



**APROXIMACIÓN ESPACIO-TEMPORAL PARA LA MEDIDA ABSOLUTA DE  
LA FORMA 3D DE UN OBJETO POR PROYECCIÓN DE FRANJAS**

**Presentado por:**

**Fís. ZAYRA MILENA PÉREZ GUZMÁN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES  
Octubre de 2006**

**APROXIMACIÓN ESPACIO-TEMPORAL PARA LA MEDIDA ABSOLUTA DE LA FORMA 3D DE UN OBJETO POR PROYECCIÓN DE FRANJAS**

**Presentado por:  
Fís. Zayra Milena Pérez Guzmán**

**Trabajo de grado para optar al título de  
Magíster en Física**

**Director:  
Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
GRUPO DE ÓPTICA Y TRATAMIENTO DE SEÑALES  
Octubre de 2006**

**TITULO\* : APROXIMACIÓN ESPACIO-TEMPORAL PARA LA MEDIDA ABSOLUTA DE LA FORMA 3D DE UN OBJETO POR PROYECCIÓN DE FRANJAS**

Zayra Pérez\* y Jaime Meneses\*\*

**RESUMEN**

El uso de proyección de franjas para obtener la topografía de un cuerpo es una técnica que ha sido ampliamente utilizada en aplicaciones industriales y médicas. Franjas paralelas son proyectadas sobre la superficie del objeto a estudiar, ya sea con un sistema convencional de proyección, utilizando una red de paso constante o utilizando patrones de interferencia. Esta técnica proporciona mapas de fase discontinuos, por lo que se hace necesario utilizar algoritmos de corrección de fase (unwrapping). Debido al procesamiento espacial, se propagan errores al identificarse puntos de discontinuidad erróneos causados por la presencia de ruido en regiones de fase mal calculadas. En este trabajo se presenta una metodología que permite calcular la fase continua absoluta de sistemas de franjas proyectados sobre la superficie de objetos que presentan discontinuidades y zonas aisladas. Para este tipo de objetos, el algoritmo clásico presenta errores en el cálculo de la fase relativa. Como alternativa se utilizó el método de corrección de fase temporal, que corrige sin recurrir a la información de píxeles vecinos, es decir zonas que presentan ruido no afectan puntos de fase válidos. De esta manera, objetos complicados pueden ser analizados sin inconvenientes ya que el algoritmo utiliza una suma secuencial de diferencias de fase.

**Palabras Claves:** Reconstrucción 3D, calibración de cámaras, tratamiento digital de imágenes y triangulación láser.

---

\* Trabajo de Investigación

\*Autor

\*\*Director

Centro de Excelencia en Nuevos Materiales - Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Colombia

**TITLE: †SPATIAL-TEMPORAL APPROACH FOR THE ABSOLUT  
MEASUREMENT OF THE 3D SHAPE OF AN OBJECT USING FRINGES  
PROJECTION**

**Zayra Pérez\*, Jaime Meneses\*\***

**ABSTRACT**

The use of fringe projection method to obtain the 3D Reconstruction is a technique that has been broadly used in industrial and medical applications. Parallel fringes are projected on the surface either with a conventional system of projection using a diffraction grating or using interferometric fringes. This technique provides discontinuous phase maps and it is necessary to use algorithms of phase correction (unwrapping). Due to the spatial correction, errors can be propagated when erroneous discontinuity points caused by the presence of noise are identified. In this work a methodology is presented that allow to solve the absolute phase distribution of projected fringes patterns over objects surface with discontinuities and isolate zones. For this type of objects, the classic algorithm has wrongs in the relative phase. The temporal-unwrapping algorithm was use for this case. This algorithm doesn't use neighboring pixels information. This is, noisy samples points don't adversely influence good data points. Thus, complicated objects can be analyzed without problems by means of a sequential addition of phase differences

**Key words:** Fringes Projection, 3D reconstruction, digital images treatment

---

†Trabajo de Investigación

\*Autor

\*\*Director

Centro de Excelencia en Nuevos Materiales - Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales,  
Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Ciudad Universitaria, Bucaramanga,  
Colombia

## **AGRADECIMIENTOS**

Expreso mis más sinceros agradecimientos:

- Al Dr. Jaime Meneses, por su paciencia, orientación y apoyo en la realización de este trabajo.
- A todas las personas que forman parte del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales.
- A mi familia por su respaldo y apoyo incondicional.

**TABLA DE CONTENIDO**

CAPITULO 1.....	11
1.1 INTRODUCCION.....	12
1.2 RECONSTRUCCIÓN 3D POR PROYECCIÓN DE FRANJAS.....	16
1.3 CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN.....	18
1.4 EXTRACCIÓN DE LA FASE DEL SISTEMA DE FRANJAS .....	21
CAPITULO 2.....	28
2.1 CALCULO DE LA FASE UTILIZANDO SISTEMAS DE FRANJAS .....	28
2.2 OBJETOS DISCONTINUOS.....	29
2.3 INFLUENCIA DE DISCONTINUIDADES.....	31
2.4 INFLUENCIA DEL RUIDO .....	34
2.5 POSIBLES SOLUCIONES.....	41
2.5.1 MÉTODOS ESPACIALES .....	41
2.5.1.1 MÉTODOS ESPACIALES DEPENDIENTES DEL CAMINO DE CORRECCIÓN .41	
2.5.1.2 MÉTODOS ESPACIALES INDEPENDIENTES DEL CAMINO DE CORRECCIÓN .....	41
2.5.2 MÉTODOS TEMPORALES .....	42
2.6 SOLUCION ESPACIAL.....	42
2.7 SOLUCIÓN TEMPORAL .....	45
CAPITULO 3.....	49
3.1 CORRECCIÓN DE FASE TEMPORAL .....	49
CAPITULO 4.....	60
4.1 INTRODUCCION .....	60
4.2 ANALISIS EXPERIMENTAL .....	60
4.2.1 PROYECCION DE FRANJAS SENOSIDALES CON CORRIMIENTO Y VARIACIONES DE PASO CONTINUOS.....	60
4.2.2 INTERFEROMETRIA HETERODINA POR DESPLAZAMIENTO DE UNA RED DE DIFRACCIÓN .....	61
4.3 SISTEMA ÓPTICO IMPLEMENTADO.....	66
4.4 RESULTADOS EXPERIMENTALES .....	68
4.4.1 ANALISIS EXPERIMENTAL DE OBJETOS .....	71
5. CONCLUSIONES .....	77
6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	80

**LISTA DE FIGURAS**

Figura 1. Esquema del proceso para obtener la reconstrucción 3D de un objeto.....12

Figura 2. Visualización de un punto en los diferentes sistemas coordenados que maneja un sistema óptico de reconstrucción 3D. ....13

Figura 3. Sistema óptico de proyección de franjas.....16

Figura 4. Sistema de franjas proyectado sobre el plano de referencia: (a) Sin objeto, (b) Con objeto.....17

Figura 5. Sistemas coordenados utilizados en un sistema de proyección de franjas.....18

Figura 6. Franjas senosoidales y su perfil de intensidad.....19

Figura 7. Franjas proyectadas sobre un objeto.....22

Figura 8 a) Fase discontinua obtenida por el método de corrimiento de fase, b) Corte horizontal de la fase discontinua.....23

Figura 9. (a) Valores enteros necesarios para adicionar a la fase discontinua y volverla continua. (b) Fase continua.....25

Figura 10. (a) Valores enteros necesarios para adicionar a la fase discontinua y volverla continua. (b) Fase continua.....26

Figura 11. Sistema de franjas proyectado sobre un objeto discontinuo y que presenta sombras debido al tipo de iluminación.....30

Figura 12 (a) Un tipo de lente de Fresnel, (b) Sistema de franjas proyectado sobre el objeto. El recuadro indica la zona que se desea analizar.....32

Figura 13. (a) Fase discontinua obtenida (b) Fase continua obtenida aplicando “unwrapping” a la fase discontinua. ....32

Figura 14 Diferencia de alturas entre dos técnicas utilizadas: corrimiento de fase y detección de máximos en interferometría con luz blanca.....33

Figura 15. Fase discontinua.....35

Figura 16 Sistema de franjas de bajo contraste. ....36

Figura 17 a) Fase discontinua obtenida del sistema de franjas proyectado sobre la piel humana. b) Fase continua obtenida utilizando el algoritmo de corrección espacial clásico. ....37

Figura 18. (a) Fase discontinua obtenida de un sistema de franjas con alto contenido de speckle, (b) Fase continua. ....38

Figura 19 Distribución de las fuentes de discontinuidad, valores de  $P$  obtenidos de la fase discontinua de: (a) La figura 17(b), (b) La figura 18(b). ....40

## Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas

---

Figura 20. (a) Fase discontinua del plano de referencia, (b) Fase discontinua del objeto, (c) Fase discontinua calculada con la diferencia de intensidades, de objeto y el plano de referencia, (d) Fase continua. ....	44
Figura 21. (a) y (b) Sistemas de franjas de Pasos $P_G$ y $P_F$ respectivamente, proyectados sobre el objeto, (c) y (d) fases $\phi_G(x, y)$ y $\phi_o(x, y)$ , (e) los valores de $n(x, y)$ para cada punto y (f) Fase continua. ....	47
Figura 22 (a) Sistema de franjas de paso pequeño proyectado sobre un objeto, (b) El corte rojo muestra el perfil de la fase continua obtenida utilizando el sistema de franjas de la figura (a), los cortes azules muestran los perfiles de las fase continuas obtenidas utilizando sistemas de franjas de paso diferente. ....	51
Figura 23. Sistemas de franjas proyectados y adquiridos secuencialmente en el tiempo, alterando el paso de las franjas entre cada imagen. ....	52
Figura 24. Sistemas de franjas para diferentes valores de t. (a) t=14, (b) t=13, (c) t=15. ....	54
Figura 25. Diagrama de la diferencia de fase obtenida al utilizar dos sistemas de franjas y un corte horizontal del diagrama de fase. (a) Para valores de t=13 y t=14, (b) valores de t=13 y t=15. ....	55
Figura 26. Fase continua total. ....	56
Figura 27. (a) Simulación de la proyección de un sistema de franjas sobre un plano, (b) Corte transversal de la fase continua total obtenida, (c) Fase continua absoluta total obtenida. ....	56-57
Figura 28. (a) Simulación de la proyección de algunos sistemas de franjas sobre un objeto discontinuo, (b) Fase continua obtenida, (c) Diferencia entre la fase del objeto y la fase del plano de referencia, (d) Fase continua absoluta Total Obtenida. ....	57-58
Figura 29. Diagrama del montaje utilizado. ....	61
Figura 30. Patrón de difracción para una rejilla con función de transmitancia $T(y,t)$ . ....	64
Figura 31. Interferencia de dos ordenes de difracción sobre una pantalla. ....	64
Figura 32. Sistema óptico implementado: P: Polarizador, FE Filtrado Espacial, L Lente, RD Red de Difracción, CD Cubo Divisor, SD Sistema de Desplazamiento. ....	66
Figura 33. Separación de los ordenes de difracción cuando una red se rota un ángulo $\alpha$ . ....	68
Figura 34. (a) Sistema de franjas obtenido a partir de la interferencia de dos frentes de onda (orden +1 y -1), (b) Corte transversal del sistema de franjas. ....	69
Figura 35. (a) Fase continua del objeto, (b) Fase continua sin portadora que presenta ondulaciones debido a la presencia de armónicos. ....	69
Figura 36. (a) Fase continua obtenida utilizando el algoritmo propuesto por Larkin, (b) Fase continua sin portadora. ....	70
Figura 37. Algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie de un objeto discontinuo y su respectiva fase discontinua. ....	71-72

## **Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas**

---

Figura 38. Secuencia de cómo va cambiando la fase continua total durante la suma de las diferencias de fase. . . . .	73
Figura 39. Reconstrucción 3D de un objeto discontinuo. . . . .	73
Figura 40. Algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie de un objeto discontinuo que consta de 3 rectángulos separados y de diferentes alturas. . . . .	74
Figura 41. Reconstrucción 3D obtenida utilizando el algoritmo de corrección de fase temporal. . . . .	74
Figura 42. Algunos sistemas de franjas proyectados sobre un objeto que consta de dos esferas que están ubicadas a diferentes alturas. . . . .	75
Figura 43. Reconstrucción 3D. . . . .	75
Figura 44. (a) Objeto a analizar, (b) Algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie del cuerpo, (c) Fase continua obtenida. . . . .	76

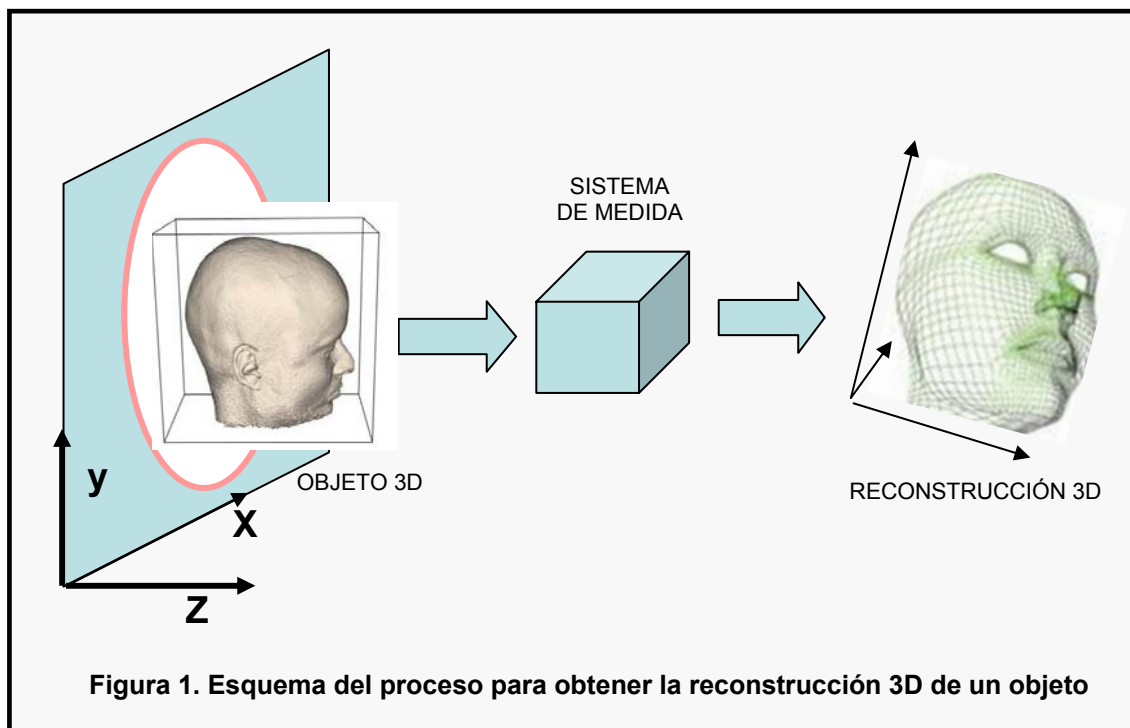
## **INTRODUCCION**

El objetivo principal de este trabajo era el de buscar una alternativa que permita obtener el diagrama de fase para un sistema de franjas proyectado sobre un objeto que presenta discontinuidades, regiones aisladas se analizan principalmente. En estas condiciones, el cálculo de la fase continua usando el tradicional método de corrección de fase espacial se complica notoriamente, como se ilustró en los primeros capítulos. Como alternativa se recurre al método de corrección de fase temporal, que corrige sin recurrir a la información de píxeles vecinos. De esta manera, objetos complicados pueden ser analizados sin inconvenientes y el algoritmo utiliza una suma secuencial de diferencias de fase.

## CAPITULO 1

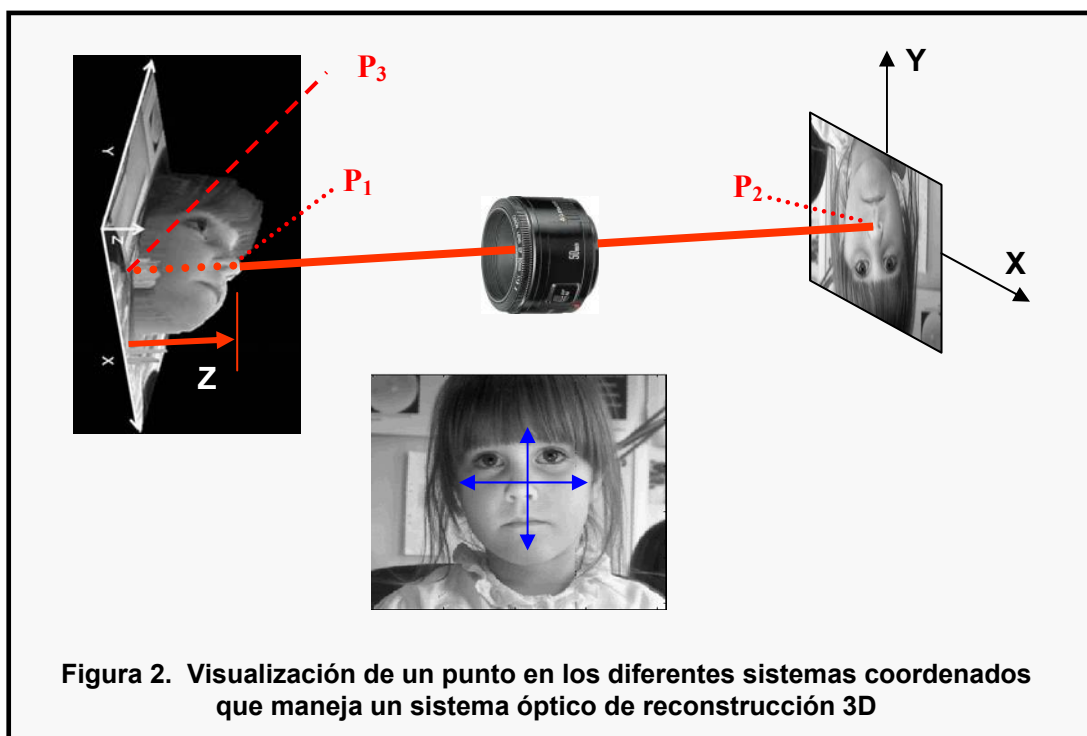
### 1.1 INTRODUCCION

En muchos procesos industriales y médicos es necesario extraer información topográfica del objeto, tales como área, volumen, contornos, distancia entre detalles, etc. Incluso en muchas áreas del campo industrial, se necesita producir en serie objetos 3D a partir de un objeto modelo o patrón definido previamente. En estos casos es importante construir un sistema de medida que permita muestrear las coordenadas tridimensionales de varios puntos de la superficie del cuerpo de interés. La imagen final obtenida, comúnmente es llamada Reconstrucción Tridimensional (R3D) del objeto y el sistema de medida utilizado es llamado Sistema de Reconstrucción Tridimensional. La figura 1 ilustra lo descrito anteriormente.



Generalmente, el objeto se ubica en un sistema coordenado fijo y el sistema de R3D posee un sistema coordenado relativo, con respecto al fijo. Con el fin de obtener la información de las coordenadas de un punto en el espacio, el sistema

de medida utiliza un sistema formador de imágenes o un sistema de adquisición de datos, dependiendo del método utilizado. Un sistema formador de imágenes utiliza habitualmente, una combinación de lentes que permiten proyectar sobre el plano imagen, los puntos del espacio objeto que se encuentren en la profundidad de campo del sistema óptico. Según la figura 2 y utilizando las leyes de la óptica geométrica, un punto  $P_1$  sobre el objeto, correspondiente al punto  $P_2$  sobre la imagen, se confunde con el punto  $P_3$  sobre el plano objeto.



**Figura 2. Visualización de un punto en los diferentes sistemas coordenados que maneja un sistema óptico de reconstrucción 3D**

De esta manera conociendo el factor de ampliación sobre la imagen, es posible extraer medidas transversales de dicha imagen. Sin embargo, debido al proceso de proyección utilizado, la coordenada medida en dirección del eje óptico se pierde, no pudiéndose obtener información completa de las coordenadas del punto de la superficie. Debido a este inconveniente es importante buscar una alternativa que permita codificar esta coordenada (altura o coordenada  $Z$ ) con el fin de recuperarla posteriormente en el proceso de reconstrucción 3D.

Existen diversas alternativas que permiten codificar la altura de un punto, pero debido a sus características no invasivas, facilidad de automatización, amplio rango de campos de exploración y resoluciones variables, los métodos ópticos de reconstrucción 3D han sido ampliamente utilizados en sistemas de medida topográficos. En los métodos ópticos, la altura del punto es codificada a partir de una variable óptica como: fase del frente de onda, retardo de un pulso luminoso, variación bidimensional del paso y orientación de franjas proyectadas, corrimiento lateral de un spot láser, deformación de una línea proyectada sobre el cuerpo, etc. Así, una variable de naturaleza óptica es alterada en función de la topografía de la superficie del cuerpo. El tratamiento digital para la reconstrucción 3D, permite inicialmente: a) Calcular el valor de la variable óptica utilizada como codificación para todos los puntos de la superficie digitalizados y b) Calcular las alturas correspondientes a partir de la información obtenida anteriormente, utilizando los parámetros del sistema óptico de codificación.

Un método óptico de Reconstrucción 3D hace referencia a una técnica que a partir de un sistema óptico, codifica la topografía del cuerpo en función de los parámetros del sistema. Aunque los métodos ópticos pueden clasificarse de diferentes maneras, se encuentra en la literatura<sup>[1]</sup> que estos métodos ópticos se pueden agrupar en función del sistema de iluminación, como métodos pasivos y activos. En los métodos pasivos no es necesario controlar la fuente de iluminación, pero el tratamiento digital para obtener información topográfica requiere un alto esfuerzo computacional. En los métodos activos el uso de un patrón de iluminación específico simplifica el cálculo de la topografía del cuerpo. La tabla 1 muestra una clasificación de los métodos ópticos comúnmente usados<sup>[1]</sup>

**Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas**

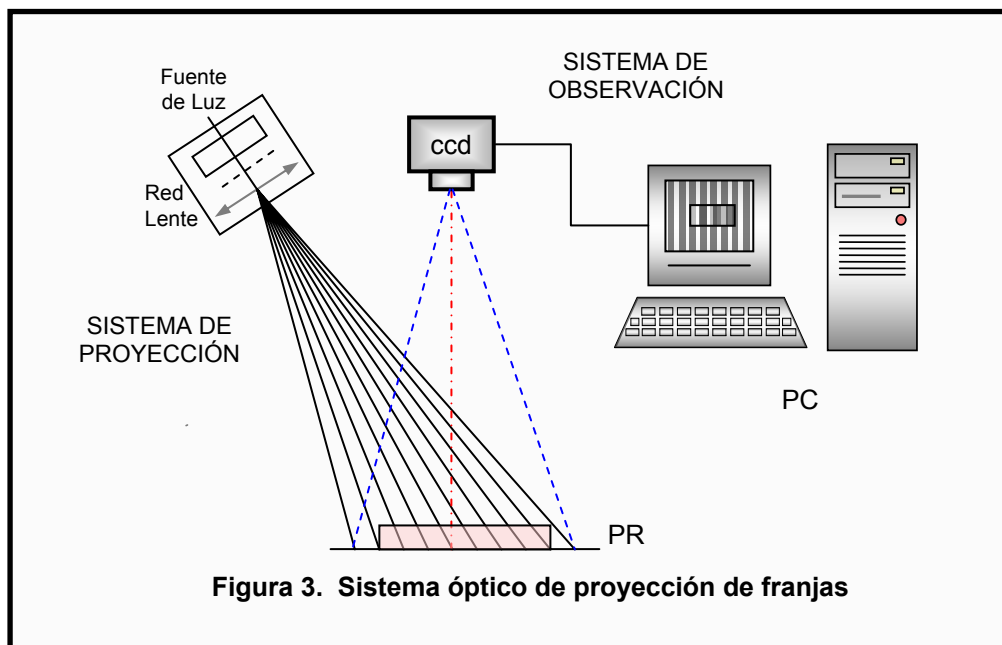
Clasificación		Método	Principio de Codificación	
A C T I V O S	Luz Estructurada	Láser	El patrón puede ser un punto, una línea, múltiples líneas o un patrón definido.	Se basa en triangulación, la altura para cada punto se codifica en el corrimiento del patrón con respecto a una referencia debido a la topografía del cuerpo.
		Binaria	Se utilizan patrones binarios bidimensionales que codifican la información en uno ó en dos ejes	
		Nivel de gris	Usa un patrón de iluminación en niveles de gris.	
		Cromática	El patrón de iluminación está asociado a una matriz de color	
	Métodos a medida de fase	Proyección de franjas	La altura del objeto se codifica en la deformación local del paso y orientación de las franjas proyectadas que están contenidas en un término de fase, que se debe recuperar.	
		Moiré	La altura del cuerpo se codifica en curvas de Nivel, obtenidas por efecto Moiré debido a la proyección de sistemas de franjas de paso similar.	
		Interferometría	Consiste en variar el camino óptico y obtener información de fase de las franjas de interferencia. Puede ser a incidencia normal, oblicua o Interferometría a luz blanca	
	Tiempo de Vuelo	Para calcular la distancia absoluta de un punto del objeto se envía un pulso de luz (usualmente láser), y se mide el retardo de tiempo del haz reflejado,		
	Microscopía Confocal	El cuerpo se ubica en un sistema de desplazamiento axial y la altura se determina identificando la posición donde se encuentra el máximo de intensidad del sistema Confocal.		
P A S I V O S	Visión estéreo	A partir de dos imágenes tomadas en diferentes ángulos, se busca la correspondencia entre características y se halla la profundidad, esto es semejante al modelo binocular humano.		
	Shape from Shading	La información 3D se encuentra a través del manejo de sombras		

**Tabla 1. Clasificación de los métodos ópticos**

De igual manera, la elección de un método óptico de Reconstrucción 3D depende de las condiciones metrológicas exigidas en la reconstrucción. Así, un sistema de proyección estructurado es adecuado para campos de observación grandes en el rango de milímetros a metros, con resolución del orden de decenas de milímetros. Para resolución del orden de varias decenas de nanómetro a micras, las técnicas interferométricas son adecuadas; aunque el campo de observación es limitado a algunas décimas de milímetros a milímetros.

## **1.2 RECONSTRUCCIÓN 3D POR PROYECCIÓN DE FRANJAS**

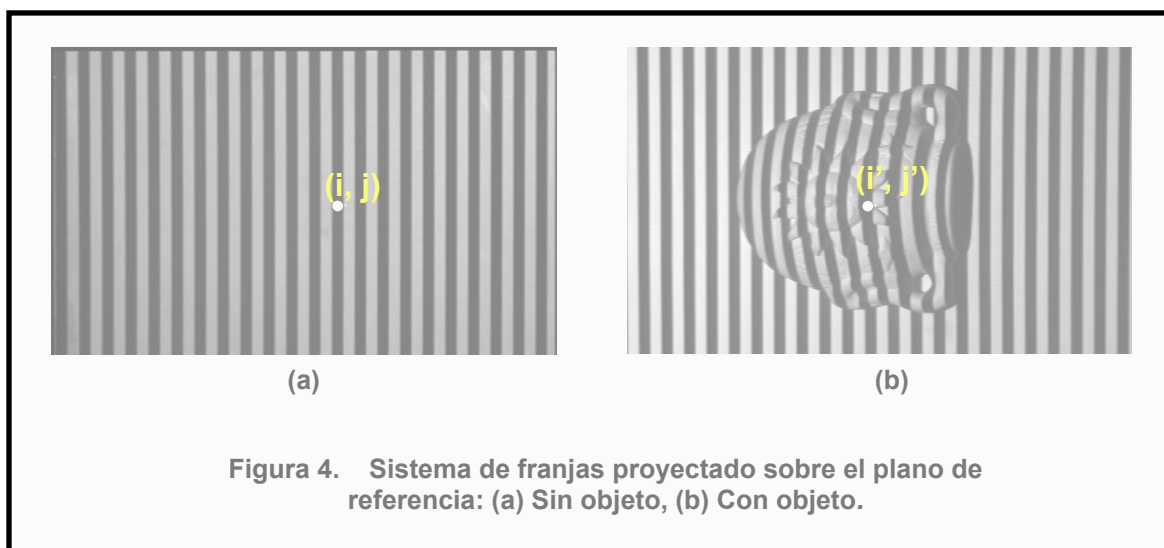
La técnica de proyección de franjas consiste en proyectar un sistema de franjas sobre la superficie de un objeto y observar la deformación de dichas franjas. Esta deformación codifica las variaciones de altura que posee el objeto y que es utilizada para reconstruirlo. La figura 3 muestra el sistema óptico utilizado para el método de proyección de franjas.



**Figura 3. Sistema óptico de proyección de franjas**

## Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas

El Sistema óptico consta principalmente de dos partes: un sistema de proyección, con el cual se proyecta un patrón de franjas sobre la superficie de un objeto, y un sistema de observación, con el cual se registra el patrón de franjas proyectado sobre el plano de referencia antes y después de colocar el objeto. Si la superficie del objeto es plana, se obtiene una imagen con franjas paralelas y de paso constante, si la superficie no es plana, las franjas se deformaran debido a la topografía del cuerpo.



La figura 4 muestra un sistema de franjas antes y después de colocar el objeto. El corrimiento local de las franjas, causado por la topografía del cuerpo es más evidente en la parte superior del objeto donde hay cambios fuertes en la altura.

### 1.3 CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN

La figura 5 muestra los ejes coordenados utilizados en un sistema de proyección de franjas.

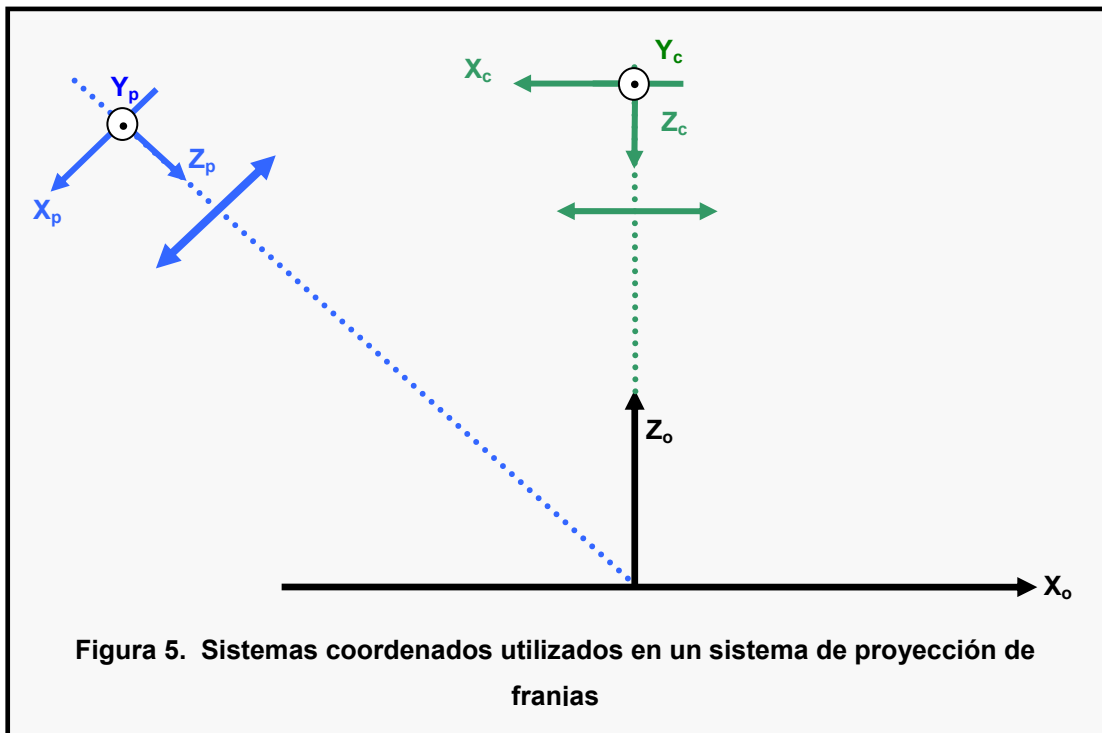


Figura 5. Sistemas coordenados utilizados en un sistema de proyección de franjas

$(x_p, y_p, z_p)$  define el sistema coordinado sobre el plano objeto del sistema de proyección. En este plano se ubica la transparencia utilizada para proyectar las franjas.

Asumiendo franjas senosoidales que se proyectan paralelas al eje  $Y_p$ , es decir perpendicular al plano del papel, la función de transmitancia se puede definir como<sup>[18]</sup>:

$$T(x_p, y_p) = \frac{1}{2} * \left( 1 + \cos \left( \frac{2 \pi x_p}{P_p} \right) \right) \quad (1)$$

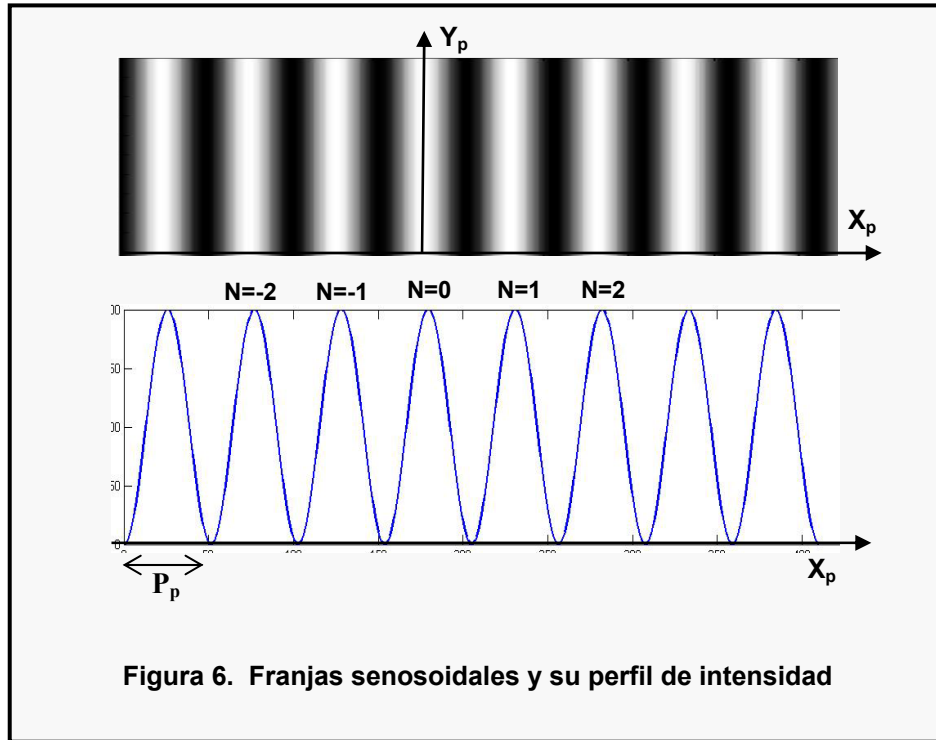


Figura 6. Franjas senosoidales y su perfil de intensidad

Donde  $P_p$  es el paso de proyección, como se muestra en la figura 6. El término  $\frac{2 \pi x_p}{P_p}$  corresponde a la fase espacial de la función coseno. De esta manera la

fase corresponde a un plano inclinado, definiéndose la pendiente como  $\frac{2 \pi}{P_p}$ .

La franja brillante ubicada en  $x=0$  posee una fase de 0 radianes, la franja ubicada en  $\pm NP_p$  posee una fase  $\pm N2\pi$ . Así, cada franja posee una fase absoluta y es proyectada espacialmente sobre el plano de referencia. Usando la terminología de interferometría,  $N$  puede ser definido como el orden de franja, para definir el carácter absoluto de la fase.

Sobre el plano de referencia se define el sistema coordenado  $(x_0, y_0, z_0)$  que corresponde al plano objeto del sistema de formación de imágenes del sistema de adquisición. En el plano imagen, ubicado sobre la cámara CCD se define el

sistema coordinado  $(x_c, y_c, z_c)$ . Debido al carácter no-telecéntrico de los sistemas formadores de imágenes, al ángulo entre los ejes de proyección y observación y la influencia de las aberraciones geométricas, la distribución en intensidad del sistema de franjas adquirido por la cámara CCD tiene la forma:

$$I(x_0, y_0) = I_R(x_0, y_0) + A_R(x_0, y_0) * \text{Cos}(2\pi f_0 x_0 + \phi_0) \quad (2)$$

$I_R$  y  $A_R$  corresponden al fondo continuo y al contraste de las franjas, respectivamente. Estas funciones bidimensionales dependen de la distribución de la intensidad de la fuente y la reflectividad del plano de referencia;  $f_0$  es la frecuencia espacial media de las franjas y  $\phi_0$  es la fase inicial que define la deformación inicial de las franjas. Al ubicar sobre el plano de referencia el objeto a medir, se altera la ecuación en:

$$I(x_0, y_0) = I_0(x_0, y_0) + A(x_0, y_0) * \text{Cos}(2\pi f_0 x_0 + \phi_0 + \Delta\phi) \quad (3)$$

Donde  $\Delta\phi$  es la fase introducida únicamente por la topografía del objeto. La ecuación (3) puede ser escrita como:

$$I(x_0, y_0) = I_0(x_0, y_0) + A(x_0, y_0) * \text{Cos}(\phi) \quad (4)$$

Donde  $\phi$  corresponde a la fase del sistema de franjas, que indica como cambia el paso de las franjas. Es decir para la n-ésima franja ubicada sobre el plano de referencia en el píxel  $(i, j)$ , (ver figura 4), se introduce un desplazamiento al píxel  $(i', j')$  debido a la altura del cuerpo. Así el corrimiento que introduce el cuerpo, altera la función fase  $\phi$  de la ecuación (4). Entonces, matemáticamente el proceso de codificación consiste en deformar la función  $\phi$  del sistema de franjas y el proceso de reconstrucción 3D consiste inicialmente, en recuperar la función  $\phi$ .

#### 1.4 EXTRACCIÓN DE LA FASE DEL SISTEMA DE FRANJAS

Una parte fundamental en el proceso de reconstrucción tridimensional de objetos es el cálculo de la fase, para lo cual se han desarrollado diversos métodos como el de Transformada de Fourier <sup>[2]</sup> y Corrimiento de Fase (Phase Shifting) <sup>[3]</sup>. En la técnica de Corrimiento de Fase, el concepto básico es determinar la fase del objeto a partir de  $n$  imágenes en intensidad luminosa digitalizadas, al cambiar regularmente la fase cierta cantidad conocida en un intervalo de  $2\pi$ .

De esta manera, la ecuación (4) indica que existen tres funciones incógnitas  $I_o(x_0, y_0)$  que representa la intensidad luminosa del fondo continuo,  $A(x_0, y_0)$  es el factor de contraste y  $\phi(x_0, y_0)$  que es la fase del sistema de franjas que representa las variaciones del paso y orientación de las mismas. Para calcular  $\phi$  en cada punto de la imagen del sistema de franjas se requieren al menos tres datos en intensidad linealmente independientes. Estos datos se obtienen experimentalmente desplazando las franjas con respecto al cuerpo, introduciendo una fase adicional  $\varphi_i$  en un rango de  $0$  y  $2\pi$ . En este rango se adquieren  $n$  sistemas de franjas desplazadas una fase  $\varphi_i$  definida por:

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n}(i-1) \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (5)$$

Así la ecuación (4) puede ser escrita:

$$I_i(x, y) = I_o(x, y) + A(x, y) \cos[\phi + \varphi_i] \quad (6)$$

Utilizando las propiedades ortogonales de función senosoidales se encuentra:

$$\sum_{i=1}^n I_i * \cos(\varphi_i) = \frac{n * A(x, y)}{2} * \cos[\phi] \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i * \text{sen}(\varphi_i) = \frac{n * A(x, y)}{2} * \text{sen}[\phi] \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N I_i = n * I_0 \quad (9)$$

A partir de esas ecuaciones se calcula  $\phi$  y  $A(x, y)$  usando:

$$\text{tg}(\phi) = \frac{\sum_{i=1}^N I_i * \text{sen}(\varphi_i)}{\sum_{i=1}^N I_i * \text{cos}(\varphi_i)} \quad (10)$$

$$A(x, y) = \frac{2}{n} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^N I_i * \text{sen}(\varphi_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N I_i * \text{cos}(\varphi_i) \right)^2} \quad (11)$$

El algoritmo más utilizado para el desarrollo de este método es el realizado con  $n$  igual a 4 imágenes, desplazando las franjas  $\pi/2$  y digitalizándose 4 imágenes, como se muestra en la figura 7.

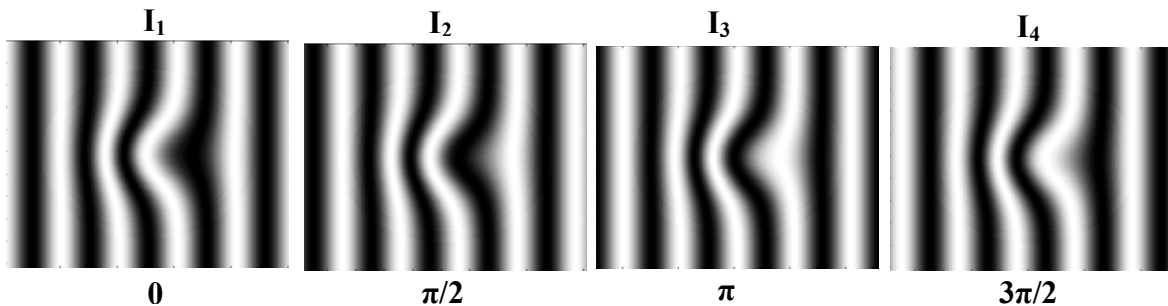


Figura 7. Franjas proyectadas sobre un objeto

En este caso las ecuaciones para el corrimiento de fase serán:

$$\text{tg}(\phi) = \frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3} \quad (12)$$

$$2A(x, y) = \sqrt{(I_2 - I_4)^2 + (I_1 - I_3)^2} \quad (13)$$

Donde:  $I_1$ , equivale a un corrimiento de fase  $\varphi_1 = 0$ ;  $I_2$ , corresponde a un corrimiento de fase  $\varphi_2 = \pi/2$ ;  $I_3$  a  $\varphi_3 = \pi$ ;  $I_4$  a  $\varphi_4 = 3\pi/2$ ,. De esta manera conociendo  $\varphi_i$  y los valores de intensidad  $I_i$  se calcula la función  $\phi$ . La ventaja de esta técnica es que permite obtener  $\phi$  para cada punto independiente de la influencia de los puntos vecinos. Regiones sin información de franjas (sombras), no afectan regiones útiles, a diferencia del método de la Transformada de Fourier<sup>[4]</sup>.

Debido a la utilización de la función arcotangente en el cálculo de la fase, la fase obtenida presenta puntos de discontinuidad acotadas entre  $-\pi$  a  $\pi$ . La figura 8 muestra: a) Fase discontinua obtenida por el método de corrimiento de fase, b) Corte horizontal de la fase discontinua, indicada por la línea azul.

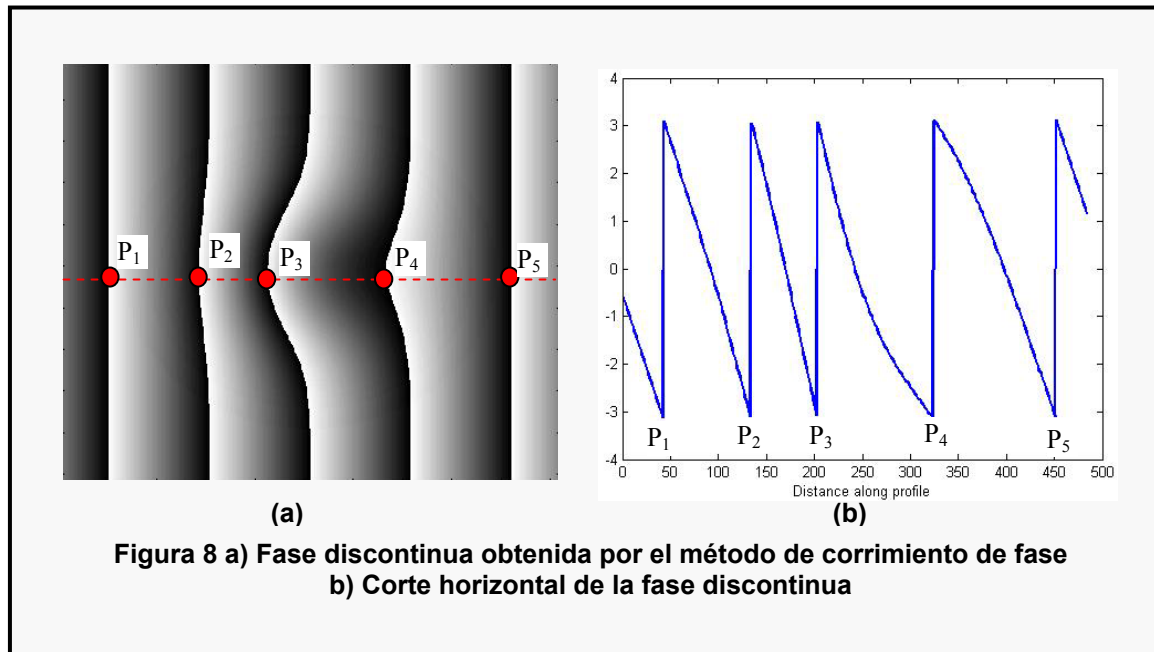
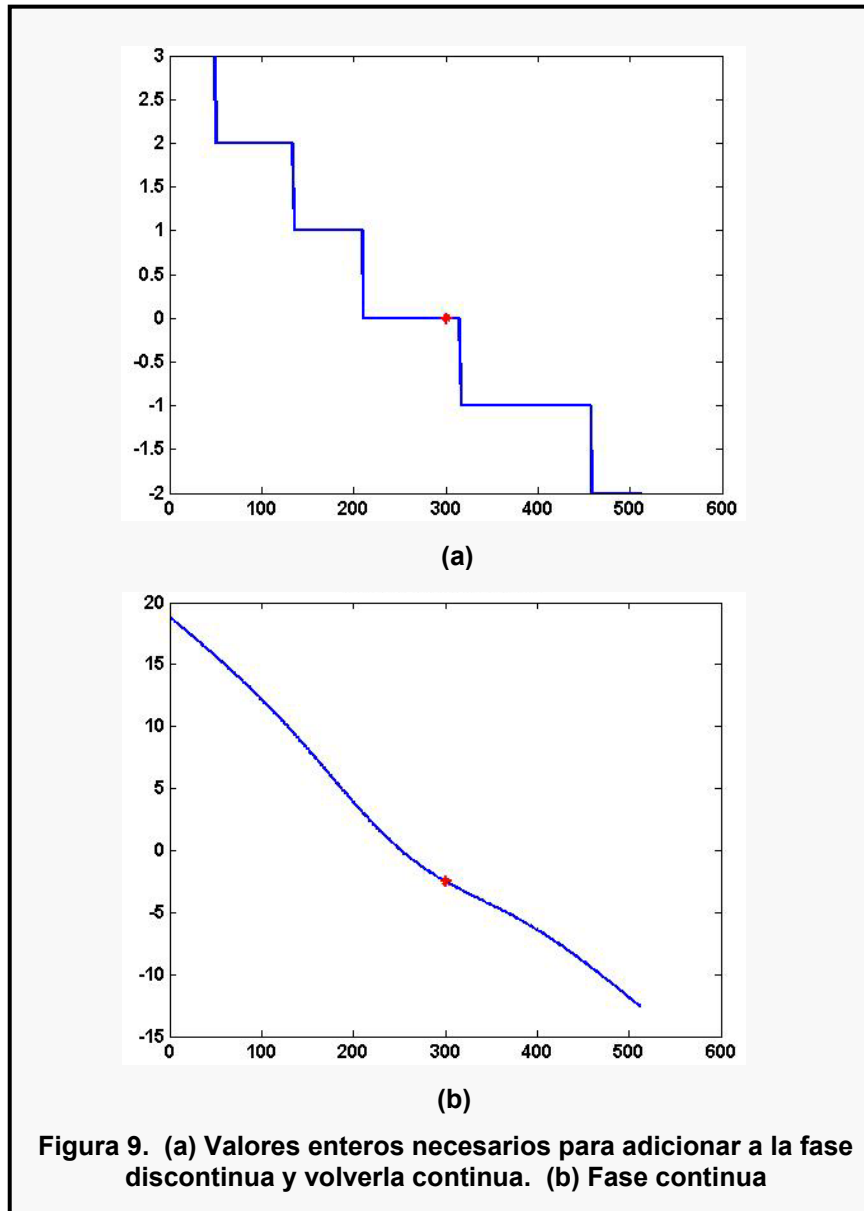


Figura 8 a) Fase discontinua obtenida por el método de corrimiento de fase  
b) Corte horizontal de la fase discontinua

Finalmente, para obtener la forma 3D del objeto, es necesario realizar la conversión de fase discontinua a fase continua, comúnmente llamada “Unwrapping” [5]. Debido a la variación en la fase de  $2\pi$ , introducida en los puntos de discontinuidad, se puede establecer un procedimiento de corrección 2D para detectar estos puntos y adicionar o restar valores apropiados de  $2\pi$  necesarios para corregir la fase. Para el caso de la fase discontinua de la figura 8(a), la figura 9a muestra los valores enteros necesarios para adicionar a la fase discontinua y convertirla en continua, figura 9b. Los puntos de discontinuidad, corresponden a las posiciones donde la diferencia de fase con el vecino es cercana a  $2\pi$ . Para el caso del corte indicado en la figura 8b, los puntos de discontinuidad son  $P_1$  a  $P_5$ , mostrados en esa figura. Entre dos puntos de discontinuidad vecinos el valor entero de  $2\pi$  es el mismo. Indudablemente, la detección de los puntos de discontinuidad comparando vecinos, es evidente para un diagrama de fase discontinuo como el que se muestra en la figura 8a. En situaciones experimentales, la influencia de ruido en la detección de los sistemas de franjas, zonas oscuras sin franjas o de bajo contraste y la presencia de discontinuidades en el objeto 3D, principalmente, dificultan el procedimiento clásico de corrección de fase. Continuamente, aparecen en revistas especializadas nuevos algoritmos de corrección de fase discontinua que son inmunes a uno o varios tipos específicos de influencias en la corrección [6]

El principal inconveniente del método general expresado anteriormente, para el caso de sistemas de franjas ideales, es la pérdida del carácter absoluto de la fase obtenida. A partir del sistema de franjas adquirido por la cámara CCD, es imposible definir donde se encuentra la franja de orden  $N$ , e inclusive en el proceso de corrección de fase, tradicionalmente se asignan valores múltiplos de  $2\pi$  para hacer continua la fase, pero no se puede detectar cual es el valor entero de  $N$  que se debe agregar para obtener la fase absoluta. Así, realizando el procedimiento anterior, la fase obtenida corresponde en forma, a la fase real del sistema de franjas pero con un término constante incierto. Con el fin de ilustrar el

anterior inconveniente, la figura 10(b) muestra algunas fases continuas obtenidas de la fase discontinua mostrada en la figura 8b, utilizando diferentes valores enteros de  $2\pi$ .



La figura 10(a) muestra varios valores enteros utilizados para obtener la fase continua de la figura 10(b). Así la secuencia (a) corresponde a valores enteros asignando cero a los puntos comprendidos entre  $P_3$  y  $P_4$ , la secuencia (b) corresponde a valores enteros asignando cero a los puntos entre  $P_1$  y  $P_2$  y la secuencia (c) a los valores enteros asignando cero a los puntos entre  $P_4$  a  $P_5$ . La diferencia entre las fases continuas obtenidas corresponde a un término constante en fase, pero la forma de la curva se conserva.

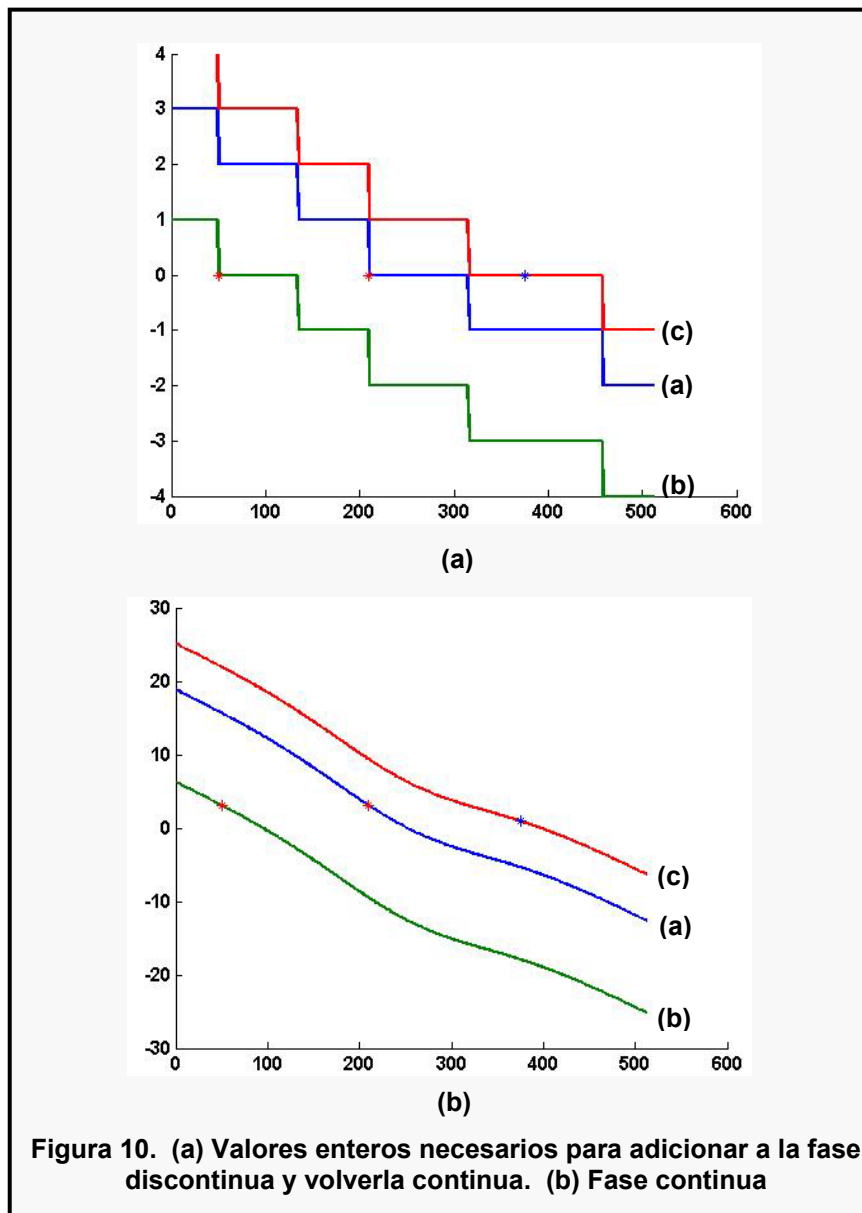


Figura 10. (a) Valores enteros necesarios para adicionar a la fase discontinua y volverla continua. (b) Fase continua

Una vez obtenida la fase continua es necesario calcular  $\Delta\phi$ , que corresponde a las variaciones en la fase causadas por la superficie del cuerpo únicamente. Este diagrama de fase continua se obtiene al realizar el anterior procedimiento con una secuencia de franjas obtenidas del plano de referencia y una secuencia de franjas obtenida sobre el objeto, la diferencia entre las fases continuas permite obtener  $\Delta\phi$ . Posteriormente es necesario convertir el diagrama de fase calculado en alturas, para obtener la reconstrucción 3D final. Tradicionalmente se utiliza la ecuación básica de codificación de la altura en fase, que depende de los parámetros del montaje, como paso de proyección, ángulo entre los ejes ópticos de proyección y observación, factor de ampliación del sistema de observación, principalmente. Estos datos se relacionan entre si a partir de las ecuaciones básicas de formación de imágenes de la óptica geométrica, obteniéndose una ecuación no lineal que asocia la fase introducida por la topografía del cuerpo y su distribución de alturas <sup>[7]</sup>. El error que se introduce en la medida de la altura final, depende principalmente del error al medir los parámetros del montaje y del modelo matemático utilizado. Si la exigencia en la precisión del sistema de medida no es muy fuerte, tradicionalmente se simplifica la ecuación y se utiliza su aproximación lineal, obteniéndose una ecuación de la forma <sup>[8]</sup>:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi \tan \theta}{P} Z \quad (14)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre los ejes ópticos, P es el paso promedio medido sobre el plano de referencia y z es la altura del punto. Esta ecuación es llamada: Aproximación Telecéntrica, debido al modelo telecéntrico utilizado. Al utilizar esta ecuación, la fase relativa obtenida anteriormente no afecta la forma del cuerpo, obteniéndose simplemente un factor constante de altura que para efectos prácticos se suprime, la forma no se altera. Debido a esta aproximación, la secuencia de R3D mostrada anteriormente, tiene validez en el rango de error introducido al aproximar la ecuación fundamental.

## CAPITULO 2.

### 2.1 CALCULO DE LA FASE UTILIZANDO SISTEMAS DE FRANJAS

En el capítulo anterior se discutió en detalle, como la teoría de proyección de franjas puede ser utilizada para recuperar la información topográfica de un objeto ubicado en un sistema coordenado. De igual manera, se mostraron los procedimientos más importantes que se deben realizar para recuperar dicha información. La idea básica del método de proyección de franjas, consiste en la codificación espacial de la altura de puntos del cuerpo a partir del diagrama bidimensional de fase absoluta proyectada sobre la superficie del cuerpo. La fase absoluta es obtenida físicamente, usando un patrón de franjas senosoidales. El término fase absoluta hace referencia a que existe en el sistema coordenado de proyección un punto con fase cero (franja de orden cero) y cada franja posee un orden de franja específico. La figura 6 del capítulo 1 ilustra lo anterior.

En el sistema de proyección generalmente se utiliza un proyector (video beam), se define una distribución lineal de fase de la forma  $\phi = kx$ , siendo  $x=0$  el píxel central de proyección. Al utilizar la función coseno y al definir el máximo contraste en función del brillo y contraste del dispositivo de proyección, se obtiene el sistema de franjas que se proyecta sobre el cuerpo. La pendiente  $k$  define el paso en píxeles del sistema de franjas, medido en el sistema coordenado de proyección. El tratamiento digital realizado sobre la imagen del sistema de franjas obtenido de la superficie del cuerpo, usando una cámara CCD, permite recuperar la distribución de fase usada en la proyección. De esta manera, un procedimiento de triangulación, donde intervienen los parámetros del montaje, permite recuperar la altura a partir de la variación espacial de la fase debido a la topografía del cuerpo. En este capítulo, se mostrarán algunos inconvenientes que dificultan el proceso de recuperación de la fase continua absoluta, a partir del sistema de

franjas obtenido de la superficie del cuerpo. Estos inconvenientes pueden dividirse en dos partes: por un lado, los inconvenientes que surgen del proceso implícito de proyección, como la presencia de sombras, la dificultad de identificar la franja de fase cero, principalmente. Por otro lado, los inconvenientes que introduce el sistema de detección, como la influencia del ruido, bajo contraste de las franjas, discontinuidades del objeto, etc.

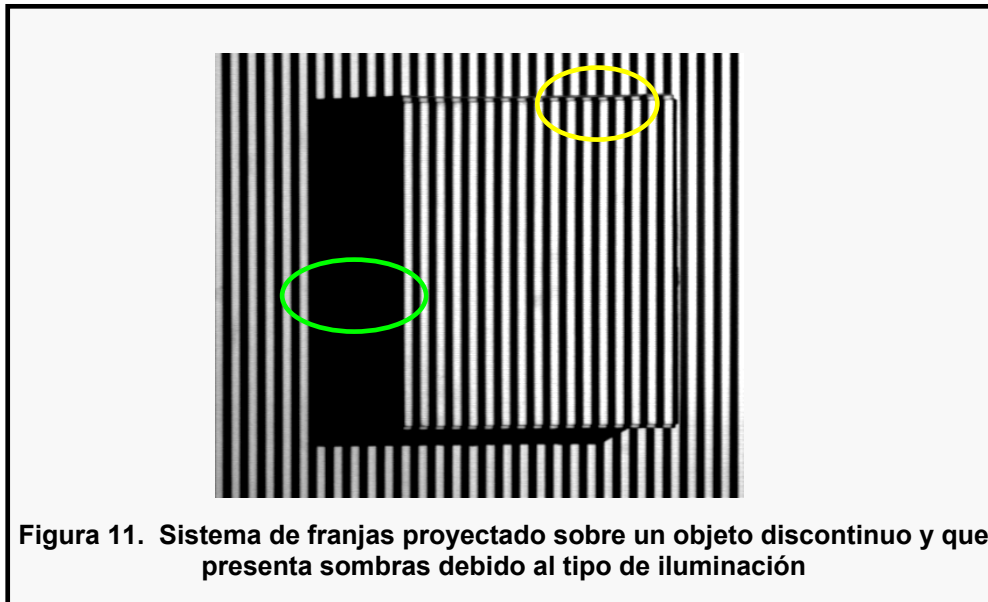
## **2.2 OBJETOS DISCONTINUOS**

Al pensar en aplicar alguna técnica de reconstrucción 3D se debe tener en cuenta las características reales de los objetos a estudiar, tales como: grado de absorción luminosa y tamaño. Además, existen objetos que tienen variaciones abruptas de altura (de casi  $90^\circ$ ) y variaciones fuertes de la pendiente de la superficie, estas características representan un problema en el proceso de reconstrucción para algunas técnicas ópticas (ver tabla 1). Desde este punto de vista, este tipo de objetos pueden llamarse objetos complicados o discontinuos.

En la técnica de proyección de franjas el objetivo principal es extraer la fase para obtener la topografía del objeto. Para esto se utilizan métodos como el de transformada de Fourier y corrimiento de fase del patrón de franjas, como se mencionó en el capítulo anterior. Estas técnicas proporcionan mapas de fase discontinuos (ver figura 8), por lo que se hace necesario utilizar algoritmos de corrección de fase, comúnmente llamados en inglés *unwrapping algorithms*. Estos algoritmos funcionan comparando la fase de píxeles vecinos y adicionando o sustrayendo múltiplos de  $2\pi$  para encontrar la fase continua. Este proceso es llamado corrección de fase espacial y causa problemas cuando la técnica es aplicada a objetos discontinuos que introducen variaciones de fase mayores a  $2\pi$ . En este tipo de objetos la fase introducida por la discontinuidad se reduce a un valor en el intervalo de  $-\pi$  a  $\pi$ , perdiéndose el valor real de la fase. Es decir,

utilizando el algoritmo clásico, no es posible determinar cuanto fue el corrimiento de las franjas debido a la topografía del cuerpo.

La figura 11 muestra la imagen de un sistema de franjas proyectado sobre un objeto discontinuo. La marca amarilla señala una de las zonas en las que se obtiene una fase relativa acotada entre  $-\pi$  a  $\pi$  perdiéndose el número de veces  $2\pi$  que introduce la discontinuidad y por consiguiente no se puede establecer el valor real de la altura.



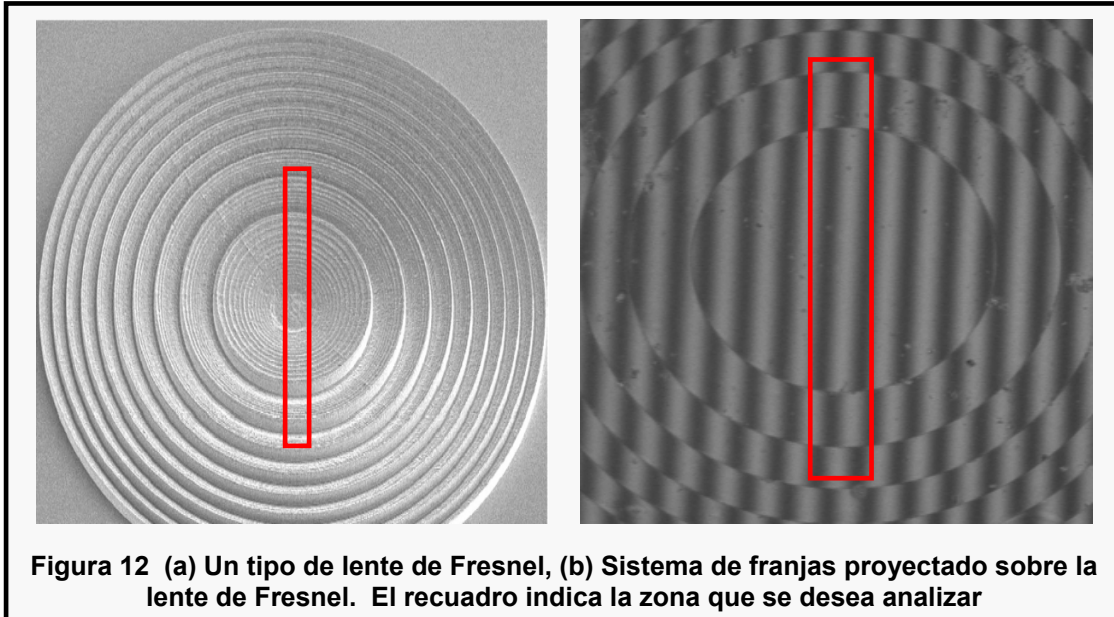
Además, debido al proceso de comparación entre píxeles vecinos, regiones donde no hay franjas afectan las regiones útiles. Es decir, un punto de la fase se ve afectado por la información de los puntos vecinos. Este problema se presenta típicamente en objetos discontinuos, como se observa en la marca verde de la figura 11, en donde no hay franjas debido a la sombra producida por la topografía del cuerpo como consecuencia del tipo de iluminación. De igual manera, objetos continuos con variaciones abruptas en su superficie, pueden generar inconvenientes en el procedimiento de reconstrucción. Los principales inconvenientes encontrados experimentalmente son debido a:

- Bajo contraste de las franjas debido a la no apropiada reflectividad de la superficie o a la retrodifusión de la luz del interior del objeto <sup>[9]</sup>.
- Fuertes pendientes en el objeto generan franjas de frecuencia superior a la frecuencia de muestreo óptima <sup>[10]</sup>.
- Influencia del ruido electrónico y óptico (speckle) en el cálculo de la fase.
- Influencia de sistemas de franjas parásitas <sup>[11]</sup>.

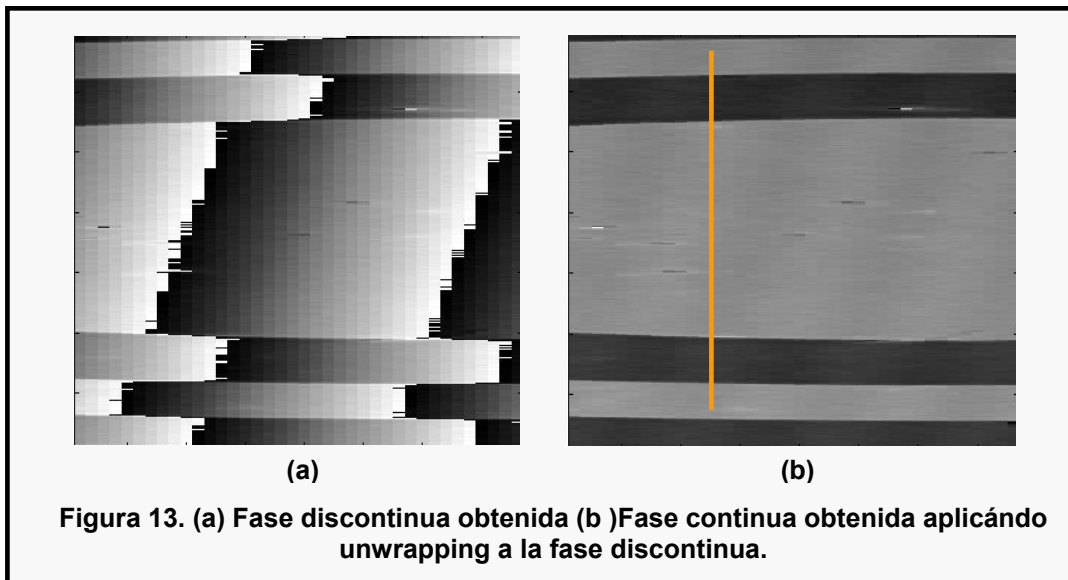
Con el fin de plantear una solución a los inconvenientes mostrados anteriormente, es importante analizarlos en detalle para buscar una solución en el proceso de reconstrucción 3D.

### **2.3 INFLUENCIA DE DISCONTINUIDADES**

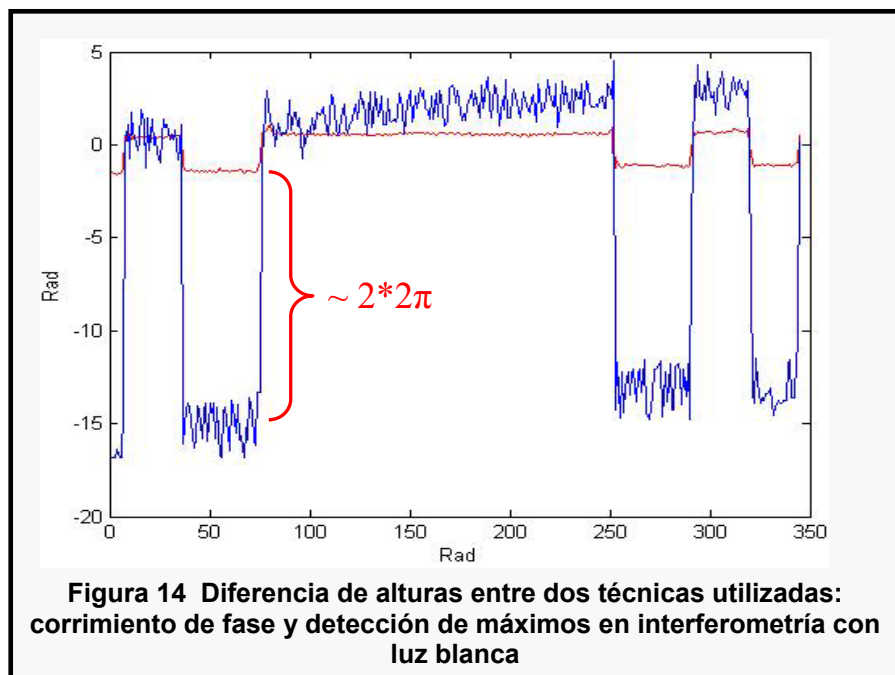
Experimentalmente, se desea caracterizar a partir de la información topográfica, un objeto por naturaleza discontinuo. El objeto analizado es una lente difractiva de Fresnel en fase. Las variaciones en el espesor de la lente son discretas a una discontinuidad. La siguiente figura muestra: (a) El objeto a analizar, un tipo de lente de Fresnel, (b) Sistema de franjas proyectado sobre el objeto. El recuadro rojo muestra la zona de la cual se desea obtener información topográfica.



Utilizando el algoritmo de corrimiento de fase a 4 imágenes, se obtuvo la fase discontinua, mostrada en la figura 13(a) y aplicando el procedimiento espacial de corrección 2D, mostrado en detalle en el capítulo 1, se logra obtener la fase continua, mostrada en la figura 13(b).



La figura 14 muestra en trazo azul, el corte indicado en la figura 13(b) al diagrama de fase obtenido del proceso de corrección 2D. Debido a la naturaleza discontinua del objeto, la variación en fase no es exacta. Usando el método de reconstrucción 3D por interferometría en luz blanca, a partir de la detección de máximos sucesivos, se puede obtener información de la profundidad. Esta técnica no presenta inconvenientes con la discontinuidad, puesto que no utiliza la fase absoluta para codificar la distribución de alturas del cuerpo. La línea roja de la figura 14 muestra la distribución en fase de un corte en la reconstrucción 3D, obtenido a partir de la interferometría en luz blanca. Se evidencia, que la técnica de corrimiento de fase pierde cerca de  $2*2\pi$  radianes debido a la discontinuidad. De igual manera, ésta técnica es menos sensible a la presencia de ruido en las imágenes que la técnica de interferometría en luz blanca.



**Figura 14 Diferencia de alturas entre dos técnicas utilizadas: corrimiento de fase y detección de máximos en interferometría con luz blanca**

Para resolver este tipo de problema, es posible combinar las dos técnicas de reconstrucción 3D, corrimiento de fase e interferometría con luz blanca, para calcular el valor entero de  $2\pi$  necesario para corregir la fase calculada por medio de la técnica de corrimiento de fase <sup>[13]</sup>.

## 2.4 INFLUENCIA DEL RUIDO

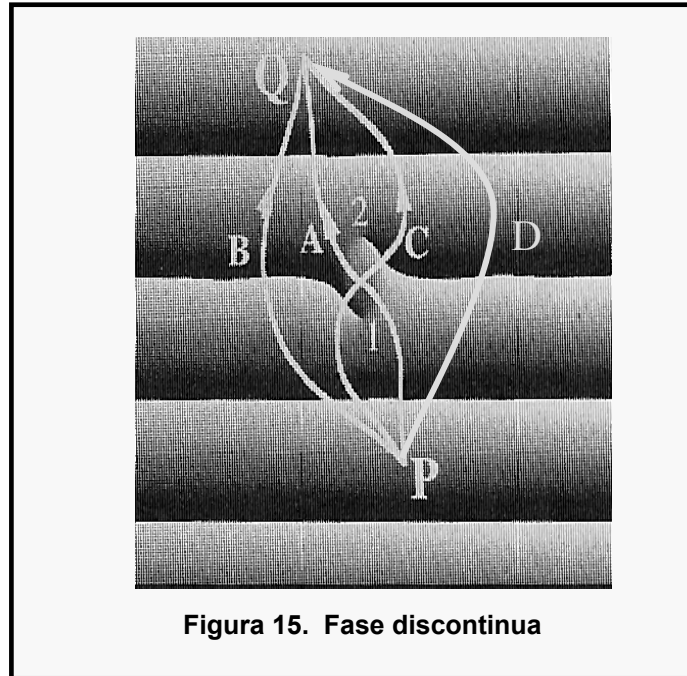
Usualmente, los patrones de franjas son afectados por diferentes tipos de error que producen fases discontinuas ruidosas, como por ejemplo:

- Speckle en los sistemas de franjas. El speckle se produce, por la dispersión de luz coherente en una superficie rugosa.
- Ruido electrónico.
- Bajo contraste de los sistemas de franjas ó áreas de baja visibilidad. Estas zonas aparecen como fluctuaciones en la fase y pueden introducir errores en el proceso de corrección de fase.

El procedimiento de corrección espacial 2D clásico es efectivo si no hay presencia de ruido en las imágenes de los sistemas de franjas adquiridos para el cálculo de la fase. Comparando la diferencia de fase entre píxeles vecinos, se puede detectar la presencia de saltos en la fase, introducidos por la función arcotangente. Sin embargo, en situaciones experimentales las variaciones en intensidad luminosa debido al ruido, generan variaciones en la fase que producen transiciones inesperadas de fase cercanas a  $2\pi$  y que no corresponden a saltos de fase debido a la función arcotangente. Cuando una discontinuidad inesperada en la fase es encontrada a lo largo del camino de corrección, el error se propaga a todos los demás puntos. De esta manera, el salto de fase inesperado, puede dañar una región en la distribución de fase bidimensional válida.

Para visualizar mejor ésta problemática, se utilizará el mapa de fase discontinuo mostrado en la figura 15. En esta figura, las zonas negras representan  $-\pi$  y las zonas blancas  $+\pi$ . A partir de la fase del píxel P, la fase para cualquier otro píxel (por ejemplo Q) puede corregirse, contando el número de discontinuidades  $2\pi$ , a

lo largo de cualquier camino que una los píxeles P y Q, sea por el camino A, B o C según la figura 15.



Asumiendo que  $\phi(i)$  es la fase discontinua en el píxel  $i$  del camino elegido, ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ , donde  $N$  es el número de píxeles entre P y Q), el número total de discontinuidades a lo largo del camino se calcula como:

$$v = \sum_{i=1}^N d(i) \quad (15)$$

Donde  $d(i)$  es un número entero para el píxel  $i$  calculado entre dos píxeles adyacentes utilizando la siguiente ecuación:

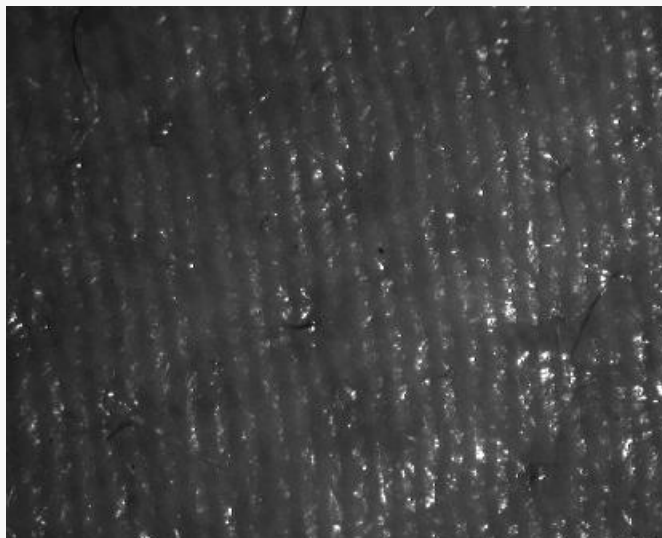
$$d(i) = \left[ \frac{\phi(i) - \phi(i-1)}{2\pi} \right] \quad (16)$$

Donde  $[ \ ]$  significa el entero más cercano. De esta manera,  $2\pi v$  es sustraído de la fase del píxel Q para obtener la fase continua con respecto a P. Según la figura

15 el valor de  $\nu = -3$  se obtiene para el camino B. Sin embargo, la presencia de ruido causa errores en el cálculo de  $\nu$ .

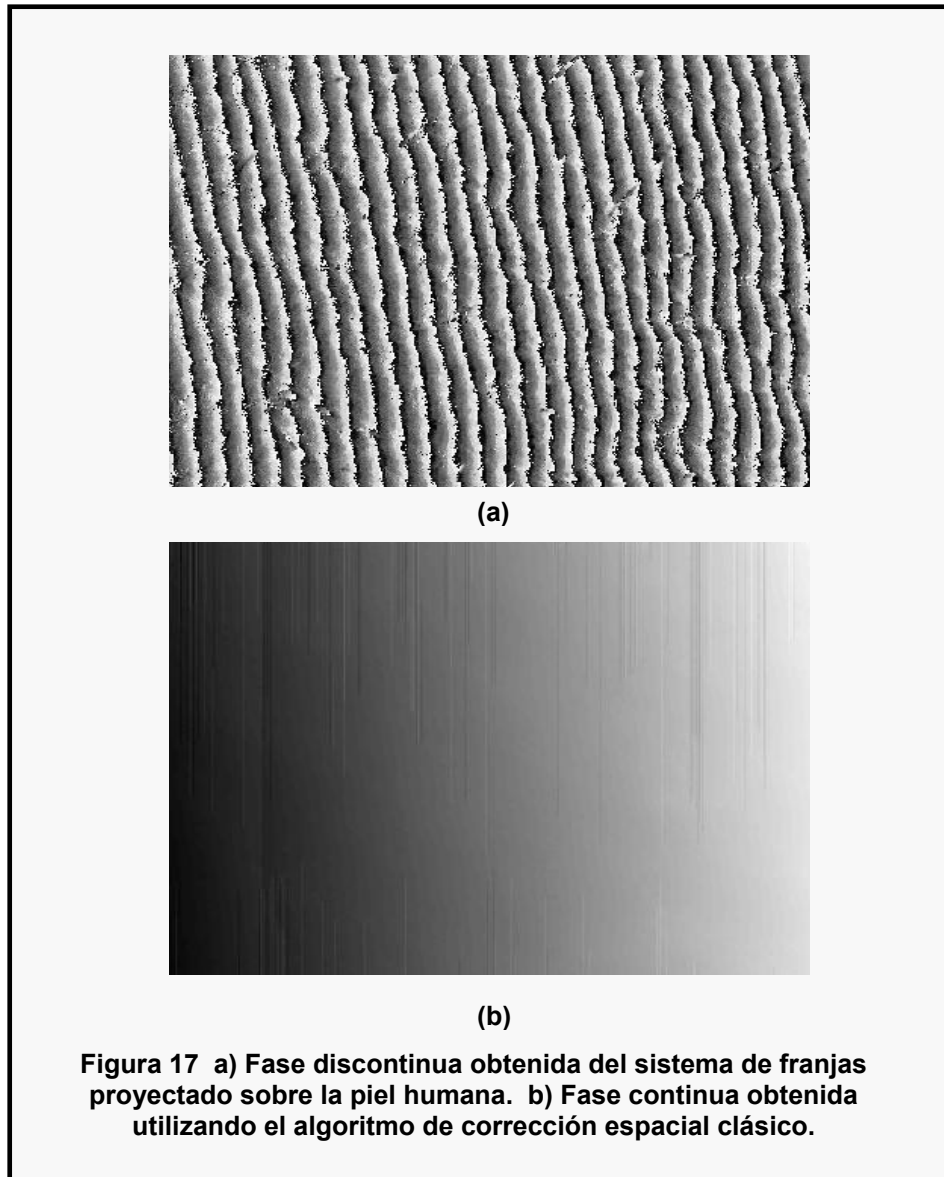
En la figura 15 se puede observar el rompimiento en el paso de la fase, debido a la presencia de ruido. Si se desea calcular el valor de  $\nu$  utilizando dos caminos diferentes, A o C, se puede apreciar que este valor depende del camino escogido para el algoritmo de corrección. Así, si se escoge el camino A  $\nu = -2$ , mientras que para el camino C  $\nu = -4$ . Por consiguiente, la presencia de ruido puede causar errores de fase en regiones de la imagen libres de ruido.

La presencia de discontinuidades inesperadas como la indicada en la figura 15, se encuentran en situaciones experimentales, cuando sistemas de franjas poseen bajo contraste o reducido coeficiente señal/ruido. La figura 16 muestra un sistema de franjas proyectado sobre la piel humana. Debido a la retrodifusión de la luz en las capas internas de la piel, se obtienen franjas de muy bajo contraste, lo que dificulta el cálculo de la fase. También se presentan puntos de alta reflectividad debido a la presencia de grasa y regiones sin franjas debido al bello o manchas cutáneas<sup>[21]</sup>

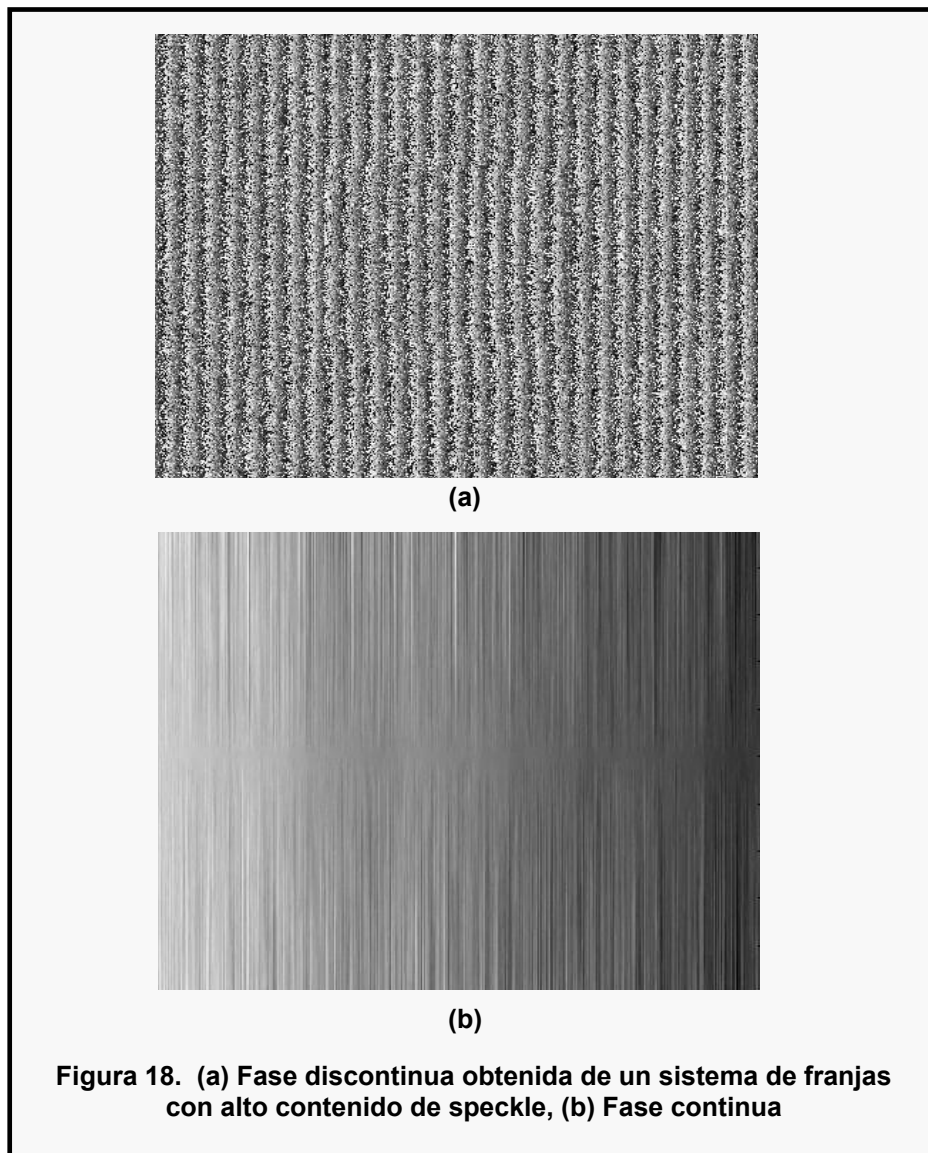


**Figura 16 Sistema de franjas de bajo contraste**

La figura 17 muestra la fase discontinua obtenida utilizando el algoritmo de corrimiento de fase a 4 imágenes y su respectiva fase continua, obtenida a partir del algoritmo de corrección de fase espacial 2D clásico. Claramente se ve la incidencia que tiene un sistema de franjas de bajo contraste y la propagación de errores que se presenta en el cálculo final de la fase continua.



Otra situación que se encuentra en técnicas de reconstrucción 3D por proyección de franjas obtenidas a partir de la interferometría monocromática, es la influencia del speckle en el cálculo de la fase continua. La figura 18(a) muestra un diagrama de fase discontinuo, obtenido al adicionar speckle a cada uno de los sistemas de franjas simulados. El alto contenido de speckle genera un diagrama de fase continuo con propagación de errores, ver figura 18(b).



Buscando una solución alternativa, muchas referencias bibliográficas <sup>[14]</sup> recurren a procedimientos matemáticos que permiten identificar píxeles que generarían transiciones de fase inesperadas. A partir de la figura 15 se puede demostrar que para un camino cerrado libre de discontinuidades ruidosas, el valor de  $\nu$  debe ser igual a cero. Es decir, usando el camino B del píxel P al píxel Q y luego de Q a P utilizando el camino D, se encuentra que  $\nu = -3 + 3 = 0$ . Sin embargo, usando del camino B de P a Q y luego el camino A invertido para ir de Q a P, se encuentra que  $\nu = -3 + 2 = -1$ . La presencia de una discontinuidad inesperada, genera un valor de  $\nu$  diferente de cero en un camino cerrado.

Según lo anterior, el procedimiento consiste en escoger para cada píxel, una trayectoria cerrada de 2x2 píxeles, para calcular  $\nu$  utilizando la siguiente ecuación, donde [ ] indica el entero más cercano:

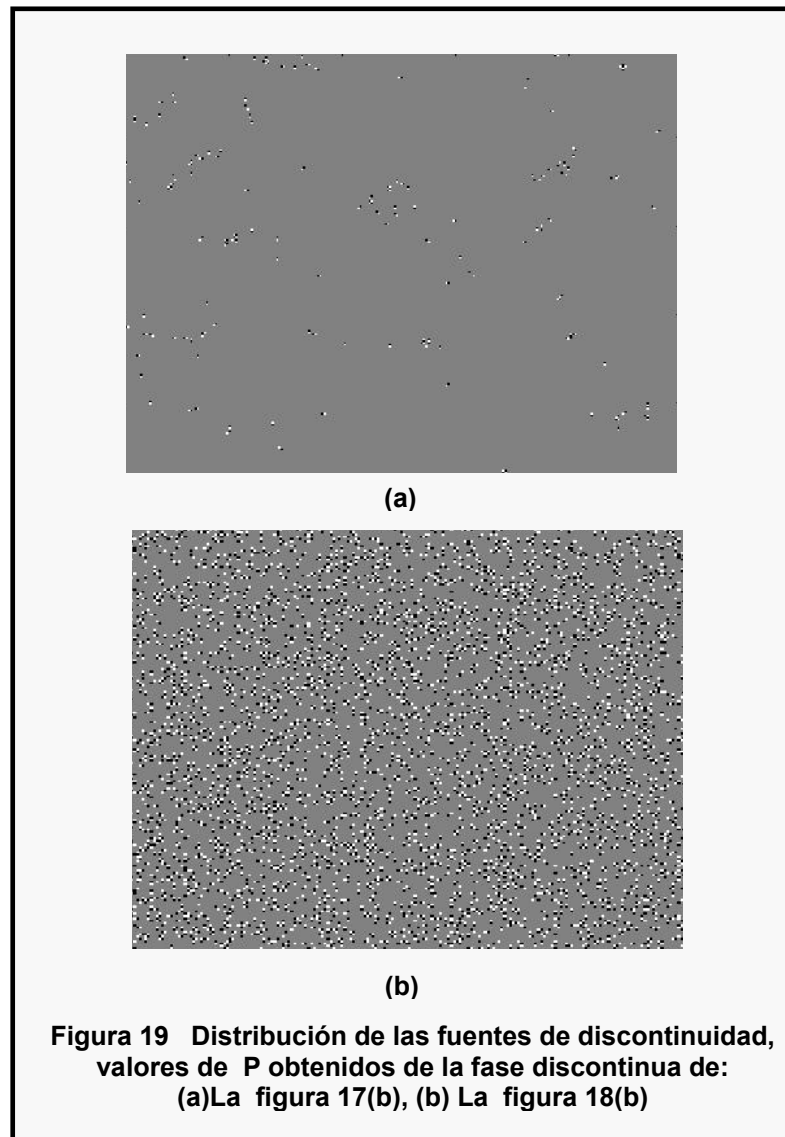
$$P = \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \Delta_i \right] \quad (17)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \phi(i, j+1) - \phi(i, j) \\ \Delta_2 &= \phi(i+1, j+1) - \phi(i, j+1) \\ \Delta_3 &= \phi(i+1, j) - \phi(i+1, j+1) \\ \Delta_4 &= \phi(i, j) - \phi(i+1, j) \end{aligned} \quad (18)$$

Un valor de P diferente de cero, significa que existe una discontinuidad inesperada en el píxel (i, j), que puede propagar errores de fase. La figura 19(a) y 19(b) muestra los píxeles donde se encontraron valores diferentes de cero para  $\nu$  en los diagramas de fase discontinuos de la figura 17(b) y 18(b) respectivamente. Los píxeles en negro, corresponden a valores de  $P < 0$  y los píxeles en blanco a

valores de  $P > 0$ . La ubicación de estos puntos está asociada a la propagación de errores en el diagrama de fase continuo.



## 2.5 POSIBLES SOLUCIONES

El problema de corrección de fase aparece en muchas áreas de la interferometría, encontrándose en la literatura diversos métodos para resolver ésta problemática. Muchos de estos métodos pueden dividirse en dos grupos:

### 2.5.1 Métodos Espaciales

- Dependientes del camino de corrección.
- Independientes del camino de corrección.

#### 2.5.1.1 Métodos Espaciales Dependientes del Camino de Corrección

Estos métodos utilizan una máscara que les permite aislar áreas de la imagen que podrían causar propagación de errores, para luego excluirlas en el proceso de corrección de fase. En este proceso se corrige cada uno de los puntos de la imagen dependiendo de los vecinos y escogiendo una trayectoria de corrección para cada uno de los puntos. La efectividad de estos métodos, depende del procedimiento utilizado para identificar los puntos y de la estrategia utilizada para evitar que se propaguen errores <sup>[15]</sup>.

#### 2.5.1.2 Métodos Espaciales Independientes del Camino de Corrección

Estos métodos escogen en la imagen conjuntos de puntos que presenten condiciones similares en los valores de fase. Generalmente se buscan regiones de píxeles que no posean discontinuidades en la fase. Cada uno de estos conjuntos es corregido independientemente para luego ser acoplados y finalmente obtener el mapa de fase continuo <sup>[16]</sup>.

## 2.5.2 Métodos Temporales

En estos métodos la idea básica es calcular la fase para cada píxel como una función del tiempo, es decir, la corrección de la fase se realiza a lo largo del eje temporal para cada píxel, independientemente de los vecinos. Tradicionalmente se proyectan sobre el cuerpo, varios sistemas de franjas de paso y/o orientación variables, obteniéndose para cada píxel una colección de varios valores de fase, este eje es llamado eje temporal. La colección de datos permite corregir la fase discontinua independiente de la información de los píxeles vecinos.

A continuación se ilustran 2 aproximaciones, para solucionar los inconvenientes presentados anteriormente. De estas aproximaciones, se deriva la metodología de corrección de fase, por variación de fase temporal, siendo la idea básica del presente trabajo de tesis.

## 2.6 SOLUCION ESPACIAL

El objetivo principal en los algoritmos espaciales, consiste en obtener la fase continua a partir de la información de fase discontinua en píxeles vecinos. En el proceso de reconstrucción 3D, la altura se recupera de las variaciones de la fase continua generadas por la topografía del cuerpo, únicamente. Esta variación de fase continua se obtiene según:

$$\Delta\phi_{obj} = |\phi_{obj}(x, y)| - |\phi_{ref}(x, y)| \quad (19)$$

Donde  $\phi_{obj}(x, y)$  y  $\phi_{ref}(x, y)$  corresponde a los diagramas de fase continua, obtenidos de las imágenes de los sistemas de franjas proyectados sobre el objeto y sobre el plano de referencia, respectivamente.  $\phi_{obj}(x, y)$  puede ser calculado a

partir de los diagramas de intensidad, usando el algoritmo de corrimiento de fase dado por:

$$\phi_{obj}(x, y) = \arctan \left[ \frac{\sum_{n=1}^N I_n^{obj}(x, y) \sin(2\pi n / N)}{\sum_{n=1}^N I_n^{obj}(x, y) \cos(2\pi n / N)} \right] = \arctan \left( \frac{a_{obj}}{b_{obj}} \right) \quad (20)$$

Y  $\phi_{ref}(x, y)$  es calculada usando:

$$\phi_{ref}(x, y) = \arctan \left[ \frac{\sum_{n=1}^N I_n^{ref}(x, y) \sin(2\pi n / N)}{\sum_{n=1}^N I_n^{ref}(x, y) \cos(2\pi n / N)} \right] = \arctan \left( \frac{a_{ref}}{b_{ref}} \right) \quad (21)$$

Donde los superíndices *obj* y *ref* de las intensidades, corresponden a las intensidades del objeto medido y del plano de referencia, respectivamente.

Usando las propiedades de las funciones trigonométricas, se obtiene:

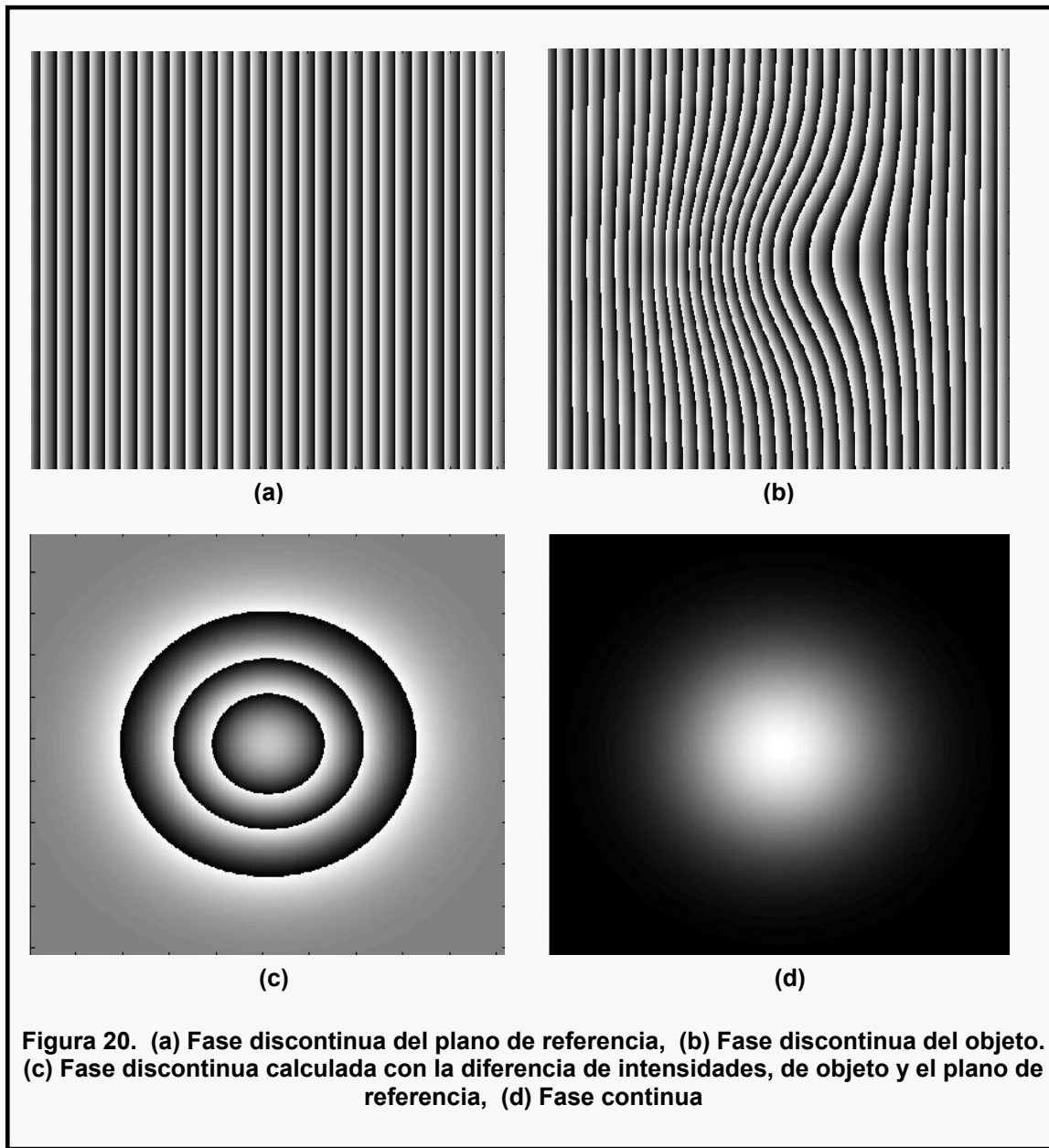
$$\tan \Delta\phi_{obj} = \tan(\phi_{obj} - \phi_{ref}) = \frac{\tan \phi_{obj} - \tan \phi_{ref}}{1 + \tan \phi_{obj} \tan \phi_{ref}} \quad (22)$$

Utilizando la ecuación anterior y las ecuaciones (20) y (21) se obtiene finalmente:

$$\Delta\phi_{obj}(x, y) = \arctan \left( \frac{a_m b_r - a_r b_m}{b_m b_r + a_r a_m} \right) \quad (23)$$

Según lo anterior, el cálculo de la diferencia de fase de los sistemas de franjas proyectados sobre el objeto y sobre el plano, se puede calcular fácilmente usando

las imágenes de intensidad sobre el objeto y sobre el plano de referencia. La ventaja de utilizar este procedimiento se ilustra en la figura 20. La figura 20(a) muestra el sistema de franjas proyectado sobre el plano de referencia, 20(b) el sistema de franjas proyectado sobre el objeto, la figura 20(c) muestra la fase discontinua obtenida al utilizar la ecuación (23), finalmente la figura 20(d) muestra la fase continua obtenida.



Es decir, en lugar de realizar dos procesos de corrección de fase para obtener las fases continuas sobre el plano de referencia y sobre el cuerpo, para luego restarlos y obtener  $\Delta\phi_{Obj}$ , se plantea usar las distribuciones en intensidad para obtener  $\Delta\phi_{Obj}$  discontinuo y realizar un solo proceso de corrección de fase a este último diagrama. Al utilizar este procedimiento, se evidenciarán menos discontinuidades de fase, facilitándose el procedimiento de corrección.

## **2.7 SOLUCIÓN TEMPORAL**

La fase calculada, ya sea utilizando la ecuación (23) estará en el rango de  $-\pi$  a  $+\pi$ . La distribución de fase continua que codifica la información del objeto está dada por:

$$\Phi(x, y) = \phi_o(x, y) + 2\pi n(x, y) \quad (24)$$

Donde  $n(x, y)$  es un entero. La ecuación (24) muestra que la corrección de la fase, es solo un proceso para la determinación del  $n(x, y)$  adecuado para cada punto. La utilización de un procedimiento espacial para la corrección de fase discontinua, que permita calcular adecuadamente  $n(x, y)$  puede generar conflictos si el diagrama de fase presenta discontinuidades inesperadas. Con el fin de eliminar la dependencia espacial del cálculo de  $n(x, y)$  en la ecuación (24), se recurre a la información contenida en el diagrama de fase  $\phi_G(x, y)$ , obtenido usando las mismas condiciones de proyección y observación sobre el cuerpo, pero usando otro paso de proyección. Es decir, la primera aproximación temporal al proceso de corrección de fase, se basa en una fase adicional  $\phi_G(x, y)$  obtenida bajo las mismas condiciones de la fase  $\phi_o(x, y)$  que se desea corregir. La diferencia básicamente entre los diagramas obtenidos  $\phi_G(x, y)$  y  $\phi_o(x, y)$ , es que en el primero, el paso de proyección debe ser lo suficientemente grande para que su diagrama de fase calculado utilizando la ecuación (23), no presente

discontinuidades. Como provienen del mismo montaje, bajo las mismas condiciones y usando la aproximación telecéntrica mostrada en el capítulo 1, las dos fases están relacionadas de la siguiente manera:

$$Z(x, y) = \frac{P_F}{2\pi * \tan \theta} \Phi(x, y) = k_1 \Phi(x, y) \quad (25)$$

$$Z(x, y) = \frac{P_G}{2\pi * \tan \theta} \phi_G(x, y) = k_2 \phi_G(x, y) \quad (26)$$

Donde  $P_F$  es el paso final de proyección, usado para reconstruir la superficie del cuerpo y  $P_G$  corresponde al paso usado para calcular  $\phi_G(x, y)$ . Como provienen del mismo objeto, se obtiene:

$$\Phi(x, y) = \frac{k_2}{k_1} \phi_G(x, y) \quad (27)$$

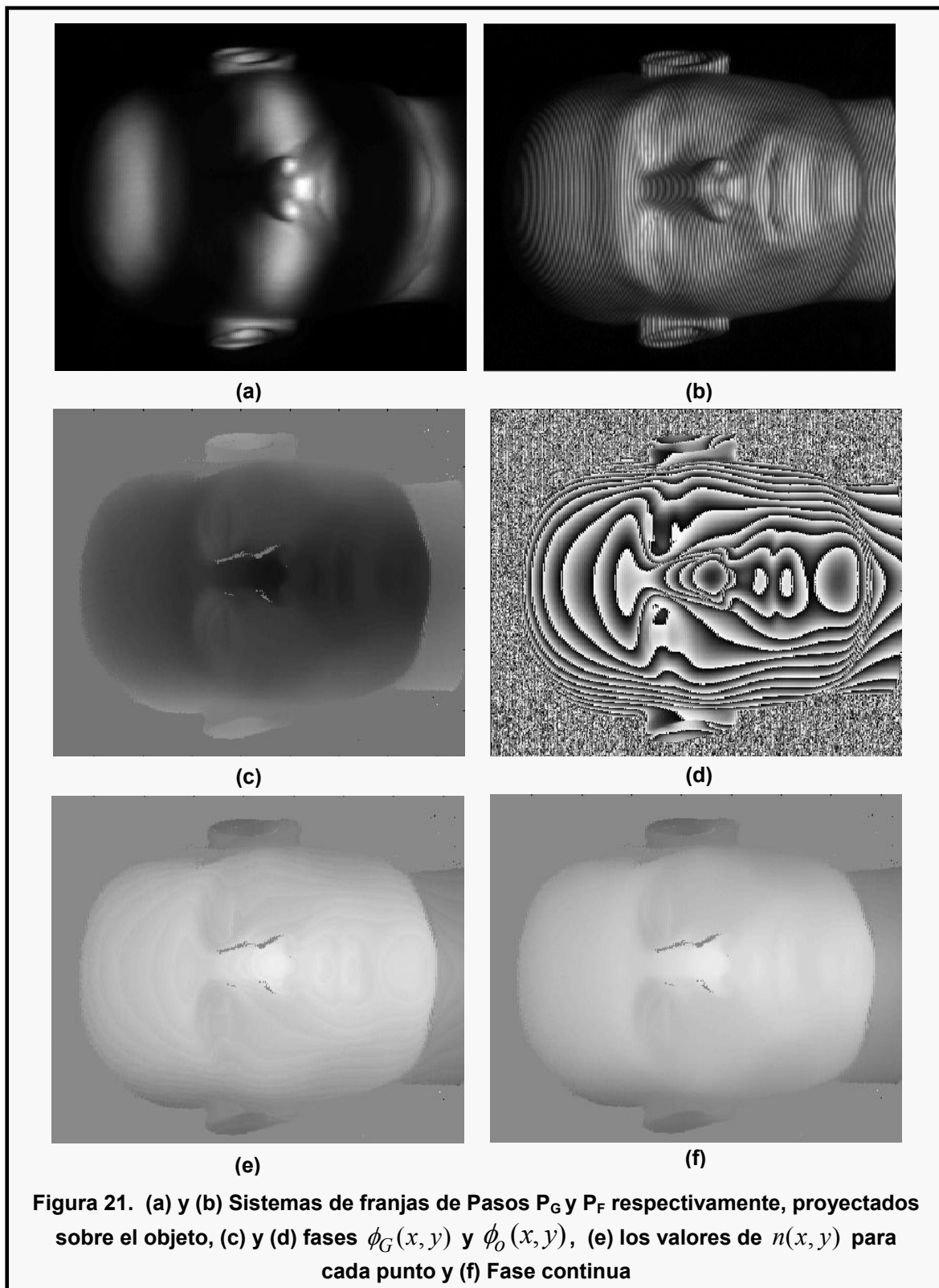
$$\phi_o(x, y) + 2\pi n(x, y) = \frac{k_2}{k_1} \phi_G(x, y) \quad (28)$$

Finalmente, se encuentra  $n(x, y)$  a partir de:

$$n = \left[ \frac{\left( \frac{k_2}{k_1} \phi_G(x, y) - \phi_o(x, y) \right)}{2\pi} \right] \quad (29)$$

Donde los corchetes indican que el valor de  $n$  es el entero más cercano.

La figura 21 muestra el proceso descrito anteriormente. La figura 21(a) y 21(b) muestran los sistemas de franjas de paso  $P_G$  y  $P_F$  respectivamente, proyectados sobre el objeto; la figura 21(c) y 21(d) muestran las fases  $\phi_G(x, y)$  y  $\phi_o(x, y)$  calculadas utilizando la ecuación (22); la figura 21(e) muestra los valores de  $n(x, y)$  para cada punto, necesarios en el proceso de corrección y la figura 21(f) muestra la fase continua obtenida al utilizar la solución temporal.



Cada píxel posee dos valores de fase, por un lado la fase discontinua  $\phi_o(x,y)$  que se desea corregir y por otro, la fase  $\phi_G(x,y)$  que no supera  $2\pi$ . Como provienen del mismo objeto y se obtuvieron bajo idénticas condiciones de observación y proyección, se calcula  $n(x,y)$  independiente de los vecinos. Los principales inconvenientes de la técnica es la dificultad de obtener un diagrama de fase absoluto continuo y la necesidad de calcular  $P_G$  necesario para obtener  $\phi_G$  continuo, lo cual implica tener información de la topografía máxima del cuerpo.

## CAPITULO 3.

### 3.1 CORRECCIÓN DE FASE TEMPORAL

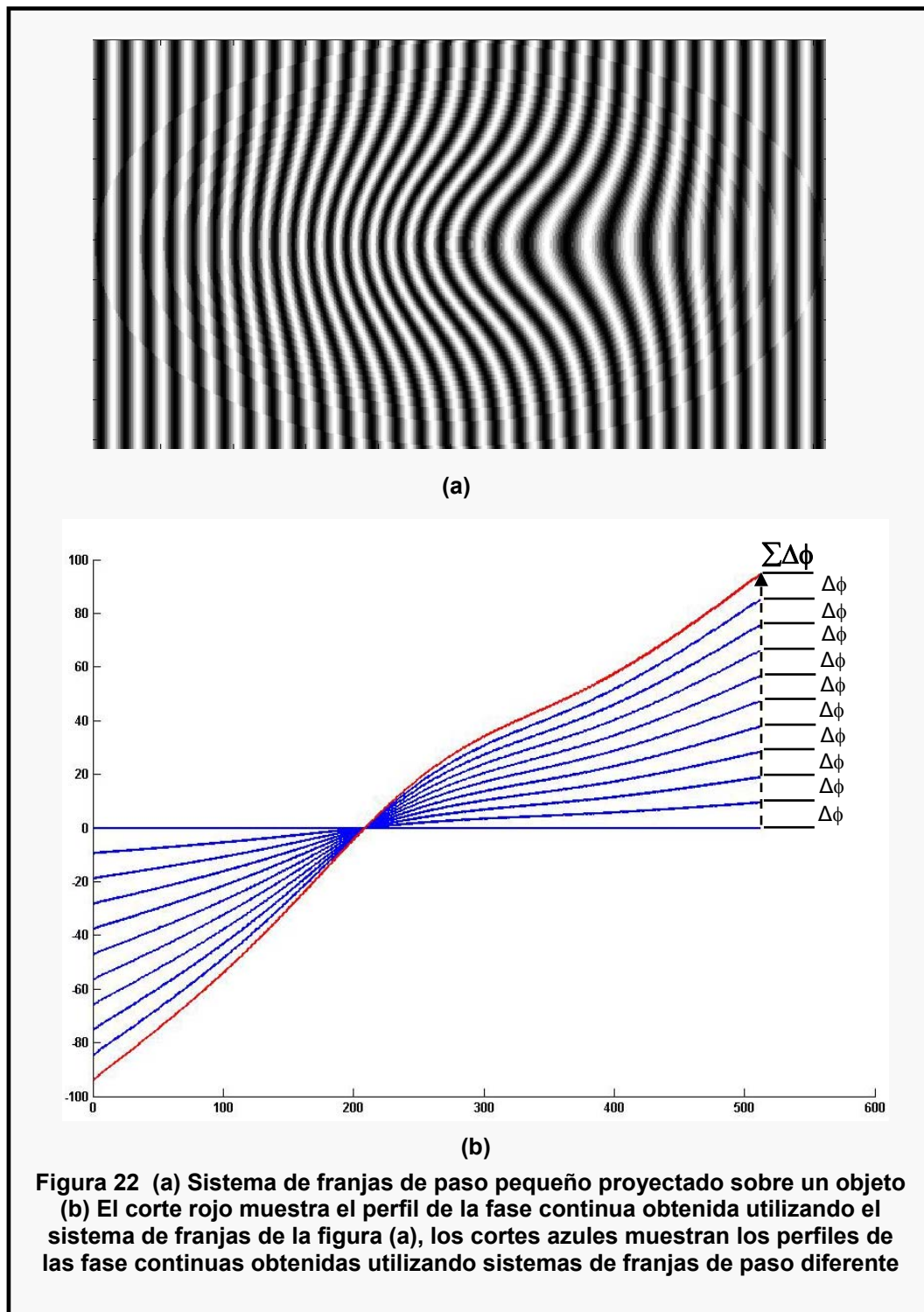
Teniendo en cuenta las problemáticas que presenta el proceso de corrección espacial (mencionadas en el capítulo anterior) para obtener la forma global del objeto, se presenta una aproximación diferente: ***corrección de fase temporal***. Esta aproximación, es una herramienta importante en aplicaciones que utilizan la interferometría, donde el interés principal es obtener valores reales y absolutos de fase, con el fin de extraer información topográfica del objeto a estudiar.

La idea básica que se propone en este método <sup>[17]</sup>, es obtener la fase para cada píxel, independientemente de la información de fase de los vecinos. Así, regiones que presenten ruido no tendrán influencia sobre las regiones con datos válidos. Para dar una explicación mas adecuada de este método se considera la figura 22(b), donde la línea roja muestra un corte del diagrama de fase continua obtenida de un sistema de franjas como el que se muestra en la figura 22(a). Como en toda función continua, la fase absoluta en un punto P se puede obtener sumando diferencias de fase  $\Delta\phi$  consecutivas, partiendo de una fase inicial conocida. Es decir, la fase absoluta en un píxel P se calcula sumando las diferencias de fase obtenidas al proyectar diferentes sistemas de franjas alterando el paso de las franjas secuencialmente. El procedimiento se inicia con la proyección de cero franjas en todo el campo de observación e incrementando en 1 el número de franjas que se proyectan, garantizando así que la diferencia de fase entre dos sistemas de franjas consecutivos no supera  $2\pi$ . De esta manera, la fase inicial es cero y la suma secuencial de  $\Delta\phi$  entre sistemas de franjas consecutivos para un píxel converge a la fase absoluta de este punto. Al final se obtiene un diagrama de fase absoluto continuo, lo que no hace necesario realizar un proceso de

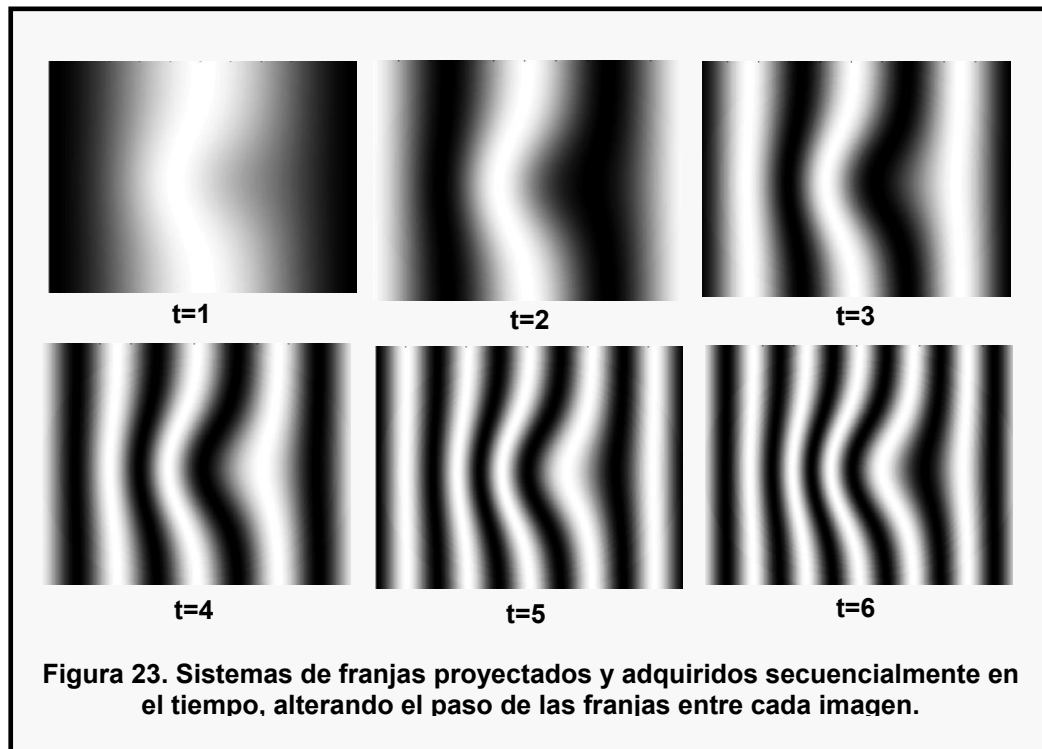
comparación entre vecinos para corregir posibles fases discontinuas. Las líneas intermedias mostradas en la figura 22(b) corresponden a cortes realizados a los diagramas de fase de los sistemas de franjas intermedios, donde secuencialmente se incrementa el número de franjas en el campo de observación. Para obtener estos diagramas, se utilizó la simulación de un sistema de reconstrucción 3D por proyección de franjas telecéntrico, teniendo en cuenta los parámetros de proyección y observación que se tendrían en condiciones experimentales, como: ángulo de proyección, campo de observación, paso del sistema de franjas, entre otros. El sistema de reconstrucción 3D simulado, tenía un campo de observación de 100 x 100 mm<sup>2</sup>. Las franjas se proyectaban telecéntricamente formando un ángulo de 20° con la normal del plano de referencia. La cámara de observación se simuló perpendicular al plano de referencia con una focal y distancia, tal que generaban para el campo de observación, una imagen de 512x 512 píxeles en observación telecéntrica. El paso de proyección se alteró de tal manera que se ajustaba en los 512 píxeles horizontales, el número de pasos deseado. Así sin ubicar un objeto sobre el plano de referencia, se observaba un sistema de franjas de fase continua  $\frac{2\pi}{P} * i$  donde  $i = -255: 256$ , y P es el paso de las franjas en píxeles sobre la imagen. Al ubicar un objeto y teniendo en cuenta las condiciones telecéntricas de proyección y observación, se obtiene un sistema de franjas con una fase continua:

$$\psi = \frac{2\pi}{P} * i + \frac{2\pi}{P} (Z \tan \theta) F \quad (30)$$

Donde  $i$  y  $P$  ya se definieron en píxeles,  $F$  es el factor de conversión equivalente a  $\frac{512 \text{ pix}}{100 \text{ mm}}$  y  $Z$  define la altura del cuerpo en el campo de observación de 100 x 100 mm<sup>2</sup>. Así, la figura 22(a) corresponde a un objeto simulado en forma gaussiana con una altura máxima que introduce un corrimiento máximo de  $6\pi$  radianes.



Experimentalmente este algoritmo permite analizar sistemas de franjas, en los cuales la fase  $\phi$  para cada píxel es calculada y corregida como una función del tiempo  $t$ . Experimentalmente, se inicia con la proyección de sistemas de franjas de paso variable sobre la superficie del objeto a estudiar, seguido de la adquisición de dichos sistemas de franjas. El paso de proyección se varía secuencialmente de la forma  $P_t = P_0/t$ , donde  $t = 1, 2, 3, \dots, S$ , siendo  $S$  el número total de sistemas de franjas a proyectar y  $P_0$  el tamaño en píxeles del área de proyección. Así, para  $t=1$  se proyecta un paso en todo el campo de observación,  $t=2$  dos pasos de proyección en todo el campo, etc. La figura 23 muestra la simulación de algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie del objeto con forma gaussiana simulado.



Para cada sistema de franjas proyectado se debe extraer la fase utilizando el algoritmo de corrimiento de fase a 4 imágenes y calcular las diferencias de fase secuencialmente.

Matemáticamente el sistema de franjas de paso  $P_t$  que se ubica en el sistema de proyección es de la forma:

$$I_k^P(i, j, t) = I_0(i, j) + C(i, j) * \cos\left(2\pi * \frac{it}{P_0} + \frac{\pi}{2}(k-1)\right) \quad (31)$$

Donde  $I_0(i, j)$  es la intensidad promedio o fondo continuo,  $C(i, j)$  es el máximo contraste del dispositivo de proyección,  $k=1,2,3,4$  es el índice para el corrimiento de fase espacial a 4 imágenes y  $t=1,2,3,\dots,S$  es el índice de variación del paso de las franjas. Es decir, cada vez que  $t$  se incrementa, el número de franjas en el patrón proyectado aumenta en uno. La secuencia de los sistemas de franjas que se proyectan sobre la superficie del objeto se inicia con la imagen para  $t=1$  y  $k=1$ , cubriendo todas las combinaciones para el paso de las franjas y los índices para el corrimiento de fase espacial. Para cada paso  $P_t$  se adquieren 4 imágenes de franjas deformadas por la superficie del cuerpo, adquiriéndose  $4S$  sistemas de franjas. Finalmente, la diferencia de fase  $\Delta\phi$  consecutiva es definida como:

$$\Delta\phi(i, j, t) = \phi(i, j, t) - \phi(i, j, t-1) \quad (32)$$

Y se puede calcular utilizando:

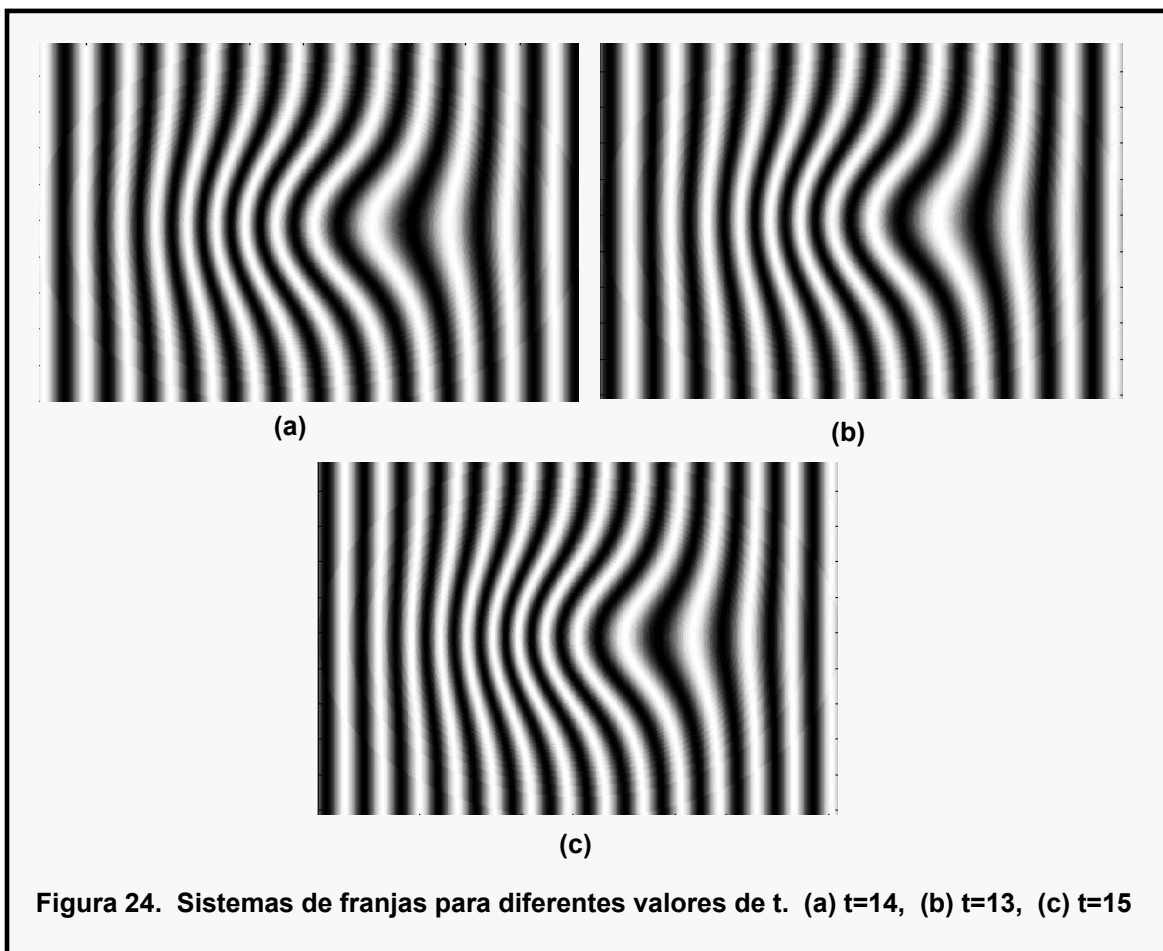
$$\Delta\phi(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta I_{42}(t) * \Delta I_{13}(t-1) - \Delta I_{13}(t) * \Delta I_{42}(t-1)}{\Delta I_{13}(t) * \Delta I_{13}(t-1) + \Delta I_{42}(t) * \Delta I_{42}(t-1)} \right] \quad (33)$$

Donde  $\Delta I_{mn}(i, j, t) = I(i, j, m, t) - I(i, j, n, t)$ . Como se indica en la figura 22(b), es posible obtener la fase continua total  $\psi(i, j)$  sumando las diferencias de fase continua, calculadas entre todos los sistemas de franjas proyectados sobre el objeto, teniendo en cuenta que éstas diferencias de fase no deben presentar

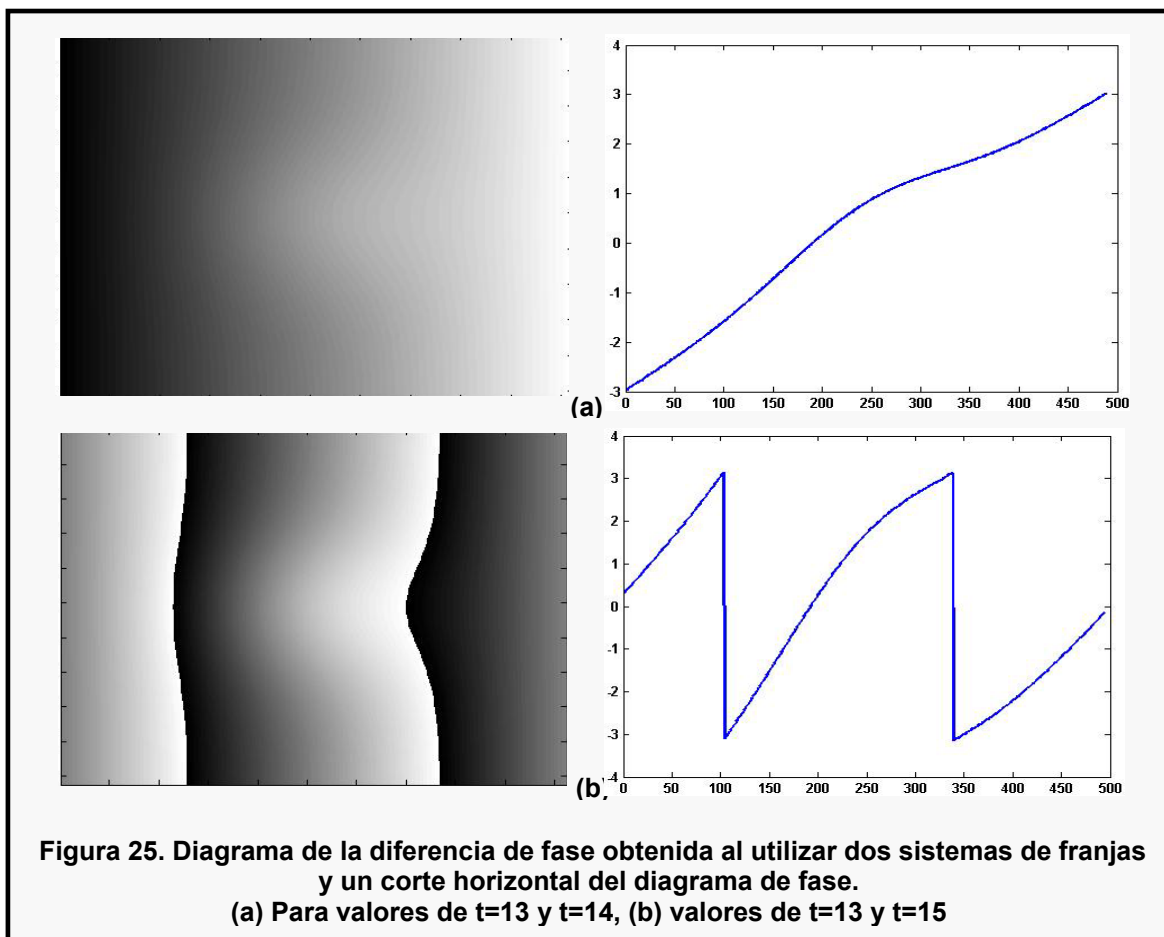
discontinuidades. El cálculo de la fase continua total  $\psi(i, j)$  se obtiene utilizando la siguiente ecuación:

$$\psi(i, j) = \phi(i, j, s) - \phi(i, j, 0) = \sum_{t=1}^s \Delta\phi(i, j, t) \quad (34)$$

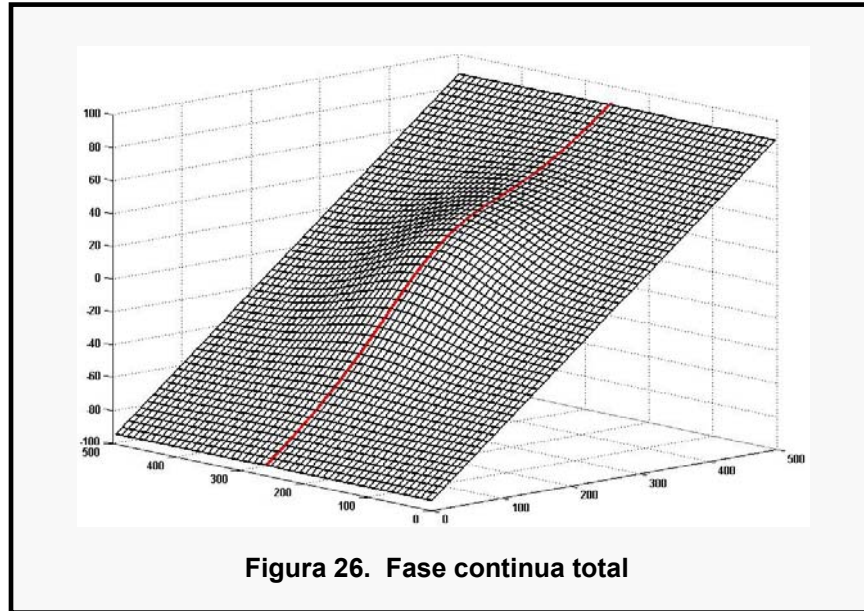
Tradicionalmente,  $\phi(i, j, 0) = 0$ . La diferencia de fase para un píxel  $(i, j)$  entre dos mapas de fase consecutivos  $\phi(i, j, t)$  y  $\phi(i, j, t-1)$  estará en el rango de  $(-\pi, \pi)$ . Esta es la razón por la cual se adiciona no más de una franja entre un sistema de franjas y el siguiente. Si la diferencia de fase para algún punto del campo cae fuera de este rango, un múltiplo entero de  $2\pi$  tendría que ser adicionado para encontrar la diferencia de fase en el rango establecido. Para ilustrar esta situación, se consideran los sistemas de franjas que se muestran en la figura 24, correspondientes a valores de  $t=14$ ,  $t=13$  y  $t=15$ , respectivamente.



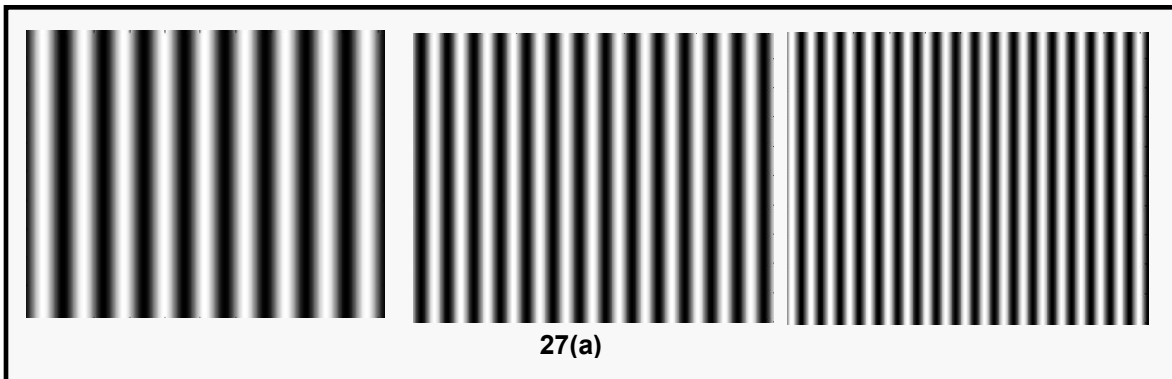
Si se calcula la diferencia de fase  $\Delta\phi$  entre dos sistemas de franjas consecutivos (a) y (b) de la figura 24, y debido a que entre un sistema de franjas y el siguiente se adicionó solo una franja en todo el campo, el diagrama de la diferencia de fase que se obtiene no presenta discontinuidades, como se muestra en la figura 25(a). Así mismo, al calcular la diferencia de fase entre los sistemas de franjas (b) y (c) de la figura 24 y debido a que entre un sistema de franjas y el siguiente se adicionó más de una franja en todo el campo de observación, el diagrama de fase presenta discontinuidades, como se muestra en la figura 25(b). El inconveniente se presenta porque en la ecuación (34)  $\Delta\phi$  se asume continua y la suma secuencial converge a una fase continua. Si una de las fases  $\Delta\phi$  presenta discontinuidades como la que se muestra en la figura 25(b) esta estará presente en la suma final, haciendo necesario una corrección espacial.

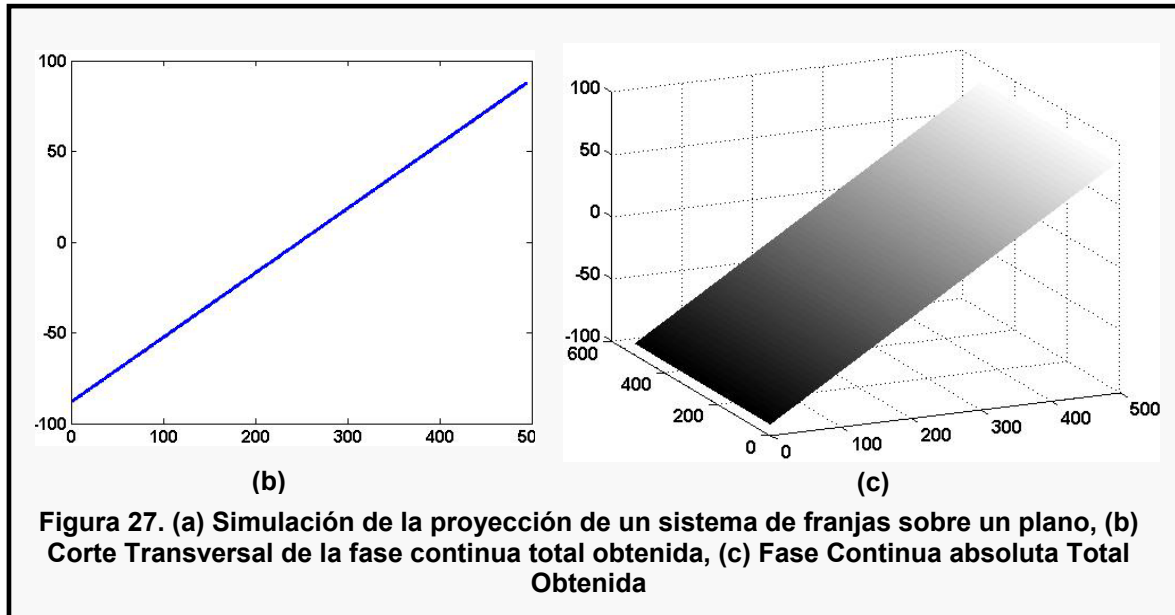


La figura 26 muestra el resultado final del procedimiento de corrección temporal simulado para el objeto analizado en este caso, usando  $S=30$ .

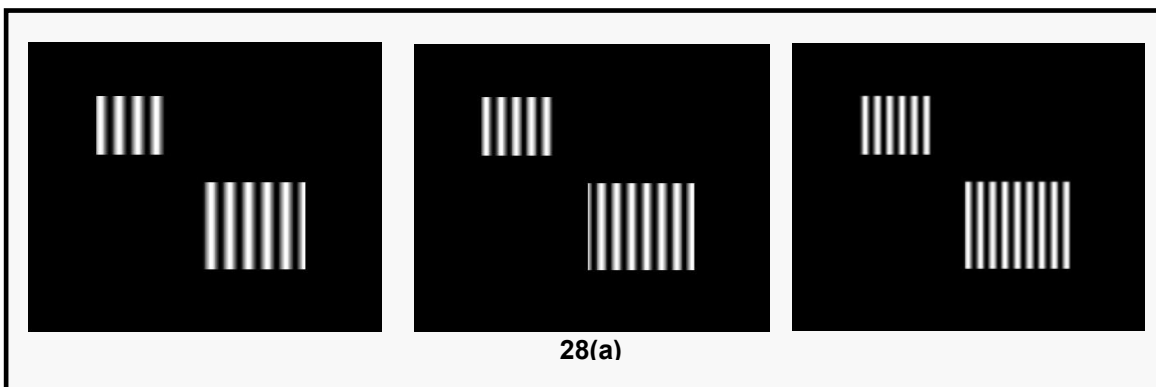


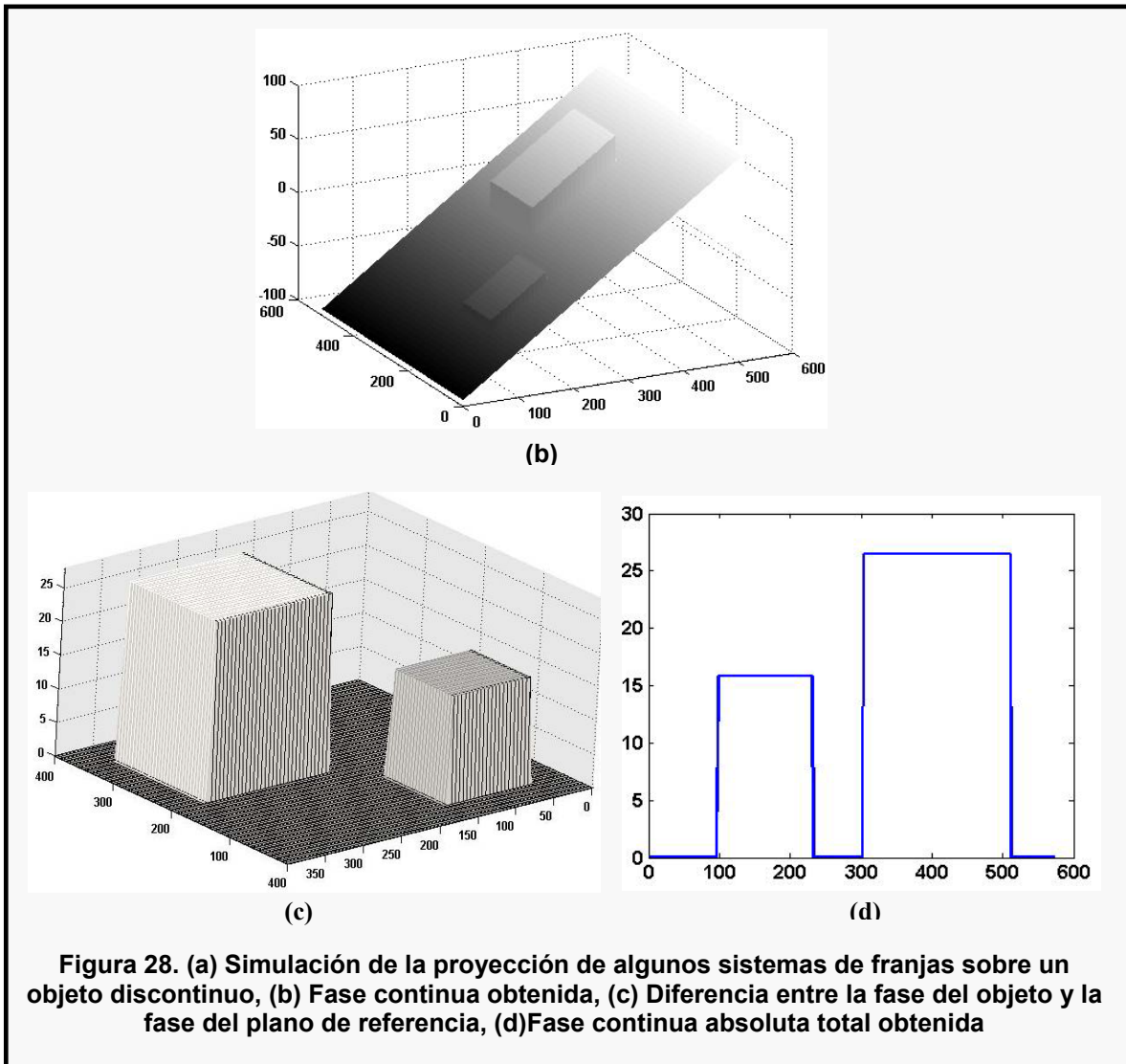
Con el fin de verificar las características del procedimiento de corrección temporal, se hizo el mismo análisis a objetos más complicados, simulando la proyección de sistemas de franjas sobre un objeto discontinuo que consta de dos rectángulos separados y de alturas diferentes. Usando el sistema de reconstrucción 3D simulado, se aplicó el procedimiento de corrección temporal al plano de referencia, obteniéndose una distribución de fase lineal como la que se muestra en la figura 27(c). La figura 27(a) muestra algunos sistemas de franjas proyectados y la figura 27(b) muestra un corte de la fase continua obtenida.





El diagrama de fase del plano de referencia es importante por que permite definir la fase absoluta asignada a cada píxel del campo de observación. Cualquier deformación de esta fase es debida al objeto que se introduce. Sobre el plano de referencia se ubicaron simultáneamente dos rectángulos de altura 23mm y 38.5mm y dimensiones  $20 \times 20 \text{ mm}^2$  y  $30 \times 30 \text{ mm}^2$  respectivamente. La figura 28(a) muestra algunos sistemas de franjas utilizados y la figura 28(b) muestra la fase continua obtenida usando  $S=30$ . La diferencia entre esta fase y la fase del plano de referencia se muestra en la figura 28(c). Un corte de esta fase se muestra en la figura 28(d)





De este procedimiento se concluye:

- a) La fase continua de cada píxel con información de franjas, se calcula independientemente de los vecinos. En el procedimiento espacial, dos regiones con fase discontinua se pueden corregir siempre que estén conectadas con información de fase. Zonas aisladas como la indicada en la figura 28(a) sería imposible corregirlas con el mismo procedimiento

espacial. Se tendrían que corregir secuencialmente cada región y se perdería la información de altura relativa entre las zonas.

- b) La fase obtenida en cada punto, corresponde a la fase absoluta usada en la proyección. Si un punto en el diagrama tiene una fase igual a la fase obtenida en el plano de referencia para el mismo punto, quiere decir que este punto sobre la superficie toca el plano de referencia, teniendo  $Z=0$ . Puntos con  $Z$  diferentes tendrían variaciones de fase absoluta calculadas a partir del plano de referencia.

De esta manera se demuestra que a partir de la suma de diferencias de fase continuas secuenciales, se obtiene el diagrama de fase continuo absoluto y no es necesario realizar un procedimiento de comparación con vecinos para corregir posibles puntos con fase discontinua.

## **CAPITULO 4.**

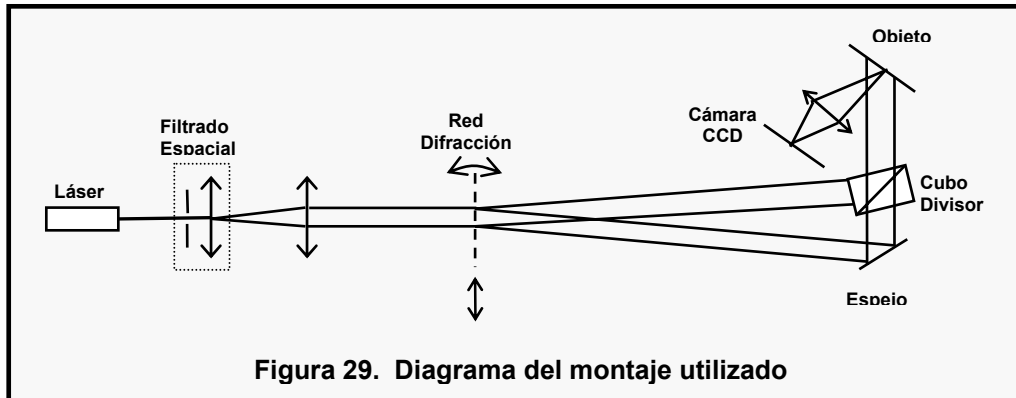
### **4.1 INTRODUCCION**

En la sección anterior se presentaron los fundamentos teóricos necesarios para desarrollar el procedimiento de corrección de fase temporal. En esta sección se presenta el montaje experimental y los resultados obtenidos del montaje implementado.

### **4.2 ANALISIS EXPERIMENTAL**

#### **4.2.1 PROYECCION DE FRANJAS SENOSOIDALES CON CORRIMIENTO Y VARIACIONES DE PASO CONTINUOS**

Para verificar experimentalmente el algoritmo de corrección temporal, se requiere un sistema óptico que permita obtener un sistema de proyección de franjas senosoidales con corrimientos y variaciones de paso continuos. Para esto se construyó un sistema de proyección de franjas interferométrico en el cual, a partir de la interferencia de dos frentes de onda monocromáticos obtenidos de una red de difracción (orden +1 y -1), se proyectaban sistemas de franjas sobre el objeto. La variación del paso de las franjas se obtenía girando la red de difracción que estaba ubicada sobre una platina de rotación calibrada y el desplazamiento de las franjas se obtuvo introduciendo un término de fase variable temporalmente entre los frentes de onda, teniendo como resultado un sistema de interferencia heterodino. La figura 29 muestra el diagrama del montaje utilizado.



Para la obtención de sistemas de interferencia heterodinos, generalmente se utilizan moduladores acusto-ópticos (AOM), pero debido a los altos costos de estos dispositivos ópticos, se hace necesario implementar otro tipo de herramientas que nos permita obtener los mismos resultados. En este trabajo, se implementó un sistema de interferencia heterodino por desplazamiento de una red de difracción, el cual se explicará en detalle en la siguiente sección.

#### 4.2.2 INTERFEROMETRIA HETERODINA POR DESPLAZAMIENTO DE UNA RED DE DIFRACCIÓN

Es posible obtener un sistema de interferencia heterodino a partir del desplazamiento lateral de una rejilla de difracción. Asumiendo una red de difracción senosoidal en amplitud, cuya función de transmitancia está dada por:

$$T(y,t) = \frac{I}{2} + \frac{I}{2} \cos \left[ \left( \frac{2\pi}{a} \right) * (y - vt) \right] \quad (35)$$

En la ecuación (35)  $a$  es el paso de la rejilla y se asume que la red se desplaza en dirección del eje  $y$  a valores constantes de  $v$ . La transformada de Fourier de la

función de transmitancia permite obtener la distribución de amplitud en la región de Fraunhofer o campo lejano, definido de la siguiente manera <sup>[18]</sup>:

$$U_z(x', y') = \frac{\exp(ikz) * \exp\left(\frac{ik}{2z} * [x^2 + y^2]\right)}{i\lambda Z} * TF\{U(x, y)\}_s = C * TF\{U(x, y)\}_u \quad (36)$$

Donde u y s son las frecuencias espaciales definidas como:

$$u = \frac{x'}{\lambda z} \quad y \quad s = \frac{y'}{\lambda z} \quad (37)$$

El sistema cuadrado (x', y') es paralelo a (x, y) y está ubicado a una distancia Z.

Asumiendo una iluminación unitaria en amplitud, monocromática y considerando que la rejilla se encuentra al interior de una región rectangular de dimensiones A y B, la distribución de amplitud en la región de Fraunhofer sería:

$$TF\{U(x, y)\} = \frac{1}{2} \exp(i2\pi\nu_0 t) \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left[ 1 + \cos\left[\frac{2\pi}{a} * (y - vt)\right] \right] * \exp(-i2\pi ux) * \exp(-i2\pi sy) dx dy \quad (38)$$

Donde  $\nu_0$  es la frecuencia temporal del frente de onda plano que ilumina la función de transmitancia.

Resolviendo la integral de Fourier se obtiene:

$$TF\{U(x, y)\} = \frac{1}{2} \exp(i2\pi\nu_0 t) \sin c\left(\frac{2Ax'}{\lambda z}\right) * \left[ \sin c\left(\frac{2By'}{\lambda z}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-i2\pi}{a} vt\right) \sin c\left(\frac{2B}{\lambda z} \left(y' + \frac{\lambda z}{a}\right)\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i2\pi}{a} vt\right) \sin c\left(\frac{2B}{\lambda z} \left(y' - \frac{\lambda z}{a}\right)\right) \right] \quad (39)$$

Asumiendo que B es grande, se considera:

$$\sin c\left(\frac{2By'}{\lambda z}\right) \approx \delta(y') \quad (40)$$

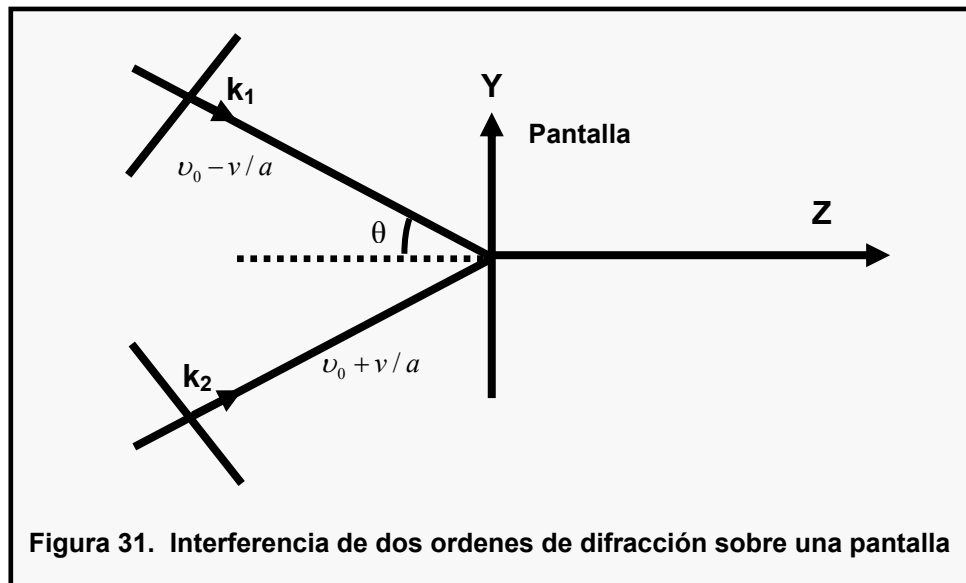
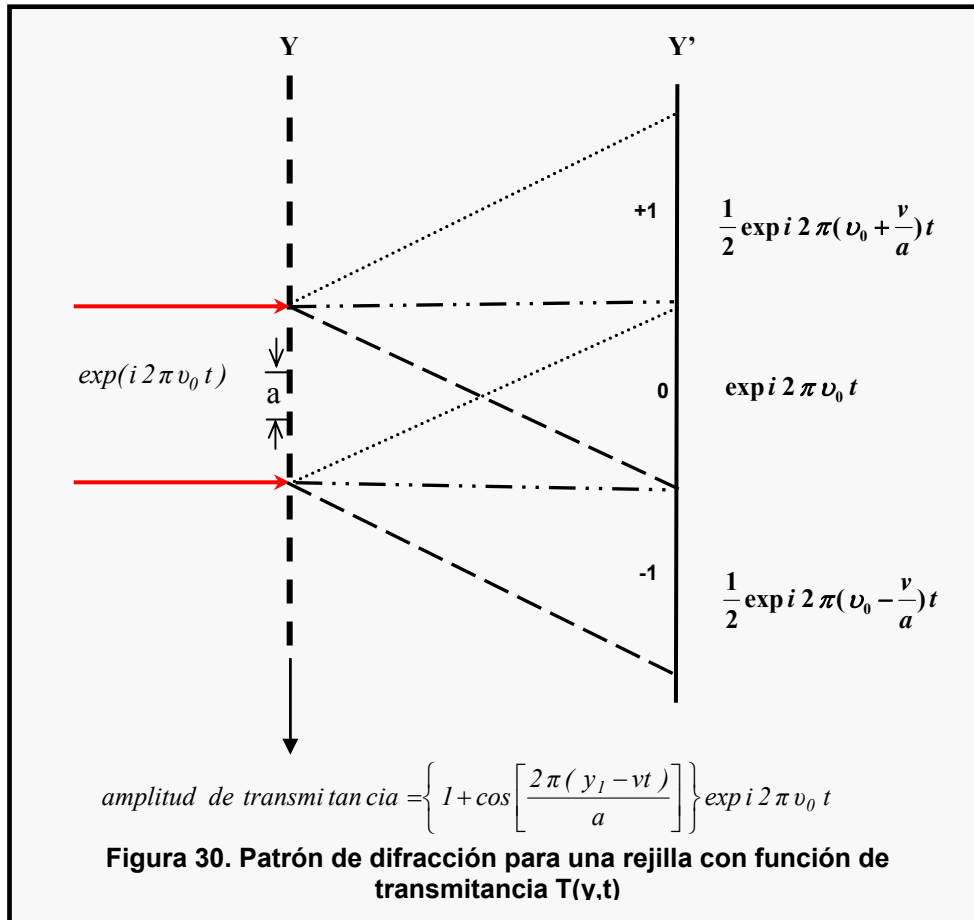
De esta manera la ecuación (39), se expresa de la siguiente manera:

$$\delta(y') + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-i2\pi}{a} vt\right) * \delta\left(y' + \frac{\lambda z}{a}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i2\pi}{a} vt\right) \delta\left(y' - \frac{\lambda z}{a}\right) \quad (41)$$

Finalmente, se obtiene la distribución de amplitud en la región de Fraunhofer:

$$U_z(s,t) = \frac{1}{2} \exp(i2\pi\nu_0 t) \left[ \delta(y') + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-i2\pi}{a} vt\right) * \delta\left(y' + \frac{\lambda z}{a}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i2\pi}{a} vt\right) \delta\left(y' - \frac{\lambda z}{a}\right) \right] \quad (42)$$

De esta manera, la distribución de campo contiene tres frentes de onda planos (ver figura 30), uno central y dos laterales propagándose en direcciones  $\pm\lambda/a$  y ubicada en el plano (x,y) en  $\pm\lambda z/a$ . Debido al termino temporal, cada orden lateral presenta una variación en la frecuencia óptica temporal  $\nu_0$  de  $\pm v/a$ . Seleccionando estos ordenes y haciéndolos interferir como se observa en la figura 31, se obtendrá en la pantalla un sistema de franjas de interferencia heterodino, donde la intensidad en cada punto cambia senoidalmente a una frecuencia  $\Delta\nu = 2v/a$ .



Matemáticamente se tiene:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \text{Sen}(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \\ E_2 &= E_0 \text{Sen}(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \end{aligned} \quad (43)$$

Donde  $\vec{k}_1 = k \hat{u}_1$  y  $\vec{k}_2 = k \hat{u}_2$  son los vectores de onda de los frentes de onda 1 y 2 respectivamente, siendo  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  los vectores de onda unitarios de propagación de la onda,  $\omega_1 = 2\pi(\nu_0 - \nu/a)$  y  $\omega_2 = 2\pi(\nu_0 + \nu/a)$

Asumiendo que las ondas tienen igual polarización, paralelo al eje X y usando las variables:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{k} &= \frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2} & \vec{k}_0 &= \frac{\vec{k}_2 + \vec{k}_1}{2} \\ \Delta\omega &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2\pi \frac{\nu}{a} & \omega_0 &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 2\pi\nu_0 \end{aligned} \quad (44)$$

Se puede encontrar la siguiente ecuación:

$$E = 2 E_0 \text{Sen}(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t) * \text{Cos}(\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta\omega t) \quad (45)$$

Calculando la intensidad promedio se obtiene la ecuación:

$$I = I_0 * \text{Cos}^2(\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta\omega t) \quad (46)$$

Si la frecuencia temporal  $\nu_0$  no cambia,  $\Delta\omega = 0$  y se obtiene un sistema de franjas estable en el tiempo. Como hay una variación de  $\pm\nu/a$  en la frecuencia, en el sistema de franjas cambia la intensidad en cada punto de manera senoidal con un periodo de  $a/2\nu$ , observándose un sistema de franjas que se desplaza continuamente en dirección normal a las franjas. Observando la figura 31 se obtiene:

$$\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} = k_1 \text{sen} \theta \text{ y} \quad (47)$$

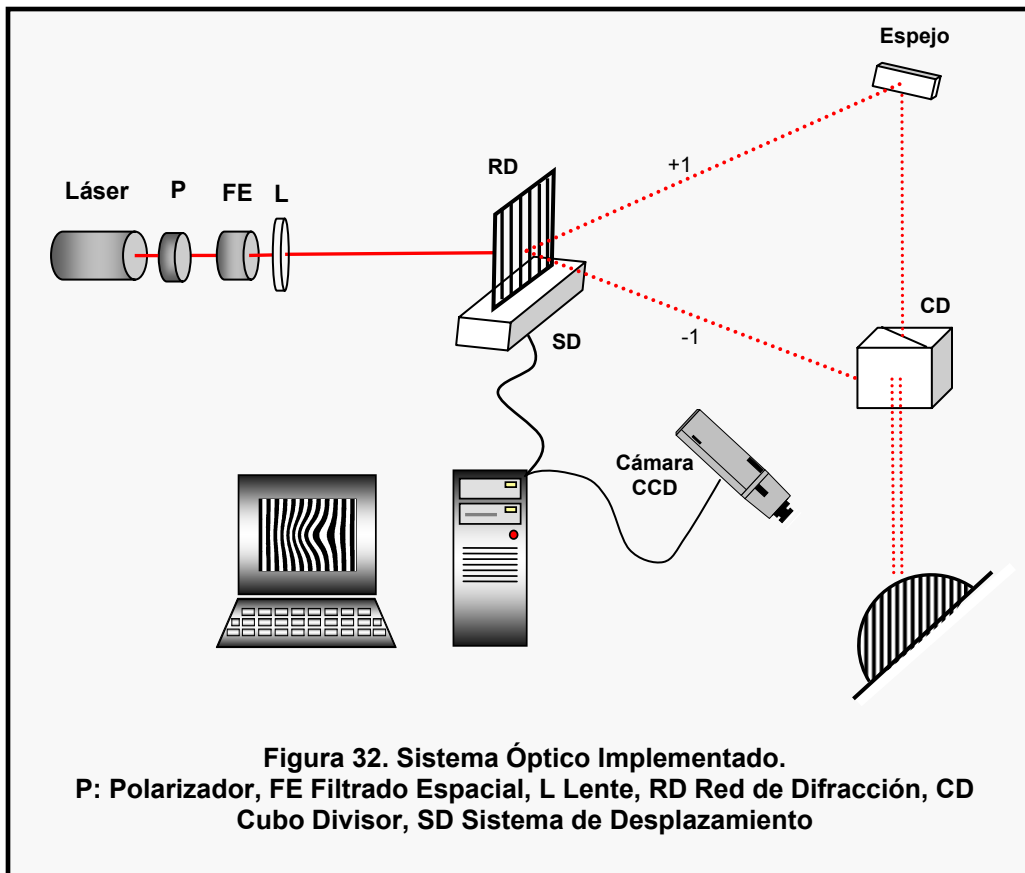
Remplazando se obtiene:

$$I = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \text{Cos} \frac{2\pi y}{P} - 4\pi \frac{vt}{a} \right) \quad (48)$$

Donde  $P = \frac{\lambda}{2 \text{sen}\theta}$

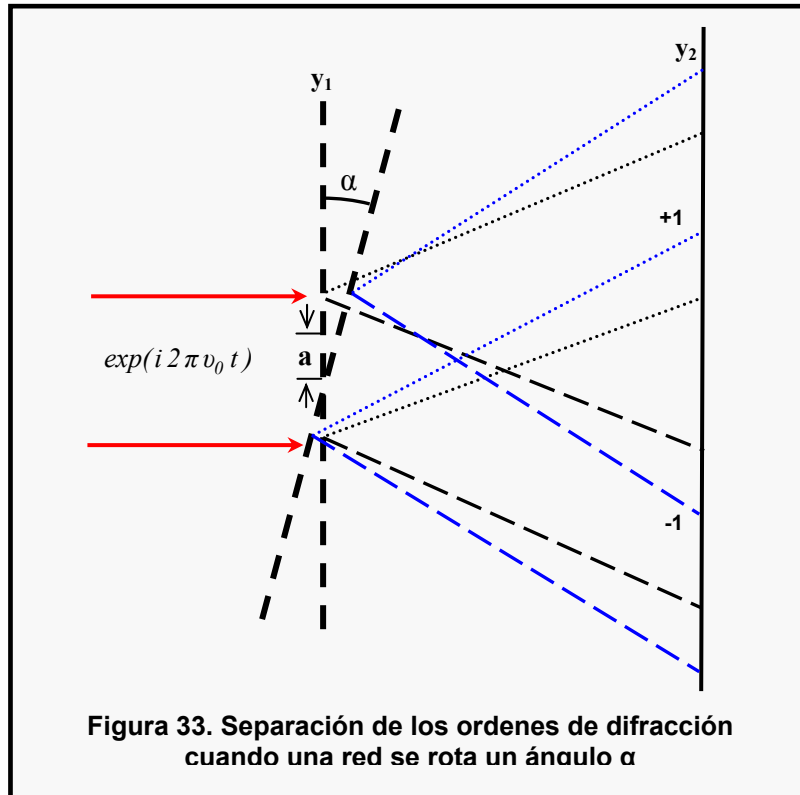
### 4.3 SISTEMA ÓPTICO IMPLEMENTADO

Con el fin de verificar experimentalmente el procedimiento de corrección de fase temporal, en este trabajo se implemento un sistema óptico con el fin de obtener un sistema de proyección de franjas con corrimientos y variaciones de paso continuos utilizando la interferometría heterodina por desplazamiento de una red de difracción. La siguiente figura muestra el sistema óptico implementado.



El Sistema Óptico consta principalmente de dos partes:

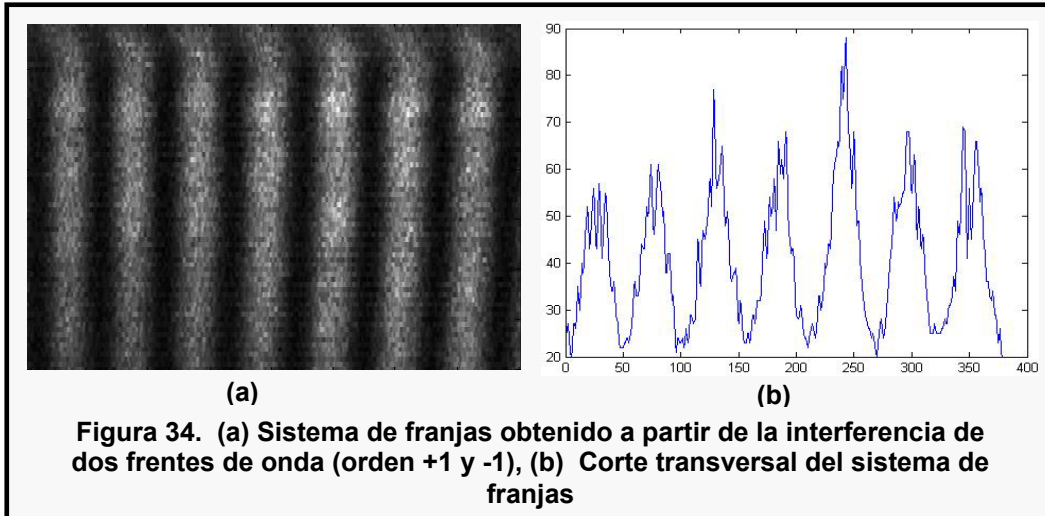
- Un sistema de proyección que contiene: una fuente de luz láser, un polarizador que permite atenuar la intensidad de la fuente de luz, un filtrado espacial y una lente para generar una onda plana con la cual se ilumina una red de difracción de 100 lpmm (líneas por milímetro), obteniendo a la salida los diferentes órdenes de difracción. Seleccionando dos de ellos (+1 y -1) utilizando un espejo y un cubo divisor, se logra obtener un sistema de franjas a partir de la interferencia de estos dos frentes de onda. A su vez, la red de difracción estaba ubicada sobre un sistema de rotación y traslación XY, los cuales permitían obtener a partir del movimiento de la red, los corrimientos de los sistemas de franjas y las múltiples variaciones en el paso. Es decir, cuando la red se rota un ángulo  $\alpha$  el paso efectivo  $a$  de la red cambia, (ver figura 33) alterando la separación entre los órdenes de difracción. Esta separación produce un aumento en el ángulo  $\theta$  con que interfieren los dos frentes de onda, obteniéndose sistemas de franjas de paso más pequeño. La traslación de la rejilla utilizando un motor de desplazamiento, permite obtener los corrimientos en los sistemas de franjas, necesarios para calcular la fase del objeto utilizando el algoritmo de corrimiento de fase.



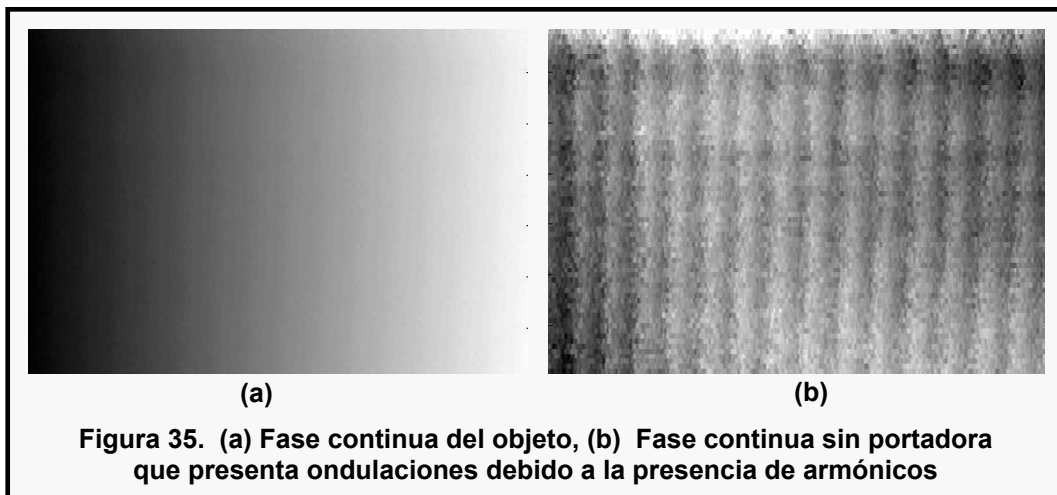
- Un sistema de observación que permite la adquisición de cada uno de los sistemas de franjas proyectados sobre el objeto. Para esto se utiliza una cámara CCD con un objetivo de focal 50 mm, con el eje óptico ubicado perpendicular al plano del objeto. Bajo estas condiciones se obtuvo un campo de observación de  $30 \times 40 \text{ mm}^2$ . El sistema que controla la adquisición permite sincronizar la captura de imágenes y el movimiento de la red.

#### 4.4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

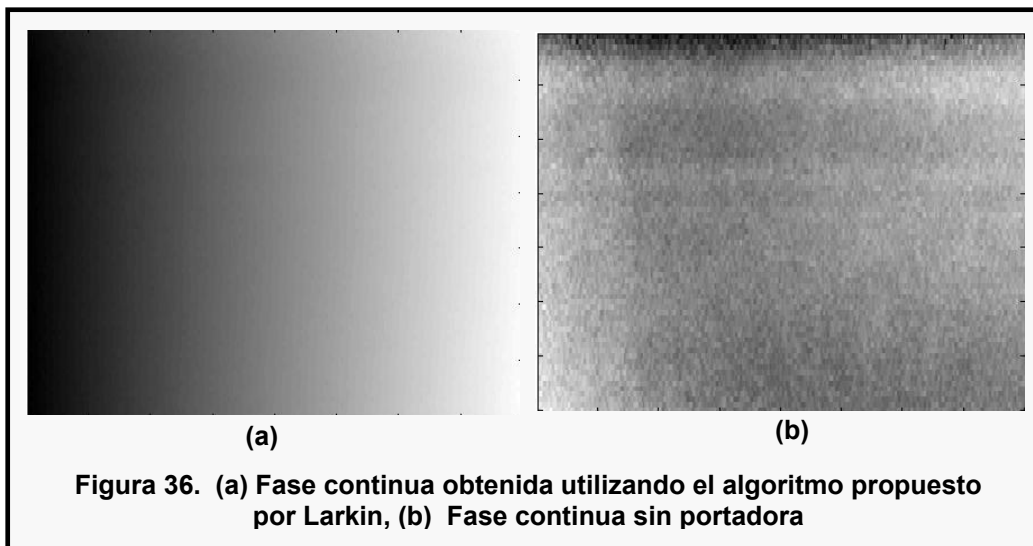
Los sistemas de franjas obtenidos a partir de la interferencia de dos frentes de onda, generaron sistemas de franjas que presentan perfiles no sinusoidales como el que se muestra en la figura 34a. Un corte transversal a este sistema de franjas evidencia esta problemática (ver figura 34b).



Al calcular la fase utilizando estos sistemas de franjas y el algoritmo de corrimiento de fase a 4 imágenes, se obtiene la fase continua mostrada en la figura 35(a). Finalmente para obtener únicamente la información que pertenece al objeto, en este caso un plano, es necesario extraer la portadora de la fase continua. De esta manera, la fase que se obtuvo presenta errores que en este caso se visualizan como las ondulaciones que se extienden a lo largo de la imagen (ver figura 35b) debido a la presencia de los armónicos generados por sistemas de franjas con perfiles no sinusoidales<sup>[19]</sup>.



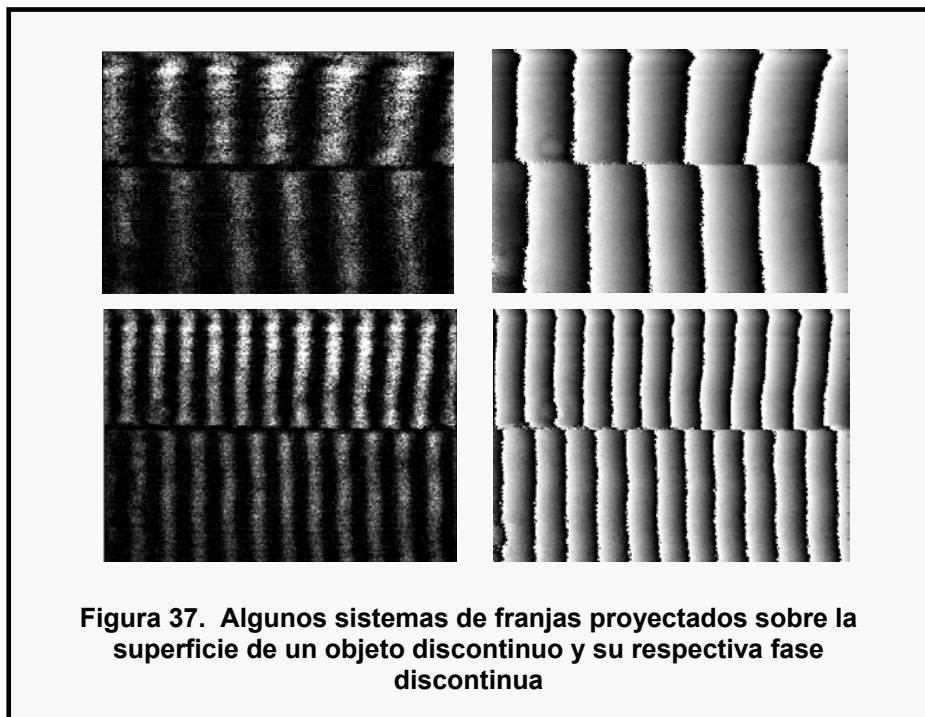
Esto representa un serio problema para el caso del algoritmo de corrección de fase temporal, ya que la fase de cada sistema de franjas proyectado presentaría este tipo de ondulaciones y el error aumentaría debido a que la fase continua final se obtiene a partir de la suma de las diferencias de fase de estos sistemas de franjas. Se han diseñado diferentes estrategias para reducir la influencia de los armónicos no senosoidales del perfil de las franjas. Inicialmente se pueden filtrar las franjas, pero el tratamiento requiere mucho tiempo de cálculo. Aprovechando la velocidad de adquisición del sistema, 30 FPS (Frame por Segundo) se utilizó el algoritmo propuesto por Larkin <sup>[20]</sup>. La idea básica del algoritmo es utilizar el algoritmo de corrimiento de fase a  $N$  imágenes pero tomando  $M$  imágenes, donde  $M > N$ , para calcular los coeficientes necesarios y apropiados que eliminen la influencia hasta el armónico  $j$ , donde  $j \geq 2$ . Así, tomando  $M=9$  en el algoritmo de  $N=4$  con corrimientos de  $\pi/2$ , se reducen las ondulaciones residuales de la figura 35, ver figura 36.

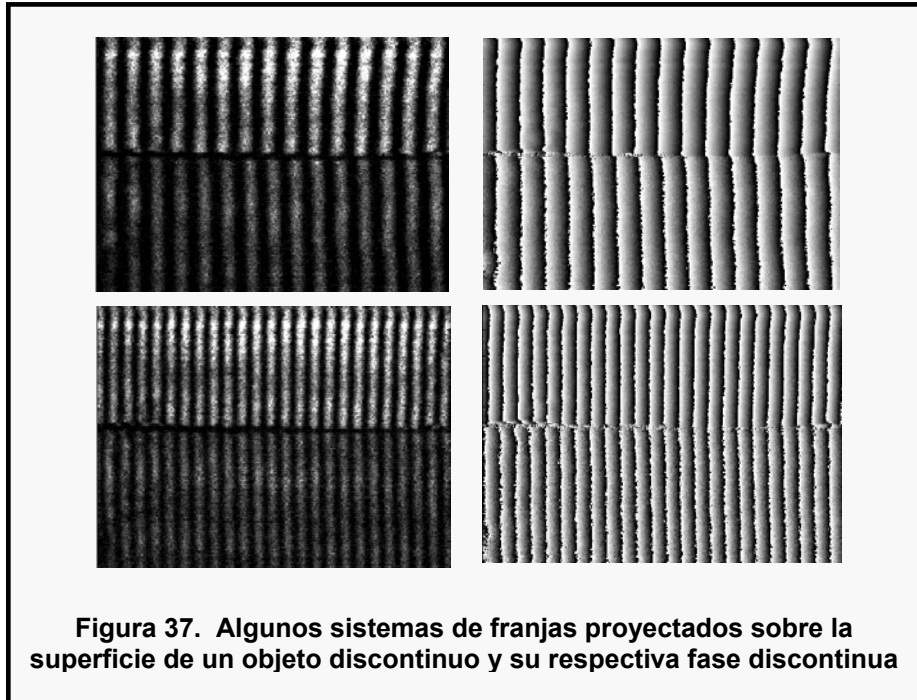


#### 4.4.1 ANALISIS EXPERIMENTAL DE OBJETOS

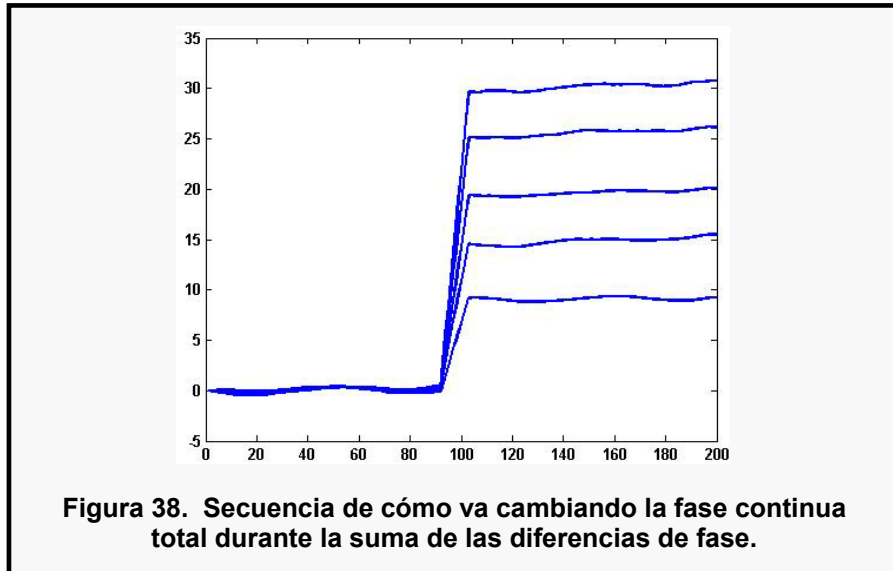
El proceso de reconstrucción 3D utilizando el algoritmo de corrección de fase temporal se iniciaba con la proyección de un sistema de franjas de paso cero, es decir, sobre toda la superficie del objeto a estudiar no debe proyectarse ninguna franja. Experimentalmente esto se consigue ajustando el ángulo del espejo del montaje, para que los dos frentes de onda tengan un ángulo  $\theta=0$ .

A partir de este, el objetivo era proyectar sistemas de franjas de paso variable, alterando secuencialmente el paso de proyección en una sola franja, en todo el campo de observación. De esta manera, para cada sistema de franjas proyectado se adquieren las imágenes necesarias para calcular las diferencias de fase utilizando el algoritmo propuesto por Larkin<sup>[20]</sup>. La figura 37 muestra algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie de un objeto discontinuo y sus respectivas fases discontinuas.

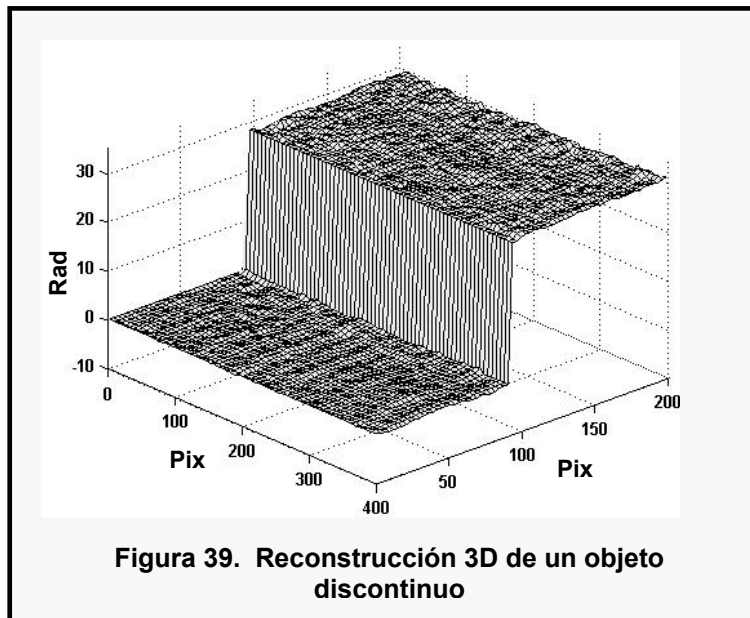




Una vez proyectados los diferentes sistemas de franjas y habiendo calculado la fase de cada uno de ellos, el siguiente paso es obtener las diferencias de fase secuencialmente, con el fin de obtener la fase continua total a partir de la suma de estas diferencias de fase, teniendo en cuenta que estas diferencias no deben presentar discontinuidades. La figura 38 muestra la secuencia de cómo va cambiando la fase continua total durante la suma de las diferencias de fase. Se observa que a medida que aumenta el número de patrones proyectados, se obtienen mas detalles del objeto.



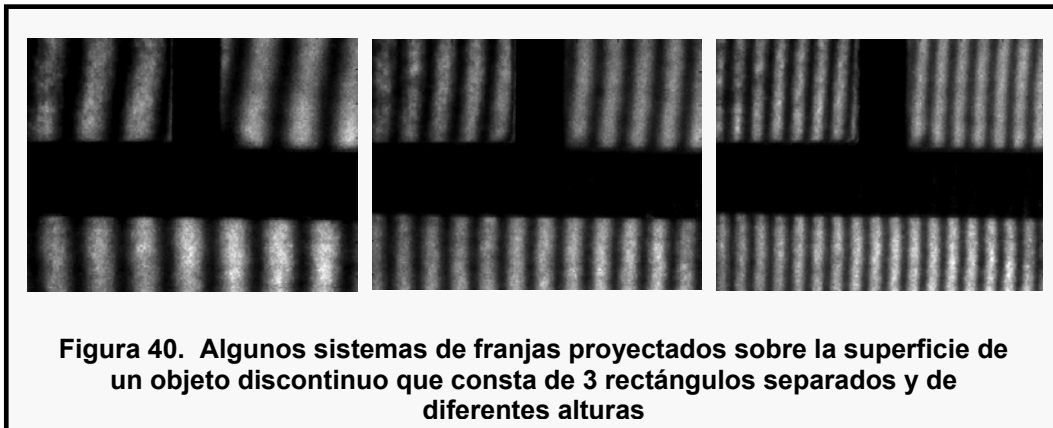
Finalmente, la figura 39 muestra el resultado del procedimiento de corrección temporal aplicado al objeto discontinuo analizado.



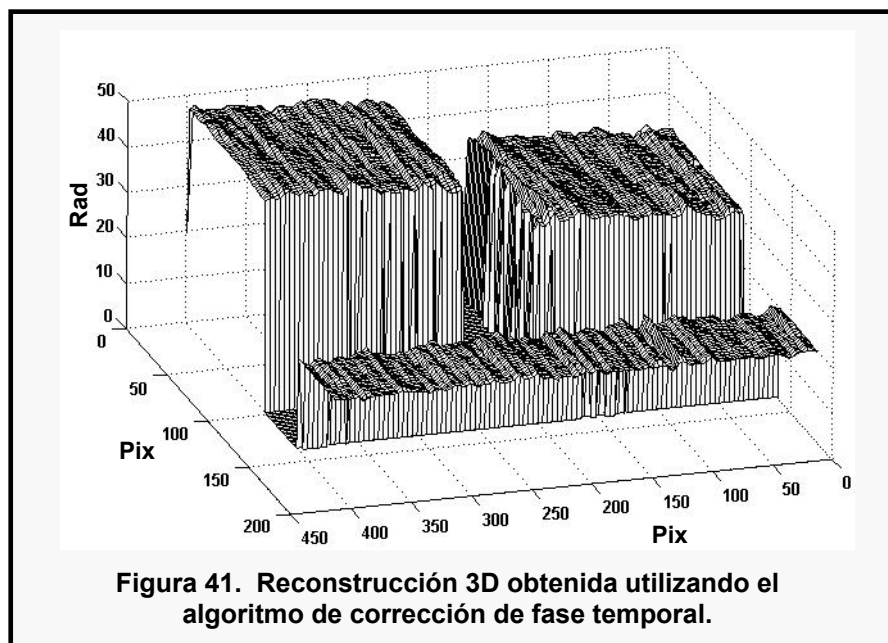
Siguiendo el procedimiento de reconstrucción explicado anteriormente, se reconstruyeron objetos más complicados para probar la efectividad del algoritmo ante la presencia de: múltiples discontinuidades, objetos separados en los cuales no hay continuidad en las franjas, entre otros. Las siguientes figuras muestran las

imágenes de algunos de los patrones de franjas proyectados sobre los objetos y la reconstrucción 3D correspondiente.

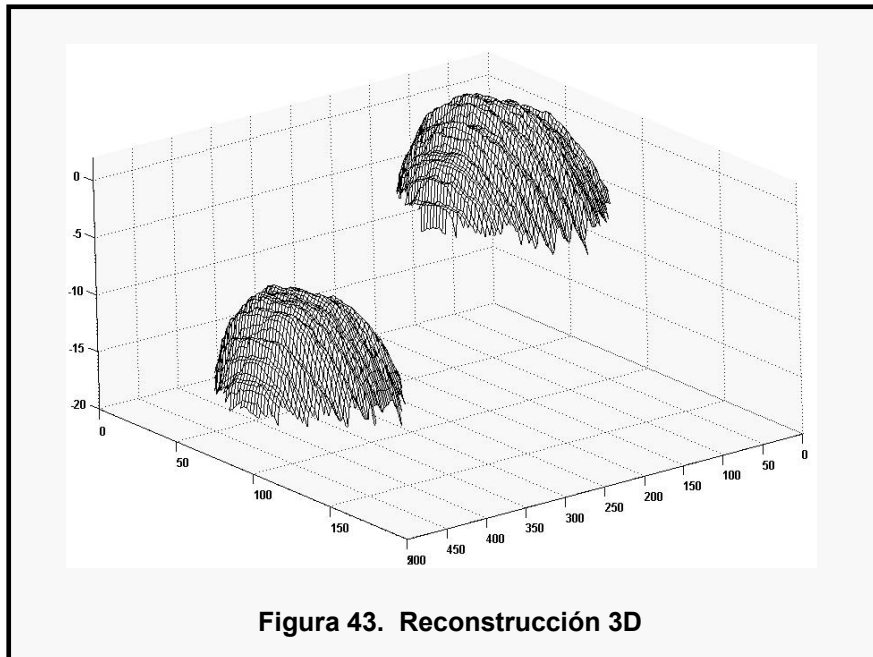
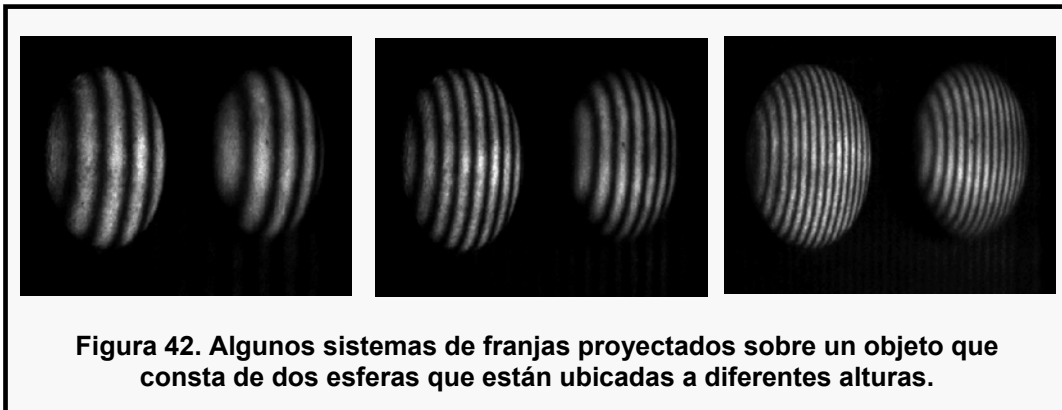
La figura 40 muestra algunos sistemas de franjas proyectados sobre la superficie de un objeto discontinuo que consta de 3 cubos separados y de diferentes alturas.

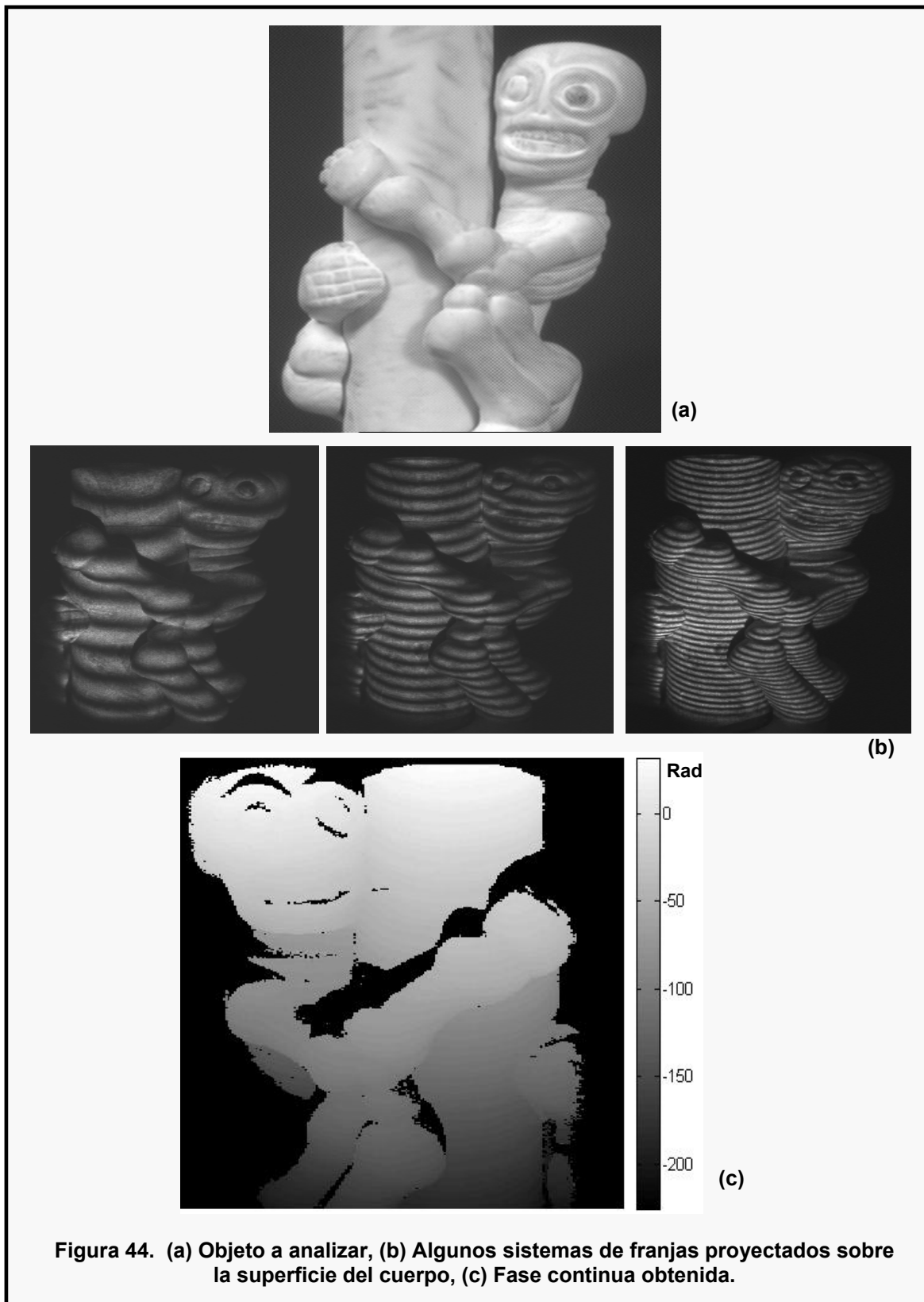


Aunque los objetos estén aislados y no halla información de fase que los conecte, el algoritmo de corrección de fase temporal permite obtener la fase absoluta continua total de cada píxel independientemente de los vecinos, pudiéndose determinar las variaciones en fase de cada rectángulo. La figura 41 muestra la reconstrucción 3D de la fase obtenida.



El siguiente objeto a analizar consta de dos esferas que están ubicadas a diferentes alturas. Nuevamente la separación de las esferas impide que halla información de fase que las conecte. La figura 42 muestra algunos sistemas de franjas proyectados sobre dicho objeto, mientras que la figura 43 muestra la reconstrucción 3D de la fase obtenida.





## **5. CONCLUSIONES**

Haciendo un análisis bibliográfico, tradicionalmente se utiliza como sistema de proyección un “Video Beam” para controlar digitalmente el paso de las franjas y los corrimientos de fase. Muy poca información se encuentra donde se utilicen sistemas ópticos análogos para proyectar y desplazar las franjas. Una alternativa bastante interesante en la generación del corrimiento continuo de franjas de interferencia es la de introducir un corrimiento temporal transversal a una red de difracción. Esto genera un sistema de franjas de interferencia heterodino, que sincronizado con la adquisición de imágenes permite obtener las imágenes de los corrimientos de fase necesarios en el algoritmo a  $N$  imágenes. El análisis matemático se discutió en el capítulo 4. Cuando se utiliza un “Video Beam” como sistema de proyección, cada píxel de proyección tiene una fase bien definida matemáticamente, asignándose los diferentes órdenes de franja. Como se ilustró en las diferentes secciones del capítulo 3, el algoritmo de corrección de fase temporal permite calcular la fase absoluta proyectada. Esto quiere decir que sobre la imagen adquirida de las franjas deformadas por el objeto, se obtienen los órdenes de franja exactos, usados en el sistema coordinado de proyección. Así, la franja de orden cero se identifica exactamente sobre las franjas deformadas por el objeto. Esto implica que se puede calcular la variación de fase absoluta que introduce el objeto con respecto al plano de referencia. De esta manera se pueden obtener fases y alturas absolutas con respecto al plano de referencia sin usar información de píxeles vecinos. Cuando se utiliza un sistema de proyección óptico-análogo, se generan muchos inconvenientes que se superaron para poder aplicar el algoritmo correctamente. Principalmente, no es posible asignar una fase a cada punto de proyección y obtener un diagrama de fase. Esto implica que a cada sistema de franjas proyectado se le calcula la fase discontinua sin inconvenientes, pero la diferencia de fase con el diagrama de fase vecino no se correlaciona espacialmente con la diferencia de fase de la siguiente secuencia de

proyección. Esto se debe a que no hay un punto con fase cero absoluto. La solución a este inconveniente se obtiene si a cada diferencia de fase se le asigna un píxel con fase cero y se utiliza para corregir las siguientes diferencias de fase. La suma total converge a la fase “pseudos absoluta” analizándose objetos complicados como los mostrados en las figuras 39, 41, 43 y 44.

Otro inconveniente que se presentó surge del perfil no senoidal de las franjas. Se ha demostrado bibliográficamente, que armónicos a uno en un perfil no senoidal genera ondulaciones residuales en el diagrama de fase del objeto. Este perfil no senoidal obtenido en el sistema de franjas adquirido por la CCD se debe a efectos no lineales en el proceso de digitalización. Principalmente, la cámara CCD de salida análoga, introduce un factor gamma de conversión no lineal utilizado para visualizar las imágenes en un monitor CRT. La influencia de estos errores y su reducción se ilustró en el capítulo 4 a partir del algoritmo propuesto por Larkin.

El principal inconveniente que se obtiene en esta técnica de corrección de fase, es la necesidad de adquirir múltiples imágenes con paso variable limitándose al estudio de objetos estáticos, como se realizó en este trabajo. El inconveniente surge de la necesidad de introducir una franja en todo el campo de observación entre cada sistema de franjas proyectado, para evitar la presencia de discontinuidades en fase. Una alternativa de solución surge del conocimiento previo entre las variaciones de franjas proyectadas. Es decir, sabiendo que se proyectan pasos de franjas potencias de 2, se sabe la cantidad exacta de discontinuidades de fase en cada píxel y la suma de diferencias de fase se le adicionan transiciones de fase conocidas.

Este trabajo de tesis genera varias perspectivas de investigación interesantes: por un lado, la posibilidad de reducir al máximo el número de sistemas de franjas proyectados y obtener el diagrama de fase de objetos complicados. Por otro lado,

**Aproximación Espacio-Temporal para la medida absoluta de la forma 3D de un objeto por proyección de franjas**

---

la necesidad de explotar la interferencia heterodina obtenida del desplazamiento de la red de difracción.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Salvi Joaquín. "Pattern codification strategies in structured light systems". Instituto de Informática, Universidad de Girona, España. 2001.
- [2] S. Xiansu y C. Wenjing, "Fourier Transform Profilometry: A review", Opt. Láser Eng. 35 263-284. (2001).
- [3] Zhang Song, Zhang Ping. "Reconstrucción tridimensional del contorno usando el método del desplazamiento de fase".Depto.de Ingeniería Industrial. SUNY.
- [4] D.C. Ghiglia and L.A. Romero, "Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods," J. Opt. Soc. Am. A 11, 107-117 (1994).
- [5] A. Baldi, F. Bertolino and F. Ginesu, "On the performance of some unwrapping algorithms," Opt. Laser Eng. 37, 313-330 (2002).
- [6] N. Egidi and P. Maponi, "A comparative study of two fast unwrapping algorithms," Appl. Math. Comp. 148, 599-629 (2004).
- [7] R. Windecker, S. Franz y J. Tiziani, "Optical roughness measurements with fringe projection", Appl. Opt. 38, 2837-2842 (1999).
- [8] Zayra Pérez, Lenny Romero, Jaime Meneses "Sistema Óptico de Reconstrucción 3D para la detección de ampollas en recubrimientos", Tesis Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [9] Meneses Jaime, Gharbi Tijani, Phillipe Humbert, "Phase unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram". Applied Optics, v.44, n.7, p.1207 - 1215, 2005.
- [10] S. Xiansu y C. Wenjing, "Fourier Transform Profilometry: A review", Opt. Laser Eng. 35 263-284. (2001).
- [11] D.W. Robinson, "Phase unwrapping methods," in Interferogram analysis: digital fringe pattern measurement techniques, D.W. Robinson and G.T. Reid, eds. (Bristol, England and Philadelphia, 1993)

[12] Chromatic confocal microscopy by means of continuum light generated through a standard single-mode fibre, JRGarzon<sup>1,2</sup>, J Meneses<sup>1,3</sup>, APlata<sup>1,3</sup>, TGharbi<sup>1</sup> and G Tribillon<sup>1</sup>

[13] MENESES JAIME, Plata Arturo, JOHNSON GARZON, ANGEL SUAREZ, Reconstrucción topográfica combinando simultáneamente métodos en luz monocromática con luz blanca.

[14] J.M. Huntley and J.R. Auckland, "Characterization of sources of  $2\pi$  phase discontinuity in speckle interferograms", J. Opt. Soc. Am. A, Vol 12, No 9, September 1995.

[15] Hong-Jun Su, Jie-Lin Li, Xian Yu Su, "Phase algorithm without the influence of carrier frequency", Opt. Eng. 36(6), 1799-1805, June 1997.

[16] Hong Zhao, Wenyi Chen and Yushan Tan, "Phase-unwrapping algorithm for the measurement of three-dimensional object shapes", Applied Optics Vol 33, No 20, July 1994.

[17] Henrik O. Saldner, Jonathan M. Huntley, "Profilometry using temporal phase unwrapping and a spatial light modulator-based fringe projector", Opt. Eng. 36(2) 610-615, February 1997.

[18] Joseph W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill.

[19] Jaime Meneses, "Système optique pour la mesure des déformations de la voute plantaire sous charge statique", Tesis Doctorado Université Franche Comté, 1998

[20] K.G. Larkin, K. Hibino, B.F. Oreb and D. I. Farrant. "Phase shifting for nonsinusoidal waveforms with phase-shift errors." J. Opt Soc. Am. A, Vol 12, No 4, April 1995