x])\|_Y \leq \|T\| \cdot \|[x]\|_X$. Por lo tanto, \tilde{T} es acotado y $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Probaremos entonces que $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$. Para cualquier $x \in X$,

$$\|T(x)\|_Y = \|\tilde{T}(\pi_{\ker T}(x))\|_Y \leq \|\tilde{T}\| \cdot \|\pi_{\ker T}(x)\| \leq \|\tilde{T}\| \cdot \|x\|_X.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|\tilde{T}\|,$$

para todo $x \neq 0$. Tomando el supremo,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|\tilde{T}\|.$$

Veamos ahora la inyectividad de \tilde{T} . Recordemos que una transformación lineal (en este caso un operador lineal) es inyectiva si y solo si, su kernel contiene sólo el elemento cero. Es decir, $\ker T = \{0_{X/\ker T}\}$.

Supongamos que $\tilde{T}([x]) = 0_Y$. Por definición de \tilde{T} , $T(x) = 0_Y$. Luego $x \in \ker T$.

Si $x \in \ker T$, entonces

$$[x] = x + \ker T = 0 + \ker T = [0].$$

Es decir, $[x]$ es la clase del cero en $X/\ker T$. Por lo tanto \tilde{T} es inyectiva.

Por construcción $\tilde{T}(\pi_{\ker T}(x)) = T(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $\tilde{T} \circ \pi_{\ker T} = T$. Supongamos que existe otro operador $S : X/\ker T \rightarrow Y$ lineal y acotado tal que $S \circ \pi_{\ker T} = T$. Entonces para cualquier $[x] \in X/\ker T$, tenemos:

$$S([x]) = S(\pi_{\ker T}(x)) = T(x) = \tilde{T}([x]).$$

Por lo tanto, $S = \tilde{T}$.

Hemos probado la existencia de un único isomorfismo $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ tal que $\tilde{T} \circ \pi_{\ker T} = T$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Veamos ahora que si T es sobreyectiva, \tilde{T} es un isomorfismo sobreyectivo. Si T es sobreyectivo, dado $y \in Y$, existe $x \in X$ con $T(x) = y$. Por la definición de \tilde{T} , tenemos

$$\tilde{T}([x]) = T(x) = y.$$

Por lo tanto, dado $y \in Y$, existe $[x] \in X/\ker T$ tal que $\tilde{T}([x]) = y$, lo que prueba la sobreyectividad de \tilde{T} . \square

Definición 1.30. Sean X y Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ lineal y continua. Entonces el *operador adjunto* $T' : X' \rightarrow Y'$ de T se define mediante

$$f(x) = (T'g)(x) = g(T(x))$$

donde $g \in Y'$, y siendo X' y Y' los espacios duales de X y Y respectivamente.

Capítulo 2

Unificación de los teoremas fundamentales

En esta sección realizaremos la demostración de los teoremas objetivo de este trabajo como lo son: el *Principio de Acotación Uniforme* y el *Teorema de la Aplicación Abierta*. Probaremos también la equivalencia entre este último y el *Teorema del Gráfico Cerrado*. Destacamos que estos resultados son probados en cualquier curso de Análisis Funcional a través del Teorema de Baire. La prueba que mostramos aquí usa el Teorema de Hahn-Banach, este enfoque se debe a Walter Roth (vease [1]).

Definición 2.1. Sean E un espacio normado y $A \subseteq E$. Se dice que A es **débilmente acotado** si para todo $u \in E'$, $\{u(x) : x \in A\}$ es acotado.

Definición 2.2. Sean E un espacio normado y $B \subseteq E'$. Se dice que B es **débil*-acotado** si para todo $x \in E$, $\{\varphi(x) : \varphi \in B\}$ es acotado.

Definición 2.3. Sean E un espacio normado, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ una familia de funciones de E en \mathbb{R} y $A \subseteq E$.

1. \mathcal{F} es **puntualmente acotada** en A si para cada $a \in A$ existe $M_a > 0$ tal que

$$|f(a)| \leq M_a, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{F}.$$

2. \mathcal{F} es **uniformemente acotada** en A si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{F} \text{ y cada } x \in A.$$

Teorema 2.4. Sean $\emptyset \neq X \subset E$ y $\emptyset \neq U \subset E^{\#}$ un conjunto de funcionales lineales que:

1. U es puntualmente acotado en E ,
2. U no es uniformemente acotado en X .

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u_n \in U$ y $a_n \geq 0$ tales que:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$;
- El funcional $u \in E'$ definido por $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$, $x \in E$, no es acotado en X .

Demostración: Si U contiene un funcional no acotado en X , se cumple el resultado directamente: basta tomar un funcional $u_0 \in U$ no acotado en X , $a_0 = 1$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Así, $u = u_0$ no es acotado en X .

Por lo anterior, podemos suponer que todos los elementos de U son acotados en X , es decir,

$$\sup\{|u(x)| : x \in X\} < \infty, \quad \text{para todo } u \in U. \quad (2.1)$$

Por hipótesis, U es puntualmente acotado en E , o sea,

$$\sup\{|u(x)| : u \in U\} < \infty, \quad \text{para cada } x \in E.$$

Por lo anterior, podemos definir $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(x) = \sup\{|u(x)| : u \in U\}, \quad x \in E.$$

De esta forma, $|u(x)| \leq p(x)$ para cada $u \in U$ y $x \in X$. Sabemos también que U no es uniformemente acotado en X , es decir,

$$\sup\{|u(x)| : x \in X, u \in U\} = \infty. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, para todo $M > 0$, existen $x \in X$ y $u \in U$ tales que $|u(x)| \geq M$.

Sea $\alpha_1 = 1/2$. Por la Ecuación (2.2), existen $x_1 \in X$ y $u_1 \in U$ tales que $|u_1(x_1)| \geq 2$. Luego, $|\alpha_1 u_1(x_1)| \geq 1$. Observe que $p(x_1) > 0$. Fijemos ahora $0 \leq \alpha_2 \leq \min\left\{\frac{1}{4p(x_1)}, \frac{1}{4}\right\}$. Notemos que

$$\sup\{|\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u(x)| : x \in X, u \in U\} = \infty.$$

De lo anterior y por la Ecuación (2.1) se sigue que existen $x_2 \in X$ y $u_2 \in U$ tal que

$$|\alpha_1 u_1(x_2) + \alpha_2 u_2(x_2)| \geq 2.$$

Como $|u_1(x)| \leq p(x)$ y $|u_2(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in E$, se sigue que $p(x_2) > 0$.

Sea $n \geq 3$, y supongamos que hemos definido $x_2, \dots, x_{n-1} \in X$, $u_2, \dots, u_{n-1} \in U$ y $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ de modo que

- $p(x_i) > 0$ si $i = 2, \dots, j$,

- $0 < \alpha_j \leq \frac{1}{2^j}$ y $\alpha_j \leq \frac{1}{2^j} \min \left\{ \frac{1}{p(x_i)} : i = 1, \dots, j-1 \right\}$, y
- $\left| \sum_{i=1}^j \alpha_i u_i(x_j) \right| \geq j$,

para cada $j = 2, \dots, n-1$.

Fijemos $0 < \alpha_n \leq 1/2^n$ y $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n} \min \left\{ \frac{1}{p(x_i)} : i = 1, \dots, n-1 \right\}$. Queremos ver que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) + \alpha_n u(x) \right| : x \in X, u \in U \right\} = \infty.$$

Si no fuese así, existiría $K > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y $u \in U$, $\left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) + \alpha u(x) \right| \leq K$.

Observemos que

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) \right| : x \in X \right\} := C < \infty,$$

porque todos los elementos de U son acotados en X . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} |\alpha_n u(x)| &= \left| \alpha_n u(x) + \sum_{n=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) \right| \\ &\leq K + \left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x) \right| \\ &\leq K + C, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto, $\sup\{|u(x)| : x \in X, u \in U\} < \infty$. Esto contradice la hipótesis. Luego, se cumple que:

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i(x) + \alpha_n u(x) \right| : x \in X, u \in U \right\} = \infty.$$

Se sigue que existen $u_n \in U$ y $x_n \in X$ tales que

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x_n) + \alpha_n u_n(x_n) \right| \geq n.$$

Lo anterior completa la definición inductiva de las sucesiones (x_n) , (α_n) y (u_n) .

Finalmente, sean $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n$ y fijemos $u_0 \in U$. Afirmamos que el funcional $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n(x), \quad x \in E$$

es el que satisface la afirmación del teorema. Observemos que u está bien definido puesto que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |u_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i p(x) \leq p(x) < \infty,$$

para todo $x \in E$. Así, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i(x)$ converge. Falta verificar que $\sup\{|u(x)| : x \in X\} = \infty$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i u_i(x_n) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i |u_i(x_n)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i p(x_n) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |u(x_n)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i(x_n) \right| \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x_n) \right| - \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i u_i(x_n) \right| - |u_0(x_n)| \\ &\geq n - \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i - |u_0(x_n)| \\ &\geq n - 1 - |u_0(x_n)|. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que, $\sup\{|u(x)| : x \in X\} = \infty$. □

Teorema 2.5. Sean $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ sublineal y $X \subset E$. Si p es no acotado en X , entonces existe $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, y u también es no acotado en X .

Demostración:

- Supongamos que $\inf\{p(x) | x \in E\} = -\infty$. Por el Teorema 1.20, existe $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Así, $\inf\{u(x) | x \in E\} = -\infty$ y u es no acotado.
- Si $\sup\{p(x) | x \in X\} = \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $p(x_n) \geq n$. Por el Corolario 1.21 para cada x_n existe $u_n \in E^\#$ tal que $u_n(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ y $u_n(x_n) = p(x_n) \geq n$. Considere el conjunto $U = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ de funcionales lineales en E .

Note que

$$\sup\{u(x)|u \in U, x \in X\} \geq n,$$

y que para todo funcional $u \in U$ se cumple que $-p(-x) \leq u(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Luego U es puntualmente acotado en E , pero no uniformemente acotado en X .

Por el Lema 2.4, existen sucesiones (α_n) en $[0, \infty)$ y (u_{m_n}) en U tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ y el funcional $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_{m_n}$ no es acotado en X . Observe que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Así, u es no acotado en X . □

Lema 2.6. *Sea E un espacio normado.*

1. *Todo conjunto débilmente acotado de E es acotado.*
2. *Si E es Banach, entonces todo subconjunto débil*-acotado de E' es acotado.*

Demostración.

1. Sea $\emptyset \neq A \subset E$ débilmente acotado. Queremos probar que A es acotado. Por contradicción supongamos que A no es acotado. Considere $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|x\|$, para cada $x \in E$. Note que A no es acotado, si y solo si, $\{p(x) : x \in A\}$ no es acotado. Luego, por el Teorema 2.5 existe $u \in E^\#$ tal que $u(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ y u no es acotado en A . Observe que $u \in E'$. Así $\{u(x) : x \in A\}$ no es acotado, por lo tanto A no es débilmente acotado.
2. Sea $U \subseteq E'$ no acotado. Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| \leq 1$ y $\sup\{u(x_n)|u \in U\} \geq n$. Defina $W = \{J_E(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset E''$. Veamos que W es puntualmente acotado en E' , pero no uniformemente acotado en U . En efecto, si $u \in E'$, entonces

$$\begin{aligned} |J_E(x_n)(u)| &= |u(x_n)| \\ &\leq \|u\| \|x_n\| \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, $\infty = \sup\{u(x_n) : u \in U, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{J_E(x_n)(u) : u \in U, n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, W no es uniformemente acotado en U . Por el Teorema 2.4 para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_{m_n} \in W$ y $a_n \geq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ y el funcional $\varphi \in E''$ definido por $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i J_E(x_{m_i})$ es no acotado en U .

Como E es completo, $\varphi = J_E(x)$ por algún $x \in E$. Esto demuestra que U no es débil*-acotado. □

Teorema 2.7 (Principio de Acotación Uniforme). *Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales continuos de un espacio de Banach E en un espacio normado F tal que la sucesión $(\|T_n(x)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada para todo $x \in E$. Entonces, la sucesión $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $(\|T_n\|)$ no está acotada, es decir, existen $x_n \in E$ tales que $\|x_n\| \leq 1$ y $(\|T_n(x_n)\|)$ no está acotada. Por el Lema 2.6 (1), existe $v \in F'$ tal que v no está acotado en $\{T_n(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $U = \{T'_n(v) : n \in \mathbb{N}\} \subset E'$. Entonces:

$$\|T'_n(v)\| \geq |T'_n(v)(x_n)| = |v(T_n(x_n))|,$$

lo que implica que U es un subconjunto no acotado de E' . Por el Lema 2.6 (2), existe $x \in E$ tal que x no está acotado en U . Sin embargo, tenemos:

$$|T'_n(v)(x)| = |v(T_n(x))| \leq \|v\| \|T_n(x)\|.$$

Dado que la sucesión $(\|T_n(x)\|)$ se suponía acotada, esto contradice nuestra conclusión previa. \square

Usaremos ahora esta demostración para probar la versión mas general del principio de acotación uniforme.

Teorema 2.8 (Principio de acotación uniforme). *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores lineales continuos de E en F . Suponga que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty,$$

para todo $x \in E$. Entonces

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

En otras palabras, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|T_i x\| \leq c \|x\|,$$

para todo $x \in E$ y $i \in I$.

Demostración. Por contradicción supongamos que $\sup_{i \in I} \|T_i\| = \infty$. Entonces existe una sucesión $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ tal que $\|T_{i_n}\| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Considere la sucesión $(T_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, para cada $x \in E$, por hipótesis, $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$, en particular $(\|T_{i_n} x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada para cada x . Como E y F son espacios de Banach, es posible aplicar el Teorema 2.7 a la sucesión $(T_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Consecuentemente, $(\|T_{i_n}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, lo que contradice que $\|T_{i_n}\| \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$. \square

Observación 2.9. Para un operador lineal continuo T de un espacio normado E en un espacio normado F , su adjunto T' y un subconjunto $X \subset E$ se cumple:

$$(T(X))^\circ = T'^{-1}(X^\circ).$$

En efecto:

- $(T(x))^\circ \subseteq T'^{-1}(X^\circ)$
Sea $v \in (T(x))^\circ$, es decir, $v \in F'$ tal que $|v(T(x))| \leq 1$ para todo $x \in X$. Por definición del adjunto T' , $v(T(x)) = (T'v)(x)$, luego $|v(T(x))| = |(T'v)(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$, entonces $T'v \in X^\circ$. Por lo tanto $v \in T'^{-1}(X^\circ)$.
- $T'^{-1}(X^\circ) \subseteq (T(x))^\circ$
Sea $v \in T'^{-1}(X^\circ)$, es decir, $T'v \in X^\circ$, luego $|T'v(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$. Por definición del adjunto T' , $(T'v)(x) = v(T(x))$, así $|(T'v)(x)| = |v(T(x))| \leq 1$ para todo $x \in X$, entonces $v \in (T(X))^\circ$.

El próximo teorema se conoce en la literatura como el Teorema del bipolar. Presentamos su prueba aquí con el fin de completitud del trabajo.

Teorema 2.10. *Sea E un espacio normado y $A \subseteq E$ convexo. Entonces $\overline{A} = A^{\circ\circ}$*

Demostración. Veamos que $A \subseteq A^{\circ\circ}$. Si $A = \emptyset$, el resultado es claro. Caso contrario, sea $a \in A$ dado. Debemos ver que $|u(a)| \leq 1$ para todo $u \in A^\circ$. Si $u \in A^\circ$ es fijo, entonces $|u(a)| \leq 1$. Se sigue que $a \in A^{\circ\circ}$. Ahora, como $A^{\circ\circ} \subseteq E$ es cerrado, concluimos que $\overline{A} \subseteq A^{\circ\circ}$. Supongamos que $A^{\circ\circ} \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ y tome $x_0 \in A^{\circ\circ} \setminus \overline{A}$. Aplicando la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach ver Teorema 1.19, existe $x_0^* \in E'$ tal que

$$|x_0^*(x_0)| > 1 > \sup_{b \in \overline{A}} |x_0^*(b)|.$$

De lo anterior tenemos que $x_0^* \in A^\circ$ y como $x_0 \in A^{\circ\circ}$, se sigue que $|x_0^*(x_0)| \leq 1$, lo cual es imposible. Así, $A^{\circ\circ} \setminus \overline{A} = \emptyset$ y concluimos que $\overline{A} = A^{\circ\circ}$. \square

Teorema 2.11 (Teorema de la Aplicación Abierta). *Un operador lineal continuo y sobreyectivo T de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F es una aplicación abierta; es decir, las imágenes de subconjuntos abiertos de E son abiertas en F .*

Demostración. Debemos demostrar que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que

$$T(B_E) \supseteq \varepsilon B_F.$$

Esto pues cualquier conjunto abierto $U \subset E$ es una unión de bolas abiertas. Si la imagen de cada una de esas bolas es un conjunto que contiene una bola abierta alrededor de cada uno de sus puntos, entonces $T(U)$ es una unión de conjuntos abiertos y, por lo tanto, es abierto.

Procedemos en dos pasos:

Afirmación 2.12. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{nT(B_E)} = nT(B_E)^{oo}$ contiene a B_F .*

Demostración. Primero supongamos que para ningún $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\overline{nT(B_E)} = nT(B_E)^{oo}$ contiene a B_F . Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in B_F \setminus nT(B_E)^{oo}$. Por definición del polar, existen funcionales $v_n \in T(B_E)^o$ tales que $|v_n(y_n)| > n$. Esto implica que $\|v_n\| > n$, por lo que el conjunto $V = \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F'$ no está acotado. Aplicando el Lema 2.6, existe $y \in F$ tal que y no está acotado en V . Como T es sobreyectiva, existe $x \in E$ con $T(x) = y$. Además, por la observación previa al teorema, sabemos que $v_n \in T'^{-1}(B_E^o)$, es decir,

$$u_n = T'(v_n) \in B_E^o.$$

Pero entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n(y)| = |v_n(T(x))| = |u_n(x)| \leq \|x\|,$$

lo cual contradice la construcción de y .
Por lo tanto, debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m\overline{T(B_E)} \supset B_F.$$

□

En la segunda parte de nuestra demostración, probaremos que lo anterior implica que

$$2mT(B_E) \supset B_F.$$

Sea $y \in B_F \subset m\overline{T(B_E)}$. Existe $x_1 \in mB_E$ tal que

$$y - T(x_1) \in \left(\frac{1}{2}\right) B_F \subset \left(\frac{m}{2}\right) \overline{T(B_E)}.$$

Suponga que para $n \geq 2$, hemos definido $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ de modo que

$$y - (T(x_1) + \dots + T(x_{n-1})) \in \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) B_F \subset \left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) \overline{T(B_E)}.$$

Entonces, existe $x_n \in \left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) B_E$ tal que

$$(y - (T(x_1) + \dots + T(x_{n-1}))) - T(x_n) \in \left(\frac{1}{2^n}\right) B_F \subset \left(\frac{m}{2^n}\right) \overline{T(B_E)}.$$

Dado que $\|x_n\| < \frac{m}{2^{n-1}}$ y E es completo, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a algún $x \in 2mB_E$, y se cumple que $T(x) = y$. Se cumple entonces que

$$T(2mB_E) \supset B_F,$$

es decir,

$$T(B_E) \supset \left(\frac{1}{2m}\right) B_F.$$

Así $\frac{1}{2m}$ sería nuestro ε , lo que completa nuestra demostración. □

Corolario 2.13. *Si X, Y son espacios de Banach y $T: X \rightarrow Y$ lineal, continua y biyectiva, entonces T^{-1} es acotada.*

Demostración. Por el Teorema de la aplicación abierta, $T(U)$ es abierto para cada $U \subset X$ abierto. Como T es inyectiva, sigue que T^{-1} es acotada. □

Como mencionamos en la introducción, el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema del gráfico cerrado son equivalentes. Antes de probar esta equivalencia, recordemos el Teorema del Gráfico Cerrado.

Teorema 2.14. *Sean E y F espacios de Banach y $T: E \rightarrow F$ un operador lineal. Si el gráfico de T es cerrado, entonces T es acotado.*

Demostración. Considere el conjunto $M = E \times F$ junto con las operaciones de suma y producto por escalar usuales. Entonces M es un espacio vectorial. Más aún, M es un espacio de Banach junto con la norma $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ si $(x, y) \in M$. Considere el gráfico de T , esto es:

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\},$$

y $\pi_T: G(T) \rightarrow E$ dada por $\pi_T(x, T(x)) = x$, para cada $x \in E$. Veamos que $G(T)$ es un espacio de Banach. Sea $((x_n, T(x_n)))$ una sucesión en $G(T)$ tal que $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in E \times F$. Entonces $x_n \rightarrow x$ y $T(x_n) \rightarrow y$. De la hipótesis deducimos que $y = T(x)$ y así $G(T)$ es cerrado en $E \times F$. Por lo tanto, $G(T)$ es un espacio de Banach (ya que es un subconjunto cerrado de un espacio que es completo). Ahora bien, no es difícil verificar que:

1. π_T es lineal;
2. π_T es biyectiva;
3. π_T es continua.

Por el Corolario 2.13 concluimos que π_T^{-1} es acotada. Luego, existe $C > 0$ tal que $\|\pi_T^{-1}(x)\| \leq C\|x\|$ para cualquier $x \in E$. Así

$$\|T(x)\| \leq \max\{\|x\|, \|T(x)\|\} = \|(x, T(x))\| = \|\pi_T^{-1}(x)\| \leq C\|x\|,$$

para todo $x \in E$. Esto prueba que T es acotada. □

Para finalizar:

Equivalencia entre el Teorema de la Aplicación abierta y el Teorema del Gráfico Cerrado. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Probaremos que T^{-1} es continua. Sea (y_n) una sucesión en Y tal que $y_n \rightarrow y$ y $T^{-1}(y_n) \rightarrow x$. Como T es continua, $T(T^{-1}(y_n)) = y_n \rightarrow T(x)$. Así $x = T^{-1}(y)$. Sigue del Teorema del Gráfico cerrado que T^{-1} es continua y por tanto, T es abierta.

Para el caso general, sea $T : X \rightarrow Y$ lineal, continuo y sobreyectivo. Por el Teorema 1.29, el operador lineal $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ dado por $\tilde{T}(x + \ker T) = T(x)$, $x \in X$, es continuo y biyectivo. Del teorema anterior deducimos que \tilde{T} es abierta. Puesto que $T = \tilde{T} \circ \pi_{\ker T}$ y $\pi_{\ker T}$ es abierta como se mostró en el Lema 1.28, concluimos que T es abierta. \square

Bibliografía

- [1] W. Roth. *A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces*. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 22 (1994), no. 1, 83–89.
- [2] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., (1973).
- [3] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, 1978.
- [4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.