

***DEFINICIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN DE  
HILBERT FRACCIONARIA CON BASE EN LA  
CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA, ORIENTADA A LA  
ESTIMACIÓN DE ATRIBUTOS FÍSICOS***

Autor  
LENIN CHINCHILLA ATENCIA

ESCUELA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA  
2011

***DEFINICIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN DE  
HILBERT FRACCIONARIA CON BASE EN LA  
CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA, ORIENTADA A LA  
ESTIMACIÓN DE ATRIBUTOS FÍSICOS***

Autor

LENIN CHINCHILLA ATENCIA

Este proyecto es presentado como requisito para optar al título de físico

Director

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS  
Doctor En Ciencias Naturales (Física)

ESCUELA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA  
2011

*A Dios por su infinita misericordia, hacia mi y hacia quienes me rodean.  
A mi mamá, papá y hermanos por infinitas razones, pero sobre todo por ayudarme a ser quien soy.  
A mis tíos, mis abuelos, y toda la familia en general.*

# AGRADECIMIENTOS

---

A Dios primeramente por permitirme ser quien soy, y nuevamente por su infinita misericordia hacia mi y hacia quienes me rodean.

A mi familia por su ayuda y apoyo.

A mi amigo Jerson Ivan Reyna Medrano, por orientarme hacía el estudio de la física y por ser mi amigo.

A mis amigos Marvin, Hector y Neder, por su amistad sincera.

A mi director, el profesor Rafael Ángel Torres Amarís, por su apoyo, paciencia y orientación.

A la señora Mariam Amezquita, el señor Carlos Marin, Adrianita, Dianita y demás compañeros de trabajo por la confianza y ayuda brindada.

A Pilarqui, por tomar parte en las experiencias que me hicieron un mejor hombre.



# RESUMEN

**TÍTULO:** DEFINICIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN DE HILBERT FRACCIONARIA CON BASE EN LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA, ORIENTADA A LA ESTIMACIÓN DE ATRIBUTOS FÍSICOS\*

**AUTOR:** LENIN CHINCHILLA ATENCIA\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Señal analítica fraccionaria, transformación de Hilbert, convolución fraccionaria, frecuencia instantánea fraccionaria.

## DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se propone una definición para la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria. La definición de convolución fraccionaria usada, es la planteada en [1]. La definición de la transformación de Hilbert fraccionaria, se hace a partir del concepto de señal analítica fraccionaria. La señal analítica fraccionaria se define de forma similar a la señal analítica convencional, es decir, el espectro de la señal analítica fraccionaria corresponde a la información contenida en el semieje positivo de las frecuencias fraccionarias. Se estudian varias de las propiedades de la señal analítica fraccionaria. Se define la frecuencia instantánea fraccionaria a partir de la señal analítica fraccionaria. Esta definición de frecuencia instantánea fraccionaria representa un atributo físico, y se define con la esperanza hacer visible información que no es posible ver con la frecuencia instantánea convencional. Se plantean algoritmos para cada una de las definiciones propuestas, los cuales son aplicados en señales sencillas, como una gaussiana o chirp modulada, cuyos resultados son mostrados.

Inicialmente se describen las herramientas teóricas usadas para definir el concepto de señal analítica fraccionaria y luego a partir de esta, definir la transformación de Hilbert con base en la convolución frac-

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Ph.d. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS

cionaria.

En el Capitulo 2 se presenta la definición de la señal analítica fraccionaria y el desarrollo que permite definir la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria.

En el Capitulo 3 se definen dos nociones de frecuencia instantánea fraccionaria, con base en la forma en que lo hacen convencionalmente. Se muestran los resultados obtenidos al aplicar estas definiciones, en algunas señales sencillas.

Por ultimo, en el capitulo 4 se presentan las conclusiones de este trabajo.

# ABSTRACT

**TITLE:** DEFINITION OF A FRACTIONAL HILBERT'S TRANSFORMATION BASED ON FRACTIONAL CONVOLUTION, ORIENTED TO THE ESTIMATION OF PHYSICAL ATTRIBUTES.\*

**AUTHOR:** LENIN CHINCHILLA ATENCIA\*\*

**KEYWORDS:** Fractional analytic signal, Hilbert transformation, fractional convolution, fractional instantaneous frequency.

## DESCRIPTION:

This work proposes a definition for Hilbert's transformation based on fractional convolution. The definition of fractional convolution used, is the one introduced in [1]. The definition of fractional Hilbert's transformation is made through the concept of fractional analytic signal. The fractional analytic signal is defined in a similar way than the conventional analytic signal, ie, the spectrum of fractional analytical signal responds to the information contained on the semi-axis of positive fractional frequencies. Many properties of the fractional analytical signal were studied. It is defined the fractional instantaneous frequency from the fractional analytic signal. This definition of fractional instantaneous frequency represents a physical attribute, and is defined with the hope of making visible information that is impossible to see with conventional instantaneous frequency. Some algorithms are proposed for each one of the proposed definitions, those algorithms are applied to simple signals, such as a Gaussian or modulated chirp, the results are shown.

Initially the theoretical tools used to define the concept of fractional analytic signal are described from this it is defined the Hilbert transform based on fractional convolution.

Chapter 2 presents the definition of fractional analytic signal and the development that allows to define the Hilbert transform based on fractional convolution.

---

\*Degree Work

\*\*Physics department, Science College, Universidad Industrial de Santander. Ph.d. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS

Chapter 3 defines two notions of fractional instantaneous frequency based on the way they do conventionally. Results of applying these definitions on some simple signs are showed.

Finally, chapter 4 contains the conclusions of the present work.

# Índice general

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>17</b>
<b>1. MARCO TEÓRICO</b>	<b>19</b>
1.1. Distribución de Wigner . . . . .	19
1.2. Definición integral de la transformación fraccionaria de Fourier . . . . .	20
1.3. Operador traslación fraccionaria . . . . .	20
1.4. Convolución fraccionaria . . . . .	21
1.5. Distribución de Heaviside . . . . .	24
1.6. Señal analítica y transformación de Hilbert . . . . .	24
<b>2. TRANSFORMACIÓN DE HILBERT BASADA EN LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA</b>	<b>26</b>
<b>3. NOCIÓN DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA FRACCIONARIA</b>	<b>33</b>
<b>4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>46</b>
4.1. CONCLUSIONES . . . . .	46
4.2. TRABAJO FUTURO . . . . .	47
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>47</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>50</b>
Algoritmos usados . . . . .	50
Algoritmo falfa1 . . . . .	50
Algoritmo falfa2 . . . . .	52
Algoritmo Para obtener la señal analítica fraccionaria, <i>hilbertfrac</i> . . . . .	53
Algoritmo par obtener la trasformada de Hilbert fraccionaria . . . . .	55

Algoritmo para obtener la distribución de Wigner . . . . .	56
Algoritmo para obtener la convolución fraccionaria . . . . .	59
Algoritmo para obtener la Transformación de Fourier fraccionaria. . . . .	60

# Índice de figuras

1.1.	Proyección de la distribución de Wigner sobre un eje oblicuo. Fuente: [5]. . . . .	21
1.2.	Convolución fraccionaria de dos funciones rectángulos a diferentes ordenes. Fuente:Autor.	23
2.1.	DW para la señal analítica fraccionaria de la señal $e^{-50(t-2,5)^2}$ .(a)DW de la señal original, (b)DW señal analítica, (c)DW a un orden 0.2, (d)DW a un orden 0.5, (e)DW a un orden 0.7, (f)DW a un orden 0.85, (g)DW a un orden 1, (h)DW a un orden 1.2, (i)DW a un orden 1.4. Fuente:Autor. . . . .	31
2.2.	Módulo de la señal analítica fraccionaria a diferentes ordenes de la señal $e^{-50(t-2,5)^2}$ .(a)Señal original, (b)señal analítica convencional, (c)SAF a orden 0.2, (d)SAF a orden 0.5, (e)SAF a orden 0.7, (f)SAF a un orden 0.85, (g)SAF a orden 1, (h)SAF a orden 1.2, (i)SAF a orden 1.4. Fuente:Autor. . . . .	32
3.1.	DW de la señal analítica fraccionaria de la función $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)SAF de orden 0.8, (c)SAF de orden 0.9, (d)SAF de orden 0.96, (e)SAF de orden 0.98, (f)SAF de orden 1, (g)SAF de orden 1.19, (h)SAF de orden 1.21, (i)SAF de orden 1.24. Fuente:Autor. . . . .	37
3.2.	FIF obtenida a partir del algoritmo falfa1 para la función $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor. . . . .	38
3.3.	FIF obtenida a partir del algoritmo falfa2 para la función $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor. . . . .	39

- 3.4. DW de la señal analítica fraccionaria de la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) SAF de orden 0.8, (c) SAF de orden 0.9, (d) SAF de orden 0.96, (e) SAF de orden 0.98, (f) SAF de orden 1, (g) SAF de orden 1.19, (h) SAF de orden 1.21, (i) SAF de orden 1.24. Fuente: Autor. . . . . 40
- 3.5. FIF obtenida a partir del algoritmo falfa1 para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) FIF de orden 0.8, (c) FIF de orden 0.9, (d) FIF de orden 0.96, (e) FIF de orden 0.98, (f) FIF de orden 1, (g) FIF de orden 1.19, (h) FIF de orden 1.21, (i) FIF de orden 1.24. Fuente: Autor. . . . . 41
- 3.6. FIF obtenida a partir del algoritmo falfa2 para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) FIF de orden 0.8, (c) FIF de orden 0.9, (d) FIF de orden 0.96, (e) FIF de orden 0.98, (f) FIF de orden 1, (g) FIF de orden 1.19, (h) FIF de orden 1.21, (i) FIF de orden 1.24. Fuente: Autor. . . . . 42
- 3.7. DW de la señal analítica fraccionaria de la función  $e^{-80(t-2,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) SAF de orden 0.8, (c) SAF de orden 0.9, (d) SAF de orden 0.96, (e) SAF de orden 0.98, (f) SAF de orden 1, (g) SAF de orden 1.19, (h) SAF de orden 1.21, (i) SAF de orden 1.24. Fuente: Autor. 43
- 3.8. FIF obtenida a partir del algoritmo falfa1 para la función  $e^{-80(t-2,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) FIF de orden 0.8, (c) FIF de orden 0.9, (d) FIF de orden 0.96, (e) FIF de orden 0.98, (f) FIF de orden 1, (g) FIF de orden 1.19, (h) FIF de orden 1.21, (i) FIF de orden 1.24. Fuente: Autor. . . . . 44
- 3.9. FIF obtenida a partir del algoritmo falfa2 para la función  $e^{-80(t-2,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) FIF de orden 0.8, (c) FIF de orden 0.9, (d) FIF de orden 0.96, (e) FIF de orden 0.98, (f) FIF de orden 1, (g) FIF de orden 1.19, (h) FIF de orden 1.21, (i) FIF de orden 1.24. Fuente: Autor. . . . . 45

# Símbolos

V.P.: Valor principal de Cauchy

$i$ : Factor imaginario

DW: Distribución de Wigner

SAF: Señal Analítica Fraccionaria

FIF: Frecuencia Instantánea Fraccionaria

$\mathfrak{F}$ : Transformación de Fourier

$\mathfrak{F}_\alpha$ : Transformación de Fourier Fraccionaria

$F_\alpha$ : Transformada de Fourier Fraccionaria

# INTRODUCCIÓN

La transformación de Hilbert [12], [6], es ampliamente usada en campos tales como el tratamiento de señales [8], [3],[14], [7], [15], diseño de filtros ópticos, holografía [1] entre otros. Dada su importancia en estos campos se hace necesario intentar ampliar la teoría relacionada con esta herramienta. En ese intento por ampliar el concepto de la transformación de Hilbert se han hecho diversos aportes, tales como el proponer una transformación de Hilbert de orden fraccionario [10], [17], [9], o una noción de transformación de Hilbert generalizada [13]. La idea de plantear una transformación de Hilbert generalizada o de orden fraccionario es buscando el objetivo, ya sea de mejorar los resultados que se obtienen con la transformación de Hilbert convencional o ampliar el campo de aplicación de esta herramienta.

En esa misma línea de ampliar el concepto de transformación de Hilbert es que se enfoca este trabajo, mediante el cual se pretende definir una transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria. El enfoque que interesa darle a esta definición va dirigido hacia adquirir atributos físicos, como la frecuencia instantánea, a través del concepto de señal analítica fraccionaria. Tanto la señal analítica fraccionaria, como la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria, se definen con la esperanza de hacer evidente información que no es posible ver o captar con la noción de transformación de Hilbert convencional. Esta propuesta difiere a la planteada en [10],[13], [9] y [17], justamente en que aquí se hará uso de la convolución fraccionaria definida en [16], haciendo de este aporte por lo menos algo novedoso en el aspecto teórico. Cabe resaltar que el resultado obtenido para la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria, es muy similar al planteado por [17].

A continuación se presenta la organización de este documento. En el Capítulo 1 de este trabajo, se describen todas las herramientas teóricas usadas en el desarrollo de la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria, tales como la transformación de Fourier fraccionaria [11], convolución fraccionaria y operador de traslación fraccionaria [16], distribución de Heaviside y señal analítica [6].

La descripción matemática para la definición de la transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria, a partir de la señal analítica fraccionaria, se presenta en el Capítulo 2, acompañada de algunos ejemplos para un mejor entendimiento.

La definición de la frecuencia instantánea a partir de la transformada de Hilbert basada en la convolución fraccionaria, con algunos ejemplos, y las conclusiones se presentan en los Capítulos 3 y 4, respectivamente.

# Capítulo 1

## MARCO TEÓRICO

### 1.1. Distribución de Wigner

La distribución de Wigner  $W_f(x, u)$  [12] de una señal  $f$  puede ser definida en términos de la representación temporal de la señal,  $f(x)$ , como

$$W_f(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + x'/2) f^*(x - x'/2) e^{-i2\pi ux'} dx', \quad (1.1)$$

o en términos de la representación en frecuencia de la señal,  $F(u)$ , como

$$W_f(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u + u'/2) F^*(u - u'/2) e^{-i2\pi xu'} du'. \quad (1.2)$$

Además se cumple,

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, u) dx = |F(u)|^2, \quad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, u) du = |f(x)|^2. \quad (1.4)$$

Esto ultimo, son solo algunas propiedades de la distribución de Wigner.

## 1.2. Definición integral de la transformación fraccionaria de Fourier

Se define la transformación de Fourier fraccionaria, basada en [11], como,

$$\mathfrak{F}_\alpha[f](x_\alpha) = F_\alpha(x_\alpha) = C_\alpha e^{i\pi x_\alpha^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi x x_\alpha / \sin \alpha} dx, \quad (1.5)$$

donde  $C_\alpha = \frac{e^{-i(\mathbb{S}(\sin \alpha)\pi/4 - \alpha/2)}}{\sqrt{\|\sin \alpha\|}}$ . La función  $\mathbb{S}(\sin \alpha)$ , representa el signo de  $\sin \alpha$ . Es importante resaltar, que la transformación de Fourier convencional definida como,  $\mathfrak{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi x x'} dx'$ , es un caso particular de la ecuación 1.5, la cual se obtiene para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , de modo que  $F = \mathfrak{F}_{\pi/2}[f] = \mathfrak{F}[f]$ . Entre las propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria [4], cabe resaltar la siguiente,

$$W_{F_\alpha}(x, u) = W_f(x \cos \alpha - u \sin \alpha, x \sin \alpha + u \cos \alpha). \quad (1.6)$$

De la ecuación 1.6, se deduce [4]:

$$|F_\alpha(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{F_\alpha}(x, u) du = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x \cos \alpha - u \sin \alpha, x \sin \alpha + u \cos \alpha) du. \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 se conoce como transformación de Radon–Wigner y representa la proyección de la distribución de Wigner de la función,  $W_f(x, u)$ , a lo largo del eje  $x_\alpha$  que hace un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ , figura 1.1.

## 1.3. Operador traslación fraccionaria

Se define el operador traslación fraccionaria [16],

$$\mathbb{T}_{\tau; \alpha}[f](x) = f(x - \tau) e^{-2i\pi\tau(x - \tau/2) \cot \alpha}, \quad (1.8)$$

tal que,

$$\mathfrak{F}_\alpha \mathbb{T}_{\tau; \alpha}[f](x) = f_\alpha(x) e^{-\frac{i2\pi\tau x}{\sin \alpha}}. \quad (1.9)$$

Este operador recupera una invariancia del módulo de la transformada de Fourier fraccionaria bajo

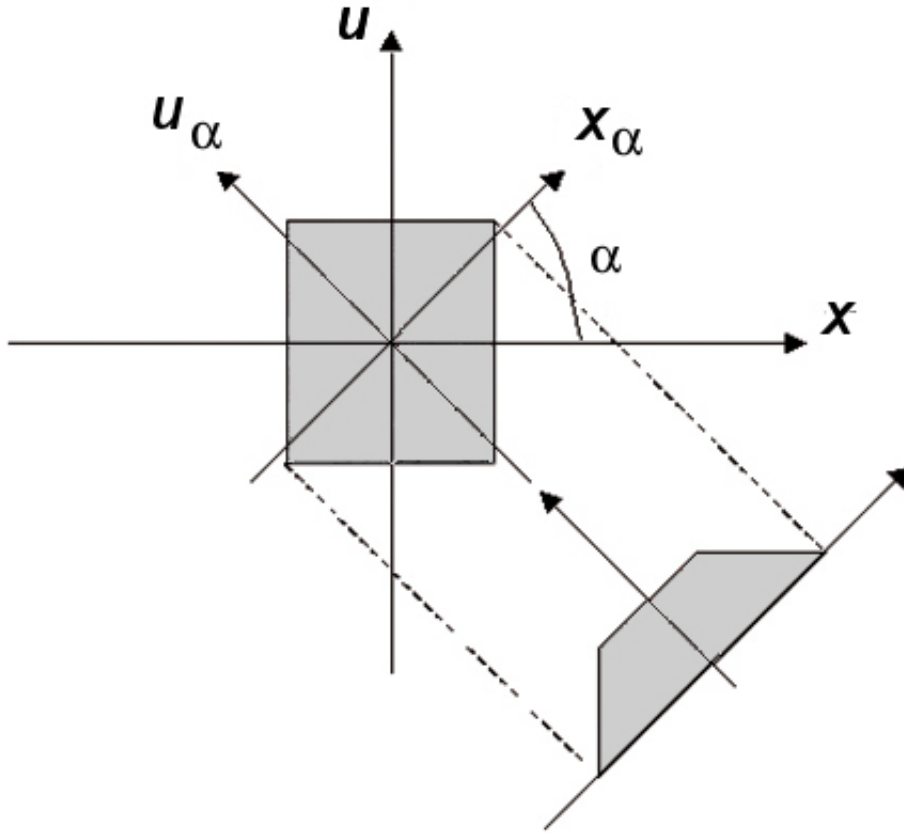


Figura 1.1: Proyección de la distribución de Wigner sobre un eje oblicuo. Fuente: [5].

una traslación fraccionaria en el sentido que  $\|\mathfrak{F}_\alpha T_{\tau;\alpha} f\| = \|\mathfrak{F}_\alpha f\|$ .

Se puede observar también que,  $T_{\tau;\pi/2} = T_\tau$ , el operador traslación usual, tal que,  $T_\tau[f](x) = f(x - \tau)$ .

Para dado  $\alpha$  dado, la transformación  $T_{\tau;\alpha} (\tau \in \mathbb{R})$  forma un grupo conmutativo, esto es,

$$T_{\tau';\alpha} \circ T_{\tau;\alpha} = T_{\tau+\tau';\alpha}. \quad (1.10)$$

## 1.4. Convolución fraccionaria

Se define la convolución fraccionaria [16] como:

$$[f *_\alpha g](x) = C_\alpha \mathfrak{F}_{-\alpha} [\mathfrak{F}_\alpha[f](x') \mathfrak{F}_\alpha[g](x') e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha}](x), \quad (1.11)$$

en su forma integral,

$$\begin{aligned}
 [f *_{\alpha} g](x) &= C_{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{T}_{u;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du, \\
 &= C_{\alpha}^2 \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) e^{-i2\pi u(x-u) \cot \alpha} du,
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

de la cual se puede verificar que,

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g(x)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{a;\alpha}[f](u) \mathbb{T}_{u;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du, \tag{1.13}$$

y

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g(x)] = \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{T}_{u+a;\alpha}[g](x) e^{i\pi u^2 \cot \alpha} du. \tag{1.14}$$

Estas ecuaciones expresan las propiedades de invariancia de la convolución fraccionaria ante el grupo de operadores de traslación fraccionaria, Lo cual permite sintetizar las propiedades mostradas en las ecuaciones 1.13 y 1.14, como

$$\mathbb{T}_{a;\alpha}[f *_{\alpha} g] = (\mathbb{T}_{a;\alpha} f) *_{\alpha} g = f *_{\alpha} (\mathbb{T}_{a;\alpha} g). \tag{1.15}$$

A continuación se muestra la convolución fraccionaria entre dos señales rectángulos a diferentes ordenes.

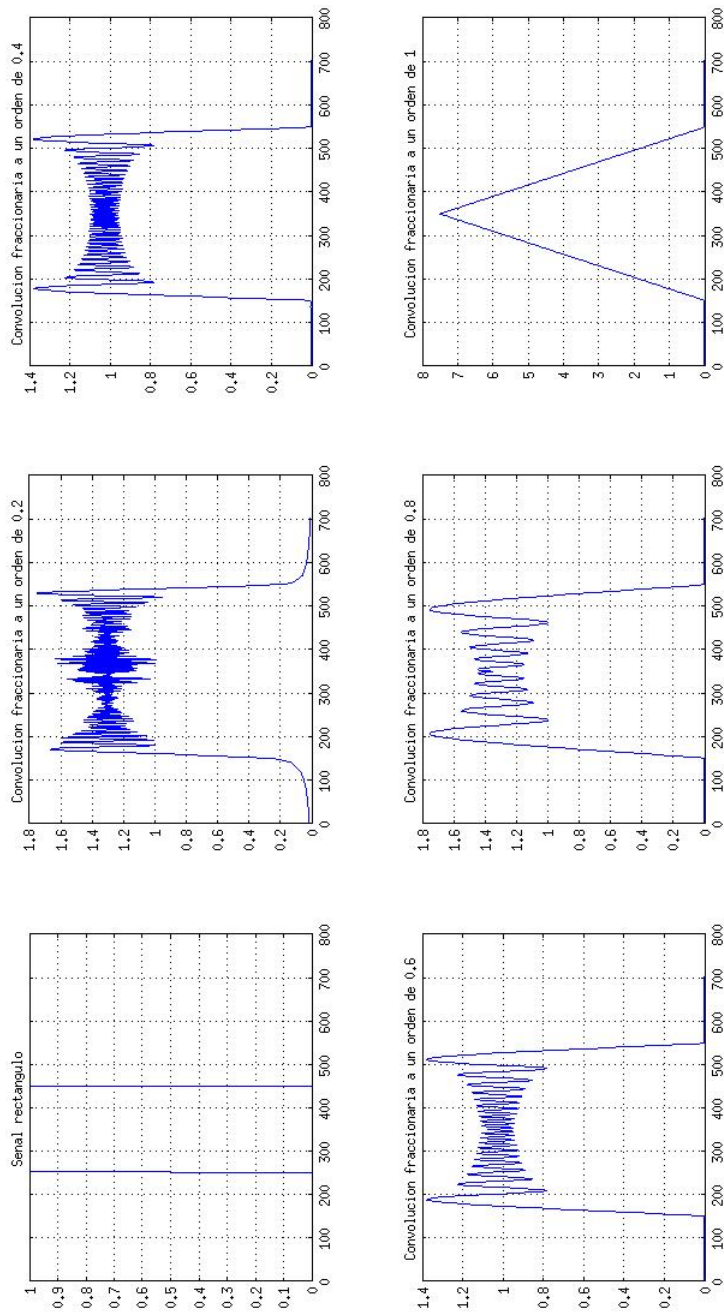


Figura 1.2: Convolución fraccionaria de dos funciones rectángulos a diferentes ordenes. Fuente:Autor.

Cabe resaltar que en la Figura 1.2, solo se representa la magnitud del resultado de la convolución

fraccionaria.

## 1.5. Distribución de Heaviside

La distribución de Heaviside,  $H(x)$  se define por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1/2 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Entre sus propiedades se destaca que,  $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$ , donde  $\delta(x)$  es la distribución de Dirac, y la derivada se considera en el sentido de las distribuciones. Además se tiene que  $\mathfrak{F}^{-1}[H](x) = \frac{1}{2}\delta(x) + V.P \left[ \frac{i}{2\pi x} \right]$ , donde  $\mathfrak{F}^{-1}$  es la transformación inversa de Fourier, e  $i$  el factor imaginario.

## 1.6. Señal analítica y transformación de Hilbert

La señal analítica ésta definida de la siguiente manera [6]: Sea  $H(v)$  la distribución de Heaviside,  $g(x)$  una señal, tal que  $G(v)$  es su transformada de Fourier, entonces la señal analítica  $s(x)$  asociada a la señal  $g(x)$  es,

$$\begin{aligned} s(x) &= 2\mathfrak{F}^{-1}[H(v)G(v)](x), \\ &= g(x) + iV.P. \left[ g(x) * \frac{1}{\pi x} \right], \end{aligned} \quad (1.17)$$

en donde la parte imaginaria de la ecuación 1.17, es la definición de la transformada de Hilbert, que escrita en su forma integral es,

$$V.P. \left[ (x) * \frac{1}{\pi x} \right] = V.P. \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{x - \tau} d\tau \right]. \quad (1.18)$$

Como se nota de la ecuación 1.17, la señal analítica es en general compleja, y una de sus propiedades importantes es que su espectro corresponde a la información contenida solo en las frecuencias positivas de la señal original  $g(x)$ . La señal analítica puede también ser representada en forma polar  $s(x) = A(x)e^{i\theta(x)}$ , a partir de la cuál se define una noción de frecuencia instantánea,  $f_i$ , como,

$$f_i = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (1.19)$$

la cual representa un atributo físico. No es el único, también se puede hablar del atributo asociado a la magnitud y a la fase, pero en este trabajo interesa el relacionado a la frecuencia, por representar un interés más amplio.

En adelante las definiciones dadas en las ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.19 se relacionaran como señal analítica convencional, transformación de Hilbert convencional, frecuencia analítica convencional o simplemente señal analítica, transformación de Hilbert y frecuencia instantánea, respectivamente.

## Capítulo 2

# TRANSFORMACIÓN DE HILBERT BASADA EN LA CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA

A continuación se presenta la descripción matemática mediante la cuál se define la transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria.

Se define la distribución Heaviside chirp modulada,  $H_\alpha$ , como:

$$H_\alpha(x) = H(x)e^{i\pi x^2 \cot \alpha}, \quad (2.1)$$

donde  $H(x)$  es la función *Heaviside*.

Se parte de la siguiente hipótesis:

$$\mathfrak{A}[s](x) = \frac{2C_\alpha}{C_{-\alpha}} \mathfrak{F}_{-\alpha}[H_\alpha S_\alpha e^{-i\pi x^2 \cot \alpha}](x), \quad (2.2)$$

donde  $s$  corresponde a la señal a analizar,  $\mathfrak{A}[s](x)$  es la señal analítica basada en convolución fraccionaria, la cual se define como la señal analítica fraccionaria,  $S_\alpha$  corresponde al espectro fraccionario de  $s$ , y  $H_\alpha$  es la distribución Heaviside chirp modulada.

De este modo, según la ecuación 1.11,

$$\mathfrak{A}[s](x) = \frac{2}{C_{-\alpha}} [\tilde{\mathfrak{F}}_{-\alpha}[H_{\alpha}] *_{\alpha} s](x), \quad (2.3)$$

haciendo uso de la transformación de *Fourier* fraccionaria dada en la ecuación 1.5,

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{-\alpha}[H_{\alpha}](x) = C_{-\alpha} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H(x') e^{i2\pi x' x / \sin \alpha} dx'. \quad (2.4)$$

Desarrollando la integral de la ecuación 2.4 y haciendo  $\tau = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x}{\|\sin \alpha\|} \mathbb{S}(\sin \alpha)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H(x') e^{i2\pi x' x / \sin \alpha} dx' &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x') e^{i2\pi x' \tau} dx' \\ &= \frac{1}{2} \delta(\tau) + V.P. \frac{i}{2\pi \tau} \\ &= \frac{\|\sin \alpha\|}{2} \delta(x) + V.P. \frac{i \|\sin \alpha\| \mathbb{S}(\sin \alpha)}{2\pi x}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

reemplazando la ecuación 2.5 en 2.4,

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{-\alpha}[H_{\alpha}](x) = C_{-\alpha} e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \left[ \frac{\|\sin \alpha\|}{2} \delta(x) + V.P. \frac{i \|\sin \alpha\| \mathbb{S}(\sin \alpha)}{2\pi x} \right]. \quad (2.6)$$

El resultado obtenido en la ecuación 2.6, es de gran importancia, porque permitirá definir la noción de señal analítica basada en la convolución fraccionaria en una forma muy similar a la convencional, ecuación 1.17, que es la señal original más  $i$  veces su transformación de Hilbert, en este caso es la señal original más  $i$  veces la transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria. El desarrollo de esta idea se muestra a continuación.

Haciendo uso de la convolución fraccionaria dada en la ecuación 1.12 y su propiedad distributiva, se resuelve la ecuación 2.3 de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\left[ C_{-\alpha} e^{-i\pi u^2 \cot \alpha} \frac{\|\text{sen } \alpha\|}{2} \delta(u) *_{\alpha} s(u) \right] (x) &= C_{\alpha}^2 C_{-\alpha} \frac{\|\text{sen } \alpha\|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \delta(x-u) e^{-i2\pi u(x-u) \cot \alpha} du \\
&= C_{\alpha}^2 C_{-\alpha} \frac{\|\text{sen } \alpha\|}{2} s(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-u) du \\
&= \frac{C_{-\alpha}}{2} s(x)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

y

$$\begin{aligned}
&V.P. \left[ C_{-\alpha} e^{-i\pi u^2 \cot \alpha} \frac{\|\text{sen } \alpha\| \mathbb{S}(\text{sen } \alpha)}{2\pi u} *_{\alpha} s(u) \right] (x) \\
&= C_{-\alpha} \frac{i \|\text{sen } \alpha\| \mathbb{S}(\text{sen } \alpha)}{2} V.P. \left[ e^{-i\pi u^2 \cot \alpha} \frac{1}{\pi u} *_{\alpha} s(u) \right] (x),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

dando como resultado

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}[s](x) &= \frac{2}{C_{-\alpha}} [\mathfrak{F}_{-\alpha}[H_{\alpha}] *_{\alpha} s](x) \\
&= s(x) + i \|\text{sen } \alpha\| \mathbb{S}(\text{sen } \alpha) V.P. \left[ e^{-i\pi u^2 \cot \alpha} \frac{1}{\pi u} *_{\alpha} s(u) \right] (x).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta última ecuación, ecuación 2.9, representa la señal analítica basada en la convolución fraccionaria. Se observa fácilmente, que esta señal corresponde a la señal real más  $i$  veces lo que más adelante se definirá como transformación de Hilbert fraccionaria, algo muy similar a la forma en que se define la señal analítica convencional, ecuación 1.17. Aunque ya se menciona, otra propiedad importante de esta señal analítica fraccionaria, es que su espectro fraccionario corresponde al contenido del semieje positivo del espectro fraccionario de la señal  $s(x)$ .

A partir de la ecuación 2.9 se define la transformación de *Hilbert* fraccionaria,  $\mathbb{H}_{\alpha}[s](x)$ , tal y como se había mencionado antes, como:

$$\mathbb{H}_{\alpha}[s](x) = \|\text{sen } \alpha\| \mathbb{S}(\text{sen } \alpha) V.P. \left[ e^{-i\pi u^2 \cot \alpha} \frac{1}{\pi u} *_{\alpha} s(u) \right] (x). \tag{2.10}$$

Cabe resaltar la similitud que presenta con la definición de Hilbert convencional. Esta definición rep-

resenta algo novedoso, ya que esta en términos de la convolución fraccionaria, así que este es uno de los resultados importantes obtenidos en esta trabajo, porque representan un aporte, una novedad, por lo menos en el aspecto teórico.

Ahora expresando la ecuación 2.10 en su forma integral se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\alpha[s](x) &= C_\alpha^2 \|\sin \alpha\| \mathbb{S}(\text{sen} \alpha) V.P. \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \frac{1}{\pi(x-u)} e^{-i\pi(x-u)^2 \cot \alpha} e^{-i2\pi u(x-u) \cot \alpha} du \right] \\ &= \mathbb{S}(\text{sen} \alpha) V.P. \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \frac{1}{\pi(x-u)} e^{-i\pi(x^2-u^2) \cot \alpha} du \right],\end{aligned}\quad (2.11)$$

donde fácilmente se verifica que para  $\alpha = \pi/2$  se obtiene la transformación de *Hilbert* convencional, ecuación 1.18.

También se observa de la ecuación 2.10 y 2.11, que lo que se ha definido aquí como transformación de Hilbert fraccionaria, es en general una señal compleja, una diferencia respecto a la transformación de Hilbert convencional, dada en la ecuación 1.18.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación, en el cual se muestra la distribución de Wigner de la señal analítica fraccionaria de una señal gaussiana.

Se observa de la figura 2.1, que la distribución de Wigner de la señal analítica fraccionaria corresponde a secciones de la distribución de Wigner de la señal original. Por lo tanto esta es una de las propiedades de la transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria. Esta propiedad es evidente partiendo del hecho que el módulo al cuadrado de la transformación de Fourier fraccionaria, a un orden  $\alpha$ , de una señal, es la proyección de la distribución de Wigner sobre un eje inclinado un ángulo  $\alpha$  [5], como se muestra en la Figura 1.1. Al tomar este resultado y multiplicarlo por la distribución de Heaviside, se hace evidente que se selecciona solo el contenido de la señal de la parte derecha del eje  $x_\alpha$ , y por ende solo se selecciona la parte de la distribución de Wigner contenida en esta parte del eje  $x_\alpha$ .

En la Figura 2.2, se muestran la magnitud de la señal analítica fraccionaria a diferentes ordenes, donde grosso modo se ve que la forma es prácticamente la misma a diferentes ordenes. A primera vista no se

puede dar una afirmación concluyente a partir de estos resultados, podrían solo representar un ejemplo en el cuál no se obtiene una mejora significativa, pero eso, claro esta, depende de la aplicación. Este trabajo se enfoca en el atributo físico relacionado con la frecuencia instantánea fraccionaria, y las mejorías o la información adicional que se puede obtener con esta herramienta es lo que interesa.

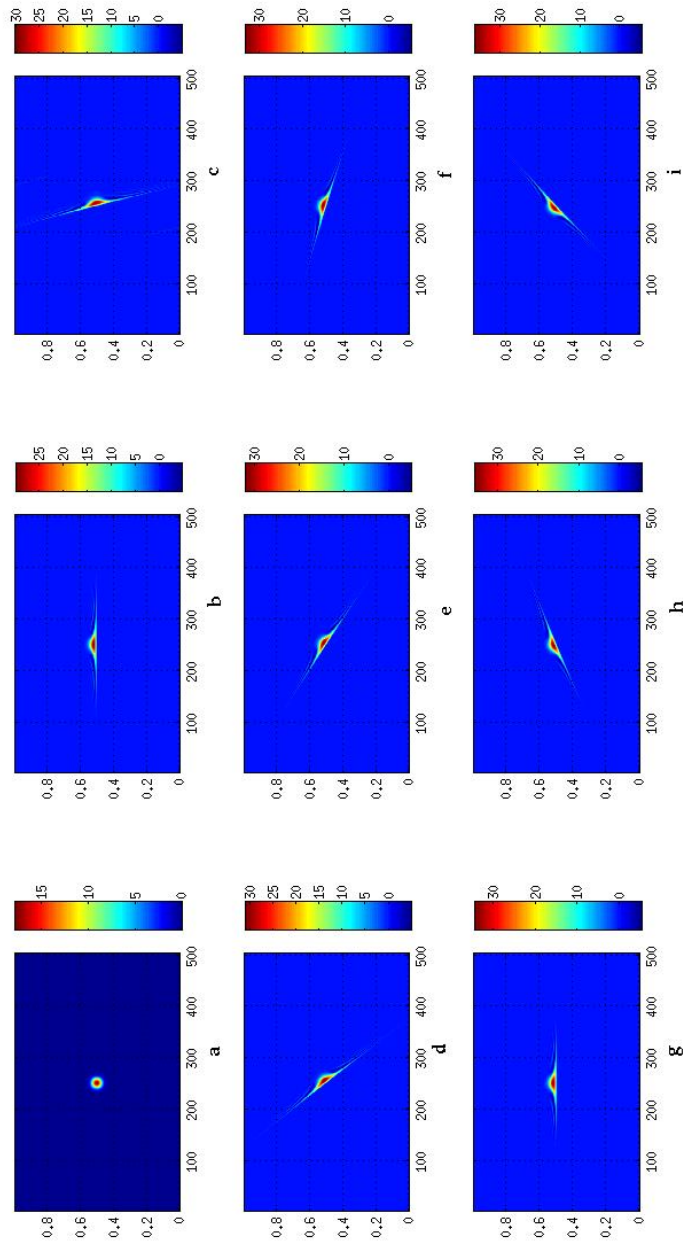


Figura 2.1: DW para la señal analítica fraccionaria de la señal  $e^{-50(t-2,5)^2}$ . (a) DW de la señal original, (b) DW señal analítica, (c) DW a un orden 0.2, (d) DW a un orden 0.5, (e) DW a un orden 0.7, (f) DW a un orden 0.85, (g) DW a un orden 1, (h) DW a un orden 1.2, (i) DW a un orden 1.4. Fuente: Autor.

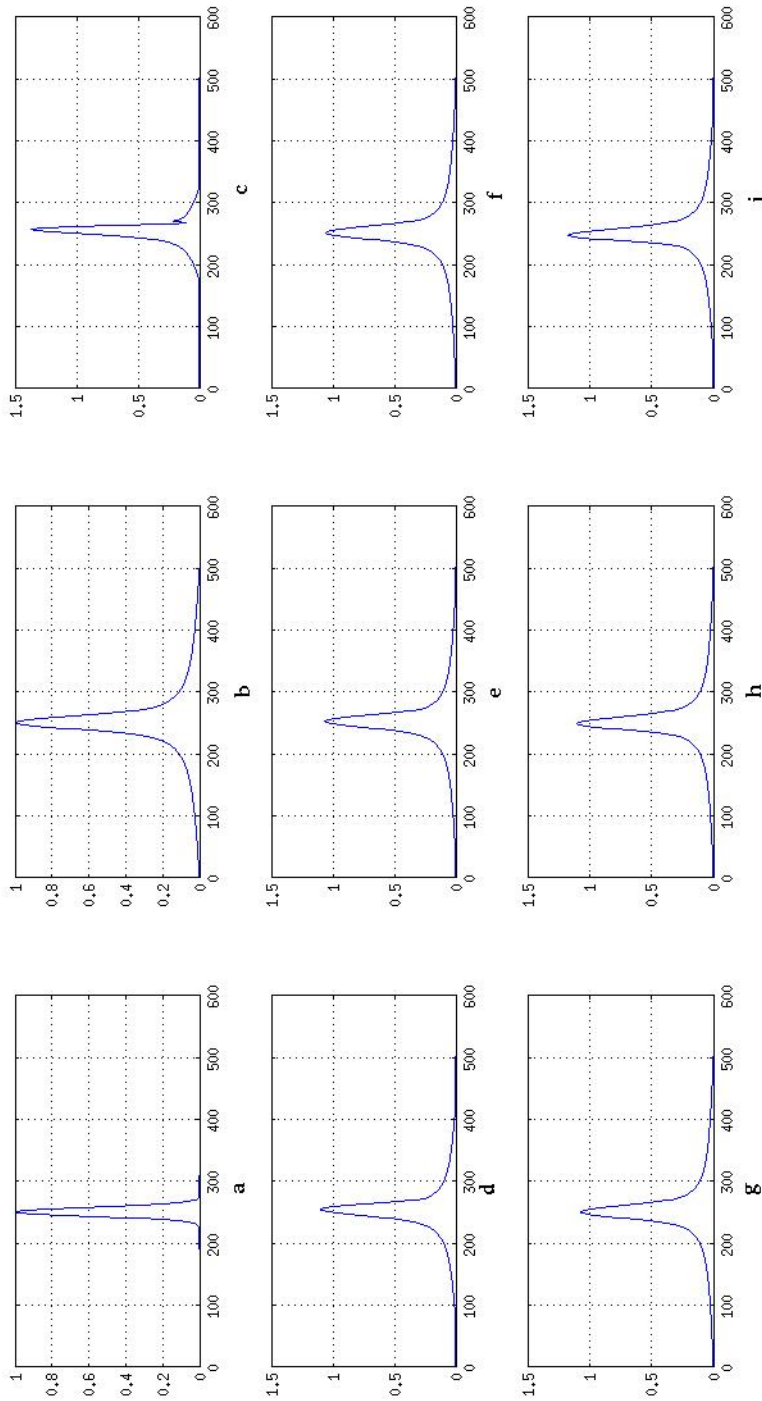


Figura 2.2: Módulo de la señal analítica fraccionaria a diferentes ordenes de la señal  $e^{-50(t-2,5)^2}$ . (a) Señal original, (b) señal analítica convencional, (c) SAF a orden 0.2, (d) SAF a orden 0.5, (e) SAF a orden 0.7, (f) SAF a un orden 0.85, (g) SAF a orden 1, (h) SAF a orden 1.2, (i) SAF a orden 1.4. Fuente: Autor.

## Capítulo 3

# NOCIÓN DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA FRACCIONARIA

Se han planteado dos nociones de frecuencia instantánea a partir del desarrollo antes descrito, uno de estos se muestra a continuación.

Haciendo uso de

$$\langle f, f \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha} f, \tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha} f \rangle. \quad (3.1)$$

$$S_{\alpha}(u) = \tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha}[s](u). \quad (3.2)$$

Ahora se plantea el valor medio de la variable  $u$ , lo cual representa el valor medio de la frecuencia fraccionaria.

$$\langle u \rangle = \int u S_{\alpha}(u) S_{\alpha}^{*} du, \quad (3.3)$$

$$= \langle u S_{\alpha}(u), S_{\alpha}(u) \rangle, \quad (3.4)$$

$$= \langle \tilde{\mathfrak{F}}_{-\alpha} u S_{\alpha}, \tilde{\mathfrak{F}}_{-\alpha} S_{\alpha} \rangle. \quad (3.5)$$

Donde

$$\mathfrak{F}_{-\alpha}[uS_\alpha] = (ucos\alpha - \frac{isen\alpha}{2\pi}\mathbb{D})\mathfrak{F}_{-\alpha}[S_\alpha] \quad (3.6)$$

y  $\mathbb{D}$  representa el operador derivada.

Entonces,

$$\langle \mathfrak{F}_{-\alpha}uS_\alpha, \mathfrak{F}_{-\alpha}S_\alpha \rangle = \langle (tcos\alpha - \frac{isen\alpha}{2\pi} \frac{d}{dt})s, s \rangle, \quad (3.7)$$

$$= cos\alpha \int t \|s(t)\|^2 dt - \frac{isen\alpha}{2\pi} \int s^*(t) \frac{ds(t)}{dt} dt. \quad (3.8)$$

Ahora,

$$s(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = A'(t)e^{i\varphi(t)} + i\varphi'(t)s(t), \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow s^*(t) \frac{ds(t)}{dt} = A(t)A'(t) + i\varphi'(t)\|s(t)\|^2, \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \int s^*(t) \frac{ds(t)}{dt} dt = i \int \varphi'(t)\|s(t)\|^2 dt + \int A(t)A'(t) dt. \quad (3.12)$$

Ahora usando como criterio que  $A(t)$  en el infinito tiende a cero, el cual también se considera para definir el concepto de frecuencia instantánea a partir de la transformación de Hilbert, la segunda integral de la ecuación 3.12, es cero, de lo que queda,

$$\langle u \rangle = cos\alpha \int t \|s(t)\|^2 dt + \frac{sen\alpha}{2\pi} \int \varphi'(t)\|s(t)\|^2 dt, \quad (3.13)$$

$$= \int (\varphi'(t) \frac{sen\alpha}{2\pi} + tcos\alpha) \|s(t)\|^2 dt \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \vartheta_\alpha = \varphi'(t) \frac{sen\alpha}{2\pi} + tcos\alpha, \quad (3.15)$$

donde  $\vartheta_\alpha$  representa una noción de frecuencia instantánea. Es importante resaltar que, como se esperaba, la frecuencia instantánea tiene que ver con la derivada de la fase, pero aparece un término líneal, cuya descripción y mejor comprensión se plantea como trabajo futuro.

La otra propuesta para la frecuencia instantánea se basa en la distribución de Wigner.

Haciendo uso de la teoría de distribuciones [6] en la cual se cumple que:

$$\varphi'(t) = \frac{\int wWD(t, w)dw}{\int WD(t, w)dw}, \quad (3.16)$$

donde  $WD(t, w)$  representa la distribución de Wigner de la señal representada en la forma,  $A(t)e^{i\varphi(t)}$ .

De este modo se define otra noción de frecuencia instantánea fraccionaria como:

$$\varphi'(t)_\alpha = \frac{\int wWD_\alpha(t, w)dw}{\int WD_\alpha(t, w)dw}, \quad (3.17)$$

donde  $WD_\alpha(t, w)$  representa la distribución de Wigner de la señal analítica fraccionaria, antes desarrollada.

Se nota que para  $\alpha = \pi/2$  las ecuaciones 3.15 y 3.17, reproducen la frecuencia instantánea convencional, ecuación 1.19.

A continuación se presenta para algunas señales en particular, los resultados obtenidos, al aplicar los algoritmos desarrollados para determinar las nociones de frecuencia.

Para obtener el resultado numérico de la ecuación 3.15 y 3.17 se han propuesto los algoritmos *falfa1* y *falfa2* respectivamente, los cuáles pueden ser consultados en los anexos del presente trabajo. Para el algoritmo *falfa2* se hizo uso de lo planteado en [2].

Como se muestra en la figura 3.1 la DW de la señal analítica fraccionaria en los ordenes mostrados no presenta cambios que sean notorios, pero al ver las figuras 3.2 y 3.3, es claro que en ciertos ordenes la respuesta de la frecuencia instantánea mejora en los lugares donde no hay señal, uno de los inconvenientes que presenta la frecuencia instantánea convencional.

En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6, se observa el mismo comportamiento, y es que la DW de la señal analítica en los ordenes mostrados no presenta ningún cambio substancial una respecto de la otra, pero que la respuesta, donde no hay señal mejora visiblemente.

Ahora, en las figuras 3.7, 3.8 y 3.9, no se obtiene un resultado concluyente, más que el que es visible, el cual consiste en mostrar perfiles gaussianos como respuesta a la frecuencia instantánea fraccionaria a diferentes ordenes, pero respecto de ciertos ejes oblicuos, es como una proyección sobre el eje horizontal de corte, que se muestra en la DW en la figura 3.7.

Vale aclarar que en las figuras donde se muestra el resultado obtenido con los algoritmos *falfa1* y *falfa2*, los ordenes 1 corresponden a la frecuencia instantánea convencional, es decir los obtenidos a partir de la señal analítica convencional, haciendo uso de la transformación de Hilbert convencional.

Cabe resaltar también, que los resultados que se obtienen con el algoritmo *falfa1* y *falfa2* son muy similares, lo cuál permite concluir que el factor determinante es, aquel en que aparece la derivada de la fase de la señal analítica fraccionaria, ecuación 3.15 y 3.17.

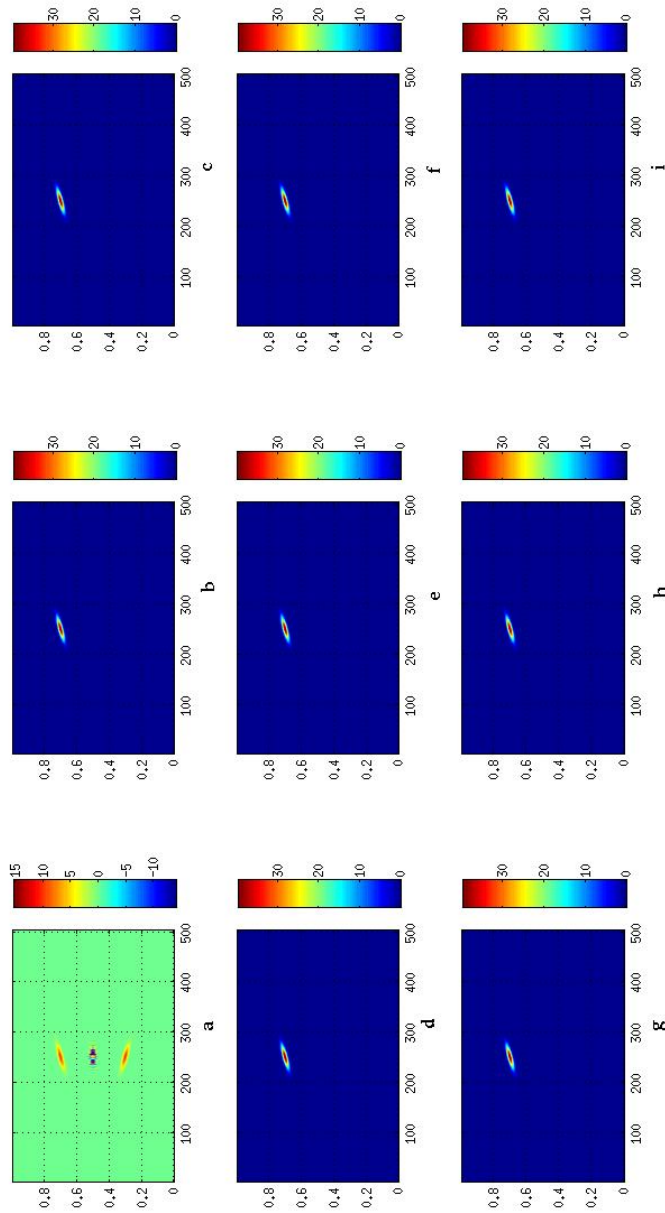


Figura 3.1: DW de la señal analítica fraccionaria de la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)SAF de orden 0.8, (c)SAF de orden 0.9, (d)SAF de orden 0.96, (e)SAF de orden 0.98, (f)SAF de orden 1, (g)SAF de orden 1.19, (h)SAF de orden 1.21, (i)SAF de orden 1.24. Fuente: Autor.

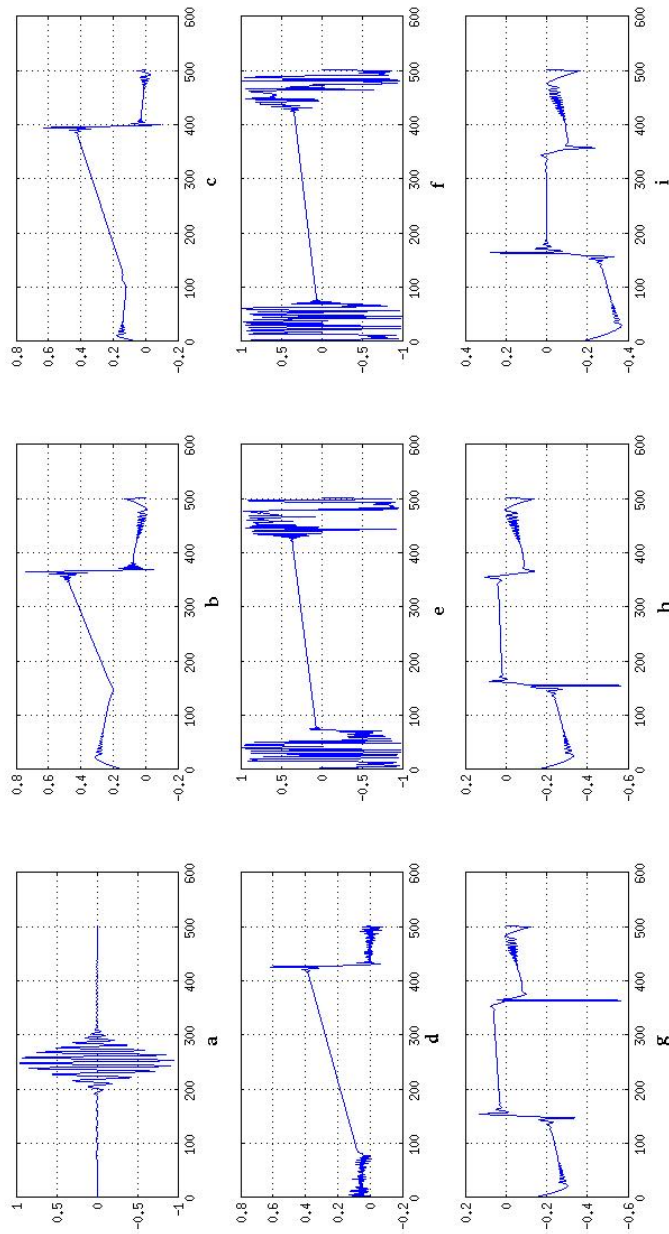


Figura 3.2: FIF obtenida a partir del algoritmo falfa1 para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor.

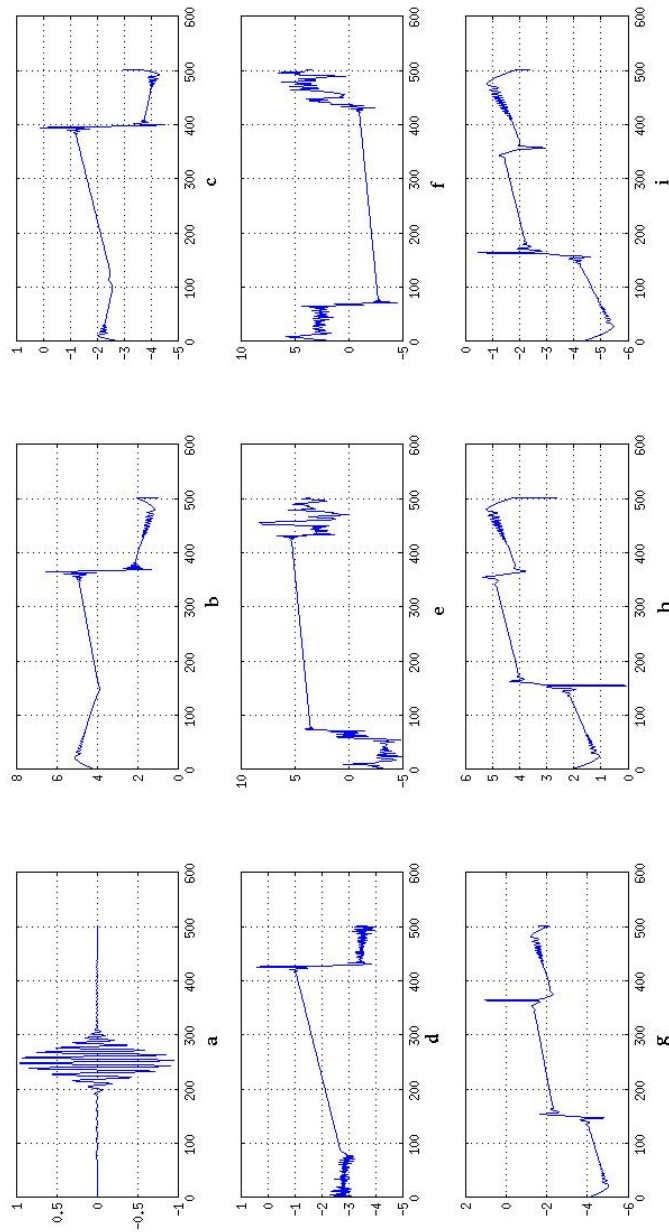


Figura 3.3: FIF obtenida a partir del algoritmo falga2 para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor.

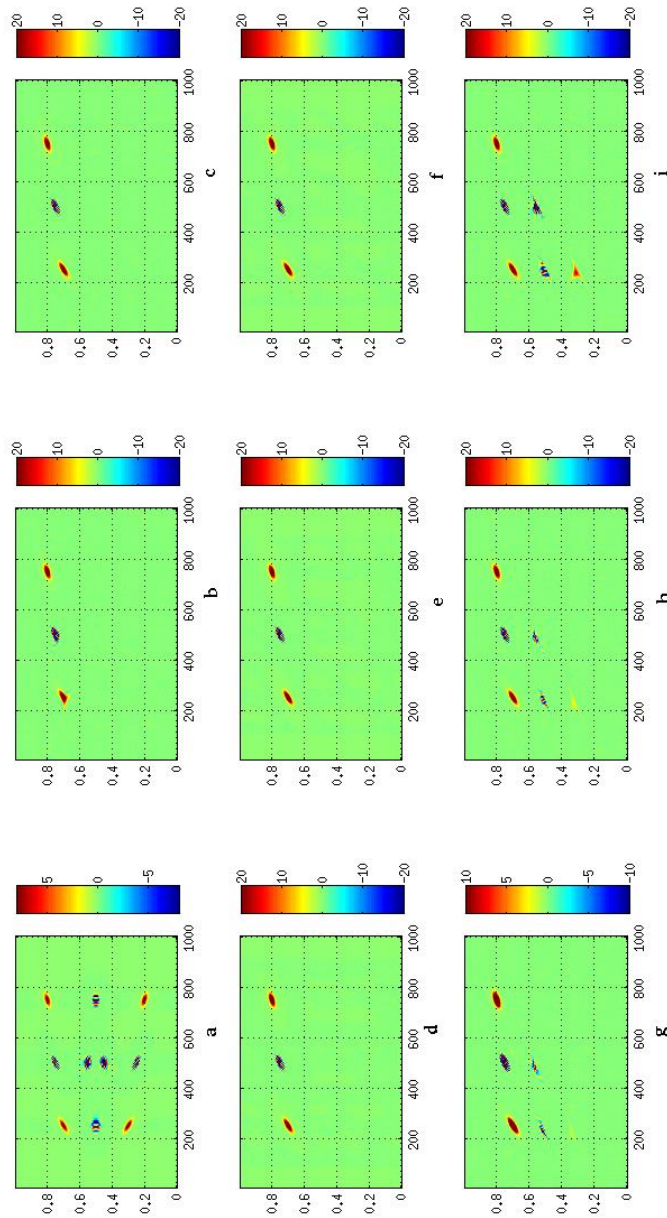


Figura 3.4: DW de la señal analítica fraccionaria de la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ .(a)Señal original, (b)SAF de orden 0.8, (c)SAF de orden 0.9, (d)SAF de orden 0.96, (e)SAF de orden 0.98, (f)SAF de orden 1, (g)SAF de orden 1.19, (h)SAF de orden 1.21, (i)SAF de orden 1.24. Fuente:Autor.

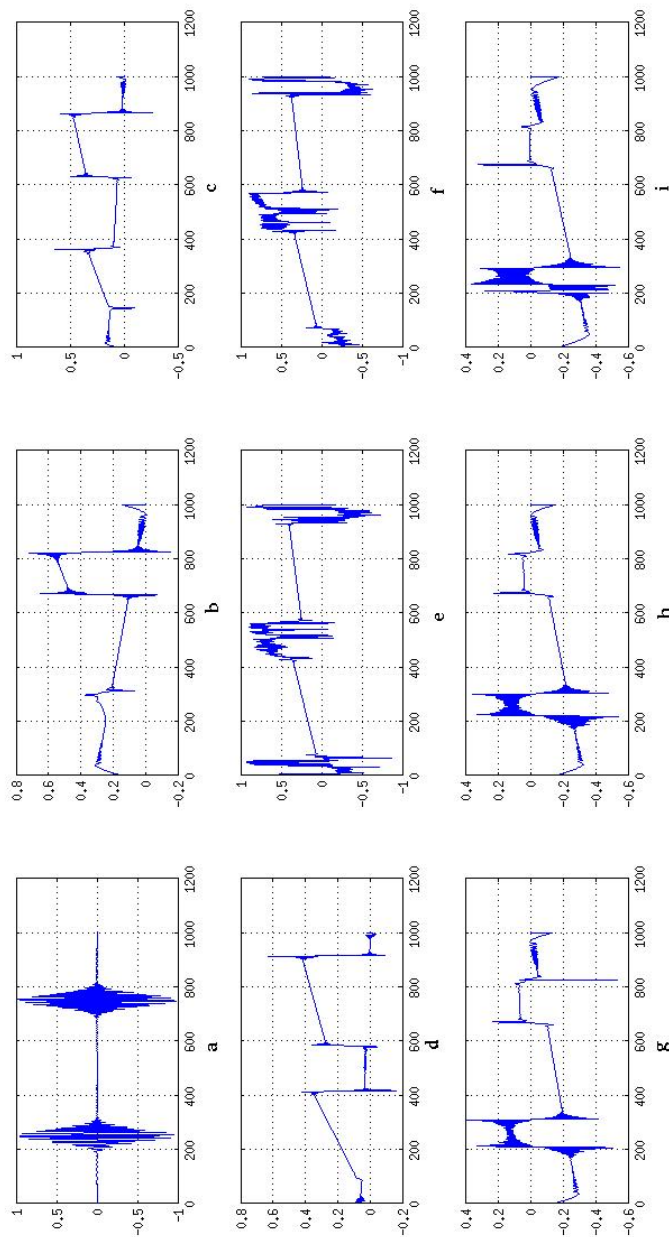


Figura 3.5: FIF obtenida a partir del algoritmo `falfa1` para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor.

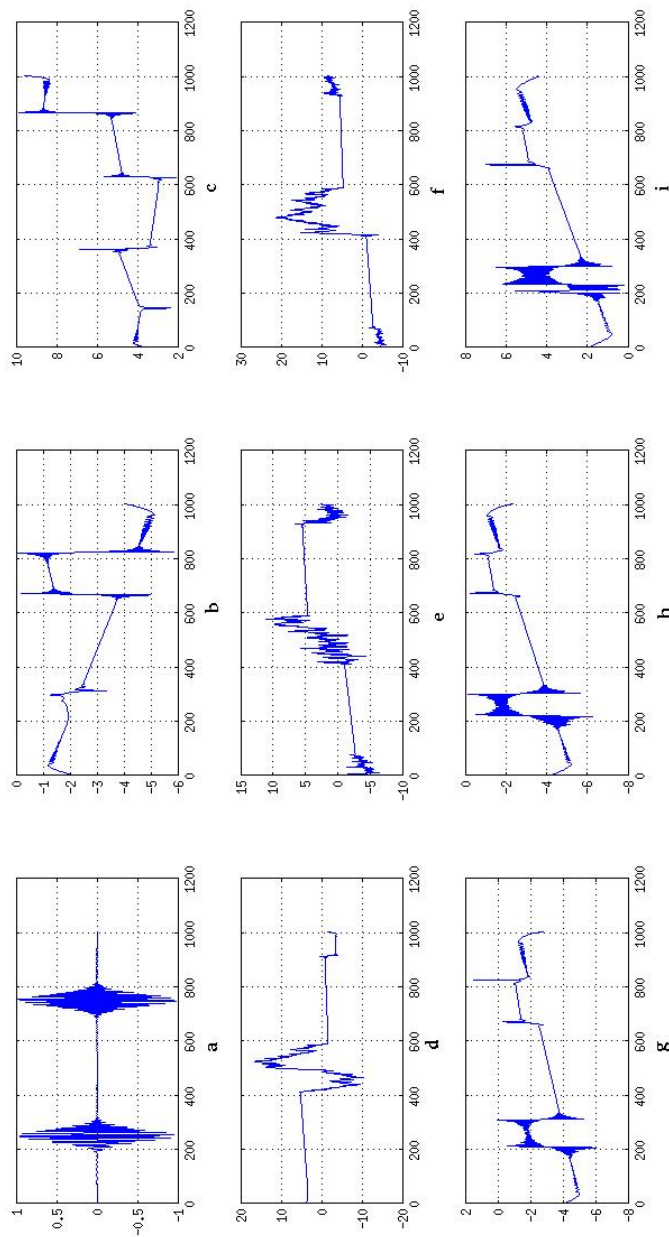


Figura 3.6: FIF obtenida a partir del algoritmo falfa2 para la función  $\sin(4\pi t^2)e^{-10(t-2,5)^2} + \cos(2\pi t^2)e^{-10(t-7,5)^2}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente:Autor.

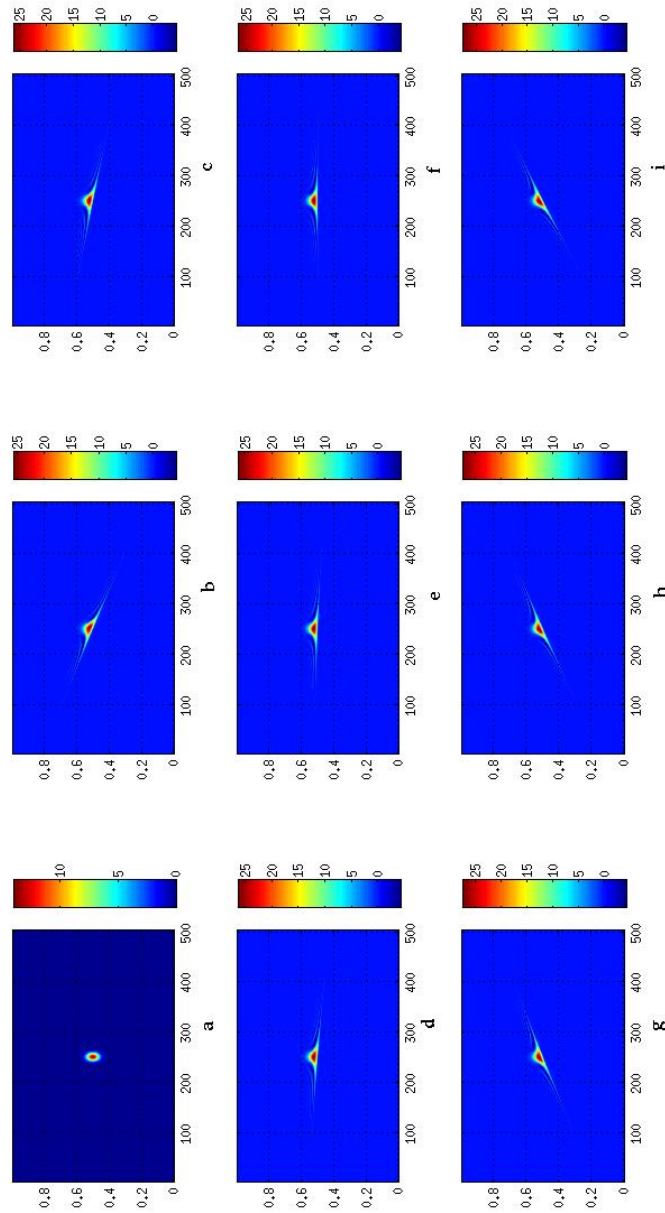


Figura 3.7: DW de la señal analítica fraccionaria de la función  $e^{-80(t-2,5^2)}$ .(a)Señal original, (b)SAF de orden 0.8, (c)SAF de orden 0.9, (d)SAF de orden 0.96, (e)SAF de orden 0.98, (f)SAF de orden 1, (g)SAF de orden 1.19, (h)SAF de orden 1.21, (i)SAF de orden 1.24. Fuente:Autor.

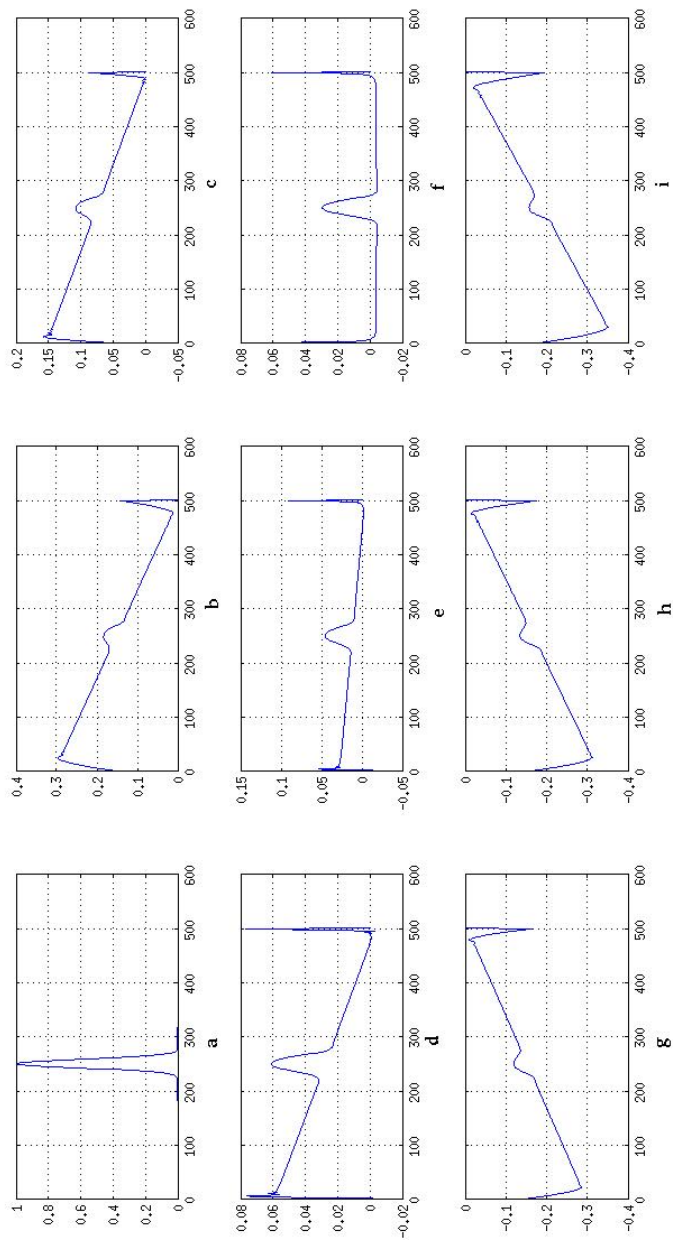


Figura 3.8: FIF obtenida a partir del algoritmo *falfa1* para la función  $e^{-80(t-2,5^2)}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente: Autor.

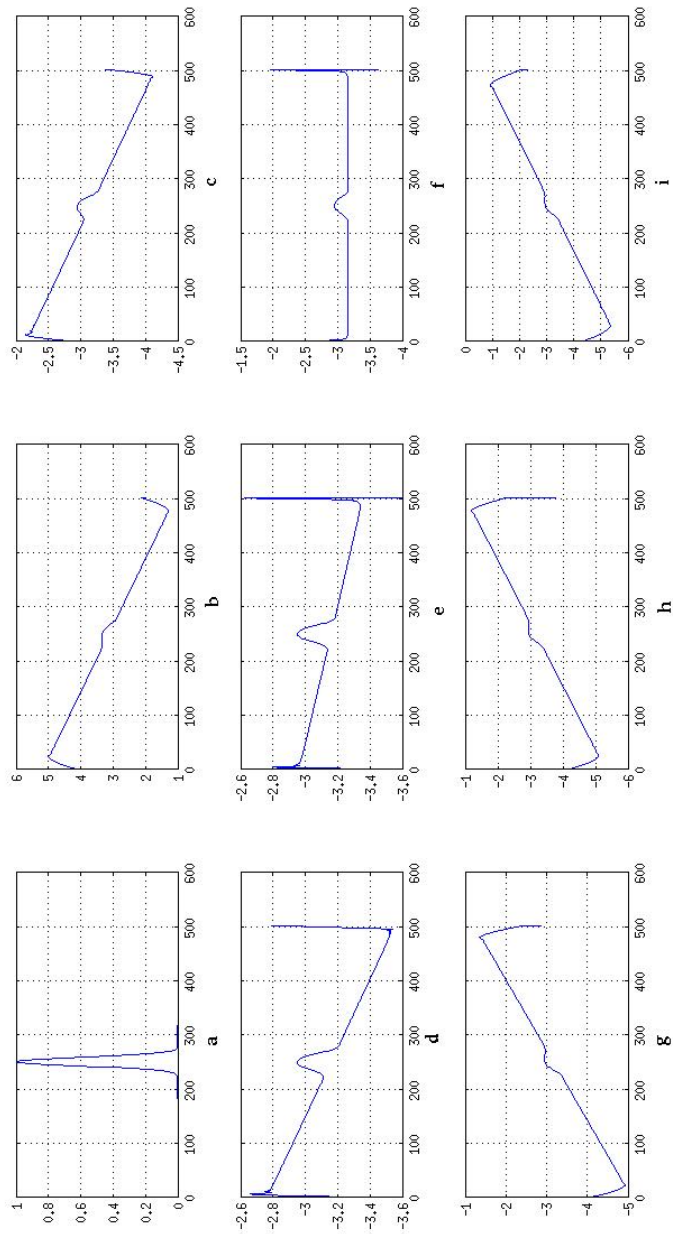


Figura 3.9: FIF obtenida a partir del algoritmo falga2 para la función  $e^{-80(t-2.5^2)}$ . (a)Señal original, (b)FIF de orden 0.8, (c)FIF de orden 0.9, (d)FIF de orden 0.96, (e)FIF de orden 0.98, (f)FIF de orden 1, (g)FIF de orden 1.19, (h)FIF de orden 1.21, (i)FIF de orden 1.24. Fuente: Autor.

# Capítulo 4

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

### 4.1. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una definición para la señal analítica basada en la convolución fraccionaria a partir de la cuál se definió la transformación de Hilbert con base en la convolución fraccionaria, ampliando así el concepto de transformación de Hilbert, lo cuál puede ser usado para ampliar el rango de aplicación de esta herramienta como también intentar mejorar los resultados obtenidos con la transformación convencional.

Con base en la señal analítica basada en la convolución fraccionaria, se definió la frecuencia instantánea fraccionaria, lo cual representa un atributo físico, pero con un grado de libertad adicional que es el orden fraccionario, lo cual permite pensar que los resultados pueden ser mejores, en cuanto a que puede ser visible información que no es posible discriminar con la herramienta convencional, para un determinado orden.

Las definiciones propuestas, señal analítica fraccionaria, transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria y frecuencia instantánea fraccionaria, fueron definidas de modo tal que la señal analítica convencional, la transformación de Hilbert convencional y la frecuencia instantánea convencional, son una caso particular.

En este trabajo se plantea un algoritmo para implementar cada definición propuesta, transformación de Hilbert basada en la convolución fraccionaria, señal analítica fraccionaria y frecuencia instantánea

fraccionaria. Los algoritmos fueron desarrollados en Matlab, y son mostrados en los anexos del presente trabajo.

Este trabajo fue orientado para obtener atributos físicos, pero la definición puede también ser explorada en otros tipos de aplicaciones en los cuales se hace uso de la transformación de Hilbert, no solo los que tengan que ver con atributos físicos.

Según los resultados obtenidos con la frecuencia instantánea fraccionaria, se observa que el inconveniente que existe con la frecuencia instantánea, basada en la transformación de Hilbert convencional, de dar respuesta en los lugares donde no hay señal, puede ser mejorado, y esto representa ya un aporte significativo a la hora de tratar señales.

En este trabajo se hizo uso de la convolución fraccionaria definida en [1], para proponer cada una de las definiciones planteadas, señal analítica fraccionaria, transformación de Hilbert fraccionaria y frecuencia instantánea fraccionaria, lo cuál es la diferencia más marcada respecto de las propuestas hechas en [17], [13], [9] y [10], siendo este uno de los aportes a la teoría existente.

## **4.2. TRABAJO FUTURO**

Se propone retomar este trabajo para la obtención de otros atributos físicos, además para explorar nuevas propiedades, que podrían estar asociadas a cada una de las definiciones propuestas.

También se propone revisar los algoritmos que permiten implementar cada definición propuesta, e intentar mejorarlos en el sentido de permitir análisis de señales más complejas de una forma que sea práctica.

# Bibliografía

- [1] RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS. “Tratamiento de señales por transformación de Fourier Fraccionaria. Aplicaciones a la holografía y al filtrado óptico”. Tesis Doctoral, Universidad Industrial de Santander (2010).
- [2] P. KOOTSOOKOS B. BOASHASH, B. LOVELL. TIME–FREQUENCY SIGNAL ANALYSIS & INSTANTANEOUS FREQUENCY ESTIMATION Methodology, Relationships & Implementations. Informe técnico, University of Queensland (1989).
- [3] ARTHUR E. BARNES. A tutorial on complex seismic trace analysis. *GEOPHYSICS* **57**(11), 1520–1524 (noviembre 1990).
- [4] BOUALEM BOASHASH. “Time Frequency Signal Analysis and Processing”. ELSEVIER (2003).
- [5] SEBASTIEN COETMELLE. Fractional Fourier Transform. Disponible en [http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/opi\\_ang\\_m02\\_c09/co/contenu033.html](http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/opi_ang_m02_c09/co/contenu033.html).
- [6] LEON COHEN. “TIME-FREQUENCY ANALYSIS”. Prentice Hall PTR (1995).
- [7] M. FELDMAN. Hilbert transform in vibration analysis. *Tutorial Review, Mechanical Systems and Signal Processing* **25**, 735–802 (2011).
- [8] S.L. HAHN. “Hilbert Transforms in Signal Processing”. Artech House (1996).
- [9] D. E. MCNAMARA J. A. DAVIS Y D. M. COTTRELL. Analysis of the fractional Hilbert transform. *Applied Optics* **37**, 6911–6913 (1998).
- [10] ADOLF W. LOHMANN, DAVID MENDLOVIC Y ZEEV ZALEVSKY. Fractional Hilbert transform. *Optics Letters* **21** (1996).
- [11] VICTOR NAMIAS. The fractional order transform and its application to quantum mechanics. *Institute of Mathematics and its Applications* **25**(3), 241–265 (1980).

- [12] HALDUM M. OZAKTAS. Wigner distributions, linear canonical transforms, and phase-space optics. Informe t'ecnico, Bilkent University (2000).
- [13] Y. WANG R. TAO, X. M. LI. Generalization of the fractional Hilbert transform. *IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS* **15**, 365—368 (2008).
- [14] MENG LIN LOU TIAN LI HUANG, WEI XIN REN. Identification of MDOF Non-Linear uncoupled dynamical systems using Hilbert transform and empirical decomposition method. *Advanced Materials Research Advances in Civil Engineering*, 1676—1680 (2011).
- [15] G.R. TOMLINSON. Developments in the use of the Hilbert transform for detecting and quantifying non-linearity associated with frequency response functions. *Signal Processing* **1**, 151—171 (1987).
- [16] RAFAEL TORRES, PIERRE PELLAT-FINET Y YEZID TORRES. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. *Signal Processing* **90**, 1976—1984 (2010).
- [17] AHMED I. ZAYED. Hilbert transform associated with the fractional Fourier transform. *IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS* **5**, 206—208 (1998).

# ANEXOS

## Algoritmos usados

### Algoritmo falfa1

```
function falfa=falfal(x,alpha)

%
%
%
% Esta función obtiene la frecuencia instantánea fraccionaria, propuesta de
% la siguiente manera:
%
%
% 
$$\frac{\phi'(t) \sin(\alpha)}{2\pi} + t \cos(\alpha),$$

%
%
% donde phi corresponde a la fase de la señal analítica fraccionaria.
%
%

A_alpha=hilbertfrac(x,alpha);% señal analítica fraccionaria
phi=unwrap(angle(A_alpha));% ángulo de la señal analítica
```

```
% hallando la derivada de la fase
n=length(phi);
falfa=zeros(1,n);
for t=1:n
    if (t+1)<n && (t-1)>0
        falfa(t)=(1/(2*pi))*(phi(t+1)-phi(t-1))*sin(alpha)+t*cos(alpha)/n;
    end
end

plot(unwrap(falfa))
```

## Algoritmo falfa2

```
function falfa=falfa2(x,alpha)

%
% Esta función obtiene la frecuencia instantánea, obtenida a partir de la
% distribución de Wigner según
%
%
%          integral(wW_alpha(w,t)) dw
%          -----
%          integral(W_alpha(w,t)) dw
%
% dónde W_alpha(w,t) representa la distribución de Wigner de la señal
% analítica fraccionaria.
%
%
A_alpha=hilbertfrac(x,alpha);% señal analítica fraccionaria
W_A_alpha=wvd(A_alpha,1,1024);% Distribución de Wigner de la señal analítica

w=exp(1i*2*pi*(1/1024)*[1:1024]);

falfa=unwrap(angle((w*W_A_alpha)));

plot(falfa)
```

## Algoritmo Para obtener la señal analítica fraccionaria, *hilbertfrac*

```
function xhfrac=hilbertfrac(x,alpha)

% Esta función halla la señal analítica fraccionaria asociada a una señal x,
% haciendo uso de la transformación de Fourier fraccionaria.
%
%
% x -> señal de entrada.
% a -> orden la de la transformación tal que  $\alpha=a\pi/2$  de modo que
%  $-2\leq a\leq 2$ .
%
%

N = length(x);
if fix(N/2) ~= N/2
    error('Length of the input vector should be even');
end;
a=2*alpha/pi;
xfrac=fracf(x',-a);%se obtiene el la transformación de Fourier fraccionaria de la señal

% Ahora limitando el espectro fraccionario

th=-N/2+1:N/2;

xfrac_lim=(heaviside(th).*(xfrac)');

% se obtiene la transformacion Inversa

c_plus= exp(-1i*(pi*sign(sin(alpha))/4-alpha/2))/sqrt(abs(sin(alpha)));
c_minus= exp(1i*(pi*sign(sin(alpha))/4-alpha/2))/sqrt(abs(sin(alpha)));
xhfrac=(2*c_plus/c_minus)*(fracf(xfrac_lim',a))';
```



## Algoritmo par obtener la trasformada de Hilbert fraccionaria

```
function xhfrac=hfrac(x,a)

% Esta función halla la transformada de Hilbert fraccionaria
% de una señal x, haciendo uso de:
%
%
% SAF[x]= x + iTHF[x],
%
% donde SAF[x] es la señal analítica fraccionaria y
% THF[x] es la transformada de Hilbert fraccionaria.
%
%
%
%
%
% Se obtiene la señal analítica fraccionaria
xafrac=hilbertfrac(x,a);

%Se obtiene la transformada de Hilbert Fraccionaria
xhfrac=-li*(xafrac-x);
```

## Algoritmo para obtener la distribución de Wigner

```
function [y, tmin, tmax] = wvd(z, res, fa)

%WVD Wigner-Ville time-frequency distribution.

% USAGE:    y=wvd(x,res,fa)
%           or
%           [y,min_t,max_t]=tfd(...)
% INPUT:
% z        - Complex input signal (column- or row vector).
%           If signal is real use hilbert(x).
% res     - Number of samples between the windows.
%           Good value: res=1
% fa      - Length of frequency axis.
%           (Default value: half the signal length.)
% OUTPUT:
% y       - Contains the distribution. Each row represents
%           a frequency, each column a time instant.
% min_t  - first time-instant of distribution
% max_t  - final time-instant of distribution

%
% /
% Author:  Rene Laterveer, R.Laterveer@fel.tno.nl
% Ref:    - B. Boashash, "Time- Frequency Signal Analysis, methods and
%           applicatoions", Chapter 7, Wiley Halsted Press (1992)

% This software may be freely used and modified for research and development
% purposes. If you wish to use it for commercial gain please contact me.
% I provide absolutely NO WARRANTY for this software.
```

```

%
%
% Copyright: Rene Laterveer

nplts = floor(length(z)/res);

% make even for two transforms at once
nplts = floor(nplts/2)*2;

% make window length nearest odd integer to fa
lwin = 2*floor((fa-1)/2)+1;
hlf = (lwin+1)/2-1;

tmin = 1;
tmax = length(z);

% zero padding to remove wrap around problems
z = [zeros(1,lwin-1), z, zeros(1,lwin-1)];

y = zeros(nplts,fa);

R = zeros(1, fa);
idx = 1:hlf;

for n=0:nplts/2-1

    t = 2*n*res+lwin;
    R(1) = z(t)*conj(z(t)) + 1i*z(t+res)*conj(z(t+res));
    v1 = z(t+idx).*conj(z(t-idx));
    v2 = z(t+res+idx).*conj(z(t+res-idx));
    R(idx+1) = v1+1i*v2;
    R(fa-idx+1) = conj(v1)+1i*conj(v2);

```

```
RF = fft(R, fa);
```

```
y(2*n+1,:) = real(RF);
```

```
y(2*n+2,:) = imag(RF);
```

```
end
```

```
y = fftshift(y',1);
```

```
imagesc([1:nplts],[0:fa-1]/fa,real(y))
```

```
axis('xy');
```

## Algoritmo para obtener la convolución fraccionaria

```
function y=convfrac(f,g,a)

deltax = sqrt(length(f));

alpha = a*pi/2;
N = fix(length(f));
deltax1 = deltax;
x = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;

c= exp(-1i*(pi*sign(sin(alpha))/4-alpha/2))/sqrt(abs(sin(alpha)));
prod=fracf(f',-a)' .*fracf(g',-a)' .*exp(-1i*pi.*x.*x*cot(alpha));

y=c*fracf(prod',a);
```

## Algoritmo para obtener la Transformación de Fourier fraccionaria.

%FAST COMPUTATION OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM

%by M. Alper Kutay, September 1996, Ankara

%Copyright 1996 M. Alper Kutay

%This code may be used for scientific and educational purposes

%provided credit is given to the publications below:

%

%Haldun M. Ozaktas, Orhan Arikan, M. Alper Kutay, and Gozde Bozdagi,

%Digital computation of the fractional Fourier transform,

%IEEE Transactions on Signal Processing, 44:2141--2150, 1996.

%Haldun M. Ozaktas, Zeev Zalevsky, and M. Alper Kutay,

%The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and

%Signal Processing, Wiley, 2000, chapter 6, page 298.

%

%The several functions given below should be separately saved

%under the same directory. fracF(fc,a) is the function the user

%should call, where fc is the sample vector of the function whose

%fractional Fourier transform is to be taken, and 'a' is the

%transform order. The function returns the samples of the a'th

%order fractional Fourier transform, under the assumption that

%the Wigner distribution of the function is negligible outside a

%circle whose diameter is the square root of the length of fc.

%%%

function[res]=fracf(fc,a)

% This function operates on the vector fc which is assumed to

% be the samples of a function, obtained at a rate 1/deltax

% where the Wigner distribution of the function f is confined

% to a circle of diameter deltax around the origin.

```
% (deltax^2 is the time-bandwidth product of the function f.)
% fc is assumed to have an even number of elements.
% This function maps fc to a vector, whose elements are the samples
% of the a'th order fractional Fourier transform of the function f.
% The lengths of the input and output vectors are the same if the
% input vector has an even number of elements, as required.
% Operating interval: -2 <= a <= 2
% This function uses the 'core' function corefrmod2.m
```

```
N = length(fc);
if fix(N/2) ~= N/2
    error('Length of the input vector should be even');
end;
fc = fc(:);
```

```
fc = bizinter(fc);
fc = [zeros(N,1); fc ; zeros(N,1)];
```

```
flag = 0;
```

```
if (a>0) && (a<0.5)
    flag = 1;
    a = a-1;
```

```
end;
```

```
if (a>-0.5) && (a<0)
    flag = 2;
    a = a+1;
```

```
end;
```

```
if (a>1.5) && (a<2)
    flag = 3;
    a = a-1;
```



```

function[res]=corefrmod2(fc,a)

% Core function for computing the fractional Fourier transform.
% Valid only when 0.5 <= abs(a) <= 1.5
% Decomposition used:
%   chirp mutiplication - chirp convolution - chirp mutiplication

deltax = sqrt(length(fc));

phi = a*pi/2;
N = fix(length(fc));
deltax1 = deltax;
alpha = 1/tan(phi);
beta = 1/sin(phi);

x = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
fc = fc(:);
fc = fc(1:N);
f1 = exp(-1i*pi*tan(phi/2)*x.*x); %multiplication by chirp!
f1 = f1(:);
fc      = fc.*f1;
x = x(:);
clear x;
t =[-N+1:N-1]/deltax1;
hlptc =exp(1i*pi*beta*t.*t);
clear t;
hlptc = hlptc(:);

N2 = length(hlptc);
N3 = 2^(ceil(log(N2+N-1)/log(2)));
hlptcz = [hlptc;zeros(N3-N2,1)];
fcz = [fc;zeros(N3-N,1)];

```

```

Hcfft = ifft(fft(fcz).*fft(hlptcz)); % convolution with chirp
clear hlptcz;
clear fcz;
Hc = Hcfft(N:2*N-1);
clear Hcfft;
clear hlptc;
Aphi = exp(-1i*(pi*sign(sin(phi))/4-phi/2))/sqrt(abs(sin(phi)));
xx = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
f1 = f1(:);
res = (Aphi*f1.*Hc)/deltax1; % multiplication by chirp!

if (fix(N/2) ~=N/2)
    res2(1:N-1) = res(2:N);
    res2(N)     = res(1);
    res        = res2;
end;

res = res(:);

clear f1
clear Hc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function xint=bizinter(x)

N=length(x);
im = 0;
if sum(abs(imag(x)))>0
    im = 1;
    imx = imag(x);
    x   = real(x);

```



```
k = 1:2:length(x);
```

```
xdec = x(k);
```

```
xdec = xdec(:);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function F2D=fracF2D(f2D,ac,ar)
```

```
[M,N] = size(f2D);
```

```
F2D = zeros(M,N);
```

```
if ac == 0
```

```
    F2D = f2D;
```

```
else
```

```
    for k = 1:N
```

```
        F2D(:,k) = fracf(f2D(:,k),ac);
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
F2D = conj(F2D');
```

```
if ar ~= 0
```

```
for k = 1:M
```

```
    F2D(:,k) = fracf(F2D(:,k),ar);
```

```
end;
```

```
end;
```

```
F2D = conj(F2D');
```

