

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS DE BANACH CLÁSICOS

CARLOS MATEO BELTRÁN LARROTTA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2019

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS DE BANACH CLÁSICOS

CARLOS MATEO BELTRÁN LARROTTA

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director

Ronald Eduardo Paternina Salgado
Doctorado Ciencias-Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2019

DEDICATORIA

Dedicado a las dos mujeres de mi vida, mi madre Amanda Del Pilar Larrotta y mi novia Johanna Gabriela Niño.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia y en especial a mis padres Luis I. Beltrán Z. y Amanda D. Larrotta J. que fueron un gran apoyo emocional y económico a través de esta experiencia universitaria.

Mi director de tesis Ronald Eduardo Paternina por guiarme, apoyarme, motivarme y trabajar conmigo en esta tesis de grado.

Al profesor Rafael Fernando Isaacs por confiar en mi y brindarme su apoyo.

A mis calificadores Michael Alexander Rincón y Jose Edilberto Reyes.

Al director de escuela Julio Cesar Carrillo.

A mi novia, por apoyarme y brindarme amor durante todo este proceso.

A todos mis amigos con quienes he compartido esta etapa de mi vida, quienes me han apoyado incondicionalmente y la han convertido en una etapa inolvidable y de mucho aprendizaje.

A todos los Colombianos que pagan sus impuestos, que gracias a ellos, me fue posible acceder a una educación superior.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	10
1. Preliminares	14
1.1. Espacios de Banach	14
1.2. Topología débil y débil*	18
1.3. Sumas directas y subespacios complementados	18
1.4. Sucesiones básicas y bases	21
2. Espacio l_1	23
3. El espacio l_∞	52
4. El espacio c_0	69
5. Espacios l_p con $1 < p < \infty$	89
BIBLIOGRAFÍA	108

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LOS ESPACIOS DE BANACH CLÁSICOS *

AUTOR: CARLOS MATEO BELTRÁN LARROTTA **

PALABRAS CLAVE: ANÁLISIS FUNCIONAL, ESPACIO l_p ($1 \leq p \leq \infty$), ESPACIO c_0 .

DESCRIPCIÓN:

Los espacios c_0 y l_p con $1 \leq p \leq \infty$ desempeñan un papel central en la teoría de los espacios de Banach y conocer sus propiedades especiales es de mucha importancia para el estudio del análisis funcional. A pesar que estos espacios aparecieron mucho antes que se desarrollara una teoría sistemática de los espacios lineales normados, su geometría (junto con la de $C(K)$) es frecuentemente utilizada para comparar algunos fenómenos estudiados del análisis funcional antes de ser reconocidos como propiedades naturales.

Así, se han hecho muchos esfuerzos continuos por comprender su geometría, entre estos esfuerzos destacamos principalmente los hechos por Banach, Mazur, Pełczyński, Schur, Sobczyk, Veech, Lindenstrauss, Zippin, Robert James, R.S Phillips. Todos los teoremas que se presentarán en este trabajo se pueden atribuir a alguna de estas personas.

El contenido de este trabajo se basa principalmente en estudiar algunas técnicas fundamentales del análisis funcional junto con algunas ideas de las bases en espacios de Banach aplicadas al estudio de algunas propiedades geométricas de los espacios l_p para $1 \leq p \leq \infty$ y c_0 .

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Ronald Eduardo Paternina Salgado, Doctorado en Ciencias-Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF CLASSIC BANACH SPACES *

AUTHOR: CARLOS MATEO BELTRÁN LARROTTA **

KEYWORDS: FUNCTIONAL ANALYSIS, SPACE l_p ($1 \leq p \leq \infty$), SPACE c_0 .

DESCRIPTION:

The spaces c_0 and l_p with $1 \leq p \leq \infty$ play a central role in the theory of Banach spaces and knowing their special properties is very important for the study of functional analysis. Although these spaces appeared long before a systematic theory of normed linear spaces was developed, their geometry (together with $C(K)$'s geometry) is frequently used to compare some studied phenomena of functional analysis before being recognized as natural properties.

Thus, many continuous efforts have been made to understand its geometry, among these efforts we highlight mainly those made by Banach, Mazur, Peczynski, Schur, Sobczyk, Veech, Lindenstrauss, Zippin, Robert James, R. Phillips. All the theorems that will be presented in this work can be attributed to any of these people.

The content of this work is mainly based on studying some fundamental techniques of functional analysis together with some ideas of the bases in Banach spaces applied to the study of some geometric properties of the spaces l_p for $1 \leq p \leq \infty$ and c_0 .

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ronald Eduardo Paternina Salgado, Doctorado en Ciencias-Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El análisis funcional constituye una importante rama de la matemática moderna, cuya consolidación definitiva como rama independiente e importante del análisis matemático tuvo lugar en el año 1932. Este hecho se debe en gran parte a la publicación de la tesis de Stefan Banach y las monografías escritas por John von Neumann y Marshall Stone.

En el trabajo de S. Banach, titulado *Théorie des Opérations Linéaires*, define axiomáticamente espacio vectorial real, normado (presenta la noción correcta de espacio normado) y completo, entre otros resultados, se presenta una versión del principio de acotación uniforme y el principio de contracción en espacios métricos completos ¹. Además, reúne los resultados más importantes que se conocían hasta la fecha, incluyendo los tres principios fundamentales del análisis funcional (los dos primeros aparecen en el ambiente general de los F -espacios), la teoría de Riesz de operadores compactos, las bases y sucesiones básicas de un espacio normado y, finalmente, la convergencia débil y débil* de sucesiones, probándose versiones secuenciales de los teoremas de Banach-Alaoglu y Dieudonné.

Los espacios de Banach son espacios normados en los que toda sucesión de Cauchy es convergente (esto se conoce como completitud).

En 1960 la actividad de investigación matemática en el área de espacios normados y de Banach creció considerablemente. La mayoría de los problemas clásicos bien conocidos fueron resueltos, a su vez profundas conexiones entre la teoría de espa-

¹ J. Cabello. "Análisis funcional". 2008. URL: <https://www.ugr.es/~jcabello/Analisis%20funcional.pdf>.

cios de Banach y otras áreas de la matemática se establecieron.

Los espacios c_0 y l_p con $1 \leq p \leq \infty$ desempeñan un papel central en la teoría de los espacios de Banach y conocer sus propiedades especiales es de mucha importancia para el estudio del análisis funcional. A pesar que estos espacios aparecieron mucho antes que se desarrollara una teoría sistemática de los espacios lineales normados, su geometría (junto con la de $C(K)$) es frecuentemente utilizada para comparar algunos fenómenos estudiados del análisis funcional antes de ser reconocidos como propiedades naturales.

Así, se han hecho muchos esfuerzos continuos por comprender su geometría, entre estos esfuerzos destacamos principalmente los hechos por Banach, Mazur, Pełczyński, Schur, Sobczyk, Vech, Lindenstrauss, Zippin, Robert James, R.S Phillips. Todos los teoremas que se presentarán en este trabajo se pueden atribuir a alguna de estas personas.

El contenido de este trabajo se basa principalmente en estudiar algunas técnicas fundamentales del análisis funcional junto con algunas ideas de las bases en espacios de Banach aplicadas al estudio de las propiedades geométricas de los espacios l_p para $1 \leq p < \infty$ y c_0 .

En el Capítulo 1 se inicia dando las definiciones básicas que se usarán en los capítulos subsiguientes. Se enuncian algunos resultados conocidos en el análisis funcional, como el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, y finalmente se dan algunas propiedades y caracterizaciones sobre las sucesiones básicas y bases (Principio de selección de Bessaga y Pełczyński) en espacios de Banach.

En el Capítulo 2 se estudiarán algunas propiedades de l_1 que caracterizan este espacio, empezando por definiciones y propiedades básicas, como lo son: l_1 es un espacio de Banach, l_1 tiene base, l_1 es separable y que su espacio dual es l_∞ . Luego, demostraremos que cada espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de l_1 y que l_1 tiene la propiedad de Schur, esto es, cada sucesión en l_1 es débilmente convergente si y solo si es convergente en norma. También demostraremos que l_1 tiene un subespacio cerrado no complementado. Finalizamos este capítulo mostrando que l_1 es primo, esto es, cada subespacio complementado de dimensión infinita de l_1 es isomorfo a l_1 .

En el Capítulo 3 se estudiarán algunas propiedades de l_∞ que caracterizan este espacio, empezando por definiciones y propiedades básicas, como lo son: l_∞ es un espacio de Banach, l_∞ no es separable, l_∞ no tiene base y calculamos su espacio dual y demostramos que es el conjunto de las medidas finitamente aditivas y de variación acotada sobre \mathbb{N} . Luego, demostraremos que un espacio de Banach X tiene un conjunto normado contable si y solo si X es isométrico a un subespacio de l_∞ . Finalizamos este capítulo mostrando que l_∞ es inyectivo.

En el Capítulo 4 se estudiarán algunas propiedades de c_0 que caracterizan este espacio, empezando por definiciones y propiedades básicas, como lo son: c_0 es un espacio de Banach, c_0 tiene base, c_0 es separable y c_0 no es reflexivo. Luego, demostraremos que c_0 no es complementado en l_∞ y que c_0 no es isomorfo a un espacio dual. También demostramos que c_0 es separablemente inyectivo. Finalizamos este capítulo mostrando que c_0 es primo.

Finalizando, en el Capítulo 5 se estudiarán algunas propiedades de l_p que caracterizan este espacio, empezando por definiciones y propiedades básicas, co-

mo lo son: l_p es un espacio de Banach, l_p tiene base, l_p es separable y que su espacio dual es l_q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, demostraremos que l_p no es isomorfo a l_r cuando $p \neq r$ con $1 < p, r < \infty$ y que l_p es primo. También estudiamos el método de descomposición de Pełczyński. Finalizamos este capítulo mostrando que ningún subespacio cerrado de dimensión infinita de l_p es isomorfo a algún subespacio cerrado de l_q con demostrando que l_p no es isomorfo a l_q cuando $p \neq q$ con $1 < p, q < \infty$ $p \neq q$.

1. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones, teoremas y demás resultados preliminares que facilitarán la manera de abordar el estudio de las propiedades de los espacios de Banach de sucesiones; se iniciará con algunos resultados de los espacios de Banach, después se hace mención de algunas propiedades de la topología débil y débil* seguido de resultados de la suma directa y subespacios complementados, terminando con un paso breve por sucesiones básicas y bases, de manera que las pruebas en este trabajo estén (o sean resultados inmediatos de anteriores teoremas) todas sustentadas en este mismo. Todos los resultados enunciados en este capítulo pueden ser consultados en ², ³, ⁴ y ⁵.

1.1. Espacios de Banach

En esta sección iniciamos recordando algunos preliminares sobre la teoría de los espacios de Banach. Comenzamos estableciendo la definición de un espacio de Banach.

Definición 1.1 *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo, es decir, es un espacio vectorial normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.*

² E. KREYSZIG. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley Sons, New York, 1978.

³ R. E. MEGGINSON. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.

⁴ J. DIESTE. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1984.

⁵ W. RUDIN. *Functional Analysis*. McGraw-Hill book company, New York, 1991.

El siguiente resultado garantiza la convergencia de una serie en un espacio de Banach a partir de la convergencia absoluta de series.

Teorema 1.2 *Sea X un espacio vectorial normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1) X es un espacio de Banach.
- 2) Si $x_n \in X$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X , es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pertenece a X .

Definición 1.3 *Para un espacio normado X su dual $X^* = L(X, \mathbb{R})$ es el conjunto de los funcionales lineales y continuos sobre X . Para un $f \in X^*$ su norma esta dada por la fórmula:*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|, \quad \text{con } x \in X.$$

Cuando no hay confusión podemos escribir $\|f\|$ en lugar de $\|f\|_{X^}$.*

Dado $f \in X^$ y $x \in X$, en ocasiones escribiremos $\langle f, x \rangle$ en lugar de $f(x)$.*

Teorema 1.4 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

Definición 1.5 *Sea X un espacio lineal normado y sea X^* su espacio dual con la norma definida anteriormente. El bidual $X^{**} = L(X^*, \mathbb{R})$ es el espacio dual de X^* y para un $\gamma \in X^{**}$ su norma esta dada por*

$$\|\gamma\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle \gamma, f \rangle|, \quad \text{con } f \in X^*.$$

Definición 1.6 *Sea X un espacio vectorial normado. Para cada $x \in X$, considere el funcional $J_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $J_x(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Entonces, J_x*

pertenece a X^{**} por cada $x \in X$ y $\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|$. La función $J : X \rightarrow X^{**}$ definida por $J(x) = J_x$ es llamada la inyección canónica de X en su bidual.

Definición 1.7 Un espacio normado X es reflexivo si $J(X) = X^{**}$ donde $J : X \rightarrow X^{**}$ es la inyección canónica.

Definición 1.8 Se define c_0 por:

$$c_0 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } (x_n) \text{ converge a cero}\}.$$

c_0 es un espacio vectorial normado con la norma definida por $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ para todo $x = (x_n)_{n \geq 1}$.

Definición 1.9 Se define l_p para $1 \leq p < \infty$ por:

$$l_p = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

l_p es un espacio vectorial normado con la norma definida por $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ para todo $x = (x_n)_{n \geq 1}$.

Definición 1.10 Se define l_∞ por

$$l_\infty = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } (x_n)_{n \geq 1} \text{ es acotado}\}.$$

l_∞ es un espacio vectorial normado con la norma definida por $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ para todo $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_\infty$.

Nota 1 1. Los espacios l_p y c_0 con $1 \leq p \leq \infty$ con las operaciones usuales de suma entre sucesiones y producto de sucesiones con escalares están bien definidos.

En efecto, sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ veamos que $\alpha * ((x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in l_p$ con $1 \leq p < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha * (x_n + y_n)|^p \leq \alpha^p * \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right), \quad \text{como } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha * (x_n + y_n)|^p \leq \infty.$$

Luego, los espacios l_p con $1 \leq p < \infty$ están bien definidos.

2. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es continuo si, y solo si, T es acotado.

Teorema 1.11 (Teorema de la aplicación abierta): Sean X y Y espacios de Banach. Si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado y sobreyectivo, entonces T es una aplicación abierta.

El siguiente resultado es un corolario del teorema de la aplicación abierta y garantiza la continuidad del operador T^{-1} , además permite relacionar las normas de los espacios X y Y de manera que sean equivalentes por medio del operador T .

Corolario 1.12 Sean X y Y espacios de Banach. Si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado biyectivo, entonces T^{-1} es continuo, además existen números reales positivos a y b tales que:

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Teorema 1.13 (Teorema de Banach-Steinhaus) Sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y . Si $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\}$ es finita para cada $x \in X$, entonces $\sup\{\|T_i\| : i \in I\}$ es finito, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que $\|T_i(x)\| \leq c\|x\|$ para toda $x \in X$ y toda $i \in I$ y $c = \sup\{\|T_i\| : i \in I\}$.

A continuación presentamos el teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.14 (Teorema de Hahn-Banach para espacios normados) Sea f un funcional lineal acotado definido sobre un subespacio Y de un espacio vectorial normado X , entonces, existe un funcional lineal acotado \tilde{f} definida sobre X el cual es una extensión de f a X y tiene la misma norma que f , es decir, $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Y$.

1.2. Topología débil y débil*

En esta sección estamos interesados en recordar algunas propiedades de la topología débil y débil* que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.15 Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X . Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x si y solo si $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para toda f elemento de X^* .

Teorema 1.16 Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x , entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

Teorema 1.17 (Banach-Alaouglu) Para todo espacio vectorial normado X la bola unitaria B_{X^*} es débil* compacto y por tanto todo subconjunto débil* cerrado y acotado de X^* es débil* compacto.

Teorema 1.18 Sea X un espacio de Banach separable. Entonces, B_{X^*} es métrizable en la topología débil* de X^* .

1.3. Sumas directas y subespacios complementados

Recordemos que las proyecciones ortogonales juegan un papel muy importante en el estudio de los espacios de Hilbert. En el caso de los espacios de Banach, se generaliza este concepto de proyección, conservando algunos de las propiedades

que dichos operadores tienen en los espacios de Hilbert. Sabemos que si H es un espacio de Hilbert y P es una proyección ortogonal, entonces $I - P$ también lo es y todo elemento $h \in H$ se escribe de manera única como $h = h_1 + h_2$ con $h_1 \in P(H)$ y $h_2 \in (I - P)(H)$. Este resultado sigue siendo válido para espacios de Banach. Para ello tenemos la definición:

Definición 1.19 Sean F y G dos subespacios cerrados. Decimos que X es la suma directa de F y G si

1. $F \cap G = \{0\}$
2. $F + G = X$

De aquí se deduce que $x \in X$ se puede escribir de manera única como $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in G$.

Nota 2

1. Supondremos que el símbolo \cong señalará la existencia de un isomorfismo entre las extremidades del miembro de la izquierda y el miembro de la derecha respectivamente.
2. Cuando estudiemos el espacio l_p con $1 \leq p < \infty$, denotaremos a $F \oplus G$ con una norma del tipo $\|y + z\|_p = (\|y\|^p + \|z\|^p)^{\frac{1}{p}}$ para $1 \leq p < \infty$ y en este caso la suma se escribe $F \oplus_p G$ que es también un espacio de Banach con esta norma. Como en \mathbb{R}^2 todas las normas son equivalentes entonces

$$(F \oplus G)_1 \cong (F \oplus G)_p \cong (F \oplus G)_\infty \quad (*)$$

donde $\|y + z\|_\infty = \max\{\|y\|, \|z\|\}$.

3. Si definimos el operador $T : F \oplus_1 G \longrightarrow F \oplus G \subseteq X$ como $T(y \oplus z) = y + z$,

entonces T es lineal, biyectiva y

$$\|T(y \oplus z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|y \oplus z\|_1$$

Es decir T es continua y $\|T\| \leq 1$. Por el teorema de la aplicación abierta tenemos que T^{-1} es un operador acotado, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que $\|y\| + \|z\| \leq c\|y + z\|$. Por tanto, $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$ en $F + G$ y así $\|\cdot\|_p$ también es equivalente a $\|\cdot\|$ en $F + G$. Luego de (*) se sigue que

$$F \oplus G \cong (F \oplus G)_1 \cong (F \oplus G)_p \cong (F \oplus G)_\infty.$$

Definición 1.20 Sea X un espacio de Banach. Un subespacio cerrado F de X se llama complementado, si existe una proyección P de X sobre F .

Teorema 1.21 Si un subespacio F de un espacio de Banach X es complementado y $P : X \rightarrow F$ es una proyección de X sobre F , entonces $I - P$ también es una proyección y cada elemento $x \in X$ se puede escribir de manera única como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in F$ y $x_2 \in (I - P)X = G$. Esto es, $X = F \oplus G$. Recíprocamente, si $X = F \oplus G$ entonces F y G son subespacios complementados de X .

Definición 1.22 Suponga que $(X_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de espacios de Banach, definimos la suma l_p de los espacios X_n como el espacio de todas las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ con $x_n \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_{X_n})^p < \infty$ para el caso $p < \infty$ y en el caso infinito, $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \geq 1} \|x_n\|_{X_n} < \infty$. Este espacio es denotado por $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p$.

Definimos $c_0(X) = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \|x_n\| \rightarrow 0\}$ y $l_p(X) = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_X)^p < \infty\}$.

1.4. Sucesiones básicas y bases

Sean $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ elementos de un espacio de Banach X , la n -ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es la suma definida como $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ que está dada por los primeros n -términos.

Definición 1.23 *Una serie en un espacio de Banach X se llama convergente si la sucesión de sus sumas parciales converge en la norma de X . El límite de esta sucesión se llama suma de la serie y escribimos $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ para entender que $\|S_n - s\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. En este caso $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ y decimos que la serie converge a s .*

Definición 1.24 (Base de Schauder) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X es una base de Schauder de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge a x .*

Nota 3 *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X , entonces definimos*

$$\text{Span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Denotamos por $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ la clausura del $\text{Span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Definición 1.25 (Sucesión básica) *Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach es llamada sucesión básica en X si para todo $x \in \overline{\text{Span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ podemos encontrar una única sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge a x .*

Teorema 1.26 *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores no nulos en un espacio de Banach X . Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica si, y solo si, existe una constante finita $K > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y cualquier entero*

$m < n$ se tiene:

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Definición 1.27 (Sucesión básica bloque) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base para un espacio de Banach X . Suponga que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números enteros con $P_0 = 0$ y que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son escalares. Entonces, una sucesión de vectores no nulos $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X de la forma

$$\mu_n = \sum_{j=P_{n-1}+1}^{P_n} a_j x_j$$

se llama una sucesión básica bloque de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.28 (Sucesión equivalente) Sean X y Y dos espacios de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones básicas de X y Y respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, y solamente si, cada vez que tomamos una sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ converge si y solo si } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \text{ converge.}$$

El próximo teorema nos da una condición para decidir si dos sucesiones básicas son equivalentes.

Teorema 1.29 Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones básicas en un espacio de Banach. Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son equivalentes si y solamente si existe un isomorfismo $T : [x_n]_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [y_n]_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $T x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.30 (Principio de selección de Bessaga y Pełczyński) Sea X un espacio de Banach y suponga que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $z_n \rightarrow 0$ débilmente pero $\|z_n\| \not\rightarrow 0$. Entonces $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión básica equivalente a una sucesión básica bloque de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Espacio l_1

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de l_1 . Veremos que este espacio tiene propiedades muy particulares que lo caracterizan y que muchas de estas propiedades no tienen equivalente en los demás espacios que estudiamos c_0 , l_∞ y l_p con $p > 1$. Comenzamos mostrando propiedades básicas de l_1 que serán útiles para listar y demostrar propiedades especiales de l_1

Teorema 2.1 l_1 es un espacio de Banach.

Demostración: Considere $(x^k)_{k \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en l_1 . Sean n, k y l números naturales, tenemos

$$|x^k(n) - x^l(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^k(n) - x^l(n)| = \|x^k - x^l\|_1$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ la sucesión numérica $(x^k(n))_{k \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo la sucesión converge a un número $x(n)$. Veamos que $x = (x(n))_{n \geq 1} \in l_1$ y que $x_n \rightarrow x$ en l_1 de la sucesión $(x^k)_{k \geq 1}$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe un natural m tal que si $k, l \in \mathbb{N}$ y $k, l \geq m$, entonces $\|x^k - x^l\| \leq \varepsilon$. En particular, $\|x^k - x^m\| \leq \varepsilon$. Además para n fijo obtenemos :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x^k(j)| &\leq \sum_{j=1}^n |x^m(j)| + \sum_{j=1}^n |x^k(j) - x^m(j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x^m(j)| + \varepsilon = \|x^m\|_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando k tiende a ∞ , obtenemos que

$$\sum_{j=0}^n |x(j)| \leq \|x^m\|_1 + \varepsilon$$

Como esta última cantidad no depende de n , obtenemos que x pertenece a l_1 . Además, si n es un número natural fijo, k, l son naturales mayores o iguales a m obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |x^k(j) - x^l(j)| \leq \|x^k - x^l\| \leq \varepsilon$$

Así que, pasando al límite cuando k tiende a ∞ , obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |x(j) - x^l(j)| \leq \varepsilon$$

y como esta desigualdad es válida para todo número natural n , obtenemos $\|x - x^l\| \leq \varepsilon$ para todo $l \geq m$. Luego, la sucesión $(x^k)_{k \geq 1}$ converge a x en l_1 . Por tanto, l_1 es un espacio de Banach. ■

Teorema 2.2 l_1 tiene una base de Schauder.

Demostración: Demostremos que los vectores coordenados unitarios $(e_k)_{k \geq 1}$ forman una base de l_1 .

En efecto, sea $x = (x(k))_{k \geq 1}$ un elemento de l_1 . Entonces como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|$ converge, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| = 0$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si n es natural mayor o igual a N se tiene que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \leq \varepsilon.$$

Por tanto, si n es mayor o igual a N obtenemos:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x(k)e_k \right\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \leq \varepsilon,$$

lo que demuestra que $x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k$. ■

Teorema 2.3 l_1 es separable.

Demostración: Consideremos $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los vectores coordenados unitarios de l_1 . Definimos el conjunto

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i : n \in \mathbb{N}, \gamma_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $x = (x(i))_{i \in \mathbb{N}}$ un elemento de l_1 . De la definición de e_i sabemos que $x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)e_i$. Entonces, existe un número natural N tal que $\|x - \sum_{i=1}^N x(i)e_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , para $i = 1, 2, \dots, N$ existen $\gamma_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|x(i) - \gamma_i| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Podemos definir $x(N) = \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i$, se tiene que $x(N) \in S$ para cada $N \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} \|x - x(N)\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^N x(i)e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N x(i)e_i - \sum_{i=1}^N \gamma_i e_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^N (x(i) - \gamma_i)e_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N |x(i) - \gamma_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto S es denso en l_1 . Veamos ahora que S es contable. Para ello, definimos para cada número natural n ,

$$S_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i : \gamma_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Entonces $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ y por tanto es suficiente demostrar que S_n es contable para

cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y defina la función $f: S_n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ por:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

Entonces, f es inyectiva, ya que si tomamos

$$f\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n s_i e_i\right),$$

tenemos que $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y por lo tanto

$\gamma_1 = s_1, \gamma_2 = s_2, \dots, \gamma_n = s_n$. Luego, S_n es equipotente con $f(S_n)$. Además, como \mathbb{Q} es contable, entonces \mathbb{Q}^n es contable y ya que $f(S_n)$ es un subconjunto de \mathbb{Q}^n se sigue que $f(S_n)$ es contable para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, S_n es contable para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, S es unión de conjuntos contables, por tanto es contable. ■

Teorema 2.4 l_1^* es isométrico a l_∞ . La isometría es definida como sigue: Para f en l_1^* , Tf es la sucesión $(f(e_n))_{n \geq 1}$; Recíprocamente, para y en l_∞ , $T^{-1}y$ es el elemento de l_1^* dado por

$$(T^{-1}y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n), \quad (x \in l_1).$$

Demostración: En esta demostración, denotamos todas las normas por $\|\cdot\|$, sugerimos al lector recordar su significado en los distintos espacios que aparecen. Consideremos f un elemento de l_1^* y sea Tf la sucesión $(f(e_n))_{n \geq 1}$, es decir

$$(Tf)(e_n) = f(e_n).$$

Como $|f(e_n)| \leq \|f\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, Tf pertenece a l_∞ y $\|Tf\| \leq \|f\|$. Ahora, si x esta en l_1 , entonces por Teorema 2.2 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$ y como f es lineal y continua tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tf)(n)x(n).$$

entonces,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |Tf(e_n)| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \right) \\ |f(x)| &\leq \|Tf\|_{\infty} \|x\|_1, \end{aligned}$$

luego, $\|f\| \leq \|Tf\|$ y por tanto T es una isometría.

Considere y en l_{∞} y defina un funcional f de l_1^* por la relación

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n).$$

Es claro que f es lineal y continua y de la definición de T se sigue que $y = T(f)$. Luego T es una isometría sobreyectiva.

La demostración del siguiente teorema es muy similar a la prueba del teorema de la aplicación abierta de Banach. Esto nos deja claro que Banach profundizó el concepto de completitud. ■

Teorema 2.5 *Cada espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de l_1 .*

Demostración: Sea X un espacio de Banach separable, demostremos que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_X$ es un conjunto denso en la bola unitaria de X , entonces la función $Q : l_1 \rightarrow X$ definida por

$$Q((\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)x_n$$

es un operador lineal continuo y sobreyectivo.

1. Q está bien definida, es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)x_n$ converge. En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(n)x_n\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| \|x_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| < \infty. \end{aligned}$$

Luego, como $(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a l_1 , la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)$ es absolutamente convergente en \mathbb{R} y por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(n)x_n\|$ es convergente en X . Como X es un espacio de Banach, por Teorema 1.2 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)x_n$ es convergente, luego Q está bien definida.

2. Q es un operador lineal continuo. Claramente Q es lineal, para la continuidad, sea $(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en l_1 , entonces

$$\begin{aligned} \|Q((\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}})\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(n)x_n\| \quad \|x_n\| \leq 1, n \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| \\ &= \|(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Q es continuo y $\|Q\| \leq 1$.

3. Demostremos que Q es sobreyectivo. Sea $x \in B_X$, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en B_X existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$. Si existe un $k = 1, 2, \dots, n_1$ tal que $2(x - x_{n_1}) - x_k = 0$, entonces $x - x_{n_1} - \frac{x_k}{2} = 0$, luego $x = x_{n_1} + \frac{x_k}{2} = Q(e_{n_1}) + Q(\frac{e_k}{2})$ esto es, $x = Q(e_{n_1} + \frac{e_k}{2})$ y el vector $v = e_{n_1} + \frac{e_k}{2}$ está en l_1 (ya que $\|v\|_1 = \frac{3}{2}$) luego $x = Qv$ con $v \in l_1$. Supongamos que no existe $k = 1, 2, \dots, n_1$ tal que

$$2(x - x_{n_1}) - x_k = 0.$$

Tome un $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \frac{1}{4}$ y $\delta < \|2(x - x_{n_1}) - x_k\|$ para $k = 1, 2, \dots, n_1$. Aplicando densidad de B_X en X , encontramos que existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y $\|2(x - x_{n_1}) - x_{n_2}\| \leq \delta$ y como $\delta \leq \frac{1}{4}$, entonces $\|2(x - x_{n_1}) - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{4}$. De esta forma, obtenemos que o $x \in Q(l_1)$ o podemos construir una subsucesión $(n_k)_{k \geq 1}$ de \mathbb{N} tal que:

$$\|2^{k-1}(x - x_{n_1}) - 2^{k-2}x_{n_2} - \dots - 2x_{n_{k-1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{2^{k-1}(x - x_{n_1})}{2^{k-1}} - \frac{2^{k-2}(x_{n_2})}{2^{k-1}} - \dots - \frac{2(x_{n_{k-1}})}{2^{k-1}} - \frac{(x_{n_k})}{2^{k-1}} \right\| &\leq \frac{1}{2^{k+k-1}} \\ \left\| x - x_{n_1} - \frac{2^{k-2}(x_{n_2})}{2^{k-1}} - \dots - \frac{2(x_{n_{k-1}})}{2^{k-1}} - \frac{(x_{n_k})}{2^{k-1}} \right\| &\leq \frac{1}{2^{2k-1}} \\ \left\| x - x_{n_1} - \frac{(x_{n_2})}{2} - \dots - \frac{(x_{n_{k-1}})}{2^{k-2}} - \frac{(x_{n_k})}{2^{k-1}} \right\| &\leq \frac{1}{2^{2k-1}}, \end{aligned}$$

por lo tanto, pasando a el límite cuando $k \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$x = x_{n_1} + \frac{x_{n_2}}{2} + \dots + \frac{x_{n_{k-1}}}{2^{k-2}} + \frac{x_{n_k}}{2^{k-1}} + \dots = Q((\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}),$$

donde $\alpha(n) = \frac{1}{2^{k-1}}$ si $n = n_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha(n) = 0$ si $n \neq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$ implica que $(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$ y por tanto $B_X \subseteq Q(l_1)$ y como Q es lineal se concluye que $X \subseteq Q(l_1)$ y por tanto $Q(l_1) = X$. ■

A continuación demostramos una propiedad un poco dramática de l_1 que no es compartida con los espacios c_0, l_∞, l_p con $p > 1$, esta propiedad se debe a Schur.

Definición 2.6 *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Schur (o X es un espacio de Schur) si convergencia secuencial en norma y débil coinciden en X ; es decir una sucesión $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ en X converge débilmente a x , si y solo si, $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norma a x .*

Teorema 2.7 l_1 tiene la propiedad de Schur.

Demostración: Suponga que $(x(n))_{n \geq 1}$ es una sucesión en l_1 tal que $x(n) \rightarrow x$ en la norma de l_1 .

Veamos que $f(x(n)) \rightarrow f(x)$ para cada funcional lineal y continuo no nulo $f: l_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $x(n) \rightarrow x$ existe un n_0 natural tal que si n es un natural mayor o igual a n_0 obtenemos:

$$\|x(n) - x\| \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|}$$

luego si $n \geq n_0$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x(n)) - f(x)| &= |f(x(n) - x)| \\ &\leq \|f\| \|x(n) - x\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

De esto se sigue que $f(x(n)) \rightarrow f(x)$ y por tanto $x(n) \rightarrow x$ débilmente.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión $x(n) = \{x^n(m)\}_{m=1}^{\infty}$ de l_1 converge débilmente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que su límite débil es cero.

Como $l_1^* = l_{\infty}$ y $x(n) \rightarrow 0$ débilmente, entonces para toda sucesión $c = \{c(n)\}_{n \geq 1}$ en $l_1^* = l_{\infty}$ se tiene que

$$\langle c, x(n) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)x^n(m) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

En particular, tomando $c = e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-ésima}}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ pertenece a l_{∞}

resulta que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle c, x(n) \rangle &= \langle e_k, x(n) \rangle \\ &= x^n(k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Suponga que $(x(n))_{n \geq 1}$ no converge a cero en norma. Como $x(n) \rightarrow 0$ débilmente, entonces $(x(n))_{n \geq 1}$ es acotada. Luego existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x(n)\| > \varepsilon$$

luego, debe existir un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x(n_1)\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} |x^{n_1}(m)| > \varepsilon,$$

y como $x(n_1)$ pertenece a l_1 , entonces:

$$\|x(n_1)\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^n |x^{n_1}(m)| = \sum_{m=1}^{\infty} |x^{n_1}(m)| < \infty,$$

para $\frac{\varepsilon}{8}$ existe un $\gamma_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x(n_1)\|_1 - \frac{\varepsilon}{8} < \sum_{m=1}^{\gamma_1} |x^{n_1}(m)|,$$

por tanto,

$$\|x(n_1)\|_1 - \sum_{m=1}^{\gamma_1} |x^{n_1}(m)| < \frac{\varepsilon}{8},$$

y así

$$\sum_{m=\gamma_1+1}^{\infty} |x^{n_1}(m)| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Por tanto, si definimos $c(m)$ para $m = 1, 2, \dots, \gamma_1$ tal que $c(m)x^{n_1}(m) = |x^{n_1}(m)|$ si $x^{n_1}(m) \neq 0$, en caso que $x^{n_1}(m) = 0$ se define por $c(m) = 0$ (en otras palabras $c(m) = \text{sign } x^{n_1}(m)$ para $m = 1, 2, \dots, \gamma_1$ si $x^{n_1}(m) \neq 0$ y en otro caso es cero). Entonces $|c(m)| \leq 1$ para cada $m = 1, 2, \dots, \gamma_1$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n(k) = 0.$$

Entonces, para cada k natural existe un natural N_k tal que si n es mayor o igual a N_k se tiene $|x^n(k)| < \frac{\epsilon}{8\gamma_1}$. Definiendo $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_{\gamma_1}\}$ tenemos que si $n > N$, entonces

$$|x^n(m)| < \frac{\epsilon}{8\gamma_1}, \quad \forall m = 1, 2, \dots, \gamma_1.$$

Defina $n_2 > \max\{n_1, N\}$ tal que $\|x(n_2)\| > \epsilon$.

Así, de $|x^{n_2}(m)| < \frac{\epsilon}{8\gamma_1}$ para todo $m = 1, 2, \dots, \gamma_1$ se tiene que:

$$\sum_{m=1}^{\gamma_1} |x^{n_2}(m)| < \frac{\epsilon}{8\gamma_1} \gamma_1 = \frac{\epsilon}{8},$$

nuevamente, como $x^{n_2} = (x(n_2))_{n_2 \geq 1}$ pertenece a l_1 , encontramos un $\gamma_2 > \gamma_1$ tal que

$$\sum_{m=\gamma_2+1}^{\infty} |x^{n_2}(m)| < \frac{\epsilon}{8}.$$

De la misma forma, defina $c(m)$ para $m = \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_2$ por $c(m)x^{n_2}(m) = |x^{n_2}(m)|$ si $x^{n_2}(m) \neq 0$, en caso contrario defina $c(m) = 0$. Continuando así, obtenemos una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ y $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$ y una sucesión $(c(m))_{m \geq 1}$ en l_∞ tal que se cumplen las afirmaciones:

1. $\|x(n_k)\| > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. $\sum_{m=1}^{\gamma_k} |x^{n_{k+1}}(m)| < \frac{\epsilon}{8}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
3. $\sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} |x^{n_{k+1}}(m)| < \frac{\epsilon}{8}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
4. $c(m)x^{n_k}(m) = |x^{n_k}(m)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}$.

Luego, como $|\sum_{m=1}^{\infty} c(m)x^{n_k}(m)|$ es igual a:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{m=1}^{\gamma_{k-1}} c(m)x^{n_k}(m) + \sum_{m=\gamma_{k-1}+1}^{\gamma_k} c(m)x^{n_k}(m) + \sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} c(m)x^{n_k}(m) \right| \\
& \geq \left| \sum_{m=\gamma_{k-1}+1}^{\gamma_k} c(m)x^{n_k}(m) \right| - \left| \sum_{m=1}^{\gamma_{k-1}} c(m)x^{n_k}(m) \right| - \left| \sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} c(m)x^{n_k}(m) \right| \\
& \geq \sum_{m=\gamma_{k-1}+1}^{\gamma_k} |x^{n_k}(m)| - \sum_{m=1}^{\gamma_{k-1}} |x^{n_k}(m)| - \sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} |x^{n_k}(m)| \\
& = \|x^{n_k}\| - 2 \sum_{m=1}^{\gamma_{k-1}} |x^{n_k}(m)| - 2 \sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} |x^{n_k}(m)| \\
& \geq \varepsilon - 2 \sum_{m=1}^{\gamma_{k-1}} |x^{n_k}(m)| - 2 \sum_{m=\gamma_k+1}^{\infty} |x^{n_k}(m)| \\
& \geq \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{8} - \frac{2\varepsilon}{8} \\
& \geq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

es decir

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} c(m)x^{n_k}(m) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Pero la sucesión $(c(m))_{m \geq 1}$ pertenece a l_{∞} (es decir, es un funcional de l_1^*) y por lo tanto la convergencia débil implica que

$\langle c(m), x(n) \rangle \rightarrow 0$ es decir $\sum_{m=1}^{\infty} c(m)x^{n_k}(m) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, lo que contradice la desigualdad (*). Por tanto $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norma a cero. ■

Ahora aplicamos el teorema de Banach-Mazur y el Teorema de Schur para demostrar que l_1 contiene un subespacio no complementado.

Teorema 2.8 l_1 tiene un subespacio cerrado no complementado.

Demostración: Como c_0 es separable existe una función cociente $Q : l_1 \rightarrow c_0$, note que $Ker(Q)$ es un subespacio cerrado de l_1 tal que $l_1/Ker(Q) \cong c_0$.

Si $Ker(Q)$ fuese complementado en l_1 , entonces debemos tener que $l_1 = Ker(Q) \oplus M$ para algún subespacio cerrado M de l_1 , pero entonces $l_1/Ker(Q) \cong M$ así $c_0 \cong M$, por tanto, existe un isomorfismo $T : c_0 \rightarrow M$

Como $e_k \rightarrow 0$ débilmente en c_0 y T es lineal, entonces $Te_k \rightarrow 0$ débilmente en l_1 y por el teorema de Schur tendríamos que $\|Te_k\| \rightarrow 0$, lo que es imposible ya que T es un isomorfismo (Existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in c_0$) ■

Nota 4 *Podemos aplicar fácilmente el mismo razonamiento a cualquier espacio separable que contiene una sucesión débilmente nula normalizada. En particular, podríamos simplemente usar cualquier espacio l_p con $1 < p < \infty$, en lugar de c_0 . Así l_1 tiene sin duda muchos subespacios no complementados isomorficamente distintos, que esta muy lejos de lo que pasa en un espacio de Hilbert.*

Para el lector que conoce el Teorema de Eberlein-Šmulian podemos dar dos caracterizaciones de los espacios de Banach con propiedad de Schur.

Teorema 2.9 *Sea X un subespacio de Banach con la propiedad de Schur. Entonces, un subconjunto W de X es débilmente compacto si y solo si W es compacto en norma.*

Demostración: Suponga que W es débilmente compacto y considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en W . Por el teorema de Eberlain-Smulian W es secuencialmente débilmente compacto, así $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una sucesión $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ tal que converge débilmente a algún $x \in W$. Como X tiene la propiedad de Schur $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge en norma a x . Por tanto W es secuencialmente compacto para la topología de la norma y por tanto compacto en la topología de la norma. ■

Corolario 2.10 *Un subconjunto W de l_1 es débilmente compacto si y solo si W es compacto en norma.*

Corolario 2.11 *Si X es un espacio de Banach-reflexivo con la propiedad de Schur, entonces X es de dimensión finita.*

Demostración: Suponga que X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur. Como X es reflexivo, entonces la bola unitaria es débilmente compacta y por el Teorema anterior es compacta en norma. Luego X es de dimensión finita. ■

Corolario 2.12 *l_1 no es reflexivo.*

Definición 2.13 *Un espacio de Banach X se llama secuencialmente débilmente completo si toda sucesión débilmente de Cauchy en X es convergente.*

Teorema 2.14 *Cualquier espacio de Banach con la propiedad de Schur es secuencialmente débilmente completo.*

Demostración: Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy. Entonces, para cualquier dos sucesiones estrictamente creciente de enteros $(n_k)_{k \geq 1}, (m_k)_{k \geq 1}$ la sucesión $(x_{m_k} - x_{n_k})_{k \geq 1}$ es débilmente nula. Como el espacio es de Schur tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - x_{n_k}\| = 0,$$

y por tanto, es de Cauchy en norma y así convergente en norma. Por tanto, es débilmente convergente. ■

Corolario 2.15 *l_1 es secuencialmente débilmente completo.*

Ahora queremos demostrar que l_1 es un espacio primo. Para esto, empezamos mostrando el siguiente lema⁶:

⁶ F. Albiac y N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. Springer, 2006.

Lema 2.16 Sea $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica bloque normalizada en l_1 . Entonces, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es isométricamente equivalente a la base canónica de l_1 y $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es el rango de una proyección de norma uno de l_1 . (Así, $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$, es complementado en l_1).

Demostración: Supongamos que $\mu_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a_j e_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathbb{N} con

$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots$ enteros positivos y $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son escalares tal que

$$\|\mu_k\| = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j| = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y escalares b_1, b_2, \dots, b_m obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_k a_j e_j \right\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_k a_j| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^m |b_k| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j| \\ &= \left(\sum_{k=1}^m |b_k| \right) 1 = \sum_{k=1}^m |b_k|, \end{aligned}$$

esto establece una isomería entre $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y la base canónica de l_1 .

Para la proyección, consideremos $(e_j^*)_{j \geq 1}$ los funcionales biortogonales de la base canónica de l_1 y $(b_j)_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}$ son escalares tal que

$$\sup_{r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k+1} |b_j| = 1,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ ($\|b\|_\infty = 1$).

Definimos $\mu_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*$. Claramente, $(\mu_k^*)_{k \geq 1}$ es biortogonal a $(\mu_k)_{k \geq 1}$, esto es $\mu_k^*(\mu_k) = 1$ y $\mu_k^*(\mu_p) = 0$ para todo $p \neq k$ y $\|\mu_k^*\| = \|\mu_k\| = 1$.

Definimos el operador $P : l_1 \rightarrow l_1$ por $Px = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k$ para cada $x \in l_1$ y demostraremos que P es una proyección de norma uno de l_1 sobre $[\mu_j]_{j \geq 1}$. En efecto:

$$\begin{aligned} P\mu_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(\mu_j) \mu_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e_{kj} \mu_k = \mu_j, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, por tanto, usando la continuidad de P tenemos:

$$\begin{aligned} PPx &= P \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) P\mu_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \\ &= Px, \end{aligned}$$

Por tanto, P es una proyección sobre $[\mu_k]_{k \geq 1}$. Sea $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ un elemento de l_1 y observamos que

$$\begin{aligned} |\mu_k^*(x)| &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*(x) \right| \\ &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j| |x_j| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k} |b_j| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j| \\ &\leq 1 \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j| \right). \end{aligned}$$

Luego usando la isometría del ítem anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|Px\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^*(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x_j| \\ &= \|x\|_1, \end{aligned}$$

así $\|P\| \leq 1$.

Como $P^2 = P$ obtenemos que $\|Px\| = \|PPx\| \leq \|P\| \|Px\| \quad \forall x$. Así $\|P\| \geq 1$, luego $\|P\| = 1$. Con esto, $[\mu_k]_{k \geq 1}$ es complementado con una proyección de norma uno. ■

Nota 5 El lector puede observar en la demostración que si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es normalizada pero satisface la desigualdad $0 < a < \|\mu_n\| < b < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algunas constantes a, b (en el que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es llamada semi normalizada), entonces podemos aplicar el lema previo a $\left(\frac{\mu_n}{\|\mu_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ y obtenemos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pero no isométricamente) y $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementado con una proyección de norma menor o igual a 1.

Teorema 2.17 (Pełczyński) Cada subespacio lineal cerrado de dimensión infinita de l_1 contiene un subespacio complementado de l_1 que es isomorfo a l_1 .

Demostración: Sea Z un subespacio lineal cerrado de dimensión infinita de l_1 . De-

mostremos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in Z$ tal que $\|y_n\| = 1$ y y_n tiene la forma

$$y_n = \sum_{j=n}^{\infty} a^{(n)}(j)e_j.$$

Para ello, consideremos la función de Z en \mathbb{R}^n por

$$\begin{aligned} T : Z &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\rightarrow Tz = (e_1^*(z), e_2^*(z), \dots, e_n^*(z)), \end{aligned}$$

entonces, T es lineal y continua. Como Z es de dimensión infinita, el núcleo del operador es diferente de cero, ya que en caso contrario Z es isomorfo a $T(Z) \subseteq \mathbb{R}^n$, lo que contradice la dimensión infinita de Z .

Por tanto, existe un $z_n \in Z$ con $e_i^*(z_n) = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Definiendo $y_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\| = 1$ y y_n cumple con lo requerido.

Sea $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a^{(1)}(n)e_n$ y $m_0 = 0$, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^{(1)}(n)e_n$ es convergente, existe un $m_1 > 0 = m_0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=m_1+1}^{\infty} a^{(1)}(n)e_n \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Defina $b_1 = \sum_{n=m_0+1}^{m_1} a^{(1)}(n)e_n$ entonces, la desigualdad anterior nos establece que $\|y_1 - b_1\| < \frac{1}{2^2}$.

Nuevamente, existe un $y_2 \in Z$ tal que $\|y_2\| = 1$ y

$$y_2 = \sum_{n=m_1+1}^{\infty} a^{(2)}(n)e_n.$$

Elija $m_2 > m_1$ tal que

$$\left\| \sum_{n=m_2+1}^{\infty} a^{(2)}(n)e_n \right\| < \frac{1}{2^3},$$

y defina $b_2 = \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a^{(2)}(n)e_n$ entonces, $\|y_2 - b_2\| < \frac{1}{2^3}$.

De esta forma, construimos inductivamente una sucesión $(y_j)_{j \geq 1}$ en Z con $\|y_j\| = 1$, una sucesión $(b_j)_{j \geq 1}$ en l_1 y una sucesión $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de números naturales tal que

1. $m_0 < m_1 < m_2 < \dots < \dots$
2. $y_j = \sum_{n=m_{j-1}+1}^{\infty} a^{(j)}(n)e_n$
3. $\|y_j\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$
4. $b_j = \sum_{n=m_{j-1}+1}^{m_j} a^{(j)}(n)e_n$
5. $\|y_j - b_j\| < \frac{1}{2^{j+1}}$

Ahora, $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica bloque en l_1 , entonces por el Lema 2.15 $[b_j]_{j \in \mathbb{N}}$ es isomorfo a l_1 y $[b_j]_{j \in \mathbb{N}}$ es complementado en l_1 con una proyección de norma menor o igual a 1 que denotaremos por P . Sea $(b_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[b_j]_{j \in \mathbb{N}}^*$ biortogonal a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces :

$$\begin{aligned} \|b_n^*\| &= \frac{1}{\|b_n\|} \leq \frac{1}{\|y_n\| - \|y_n - b_n\|} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \end{aligned}$$

es decir

$$\|b_n^*\| \leq \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}.$$

Consideremos el operador $T : l_1 \rightarrow l_1$ definido por

$$Tx = x - Px + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Px)y_n.$$

Como $Px \in [b_n]_{n \geq 1}$ y $(b_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ es biortogonal a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entonces, $b_n^*(Px)$ pertenece a l_1 ; De hecho, si $Px = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)b_k$ tenemos $b_n^*(Px) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)b_n^*(b_k) = a(n)$ y

$((a(n))_{n \geq 1})$ pertenece a l_1 . Además:

$$\begin{aligned}
 \|x - Tx\| &= \left\| Px - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Px)y_n \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Px)b_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Px)y_n \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Px)(b_n - y_n) \right\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|b_n^*(Px)\| \|b_n - y_n\|) \\
 &\leq \|Px\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|b_n^*\| \|b_n - y_n\|) \\
 &\leq \|P\| \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \right) \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1} - 1} \right).
 \end{aligned}$$

Como $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n \cdot (1 + 1) = 2^n + 2^n > 2^n + 1$, pues $n \geq 1$, entonces

$$\frac{1}{2^{n+1} - 1} \leq \frac{1}{2^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\|x - Tx\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

por tanto $\|I - T\| < 1$. Luego, existe T^{-1} y así T es un isomorfismo, además:

$$\begin{aligned}
 Tb_n &= b_n - Pb_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(Pb_n)y_n \\
 &= b_n - b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(b_n)y_n \\
 &= y_n.
 \end{aligned}$$

Así, T lleva a $[b_n]_{n \geq 1}$ en $[y_n]_{n \geq 1}$. Como $[b_n]_{n \geq 1}$ es isomorfo a l_1 , entonces $[y_n]_{n \geq 1}$ es isomorfo a l_1 .

Además, la función $Q = TPT^{-1}$ satisface $Q^2 = Q$ y

$$\begin{aligned} Qy_n &= TPT^{-1}y_n \\ &= TPb_n \\ &= Tb_n \\ &= y_n, \end{aligned}$$

es decir $Q|_{[y_n]_{n \geq 1}}$ es la función identidad, por tanto, $[y_n]_{n \geq 1}$ es complementado en l_1 . Así, el subespacio $G = [y_n]_{n \geq 1}$ cumple las propiedades requeridas. ■

Por último, para completar nuestro objetivo (mostrar que l_1 es primo), debemos demostrar algunas propiedades isomorfas del espacio l_1 y $l_1(X)$.

Recordemos que \cong significa isomorfismo.

Teorema 2.18 Sean X y Y dos espacios de Banach. Entonces:

1. Si $X \cong Y$, entonces $l_1(X) \cong l_1(Y)$.
2. $l_1(X \oplus Y) \cong l_1(X) \oplus l_1(Y)$.
3. $l_1 \cong l_1 \oplus \mathbb{R}$. (Se dice que l_1 es estable)
4. $l_1(X) \oplus X \cong l_1(X)$.
5. $l_1 \oplus l_1 \cong l_1$.
6. $l_1(l_1) \cong l_1$.

Demostración:

1. Suponga que X y Y son espacios de Banach tal que $X \cong Y$ y considere $T: X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Luego, existen constantes α y β positivas tal que:

$$\alpha\|\mu\| \leq \|T\mu\| \leq \beta\|\mu\| \quad \text{para todo } \mu \in X.$$

Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $l_1(X)$, entonces defina $S : l_1(X) \rightarrow l_1(Y)$ por $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1}$. S es claramente lineal. S es inyectiva, ya que si $Sx = 0$, entonces $Tx_n = 0$ para cada número natural n y como T es un isomorfismo, entonces $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego x es la sucesión nula. Además:

$$\begin{aligned} \alpha\|Sx\|_{l_1(X)} &= \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\|x_n\|; \text{ como } \alpha\|x_n\| \leq \|Tx_n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| = \|Sx\|_{l_1(X)}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|Sx\|_{l_1(X)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| \\ &\leq \beta \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\ &= \beta\|x\|_{l_1(X)}. \end{aligned}$$

Luego, $\alpha\|Sx\|_{l_1(X)} \leq \|Sx\|_{l_1(X)} \leq \beta\|x\|_{l_1(X)}$ para cada $x \in l_1(X)$. Finalmente, si $y = (y_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $l_1(Y)$, entonces defina $x_n = T^{-1}y_n$ para cada n natural, obtenemos así la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en $l_1(X)$ que satisface $Tx_n = y_n$ para cada número natural n y $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1} = (y_n)_{n \geq 1} = y$. Por tanto S es sobreyectiva. Luego S es un isomorfismo entre $l_1(X)$ y $l_1(Y)$.

2. Usamos la norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ en $X \oplus Y$. Dada una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ en $l_1(X)$ y una sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ en $l_1(Y)$ defina $S(x, y)$ como la sucesión $z = (x_n, y_n)_{n \geq 1}$ en $l_1(X \oplus Y)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \|S(x, y)\| &= \|z\| \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| + \|y_n\|) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \\
 &= \|x\|_{l_1(X)} + \|y\|_{l_1(Y)} \\
 &= \|(x, y)\|_{l_1(X) \oplus l_1(Y)}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, S es un isomorfismo.

3. Demostremos que $l_1 \cong l_1 \oplus \mathbb{R}$. Usamos $\|(a, b)\| = \|a\| + |b|$ para cada (a, b) en $l_1 \oplus \mathbb{R}$. Dada una sucesión x de l_1 y un elemento λ de \mathbb{R} , defina $T(x, \lambda)$ la sucesión z definida por $z(1) = \lambda$ y $z(n) = x(n-1)$ para $n > 1$. (Note que esta es una modificación del operador shift). Ahora:

$$\begin{aligned}
 \|T(x, \lambda)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| \\
 &= |z(1)| + \sum_{n=2}^{\infty} |z(n)| \\
 &= |\lambda| + \sum_{n=2}^{\infty} |x(n-1)| \\
 &= |\lambda| + \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \\
 &= |\lambda| + \|x\|_{l_1} \\
 &= \|(x, \lambda)\|.
 \end{aligned}$$

Luego T es un isomorfismo.

4. Sea T un isomorfismo de $l_1 \oplus \mathbb{R}$ sobre l_1 y considere α, β números reales tal que; para todo $(\mu, \lambda) \in l_1 \oplus \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\alpha(\|\mu\|_{l_1} + |\lambda|) \leq \|T(\mu, \lambda)\|_{l_1} \leq \beta(\|\mu\|_{l_1} + |\lambda|). \quad (*)$$

Dada una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ en $l_1(X)$ y x_0 un punto de X , defina $S(x, x_0)$ la sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ definida por $y_1 = x_0$ y $y_n = x_{n-1}$. Como x pertenece a $l_1(X)$, entonces y pertenece a $l_1(X)$ y tomando $\mu = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda = \|x_0\|$ tenemos:

$$\alpha(\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \leq \|T(x_n, \|x_0\|)\|_{l_1} \leq \beta(\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha(\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)| + \|x_0\| \leq \beta(\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tomando la suma desde $n = 1$ hasta ∞ obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \leq \beta \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|_{l_1} + \|x_0\|) \right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \alpha(\|x_n\|_{l_1(X)} + \|x_0\|) &\leq \|y_n\|_{l_1(X) \oplus X} \leq \beta(\|x_n\|_{l_1(X)} + \|x_0\|) \\ \alpha(\|(x_n, x_0)\|_{l_1(X) \oplus X}) &\leq \|S(x, x_0)\|_{l_1(X) \oplus X} \leq \beta(\|(x_n, x_0)\|_{l_1(X) \oplus X}). \end{aligned}$$

Luego S es un isomorfismo de $l_1(X) \oplus X$ en $l_1(X)$. El isomorfismo es sobreyectivo ya que si $y = (y_n)_{n \geq 1}$ es un elemento arbitrario de $l_1(X)$, defina $x_n = y_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = (x_n)_{n \geq 1}$ esta en $l_1(X)$ y $y = S(x, y_1)$.

5. Sean x, y dos elementos de l_1 , defina una nueva sucesión z por $z(2n-1) = x(n)$

y $z(2n) = y(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \|z\|_{l_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| \\
 &= \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} |z(n)| + \sum_{n \text{ par}}^{\infty} |z(n)| \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} |z(2k-1)| + \sum_{k=1}^{\infty} |z(2k+1)| \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} |x(n)| + \sum_{k=1}^{\infty} |y(n)| \\
 &= \|x\|_{l_1} + \|y\|_{l_1} \\
 &= \|(x, y)\|_{l_1 \oplus l_1}.
 \end{aligned}$$

Luego $S(x, y) = z$ es un isomorfismo.

6. Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $l_1(l_1)$. Defina Sx como una sucesión y como sigue:

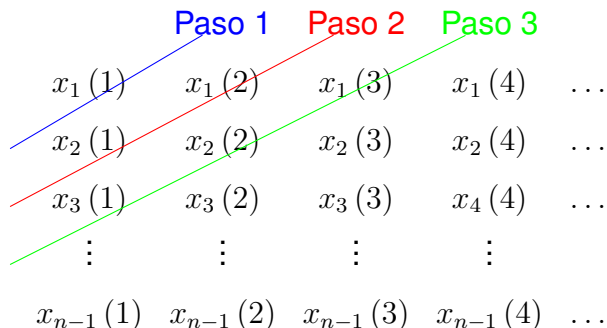
Paso 1: Defina $y(1) = x_1(1)$.

Paso 2: Defina $y(2) = x_2(1), y(3) = x_1(2)$.

Paso 3: Defina $y(3) = x_3(1), y(4) = x_2(2), y(5) = x_1(3)$ y así sucesivamente.

Si los $x_i(j)$ son pensados como las entradas de una matriz infinita, se puede

observar que son enumerados en diagonales:



En el n -ésimo paso definimos los n -valores próximos de $y(i)$ como $x_n(1), x_{n-1}(2), \dots, x_1(n)$ estos son de hecho los $y(i)$ para i entre $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n - 1) + 1]$ y $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n) + 1]$. Como x_n pertenece a l_1 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces y pertenece a l_1 y

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{l_1(l_1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_n(j)| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| \\
 &= \|y\|_{l_1}.
 \end{aligned}$$

Esto es, $\|x\|_{l_1(l_1)} = \|Sx\|_{l_1}$. Luego S es un isomorfismo. ■

Teorema 2.19 (l_1 es primo) Cada subespacio complementado de dimensión infinita de l_1 es isomorfo a l_1 .

Demostración: Sea E un subespacio complementado de dimensión infinita de l_1 , entonces podemos escribir $l_1 = E \oplus F$ para algún espacio de Banach F . Por el teorema de Pełczyński E contiene un subespacio X_1 isomorfo a l_1 y complementado en

l_1 . Por tanto, X_1 es también complementado en E , y podemos escribir $E = X_1 \oplus Y$ donde $X_1 \cong l_1$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned}
 l_1 &\cong l_1(l_1) \\
 &\cong l_1(E \oplus F) \\
 &\cong l_1(E) \oplus l_1(F) \\
 &\cong l_1(E) \oplus E \oplus l_1(F) \\
 &\cong l_1(E) \oplus l_1(F) \oplus E \\
 &\cong l_1(E \oplus F) \oplus E \\
 &\cong l_1 \oplus E.
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
 E &\cong l_1 \oplus Y \\
 &\cong l_1 \oplus (l_1 \oplus Y) \\
 &\cong l_1 \oplus E \\
 &\cong l_1.
 \end{aligned}$$

Luego $E \cong l_1$ y así l_1 es primo. ■

Nota 6 *El teorema anterior podría llevarnos a creer que el espacio l_1 tiene una estructura subespacial bastante simple. Pero, una vez quitamos la palabra complementado, la situación cambia drásticamente, se puede demostrar que el espacio l_1 contiene infinitos subespacios mutuamente no isomorfos.*

El método de descomposición de Pełczyński tiene una obvia desventaja, es virtualmente imposible escribir un isomorfismo explícito. Desde este punto de vista en el mejor de los casos se prueba la existencia.

Usando la propiedad de Schur podemos demostrar que l_1 no es isomorfo a l_p con

$p \neq 1$ ni a c_0 .

Teorema 2.20 *Si X es un espacio de Banach isomorfo a un subespacio de l_1 , entonces para cada sucesión en X convergencia débil es equivalente a convergencia en norma. En particular:*

1. c_0 no es isomorfo a un subespacio de l_1 (o a l_1)
2. l_p ($p > 1$) no es isomorfo a un subespacio de l_1 (o a l_1)

Demostración: Suponga que $T : X \rightarrow E$ es un isomorfismo entre X y un subespacio E de l_1 y considere $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en X tal que $x_n \rightarrow 0$ débilmente. Si f es un funcional en l_1^* , entonces $f \circ T : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional en X^* y por tanto, $(f \circ T)x_n$ converge a cero. Esto quiere decir que Tx_n converge débilmente en l_1 y como l_1 tiene la propiedad de Schur concluimos que la sucesión $(Tx_n)_{n \geq 1}$ converge a cero en norma. Como T es isomorfismo existe una constante $K > 0$ tal que $K\|x_n\| \leq \|Tx_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $(x_n)_{n \geq 1}$ converge a cero en norma.

1. En particular c_0 no es isomorfo a un subespacio de l_1 ya que la sucesión $(e_n)_{n \geq 1}$ converge débilmente a cero en c_0 pero no converge en norma a cero. ($\|e_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$).
2. Lo mismo ocurre con el espacio l_p con $p > 1$, no puede ser isomorfo a l_1 o a un subespacio de l_1 ya que la sucesión $(e_n)_{n \geq 1}$ converge débilmente a cero en l_p ($1 < p < \infty$) pero no converge a cero en norma. ■

Ahora estudiaremos un teorema de funciones sobre el espacio l_1 , esta propiedad es conocida en la literatura como l_1 es proyectivo.

Teorema 2.21 *Sea X un espacio de Banach. Si existe una función lineal, sobreyectiva y acotada $T : X \rightarrow l_1$ entonces X contiene un subespacio complementado e isomorfo a l_1 .*

Demostración: Por el teorema de la aplicación abierta, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta B_{l_1} \subseteq T(B_X)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, δe_n pertenece a δB_{l_1} y por lo tanto existe un $y_n \in B_X$ tal que $Ty_n = \delta e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Definiendo $x_n = \frac{y_n}{\delta}$, tenemos que $\|x_n\| = \frac{\|y_n\|}{\delta} < \frac{1}{\delta}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $Tx_n = e_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, existe una sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Tx_n = e_n$. Además, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a e_n , es decir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|x_n\| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \end{aligned} \quad (1)$$

así

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\|_1 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n \right\|_1 \\ &= \left\| T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right\|_1 \\ &\leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\ &\leq M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \end{aligned} \quad (2)$$

Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, podemos definir el operador $S : l_1 \rightarrow X$ por $Se_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Las desigualdades (1) y (2) demuestran que S es un isomorfismo ya que por ejem-

pló: S es acotado pues

$$\begin{aligned} \left\| S \left(\sum_{m=1}^k a_m e_m \right) \right\| &= \left\| \sum_{m=1}^k a_m x_m \right\| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^k |a_m| \\ &= \frac{1}{\delta} \left\| \sum_{m=1}^k a_m e_m \right\| \end{aligned}$$

y así S se extiende a un isomorfismo de l_1 sobre $[x_n]_{n \geq 1}$. Además, $S \circ T : X \rightarrow X$ es continua y $T \circ S : l_1 \rightarrow l_1$ es la función identidad de l_1 . Podemos así definir $P = ST$, es una proyección ya que:

$$\begin{aligned} P^2 &= STST \\ &= S(TS)T \\ &= S(I)T \\ &= ST \\ &= P \end{aligned}$$

y $Px_n = STx_n = Se_n = x_n$, luego la imagen de P es $[x_n]_{n \geq 1}$.

Por tanto $[x_n]_{n \geq 1}$ es complementado en X e isomorfo a l_1 . ■

Corolario 2.22 *Si Y es un espacio de Banach separable de dimensión infinita tal que cada vez que exista un operador $T : X \rightarrow Y$ lineal, acotado y sobreyectivo, entonces X contiene un subespacio isomorfo a Y . Entonces, Y debe ser isomorfo a l_1 .*

Demostración: Por el Teorema de Banach-Mazur existe un operador sobreyectivo $Q : l_1 \rightarrow Y$. Por hipótesis Y es isomorfo a un subespacio complementado de l_1 y como l_1 es primo Y es isomorfo a l_1 . ■

3. El espacio l_∞

En este capítulo estudiaremos el espacio de Banach l_∞ y algunas de sus propiedades básicas que lo caracterizan. Empezamos mostrando que:

Teorema 3.1 l_∞ es un espacio de Banach.

Demostración: Consideremos $(x^k)_{k \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en l_∞ .

Para todo n, k y $l \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} |x^k(n) - x^l(n)| &\leq \sup_{n \geq 1} |x^k(n) - x^l(n)| \\ &= \|x^k - x^l\|_\infty \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión numérica $(x^k(n))_{k \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo, la sucesión converge a un número $x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Falta demostrar que la sucesión $x = (x(n))_{n \geq 1}$ pertenece a l_∞ y que es el límite en l_∞ de la sucesión $(x^k)_{k \geq 1}$. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe un número natural m tal que si k y l son naturales mayores o iguales a m , entonces $\|x^k - x^l\| \leq \varepsilon$, en particular, $\|x^k - x^l\|_\infty \leq \varepsilon$, además, para n fijo obtenemos :

$$\begin{aligned} |x^k(n)| &\leq |x^m(n)| + |x^k(n) - x^m(n)| \\ &\leq \|x^m\|_\infty + \varepsilon \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando k tiende a ∞ obtenemos

$$|x(n)| \leq \|x^m\|_\infty + \varepsilon$$

Como esta última desigualdad no depende de n , obtenemos que $x \in l_\infty$. Además, si n es un número natural fijo, k, l son números naturales mayores o iguales a m obtenemos:

$$|x^k(n) - x^l(n)| \leq \|x^k - x^l\| \leq \varepsilon$$

así, que pasando al límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos

$$|x(n) - x^l(n)| \leq \varepsilon$$

y como esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\|x - x^l\|_\infty \leq \varepsilon$$

para todo $l \geq m$. Luego la sucesión $(x^k)_{k \geq 1}$ converge a x en l_∞ . ■

Ahora vamos a demostrar que l_∞ es no separable, este resultado quizá justifique el pensamiento que el lector tiene sobre el espacio l_∞ que no encaja bien en el patrón establecido por los otros espacios c_0 y l_p con $1 \leq p < \infty$.

Lema 3.2 *Sea X un espacio vectorial normado tal que existe un $\varepsilon > 0$ y un subconjunto A de X no contable con la propiedad que para todo $a, b \in A$ con $a \neq b$ se tiene $\|a - b\| \geq \varepsilon$. Entonces, X es no separable.*

Demostración: Recordemos que un espacio vectorial normado X es separable si contiene un conjunto denso y contable. Supongamos por contradicción que X es separable y considere $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ un conjunto denso y numerable. Para cada $a \in A$, $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ es una vecindad de a y por la densidad obtenemos que $B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, es decir, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, \frac{\varepsilon}{2})$, luego $\|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Defina $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$, entonces

$$\|x_{n_a} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere la función $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a) = n_a$. Si demostramos que f es inyectiva, obtenemos que A es contable, lo que es un absurdo.

Sean a, b elementos de A con $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$, entonces $n_a = n_b$, luego $\|x_{n_a} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|x_{n_b} - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir

$$\begin{aligned} \|a - b\| &\leq \|a - x_{n_a} + x_{n_a} - b\| \quad \text{como } n_a = n_b \\ &\leq \|a - x_{n_a}\| + \|x_{n_b} - b\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

es decir, $\|a - b\| < \varepsilon$, lo que contradice la hipótesis que

$\|a - b\| \geq \varepsilon$ para todo $a, b \in A$ con $a \neq b$. ■

Teorema 3.3 l_∞ es no separable.

Demostración: Para $A \subseteq \mathbb{N}$, considere la sucesión $\chi_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

Entonces $\|\chi_A\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir χ_A pertenece a l_∞ . Si A y B son subconjuntos de los números naturales con $A \neq B$, entonces $\|\chi_A - \chi_B\| \geq 1$. En efecto, como $A \neq B$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \in A - B$ o $k \in B - A$. Suponga por ejemplo que $k \in A - B$, entonces

$$\begin{aligned} \|\chi_A - \chi_B\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\chi_A(n) - \chi_B(n)| \\ &\geq |\chi_A(k) - \chi_B(k)| = |1 - 0| = 1 \end{aligned}$$

Como el conjunto $(\chi_A)_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ es no contable, obtenemos por el lema anterior que l_∞ es no separable. ■

Teorema 3.4 Si existe una base de Schauder en un espacio de Banach X , entonces X es separable.

Demostración: Suponga que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de X . Definimos el conjunto $S = \{\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i : \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ y } \gamma_i \in \mathbb{Q}\}$, veamos que S es denso en X .

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, como $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una base, existen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ escalares tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y por tanto, existe un natural N tal que $\|x - \sum_{i=1}^N a_i x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definiendo $M = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|$, como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , para cada $i = 1, 2, \dots, N$ existen γ_i en \mathbb{Q} tal que $|a_i - \gamma_i| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}M}$. Definiendo $x_N = \sum_{i=1}^N \gamma_i x_i$, entonces x_N pertenece a S y también:

$$\begin{aligned} \|x - x_N\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^N a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N a_i x_i - \sum_{i=1}^N \gamma_i x_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i=1}^N (a_i - \gamma_i) x_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N |a_i - \gamma_i| \|x_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{i+1}M} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Demostremos que S es numerable, para ello, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i : \gamma_i \in \mathbb{Q} \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Entonces, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ y por tanto, es suficiente demostrar que S_n es numerable

para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, tome $n \in \mathbb{N}$ y defina la función $f : S_n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ por

$$f \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \right) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

f es claramente inyectiva, ya que si $f(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i) = f(\sum_{i=1}^n s_i x_i)$ obtenemos $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y por tanto, $\gamma_1 = s_1, \gamma_2 = s_2, \dots, \gamma_n = s_n$.

Luego S_n es equipotente con $f(S_n)$. Además, como \mathbb{Q} es contable, entonces \mathbb{Q}^n es contable y como $f(S_n)$ es un subconjunto de \mathbb{Q}^n entonces $f(S_n)$ es contable y concluimos que S_n es contable para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 3.5 l_∞ no tiene base de Schauder.

Teorema 3.6 (Dual de l_∞) Para cada $x^* \in l_\infty^*$ existe una única medida finitamente aditiva $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ con variación limitada tal que

$\mu(A) = x^*(\chi_A)$ donde para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, χ_A es la característica de A . Además, $|\mu|(\mathbb{N}) \leq \|x^*\|$. (donde $|\mu|$ es la variación total de la medida μ).

Recíprocamente, para cada medida finitamente aditiva $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ con variación limitada hay un único elemento $x^* \in l_\infty^*$ tal que $\mu(A) = x^*(\chi_A)$ para todo A subconjunto de \mathbb{N} . Además, $\|x^*\| \leq |\mu|(\mathbb{N})$.

Demostración: Recordemos que $\chi_A = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$x_n = \chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

Considere $x^* \in l_\infty^*$ y defina $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(A) = x^*(\chi_A)$ para todo A subconjunto de \mathbb{N} . Veamos que μ es finitamente aditiva. En efecto, sean A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de \mathbb{N} (elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) disjuntos por pares, entonces:

$$\chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \dots + \chi_{A_n} = \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n},$$

y así:

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= x^*(\chi_{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n}) \\
 &= x^*(\chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \dots + \chi_{A_n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n x^*(\chi_{A_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu(\chi_{A_i}).
 \end{aligned}$$

Por tanto, μ es finitamente aditiva. Ahora, recordando que la variación de μ es una medida definida por: Dado $E \in \mathbb{N}$

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^n A_i = E, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ con } i \neq j \right\}$$

Si $|\mu|(E) < \infty$ decimos que μ es una medida de variación limitada. Demostremos que nuestra medida es de variación limitada. En efecto, considere A_1, A_2, \dots, A_n son disyuntos por pares. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| &= \sum_{i=1}^n |x^*(\chi_{A_i})| \\
 &= \sum_{i=1}^n x^*(\chi_{A_i}) \text{sign}(x^*(\chi_{A_i})) \\
 &= x^* \left(\sum_{i=1}^n \text{sign}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i} \right) \\
 &\leq \|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n \text{sign}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i} \right\| \\
 &\leq \|x^*\|
 \end{aligned}$$

ya que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \text{sign}(x^*(\chi_{A_i})) \chi_{A_i} \right\| \leq 1$$

Luego tomamos el supremo y obtenemos $|\mu|(\mathbb{N}) \leq \|x^*\|$.

Considere ahora una medida finitamente aditiva $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ con variación limitada $|\mu|(\mathbb{N}) \leq \infty$. Para cualquier $x \in l_\infty$ de la forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}, E_i \subseteq \mathbb{N}$ conjuntos disyuntos por pares, definimos

$$x^*(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

si denotamos por $B \subseteq l_\infty$ el subespacio lineal de elementos de la forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $E_i \subseteq \mathbb{N}$ disyuntos por pares, entonces B es denso en l_∞ . Además, x^* es bien definida, lineal sobre X y

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |\mu(E_i)| \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \\ &\leq \|x\|_\infty |\mu|(\mathbb{N}) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Como \mathbb{R} es completo, podemos extender x^* a funcionales lineales continuos sobre l_∞ , que denotamos también por $x^*: l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x^*\| \leq |\mu|(\mathbb{N})$ y por construcción $x^*(\chi_E) = \mu(E)$ para todo $E \subseteq \mathbb{N}$. ■

Corolario 3.7 l_∞^* es el conjunto de las medidas finitamente aditivas y de variación acotada sobre \mathbb{N} .

Continuamos con el siguiente teorema de S.Banach y S.Mazur en el que se demuestra que el espacio l_∞ es un espacio universal en la clase de los espacios de Banach separables.

Teorema 3.8 *Todo espacio de Banach separable es isométrico a un subespacio cerrado de l_∞ .*

Demostración: Suponga que X es un espacio de Banach separable. Por el teorema de Banach-Alaoglu B_{X^*} es compacto en la topología débil*. Para cada $x \in X$, sea $f(x)$ la restricción de $J(x) \in X^{**}$ a $B_X = K$. Como la topología débil* es la menos fina en que cada funcional Jx es continuo, entonces $f(x)$ pertenece a $C(K)$. Defina $T : X \rightarrow C(B_{X^*})$ por $Tx = J(x)|_K = f(x)$, entonces, T es claramente lineal y para cada $x \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|Jx\|_{X^{**}} \\ &= \sup_{x^* \in X^*} |Jx(x^*)| \\ &= \sup_{x^* \in B_X^*} |x^*(x)| \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

Por tanto, T es una isometría lineal inyectiva. Además, la imagen de T es cerrada en $C(B_X^*)$. En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $Tx_n \rightarrow y$ entonces, $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C(B_X^*)$ y como T es una isometría se sigue que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X . Ahora como X es de Banach, existe un $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Así, $Tx_n \rightarrow Tx$ y por tanto $y = Tx$. Luego $T(X)$ es cerrado en $C(B_X^*)$. Por tanto, T es un isomorfismo isométrico. Falta demostrar que todo espacio de Banach de la forma $C(K)$ donde K es compacto y separable es isométrico a un subespacio de l_∞ y con esto finalizamos la prueba. Considere una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denso en K . A cada $f \in C(K)$ le asociamos la sucesión $(f(x_n))_{n \geq 1}$ así, $\|(f(x_n))_{n \geq 1}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Ahora, tome $\varepsilon > 0$ y elija $x \in K$ tal que

$$\|f\| - \frac{\varepsilon}{2} < |f(x)|.$$

Como f es continua en K y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto denso en K existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto

$$\begin{aligned} |f(x_{n_0})| &= |(f(x) - f(x_{n_0})) - f(x)| \\ &\geq |f(x)| - |f(x) - f(x_{n_0})| \\ &\geq \|f\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \|f\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| > |f(x_{n_0})| > \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Así, hemos demostrado que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \|(f(x_n))_{n \geq 1}\|_\infty.$$

Lo que demuestra que $C(K)$ es isométrico a un subespacio cerrado de l_∞ . ■

Nota 7 Recordemos un corolario útil del Teorema de Hahn-Banach.

Para cada vector x en el espacio vectorial normado X se tiene que $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*; \|f\| = 1\}$.

De hecho, para un x de X , siempre podemos encontrar un funcional lineal continuo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| = \|x\|$.

La observación aquí es que hay suficientes funcionales en la esfera unitaria de X^* para recuperar la norma en X . La pregunta ahora es si algún subconjunto mas pequeño de X^* funcionará. El siguiente lema da una respuesta sencilla de tal reducción en caso que X es separable.

Lema 3.9 Sea X un espacio vectorial normado separable. Si E es un subespacio

lineal cerrado, entonces existe una familia contable $\{g_m\}$ de miembros de X^* tal que, para todo x en X ,

$$d(x, E) = \sup_{n \geq 1} |g_n(x)|.$$

En particular,

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(g_n).$$

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ un conjunto contable y denso en X . Por un corolario del teorema de Hahn-Banach existen g_n en X^* con $\|g_n\| = 1$ tal que $g_n = 0$ en E y $g_n(x_n) = d(x_n, E)$. Elija un x en X . Si y esta en E , entonces: $g_n(y) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y

$$|g_n(x)| = |g_n(x - y)| \leq \|g_n\| \|x - y\| = \|x - y\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto $\sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| \leq \|x - y\|$ para todo $y \in E$. Así $\sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| \leq d(x, E)$.

Para cada $\varepsilon > 0$, por densidad existe un n tal que $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &< \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|x_n - y\| \quad \forall y \in E \\ d(x, E) &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, E) \\ d(x, E) - \frac{\varepsilon}{2} &< d(x_n, E). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &= |g_n(x - x_n) + g_n(x_n)| \\ &\geq |g_n(x_n)| - |g_n(x - x_n)| \quad \text{y } |g_n(x - x_n)| \leq \|g_n\| \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq |g_n(x_n)| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= d(x, E) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> d(x, E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d(x, E) - \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n x| \geq d(x, E)$. Así, $d(x, E) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n x|$.

Claramente $x \in \text{Ker}(g_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si y solo si $d(x, E) = 0$ si y solo si $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(g_n)$. ■

En particular si $E = \{0\}$ tenemos:

Corolario 3.10 *Sea X un espacio vectorial normado separable. Existe una familia contable $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X^* tal que para cada x en X*

$$\begin{aligned} d(x, \{0\}) &= \sup_{n \geq 1} |f_n(x)| \quad \text{esto es} \\ \|x\| &= \sup_{n \geq 1} |f_n(x)|. \end{aligned}$$

En particular, una familia contable de elementos de X^ separa puntos en X*

Nota 8 *Queremos notar que esta afirmación también es válida para algunos espacios no separables. En nuestro caso, l_{∞} tiene esta propiedad.*

Para demostrarlo, consideremos los funcionales $e_n^(x) = e_n^*((x_i)_{i \geq 1}) = x_n$.*

Demostremos que la sucesión $(e_n^)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que*

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |e_n^*(x)|,$$

para cada $x \in X$. En efecto, si n es un número natural, tenemos

$$|x_n| \leq \sup_{i \geq 1} |x_i| = \|x\|,$$

esto es $|e_n^(x)| \leq \|x\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,*

$$\sup_{n \geq 1} |e_n^*(x)| \leq \|x\|.$$

Recíprocamente, tome $\varepsilon > 0$, como

$$\|x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

existe un natural n_0 tal que

$$\|x\| - \frac{\varepsilon}{2} < |x_{n_0}|.$$

Luego

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} |e_n^*(x)| &\geq |e_{n_0}^*(x)| \\ &= |x_{n_0}| \\ &> \|x\| - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\|x\| \leq \sup_{n \geq 1} |e_n^*(x)|.$$

Por tanto,

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |e_n^*(x)|.$$

Definición 3.11 Sea X un espacio de Banach, decimos que un subconjunto N de X^* es normado para X , o que N norma a X si

$$\|x\| = \sup_{f \in N} |f(x)|.$$

Hemos demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 3.12 a) l_∞ tiene un conjunto normado contable.

b) Todo espacio separable tiene un conjunto normado contable.

Teorema 3.13 Un espacio de Banach X tiene un conjunto normado contable si y solo si X es isométrico a un subespacio de l_∞ .

Demostración: Suponga que X contiene un conjunto normado contable $(f_n)_{n \geq 1}$. Defina $T: X \rightarrow l_\infty$ por $T(x) = (f_n(x))_{n \geq 1}$. Claramente T es lineal y

$$\|Tx\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| = \|x\|.$$

Lo que demuestra que T es una isometría inyectiva y continua.

Recíprocamente, si X es isométrico a un subespacio de l_∞ , existe $T: X \rightarrow l_\infty$ continuo tal que $\|Tx\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Como $\{e_n^*\}_{n \leq 1}$ es un conjunto normado en l_∞ , entonces para cada $x \in X$, tenemos:

$$\|Tx\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |e_n^*(Tx)|,$$

y así

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(e_n^* \circ T)(x)|.$$

Defina para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_n(x) = e_n^* \circ T(x)$. Entonces, f_n es lineal y continuo y

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Por tanto X es un conjunto normado contable.

El recíproco es claro ya que l_∞ tiene un conjunto normado contable. ■

Nota 9 *En general, si X es un espacio vectorial normado, entonces X se inserta isométricamente en $l_\infty(N)$ para algún N , donde N depende del tamaño de un conjunto en X^* . Ahora si $T: l_\infty \rightarrow l_\infty$ es lineal y continua, entonces $\text{Ker}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(e_n^* \circ T)$ ya que $e_n^*(Tx) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si y solo si $\|Tx\| = 0$ si y solo si x pertenece a $\text{Ker}(T)$. En particular, cualquier subespacio complementado de l_∞ es una intersección de núcleos de funcionales lineales y continuos". (ya que si E es complementado en l_∞ existe $Q: l_\infty \rightarrow l_\infty$ lineal y continua tal que $\text{Ker}(Q) = E$).*

La nota anterior es para discutir el siguiente problema de extensión: Suponga que X y Y son dos espacios de Banach y que E es un subespacio de X . Sea $T : E \rightarrow Y$ un operador lineal acotado.

¿Podemos extender T a un operador acotado $\tilde{T} : X \rightarrow Y$?

Si consideramos el caso especial cuando $Y = E$ y T es la función identidad sobre E , estamos pidiendo simplemente si E es el rango de una proyección sobre X , es decir, si E es complementado en X . El teorema de Hahn-Banach asegura que si Y tiene dimensión uno, entonces la extensión es posible con la preservación de la norma. Sin embargo, en general tal extensión no es posible y hemos discutido el hecho que hay subespacios no complementados en muchos espacios de Banach. Por ejemplo, ya demostramos que l_1 debe tener un subespacio no complementado, pero la construcción de este subespacio como el núcleo de una cierta función cociente significa que es bastante difícil ver exactamente que es.

Definición 3.14 *Un espacio de Banach Y se llama inyectivo si siempre que X es un espacio de Banach, E es un subespacio cerrado de X y $T : E \rightarrow X$ es un operador limitado, entonces existe un operador lineal limitado $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ que es una extensión de T . Y es llamado isométricamente inyectivo si \tilde{T} puede ser adicionalmente escogido con $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

La idea es demostrar que l_∞ es inyectivo, para ello tenemos:

Lema 3.15 *Sea X un espacio vectorial normado y $T : X \rightarrow l_\infty$ un operador lineal continuo. Entonces, existe una sucesión acotada $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ tal que $Tx = (x_n^*(x))_{n \geq 1}$.*

Además,

$$\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|.$$

Demostración: Considere el operador adjunto de T , $T^* : l_\infty^* \rightarrow X^*$ el cual es un operador lineal continuo. Para cada número natural n , defina $P_n : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ por $P_n(x) = x_n$

con $x = (x_i)_{i \geq 1}$ un elemento de l_∞ , entonces, P_n es lineal y continuo, por tanto P_n pertenece a l_∞^* y podemos así definir $x_n = T^*(P_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como T^* es continuo y $\|P_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que la sucesión $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Consideremos un $x \in X$ y escribimos $Tx = (y_1, y_2, \dots)$ un elemento de l_∞ . Entonces, de la definición de P_n obtenemos

$$\begin{aligned} y_n &= P_n(Tx) \\ &= (T^*P_n)(x) \\ &= x_n^*(x), \quad \text{para cada número natural } n. \end{aligned}$$

Por tanto, $Tx = (x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $x \in X$, luego,

$$\|Tx\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \right) \|x\|$$

y por lo tanto

$$\|Tx\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|.$$

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{n_\varepsilon}^*\| + \varepsilon > \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|,$$

de la definición, existe un $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} |x_{n_\varepsilon}^*(x)| + \varepsilon &\geq \|x_{n_\varepsilon}^*\| \\ |x_{n_\varepsilon}^*(x)| + 2\varepsilon &\geq \|x_{n_\varepsilon}^*\| + \varepsilon \\ &> \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 |x_{n_\varepsilon}^*(x)| &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| - 2\varepsilon \\
 \|T\| &\geq \|Tx\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \\
 &\geq |x_{n_\varepsilon}^*(x)| \\
 &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| - 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.
 \end{aligned}$$

Así

$$\|T\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|,$$

y por lo tanto

$$\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.16 (l_∞ es inyectivo) Sea X un espacio de Banach, Y un subespacio de X y $T : Y \rightarrow l_\infty$ un operador lineal y continuo. Entonces, existe un operador lineal continuo $\tilde{T} : X \rightarrow l_\infty$ tal que $\tilde{T}|_Y = T$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración: Como $T : Y \rightarrow l_\infty$ es un operador lineal acotado, usando el lema anterior podemos encontrar una sucesión $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y^* tal que $Ty = (y_n^*(y))_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $y \in Y$. Además,

$$\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n^*\|.$$

Por el teorema de Hahn-Banach a cada y_n^* , encontramos una sucesión $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n^*|_Y = y_n^*$ y $\|x_n^*\| = \|y_n^*\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definiendo, entonces el operador $\tilde{T} : X \rightarrow l_\infty$ por $\tilde{T}(x) = (x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $x \in X$, \tilde{T} es un operador lineal acotado

bien definido y por el lema 3.15

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n^*\| = \|T\|.$$

Finalmente, \tilde{T} es una extensión de T ya que si $y \in Y$, entonces $\tilde{T}(y) = (x_n^*(y))_{n \in \mathbb{N}} = (y_n^*(y))_{n \in \mathbb{N}} = Ty$. ■

Finalmente, con el teorema anterior podemos demostrar que l_∞ se complementa con una proyección de norma uno en cualquier superespacio X que lo contenga.

Corolario 3.17 *Si l_∞ es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X , entonces l_∞ es una proyección de norma uno sobre X y así l_∞ se complementa en X .*

Demostración: Considere la función identidad $I : l_\infty \rightarrow l_\infty$ que es una función continua de norma uno. Por el teorema anterior existe una extensión $P : X \rightarrow l_\infty$ de norma uno. Luego P es claramente una proyección y por tanto l_∞ es complementado en X . ■

4. El espacio c_0

Ahora introducimos y estudiamos algunas propiedades del espacio c_0 , empezamos nuestro estudio mostrando que:

Teorema 4.1 c_0 es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en c_0 . Entonces, para todo número natural n, k y l se tiene que

$$\begin{aligned} |x^k(n) - x^l(n)| &\leq \sup_{n \geq 1} |x^k(n) - x^l(n)| \\ &= \|x^k - x^l\|_\infty. \end{aligned}$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ la sucesión numérica $(x^k(n))_{k \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo, esta converge a un número $x(n)$ para todo natural n . Falta demostrar que la sucesión $x = (x(n))_{n \geq 1}$ pertenece a c_0 y que es el límite en c_0 de la sucesión $(x^k(n))_{k \geq 1}$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe un natural m tal que si k y l son naturales mayores o iguales a m , entonces $\|x^k - x^l\| < \frac{\varepsilon}{2}$. En particular $\|x^k - x^m\| \leq \varepsilon$. Como x^m pertenece a c_0 , existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $|x^m(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para n mayor o igual a p . Entonces, si k es mayor o igual a m y n es mayor o igual a p obtenemos

$$\begin{aligned} |x^k(n)| &\leq |x^m(n)| + |x^k(n) - x^m(n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos $|x(n)| < \varepsilon$ para todo natural $n \geq p$. Esto demuestra que x pertenece a c_0 . Además, como $|x^k(n) - x^l(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $l \geq m$ se obtiene $|x(n) - x^l(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $l \geq m$, es decir, $\|x - x^l(n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para

cada $l \geq m$. Luego x es el límite en c_0 de la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$. ■

Teorema 4.2 c_0 tiene una base de Schauder.

Demostración: Consideremos $(e_k)_{k \geq 1}$ los vectores coordenados unitarios en c_0 , esto es $e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$ con

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Veamos que es una base de Schauder de c_0 . Sea $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un elemento de c_0 . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un natural m tal que si k es un número natural con k mayor o igual a m tenemos: $|x_k| < \varepsilon$.

Así,

$$\sup_{k \geq m} |x_k| < \varepsilon.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m x_k e_k - x \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k e_k \right\| \\ &= \sup_{k > m} |x_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m x_k e_k = x.$$

En otras palabras, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

La representación es única ya que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = 0,$$

entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right\| = 0,$$

esto es,

$$\sup_{k \geq 1} |x_k| = 0,$$

luego para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_k| \leq \sup_{k \geq 1} |x_k| = 0,$$

implica que $|x_k| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, $x_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y así, la representación es única. ■

Corolario 4.3 c_0 es separable.

Demostración: En el Teorema 3.4 se demostró que si un espacio vectorial normado X tiene una base de Schauder, entonces X es separable. Como c_0 tiene una base de Schauder, entonces c_0 es separable. ■

Teorema 4.4 c_0^* es isométrico a l_1 . La isometría es definida por $f \rightarrow Tf = (f(e_n))_{n \geq 1}$

Demostración: Sea f en c_0^* y Tf la sucesión definida por $(f(e_n))_{n \geq 1}$. Si x esta en c_0 , entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n.$$

Así,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tf)(n)x(n). \quad (1)$$

Para demostrar que Tf pertenece a l_1 , fije un número natural n y defina un elemento x_n de c_0 como sigue: Para $i > n$, defina $x_n(i) = 0$, para $i \leq n$ defina $x_n(i) = \frac{|f(e_i)|}{f(e_i)}$ cuando $f(e_i) \neq 0$, en otro caso $f(e_i) = 0$. Luego

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= \sum_{i=1}^n x_n(i)f(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n |f(e_i)| \\
&= \sum_{i=1}^n |Tf(i)|.
\end{aligned}$$

Como $\|x_k\| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $|f(x_n)| \leq \|f\|$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^n |Tf(i)| \leq \|f\|,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Tf(i)|$$

es convergente, por tanto Tf esta en l_1 y $\|Tf\| \leq \|f\|$. La igualdad es válida, ya que tenemos de (1) que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |Tf(n)||x(n)| \\
&\leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |Tf(n)| \\
&\leq \|x\| \|Tf\|,
\end{aligned}$$

si $\|x\| \leq 1$, entonces $|fx| \leq \|T(f)\|$ y por tanto, $\|f\| \leq \|Tf\|$. Así, $\|Tf\| = \|f\|$.

Dado un elemento $y = (y(n))_{n \geq 1}$ en l_1 , podemos definir una f en c_0^* por la relación $fx = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)$, claramente $Tf = y$ y así T es una isometría sobreyectiva entre c_0^* y l_1 . ■

Corolario 4.5 c_0 no es reflexivo.

Demostración: El dual de c_0 es l_1 y el bidual de c_0 es l_∞ que no es separable, mientras que c_0 es separable, así la función $J : c_0 \rightarrow c_0^{**}$ no puede ser sobreyectiva. Luego c_0 no es reflexivo. ■

Ahora queremos demostrar que c_0 no se complementa en l_∞ . Recordemos que en l_∞ existe una familia contable de funcionales $\{e_n^*\}_{n \geq 1}$ tal que $e_n^*(x) = x_n$ para cada $x \in l_\infty$. Claramente, si $e_n^*(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$, luego, el núcleo de T es la intersección de una familia contable de elementos de l_∞^* , a saber los funcionales $e_n^* \circ T$ y en particular cualquier subespacio complementado de l_∞ se puede expresar como tal intersección.

Lema 4.6 *Existe una familia no contable $(N_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} tal que $N_\alpha \cap N_\beta$ es finito para cada $\alpha \neq \beta$.*

Demostración: Consideremos $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración fija de los números racionales. Para cada número irracional α elija una subsucesión $(r_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a α y defina $N_\alpha = \{n_k : k \geq 1\}$. Cada N_α es infinito, como α varía en los irracionales, la colección $(N_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ no es contable.

Demostremos que $N_\alpha \cap N_\beta$ es finito para $\alpha \neq \beta$. Suponga que existen α, β con $\alpha \neq \beta$ y $N_\alpha \cap N_\beta$ es un conjunto infinito. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir un n_p en la intersección $N_\alpha \cap N_\beta$ tal que $|r_{n_p} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|r_{n_p} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ luego

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - r_{n_p} + r_{n_p} - \beta| \\ &\leq |\alpha - r_{n_p}| + |r_{n_p} - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que es un absurdo con $\alpha \neq \beta$ ■

Teorema 4.7 c_0 no es complementado en l_∞ .

Demostración: Consideremos los subconjuntos N_α de \mathbb{N} obtenidos en el lema anterior y definimos x_α como la función característica de N_α , χ_{N_α} , entonces x_α está en l_∞ y como N_α es infinito x_α no está en c_0 . Demostremos que si f es un elemento de l_∞^* que se anula en c_0 , entonces:

$$Q(f) = \{\alpha : f(x_\alpha) \neq 0\}$$

es contable.

Sea f como arriba y defina $A_n = \{\alpha : |f(x_\alpha)| \geq \frac{1}{n}\}$, entonces $Q(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Veamos que A_n es finito para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $Q(f)$ es contable. Suponga que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son miembros distintos de A_n , sea $t_i = \frac{|f(\alpha_i)|}{f(\alpha_i)} = \text{sign}(f(\alpha_i))$ y $x = \sum_{i=1}^k t_i x_{\alpha_i}$.

Entonces, como f es lineal $fx \geq \frac{k}{n}$. Defina un elemento y de l_∞ de la siguiente manera:

Si J es exactamente uno de los conjuntos $N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2}, \dots, N_{\alpha_k}$ (digamos N_{α_i}) entonces defina $y(J) = \alpha_i$ y $y(J) = 0$ para los demás J .

Entonces, $y(J) = x(J)$ a menos que J este en algunos de los conjuntos $N_{\alpha_p} \cap N_{\alpha_q}$. Como esta intersección es finita, concluimos que hay solo un número finito de J con $y(J) = x(J)$, así que $y - x$ esta en c_0 y por tanto f se anula en $y - x$ (ya que f se anula en c_0) esto es, $f(y - x) = 0$ lo que implica que $f(y) = f(x)$.

Pero $\|y\| \leq 1$, así $f(y) \leq \|f\|$ y por tanto:

$$k \leq nf(x) = nf(y) \leq n\|f\|.$$

Esto demuestra que A_n es finito para cada número natural n .

Luego $Q(f) = \{\alpha : f(x_\alpha) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es contable. Como \mathbb{R} es no contable, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funcionales tal que $c_0 \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(f_n)$, entonces existe un α en \mathbb{R} tal que α no pertenece a $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q(f_n)$ y sabemos que x_α no esta en c_0 . Pero

$\alpha \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(f_n)$ lo que implica $f_n(x_\alpha) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ lo que contradice que $c_0 \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(f_n)$. ■

Se sigue del teorema anterior que l_∞ no tiene subespacio complementado isomorfo a c_0 .

Ahora queremos demostrar que c_0 no es isomorfo a un espacio dual. Para ello tenemos el siguiente lema:

Lema 4.8 *Existe una proyección $P : X^{***} \rightarrow X^*$.*

Demostración: Consideremos $J_1 : X \rightarrow X^{**}$ la inyección canónica de X en su bidual. Entonces $\langle J_1 x, f \rangle = \langle f, x \rangle$ para cada $x \in X$.

El adjunto $J_1^* : X^{***} \rightarrow X^*$ es también un operador lineal, ahora, considere $J : X^* \rightarrow X^{***}$ la inyección canónica de X^* en X^{***} , esto es $\langle Jx^*, \varphi \rangle = \langle \varphi, x^* \rangle$ para todo $\varphi : X^{**} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, la función $J_1^* \circ J : X^* \rightarrow X^*$ es la función identidad de X^* ya que:

$$\begin{aligned} \langle J_1^* \circ Jx^*, x \rangle &= \langle Jx^*, J_1 x \rangle && \text{tomando } \varphi = J_1(x) \\ &= \langle J_1 x, x^* \rangle && \text{de la definición de adjunta se obtiene} \\ &= \langle x^*, x \rangle, && \forall x \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $J_1^* \circ J = I_{X^*}$, luego $P = J_1^* : X^{***} \rightarrow X^*$ es una proyección de X^{***} en X^* con imagen $J(X^*)$. ■

Teorema 4.9 *c_0 no es isomorfo a un espacio dual.*

Demostración: Suponga por el contrario que existe un isomorfismo $T : c_0 \rightarrow X^*$ de el espacio c_0 sobre el dual de un espacio de Banach X . Entonces, $T^{**} : l_\infty \rightarrow X^{***}$ es de nuevo un isomorfismo y además $T^{**}|_{c_0} = T$. Por el lema anterior, existe una proyección $P : X^{***} \rightarrow X^*$ de X^{***} en X^* pero entonces $Q = T^{-1} \circ P \circ T^{**} : l_\infty \rightarrow l_\infty$

es una proyección de l_∞ sobre c_0 contradiciendo el teorema anterior que c_0 no es complementado en l_∞ . ■

Aunque c_0 no es complementado en cada superespacio, el espacio c_0 tiene también la propiedad de extensión de operadores cuyo dominio sea un espacio de Banach separable, es decir c_0 es separablemente inyectivo. Este teorema es dada a Sobczyk.

Teorema 4.10 *Sea Y un subespacio de un espacio lineal normado X separable. Si $T : Y \rightarrow c_0$ es un operador lineal acotado, entonces existe una extensión $S : X \rightarrow c_0$ tal que $\|S\| \leq 2\|T\|$.*

Demostración: Consideremos $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales biortogonales asociados a la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de c_0 y definimos $y_n^* = e_n^* \circ T$ un elemento de Y^* y considere x_n^* que pertenece a X^* una extensión de Hahn-Banach de $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\|x_n^*\| = \|y_n^*\| \leq \|T\|$. Como en el caso de l_∞ , nos gustaría definir:

$Sx = (x_n^*(x))_{n \in \mathbb{N}}$, pero necesitamos saber que $S(x)$ pertenece a c_0 para cada x , es decir, debemos reemplazar $(x_n^*)_{n \geq 1}$ por una sucesión de funcionales que convergen puntualmente a cero en X , pero no queremos alterar sus valores en Y . ¿Que hacemos? como X es separable, entonces $(\|T\|B_{X^*}, W^*)$ es compacto y matrizable en la topología débil*, sea d la métrica sobre $B = \|T\|B_{X^*}$ que da esta topología. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^*, B \cap Y^\perp) = 0.$$

Si no es así, existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k}^*)_{k \geq 1}$ de $(x_n^*)_{n \geq 1}$ tal que

$$d(x_{n_k}^*, B \cap Y^\perp) = \varepsilon,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Considere $(x_{n_{k_j}}^*)_{j \geq 1}$ una subsucesión de $(x_{n_k}^*)_{k \geq 1}$ tal que $x_{n_{k_j}}^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Entonces, $x^* \in B \cap Y^\perp$ ya que para cada $y \in Y$ tenemos:

$$\begin{aligned} x^*(y) &= \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}}^*(y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_{k_j}}^*(y) = 0. \end{aligned}$$

Luego, $d(x_{n_{k_j}}^*, x^*) \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como la función $d(\cdot, B \cap Y^\perp)$ es débil* continua en B , tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_{k_j}}^*, B \cap Y^\perp) = d(x^*, B \cap Y^\perp) = 0.$$

Esto contradice que $d(x_{n_{k_j}}^*, x^*) \geq \varepsilon \forall j \in \mathbb{N}$.

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^*, B \cap Y^\perp) = 0.$$

De esto, se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n^* \in B \cap Y^\perp$ tal que

$$0 \leq d(x_n^*, z_n^*) \leq \frac{1}{n}.$$

lo que equivale a decir que $x_n^* - z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Definimos $Sx = (x_n^*x - z_n^*x)_{n \geq 1}$, entonces, Sx pertenece a c_0 y $Sy = (x_n^*(y)) = Ty$ para cada $y \in Y$. Como x_n^*, z_n^* pertenece a B para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|Sx\| &\leq \|x_n^* - z_n^*\| \|x\| \\ &\leq 2\|T\| \|x\|, \end{aligned}$$

así, $\|S\| \leq 2\|T\|$. ■

Corolario 4.11 Si c_0 es un subespacio cerrado de un espacio de Banach separable X , entonces existe una proyección acotada de X sobre c_0 .

Demostración: El operador identidad $I : c_0 \rightarrow c_0$ es lineal, continuo de norma uno. Luego, por Teorema anterior existe una extensión $P : X \rightarrow c_0$ lineal continuo tal que $\|P\| \leq 2\|I\| = 2$. Claramente, P es una proyección de X sobre c_0 . ■

Ahora demostremos que c_0 no es secuencialmente débilmente completo.

Teorema 4.12 c_0 no es secuencialmente débilmente completo.

Demostración: Construimos una sucesión en c_0 que es débilmente de Cauchy pero que no es convergente en c_0 .

Defina $x_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere, una f en $c_0^* = l_1$, esto es $f = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$, tal que:

$$\langle f, (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n.$$

Como $x_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, entonces $f x_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Sea $\varepsilon > 0$, como $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$ existe un número natural N tal que si n, m son naturales con $n > m > N$ tenemos $\sum_{j=m+1}^n |\lambda_j| < \varepsilon$. Luego:

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_m)| &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^m \lambda_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \right| \\ &= \sum_{j=m+1}^n |\lambda_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} y por tanto convergente en \mathbb{R} . Ahora, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge débilmente en c_0 .

Suponga que existe un $x \in c_0$ tal que x_n converge débilmente a x . Entonces, para

cada $k \in \mathbb{N}$ considere los funcionales $P_k : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = x_k.$$

Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$ los P_k son continuos en c_0 y por tanto, $P_k \in c_0^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como x_n converge débilmente a x , entonces $P_k(x_n) \rightarrow P_k(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto $P_k(x) = 1$ para todo k natural. Luego $x = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ lo que contradice que x pertenece a c_0 . Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge débilmente en c_0 . Luego, c_0 no es secuencialmente débilmente completo. ■

Ahora, demostramos que c_0 es un espacio primo. Comenzamos con el siguiente lema:

Lema 4.13 *Sea $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica bloque normalizada en c_0 . Entonces $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es isométricamente equivalente a la base canónica de c_0 y $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es el rango de una proyección de norma uno de c_0 (así, $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementado en c_0).*

Demostración: Suponga que $\mu_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a_j e_j$ con $k \in \mathbb{N}$, $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$ son enteros positivos y $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son escalares tales que

$$\sup_{r_{k-1}+1 \leq j \leq r_k} |a_j| = 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Debemos calcular para cada número natural m y escalares $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$, la norma de c_0 de $\sum_{k=1}^m b_k \mu_k$.

como la sucesión es bloque entonces $b_1 \mu_1$ tiene la forma

$(0, 0, \dots, b_1 a_{r_0+1}, b_1 a_{r_0+2}, \dots, b_1 a_{r_1}, 0, \dots, 0, \dots)$, igualmente $b_2 \mu_2$ es de la forma $(0, 0, \dots, b_2 a_{r_1+1}, \dots)$

Las posiciones de $b_1 \mu_1$ son distintos a las posiciones de $b_2 \mu_2$ y así sucesivamente.

Por tanto, si definimos

$$|a_{k_1}| = \sup_{r_0+1 \leq j \leq r_1} |a_j|, |a_{k_2}| = \sup_{r_1+1 \leq j \leq r_2} |a_j|, \dots, |a_{k_m}| = \sup_{r_{m-1}+1 \leq j \leq r_m} |a_j|,$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \right\|_{\infty} &= \sup_{m \geq 1} |b_m| \sup_m |a_{k_m}| \\
 &= \sup_m |b_m| (1) \\
 &= \sup_m |b_m| \\
 &= \|(b_m)_{m \geq 1}\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

lo que demuestra la existencia de la isometría.

Para la proyección, consideremos $(e_j^*)_{j \geq 1}$ los funcionales biortogonales de la base canónica de c_0 y $(b_j)_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}$ son escalares tal que

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j| = 1,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$\mu_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*$$

Claramente, $(\mu_j^*)_{j \geq 1}$ es biortogonal a $(\mu_j)_{j \geq 1}$, esto es $\mu_k^*(\mu_k) = 1$ y $\mu_k^*(\mu_p) = 0$ para todo $p \neq k$ y $\|\mu_k^*\| = \|\mu_k\| = 1$. Definimos el operador $P : c_0 \rightarrow c_0$ por

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k,$$

para todo $x \in c_0$. Demostremos que P es una proyección de norma uno sobre

$[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 P\mu_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(\mu_j) \mu_k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{kj} \mu_k \\
 &= \mu_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, usando la continuidad de P tenemos

$$\begin{aligned}
 PPx &= P \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) P\mu_k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \\
 &= Px.
 \end{aligned}$$

Por tanto, P es una proyección sobre $[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$.

Sea $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ un elemento de c_0 , entonces:

$$\begin{aligned}
 |\mu_k^*(x)| &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j x(j) \right| \\
 &\leq \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j| |x(j)| \\
 &\leq \sup_{j \geq 1} |x(j)| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j| \\
 &\leq \|x\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

Así, usando la isometría entre $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[e_n]_{n \in \mathbb{N}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} |Px| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right| \\ &= \sup_{k \geq 1} |\mu_k^*(x)| \\ &\leq \|x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|P\| \leq 1$ y así P es una proyección de norma uno. Luego $[\mu_k]_{k \in \mathbb{N}}$ es complementado con una proyección de norma uno. ■

El siguiente teorema ya fue demostrado cuando estudiamos el espacio l_1 y el lector puede revisar cuidadosamente la demostración y notar que puede adaptarse el resultado a el espacio c_0 y los espacios l_p con $1 < p < \infty$.

Teorema 4.14 (Pełczyński) *Cada subespacio lineal cerrado de dimensión infinita de c_0 contiene un subespacio complementado de c_0 que es isomorfo a c_0 .*

Finalizando los preliminares para demostrar que c_0 es primo, demostrando un teorema con algunas propiedades isomorfas del espacio c_0 y $c_0(X)$.

Recordemos que \cong significa isomorfismo.

Teorema 4.15 *Sean X y Y dos espacios de Banach. Entonces:*

1. Si $X \cong Y$, entonces $c_0(X) \cong c_0(Y)$.
2. $c_0(X \oplus Y) \cong c_0(X) \oplus c_0(Y)$.
3. $c_0 \cong c_0 \oplus \mathbb{R}$. (c_0 es estable)
4. $c_0(X) \oplus X \cong c_0(X)$.
5. $c_0 \oplus c_0 \cong c_0$.
6. $c_0(c_0) \cong c_0$.

Demostración:

1. Suponga que X y Y son espacios de Banach tal que $X \cong Y$ y considere $T: X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Luego, existen constantes α y β positivas tal que:

$$\alpha\|\mu\| \leq \|T\mu\| \leq \beta\|\mu\|, \quad \text{para todo } \mu \in X.$$

Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $c_0(X)$, entonces defina $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1}$. S es claramente lineal, además como $x \in c_0$, entonces $x_n \rightarrow 0$ y como T es acotado, tenemos que $Tx_n \rightarrow 0$, luego Sx pertenece a $c_0(Y)$. Demostremos que $S: c_0(X) \rightarrow c_0(Y)$ es un isomorfismo. Como T es inyectivo, S es inyectivo ya que si $Sx = 0$, entonces $Tx_n = 0$ para cada número natural n y como T es un isomorfismo, entonces $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego x es la sucesión nula. Ahora, para cada n natural, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha\|x_n\| &\leq \|Tx_n\| \leq \beta\|x_n\| \quad \text{y tomando supremo obtenemos,} \\ \alpha \sup_{n \geq 1} \|x_n\| &\leq \sup_{n \geq 1} \|Tx_n\| \leq \beta \sup_{n \geq 1} \|x_n\|, \quad \text{de donde} \\ \alpha\|x_n\|_{c_0(X)} &\leq \|Sx_n\|_{c_0(X)} \leq \beta\|x_n\|_{c_0(X)} \quad \text{para cada } x \in c_0(X). \end{aligned}$$

Así S es un isomorfismo. Finalmente S es sobreyectiva, ya que si $y = (y_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $c_0(Y)$, entonces defina $x_n = T^{-1}y_n$ para cada n natural, obtenemos así la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en $c_0(X)$ que satisface $x_n \rightarrow 0$ (ya que $y_n \rightarrow 0$) y $Tx_n = y_n$ para cada número natural n . Además $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1} = (y_n)_{n \geq 1} = y$. Luego S es un isomorfismo entre $c_0(X)$ y $c_0(Y)$.

2. Usamos la norma $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ en $X \oplus Y$. Dada una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ en $c_0(X)$ y una sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ en $c_0(Y)$ defina $S(x, y)$ como

la sucesión $z = (x_n, y_n)_{n \geq 1}$ en $c_0(X \oplus Y)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \|S(x, y)\|_{c_0(X \oplus Y)} &= \|z\| \\
 &= \max\{\sup_{n \geq 1} \|x_n\|_{c_0}, \sup_{n \geq 1} \|y_n\|_{c_0}\} \\
 &= \max\{\|x\|_{c_0(X)}, \|y\|_{c_0(Y)}\} \\
 &= \|(x, y)\|_{c_0(X) \oplus c_0(Y)}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, S es un isomorfismo.

3. Demostremos que $c_0 \cong c_0 \oplus \mathbb{R}$. Usamos $\|(\mu, \lambda)\|_{c_0 \oplus \mathbb{R}} = \max\{\|\mu\|, |\lambda|\}$. Dada una sucesión x de c_0 y un elemento λ de \mathbb{R} , defina $T(x, \lambda)$ la sucesión z definida por $z(1) = \lambda$ y $z(n) = x(n-1)$ para $n > 1$. Como x pertenece a c_0 , entonces $x(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto $z(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego z pertenece a c_0 . Ahora:

$$\begin{aligned}
 \|T(x, \lambda)\| &= \|z(n)\|_{c_0} \\
 &= \sup_{n \geq 1} |z(n)| \\
 &= \max\{|z(1)|, \sup_{n > 1} |z(n)|\} \\
 &= \max\{|\lambda|, \|x\|_{c_0}\} \\
 &= \|(x, \lambda)\|_{c_0 \oplus \mathbb{R}}.
 \end{aligned}$$

Luego T es un isomorfismo.

4. Sea T un isomorfismo de $c_0 \oplus \mathbb{R}$ sobre c_0 y considere α, β números reales tal que:

$$\alpha(\|x\|_{c_0} + |\lambda|) \leq \|T(x, \lambda)\|_{c_0} \leq \beta(\|x\|_{c_0} + |\lambda|), \quad (*)$$

para todo $(x, \lambda) \in c_0 \oplus \mathbb{R}$. Dada una sucesión $\mu = (x_n)_{n \geq 1}$ en $c_0(X)$ y x_0 un punto de X , defina $S(\mu, x_0)$ la sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ definida por $y_1 = x_0$ y

$y_n = x_{n-1}$. Como μ pertenece a $c_0(X)$, entonces $x_n \rightarrow 0$ y por tanto $y_n \rightarrow 0$, así y pertenece a $c_0(X)$. De la desigualdad (*) en cada x_n y $\lambda = \|x_0\|$ tenemos:

$$\alpha(\|x_n\|_{c_0} + \|x_0\|) \leq \|T(x_n, \|x_0\|)\|_{c_0} \leq \beta(\|x_n\|_{c_0} + \|x_0\|), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\alpha(\|x_n\|_{c_0} + \|x_0\|) \leq \max\{\|y_n\|_{c_0}\|x_0\|\} \leq \beta(\|x_n\|_{c_0} + \|x_0\|), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tomando el supremo obtenemos

$$\alpha(\|\mu\|_{c_0(X)} + \|x_0\|) \leq \|y\|_{c_0(X) \oplus X} \leq \beta(\|\mu\|_{c_0(X)} + \|x_0\|)$$

$$\alpha(\|(\mu, x_0)\|_{c_0(X) \oplus X}) \leq \|S(\mu, x_0)\|_{c_0(X) \oplus X} \leq \beta(\|(\mu, x_0)\|_{c_0(X) \oplus X})$$

Luego S es un isomorfismo de $c_0(X) \oplus X$ en $c_0(X)$. El isomorfismo es sobreyectivo ya que si $y = (y_n)_{n \geq 1}$ es un elemento arbitrario de $c_0(X)$, defina $x_n = y_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = (x_n)_{n \geq 1}$ está en $c_0(X)$ y $y = S(x, y_1)$.

5. Sean x, y dos elementos de c_0 , defina una nueva sucesión z por $z(2n-1) = x(n)$ y $z(2n) = y(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $x(n)$ y $y(n)$ tienden a cero y $(z(n))_{n \geq 1}$ es una sucesión tal que la subsucesión de los pares converge a cero y la subsucesión de los impares también converge a cero, entonces $(z(n))_{n \geq 1}$ converge a cero. Por tanto z pertenece a c_0 . Además:

$$\begin{aligned} \|z\|_{c_0} &= \sup_{n \geq 1} |z(n)| \\ &= \max\{\sup_{n \geq 1} |z(2n-1)|, \sup_{n \geq 1} |z(2n)|\} \\ &= \max\{\|x\|_{c_0}, \|y\|_{c_0}\} \\ &= \|(x, y)\|_{c_0 \oplus c_0}. \end{aligned}$$

Luego $S(x, y) = z$ es un isomorfismo.

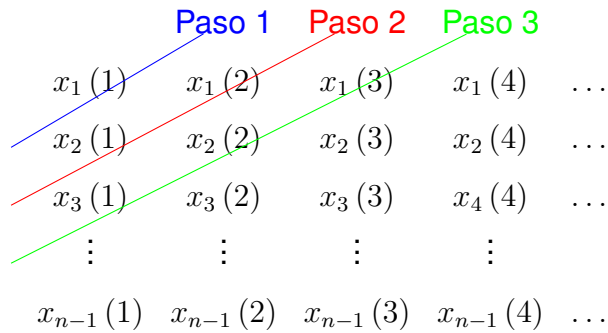
6. Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $c_0(c_0)$. Defina Sx como una sucesión y como sigue:

Paso 1: Defina $y(1) = x_1(1)$.

Paso 2: Defina $y(2) = x_2(1), y(3) = x_1(2)$.

Paso 3: Defina $y(3) = x_3(1), y(4) = x_2(2), y(5) = x_1(3)$ y así sucesivamente.

Si los $x_i(j)$ son pensados como las entradas de una matriz infinita, se puede observar que son enumerados en diagonales:



En el n -ésimo paso definimos los n -valores próximos de $y(i)$ como $x_n(1), x_{n-1}(2), \dots, x_1(n)$ estos son de hecho los $y(i)$ para i entre $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n - 1) + 1]$ y $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n) + 1]$. Veamos que y está en c_0 usando que x está en $c_0(c_0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como x pertenece a $c_0(c_0)$ existe un N natural tal que $\|x_n\| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Ahora existe un k natural, tal que si $k > N$ entonces $|x_i(k)| \leq \varepsilon$ para cada $i = 1, \dots, N$. Entonces tenemos $|y(i)| \leq \varepsilon$ para i que esta después del paso $N + k - 1$ es decir, para $i > 1 + 2 + \dots + N + k - 1 = \frac{1}{2}(N + k - 1)(N + k)$. Luego y pertenece a c_0 y

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{c_0(c_0)} &= \sup_{n \geq 1} \|x_n\|_0 \\
 &= \sup_{n \geq 1} \sup_{j \geq 1} |x_n(j)| \\
 &= \sup_{n \geq 1} |y(n)| = \|y\|_{c_0}.
 \end{aligned}$$

Luego S es un isomorfismo. ■

Teorema 4.16 (c_0 **es primo**) *cada subespacio complementado de dimensión infinita de c_0 es isomorfo a c_0 .*

Demostración: Sea E un subespacio complementado de dimensión infinita de c_0 , entonces podemos escribir $c_0 = E \oplus F$ por algún espacio de Banach F . Por el teorema de Pełczyński E contiene un subespacio X isomorfo a c_0 y complementado en c_0 . Por tanto, X es también complementado en E y podemos escribir $E = X \oplus Y$ con $X \cong c_0$. Luego

$$\begin{aligned}
 c_0 &\cong c_0(c_0) \\
 &\cong c_0(E \oplus F) \\
 &\cong c_0(E) \oplus c_0(F) \\
 &\cong c_0(E) \oplus E \oplus c_0(F) \\
 &\cong c_0(E) \oplus c_0(F) \oplus E \\
 &\cong c_0(E \oplus F) \oplus E \\
 &\cong c_0 \oplus E.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 E &\cong c_0 \oplus Y \\
 &\cong (c_0 \oplus c_0) \oplus Y \\
 &\cong c_0 \oplus (c_0 \oplus Y) \\
 &\cong c_0 \oplus E \\
 &\cong c_0.
 \end{aligned}$$

Luego c_0 es primo. ■

5. Espacios l_p con $1 < p < \infty$

Para finalizar el trabajo, estudiaremos los espacios l_p con $1 < p < \infty$, aunque las demostraciones de varias propiedades estudiadas de los espacios l_p con $1 < p < \infty$ son generalizaciones de propiedades estudiadas en el espacio l_1 , nos hemos tomado el tiempo de escribirlas por aparte para que el lector encuentre dichas pruebas para ambos casos (l_1 y l_p con $1 < p < \infty$). Empezamos nuestro estudio mostrando que:

Teorema 5.1 l_p es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en l_p y fije un natural k . Consideremos la sucesión de escalares $(x_n(k))_{n \geq 1}$, entonces para cualquiera m, n números naturales se tiene que:

$$\begin{aligned} |x_n(k) - x_m(k)| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_m(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así que $(x_n(k))_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo esta sucesión es convergente. Definiendo, para cada k natural,

$$x(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k)$$

obtenemos la sucesión $x = (x(k))_{k \geq 1}$. Nuestro objetivo es comprobar que $x \in l_p$ y que $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$ completando así la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en l_p , existe un número natural n_0 tal que si n, m son naturales mayores o iguales a n_0 se tiene que $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$.

Por tanto, para cada natural N tenemos :

$$\sum_{k=1}^N |x_n(k) - x_m(k)|^p \leq (\|x_n - x_m\|_p)^p < \varepsilon^p$$

Fijando un número natural $n \geq m_0$, la desigualdad anterior es válida para todo $m \geq n_0$ y podemos tomar el límite cuando $m \rightarrow \infty$, así

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |x_n(k) - x(k)|^p &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |x_n(k) - x_m(k)|^p \\ &\leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

y como N es cualquier natural, deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \leq \varepsilon^p \quad (*)$$

Por tanto, $x_n - x$ pertenece a l_p y como $x = x_n - (x_n - x)$ se sigue que x está en l_p . Además de (*) tenemos que $\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon$ para cada n mayor o igual a n_0 . Lo que demuestra que x_n converge a x en l_p . ■

Teorema 5.2 l_p tiene una base de Schauder.

Demostración: Consideremos e_k los vectores coordenados unitarios de l_p , es decir

$e_k = (\delta_{kj})_{j \geq 1}$ donde

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

sea $x = (x(n))_{n \geq 1}$ un elemento de l_p , entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p$ es convergente. Sea $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que si n es mayor o igual a N , entonces

$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$. Así, para cada n natural se tiene que

$$\left(\left\| x - \sum_{k=1}^n x(k)e_k \right\|_p \right)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p < \varepsilon^p \quad \text{Así,}$$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x(k)e_k \right\|_p < \varepsilon \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Luego $x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k$ pertenece a l_p . La representación es única, ya que si $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k = 0$ entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k \right\|_p = 0$$

si, y solo si,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p = 0$$

si, y solo si, $x(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $x = 0$. ■

Corolario 5.3 l_p es separable para cada $1 < p < \infty$.

Teorema 5.4 Si $p > 1$, entonces l_p^* es isométrico a l_q donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La isometría es definida por: $f \in l_p^* \rightarrow Tf = (f(e_n))_{n \geq 1}$.

Demostración: Tome f en l_p^* y considere Tf la sucesión $(f(e_n))_{n \geq 1}$. Como sabemos

$$fx = \sum_{n=1}^{\infty} (Tf)(n)x(n),$$

para cada $x \in l_p$.

Fije un natural N . Definimos un elemento x_N de l_p como sigue: para cada $i > N$ defina $x_N(i) = 0$ y para $i \leq N$ defina $x_N(i)$ tal que $x_N(i)f(e_i) = |f(e_i)|^q$ y en caso

que $f(e_i) = 0$, entonces tomamos $x_N(i)$ como cero. Luego

$$\begin{aligned} f(x_N) &= \sum_{i=1}^N x_N(e_i) f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^N |f(e_i)|^q. \end{aligned}$$

Además, $|x_N(i)|^p = |f(e_i)|^q$ para cada $i < N$. Entonces, como $p(q-1) = q$, se tiene que $f(x_N) = |x_N|^p$. Por tanto,

$$\|f\| \|x_N\| \geq |f(x_N)| = \|x_N\|^p.$$

Entonces, $\|f\| \geq \|x_N\|^{p-1}$, luego, $\|f\|^q \geq \|x_N\|^{(p-1)q} = \|x_N\|^p = \sum_{i=1}^N |(Tf)(i)|^p$. Como esto es verdadero para todo $N \in \mathbb{N}$, Tf esta en l_q y su norma (en l_q) no es mayor que $\|f\|$. En realidad, se da la igualdad, ya que por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned} |fx| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} (Tf)(n)x(n) \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(Tf)(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|(Tf)\| \|x\|. \end{aligned}$$

Si $\|x\| \leq 1$, tenemos $\|f\| \leq \|Tf\|$. Por tanto, $\|f\| = \|Tf\|$. Además, dado $y \in l_q$, la desigualdad de Holder muestra que la relación

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y(n)x(n)$$

define un elemento f de l_p^* . Claramente, $y = Tf$ y por tanto T es sobreyectiva. ■

Corolario 5.5 l_p es reflexivo para cada $1 < p < \infty$.

Ahora demostremos que igual que el espacio l_1 , l_p es secuencialmente débilmente completo. Para ello tenemos a

Teorema 5.6 *Si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces X es secuencialmente débilmente completo. En particular, l_p es secuencialmente débilmente completo para $1 < p < \infty$.*

Demostración: Suponga que X es un espacio de Banach reflexivo y tome $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en X tal que $(x_n)_{n \geq 1}$ es débilmente de Cauchy en X . Entonces, para todo funcional f de X^* , la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y por tanto es acotada, luego, por el principio de limitación uniforme la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es acotada. Como X es reflexivo, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ que converge débilmente a $x \in X$. Así, si f pertenece a X^* , entonces $(f(x_{n_k}))_{k \geq 1}$ converge a $f(x)$. Pero si $f(x_n)$ converge a y , como $(f(x_{n_k}))_{k \geq 1}$ es una subsucesión de $(f(x_n))_{n \geq 1}$ entonces $(f(x_{n_k}))_{k \geq 1}$ también converge a y así $y = f(x)$. Luego x_n converge débilmente a x . ■

Lema 5.7 *Sea $(\mu_n)_{n \geq 1}$ una sucesión básica bloque normalizada en l_p . Entonces $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es isométricamente equivalente a la base canónica de l_p y $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es el rango de una proyección de norma uno de l_p . (Así, $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es complementado en l_p).*

Demostración: Suponga que $\mu_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a_j e_j$ con $k \in \mathbb{N}$, $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots$ son enteros positivos y $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son escalares tales que

$$\|\mu_k\|^p = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p = 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, para cada número natural m y escalares b_1, b_2, \dots, b_m obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \right\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_k a_j e_j \right\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Esto establece una equivalencia isométrica en el caso l_p con $1 < p < \infty$.

Para la proyección, consideremos $(e_j^*)_{j \geq 1}$ los funcionales biortogonales de la base canónica de l_p y $(b_j)_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}$ son escalares tal que

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q = 1$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$\mu_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*.$$

Entonces, $\mu_n^*(\mu_n) = 1$ y $\mu_n^*(\mu_p) = 0$ para todo $p \neq n$ y $\|\mu_n^*\|_p = \|\mu_n\|_p$. Definimos el operador $P : l_p \rightarrow l_p$ por

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k,$$

para todo $x \in l_p$ y demostremos que P es una proyección de norma uno de l_p sobre $[\mu_j]_{j \geq 1}$. En efecto

$$\begin{aligned}
 P\mu_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(\mu_j) \mu_k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{kj} \mu_k \\
 &= \mu_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, usando la continuidad de P tenemos

$$\begin{aligned}
 PPx &= P \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) P\mu_k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \\
 &= Px.
 \end{aligned}$$

Por tanto, P es una proyección sobre $[\mu_j]_{j \in \mathbb{N}}$. Sea $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ un elemento de l_p , entonces:

$$\begin{aligned}
 |\mu_k^*(x)| &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j x(j) \right| \\
 &\leq \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Así, usando la isometría entre $[\mu_n]_{n \in \mathbb{N}}$ y $[e_n]_{n \in \mathbb{N}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|Px\|^p &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(x) \mu_k \right\|^p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^*(x)|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |x(j)|^p \right) \\ &= \|x\|^p. \end{aligned}$$

Luego P es una proyección de norma uno sobre $[\mu_k]_{k \geq 1}$. ■

Vamos a demostrar que l_p no es isomorfo a l_r para $p \neq r$ con $1 < p < \infty$ y $1 < r < \infty$

Teorema 5.8 *Sea $1 < p < r < \infty$ y $T : l_r \rightarrow l_p$ una función lineal acotado. Entonces, $\|Te_n\|_p \rightarrow 0$. En particular, T no es un isomorfismo.*

Demostración: Primero demostraremos que $(Te_n)_{n \geq 1}$ converge débilmente a cero, esto es $Te_n \xrightarrow{w} 0$. Sea f un elemento de $(l_p)^* = l_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, $f \circ T$ pertenece a $l_r^* = l_s$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ y existe un sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en l_s tal que

$$(f \circ T)(x) = \langle (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle$$

para todo $x \in l_r$.

En particular

$$(f \circ T)(e_n) = \langle (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}, e_n \rangle = \varepsilon_n = e_n^*(f \circ T)$$

la n -ésima coordenada de $f \circ T$. Como $1 < s < \infty$ debemos tener que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $f(Te_n) \rightarrow 0$ para todo $f \in l_p^*$ y así $Te_n \rightarrow 0$ débilmente.

Ahora demostremos que $\|Te_n\|_p \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Suponga que $\|Te_n\|_p \not\rightarrow 0$

cuando $n \rightarrow \infty$, esto es

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|Te_n\|_p > 0.$$

(Recuerde que $(Te_n)_{n \geq 1}$ es acotada). Así, por el principio de selección de Bessaga y Petczynski existe una subsucesión de $(Te_n)_{n \geq 1}$ que es básica y equivalente a una sucesión básica bloque de $(e_n)_{n \geq 1}$ en l_p . Por el lema 5.7 $(Te_n)_{n \geq 1}$ es isométricamente equivalente a $(e_n)_{n \geq 1}$. En particular, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_p \right\|_p &\leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k T e_{n_k} \right\|_p && \text{Así} \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k} \right\|_r \\ &= C \|T\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Como esta desigualdad es válida para todos los escalares a_k podemos tomar $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ y $a_k = 0$ para $k > n$. Así, $n^{\frac{1}{p}} \leq C \|T\| n^{\frac{1}{r}}$, como $p < r$, entonces $\frac{1}{p} > \frac{1}{r}$ y por tanto $n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \leq C \|T\|$, lo que contradice que T es acotado. Luego, $\|Te_n\|_p \rightarrow 0$, así T no puede ser un isomorfismo ya que si T es un isomorfismo existe una constante $M > 0$ tal que $\|Te_n\| \geq M \|e_n\| = M > 0$ lo que no sucede cuando $\|Te_n\|_p \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$. ■

El siguiente teorema ya fue demostrado cuando se estudio el espacio l_1 y el lector puede revisar cuidadosamente la demostración y notar que no se utiliza la definición de la norma de l_1 si no que son resultados validos para c_0 y l_p con $1 < p < \infty$. ■

Teorema 5.9 (Pełczyński) *Cada subespacio lineal cerrado de dimensión infinita de l_p contiene un subespacio complementado de l_p que es isomorfo a l_p .*

Mostraremos que l_p es primo, pero antes de esto, demostraremos algunas propie-

dades isomorfas del espacio l_p y $l_p(X)$. Estas propiedades son muy similares a las del caso l_1

Teorema 5.10 Sean X y Y dos espacios de Banach y $p > 1$. Entonces:

1. Si $X \cong Y$, entonces $l_p(X) \cong l_p(Y)$.
2. $l_p(X \oplus Y) \cong l_p(X) \oplus l_p(Y)$.
3. $l_p \cong l_p \oplus \mathbb{R}$. (l_p es estable)
4. $l_p(X) \oplus X \cong l_p(X)$.
5. $l_p \oplus l_p \cong l_p$.
6. $l_p(l_p) \cong l_p$.

Demostración:

1. Suponga que X y Y son espacios de Banach tal que $X \cong Y$ y considere $T: X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Luego, existen constantes α y β positivas tal que:

$$\alpha\|\mu\| \leq \|T\mu\| \leq \beta\|\mu\|, \quad \text{para todo } \mu \in X.$$

Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $l_p(X)$, entonces defina $S: l_p(X) \rightarrow l_p(Y)$ por $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1}$. S es claramente lineal. S es inyectiva, pues $Sx = 0$ si y solo si $Tx_n = 0$ para cada número natural n y como T es un isomorfismo, entonces $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego x es la sucesión nula. Para cada n natural tenemos:

$$\alpha\|x_n\|_p \leq \|Tx_n\| \leq \beta\|x_n\|_p.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\|Sx\|_{l_p(X)}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^p \\ &\leq \beta^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{l_p}^p; \\ &\leq \beta^p \|x\|_{l_p(X)}^p.\end{aligned}$$

Luego $\|Sx\| \leq \beta\|x\|$ para todo $x \in l_p(X)$. Además,

$$\begin{aligned}\alpha^p \|x\|_{l_p(X)}^p &= \alpha^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{l_p}^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha x_n\|_{l_p}^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^p = \|Sx\|_{l_p(X)}^p.\end{aligned}$$

Así, $\alpha\|x\|_{l_p(X)} \leq \|Sx\|_{l_p(X)}$. Luego, $\alpha\|Sx\|_{l_p(X)} \leq \|Sx\|_{l_p(X)} \leq \beta\|x\|_{l_p(X)}$ para cada $x \in l_p(X)$. Finalmente, si $y = (y_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $l_p(Y)$, entonces defina $x_n = T^{-1}y_n$ para cada n natural, obtenemos así la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en $l_p(X)$ que satisface $Tx_n = y_n$ para cada número natural n y $Sx = (Tx_n)_{n \geq 1} = (y_n)_{n \geq 1} = y$. Por tanto S es sobreyectiva. Luego S es un isomorfismo entre $l_p(X)$ y $l_p(Y)$.

- Usamos la norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ en $X \oplus Y$. Dada una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ en $l_p(X)$ y una sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ en $l_p(Y)$ defina $S(x, y)$ como la

sucesión $z = (x_n, y_n)_{n \geq 1}$ en $l_p(X \oplus Y)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \|S(x, y)\|_{l_p(X \oplus Y)} &= \|z\|_{l_p(X \oplus Y)} \\
 &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|x\|_{l_p(X)} + \|y\|_{l_p(Y)} \\
 &= \|(x, y)\|_{l_p(X) \oplus l_p(Y)}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, S es un isomorfismo.

3. Demostremos que $l_p \cong l_p \oplus \mathbb{R}$. Usamos $\|(x, \lambda)\| = (\|x\|^p + |\lambda|^p)^{\frac{1}{p}}$ para cada (x, λ) en $l_p \oplus \mathbb{R}$. Dada una sucesión x de l_p y un elemento λ de \mathbb{R} , defina $T(x, \lambda)$ la sucesión z definida por $z(1) = \lambda$ y $z(n) = x(n-1)$ para $n > 1$. Ahora:

$$\begin{aligned}
 \|T(x, \lambda)\| &= \|z(n)\|_{l_p} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(|\lambda|^p + \sum_{n=2}^{\infty} |x(n-1)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(|\lambda|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= (|\lambda|^p + \|x\|_{l_p(X)}^p)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|(x, \lambda)\|.
 \end{aligned}$$

Luego T es un isomorfismo.

4. Sea T un isomorfismo de $l_p \oplus \mathbb{R}$ sobre l_p y considere α, β números reales tal

que:

$$\alpha(\|\mu\|_{l_p}^p + |\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|T(\mu, \lambda)\|_{l_p} \leq \beta(\|\mu\|_{l_p}^p + |\lambda|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (*)$$

para todo (μ, λ) que pertenece a $l_p \oplus \mathbb{R}$. Dada una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ en $l_p(X)$ y x_0 un punto de X , defina $S(x, x_0)$ la sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ definida por $y_1 = x_0$ y $y_n = x_{n-1}$. Como x pertenece a $l_p(X)$, entonces y pertenece a $l_p(X)$ y tomando $\mu = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda = \|x_0\|$ en $(*)$ obtenemos:

$$\alpha(\|x_n\|_{l_p} + \|x_0\|) \leq \|T(x_n, \|x_0\|)\|_{l_p} \leq \beta(\|x_n\|_{l_p} + \|x_0\|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha(\|x_n\|_{l_p}^p + \|x_0\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|T(x_n, \|x_0\|)\|_{l_p} \leq \beta(\|x_n\|_{l_p}^p + \|x_0\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

tomando sumatorias y usando la definición de norma en $l_p(X)$ y la definición de S obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha^p \|(x_n, x_0)\|_{l_p(X) \oplus X}^p &\leq \|S(x, x_0)\|_{l_p(X)}^p \quad \text{y también} \\ \|S(x, x_0)\|_{l_p(X)}^p &\leq \beta^p \|(x, x_0)\|_{l_p \oplus X}^p. \end{aligned}$$

Luego S es un isomorfismo entre $l_p(X) \oplus X$ en $l_p(X)$.

5. Sean x, y dos elementos de l_p , defina una nueva sucesión z por $z(2n-1) = x(n)$ y $z(2n) = y(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|z\|_{l_p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n \text{ impar}} |z(n)|^p + \sum_{n \text{ par}} |z(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z(2k-1)|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |z(2k+1)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(n)^p| \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(n)^p| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x\|_{l_p} + \|y\|_{l_p} \\
&= \|(x, y)\|_{l_p \oplus l_p}.
\end{aligned}$$

Luego $S(x, y) = z$ es un isomorfismo.

6. Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $l_p(l_p)$. Defina Sx la sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ como sigue:

Paso 1: Defina $y(1) = x_1(1)$.

Paso 2: Defina $y(2) = x_2(1), y(3) = x_1(2)$.

Paso 3: Defina $y(3) = x_3(1), y(4) = x_2(2), y(5) = x_1(3)$ y así sucesivamente.

Si los $x_i(j)$ son pensados como las entradas de una matriz infinita, se puede observar que son enumerados en diagonales:

	Paso 1	Paso 2	Paso 3		
$x_1(1)$	$x_1(2)$	$x_1(3)$	$x_1(4)$...	
$x_2(1)$	$x_2(2)$	$x_2(3)$	$x_2(4)$...	
$x_3(1)$	$x_3(2)$	$x_3(3)$	$x_4(4)$...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
$x_{n-1}(1)$	$x_{n-1}(2)$	$x_{n-1}(3)$	$x_{n-1}(4)$...	

En el n -ésimo paso definimos los n -valores próximos de $y(i)$ como

$x_n(1), x_{n-1}(2), \dots, x_1(n)$ estos son de hecho los $y(i)$ para i entre $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n - 1) + 1]$ y $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ $[(1 + 2 + \dots + n) + 1]$. Como x_n

pertenece a l_p para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces y pertenece a l_p y

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{l_p(l_p)} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{l_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_n(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|y\|_{l_p} = \|Sx\|_{l_p}.
 \end{aligned}$$

Esto es, $\|x\|_{l_p(l_p)} = \|Sx\|_{l_p}$. Luego S es un isomorfismo. ■

Teorema 5.11 (l_p es primo): *Cada subespacio complementado de dimensión infinita de l_p es isomorfo a l_p .*

Demostración: Sea E un subespacio complementado de dimensión infinita de l_p , entonces podemos escribir $l_p = E \oplus F$ para algún espacio de Banach F . Por el teorema de Pełczyński E contiene un subespacio X_1 isomorfo a l_p y complementado en l_p . Por tanto, X_1 es también complementado en E , y podemos escribir $E = X_1 \oplus Y$ donde $X_1 \cong l_p$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned}
 l_p &\cong l_p(l_p) \\
 &\cong l_p(E \oplus F) \\
 &\cong l_p(E) \oplus l_p(F) \\
 &\cong l_p(E) \oplus E \oplus l_p(F) \\
 &\cong l_p(E) \oplus l_p(F) \oplus E \\
 &\cong l_p(E \oplus F) \oplus E \\
 &\cong l_p \oplus E.
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} E &\cong l_p \oplus Y \\ &\cong l_p \oplus (l_p \oplus Y) \\ &\cong l_p \oplus E \\ &\cong l_p. \end{aligned}$$

Luego $E \cong l_p$ y así l_p es primo. ■

El método utilizado en la demostración que l_p y c_0 son espacios primos para $1 \leq p < \infty$ es conocido como la técnica de descomposición de Pełczyński y fue en realidad enunciada de la siguiente forma:

Teorema 5.12 (Técnica de descomposición de Pełczyński) Sean X e Y espacios de Banach tal que X es isomorfo a un subespacio complementado de Y e Y es isomorfo a un subespacio complementado de X . Suponga además, que o

a) $X \cong X^2 = X \oplus X$ y $Y \cong Y^2 = Y \oplus Y$

b) $X \cong c_0(X)$ o $X \cong l_p(X)$

Entonces, X es isomorfo a Y

Demostración: Como X es isomorfo a un subespacio complementado de Y , entonces existe $E_0 \subseteq Y$ tal que $X \cong E_0$ y $E_0 \oplus E = Y$. Así, $Y \cong X \oplus E$. Por otro lado, Y es isomorfo a un subespacio complementado de X , por tanto, existe $F_0 \subseteq X$ tal que $Y \cong F_0$ y $F_0 \oplus F = X$. Luego $X = F_0 \oplus F \cong Y \oplus F$.

Si **a)** es válida, tenemos:

$$\begin{aligned} X &\cong Y \oplus F \\ &\cong Y^2 \oplus F \\ &\cong Y \oplus (Y \oplus F) \\ &\cong Y \oplus X \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} Y &\cong X \oplus E \\ &\cong X^2 \oplus E \\ &\cong X \oplus (X \oplus E) \\ &\cong X \oplus Y \\ &\cong Y \oplus X \end{aligned}$$

Por tanto $X \cong Y$.

Si $X \cong l_p(X)$ entonces:

$$\begin{aligned} X^2 &\cong l_p(X) \oplus l_p(X) \\ &\cong l_p(X) \oplus X \text{ por el teorema 5.10 ítem 4} \\ &\cong l_p(X) \\ &\cong X. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} Y &\cong X \oplus E \\ &\cong X^2 \oplus E \end{aligned}$$

$$\cong X \oplus (X \oplus E)$$

$$\cong X \oplus Y.$$

Además, como $X \cong Y \oplus F$ entonces

$$l_p(X) \cong l_p(Y \oplus F)$$

$$\cong l_p(Y) \oplus l_p(F).$$

Luego $X \cong l_p(X) \cong l_p(Y) \oplus l_p(F)$. Esto es,

$$X \cong l_p(Y) \oplus l_p(F)$$

$$\cong Y \oplus l_p(Y) \oplus l_p(F)$$

$$\cong Y \oplus l_p(Y \oplus F)$$

$$\cong Y \oplus X$$

$$\cong Y.$$

Por tanto $X \cong Y$ como se deseaba. ■

Teorema 5.13 *Si $1 < p, q < \infty$ y $p \neq q$ ningún subespacio cerrado de dimensión infinita de l_p es isomorfo a algún subespacio cerrado de l_q .*

Demostración: Supongamos que la afirmación es falsa. Consideremos F un subespacio cerrado de dimensión infinita de l_p isomorfo a un subespacio cerrado G de l_q mediante un isomorfismo $T : F \rightarrow G$. Por el Teorema de Pełczyński existe un subespacio cerrado H de G que es isomorfo a l_q por un isomorfismo $S : l_q \rightarrow H$. Entonces, $T^{-1}(H)$ es un subespacio cerrado de l_p y por tanto, existe un subespacio cerrado Z de $T^{-1}H$ que es isomorfo a l_p y complementado en l_p con una proyección

$P : l_p \rightarrow l_p$ sobre Z .

Luego $P|_{T^{-1}H} : T^{-1}H \rightarrow Z$ es una proyección de $T^{-1}H$ sobre Z tal que

$$S^{-1}T(P|_{T^{-1}H})T^{-1}S$$

es una proyección de l_q sobre el espacio $S^{-1}(TZ)$. Por tanto $S^{-1}TZ$ es complementado en l_q y como l_q es primo, es isomorfo a l_q . Pero esto implica que Z es isomorfo a l_q lo que contradice el teorema anterior ya que Z es isomorfo a l_p . ■

BIBLIOGRAFÍA

Albiac, F. y N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. Springer, 2006 (vid. pág. 35).

Cabello, J. “Análisis funcional”. 2008. URL: <https://www.ugr.es/~jcabello/Analisis%20funcional.pdf> (vid. pág. 10).

DIESTE, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1984 (vid. pág. 14).

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley Sons, New York, 1978 (vid. pág. 14).

MEGGINSON, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998 (vid. pág. 14).

RUDIN, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill book company, New York, 1991 (vid. pág. 14).