

GEOMETRÍA PROYECTIVA Y SUS APLICACIONES A LAS  
CÓNICAS Y A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

ÓSCAR MAURICIO MESA RINCÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2004

GEOMETRÍA PROYECTIVA Y SUS APLICACIONES A LAS  
CÓNICAS Y A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

ÓSCAR MAURICIO MESA RINCÓN

Monografía presentada como re-  
quisito para optar al título de  
*Licenciado en Matemáticas*

Sofía Pinzón Durán

**Directora**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

# Agradecimientos

Mis mas profundos agradecimientos:

- **A mi madre**, quien con esfuerzo y sacrificio confió en mi y me brindo su apoyo y amor incondicional.
- **A mi hermano**, quien ha sacrificado muchas cosas para que alcanzara la meta que me propuse y quien a sido un modelo perfecto a seguir.
- **A Ingrid**, mi apoyo incondicional y sin el cual no hubiera sido posible este gran logro.
- **A mi padre**, a quien admiro por su capacidad y esfuerzo por salir adelante;
- A mi directora Sofía, por su gran calidad humana e intelectual y por su colaboración.
- **A Juanita**, por su compañerismo y su disposición para siempre ayudarme.
- **A mis profesores** por sus enseñanzas, en especial a Rafael Issacs y Sonia Sabogal por su aprecio y calidad humana.
- A quienes de una forma u otra me colaboraron para dar este gran paso de mi vida.
- A Colciencias, por brindarme los medios para el desarrollo de la monografía.
- Pero sobre todo y principalmente **a Dios**, que cada día me daba una nueva oportunidad de seguir adelante y fuerzas para lograr cada una de mis metas.

A todos ellos y a muchos más, que por ser tan larga la lista no nombro aquí, les estaré siempre agradecido por permitirme dar este nuevo paso en mi formación profesional.

**TÍTULO:** GEOMETRÍA PROYECTIVA Y SUS APLICACIONES A LAS CÓNICAS Y A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

**AUTOR:** OSCAR MAURICIO MESA RINCÓN\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Plano proyectivo.  
Plano dual.  
Plano afín.  
Puntos ideales.  
Punto impropio.  
Punto antipodal.  
Colineación.  
Concurrencia.

#### DESCRIPCIÓN:

En la monografía se estudian y muestran diferentes tópicos y fundamentos de la geometría proyectiva, lo interesante es que esta geometría intenta explicar el mundo tal como lo vemos, de una manera sorprendente. Su modelo es el plano euclidiano adicionándole propiedades duales al mismo.

Además, se puede ver que en el plano proyectivo no toda curva cerrada divide al plano en dos regiones, en pocas palabras que el teorema de Jordan no se cumple.

La monografía esta compuesta por una introducción junto con cinco capítulos. En el primer Capítulo se presenta una reseña histórica acerca del tema. En el segundo Capítulo, se presenta el plano proyectivo  $RP^2$  y sus diferentes representaciones, en este mismo capítulo se trata el tema del plano proyectivo dual y el plano afín. En el tercer capítulo estudiamos la noción de colineación, esta definición será de gran utilidad para el estudio de las cónicas y de la geometría hiperbólica. Por otro lado se presentan tres teoremas importantes como son: el teorema fundamental de la geometría proyectiva, el teorema de Pappus y el teorema de Desargues. En el cuarto Capítulo se aborda la temática de las cónicas en  $RP^2$  y la forma de construir las; para finalizar se exponen algunos teoremas significativos como: El teorema de Pappus y Maclaurin, el teorema de Pascal y su hexagrama místico y el teorema de Brianchon. En el último Capítulo se hace un breve estudio de la geometría hiperbólica y algunas de sus propiedades.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Pinzón Sofía.

TITLE:       PROYECTIVE GEOMETRY AND ITS APPLICATIONS TO THE  
              CONICAL AND TO THE HYPERBOLIC GEOMETRY

AUTHOR:     OSCAR MAURICIO MESA RINCÓN\*\*

KEY WORDS: Projective plane.  
              Dual plane.  
              Affine plane.  
              Ideal points.  
              Improper point.  
              Antipodal point.  
              Colineation.  
              Correlation.

#### DESCRIPTION

In this monograph we study the foundations and some topics of projective geometry, the interesting thing is that this geometry tries to explain the world as we see it, of a surprising way. Its model is the euclidian plane adding dual properties to it.

In addition, is possible to be seen briefly that in the projective plane all closed curve does not divide to the plane in two regions, that is, the theorem of Jordan is not fulfilled.

The monograph along with includes of an introduction five chapters. In the first Chapter an historical review occurs. In the second Chapter, one appears projective plane  $\mathbb{RP}^2$  and its different representations. Jointly, in this chapter one touches to the subject of the dual projective plane and the affine plane. In the third chapter one works on the colineación notion, this definition will be very useful for the study of conicals and hyperbolic geometry. On the other hand three important theorems appear as they are: the fundamental theorem of projective geometry, Pappus's theorem, Desargues's theorem. In the fourth Chapter the thematic one is conicals in  $\mathbb{RP}^2$  and their construction; in order to finalize some significant theorems are exposed like: The Pappus's theorem and Maclaurin's theorem, Pascal's theorem and his mystical hexagrama and the Brianchon's theorem. In the last Chapter is made a brief study of hyperbolic geometry and some of its properties.

---

\* Monograph

\*\* Faculty of Sciences. Department of Mathematics. Graduate in mathematics.  
Pinzón Sofía

# INTRODUCCION

La geometría euclidiana y sus postulados han llamado la atención de muchos matemáticos a través de la historia; desde tiempos inmemorables han tratado de demostrarlos o refutarlos; sobre todo el quinto postulado de Euclides.

Esta curiosidad y empeño han llevado a muchos matemáticos al desarrollo de las geometrías no euclidianas, una de ellas es la geometría proyectiva, la cual es una elegante y sofisticada extensión de la geometría Euclidiana que todos conocimos en el colegio.

Lo interesante es que esta geometría intenta explicar el mundo tal como lo vemos, de una manera sorprendente. Su modelo es el plano euclidiano adicionándole propiedades duales al mismo, para así crear una geometría sólida y concreta. Esta geometría, desde su desarrollo en el Renacimiento hasta hoy ha realizado grandes aportes no solo a las matemáticas sino también a otras áreas como lo son el arte, la arquitectura y el diseño.

Es por esto que en esta monografía se estudiarán y mostrarán diferentes tópicos y fundamentos de la geometría proyectiva y su incidencia en la geometría hiperbólica, presentando todo esto en cinco capítulos distribuidos así:

En el primer Capítulo se da una reseña histórica de algunos de los personajes que se destacaron en la Matemática, específicamente en Geometría y los precursores de la Geometría Proyectiva.

En el segundo Capítulo presentamos el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$  y sus diferentes representaciones. El plano proyectivo real es una superficie de dos dimensiones que posee un gran número de definiciones equivalentes. Clásicamente el plano proyectivo real es definido como

el espacio de las rectas que pasan por el origen en el espacio euclidiano tri-dimensional  $\mathbb{R}^3$ . A través de la utilización de la aplicación antipodal que consiste en la identificación de puntos opuestos sobre la esfera  $\mathbb{S}^2$ , la esfera módulo la aplicación antipodal es otra representación del plano proyectivo. Además, trataremos en este capítulo sobre el plano proyectivo dual y el espacio afín.

En el tercer capítulo trabajamos con la noción de colineación: Una *colineación* es una aplicación biyectiva  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que preserva colinealidad, o sea, si  $\bar{u}, \bar{v}$  y  $\bar{w}$  son puntos proyectivos colineales, entonces las imágenes  $\psi(\bar{u}), \psi(\bar{v})$ , y  $\psi(\bar{w})$  son también puntos proyectivos colineales, esta definición nos será de gran utilidad para nuestro propósito que es el de estudiar las cónicas y la geometría hiperbólica. Por otro lado presentaremos tres teoremas importantes como son: el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que dice: Toda colineación  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  es inducida por un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el teorema de Pappus y el teorema de Desargues .

En el cuarto Capítulo utilizaremos el álgebra lineal como herramienta básica para poder estudiar cónicas en  $\mathbb{RP}^2$ , además estudiaremos como construir cónicas sabiendo de antemano que una colineación transforma cónicas en cónicas. Para finalizar este Capítulo expondremos algunos teoremas importantes como: El teorema de Pappus y Maclaurin que tratan sobre cinco puntos proyectivos de forma que tres cualesquiera de ellos no son colineales, el teorema de Pascal y su hexagrama místico y el teorema de Brianchon.

En el último Capítulo hacemos un breve estudio de la geometría hiperbólica y algunas de sus propiedades.

# Índice general

<b>1. Algunos datos históricos y generalidades</b>	<b>1</b>
1.1. Geometría Clásica . . . . .	1
1.2. Los Elementos de Euclides . . . . .	4
1.3. Los Axiomas de Hilbert . . . . .	7
1.4. Geometría Projectiva: una introducción . . . . .	10
<b>2. El Plano Projectivo y sus Transformaciones</b>	<b>12</b>
2.1. El plano projectivo, una visión geométrica. . . . .	16
2.2. El plano projectivo $\mathbb{RP}^2$ , una visión algebraica . . . . .	18
2.3. Relación entre $\mathbb{RP}^2$ y $\mathbb{S}^2$ . . . . .	19
2.4. Rectas projectivas . . . . .	21
2.5. Plano projectivo dual . . . . .	22
2.6. Incidencia . . . . .	23
2.7. Geometría Afín . . . . .	26
2.8. Rectas afines . . . . .	27
<b>3. Colineación</b>	<b>30</b>
3.1. Operador lineal y colineación . . . . .	31
3.2. Construcción de colineaciones . . . . .	32
3.3. Teorema fundamental . . . . .	36
3.4. Teorema de Pappus . . . . .	42

---

3.5. Teorema de Desargues . . . . .	44
<b>4. Cónicas</b>	<b>48</b>
4.1. Conos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	49
4.2. Cuádricas . . . . .	52
4.3. Correlaciones . . . . .	53
4.4. Polaridades . . . . .	55
4.5. Cónicas en $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	56
4.6. Rectas tangentes . . . . .	58
4.7. Construyendo cónicas . . . . .	60
4.8. Teorema de Pascal . . . . .	64
4.9. Teorema de Brianchon . . . . .	67
<b>5. Geometría Hiperbólica</b>	<b>69</b>
5.1. El modelo proyectivo del plano no euclidiano. . . . .	69
5.2. Los movimientos del plano no euclidiano. . . . .	70
5.3. Ángulos rectos. . . . .	71
5.4. Los cuatro primeros postulados de Euclides. . . . .	71
5.5. El quinto postulado. . . . .	73

# Índice de figuras

2.1. Hexagrama místico de Pascal . . . . .	13
2.2. Vecindad en la banda de Möebius . . . . .	14
2.3. Banda de Möebius . . . . .	14
2.4. Plano Projectivo . . . . .	17
3.1. Teorema de Pappus . . . . .	42
3.2. Teorema Desargues . . . . .	45
4.1. Tres clases de conicas . . . . .	49
4.2. Cono en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	51
4.3. Hexagrama místico de Pascal . . . . .	65
4.4. Teorema de Brianchon . . . . .	68
5.1. Cónica Absoluta . . . . .	70
5.2. Ángulos rectos . . . . .	71
5.3. Postulado 3 . . . . .	72
5.4. Postulado 4 . . . . .	72
5.5. Postulado V . . . . .	73
5.6. Punto Ideal . . . . .	74
5.7. Paralelas en común . . . . .	74
5.8. Lobachevsky . . . . .	75
5.9. Congruencia . . . . .	75

# Capítulo

# 1

## Algunos datos históricos y generalidades

---

### 1.1. Geometría Clásica

---

Presentamos a continuación una reseña histórica de algunos de los matemáticos que influenciaron el desarrollo de la geometría, las fechas son aproximadas ya que de los más antiguos es difícil tener un conocimiento exacto de los años en los cuales vivieron

La palabra geometría en epistemología griega significa “medición de tierras”. En la antigua mesopotamia en el antiguo Egipto, el conocimiento geométrico se resumía a un aglomerado de procedimientos prácticos de medida aplicada, principalmente, en agricultura. Eran cálculos empíricos de complementos, áreas y volúmenes con el empleo de fórmulas, muchas utilizadas en forma errónea.

Debemos a los griegos la transformación de la geometría de un conocimiento rudimentario y práctico a una de las ramas de la matemática pura. Ellos tenían la iniciativa de extraer ideas del contexto físico para el contexto puramente mental, proceso que llevó siglos para ser completado, aproximadamente de 600 a.C. hasta 300 a.C.

El mas antiguo griego conocido que adoptó tal postura fue el mercader e ingeniero **Thales de Mileto** (mas o menos 624 a.C. – 547 a.C.), considerado el primer filósofo, científico y matemático griego. Thales empleó argumentos lógicos para demostrar proposiciones básicas de geometría, muchas de su autoría, que no tenían ninguna importancia en la medición de tierras. Thales fue el origen de una escuela que perduró por un siglo y se cree que él conocía

algunos rudimentos de geometría gracias a sus viajes por los pueblos de Mesopotamia y Egipto. A él se le adjudica la demostración de resultados tales como:

- Un círculo es bisecado por un diámetro.
- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.
- Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

**Pitágoras de Samos** aproximadamente 569 *a.C.* – 475 *a.C.*, posiblemente un alumno de la escuela de Thales, estableció una sociedad filosófica y religiosa que contribuyó mucho para la formación de la Geometría con trabajos sobre teorías de paralelas, figuras semejantes y una combinación de teoría de números y misticismo. El propio Pitágoras introdujo la palabra Filosofía (amor a la sabiduría) y Matemático (el que es aprendido). Ante la muerte del filósofo, la escuela Pitagórica se dividió en dos facciones. Una, formada por aquellos que aceptaban la palabra del “maestro” como una revelación y la otra, formada por aquellos seguidores que deseaban “el nuevo aprendizaje”, los matemáticos.

Miembros de la última facción desarrollaron nuevos resultados en Matemática exclusivamente por deducción lógica, transformando la nueva ciencia en una ciencia deductiva. Su doctrina sobrevive por siglos. Sin duda en la década de 1980 existían seguidores místicos en los estados de Fortaleza y Ceará, Brasil, que realizaban sus reuniones en un viejo caserón del centro de la ciudad, en la calle Major Facundo, cuya sede era llamada la Escuela Pitagórica.

El siguiente avance fue establecido por otro griego, un profesor de Geometría, **Hipócrates de Chios** aproximadamente 470 *a.C.* – 410 *a.C.*, quien escribió un libro texto llamado, **Elementos de Geometría**, en el cual los teoremas eran ordenados en una secuencia donde los siguientes teoremas eran probados teniendo como base los teoremas anteriores. Todo indica que sus obras están contenidas en los Libros I y II de los Elementos de Euclides. Con él se da el inicio a la sistematización del conocimiento matemático, estableciendo una estructura de presentación que sobrevive hasta hoy. Hipócrates de Chios contribuyó a la geometría con muchos teoremas sobre circunferencias. Por esta misma época, fue fundada en Atenas, por el filósofo **Platón** (427 *a.C.* – 347 *a.C.* aproximadamente), la famosa **Academia**, una institución que congregaba los mejores sabios de la época. Sobre su puerta estaba escrito:

**No permitan la entrada de quien no sabe geometría.**

Con la Academia, la Matemática obtuvo el status de Ciencia Pura, sus miembros no tenían la preocupación de aplicar los conocimientos adquiridos ya que su trabajo y el énfasis era el desarrollo del pensamiento matemático y filosófico.

Uno de los miembros de la Academia, de los 17 a los 30 años, fue el filósofo **Aristóteles de Macedonia** (mas o menos 384 *a.C.* – 322 *a.C.*). La contribución de Aristóteles para los fundamentos de Matemática fue indirecta, construyó una teoría de afirmación que comenzaba con nociones comunes, nociones especiales, definiciones y un tratado sobre lógica y Filosofía, estableciendo la base para toda la Matemática griega. Aristóteles funda un centro científico y filosófico llamado *Liceu*. En los siguientes seiscientos años, fueron creadas centenas de Escuelas en Grecia, mas ninguna de ellas comparable en importancia con las dos anteriormente mencionadas, excepto el Museo de Alejandría.

Otro miembro de la Academia, **Eudoxos de Cnido** (408 *a.C.* – 355 *a.C.*), construyó un modelo de como debe ser una teoría matemática, sistematizando formalmente el método axiomático inspirado en el trabajo de Aristóteles. Su mas notable contribución fue comprender las cantidades inconmensurables que tanto perturbó a los pitagóricos. Se cree que sus trabajos en Matemática son la base de los Libros V, VI y XII de Elementos de Euclides.

La Academia fue un centro en cual varios de sus miembros se destacaron en la historia de la Matemática y, en particular, en Geometría, (todas las fechas son aproximadas, no existe un dato exacto para ellas):

- **Teodoro de Cirene** (465 *a.C.* – 398 *a.C.*),
- **Teaetetus** (417 *a.C.* – 369 *a.C.*),
- **Meneacmus** (380 *a.C.* – 320 *a.C.*),
- **Dinostrato** (390 *a.C.* – 320 *a.C.*), hermano de Meneacmus,
- **Autólicos de Pitane** (360 *a.C.* – 290 *a.C.*).

Con la muerte de **Alejandro de Macedonia, el Grande**, (356 *a.C.* - 323 *a.C.*) alumno de Aristóteles y Meneacmus, el territorio conquistado fue dividido entre sus generales. Alejandría, ciudad fundada por él, quedó en el territorio gobernado por Ptolomeo I, tierras

correspondientes al actual Egipto. Este general creó el Museo de Alejandría \*, y lo transformó en una Universidad insuperable en su tiempo, en términos de conocimiento. Para dar una grandezza de la importancia de este centro, noticias de la época hablaban de una biblioteca de 500 mil volúmenes. Muchos de los intelectuales se mudaron para allí, entre ellos Euclides.

---

## 1.2. Los Elementos de Euclides

---

Toda esta construcción de la mente humana, hecha en el transcurso de 300 años, quedó registrada en la obra monumental titulada *Elementos*, constituida en 13 libros (capítulos). En ella, están demostradas 465 proposiciones deducidas de un sistema axiomático en una forma didáctica, cuyo único rival en número de traducciones es la Biblia. Tal obra expone sistemáticamente toda la Matemática básica conocida en su tiempo. Debemos tal hazaña al matemático griego **Euclides** (330 *a.C.* – 270 *a.C.*) cuya biografía es prácticamente desconocida. Probablemente estudió en la Academia y se mudó para Alejandría por invitación de Ptolomeo I para ser el primer profesor de Matemática del Museo. Escribe cerca de doce obras pero solamente cinco de ellas sobrevivieron en el tiempo. Su libro titulado *Óptica* (Stoichia) fue uno de los primeros trabajos escritos sobre perspectiva. A modo de ilustración listaremos los títulos de los libros que componen la obra de Euclides, que no es apenas una simple compilación de resultados conocidos; se supone que varias proposiciones y pruebas son del propio Euclides y, posiblemente, algunas de ellas fueron aumentadas posteriormente. La obra no trata apenas de Geometría, incluye también resultados de Aritmética. Del Libro IX quedó para la posteridad una de las más bellas y elegantes pruebas de Matemática, la prueba del teorema: *Existen infinitos números primos*. Ciertamente, un autor de una obra como los Elementos debería ser un matemático de primera línea. La leyenda lo describe como un profesor excepcional, siendo caricaturizado con la figura de un anciano bondadoso. Su propuesta didáctica para él la enseñanza de la Matemática fue espectacular. Todavía hoy, 2300 años después, es casi que íntegramente adoptada en las Escuelas de todo el mundo.

---

\*Dedicado a las nuevas musas griegas: Calíope (Poema épico, la musa más importante), Clio (Historia), Erato (Poemas de amor), Euterpe (Música), Melpomene (Tragedia), Polinia (Música segunda), Therpsícore (Danza), Talia (Comedia), Urania (Astronomía).

**Los Elementos:**

- Geometría plana:
  - I. Fundamentos de la geometría plana.
  - II. La geometría de rectángulos.
  - III. La geometría de los círculos.
  - IV. Polígonos regulares en el círculo.
  - V. La teoría general de magnitudes y proporciones.
  - VI. La geometría plana de figuras semejantes.
- **Teoría de números:**
  - VII. Aritmética básica.
  - VIII. Números y proporciones.
  - IX. Números y proporciones; La teoría de números pares e impares, números perfectos.
- **Números irracionales:**
  - X. Segmentos de recta inconmensurables.
- **Geometría Sólida:**
  - XI. Fundamentos de la geometría sólida.
  - XII. Áreas y volúmenes; método de Exhaustion de Eudoxos.
  - XIII. Los sólidos de Platón.

El aspecto que nos interesa es el sistema axiomático adoptado por Euclides:

## 1. Nociones comunes:

- i) Cosas que son iguales a una misma cosa también son iguales;
- ii) si iguales son adicionados a iguales, los totales son iguales;
- iii) si iguales son sustraídos de iguales, los restos son iguales;

- iv) cosas que coinciden una con la otra son iguales;
- v) el todo es mayor que cualquiera de sus partes.

2. Axiomas de la geometría euclidiana plana: \*\*

- i) Incidencia: podemos trazar una recta ligando cualesquiera dos puntos;
- ii) toda recta limitada puede prolongarse infinitamente en la misma dirección;
- iii) podemos trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio;
- iv) todos los ángulos rectos son iguales entre sí;
- v) por un punto exterior a una recta podemos trazar una única recta paralela a la recta dada.

3. Definiciones: 23 definiciones que hablan con respecto a punto, recta, ángulo, círculo, triángulo, cuadrilátero, etc.

La escuela de Alejandría sobrevivió hasta 450 d.C. y contribuyó enormemente con el desarrollo de la Geometría pos-Euclides, siendo su mayor exponente el ex-alumno siciliano **Arquímedes de Siracusa** (287 a.C. - 212 a.C.) considerado uno de los tres mayores matemáticos de todos los tiempos, junto con el inglés **Isaac Newton** (1643 - 1727) y el alemán **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855). Su método para cálculo de áreas guarda mucha semejanza con el Cálculo Integral utilizado en los días actuales. Otros notables de Museo fueron el ex-alumno **Apolonio de Perga** (262 a.C. - 190 a.C.), con el estudio de las cónicas, y un profesor del Museo, **Papus de Alejandría** (290 d.C.- 350 d.C.) que amplió el trabajo de Euclides, con resultados cuyo espíritu era totalmente diferente del que fue hecho hasta entonces, demostrando teoremas nuevos relacionados apenas con los axiomas de incidencia. Papus fue el último gran geómetra griego y su trabajo es considerado la base de la Geometría Proyectiva. La muerte de **Hipatia de Alejandría** (370 d.C. - 415 d.C.) profesora de Museo y primera mujer (después de Teano, esposa de Pitágoras) a destacarse

---

\*\* El quinto postulado es conocido como Axioma de Playfair. En el libro Elementos es puesto un axioma equivalente: *Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.*

en el estudio la Matemática, marca los inicios de la caída de aquel centro como polo intelectual y el periodo de las tinieblas para la civilización occidental, Hipatia tiene una muerte cruel, fue descarnada con conchas de ostras y quemada en plaza pública por una turba de cristianos incentivada por el Patriarca de Alejandría, Cirilo. Cien años después de la muerte de Hypatia, en 527 d.C., la Academia Platónica de Atenas ya con 900 años, igual que otras escuelas, fue cerrada y sus miembros dispersados por Justiniano, Emperador Romano Católico. Y por muchos siglos el desarrollo de la Matemática estuvo a cargo de otras civilizaciones, como la Árabe cuya mayor contribución fue el Álgebra. El conocimiento geométrico quedó, prácticamente, estancado y olvidado por diez siglos. Se cree que con la fuga de los profesores griegos para Pérsia, la civilización árabe tomó el impulso relatado en los libros de Historia.

---

### 1.3. Los Axiomas de Hilbert

---

Dieciocho siglos después de la publicación de los Elementos (1482), en pleno Renacimiento, comenzaron a surgir las primeras traducciones de los Elementos para las lenguas europeas modernas, pasando aquella obra a recibir un estudio crítico para los interesados. Con la retomada del estudio de los Elementos de Euclides surgieron varios resultados sorprendentes que tenían relación apenas con la idea de incidencia. Por ejemplo, **Girard Desargues** (1591 - 1661) y **Blaise Pascal** (1623 - 1662) demostraron muchas propiedades no métricas de las cónicas que eran bien diferentes de las examinadas por Apolonio dieciocho siglos antes. El estudio de geometrías con pocos axiomas perduró por dos siglos más, a veces de forma esporádica y desorganizada, otras con intensidad e imaginación. Como telón de fondo quedaba el postulado de las paralelas, la duda del siglo era si él era o no un axioma euclidiano independiente de los demás, siendo el más intrigante tópico de interés de los geómetras. Muchos creían que podía ser un teorema. No es. A lo largo de la historia muchas demostraciones, erróneas es claro, fueron presentadas, inclusive por matemáticos importantes en su época. Todavía en el tiempo de Euclides, Ptolomeo I creyó que había dado una demostración para el Axioma de las Paralelas y todo llevo a creer que el propio Euclides era reacio en aceptarlo como postulado, utilizándolo apenas a partir de la 29ª proposición de los Elementos. Algunas tentativas fueron dramáticas, como aquella hecha por el padre jesuita italiano **Giovanni Saccheri** (1667 - 1773). Simplemente él demostró todos los resultados básicos de otra geo-

metría, la hoy llamada Geometría hiperbólica, mas no tuvo la osadía para creer que podrían existir otros tipos de modelos geométricos para la naturaleza diferentes de la Geometría Euclidiana. En la mitad del siglo XIX ya habían sido recolectadas varias hipótesis asumidas por Euclides y utilizadas en sus argumentaciones sin que hubiesen tenido una demostración o una axiomatización anterior. Listemos algunas de ellas:

4. Hipótesis no mencionadas más utilizadas por Euclides

- i) Rectas son conjuntos ilimitados;
- ii) vale el postulado de Dedekind: las rectas son continuas,
- iii) en el Axioma ii) la recta que podemos trazar ligando dos puntos es única;
- iv) en el Axioma ii) puede continuarse una recta de una única manera;
- v) Axioma de Pasch: Sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos no colineales y  $r$  una recta que no contiene ninguno de estos puntos. Si  $r$  corta el segmento  $\overline{AB}$  entonces ella también corta el segmento  $\overline{BC}$  o el segmento  $\overline{AC}$ .

En 1898-99, el matemático alemán **David Hilbert** (1862 -1943) presentó un sistema axiomático completo para la Geometría Euclidiana plana y espacial en una serie de conferencias en la Universidad de Göttingen. Esto significaba que todos los resultados de los Elementos permanecían válidos asumiendo sus postulados. Su sistema axiomático es uno de los marcos de la Historia de la Matemática pues organiza los fundamentos de la Geometría y el Análisis. La comparación más próxima que puede ser hecha es con la organización ocurrida en Álgebra al ser introducida la noción de grupo.

Presentaremos a seguir un extracto de los axiomas para la llamada Geometría Euclidiana plana, así como también los siguientes hechos:

1. La posible existencia de un conjunto no vacío denotado por  $\mathbb{E}^2$ , que no es llamado conjunto mas si plano, término listado como indefinido en el sistema axiomático.
2. Elementos del plano, que no son llamados elementos, más si puntos, por lo tanto otro término indefinido.
3. Subconjuntos de  $\mathbb{E}^2$  llamados rectas, término indefinido.

Observe que sustituimos términos indefinidos por otros, tales como conjunto, elemento, etc. Las anteriores explicaciones son apenas para comprender la notación dentro del texto.

I. Términos indefinidos.

Punto, recta, plano, pertenece, está entre, congruencia.

II. Axiomas de incidencia.

- a) Para cualesquiera dos puntos existe una única recta que contiene estos puntos.
- b) Existen por lo menos tres puntos que no pertenece a una misma recta.

III. Axiomas de orden.

Se establecen cuatro axiomas relacionados con la ordenación de los puntos de una recta.

IV. Axiomas de congruencia.

Se establecen cinco axiomas relacionados a congruencia de ángulos, segmentos y triángulos.

V. Axioma de las paralelas.

Por un punto fuera de una recta se puede trazar una única recta paralela a la recta dada.

VI. Axiomas de continuidad.

- a) Completitud de una recta.
- b) Propiedad arquimediana de una recta.

Algunos otros sistemas axiomáticos equivalentes al de Hilbert fueron propuestos. Entre los que se destacan el propuesto por **George David Birkhoff** (1864 - 1944), con fuerte énfasis en el concepto de distancia, y otro conocido por la sigla SMSG (School Mathematics Study Group) hecho en la década de 1960 por un equipo de profesores americanos dirigidos por Edward G. Begle. Aquí, una vez más, hechos políticos interfieren en los caminos de la Matemática. Con el lanzamiento del primer satélite artificial de la extinta Unión Soviética, el gobierno americano decidió reformular la enseñanza de las Ciencias en las escuelas, nombrando y financiando grupos de estudios para elaborar las propuesta de la reforma. SMSG

fué uno de los grupos. Luego, después de fijados los axiomas de Hilbert, el matemático americano **Oswald Veblen** (1880 - 1960) estableció los axiomas de la Geometría Proyectiva en su obra **Projective Geometry** en conjunto con John Wesley Young. Actualmente, el inglés **H. M. S. Coxeter** (1907 - ) es considerado el mayor geómetra sintético, el cual posee varios libros publicados en esta área.

---

## 1.4. Geometría Proyectiva: una introducción

---

Desde la antigüedad, el hombre ha sentido siempre la necesidad de representar gráficamente el entorno que le rodea, como lo demuestran los dibujos encontrados en las cuevas prehistóricas. Dichas representaciones, inicialmente simbólicas y carentes de profundidad, trazadas con escuetas líneas sobre las rugosas paredes de sus salones, fueron con el tiempo perfeccionándose hasta incorporarse en murales, y objetos diversos (jarrones, vasos, platos, etc.) como elemento, no sólo decorativo, sino como reflejo de las costumbres y ciertos acontecimientos históricos. Así, podemos encontrar en las civilizaciones Griega y Romana, los primeros intentos de representación con una cierta profundidad, inicialmente mediante el empleo de la técnica de combinar diferentes proyecciones, adoptando para cada elemento del conjunto la más adecuada; técnica de la que es un claro ejemplo la representación egipcia del cuerpo humano en el que se representan los miembros de perfil y el torso de frente.

La Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento ya que con el impulso de las artes y las incipientes tecnologías, comienza la preocupación por el desarrollo de la perspectiva. Luego, en el siglo XVII se recuperarán ideas de los matemáticos griegos (las secciones cónicas, por ejemplo), pero son sin duda los pintores renacentistas los que fundamentan esta rama de las Matemáticas al conseguir plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales tal como son, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media. Este arte es principalmente abordado por arquitectos y pintores como **Leonardo da Vinci**, **Rafael Sanzio**, **Filippo Brunelleschi**, **Alberto Durer**, etc.

En el Renacimiento se investiga la visión que nuestro ojo tiene de una figura cuando la vemos en distintas pantallas colocadas entre ella y nosotros. Así nacen la perspectiva y el

estudio de las proyecciones y las secciones.

El posterior desarrollo de la técnica, y la consiguiente división del trabajo provocada por la Revolución Industrial, hizo necesario unificar los dispersos conocimientos para lograr el entendimiento entre los proyectistas y los constructores, proceso que culminó en 1795 con la publicación de la obra de Gaspard Monge “Geometría Descriptiva”.

# Capítulo

# 2

## El Plano Proyectivo y sus Transformaciones

El plano proyectivo real es una superficie de dos dimensiones que posee un gran número de definiciones equivalentes. Clásicamente el plano proyectivo real es definido como el espacio de las rectas que pasan por el origen en el espacio euclidiano tri-dimensional  $\mathbb{R}^3$ . Este espacio es bastante difícil de imaginar, así que fueron desarrolladas otras representaciones para él.

Dado que una recta a través del origen es determinada por su dirección, podemos considerar el espacio de los vectores de dirección unitarios, el cual es justamente la esfera unitaria centrada en el origen. Ahora cada vector y su opuesto determinan la misma recta (se puede apuntar a lo largo de la recta en cualquier dirección) necesitamos identificar cada punto sobre la esfera con su opuesto con miras a representar el plano proyectivo real sin redundancias. La identificación de puntos opuestos sobre la esfera es llamada la *aplicación antipodal*, la esfera módulo la aplicación antipodal es el plano proyectivo real.

Ahora, dado que cada punto en el hemisferio sur de la esfera es identificado con uno en el hemisferio norte, podemos desechar uno de los hemisferios, digamos el inferior, así cada punto en el hemisferio superior determina, en forma única, una recta en el espacio. Lo que resta es la identificación de los puntos sobre el ecuador. Dado que el hemisferio superior es topológicamente un disco, podemos aplastarlo sobre el plano ecuatorial para obtener la siguiente representación del plano proyectivo real: Un disco con los puntos opuestos en la frontera identificados.

Esta presentación final al menos tiene la ventaja de hacer parecer el plano proyectivo una superficie de dos dimensiones (esta hecha de un pedazo de plano). Si tratamos de obviar estas identificaciones, correremos el riesgo de introducir autointersecciones.

Cualquier curva cerrada en el plano proyectivo que no interseque la frontera del círculo del disco debe limitar una región, y por lo tanto es un ciclo trivial<sup>\*</sup>, luego podríamos pensar que en el plano proyectivo se cumple el teorema de Jordan.<sup>\*\*</sup> Pero no es así, ya que si tomáramos una curva cerrada  $A$  que comience en un punto de la frontera y va a través de los puntos opuestos (línea gruesa en las Figuras 2.1 y 2.2) esta forma una curva cerrada no trivial, si tomamos dos puntos  $a$  y  $b$  uno a cada lado de esta curva, podríamos unirlos por medio de una recta  $r$  que no atraviesa a  $A$  haciendo uso de un punto sobre la frontera del disco (ver Figura 2.1).

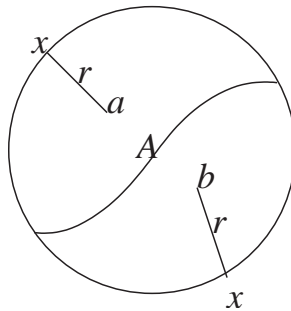


Figura 2.1: Hexagrama místico de Pascal

<sup>\*</sup>Una colección de una o más curvas cerradas sobre una superficie es llamada un ciclo o más generalmente un 1-ciclo dado que es 1-dimensional. Un ciclo es trivial si es la curva frontera de alguna región de la superficie, y es no-trivial si no limita una región. Por ejemplo, sobre una esfera, cada curva limita una región, luego todos los ciclos son triviales, pero sobre el toro, una curva que este alrededor del hueco no limita una región, y por lo tanto es no trivial

<sup>\*\*</sup>Teorema de Jordan Camille (1838-1922) **Toda curva cerrada simple divide el plano en dos regiones**

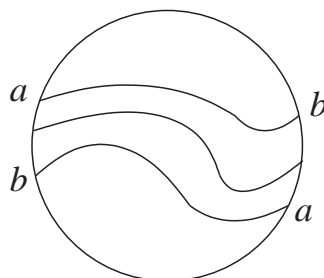


Figura 2.2: Vecindad en la banda de Möbius

Además observemos que una pequeña vecindad (gris) (ver Figura 2.2) de esta curva cerrada forma una banda de Möbius, la banda o cinta de Möbius es un franja con un giro de media vuelta. Se puede hacer una tomando una delgada cinta de papel y pegar los dos bordes mas cortos colocando la parte de encima de una en la parte de abajo de la otra.

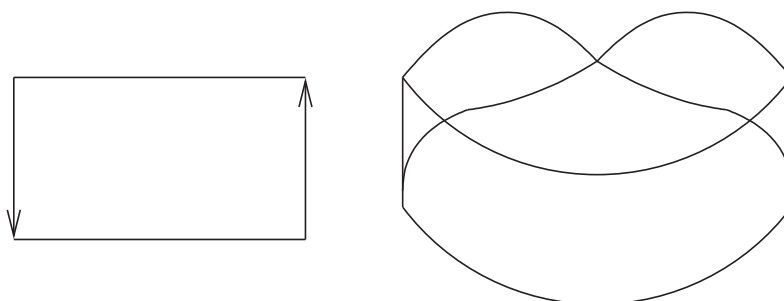


Figura 2.3: Banda de Möbius

La banda de Möbius tiene una única curva de frontera y un único lado. Esto es no orientable, lo cual significa que contiene un camino por el cual es imposible definir un lado izquierdo y derecho o adentro y afuera en una forma global consistente.

De hecho, la banda de Möbius es la unidad fundamental de no-orientabilidad, esto es, decimos que una superficie es no orientable si contiene una banda de Möbius. o sea una superficie no orientable por lo tanto el plano proyectivo es no orientable. El resto de la

superficie (blanco) forma un disco topológico (una vez la identificación de la frontera es hecha), así el plano proyectivo real es una banda de Möbius con un disco pegado a lo largo de su frontera. Esto hace el plano proyectivo una de las superficies fundamentales, en el sentido de que es la menor superficie no-orientable. Bajo la operación de suma conexa<sup>\*\*\*</sup>, un disco es removido, para formar la suma conexa de una superficie con el plano proyectivo es simplemente adicionar una banda de Möbius a la superficie. Así el plano proyectivo es fundamental para suma conexa también.

El postulado V equivale a la afirmación de que un punto propio y uno impropio<sup>\*\*\*\*</sup> determinan una sola recta, proposición válida en el plano proyectivo. Es decir, la geometría proyectiva se edifica con los mismos elementos de la geometría euclidiana; aquélla podría estudiarse por entero dentro del marco de esta última, tan solo complicando los enunciados. Esta observación es muy importante desde el punto de vista de la fundamentación de la geometría. Según ella, al construir la geometría proyectiva no podrá encontrarse en ningún momento contradicción lógica si no la hay en la geometría euclidiana. En la Geometría Euclidiana se postula la existencia de rectas que no se intercepta, cuando esto ocurre se dice que las rectas son paralelas. Tal postulado, contradice la realidad que aprendemos visualmente. Cuando estamos en una gran autopista en línea recta, sus lados son asumidos paralelos, más nuestra sensación nos dice que ellas concurren en un punto muy lejano, llamado punto de fuga. En el punto de fuga las dos rectas se intersectarán. Si existe otra autopista en línea recta, cruzando la primera, al mirar en la dirección de esta otra, veremos el mismo fenómeno, ahora, el punto de fuga es diferente. Este fenómeno es captado por una fotografía o por una pintura, sugiriendo que la Geometría Euclidiana es un modelo de la realidad no tan próximo de nuestras sensaciones cuanto estamos acostumbrados a pensar. Y si acrecentáramos los puntos de fuga, esto es, si asumiéramos que cualquier dos rectas se interceptan en un único

---

<sup>\*\*\*</sup>Suma Conexa: La suma conexa de dos superficies es formada quitando un disco de cada una de las superficies y conectando los dos huecos por medio de un tubo. La operación suma conexa es denotada por medio del símbolo #, como en " $K\#T$ ". Esta operación tiene como módulo o identidad a la esfera,  $S$ , así  $M\#S = M$  para cualquier superficie  $M$ . Suma conexa con un toro es equivalente a agregar una agarradera. Cada superficie es la suma conexa de la esfera o el plano proyectivo o la botella de Klein con cero o mas toros.

<sup>\*\*\*\*</sup>Toda recta del plano define un punto impropio, el cual es el mismo para todas las rectas paralelas, y distinto para rectas no paralelas, en la sección 2.1 se define mejor este punto.

punto, que tipo de espacio geométrico tenemos? Construiremos un modelo para geometría bidimensional sin rectas paralelas, la *Geometría Proyectiva o Geometría elíptica Simple* (vea [2]).

Iniciaremos con la construcción del plano proyectivo y cuando estemos familiarizados con él, recuperaremos la idea surgida de las sensaciones visuales.

---

## 2.1. El plano proyectivo, una visión geométrica.

---

**Definición 1.** *Se llama plano euclidiano al plano de la geometría euclidiana, es decir, al plano que utiliza Euclides en sus Elementos, y para el cual valen todos los postulados establecidos en los mismos. Es el plano ordinario de la geometría elemental.*

En el plano euclidiano es cierto que “dos puntos determinan una recta”. En cambio no lo es la propiedad dual \*\*\*\*\* “dos rectas determinan un punto”, puesto que, si bien cuando las rectas se cortan puede decirse que determinan su punto de intersección, cuando son paralelas no determinan ningún punto. Para obviar esta falta de simetría o dualidad, resulta cómodo ampliar el plano con nuevos puntos, llamados *puntos impropios o puntos del infinito*, que serán aquellos determinados por rectas paralelas.

**Definición 2.** *Toda recta del plano define un punto impropio, el cual es el mismo para todas las rectas paralelas, y distinto para rectas no paralelas.*

Por consiguiente, dar un punto impropio equivale a dar una recta, o sea, una dirección en el plano. Dos rectas paralelas determinan el mismo punto impropio (equivale a decir que tienen la misma dirección). Con este convenio, el enunciado “dos rectas determinan un punto” tiene validez general. Puesto que en el caso de dos rectas no paralelas el punto que determinan es su intersección (que pertenece a ambas), también en el caso de puntos impropios se dice, por comodidad de lenguaje, que ellos “pertenecen” a la recta que los determina. De esta manera cada recta tiene un punto impropio y sólo uno. El conjunto de

---

\*\*\*\*\* Propiedades duales (en el plano) son las que se obtienen una de la otra permutando entre si las Palabras “Punto” y “recta” y también las expresiones “recta que une” (dos Puntos) e “intersección” (de dos rectas). Como los axiomas usuales de la geometría proyectiva del plano son duales, dado un teorema su expresión dual también es un teorema.

los puntos impropios tiene un único punto común con cualquier recta del plano, y como esta propiedad, en el caso de puntos propios, caracteriza a las rectas, se conviene en decir que los puntos impropios forman una recta, llamada *recta impropia* o *recta del infinito* del plano.

**Definición 3 (Primera definición).** *Se llama plano proyectivo al plano euclidiano ampliado con los puntos impropios.*

Una imagen muy útil del plano proyectivo se obtiene de la manera siguiente: Sea el plano  $\pi$  y un punto exterior  $O$  ( ver Figura 2.5). Consideremos el conjunto de las rectas y planos del espacio que pasan por  $O$  (se llama *radiación* de vértice  $O$ ). Se tiene:

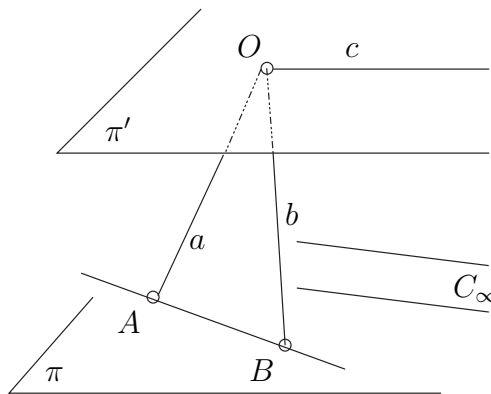


Figura 2.4: Plano Proyectivo

La radiación de vértice  $O$  constituye una representación del plano proyectivo, con el convenio de llamar “puntos” a las rectas de la radiación y “rectas” a los planos de la misma. En efecto, al cortar con el plano  $\pi$ , a cada recta  $a$  que corte a  $\pi$  le corresponde el punto  $A$  de intersección, y a cada plano  $(a,b)$  determinado por dos rectas, la recta  $AB$  determinada por los puntos correspondientes. Los puntos impropios de  $\pi$  corresponden a las rectas de la radiación contenidas en el plano  $\pi'$ , paralelo a  $\pi$ . A rectas paralelas de  $\pi$  les corresponde una misma recta paralela que pasa por  $O$ , contenida en el plano  $\pi'$ , o sea, un solo “punto” impropio. La recta impropia corresponde a  $\pi'$ . La radiación de vértice  $O$ , excluido el plano  $\pi'$ , constituye una representación del plano euclidiano.

Obsérvese que al definir el plano proyectivo no se hace más que introducir los elementos impropios como una manera cómoda de unificar enunciados, pero con ello no se alteran los

postulados que relacionan los elementos punto y recta de la geometría euclidiana.

**Axiomas de la Geometría Projectiva** (recordar los axiomas de la geometría euclidiana página 9)

I. Términos indefinidos

Punto, recta, plano, pertenece.

II. Axiomas de incidencia.

V Axioma de las paralelas.

Sea  $l$  una recta y  $A$  un punto no en  $l$ . Entonces toda recta que incide en  $A$  intercepta  $l$ .

---

## 2.2. El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ , una visión algebraica

---

Inicialmente construiremos el conjunto que será el plano proyectivo. Considere el conjunto obtenido de  $\mathbb{R}^3$  al retirar el vector nulo  $o = (0, 0, 0)$ . En un lenguaje más informal se dice que este conjunto es  $\mathbb{R}^3$  perforado en el origen (o simplemente perforado) y la notación convencional para indicarlo es  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ . Al decir que  $\Gamma$  es un “plano” en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  queda subentendido que este es la intersección del plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ . Por tanto, si el contiene el origen será un plano perforado. Los mismos comentarios valen al usar el término “recta” en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ . Ella puede ser o no perforada, caso incida o no en el origen. En el conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  (conjunto de vectores no nulos), definimos la relación de equivalencia

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{si existe un número real } \lambda \neq 0 \text{ tal que } v = \lambda w.$$

Considere el conjunto cociente

$$\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}) / \sim.$$

**Definición 4 (Segunda definición).** Llamaremos  $\mathbb{RP}^2$  al plano (proyectivo) y sus elementos de puntos (proyectivos).

Un elemento (clase de equivalencia) del plano proyectivo es llamado el *punto proyectivo*, o simplemente punto, y será denotado por una letra minúscula con una barra sobrepuesta, por ejemplo,  $\bar{v}$ , donde  $v$  es un vector no nulo de  $\mathbb{R}^3$ . Como sabemos,  $\bar{v}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  y por la definición de la relación de equivalencia asumimos que el conjunto que está nominado es el conjunto de los múltiplos no nulos de  $v$ ,

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda \neq 0\}.$$

En otras palabras, el subconjunto  $\bar{v} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  es una recta, perforada. La aplicación cociente es la función denotada y definida por

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad \Psi(v) = \bar{v}.$$

Para disminuir el esfuerzo de la lectura, en vez de usar largas barras sobre triplas para designar los puntos del plano proyectivo, utilizaremos una notación más simple y conveniente. Sea  $v = (v_1, v_2, v_3)$  un punto de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ . La notación usual sería:

$$\bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)}$$

para indicar la clase de equivalencia de  $v$ . En vez de eso, seguiremos la notación clásica, ya conocida, para indicar elementos del plano proyectivo, a saber,

$$\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3).$$

Tal tripla recibe un nombre especial: *coordenadas homogéneas* de  $\bar{v}$ . Su utilización trae grandes ventajas en relación con otra notación, como veremos.

### 2.3. Relación entre $\mathbb{RP}^2$ y $\mathbb{S}^2$

Para entender mejor el plano proyectivo lo relacionaremos con la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2$ . Esta relación queda establecida de la siguiente manera. Para cada clase de equivalencia  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3) \in \mathbb{RP}^2$  podemos determinar dos elementos de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  en la clase de equivalencia de  $\bar{v}$ . Ellos son los únicos vectores unitarios múltiplos de  $v$ , que se asemejan,

$$u = \frac{1}{\|v\|}v \quad \text{y} \quad -u = -\frac{1}{\|v\|}v$$

La división por la norma del vector  $v$  está bien definida pues  $\|v\| \neq 0$  y como  $u$  y  $-u$  son múltiplos no nulos de  $v$  valen las igualdades  $\bar{v} = \bar{u} = \overline{-u}$ . Por lo tanto, tenemos una función proyección sobreyectiva, que es la restricción de la función proyección antes definida,

$$\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad \Psi_0(u) = \bar{u},$$

tal que el conjunto pre-imagen de cada punto  $\bar{v}$  es formado por dos puntos de  $\mathbb{S}^2$ ,

$$\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{1}{\|v\|}v, -\frac{1}{\|v\|}v \right\}.$$

La anterior construcción nos da una nueva forma de ver el plano proyectivo que es obtenido al identificar los puntos antipodales de la esfera unitaria. Por tanto, podemos construir el plano proyectivo definiendo una relación de equivalencia con la esfera unitaria del siguiente modo: sean  $u, v \in \mathbb{S}^2$ . Decimos que  $u \sim v$  si, y solamente si,  $u = v$  o  $u = -v$ . De esta forma  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$  \*\*\*\*\* . Continuemos intentando imaginar como es el plano proyectivo. Por lo visto, cualquier punto  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  puede ser representado por un punto  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$  tal que  $u_3 \geq 0$ . Recordemos que el término “representa el mismo elemento” significa que los dos puntos determinan la misma clase de equivalencia,  $\bar{u} = \bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ . Por tanto, si consideramos el hemisferio norte de la esfera unitaria,

$$\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\},$$

la restricción de la función proyección  $\Psi_o : \mathbb{H}_{e_3} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  es sobreyectiva. Pueden ocurrir dos situaciones para la pre-imagen de un punto proyectivo  $\bar{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$  por  $\Psi_o$ ,

1.  $\Psi_o^{-1}(\bar{u}) = \{u\}$ , si  $u_3 > 0$  o,
2.  $\Psi_o^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$ , si  $u_3 = 0$ .

Considere la recta elíptica  $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$  (esta recta elíptica es el gran círculo obtenido por la intersección de la esfera unitaria con el plano  $xy$ , o,  $z = 0$ ). La imagen de esta recta elíptica  $r_{e_3}$  por la proyección  $\Psi_o$  es llamada el conjunto de *puntos ideales*,  $I_\infty$ . Observe que la proyección  $\Psi_o$  aplica el conjunto  $\mathbb{H}_{e_3}/r_{e_3}$ , biunívocamente sobre  $\mathbb{RP}^2/I_\infty$ .

\*\*\*\*\* En este caso, el símbolo de igualdad indica que existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos contruidos de una forma y de otra. Tal correspondencia es establecida de modo natural, como fue indicado.

## 2.4. Rectas proyectivas

En la geometría elíptica, los círculos máximos de  $\mathbb{S}^2$  son equivalentes con las rectas de la Geometría Euclidiana, en el sentido de que la distancia recorrida sobre la esfera unitaria, para desplazarse entre dos de sus puntos, es minimizada cuando la trayectoria es un arco del círculo máximo que contiene estos dos puntos. La misma pregunta es da para el plano proyectivo. ¿Cuál es la trayectoria de menor medida que podemos recorrer en  $\mathbb{RP}^2$  para desplazarnos de un punto  $\bar{v}$  a un punto  $\bar{w}$ ? La pregunta no tiene sentido si supiéramos cual es la función de distancia que estamos considerando en el espacio proyectivo. Para enfatizar que en nuestro caso la Geometría proyectiva busca estudiar apenas problemas de incidencia, sin involucrar los conceptos de congruencia y de orden, dejamos para lectura complementar del capítulo la presentación de la función distancia clásica considerada en el plano proyectivo. Con aquella distancia tenemos la respuesta, debemos recorrer una trayectoria sobre la imagen de un gran círculo de  $\mathbb{S}^2$  por la aplicación proyección  $\Psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que contiene los puntos  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  Esto nos lleva a fijar el siguiente término.

- Un subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  es una recta proyectiva si  $r$  forma la imagen de la recta elíptica por la proyección  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Una definición equivalente con planos perforados es:

- Un subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  es una recta proyectiva si  $r$  forma la imagen de un plano perforado  $\Gamma$  por la proyección  $\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Existe un modo práctico de nominar rectas proyectivas. Como sabemos, un plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  que contiene  $0 = (0, 0, 0)$  queda determinado por su vector normal  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , que es un vector no nulo. Resaltamos tal propiedad al utilizar la notación  $\Gamma_\eta$ . En este caso, la ecuación lineal que define el plano es

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0.$$

La siguiente observación nos induce a pensar inmediatamente en el plano proyectivo. Todo múltiplo no nulo de  $\eta$ ,  $\lambda\eta = (\lambda\eta_1, \lambda\eta_2, \lambda\eta_3)$ , donde  $\lambda$  es un escalar diferente de cero,

también determina el mismo plano que contiene al origen, asimismo, cualquier otra ecuación lineal que define aquel plano es de la forma

$$\Gamma_\eta : \lambda\eta_1x_1 + \lambda\eta_2x_2 + \lambda\eta_3x_3 = 0.$$

Lo anterior nos permite considerar la clase de equivalencia  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ . Guardemos este punto proyectivo  $\bar{\eta}$ , por un momento. Por otro lado, la intersección de  $\Gamma_\eta$  con la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  determina un círculo máximo y todo círculo máximo es obtenido de este modo. Por definición, la imagen de este círculo máximo por la proyección  $\Psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  es una recta proyectiva  $r$ . Los dos factores juntos nos llevan a fijar la siguiente notación. Si escribiéramos la expresión,

$$\text{la recta proyectiva} \quad r_{\bar{\eta}}$$

nos estaremos refiriendo a la recta proyectiva  $r \subset \mathbb{RP}^2$  determinada por la proyección del círculo máximo  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ . Por ejemplo,  $\bar{e}_3 = (0 : 0 : 1)$  indica la recta proyectiva  $r_{\bar{e}_3}$  que es la imagen, por la función proyección, del gran círculo obtenido por la intersección del plano  $xy$  con la esfera unitaria. Asimismo,  $r_{\bar{e}_3}$  es la recta de puntos ideales,  $I_\infty$ .

---

## 2.5. Plano proyectivo dual

---

Consideremos el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$  y el conjunto de sus partes,  $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$ . Escojamos el subconjunto  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$  definido por

$\mathcal{R}$  es el conjunto formado por todas las rectas proyectivas.

Para construir un modelo geométrico que represente el conjunto  $\mathcal{R}$ , necesitamos hacer una abstracción: consider cada recta proyectiva como un punto de un conjunto. El factor principal utilizado en la construcción ya lo presentamos en la anterior sección,

*cada punto proyectivo  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$  determina una única recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$*

*y cada recta proyectiva  $r \subset \mathbb{RP}^2$  determina un único punto proyectivo  $\bar{\eta}$ .*

Estos comentarios nos permiten reescribir el conjunto  $\mathcal{R}$  de la forma

$$\mathcal{R} = \{r_{\bar{\eta}}; \quad \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2\},$$

y nos, permite establecer una correspondencia biunívoca entre  $\mathcal{R}$  y  $\mathbb{RP}^2$ ,

$$r_{\bar{\eta}} \longleftrightarrow \bar{\eta}.$$

Luego, *existen tantas rectas proyectivas cuantos puntos proyectivos*. Siendo así, tomaremos el conjunto  $\mathbb{RP}^2$ , como modelo geométrico para  $\mathcal{R}$ . Esto causa un problema: ¿cómo distinguir dentro de la lectura un punto proyectivo de una recta proyectiva? Como primera medida, para que la confusión no ocurra, el conjunto de las rectas proyectivas será indicado por  $\mathbb{RP}^{2*}$  y denominado *plano proyectivo dual*. La segunda medida es designar los elementos de  $\mathbb{RP}^{2*}$  por las letras griegas minúsculas  $\bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ , etc. en lugar de  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}}$ , etc. respectivamente. Asimismo

$$r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2 \quad \leftrightarrow \quad \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}.$$

---

## 2.6. Incidencia

---

Resumiendo la presentación hecha hasta el momento, tenemos:

- ★ Un conjunto llamado plano (proyectivo)  $\mathbb{RP}^2$ ;
- ★ elementos de este plano llamados puntos (proyectivos);
- ★ subconjuntos llamados rectas (proyectivas);
- ★ el concepto de una recta incide en un punto.

Por tanto, estamos preparados para verificar los axiomas de la Geometría Proyectiva en el conjunto  $\mathbb{RP}^2$ . Resaltamos las dualidades entre los enunciados envolviendo puntos proyectivos y rectas proyectivas.

Los dos últimos axiomas de incidencia son obvios. Para el primero, necesitamos de un criterio de incidencia entre una recta proyectiva y un punto proyectivo.

**Proposición 1 (Condición de incidencia).** *Dados un punto proyectivo  $\bar{\nu} \in \mathbb{RP}^2$  y una recta proyectiva  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}$ . Entonces*

$$\bar{\nu} \text{ y } r_{\bar{\eta}} \text{ son incidentes si, y solamente si, } \langle \bar{\nu}, \bar{\eta} \rangle = 0.$$

*Demostración:* Sea  $\Gamma_\eta$  el plano perforado en el origen cuyo vector normal es  $\eta$ . Veamos la siguiente secuencia de equivalencias,

$$\langle v, \eta \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pm v \in \Gamma_\eta \quad \Leftrightarrow \quad \pm \frac{1}{\|v\|} v \in r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v} = \overline{\frac{1}{\|v\|} v} \in r_{\bar{\eta}}.$$

Esto termina la demostración. ■

**Axioma** Para cada dos puntos distintos existe una única recta que los contiene.

La validez de este axioma será registrada en una proposición.

**Proposición 2 (Ecuación de una recta que pasa por dos puntos).** *Por dos puntos proyectivos distintos  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  incide una única recta proyectiva, a saber,*

$$\bar{\eta} = \overline{v \times w} \in \mathbb{RP}^{2*}$$

*Demostración:* Dados  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  dos puntos distintos, sean  $a$  y  $b$  elementos de  $\mathbb{S}^2$  que representan aquellos dos puntos proyectivos, respectivamente. Observe que  $b \neq -a$ , caso contrario tendríamos  $\bar{v} = \bar{w}$ , contradiciendo la hipótesis. Considere el único plano en  $\mathbb{R}^3$  contenido los puntos  $a, b$  y al origen, esto es, considere el plano  $\Gamma_\eta$ , donde  $\eta = a \times b$ . La intersección de este plano con la esfera unitaria determina el círculo máximo

$$r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta.$$

Por definición, el conjunto  $\Psi(r_\eta)$  es la recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$ , y como  $a$  y  $b$  son puntos de este círculo máximo, sus imágenes  $\Psi(a) = \bar{a} = \bar{v}$  y  $\Psi(b) = \bar{b} = \bar{w}$  pertenecen a aquella recta proyectiva. Para demostrar la unicidad, sean  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  supongamos que  $\bar{\eta}_1 \neq \bar{\eta}_2$ , entonces existen  $r_{\bar{\eta}_1}, r_{\bar{\eta}_2}$  incidentes en  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  por lo tanto podemos afirmar:

$$\langle v, \eta_1 \rangle = 0 \quad , \quad \langle v, \eta_2 \rangle = 0$$

$$\langle w, \eta_1 \rangle = 0 \quad , \quad \langle w, \eta_2 \rangle = 0,$$

luego,

$$0, v, w \in \Gamma_{\eta_1} \cup \{0\},$$

y

$$0, v, w \in \Gamma_{\eta_2} \cup \{0\},$$

entonces

$$\Gamma_{\eta_1} = \Gamma_{\eta_2} \Rightarrow \eta_1 \text{ es paralelo a } \eta_2 \text{ y,}$$

$$\eta_1 = \lambda\eta_2$$

así

$$\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2$$

absurdo. ■

En el plano proyectivo no existe paralelismo entre rectas proyectivas. Dos rectas distintas siempre concurren en un único punto.

**Proposición 3 (Concurrencia de dos rectas).** *Dos rectas proyectivas distintas,  $\bar{\eta}, \bar{\nu} \in \mathbb{RP}^{2*}$  tienen un único punto  $\bar{v}$  en común. Este punto es dado por*

$$\bar{v} = \overline{\eta \times \nu} \in \mathbb{RP}^2.$$

Se dice que tres puntos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  son colineales si existe una recta proyectiva incidiendo sobre los mismos. También existe un criterio simple para determinar si tres puntos del plano proyectivo son colineales.

**Proposición 4 (Ecuación de colinealidad para tres puntos).** *Dados tres puntos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  tenemos que*

$$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \text{ son colineales si, y solamente si, } \det[u, v, w] = 0.$$

*Demostración:* Vamos asumir que los puntos son distintos, caso contrario la demostración es trivial. Los puntos son (proyectivamente) colineales si, y solamente si, existe un plano  $\Gamma_\eta$  contenido el origen y tal que la imagen del círculo máximo  $\Gamma \cap \mathbb{S}^2$  por la función cociente  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  contiene estos puntos. Pero a su vez, tal ocurre si, y solamente si, el plano contiene los representantes (que son vectores no nulos y no colineales en  $\mathbb{R}^3$ ) de los tres

puntos,  $u, v$ , y  $w$ . Observando que un vector normal al plano es  $\eta = v \times w$  y que  $u$  es perpendicular a  $\eta$  podemos afirmar que  $u, v, w \in \Gamma$  si, y solamente si,

$$\det[u, v, w] = \langle u, v \times w \rangle = \langle u, \eta \rangle = 0.$$

■

## 2.7. Geometría Afín

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  es identificado con cualquier plano Euclidiano utilizándose un sistema de ejes Cartesianos. En esta sección identificaremos el espacio  $\mathbb{R}^2$  con una parte del plano proyectivo, que será llamado el Plano afín.

### Axiomas de la Geometría Afín

#### I Términos indefinidos

punto, recta, plano, pertenece, está entre.

#### II Axiomas de incidencia.

#### III Axioma de las paralelas.

El plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  es naturalmente identificado con el plano horizontal  $\Pi : z = 1$  (paralelo al plano  $xy$ ) en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  que a su vez, es un plano tangente a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  en el polo norte,  $p_n = (0, 0, 1)$ . La identificación es simple,

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, 1).$$

Ahora, cada punto  $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  determina un único punto en  $\mathbb{RP}^2$ , el cual será,  $(x : y : 1)$ . Considere el conjunto denotado y definido por

$$\mathbb{AP}^2 = \{(x : y : 1) \in \mathbb{RP}^2 ; (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Llamaremos  $\mathbb{AP}^2$  al plano (Afín) y sus elementos de puntos (Afines).

Observe que cualquier punto  $\bar{v} = (x : y : z)$  del plano proyectivo, con la tercera coordenada homogénea no nula,  $z \neq 0$ , está en el plano afín, el punto puede ser representado como

$\bar{v} = (\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$  y  $\bar{v}$  corresponde al punto  $(\frac{x}{z} : \frac{y}{z}) \in \mathbb{R}^2$ . Llamaremos esta identificación de *identificación afín*. En resumen, el plano afín es el plano proyectivo menos la recta ideal  $I_\infty$ . Como la recta ideal es la recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$ , con  $\bar{\eta} = (0 : 0 : 1)$ , podemos definirlo también en la forma

$$\mathbb{A}\mathbb{P}^2 = \{(u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2; u_3 \neq 0\}.$$

---

## 2.8. Rectas afines

---

Volvamos al problema de la sensación visual colocado en el inicio del capítulo: dos rectas que consideramos paralelas convergen para un punto de fuga. El plano afín capta esta sensación.

Llamaremos recta afín a la intersección de una recta proyectiva con  $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ .

Como cualquier recta proyectiva intercepta la recta ideal  $I_\infty$ , en un único punto, se sigue que una recta afín es una recta proyectiva menos su punto ideal.

El *plano afín dual*, el conjunto formado por las rectas afines, será denotado por  $\mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$  y una recta afín será indicada tanto por  $\bar{\eta} \in \mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$  cuanto por  $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{A}\mathbb{P}^2$ , en que  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  con  $\eta_3 \neq 0$ . Observe que  $\mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$  puede ser identificado con el plano proyectivo menos el punto  $\bar{\eta} = (0 : 0 : 1)$ .

El punto principal de la construcción dice respecto a la relación existente entre las rectas Euclidianas en  $\mathbb{R}^2$  y las rectas afines. Una recta  $l \subset \mathbb{R}^2$  esta determinada por un vector normal  $n = (\eta_1, \eta_2)$  (no nulo) y por uno de los puntos en el cual ella incide,  $p = (p_1, p_2) \in l$ . Como sabemos, la ecuación lineal que define la recta es

$$l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0,$$

donde  $\eta_3$  es una constante que depende del vector normal  $n$  y del punto  $p$ . Un ejemplo dejará más clara la notación.

**Ejemplo 1.** La recta Euclidiana  $l \subset \mathbb{R}^2$  cuya ecuación es

$$l : 3x - 2y + 6 = 0,$$

tiene vector normal  $n = (3, -2)$  y contiene, por ejemplo, el punto,  $p = (0, 3)$ . Aquí estamos denotando  $\eta_1 = 3$ ,  $\eta_2 = -2$  y  $\eta_3 = 6$ . Para identificar el plano  $\mathbb{R}^2$  con el plano Euclidiano

$\Pi \subset \mathbb{R}^3$ , en términos de ecuación,  $\Pi : z = 1$ , establecemos que

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, 1).$$

La recta Euclidiana  $l_1$  es identificada con una recta  $s$  contenida en aquel plano horizontal. Por otro lado, una recta en  $\mathbb{R}^3$  esta determinada por la intersección de dos planos en  $\mathbb{R}^3$ , en este caso, un plano vertical (perpendicular al plano  $xy$ ) y otro horizontal, a saber,

$$s : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Mas existen infinitos planos que interceptados con el plano  $\Pi : z = 1$  determinan la misma recta  $s$ , y entre tanto, estamos interesados en el plano  $\Gamma_\eta$  contenido el origen. Ella es precisamente aquella que tiene ecuación

$$\Gamma_\eta : 3x - 2y + 6z = 0.$$

donde  $\eta = (3, 2, 6)$ . Por tanto,  $s = \Pi \cap \Gamma_\eta$ ,

$$s : \begin{cases} 3x - 2y + 6z = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Es claro que al proyectar los puntos de  $s$  sobre el plano afín, obtenemos la recta afín  $r_{\bar{\eta}}$ , con  $\bar{\eta} = (3 : -2 : 6)$ .

**Proposición 5.** *La identificación de  $\mathbb{R}^2$  con el plano afín  $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$  transforma la recta Euclidiana  $l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0$ , en la recta afín  $r_{\bar{\eta}}$ , donde  $\bar{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$ .*

**Ejemplo 2 (Rectas paralelas en  $\mathbb{R}^2$ ).** Examinemos las rectas afines determinadas por rectas paralelas  $l$  y  $l'$  en  $\mathbb{R}^2$ , mas no coincidentes. Como las rectas son paralelas y distintas, ellas admiten ecuaciones en la forma

$$l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0,$$

$$l' : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta'_3 = 0,$$

con  $\eta_3 \neq \eta'_3$ . Las rectas afines determinadas por ellas son, respectivamente,  $\bar{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$  y  $\bar{\nu} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta'_3)$ , elementos de  $\mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$ . Para calcular el punto de intersección de las rectas afines, deberemos utilizar el método establecido para el cálculo de intersecciones de rectas proyectivas, o sea la intersección debería ser

$$\bar{p} = \overline{\eta \times \nu} = (\eta_2\eta'_3 - \eta_2\eta_3 : \eta_1\eta_3 - \eta_1\eta'_3 : 0).$$

Mas este punto proyectivo es un punto ideal que no pertenece al plano afín. Luego, rectas Euclidianas paralelas determinan rectas afines que no se interceptan en el plano afín. El punto  $\bar{p} = \overline{\eta \times \nu}$  es aquel punto de fuga para el cual, aparentemente, las rectas paralelas convergen.

Esencialmente el plano afín es el hemisferio norte de  $\mathbb{S}^2$  sin el ecuador.

# Capítulo 3

## Colineación

En los próximos dos capítulos estudiaremos las *aplicaciones proyectivas*, o proyectividades, que son clasificadas en dos tipos,

$$\text{Proyectividad} \begin{cases} \text{colineación} \\ \text{correlación} \begin{cases} \text{Polaridad} \\ \text{No-polaridad} \end{cases} \end{cases}$$

Una *colineación* es una aplicación biyectiva  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que preserva colinealidad, o sea, si  $\bar{u}, \bar{v}$  y  $\bar{w}$  son puntos proyectivos colineales, entonces las imágenes  $\psi(\bar{u}), \psi(\bar{v})$ , y  $\psi(\bar{w})$  son también puntos proyectivos colineales.

La presentación de los tópicos a seguir serán puestos en un lenguaje mas algebraico. A una colineación, asociamos un operador lineal de  $\mathbb{R}^3$  y con él a la mano, desarrollaremos esta teoría sin dificultades. En el próximo capítulo trataremos las correlaciones. Anticipamos este concepto. El espacio de las rectas proyectivas, o sea, el plano proyectivo dual,  $\mathbb{RP}^{2*}$ , fue identificado con el plano proyectivo,  $\mathbb{RP}^2$ , por tanto satisface los axiomas de la Geometría Proyectiva. Una *correlación* es una aplicación biyectiva entre los planos proyectivos,  $\rho : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ , que posee la propiedad de colinealidad dual, o sea, si  $\bar{u}, \bar{v}$  y  $\bar{w}$  son tres puntos proyectivos colineales entonces  $\rho(\bar{u}) = \bar{\eta}, \rho(\bar{v}) = \bar{\mu}$  y  $\rho(\bar{w}) = \bar{\nu}$  son rectas proyectivas concurrentes.

### 3.1. Operador lineal y colineación

Un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  induce una aplicación en el espacio proyectivo, basta definir

$$\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad \bar{A}(x : y : z) = \overline{A(x, y, z)}.$$

En una forma mas compacta, escribimos  $\bar{A}(\bar{v}) = \overline{A(v)}$ . Antes de mostrar que la aplicación está bien definida veamos un ejemplo.

**Ejemplo 3.** La matriz  $A$  es no singular pues  $\det[A] = -10$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como sabemos, el operador lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $[A]$  es invertible. La colineación inducida en el plano proyectivo es la aplicación  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ,

$$\bar{A}(x : y : z) = (x - z : 2x + 3z : 2x + 2y + 2z).$$

**Proposición 6.** Sea  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un operador lineal invertible. Entonces la aplicación  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ,  $\bar{A}(\bar{v}) = \overline{A(v)}$ , esta bien definida y es una colineación.

*Demostración.* La buena definición de  $\bar{A}$  es consecuencia de dos cosas:

- 1°) Si  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  entonces  $v \neq (0, 0, 0)$ . Siendo  $A$  invertible sigue que  $A(v) \neq 0$ . Luego, el elemento  $\overline{A(v)} \in \mathbb{RP}^2$  está bien definido.
- 2°) El valor de  $\bar{A}$  en un punto proyectivo no depende del representante del punto. Veamos esta afirmación. Sean  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\bar{u} = \bar{v}$ . Siendo así, existe un numero real  $\lambda \neq 0$  tal que  $u = \lambda v$ . Evaluemos  $\overline{A(u)}$  teniendo en cuenta que  $A$  es un operador lineal en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\overline{A(u)} = \overline{A(\lambda v)} = \overline{\lambda A(v)} = \overline{A(v)}.$$

Para demostrar que  $\bar{A}$  es inyectiva, sea  $\bar{A}(\bar{v}) = \bar{A}(\bar{w})$  entonces, por definición, tenemos que  $\overline{A(v)} = \overline{A(w)}$ , luego  $A(v) = \lambda A(w) = A(\lambda w)$  y como  $A$  es operador lineal entonces,

$A(v - \lambda w) = 0$  como  $A$  es invertible y obtenemos:

$$v - \lambda w = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \lambda w \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \bar{w}.$$

Ahora, sean  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  entonces  $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  con la aplicación  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es invertible, entonces existe  $w \in \mathbb{R}^3$  tal que  $A(w) = v$  es claro que  $w \neq 0$  dado que si  $w = 0$  y como  $A$  es invertible tendríamos que  $A(w) = 0 = v$  pero  $v \neq 0$  absurdo, luego

$$w \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \quad \Rightarrow \quad \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$$

y

$$\overline{A(\bar{w})} = \bar{v} = \overline{A(w)} = \overline{A(\bar{w})}$$

por lo tanto  $\overline{A}$  es sobre.

Vamos a mostrar ahora que  $\overline{A}$  es una colineación. Sean  $\bar{u}, \bar{v}$  y  $\bar{w}$  puntos proyectivos colineales. Por el criterio de colinealidad tenemos que  $\det[u, v, w] = 0$ . Apliquemos el mismo criterio para los puntos proyectivos  $\overline{A(u)}, \overline{A(v)}$  y  $\overline{A(w)}$ ,

$$\det[A(u), A(v), A(w)] = \det([A][u, v, w]) = \det[A] \det[u, v, w] = 0.$$

■

## 3.2. Construcción de colineaciones

Para construir un operador lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  basta establecer cuales son los valores de  $A$  en los vectores de la base canónica  $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Escogidos los valores  $A(e_1) = u$ ,  $A(e_2) = v$  y  $A(e_3) = w$ , la matriz canónica del operador lineal es la matriz  $[A] = [u, v, w]$ . Cuando el conjunto  $\{u, v, w\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  el operador lineal  $A$  es invertible.

Para construir colineaciones procedemos de la misma forma, entretanto, el grado de libertad es menor, es necesario fijar el valor de la colineación en cuatro puntos proyectivos no colineales tres a tres. Este es el teorema principal de esta sección. La demostración de la proposición a seguir es constructiva, y la ilustraremos con ejemplos numéricos.

**Proposición 7.** Sean  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  y  $\bar{t}$  puntos de  $\mathbb{RP}^2$  no colineales tres a tres. Entonces existe una colineación  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  inducida por un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$\bar{A}(\bar{e}_1) = \bar{u}, \quad \bar{A}(\bar{e}_2) = \bar{v}, \quad \bar{A}(\bar{e}_3) = \bar{w}, \quad \bar{A}(1 : 1 : 1) = \bar{t}.$$

Además, el operador lineal es definido por la matriz

$$[A] = [k_1u, k_2v, k_3w],$$

donde  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$  y  $k_3 \neq 0$  son las constantes

$$k_1 = \frac{\det[t, v, w]}{\det[u, v, w]}, \quad k_2 = \frac{\det[u, t, w]}{\det[u, v, w]}, \quad k_3 = \frac{\det[u, v, t]}{\det[u, v, w]}.$$

Además de lo anterior, si algún otro operador lineal invertible  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  define la misma colineación que  $A$  entonces  $B \equiv \lambda A$  para algún escalar  $\lambda \neq 0$ .

*Demostración:* Como siempre, escojamos representantes de los puntos proyectivos,

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3), \quad t = (t_1, t_2, t_3).$$

Por hipótesis, tres puntos proyectivos diferentes de la lista son no colineales. Siendo asimismo, los tres primeros vectores  $u, v, w$  forman una base ordenada de  $\mathbb{R}^3$ , esto es equivalente a afirmar que  $\det[u, v, w] \neq 0$ .

Recordemos que para cualquier punto  $\bar{p} \in \mathbb{RP}^2$  vale la igualdad  $\bar{p} = \overline{kp}$ , para cualquier escalar  $k \neq 0$ . Luego, al exigir que  $\overline{A(e_i)}$  sean aquellos valores, estamos exigiendo que

$$\begin{cases} A(e_1) = (k_1u_1, k_1u_2, k_1u_3), \\ A(e_2) = (k_2v_1, k_2v_2, k_2v_3), \\ A(e_3) = (k_3w_1, k_3w_2, k_3w_3), \end{cases}$$

donde  $k_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ , de donde concluimos que la matriz  $[A]$  debe tener la forma

$$[A] = \begin{bmatrix} k_1u_1 & k_2v_1 & k_3w_1 \\ k_1u_2 & k_2v_2 & k_3w_2 \\ k_1u_3 & k_2v_3 & k_3w_3 \end{bmatrix}$$

observemos que esta es no singular, pues

$$\det[A] = k_1 k_2 k_3 \det[u, v, w] \neq 0.$$

Para determinar los  $k_i$ 's utilizamos el cuarto valor,  $\bar{A}(1 : 1 : 1) = (t_1 : t_2 : t_3)$ . La condición

$$A(1, 1, 1) = (t_1, t_2, t_3)$$

nos lleva al sistema de ecuaciones lineales expresado en la forma matricial como

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 u_1 & k_2 v_1 & k_3 w_1 \\ k_1 u_2 & k_2 v_2 & k_3 w_2 \\ k_1 u_3 & k_2 v_3 & k_3 w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

como  $\det[u, v, w] \neq 0$  podemos resolver el sistema por la regla de Cramer y obtener los valores  $k_1, k_2$  y  $k_3$  como en el enunciado.

Para la última afirmación de la proposición, supongamos que  $B$  define la misma colineación que  $A$ , entonces, para cualquier  $\bar{x} \in \mathbb{RP}^2$  tenemos

$$\begin{aligned} \bar{A}(\bar{x}) &= \bar{B}(\bar{x}), & \bar{A}(\bar{x}) - \bar{B}(\bar{x}) &= 0, \\ \overline{A(x)} - \overline{B(x)} &= 0, & \overline{A(x)} &= \overline{B(x)}, \\ A(x) &= \lambda B(x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , luego  $A \equiv \lambda B$ .

Mas adelante mostraremos que sólo existe aquella colineación asumiendo los cuatro valores prefijados.

**Ejemplo 4.** Sean  $\bar{u} = (1 : 1 : 0)$ ,  $\bar{v} = (0 : 1 : 1)$ ,  $\bar{w} = (1 : 1 : 1)$  y  $\bar{t} = (3 : 0 : 1)$  puntos proyectivos. Determinemos una colineación  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , tal que  $\bar{A}(\bar{e}_1) = \bar{u}$ ,  $\bar{A}(\bar{e}_2) = \bar{v}$ ,  $\bar{A}(\bar{e}_3) = \bar{w}$ ,  $\bar{A}(1 : 1 : 1) = \bar{t}$ . Los puntos son no colineales tres a tres pues

$$\begin{aligned} \det[u, v, w] &= 1, & k_1 &= \det[t, v, w] = -1, \\ k_2 &= \det[u, t, w] = -3, & k_3 &= \det[u, v, t] = 4. \end{aligned}$$

Por la última proposición debemos construir una matriz del tipo

$$[A] = \begin{bmatrix} k_1 u_1 & k_2 v_1 & k_3 w_1 \\ k_1 u_2 & k_2 v_2 & k_3 w_2 \\ k_1 u_3 & k_2 v_3 & k_3 w_3 \end{bmatrix}$$

Observe que, prácticamente, todas las entradas de la matriz fueron calculadas,

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,  $\bar{A}(x : y : z) = (-x + 4z : -x - 3y + 4z : -3y + 4z)$ . ■

**Teorema 1.** *Dados dos conjuntos de puntos de  $\mathbb{RP}^2$ ,*

$$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}\}, \quad \{\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{t}'\},$$

*tales que tres puntos cualesquiera de cada uno de los conjuntos son no colineales. Entonces existe una colineación  $\bar{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  inducida por un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que*

$$\bar{A}(\bar{u}) = \bar{u}', \quad \bar{A}(\bar{v}) = \bar{v}', \quad \bar{A}(\bar{w}) = \bar{w}', \quad \bar{A}(\bar{t}) = \bar{t}'.$$

*Además, si algún otro operador lineal  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  define la misma colineación que  $A$  entonces  $B \equiv \lambda A$  para algún escalar  $\lambda \neq 0$ .*

*Demostración:* Sabemos construir colineaciones  $\bar{C} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  y  $\bar{D} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  tales que

$$\bar{C}(\bar{e}_1) = \bar{u}, \quad \bar{C}(\bar{e}_2) = \bar{v}, \quad \bar{C}(\bar{e}_3) = \bar{w}, \quad \bar{C}(1 : 1 : 1) = \bar{t},$$

$$\bar{D}(\bar{e}_1) = \bar{u}', \quad \bar{D}(\bar{e}_2) = \bar{v}', \quad \bar{D}(\bar{e}_3) = \bar{w}', \quad \bar{D}(1 : 1 : 1) = \bar{t}'.$$

Ahora, como la inversa de una colineación es una colineación y la compuesta de dos colineaciones una colineación, la aplicación  $\bar{D} \circ \bar{C}^{-1}$  es la colineación buscada.

Para la segunda parte del teorema supongamos que  $B$  define la misma colineación que  $A$ , entonces, para cualquier  $\bar{y} \in \mathbb{RP}^2$  tenemos

$$\begin{aligned}\overline{A}(\overline{y}) &= \overline{B}(\overline{y}), & \overline{A}(\overline{y}) - \overline{B}(\overline{y}) &= 0, \\ \overline{A}(y) - \overline{B}(y) &= 0, & \overline{A}(y) &= \overline{B}(y), \\ A(y) &= \lambda B(y),\end{aligned}$$

para todo  $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , luego  $A \equiv \lambda B$ . ■

### 3.3. Teorema fundamental

Como vimos en la sección anterior, un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  induce una colineación  $\overline{A} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ . La recíproca es también verdadera, veamos:

**Teorema 2 (Teorema fundamental de la Geometría Proyectiva).** *Toda colineación  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  es inducida por un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

La demostración se basa en dos resultados. El primero afirma que el único automorfismo de cuerpo de los reales es la aplicación identidad. El segundo resultado clasifica todas las funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  que manda rectas en rectas. Demostraremos aquí el primer resultado.

**Proposición 8.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación no idénticamente nula tal que para cualesquiera  $x$  y  $y$  reales valen las igualdades:*

$$a) \quad f(x + y) = f(x) + f(y); \quad (\text{aditividad})$$

$$b) \quad f(xy) = f(x)f(y); \quad (\text{multiplicatividad})$$

entonces  $f(x) = x$ .

*Demostración:* Primero veamos algunas observaciones.

**Observación 1.**  $f(a) = 0$  si, y solamente si,  $a = 0$ . Veamos, las igualdades  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$  lo cual implica que  $f(0) = 0$ . Ahora, supongamos, por absurdo, que existe un  $a \neq 0$  tal que  $f(a) = 0$ . Entonces para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$f(x) = f\left(a \frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0f\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Esto significa que  $f$  es idénticamente nula, así tenemos una contradicción y por lo tanto queda demostrada esta observación.

**Observación 2.**  $f$  es una función impar, pues

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

luego  $f(-x) = -f(x)$ .

**Observación 3.**  $f(1) = 1$ . Para cualquier  $x$  real tenemos que  $f(x) = f(1x) = f(1)f(x)$ , por lo tanto,  $f(x)(f(1) - 1) = 0$ . Como  $f$  no es idénticamente nula, existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) \neq 0$ . Luego,  $f(1) = 1$ .

**Observación 4.**  $f(x^2) = [f(x)]^2$  para cualquier  $x$  pues  $f(x^2) = f(xx) = f(x)f(x)$ .

**Afirmación 1.**  $f(nx) = nf(x)$  para cualquier entero  $n$  y cualquier  $x$  real.

Fijemos cualquier  $x$  real. Demostremos por inducción que la afirmación es verdadera para cualquier  $n \geq 0$ . Para  $n = 0$  la afirmación es verdadera por las observaciones iniciales. Vamos a asumir que la afirmación sea verdadera para  $n$ . Calculemos  $f((n+1)x)$ ,

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Por tanto, la afirmación es verdadera para cualquier  $n \geq 0$ . Para  $n < 0$ , utilizamos la observación 2 de que la función es impar,  $f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$ . Esto concluye la demostración de la afirmación.

**Afirmación 2.**  $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$  para cualquier racional  $\frac{n}{m}$  y cualquier  $x$  real.

Fijemos cualquier  $x$ . Sea  $m$  un entero no nulo. Por la afirmación anterior podemos escribir,

$$f(x) = f\left(\frac{m}{m}x\right) = mf\left(\frac{1}{m}x\right).$$

Luego,  $f\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}f(x)$ . Ahora es fácil concluir la demostración de la afirmación, pues

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(n\left(\frac{1}{m}x\right)\right) = nf\left(\frac{1}{m}x\right) = n\frac{1}{m}f(x) = \left(\frac{n}{m}\right)f(x).$$

**Afirmación 3.**  $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}$  para todo racional  $\frac{n}{m}$ .

La demostración es trivial,

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}1\right) = \frac{n}{m}f(1) = \frac{n}{m}.$$

**Afirmación 4.**  $f$  preserva el orden, esto es, si  $x < y$  entonces  $f(x) < f(y)$ .

Sea  $x > 0$ . Como existe  $a > 0$  tal que  $a^2 = x$ , tenemos  $f(x) = f(a^2) = [f(a)]^2 > 0$ . Esto es suficiente para mostrar que  $f$  preserva el orden. Veamos. Si  $x < y$  entonces  $0 < y - x$ . Por lo anterior,  $0 < f(y - x) = f(y) - f(x)$ , luego  $f(x) < f(y)$ .

Ahora estamos listos para concluir la demostración de la Proposición 8.

Suponga, por absurdo, que exista  $x_0$  tal que  $f(x_0) \neq x_0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $f(x_0) < x_0$ . De la densidad de los reales, tenemos que dados dos números reales distintos, existe un racional entre ellos. Sea  $a$  un racional tal que  $f(x_0) < a < x_0$ . Como  $f$  preserva el orden y  $a$  es racional, tenemos que  $a = f(a) < f(x_0)$ , lo cual contradice nuestra suposición inicial. Luego  $f(x) = x$  para cualquier  $x$  real. ■

**Proposición 9.** Sea  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función biunívoca tal que  $B(o) = o$ . Si  $B$  aplica rectas euclidianas en rectas euclidianas entonces  $B$  es un operador lineal invertible.

*Demostración:* El termino “aplica rectas en rectas” significa que la imagen de una recta euclidiana está contenida en una recta euclidiana. Sean  $l_1$  y  $k$  rectas tales que  $B(l_1) \subset k$ . Inicialmente mostraremos que  $B(l_1) = k$  y  $l_1$  es la única recta cuya imagen está contenida en  $k$ . Vamos a suponer, por absurdo, que existe un punto  $q \in k$  pero  $q \notin B(l_1)$ . Como  $B$  es biunívoca existe un único punto  $q_0$  tal que  $B(q_0) = q$ . Es claro que  $q_0 \notin l_1$ . Sea  $l_2$  una recta que contiene  $q_0$  y es perpendicular a  $l_1$  en  $q_1 \in l_1$ . Como  $B$  aplica rectas en rectas y  $B(q_0), B(q_1) \in k$  entonces  $B(l_2) \subset k$ . Ahora, dado un punto cualquiera  $p$  de  $\mathbb{R}^2$ , él pertenece a una recta  $l$  que intercepta  $l_1 \cup l_2$  en por lo menos dos puntos, digamos  $p_1$  y  $p_2$ . Nuevamente, como  $B(p_1), B(p_2) \in k$  sigue que  $B(l) \subset k$ . Esto muestra que  $B(\mathbb{R}^2) \subset k$ . Esto

es absurdo dado que, estamos suponiendo que  $B$  es sobreyectiva. Luego, existe la recta  $l_1$  tal que  $B(l_1) = k$ .

Mostremos, ahora, que las imágenes por  $B$  de cualesquiera dos rectas paralelas  $l_1$  y  $l_2$  son dos rectas paralelas. De la observación anterior, podemos afirmar que  $B(l_1)$  y  $B(l_2)$  son rectas distintas. Suponga, por absurdo, que exista un punto en la intersección  $p \in B(l_1) \cap B(l_2)$ . Siendo así, la preimagen  $B^{-1}(p)$  tiene por lo menos dos puntos, uno en cada recta paralela, contradiciendo la hipótesis de  $B$  ser biunívoca.

**Afirmación 5.** Si  $v, w$  es una base de  $\mathbb{R}^2$  entonces  $B(v + w) = B(v) + B(w)$ .

La hipótesis de ser base implica que  $v$  y  $w$  son no nulos y no colineales. Sean  $l_1$  y  $l_2$  las rectas distintas que concurren en el origen y tales que  $v \in l_1$  y  $w \in l_2$ . Siendo así,  $v + w \in l'_1 \cap l'_2$ , donde  $l'_1$  es la recta que pasa por  $w$  y es paralela a la recta  $l_1$  y  $l'_2$  es la recta que pasa por  $v$  y es paralela a  $l_2$ . Veamos las imágenes por  $B$  de las anteriores rectas,

$$B(0), B(v) \in k_1 = B(l_1) \quad \text{y} \quad B(0), B(w) \in k_2 = B(l_2).$$

Como sabemos,  $k_1$  y  $k_2$  son rectas distintas, luego,  $\beta = \{B(v), B(w)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$  pues ninguno de los dos vectores es nulo y son no colineales: Ahora, las rectas  $k'_1 = B(l'_1)$  y  $k'_2 = B(l'_2)$  son rectas que pasan, respectivamente, por  $B(w)$  y  $B(v)$  y son paralelas, respectivamente, a  $k_1$  y  $k_2$ . Es claro que  $\{B(v) + B(w)\} = k'_1 \cap k'_2$ . Por otro lado,  $\{B(v + w)\} = B(l'_1 \cap l'_2) = k'_1 \cap k'_2$ , por tanto,  $B(v + w) = B(v) + B(w)$ .

**Afirmación 6.** Existe una transformación lineal invertible  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que la compuesta  $C = A^{-1} \circ B$  se expresa en la forma  $C(x, y) = (f(x), g(y))$ , donde  $f$  y  $g$  son transformaciones biyectivas que satisfacen,  $f(o) = g(o) = o$  y  $f(1) = g(1) = 1$ . Es más,  $C$  satisface las hipótesis de la proposición 9.

Como se hizo en la Afirmación 5, tenemos  $\beta = \{B(v), B(w)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$  y el conjunto de los vectores  $\beta = \{B(e_1), B(e_2)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal tal que  $A(e_1) = B(e_1)$  y  $A(e_2) = B(e_2)$ . Mas precisamente, sea  $A(x, y) = xB(e_1) + yB(e_2)$ . Como  $\beta$  es una base entonces  $A$  es invertible. Recordemos que  $A^{-1}$  es una transformación lineal.

Siendo una transformación lineal,  $A^{-1}$  aplica rectas en rectas,  $A^{-1}(o) = o$  y, siendo, invertible,  $A^{-1}$  es sobreyectiva. Ahora, es inmediato concluir que  $C = A^{-1} \circ B$  también es

una aplicación biyectiva, aplica rectas en rectas y  $C(o) = o$ . Por tanto,  $C$  satisface todas las hipótesis de la proposición.

Por construcción,  $C(o) = o$ ,  $C(e_1) = e_1$  y  $C(e_2) = e_2$ . Esto implica que  $C$  preserva los ejes  $ox$  y  $oy$ . Luego,  $C$  transforma rectas horizontales en rectas horizontales y rectas verticales son transformadas en rectas verticales. Esto es suficiente para mostrar que  $C(x, y) = (f(x), g(y))$ . Vamos a mostrar que  $C \equiv id$ , y de ahí tendremos que  $A \equiv B$ , por tanto,  $B$  es una transformación lineal.

**Afirmación 7.** Las funciones coordenadas de  $C(x, y) = (f(x), g(y))$  son aditivas, o sea,  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  y  $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$ .

Examinemos apenas  $f$ , el estudio de  $g$  es similar.

Dados  $x_1$  y  $x_2$ . Si  $x_1 \neq 0$ , considere la base  $v, w$  de  $\mathbb{R}^2$ , donde  $v = (x_1, 0)$  y  $w = (x_2, 1)$ . Por la Afirmación 5, vale la aditividad  $C(v+w) = C(v) + C(w)$ , implicando que  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

**Afirmación 8.**  $f \equiv g$  y  $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$ .

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideremos una recta con inclinación  $\alpha$ , digamos  $l : y = \alpha x + b_0$ , y calculemos la inclinación  $i(\alpha)$  de la recta imagen  $C(l)$ . Para esto, sean  $(0, b_0)$  y  $(x, \alpha x + b_0)$  dos puntos distintos de  $l$ . Es claro que  $x \neq 0$ . La inclinación de  $C(l)$  es

$$i(\alpha) = \frac{g(\alpha x + b_0) - g(b_0)}{f(x) - f(0)} = \frac{g(\alpha x)}{f(x)}.$$

La última igualdad sigue por  $g(\alpha x + b_0) = g(\alpha x) + g(b_0)$  y  $f(0) = 0$ . Evaluando en  $x = 1$  obtenemos que  $i(\alpha) = g(\alpha)$  pues  $f(1) = 1$ . Luego,  $g(\alpha x) = g(\alpha)f(x)$  para cualquier  $x$  y  $\alpha$ . Evaluando en  $\alpha = 1$  concluimos que  $g \equiv f$  pues  $g(1) = 1$ . Por tanto,  $f(\alpha x) = f(\alpha)f(x)$ . Esto encierra la demostración de la afirmación.

Por lo anterior y por la proposición 8 tenemos,  $f(x) = x = g(x)$ . Luego,  $C(x, y) = (f(x), g(y)) = (x, y)$ , encerrando la demostración de la proposición. ■

*Demostración del Teorema fundamental de la Geometría Proyectiva.* Sea  $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  una colineación. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\psi$  preserva la recta ideal  $I_\infty$  y fija el punto  $(0 : 0 : 1)$ . Si este caso no ocurre, consideramos los puntos proyectivos no

colineales tres a tres,

$$\bar{a} = \psi(1 : 0 : 0) \in \psi(I_\infty), \quad \bar{b} = \psi(0 : 1 : 0) \in \psi(I_\infty), \quad \text{y} \quad \bar{c} = \psi(0 : 0 : 1),$$

Por el teorema 1 se garantiza que puedo construir una colineación  $\bar{D} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  inducida de un operador lineal de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$\bar{D}(\bar{a}) = (1 : 0 : 0), \quad \bar{D}(\bar{b}) = (0 : 1 : 0) \quad \text{y} \quad \bar{D}(\bar{c}) = (0 : 0 : 1).$$

Luego, la compuesta  $\bar{D} \circ \psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  es una colineación que fija el punto  $(0 : 0 : 1)$  y preserva la recta ideal dado que fija dos de sus puntos, por ejemplo  $(1 : 0 : 0)$  y  $(0 : 1 : 0)$ .

Supondremos por lo tanto que la colineación  $\psi$  está sobre las condiciones descritas al comienzo de la demostración. Siendo así,  $\psi$  aplica biunívocamente el plano afín en el plano afín. Esto permite definir una aplicación  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  via identificación afín, estableciendo que

$$B(x, y) \quad \text{es tal que} \quad (B(x, y) : 1) = \psi(x : y : 1).$$

Como

- ♣  $\psi$  es una aplicación biunívoca del plano afín que aplica rectas afines en rectas afines,
- ♣ la identificación afín aplica rectas euclidianas de  $\mathbb{R}^2$  en rectas afines y
- ♣ como  $(B(0, 0) : 1) = \psi(0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1)$ ,  
entonces es inmediato concluir que
- ♣ B aplica rectas euclidianas en rectas euclidianas,
- ♣ B fija al origen  $o \in \mathbb{R}^2$
- ♣ y B es biunívoca.

Por tanto,  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un operador lineal invertible. Considere el operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por  $A(x, y, z) = (B(x, y), z)$ . ■

### 3.4. Teorema de Pappus

Para hablar sobre triángulos, cuadriláteros, pentágonos y otros polígonos en el plano proyectivo necesitamos definir el significado de estos términos que tienen sus orígenes en la Geometría euclidiana plana. Por ejemplo, un cuadrilátero en  $\mathbb{RP}^2$  es un polígono proyectivo obtenido de un cuadrilátero del plano euclidiano via identificación afín, seguido de una colineación. Transportamos juntos los significados de vértice, lados, estar inscrito, etc.

El objetivo del restante del capítulo es demostrar dos de los más antiguos teoremas de la geometría proyectiva, el teorema de Pappus y el teorema de Desargues. Expliquemos el teorema de Pappus en el plano euclidiano.

Para facilitar la lectura, al denotar una recta en el plano euclidiano determinada por los puntos  $A$  y  $B$ , escribiremos  $l_{AB}$ .

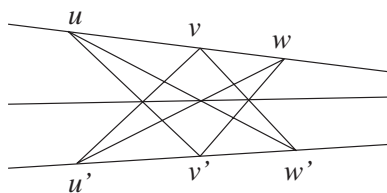


Figura 3.1: Teorema de Pappus

Sean  $l$  y  $s$  dos rectas cualesquiera en el plano euclidiano. Escojamos seis puntos distintos, tres puntos sobre la primera recta, digamos,  $u, v$  y  $w$ , (ver Figura 3.1) y tres sobre la otra recta,  $u', v'$  y  $w'$ . Considere los puntos

$$A = l_{vw'} \cap l_{v'w}, \quad B = l_{uw'} \cap l_{u'w}, \quad C = l_{uv'} \cap l_{u'v}.$$

El teorema de Pappus afirma que  $A, B$  y  $C$  son colineales. Transportaremos el teorema de Pappus de la Geometría Euclidiana para un lenguaje proyectivo utilizando la identificación afín. Como el número de rectas involucradas en el problema es grande y no tenemos muchas letras griegas apropiadas para designarlas, fijaremos una notación. Dados los puntos proyectivos distintos  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  denotamos la recta proyectiva que contiene  $u$  y  $v$ , por  $\bar{\eta}_{uv} = \overline{u \times v}$ .

**Teorema 3 (Teorema de Pappus).** Sean  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{v}'$  y  $\bar{w}'$  seis puntos proyectivos distintos, de los cuales los tres primeros están sobre una recta  $r_{\bar{\eta}}$  y los tres últimos fuera de esta recta

y sobre otra recta, digamos,  $r_{\bar{v}}$ . Entonces los puntos de intersección

$$\bar{a} = r_{\bar{v}w'} \cap r_{\bar{v}'w}, \quad \bar{b} = r_{\bar{u}w'} \cap r_{\bar{u}'w}, \quad \bar{c} = r_{\bar{u}v'} \cap r_{\bar{u}'v}$$

son puntos colineales.\*

*Demostración:* Las hipótesis implican que  $\bar{u}, \bar{v}', \bar{w}$  y  $\bar{b}$  son no colineales tres a tres. Siendo así, salvo por una colineación, podemos suponer que

$$\bar{u} = (1 : 0 : 0), \quad \bar{v}' = (0 : 1 : 0), \quad \bar{w} = (0 : 0 : 1), \quad \bar{b} = (1 : 1 : 1).$$

**Afirmación 9.** Siendo  $\bar{v}$  colineal con  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$ , podemos escoger

$$v = (\beta, 0, 1) \quad \text{con} \quad \beta \neq 0.$$

Sino veamos: Como  $u = (1, 0, 0)$  y  $w = (0, 0, 1)$  pertenecen al plano  $\Gamma_{e_2}$  y  $\bar{v}$  es colineal con  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$  y son distintos, entonces cualquier representante de  $\bar{v}$  es de la forma  $v = (s, 0, t)$ , con  $s \neq 0$  y  $t \neq 0$ . Luego, podemos tomar  $v = t(s/t, 0, 1)$ . El vector  $(s/t, 0, 1)$  también será un representante de  $\bar{v}$ . Fijamos  $\beta = \frac{s}{t}$ .

**Afirmación 10.** Siendo  $\bar{u}'$  colineal con  $\bar{w}$  y  $\bar{b}$ , podemos escoger

$$\bar{u}' = (1, 1, \alpha') \quad \text{con} \quad \alpha' \neq 0.$$

Sea  $u' = (s, t, r)$  un representante de  $\bar{u}'$ . Por el criterio de colinealidad tenemos

$$t - s = \det[w, b, u'] = 0.$$

Luego,  $s = t$ . Se ve claramente que  $s \neq 0$  en caso contrario  $\bar{u}' = (0 : 0 : \alpha') = \bar{w}$ , una contradicción pues los puntos considerados son distintos. Concluimos que  $u = (s, s, r) = s(1, 1, r/s)$ . Fijamos  $\alpha' = r/s$ .

**Afirmación 11.** Siendo  $\bar{w}'$  colineal con  $\bar{u}$  y  $\bar{b}$ , podemos escoger

$$w' = (\gamma', 1, 1) \quad \text{con} \quad \gamma' \neq 0.$$

La demostración es semejante a la demostración de la afirmación anterior.

---

\*La recta proyectiva que contiene tales puntos es llamada la recta de Pappus.

Ahora los puntos  $\bar{u}'$ ,  $\bar{v}'$  y  $\bar{w}'$  están sobre la recta proyectiva  $r_v$ , por tanto, por el criterio de colinealidad tenemos la siguiente relación entre los coeficientes  $\alpha'$  y  $\gamma'$ ,

$$0 = \det[\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma' \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha' & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \alpha'\gamma'.$$

Guardemos esta relación. Calculemos ahora los puntos de intersección de las rectas proyectivas. Sabiendo que  $\bar{b} = (1 : 1 : 1)$ , necesitamos calcular

$$\bar{a} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}}, \quad \bar{c} = \overline{\eta_{uv'} \times \eta_{u'v}}.$$

Teniendo en cuenta las representaciones obtenemos

$$\eta_{vw'} = v \times w' = (-1, -\beta + \gamma', \beta), \quad \eta_{v'w} = v' \times w = (1, 0, 0),$$

$$\eta_{uv'} = u \times v' = (0, 0, 1), \quad \eta_{u'v} = u' \times v = (1, \alpha'\beta - 1, -\beta).$$

Finalmente, calculando los puntos de las intersecciones,

$$\bar{a} = (0, \beta, \beta - \gamma'), \quad \bar{c} = (-\alpha'\beta + 1, 1, 0),$$

verifiquemos que los puntos son colineales

$$\det[a, b, c] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\alpha'\beta + 1 \\ \beta & 1 & 1 \\ \beta - \gamma' & 1 & 1 \end{bmatrix} = \beta - \alpha'\beta\gamma' = \beta(1 - \alpha'\gamma') = 0.$$

■

---

### 3.5. Teorema de Desargues

---

El Teorema de Desargues hace referencia a triángulos en perspectiva. Considere el plano que contiene el triángulo con vértices  $u, v$  y  $w$  (ver Figura 3.2). Vamos a asumir que en  $O$  exista un punto de luz y que el triángulo sea opaco. El triángulo proyecta una sombra sobre otro plano determinando un triángulo cuyos vértices son  $u', v'$  y  $w'$ . El Teorema de

Desargues afirma que los lados correspondientes del triángulo y de su sombra concurren en la recta intersección de los dos planos. Con esto, queda descrita una propiedad básica de la perspectiva, al establecer una técnica fundamental para dibujar, donde la realidad visual es registrada gráficamente sobre una superficie plana. Trataríamos todos estos hechos físicos en un teorema con lenguaje proyectivo.

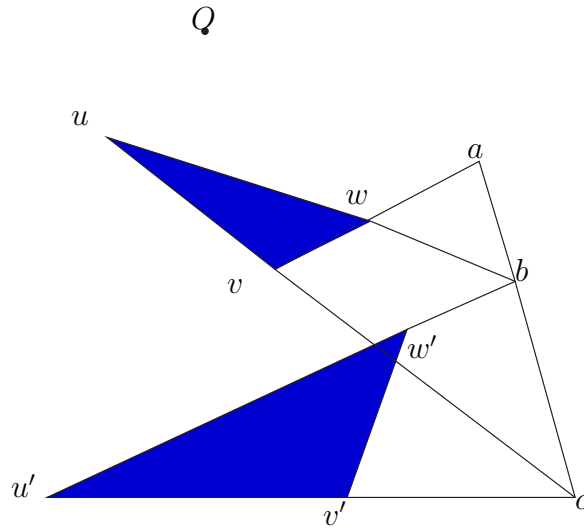


Figura 3.2: Teorema Desargues

**Teorema 4 (Teorema de Desargues).** Sea  $\Delta = \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  un conjunto de tres puntos proyectivos distintos y no colineales y sea  $\Delta' = \bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  otro conjunto de tres puntos proyectivos distintos y no colineales tales que  $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$  y que

$$\{\bar{p}\} = r_{\bar{u}u'} \cap r_{\bar{v}v'} \cap r_{\bar{w}w'}.$$

Entonces los puntos proyectivos  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  son colineales \*\*, donde

$$\bar{a} = r_{\bar{v}w} \cap r_{\bar{v}'w'}, \quad \bar{b} = r_{\bar{u}w} \cap r_{\bar{u}'w'}, \quad \bar{c} = r_{\bar{u}v} \cap r_{\bar{u}'v'}.$$

*Demostración:* Asuma que los puntos proyectivos  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  y  $\bar{p}$  son no colineales tres a tres (el caso contrario es trivial). A menos de una colineación, podemos simplificar los cálculos

\*\* La recta proyectiva así definida es llamada la recta de Desargues.

asumiendo que

$$\bar{u}' = \bar{e}_1, \quad \bar{v}' = \bar{e}_2, \quad \bar{w}' = \bar{e}_3, \quad \bar{p} = (1 : 1 : 1).$$

**Afirmación 12.** Existen números reales  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  diferentes de cero tales que los puntos  $\bar{u}, \bar{v}$  y  $\bar{w}$  pueden ser representados por

$$u = (1 + \alpha, 1, 1), \quad v = (1, 1 + \beta, 1) \quad \text{y} \quad w = (1, 1, 1 + \gamma).$$

Demostraremos apenas la existencia de  $\alpha$ , las otras igualdades tienen demostraciones semejantes. Los puntos  $\bar{p}, \bar{u}'$  y  $\bar{u}$  son colineales y distintos en  $\mathbb{RP}^2$ , implicando que  $\bar{p}, \bar{u}'$  y  $\bar{u}$  (respectivas proyecciones) pertenecen a un mismo plano perforado en  $\mathbb{R}^3$  y dos de ellos, digamos,  $p$  y  $u'$ , son linealmente independientes. Luego,  $u = sp + tu'$ , para algún  $s \neq 0$  y  $t \neq 0$ . Como

$$u = sp + tu' = s\left(p + \frac{t}{s}u'\right),$$

sea  $\alpha = \frac{t}{s}$ , entonces

$$u = s[(1, 1, 1) + \alpha(1, 0, 0)], \quad [1 + \alpha, 1, 1],$$

$$\bar{u} = [1 + \alpha : 1 : 1],$$

por lo tanto

$$u = (1 + \alpha, 1, 1)$$

**Afirmación 13.** Los puntos proyectivos  $\bar{\eta}_{vw}, \bar{\eta}_{uw}$  y  $\bar{\eta}_{uv}$  son

$$\bar{\eta}_{uv} = (-\beta : -\alpha : (1 + \alpha)(1 + \beta) - 1),$$

$$\bar{\eta}_{uw} = (+\gamma : 1 - (1 + \alpha)(1 + \gamma) : +\alpha),$$

$$\bar{\eta}_{vw} = ((1 + \beta)(1 + \gamma) - 1 : -\gamma : -\beta).$$

La demostración es un cálculo directo.

*Demostración.* Sean  $u = (1 + \alpha, 1, 1)$  y  $v = (1, 1 + \beta, 1)$ , como  $\bar{\eta}_{uv} = u \times v$ , entonces

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 + \alpha & 1 \\ 1 + \beta & 1 & 1 & 1 + \beta \end{vmatrix} \\ &= (1 - 1 - \beta, 1 - 1 - \alpha, (1 + \alpha)(1 + \beta) - 1) \end{aligned}$$

$$= (-\beta, -\alpha, (1 + \alpha)(1 + \beta) - 1),$$

entonces

$$\bar{\eta}_{uv} = (-\beta : -\alpha : (1 + \alpha)(1 + \beta) - 1).$$

**Afirmación 14.** Los puntos proyectivos  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  pueden ser representados por

$$a = (0, \beta, \gamma), \quad b = (\alpha, 0, -\gamma), \quad c = (-\gamma, \beta, 0).$$

Para finalizar la demostración del teorema.

$$\det[a, b, c] = \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ \beta & 0 & \beta \\ \gamma & -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \beta\gamma\alpha - \alpha\beta\gamma = 0,$$

muestra que los tres puntos son colineales.

# Capítulo

# 4

## Cónicas

Las cónicas son la elipse, la hipérbola y la parábola de la geometría elemental. La circunferencia es también una cónica, un caso particular de la elipse. Se pueden definir de varias maneras. Una de las más intuitivas y también de las más antiguas, pues se remonta a **Apolonio** (siglo III a.C.), consiste en considerarlas como secciones planas de un cono de revolución completo. Según la posición del plano con el cual se corta, se obtiene una u otra de las tres especies de cónicas. Así, Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, un elipse; si es secante, una hipérbola; y si es tangente, una parábola. Analíticamente las cónicas están representadas por ecuaciones de segundo grado en las dos coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$ , del plano. Es decir, son las curvas más simples después de las rectas, representadas por ecuaciones de primer grado. Tal vez por esto las cónicas son curvas que aparecen con frecuencia en la naturaleza: las trayectorias de los planetas o de los satélites, y las de los proyectiles en el vacío, son cónicas.

Estamos interesados en estudiar todas las curvas, más no con la finalidad de determinar sus ejes, focos, asíntotas, etc., o sus propiedades métricas como, por ejemplo, las razones entre las distancias de los puntos a los focos y directrices, estudio que se realiza en los últimos años de la enseñanza media. Existen bellos resultados, como el Teorema de Pascal, exhibiendo propiedades no métricas de las cónicas y que dependen del concepto de incidencia. Toda la fuerza de la Geometría Projectiva surge cuando demostramos este teorema, ciertamente, uno de los puntos altos de esta teoría.

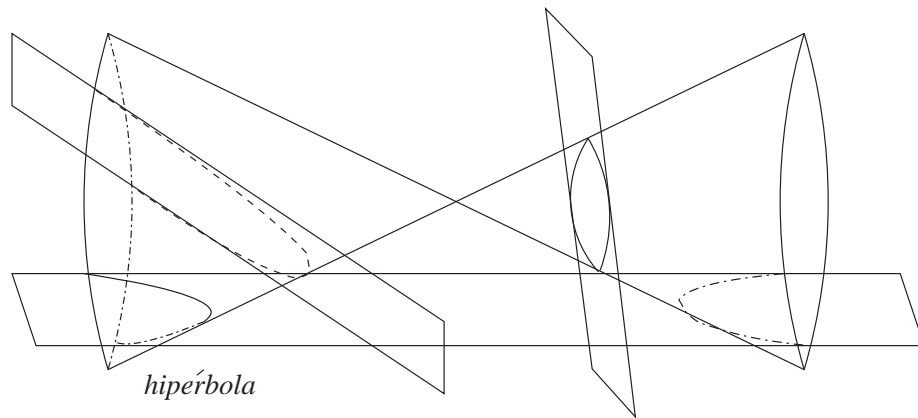


Figura 4.1: Tres clases de cónicas

## 4.1. Conos en $\mathbb{R}^3$

En algún momento de nuestra vida de estudiantes, sea cuando estudiamos Cálculo en la universidad o Geometría Analítica en la enseñanza media, oímos o leemos la frase

“ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  es la ecuación de un cono  $\mathfrak{C}$  en  $\mathbb{R}^3$ .”

De hecho, al registrar gráficamente el conjunto de los puntos  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, obtenemos una figura que entendemos como un cono con vértice en el origen.

Aquella ecuación posee una propiedad que nos induce a pensar en el plano proyectivo. Si  $v = (x, y, z) \in \mathfrak{C}$ , entonces, escogido cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el vector  $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  también pertenece al cono pues sus coordenadas satisfacen la ecuación que define  $\mathfrak{C}$ , luego tiene sentido considerarla como una ecuación en coordenadas homogéneas y estudiar el conjunto  $\mathcal{C}$  formado por los puntos proyectivos  $\bar{v} = (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, esto es,

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Una ecuación en coordenadas homogéneas es, obviamente, llamada una ecuación homogénea. Una cónica en  $\mathbb{R}^2$  es la curva obtenida por el transporte vía identificación afín de la curva intersección de un cono y el plano horizontal  $\Gamma_{e_3}(0, 0, 1) : z = 1$ . La proyección de

un cono (menos su vértice que siempre asumiremos ser  $o$ ) en el plano proyectivo es una curva también denominada *cónica en  $\mathbb{RP}^2$* .

En el caso de la intersección del cono  $\mathfrak{C} : x^2 + y^2 - z^2 = 0$  y el plano horizontal producimos la ecuación  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  en  $\mathbb{R}^2$  que reconocemos como siendo la ecuación del círculo unitario canónico en  $\mathbb{R}^2$ .

La técnica principal es establecer una relación entre ecuaciones homogéneas de grado 2 con Álgebra Lineal, disciplina que, generalmente, trata de ecuaciones lineales, de grado 1. A pesar de que no sea una relación que pueda ser imaginada de inmediato, ella es simple. Veamos un ejemplo con el cono  $\mathfrak{C}$  dado anteriormente.

Considere el operador lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , , definido por  $A(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Su matriz canónica es la matriz diagonal, por tanto, simétrica,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sea  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . El cono está, definido por

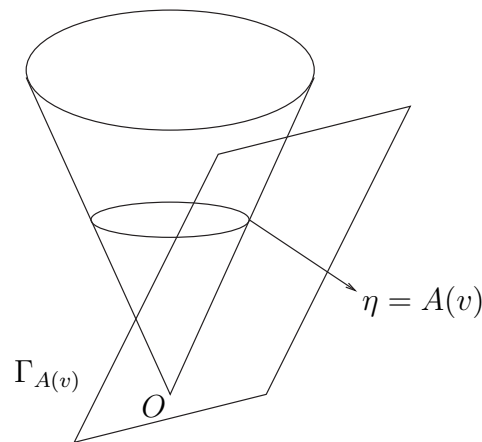
$$\mathfrak{C} : \langle v, A(v) \rangle = 0.$$

Ahora pasemos al plano proyectivo. Como el operador lineal  $A$ , es invertible, induce una colineación  $\bar{A}$  en el plano proyectivo, mas la ecuación  $\langle v, A(v) \rangle = 0$  es la ecuación de incidencia entre el punto proyectivo  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  y una recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2$ , esto es, y la recta proyectiva  $\overline{A(v)} = \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}$ . Siendo así, es más natural aceptar que el operador lineal induce una aplicación entre el plano proyectivo y su dual,

$$A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}, \quad A^*(x : y : z) = (x : y : -z),$$

pues el plano proyectivo y su dual son “iguales”. Luego, *la cónica en  $\mathbb{RP}^2$  obtenida por la proyección de un cono en  $\mathbb{R}^3$  es el conjunto de los puntos proyectivos  $\bar{v}$  tales que  $\bar{v}$  y la recta proyectiva  $A^*(\bar{v})$  son incidentes.*

Una pregunta aparece inmediatamente. ¿Cuál es el significado de la recta proyectiva  $\bar{\eta} = A^*(\bar{v}) \in \mathbb{RP}^{2*}$ ? Algebraicamente la respuesta es fácil. La recta proyectiva  $r_{A^*(\bar{v})}$  es obtenida por la proyección del plano perforado en  $\mathbb{R}^3$  cuyo vector normal es  $\eta = A(v)$ . En nuestra notación, es la recta proyectiva obtenida por la proyección del plano perforado  $\Gamma_{A(v)}$ .

Figura 4.2: Cono en  $\mathbb{R}^3$ 

La respuesta geométrica es crucial para el estudio de las propiedades de cónicas que envuelvan apenas el concepto de incidencia. El plano  $\Gamma_{A(v)}$  es el plano *tangente* al cono en el punto  $v$ . Estudiemos un poco más esta afirmación. Primero, observemos que  $v \in \Gamma_{A(v)}$  pues  $\langle v, A(v) \rangle = 0$ . Segundo, la recta  $\lambda v$  también pertenece al mismo plano y al cono. Falta mostrar que esta recta es precisamente la intersección del plano y el cono. Dejaremos la demostración de este caso para después.

En resumen. Además de obtener una curva en  $\mathbb{RP}^2$ , esto es, el conjunto de puntos proyectivos  $v = (x : y : z)$  que satisfacen la ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , también obtenemos la recta proyectiva tangente en el punto  $\bar{v}$ , la cual es,  $\bar{\eta} = A^*(\bar{v}) = (x : y : -z)$ .

Necesitamos trasladar todas estas informaciones para  $\mathbb{RP}^2$  pues, a final, deseamos estudiar cónicas en el plano. La tarea es simple vía identificación afín. Por ejemplo, el punto

$$\bar{v} = (3 : 4 : 5) = \left(\frac{3}{5} : \frac{4}{5} : 1\right)$$

pertenece a la cónica  $\mathfrak{C}$  del plano proyectivo definido por la ecuación homogénea (de orden 2)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . La recta proyectiva tangente a la cónica en el punto  $\bar{v}$  es

$$\bar{A}(\bar{v}) = \bar{\eta} = (3 : 4 : -5).$$

Via identificación afín,

- ♣ obtenemos la ecuación del círculo unitario canónico en  $\mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  (Considerando  $z = 1$ ),
- ♣ el punto  $p = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  pertenece al círculo unitario,
- ♣ y la recta euclidiana  $l : 3x + 4y - 5 = 0$  es la recta tangente al círculo en el punto  $p$ .

Mas esto es un adelanto de lo que vamos a ver a continuación.

---

## 4.2. Cuádricas

---

Esta sección es dedicada a organizar los comentarios puestos en la sección anterior, vamos a estudiar ecuaciones polinomiales homogéneas de orden 2 o *formas cuadráticas*,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0.$$

Inicialmente estaremos interesados en el conjunto solución, esto es, en los puntos  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. El conjunto solución es llamado *cuádrica*. Posteriormente, estudiaremos el conjunto de puntos proyectivos  $\bar{v} = (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$  cuyas coordenadas homogéneas satisfacen a la misma ecuación, esto es, estudiaremos las cónicas. La homogeneidad de la ecuación permite este estudio.

Un operador lineal asociado a aquella ecuación es un operador lineal *simétrico*  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$\langle v, A(v) \rangle = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

donde  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . La matriz simétrica asociada a la ecuación es la matriz del operador lineal  $A$  en la base canónica,  $[A] = [A(e_1), A(e_2), A(e_3)]$ . Demuestre la proposición abajo, ella establece un algoritmo relacionando a los coeficientes de la ecuación y las entradas de la matriz  $[A]$ .

**Proposición 10.** *Dada una ecuación polinomial homogénea de orden 2 en  $\mathbb{R}^3$ ,  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$ , existe un único operador lineal simétrico  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  asociado a la ecuación, a saber, es el operador cuya matriz canónica es*

$$[A] = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 5.** Por la proposición, la ecuación  $7x^2 + y^2 - 2xy + 5xz - 4yz = 0$  es re-escrita en la forma  $(v, A(v)) = 0$ , en que  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es el operador lineal simétrico cuya matriz canónica es

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5/2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5/2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

### 4.3. Correlaciones

---

Como se hizo anteriormente, el conjunto de las rectas proyectivas  $\mathbb{RP}^{2*}$  fue identificado con el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ . Deseamos estudiar las aplicaciones biyectivas  $\rho : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  que preservan colinealidad, esto es, tres puntos proyectivos colineales son aplicados en tres rectas proyectivas concurrentes. Tales aplicaciones y sus inversas son llamadas **correlaciones**.

Nada impide que dado un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , podamos definir una aplicación  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ , por la cual asociamos un punto proyectivo  $\bar{v}$  a una recta proyectiva  $r$  pues el contra dominio es “el plano proyectivo”. La utilización del asterisco en esta notación tiene el objetivo de distinguirla de colineación, aplicación definida y estudiada en el capítulo anterior, cuyo dominio y contradominio es el plano proyectivo. Aquí el contradominio es el plano proyectivo dual.

**Ejemplo 6.** El operador lineal invertible  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es invertible pues  $\det[A] \neq 0$ . En términos de coordenadas homogéneas define la aplicación  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ ,

$$A^*(x : y : z) = (y : x + z : y - z).$$

Por ejemplo, el punto proyectivo  $\bar{v} = (1 : 1 : 3)$  es aplicado en la recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$ , donde  $\bar{\eta} = (1 : 4 : -2)$ . La inversa de  $A^*$  es la aplicación  $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  (el asterisco es colocado en la posición inferior),

$$A_*(v) = \overline{A^{-1}(v)}.$$

Para explicar la aplicación precisamos saber la matriz inversa de  $[A]$ ,

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Siendo así,  $A_*(x : y : z) = (-x + y + z : x : x - z)$ . La recta proyectiva  $\bar{\eta} = (2, -1, 3)$  es aplicada en el punto proyectivo  $\bar{v} = (-3 : 2 : -1)$ .

De hecho, un operador lineal invertible de  $\mathbb{R}^3$  induce una correlación.

**Proposición 11.** *Sea  $A$  un operador lineal invertible en  $\mathbb{R}^3$ . Los puntos proyectivos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  son colineales, si y solamente si, las rectas proyectivas  $A^*(\bar{u}), A^*(\bar{v}), A^*(\bar{w}) \in \mathbb{RP}^{2*}$  son concurrentes.*

*Demostración.* La colinealidad y la concurrencia están relacionadas por

$$\det[A(u), A(v), A(w)] = \det([A][u, v, w]) = \det[A] \det[u, v, w].$$

Siendo así,  $\det[u, v, w] = 0$ , si, y solamente si,  $\det[A(u), A(v), A(w)] = 0$ . ■

*Cada correlación es inducida por un operador lineal invertible de  $\mathbb{R}^3$  y este operador es único a menos de una multiplicación por un escalar diferente de cero.*

Para Iniciar la presentación de este punto, tenemos a la mano un operador lineal invertible  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . La correlación inducida por  $A$  es la aplicación denotada y definida por

$$A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}, \quad A^*(\bar{v}) = \overline{A(v)}.$$

Para recordar, la notación  $A^*(\bar{v})$  y  $r_{A^*(\bar{v})}$  tiene el mismo significado, indican una misma recta proyectiva. Por todo lo que vimos, podemos afirmar que la correlación inversa inducida por  $A$  es la correlación inducida por el operador  $A^{-1}$ , o sea,

$$A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad A_*(\bar{\eta}) = \overline{A^{-1}(\eta)}.$$

## 4.4. Polaridades

Una correlación es una polaridad si su matriz es simétrica. Para una relación precisa es conveniente nombrar los dos tipos de correlaciones. Una aplicación *polar* es una correlación simétrica

$$A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*},$$

y una aplicación *polo* es una correlación simétrica

$$A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Una propiedad relevante de los operadores simétricos invertibles es que su operador inverso también es simétrico y  $[A^{-1}]^t = [A^{-1}]$ . Por lo tanto, la inversa de una polaridad es polo. Cuando utilizamos los términos “la polaridad definida por el operador  $A$ ” se subentiende que son las dos aplicaciones, polar y polo, como fueron definidas anteriormente. Tenemos la siguiente consecuencia de este caso.

**Proposición 12.** *Polaridad preserva incidencia:*  $\bar{v} \in r_{\bar{\eta}} \Leftrightarrow A_*(\bar{\eta}) \in r_{A_*(\bar{v})}$ .

*Demostración.* Examinemos las ecuaciones de incidencia

$$\langle A^{-1}(\eta), A(v) \rangle = \langle \eta, A^{-1t} \circ A(v) \rangle = \langle \eta, A^{-1} \circ A(v) \rangle = \langle \eta, v \rangle = \langle v, \eta \rangle.$$

El miembro izquierdo de esta igualdad se anula si, y solamente si, el miembro derecho se anula también. ■

Sean  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  y  $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  las aplicaciones polar y polo, respectivamente, asociadas a un operador lineal simétrico invertible  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- ✠ Cuando  $\bar{v} \in r_{A_*(\bar{v})}$  : diremos que el punto proyectivo  $\bar{v}$  es *autoconjugado*. Observe que la condición de ser autoconjugado es expresa algebraicamente por la ecuación de incidencia  $\langle v, A(v) \rangle = 0$ . En otras palabras,  $v$  pertenece a su polar.
- ✠ Cuando  $A_*(\bar{\eta}) \in r_{\bar{\eta}}$  diremos que la recta proyectiva es *autoconjugada*. De la misma forma, la condición de ser autoconjugada es expresa por la ecuación de incidencia  $\langle A^{-1}(\eta), \eta \rangle = 0$ . Una recta proyectiva es autoconjugada si ella incide en su polo.

**Proposición 13.** *Una recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$  contiene a lo mas dos puntos autoconjugados asociados a una aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ .*

*Demostración.* Sean  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  dos puntos autoconjugados y distintos sobre la recta  $r_{\bar{\eta}}$ . Siendo así,  $r_{A^*(v)}$  y  $r_{A^*(w)}$  son rectas distintas y cualquier punto del plano  $\Gamma_{\eta} \subset \mathbb{R}^3$  es una combinación lineal de los dos vectores  $v$  y  $w$ . Por lo tanto, los puntos de la recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$  son expresados en la forma  $\bar{u} = \overline{sv + tw}$ , donde  $s$  y  $t$  son números reales no nulos simultáneamente. Por la ecuación de autoconjugación tenemos que  $\langle v, A(v) \rangle = 0 = \langle w, A(w) \rangle$ . Vamos a suponer, por absurdo, que  $\bar{u}_0 = \overline{s_0v + t_0w}$  sea algún otro punto autoconjugado en  $r_{\bar{\eta}}$ , expresamos algebraicamente la condición para que este punto sea autoconjugado. Utilizando la bilinealidad del producto interno y la simetría,  $A = A^t$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_0, A(u_0) \rangle \\ &= s_0^2 \langle v, A(v) \rangle + 2s_0t_0 \langle v, A(w) \rangle + t_0^2 \langle w, A(w) \rangle \\ &= 2s_0t_0 \langle v, A(w) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $s_0 \neq 0$  y  $t_0 \neq 0$  entonces  $\langle v, A(w) \rangle = 0$ , lo cual significa que  $\bar{v} \in r_{A^*(\bar{w})}$ . Sin embargo  $\bar{v}$  es autoconjugado, entonces  $\bar{v} \in r_{A^*(\bar{v})}$ . lo cual implica que

$$\bar{v} \in r_{A^*(\bar{w})} \cap r_{A^*(\bar{v})}.$$

Como  $A$  es simétrica también tenemos  $\langle w, A(v) \rangle = 0$ , luego  $\bar{w} \in r_{A^*(\bar{v})}$ . Nuevamente, por el mismo argumento de autoconjugación, concluimos que

$$\bar{w} \in r_{A^*(\bar{v})} \cap r_{A^*(\bar{w})}.$$

Pero dos rectas proyectivas inciden en un único punto. Luego,  $\bar{v} = \bar{w}$ , contradicción pues estábamos asumiendo que ellos eran distintos. Por lo anterior, no existe un tercer punto autoconjugado en la recta proyectiva  $r_{\bar{\eta}}$ . ■

## 4.5. Cónicas en $\mathbb{RP}^2$

Una cónica en  $\mathbb{RP}^2$  definida por una aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  es el conjunto formado por los puntos que pertenecen a su polar. Mas exactamente:

**Definición 5.** La cónica determinada por la aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  es el conjunto definido y denotado por

$$\mathcal{C}_A = \{\bar{v} \in \mathbb{RP}^2; \quad \langle v, A(v) \rangle = 0\}.$$

Al partir de este punto pasaremos a suponer que la cónica no es vacía ni degenerada. Esto significa que los autovalores del operador lineal invertible y simétrico  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  no poseen el mismo signo.

En una definición mas técnica podríamos decir que la cónica  $\mathcal{C}_A$  es el conjunto de los puntos proyectivos autoconjugados en relación a la aplicación polar  $A^*$ . O, la cónica es el conjunto de los puntos que satisfacen la condición  $\bar{v} \in r_{A^*(\bar{v})}$ . Observemos que en la definición de cónica el conjunto  $\mathcal{C}_A$  no depende del representante del punto proyectivo escogido, pues si  $\langle v, A(v) \rangle = 0$  y  $\lambda \neq 0$  entonces  $\langle \lambda v, A(\lambda v) \rangle = \lambda^2 \langle v, A(v) \rangle = 0$ .

**Ejemplo 7.** Considere la matriz simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $[A]$  define un operador lineal  $A$  en  $\mathbb{R}^3$  y este a su vez induce una correlación  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  dado que el determinante de  $[A]$  no es nulo.  $A^*$  es una aplicación polar y define una cónica en  $\mathbb{RP}^2$ . Esta información está registrada en el polinomio característico de  $A$ ,  $p(\lambda)$ , pues las raíces son no nulas y no tienen el mismo signo,  $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1 + \sqrt{3})(\lambda - 1 - \sqrt{3})$ . La ecuación homogénea de la cónica  $\mathcal{C}_A$  en el plano proyectivo es calculada por  $\langle v, A(v) \rangle = 0$ , así,

$$\mathcal{C}_A : x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + 2z^2 = 0.$$

Dependiendo de su intersección con la recta ideal, las cónicas se clasifican en tres tipos. Se dice que una cónica  $\mathcal{C}_A$  es:

- ✠ una elipse, si  $\mathcal{C}_A$  no intercepta  $I_\infty$ ;
- ✠ una Parábola, si  $\mathcal{C}_A$  intercepta  $I_\infty$ ; en un único punto;
- ✠ una hipérbola, si  $\mathcal{C}_A$  intercepta  $I_\infty$ ; en dos puntos.

Estas son las tres posibilidades para la intersección con la recta ideal pues, como vimos en la Proposición 13, una recta Proyectiva posee a lo mas dos puntos autoconjugados.

## 4.6. Rectas tangentes

Sean  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  y  $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2$  las aplicaciones polar y polo, respectivamente, inducidas por un operador lineal simétrico invertible  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ . Asumimos que la aplicación polar define una cónica  $\mathcal{C}_A \subset \mathbb{RP}^2$ .

**Definición 6.** *La cónica dual es el conjunto definido y denotado por*

$$\mathcal{C}_A^* = \{\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}; \quad \langle A^{-1}(\eta), \eta \rangle = 0\}.$$

*Un punto de esta cónica es llamado recta tangente.*

Esta definición ilustra cuan elegante es la teoría de cónicas cuando el tratamiento es hecho con el lenguaje proyectivo. Vamos a mostrar que un punto de  $\mathcal{C}_A$  es, de hecho, una recta proyectiva tangente a la cónica  $\mathcal{C}_A$  con el significado de tangencia que estamos habituados. Con la notación ya establecida vale la siguiente proposición.

**Proposición 14.**  $A^*(\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_A^*$ .

*Demostración.* Primero debemos garantizar que una recta proyectiva tangente a la cónica “toca”  $\mathcal{C}_A$  en por lo menos un punto, digamos,  $A_*(\bar{\eta})$ .

**Afirmación 15.** Si  $\bar{\eta} \in \mathcal{C}_A^*$ . (tangente a la cónica) entonces  $A_*(\bar{\eta}) \in \mathcal{C}_A$ . En particular,  $A_*(\bar{\eta}) \in \mathcal{C}_A \cap r_{\bar{\eta}}$ .

Por la definición de recta tangente tenemos que  $A_*(\bar{\eta}) \in r_{\bar{\eta}}$ . En términos de la ecuación de incidencia podemos escribir  $\langle A^{-1}(\eta), \eta \rangle = 0$ . Verifiquemos que el punto proyectivo  $A_*(\bar{\eta}) = \overline{A^{-1}(\eta)}$  también pertenece a la cónica  $\mathcal{C}_A$ ,

$$\langle A^{-1}(\eta), A(A^{-1}(\eta)) \rangle = \langle A^{-1}(\eta), \eta \rangle = 0.$$

Por tanto,  $A_*(\bar{\eta}) \in \mathcal{C}_A \cap r_{\bar{\eta}}$ .

La segunda afirmación garantiza que para construir una (que será única) recta tangente a la cónica en el punto  $v \in \mathcal{C}_A$  debemos tomar la recta proyectiva  $A^*(\bar{v})$ .

**Afirmación 16.** Si  $\bar{v} \in \mathcal{C}_A$  entonces  $A^*(\bar{v}) \in \mathcal{C}_A^*$  (tangente a la cónica). En particular,  $\bar{v} \in \mathcal{C}_A \cap r_{A^*(\bar{v})}$ .

Por definición de cónica, si  $\bar{v} \in \mathcal{C}_A$  entonces  $\bar{v} \in r_{A^*(\bar{v})}$ . Como la aplicación polar y la aplicación polo son aplicaciones inversas una de la otra, tenemos que  $A_*(A^*(\bar{v})) = \bar{v} \in r_{A^*(\bar{v})}$ . En otras palabras, la recta proyectiva  $r_{A^*(\bar{v})}$  es tangente a la cónica. Ahora, como  $A_*$  es la inversa de  $A^*$ , claramente se sigue la proposición. ■

Caractericemos geoméricamente rectas tangentes. Del Cálculo sabemos que una recta tangente a una cónica en  $\mathbb{R}^2$  intercepta la cónica en un único punto.

**Proposición 15.**  $r_{\bar{\eta}} \cap \mathcal{C}_A = \{\bar{v}\}$  si, y solamente si,  $A^*(\bar{v}) = \bar{\eta} \in \mathcal{C}_A^*$ .

*Demostración:* ( $\Leftarrow$ ). Sea  $\bar{\eta} \in \mathcal{C}_A^*$ . Por las afirmaciones estudiadas en la demostración de la Proposición 14 podemos garantizar que  $A_*(\bar{\eta}) = \bar{v} \in \mathcal{C}_A \cap r_{A^*(\bar{v})}$ . Supongamos, por absurdo, que exista algún otro punto  $\bar{w}$  en esta intersección. Siendo así, cualquier punto del plano  $\Gamma_{A(v)} \subset \mathbb{R}^3$  es una combinación lineal de los vectores  $v$  y  $w$ . Por lo tanto, los puntos de la recta proyectiva  $r_{A^*(\bar{v})}$  son expresados en la forma

$$\bar{u} = \overline{sv + tw}, \quad \text{donde } s \text{ y } t \text{ son números reales no nulos simultáneamente.}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de autoconjugación  $\langle v, A(v) \rangle = 0 = \langle w, A(w) \rangle$ , la condición de incidencia  $\langle w, A(v) \rangle = 0$ , la bilinealidad del producto interno y la simetría del operador lineal  $A$ , evaluemos  $\langle u, A(u) \rangle$ , donde  $\bar{u} = \overline{sv + tw}$ ,

$$\langle u, A(u) \rangle = 2st\langle v, A(w) \rangle = 2st\langle w, A(v) \rangle = 0.$$

Como  $s$  y  $t$  pueden ser simultáneamente no nulos, las anteriores igualdades muestran que la recta proyectiva  $r_{A^*(\bar{v})}$  posee infinitos puntos autoconjugados. Esto es una contradicción pues como sabemos, pueden existir en a lo mas dos puntos autoconjugado sobre una recta proyectiva. ■

**Ejemplo 8.** Considere la cónica en  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ . Calculemos la ecuación de la recta tangente a la cónica  $\mathcal{C}$  en el punto  $p = (1, -1)$ . Como siempre, consideramos la cónica

proyectiva  $\mathcal{C}_A : x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ . De hecho,  $\mathcal{C}_A$  es un conjunto no vacío pues  $\bar{p} = (1 : -1 : 1)$  es uno de sus elementos. Como la aplicación polar asociada es  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ ,

$$A^*(x : y : z) = (x + \frac{1}{2}y : \frac{1}{2}x + y : -z),$$

la recta tangente  $r_{\bar{\eta}}$  en el punto  $\bar{p} = (1 : -1 : 1)$  es la recta polar de este punto,

$$\bar{\eta} = A^*(\bar{p}) = (\frac{1}{2} : -\frac{1}{2} : -1) = (-\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1).$$

La recta tangente a la cónica en  $\mathbb{R}^2$  se obtiene via identificación afín,  $l := -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$ . La cónica  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  es una elipse pues no existe intersección de  $\mathcal{C}_A$  con la recta ideal. Sino veamos. Sea  $v = (x : y : 0)$ . Por substitución tenemos las igualdades

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0.$$

---

## 4.7. Construyendo cónicas

---

Antes que todo mostremos que una colineación transforma cónicas en cónicas.

**Proposición 16.** *Sea  $\mathcal{C}_A$  una cónica definida por la aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  y sea  $B^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  una colineación. Entonces aquí  $\mathcal{C}_A$  es la cónica definida por la aplicación polar  $C^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ , donde  $[C] = [B^{-1t} \circ A \circ B^{-1}]$ .*

*Demostración:* Verificaremos que el conjunto de puntos proyectivos

$$B^*(\mathcal{C}_A) = \{\bar{w} \in \mathbb{RP}^{2*}; \bar{w} = B^*(\bar{v}) \quad \text{con} \quad \langle v, A(v) \rangle = 0\}.$$

es igual a la cónica

$$\mathcal{C}_C = \{\bar{w} \in \mathbb{RP}^{2*} : \langle w, B^{-1t} AB^{-1}(w) \rangle = 0\}.$$

Mostremos la inclusión  $B^*(\mathcal{C}_A) \subset \mathcal{C}_C$ . Sea  $\bar{w} \in B^*(\mathcal{C}_A)$ . Por definición, existe un punto proyectivo  $\bar{v}$  tal que  $\bar{w} = B^*(\bar{v})$  y satisfaciendo la ecuación  $\langle v, A(v) \rangle = 0$ . Calculemos

$$\begin{aligned} \langle w, B^{-1t} AB^{-1}(w) \rangle &= \langle B(v), B^{-1t} AB^{-1}(B(v)) \rangle \\ &= \langle B^{-1}(B(v)), A(v) \rangle \\ &= \langle v, A(v) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego,  $\bar{w} \in \mathcal{C}_C$ . ■

**Lema 1.** *Dados  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u} = (1 : 1 : 1)$  y  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$  en  $\mathbb{RP}^2$ . Entonces los puntos son tres a tres no colineales si, y solamente si,  $v_i \neq 0$  y  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$ .*

*Demostración:* Utilizando el criterio de no colinealidad entre tres puntos tenemos que

$$v_3 = \det[e_1, e_2, v] \neq 0, \quad v_2 = \det[e_1, e_3, v] \neq 0, \quad v_1 = \det[e_2, e_3, v] \neq 0.$$

De modo semejante,

$$v_3 - v_2 = \det[e_1, u, v] \neq 0, \quad v_1 - v_3 = \det[e_2, u, v] \neq 0, \quad v_2 - v_1 = \det[e_3, u, v] \neq 0.$$

Esto termina la demostración del lema. ■

**Proposición 17.** *Dados los puntos proyectivos  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u} = (1 : 1 : 1)$  y  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$ . Si ellos son tres a tres no colineales, entonces existe una única cónica  $\mathcal{C}_A$  que pasa por los cinco puntos dados. Más aun, la cónica  $\mathcal{C}_A$  es inducida por un operador lineal  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz canónica es*

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & v_3(v_1 - v_2) & v_2(v_3 - v_1) \\ v_3(v_1 - v_2) & 0 & v_1(v_2 - v_3) \\ v_2(v_3 - v_1) & v_1(v_2 - v_3) & 0 \end{bmatrix}.$$

*Demostración:* Sea

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

Para que los puntos  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  y  $\bar{e}_3$  sean autoconjugados en relación a la aplicación polar inducida por  $A$  las entradas de la diagonal de la matriz deben ser

$$a = \langle e_1, A(e_1) \rangle = 0, \quad d = \langle e_2, A(e_2) \rangle = 0, \quad f = \langle e_3, A(e_3) \rangle = 0.$$

De donde se sigue que

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & e \\ c & e & 0 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos  $\bar{u} = (1 : 1 : 1)$  y  $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$  sean autoconjugados debemos tener las siguientes relaciones entre los coeficientes de la matriz,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, A(u) \rangle = b + c + e, \\ 0 &= \langle v, A(v) \rangle = v_1 v_2 b + v_1 v_3 c + v_2 v_3 e. \end{aligned}$$

Cualquier solución de este sistema puede tener las entradas buscadas. Es claro que las soluciones están en la intersección de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_u &= \{(b, c, e) \in \mathbb{R}^3 : b + c + e = 0\}, \\ \Gamma_\nu &= \{(b, c, e) \in \mathbb{R}^3 : v_1 v_2 b + v_1 v_3 c + v_2 v_3 e = 0\}. \end{aligned}$$

El Lema 1 y las hipótesis sobre las coordenadas homogéneas de  $\bar{v}$ , implican que los subespacios no son los mismos y que  $\nu = (v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3)$  no es el vector nulo. Luego, las soluciones del sistema son los múltiplos de  $u \times \nu$ . Por lo tanto, podemos tomar como entradas de la matriz las coordenadas del propio producto vectorial, o sea,

$$b = v_3(v_1 - v_2), \quad c = v_2(v_3 - v_1), \quad e = v_1(v_2 - v_3).$$

Luego, un posible operador simétrico que induce una aplicación polar para la cual aquellos puntos son autoconjugados tiene como matriz canónica

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & v_3(v_1 - v_2) & v_2(v_3 - v_1) \\ v_3(v_1 - v_2) & 0 & v_1(v_2 - v_3) \\ v_2(v_3 - v_1) & v_1(v_2 - v_3) & 0 \end{bmatrix}$$

Resta probar que esta matriz es invertible. De hecho, como los puntos son no colineales, por el Lema 1,  $v_i \neq 0$  y  $v_i \neq v_j$  para todo  $i \neq j$ . Por otro lado, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \det A &= 2v_1 v_2 v_3 \\ (v_1 - v_2)(v_3 - v_1)(v_2 - v_3) &\neq 0. \end{aligned}$$

Luego la cónica buscada es definida por la aplicación polar determinada por  $A$ . ■

**Ejemplo 9.** Determinemos la ecuación de la cónica que incide en los puntos  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u} = (1 : 1 : 1)$  y  $\bar{v} = (-1 : 1 : 2)$ . Utilizando la Proposición 17 la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

induce la aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$  cuyo conjunto de puntos autoconjugados es la cónica buscada. Por cálculo directo llegamos a  $\mathcal{C}_A : -8xy + 6xz + 2yz = 0$ . Para determinar cual es el tipo de cónica, examinamos la intersección con los puntos ideales. Pero ya conocemos esta intersección, son los puntos  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$ . Luego, la cónica es una hipérbola.

**Teorema 5 (Teorema de Pappus y Maclaurin).** *Dados cinco puntos proyectivos de manera que tres cualesquiera de ellos son no colineales, entonces existe una única cónica que pasa por estos puntos.*

*Demostración:* Sean los cinco puntos  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  y  $\bar{e}$ , en las condiciones de la hipótesis. Considere la única colineación  $B^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que aplica, respectivamente, los puntos  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  y  $\bar{u} = (1 : 1 : 1)$  en los puntos  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ . Sea  $\bar{v} = B^{*-1}(\bar{e})$ . Por la Proposición 17, existe una única aplicación polar  $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que define una cónica pasando por los puntos  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u}$  y  $\bar{v}$ , luego la colineación  $B^*$  transforma la cónica  $\mathcal{C}_A$  en la cónica buscada. ■

**Ejemplo 10.** Determinemos la ecuación de la cónica que pasa por los puntos

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (0 : 1 : 1), & \bar{b} &= (1 : 0 : -1), & \bar{c} &= (2 : 1 : 0), \\ & & \bar{d} &= (1 : 1 : 3), & \bar{e} &= (3 : 1 : 3). \end{aligned}$$

inicialmente construimos la colineación  $\bar{B} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  tal que

$$\bar{B}(\bar{e}_1) = \bar{a}, \quad \bar{B}(\bar{e}_2) = \bar{b}, \quad \bar{B}(\bar{e}_3) = \bar{c}, \quad \bar{B}(\bar{u}) = \bar{d},$$

donde  $\bar{u} = (1 : 1 : 1)$ . Como sabemos,  $[B] = [k_1 a, k_2 b, k_3 c]$ , donde

$$k_1 = \frac{\det[d, b, c]}{\det[a, b, c]} = -2, \quad k_2 = \frac{\det[a, d, c]}{\det[a, b, c]} = -5, \quad k_3 = \frac{\det[a, b, d]}{\det[a, b, c]} = 3.$$

Por tanto, la colineación es determinada por la matriz

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea ahora,

$$\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3 = \overline{B}^{-1}(3 : 1 : 3) = (2 : \frac{7}{5} : \frac{5}{3}).$$

Por el Teorema 5 existe una única cónica pasando por  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u}$  y  $\bar{v}$  y ella está asociada a la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7/15 \\ 1 & 0 & -8/15 \\ -7/15 & -8/15 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego la cónica buscada es inducida por el operador  $C$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz canónica es  $[C] = [B^{-1t}AB^{-1}]$ .

## 4.8. Teorema de Pascal

El Teorema de Pascal es para las cónicas así como el teorema de Pappus es para rectas euclidianas. Utilizaremos la siguiente notación por simplicidad del enunciado. Dados dos puntos proyectivos  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  denotaremos la recta proyectiva definida por estos dos puntos por  $r_{\bar{u}\bar{v}}$ , donde  $\bar{\eta}_{uv} = \overline{u \times v}$ .

**Teorema 6 (Hexagrama místico de Pascal).** Sean  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  seis puntos distintos sobre una cónica  $\mathcal{C}_A$ . Los puntos

$$\bar{a} = r_{\bar{v}\bar{w}'} \cap r_{\bar{v}'\bar{w}}, \quad \bar{b} = r_{\bar{u}\bar{w}'} \cap r_{\bar{u}'\bar{w}}, \quad \bar{c} = r_{\bar{u}\bar{v}'} \cap r_{\bar{u}'\bar{v}}.$$

son puntos colineales.

*Demostración:* Vamos a suponer inicialmente que

$$\bar{u}' = (0 : 1 : 0), \quad \bar{v} = (1 : 0 : 0), \quad \bar{w}' = (0 : 0 : 1).$$

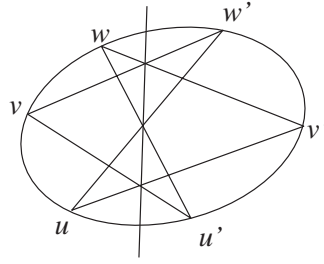


Figura 4.3: Hexagrama místico de Pascal

Como  $\bar{u}'$  y  $\bar{v}$  pertenecen al conjunto de los puntos ideales  $I_\infty$ , y los puntos ideales forman una recta proyectiva, podemos garantizar que ningún otro punto pertenece a  $I_\infty$ . Por tanto, podemos considerar las coordenadas para los puntos proyectivos restantes con la tercera coordenada igual a 1,

$$\bar{u} = (u_1 : u_2 : 1), \quad \bar{v}' = (v_1 : v_2 : 1), \quad \bar{w} = (w_1 : w_2 : 1).$$

Como los puntos  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  son intersecciones de rectas proyectivas, ellas son las clases de equivalencia de los siguientes puntos de  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente,

$$a = \eta_{vw'} \times \eta_{v'w} \quad b = \eta_{uw'} \times \eta_{u'w} \quad c = \eta_{uv'} \times \eta_{u'v}.$$

Efectuando las operaciones obtenemos los vectores

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{vw'} = (0, -1, 0), \\ \eta_{v'w} = (v_2 - w_2, w_1 - v_1, v_1w_2 - v_2w_1), \\ \eta_{uw'} = (u_2, -u_1, 0), \\ \eta_{u'w} = (1, 0, -w_1), \\ \eta_{uv'} = (u_2 - v_2, v_1 - u_1, u_1v_2 - u_2v_1), \\ \eta_{u'v} = (0, 0, -1), \end{array} \right.$$

y, después de un cálculo directo, concluimos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a} = (-v_1w_2 + v_2w_1 : 0 : v_2 - w_2), \\ \bar{b} = (u_1w_1 : u_2w_1 : u_1), \\ \bar{c} = (-v_1 + u_1v_3 : u_2 - v_2 : 0) \end{array} \right. .$$

El criterio para saber que los puntos proyectivos  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  son colineales es evaluar el determinante de la matriz  $[a, b, c]$  y concluir que ella es cero. Con una manipulación algebraica, verificamos que el determinante de esta matriz es igual a un otro determinante de otra matriz, a saber,

$$\det \begin{bmatrix} -v_1w_2 + v_2w_1 & u_1w_1 & -v_1 + u_1v_3 \\ 0 & u_2w_1 & u_2 - v_2 \\ v_2 - w_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_1u_2 & u_1 & u_2 \\ v_1v_2 & v_1 & v_2 \\ w_1w_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el problema queda reducido a que mostremos que la matriz

$$[M] = \begin{bmatrix} u_1u_2 & u_1 & u_2 \\ v_1v_2 & v_1 & v_2 \\ w_1w_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}.$$

tiene determinante cero, o equivalentemente, mostrar que el operador lineal en  $\mathbb{R}^3$  definido por la matriz  $[M]$  tiene núcleo no trivial. Para esto, basta encontrar un vector no nulo  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $M(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ . Este vector que buscamos está relacionado con la matriz simétrica no singular,  $A$ , que define la cónica  $\mathcal{C}_A$ . Vamos a suponer, para facilitar los cálculos, que la matriz  $A$  se puede escribir como

$$[A] = \begin{bmatrix} l & k_1 & k_2 \\ k_1 & m & k_3 \\ k_2 & k_3 & n \end{bmatrix}.$$

Como  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}' \in \mathcal{C}_A$  debemos tener, por definición de cónica las igualdades:

$$\begin{cases} 0 = \langle u', A(u') \rangle = l \\ 0 = \langle v', A(v') \rangle = m \\ 0 = \langle w', A(w') \rangle = n \end{cases}.$$

De donde se sigue que

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis, los puntos proyectivos  $\bar{u}, \bar{v}'$  y  $\bar{w}$  también pertenecen a la cónica  $\mathcal{C}_A$ . Por lo tanto, de las ecuaciones

$$0 = \langle u, A(u) \rangle, \quad 0 = \langle v', A(v') \rangle, \quad \text{y} \quad 0 = \langle w, A(w) \rangle.$$

obtenemos el sistema de ecuaciones con incógnitas  $k_1, k_2$  y  $k_3$ ,

$$\begin{cases} u_1 u_2 k_1 + u_1 k_2 + u_2 k_3 = 0 \\ v_1 v_2 k_1 + v_1 k_2 + v_2 k_3 = 0 \\ w_1 w_2 k_1 + w_1 k_2 + w_2 k_3 = 0 \end{cases}.$$

sin embargo el sistema puede ser escrito matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} u_1 u_2 & u_1 & u_2 \\ v_1 v_2 & v_1 & v_2 \\ w_1 w_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  es una matriz no singular tenemos que

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & k_3 & 0 \end{vmatrix} = 2k_1 k_2 k_3 \neq 0.$$

Observe que el vector  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$  es un vector no nulo, pues todas sus coordenadas son diferentes de cero, y está en el núcleo del operador lineal  $M$ , implicando que el determinante de la matriz asociada a  $M$  es cero. Más, por construcción,  $\det[M] = \det[a, b, c]$ . Luego,  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  están sobre una misma recta proyectiva, como queríamos demostrar. ■

## 4.9. Teorema de Brianchon

Recordamos que un polígono en el plano proyectivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  es obtenido de un polígono en  $\mathbb{R}^2$  vía identificación afín, compuesta con una colineación.

**Teorema 7 (Teorema de Brianchon).** *Las diagonales determinadas por pares opuestos de vértices de un hexágono circunscrito a una cónica son concurrentes.*

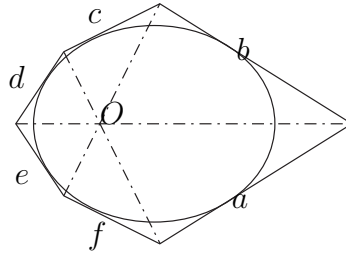


Figura 4.4: Teorema de Brianchon

*Demostración:* (vea [8])



# Capítulo 5

## Geometría Hiperbólica

### 5.1. El modelo proyectivo del plano no euclidiano.

Con las nociones anteriores de geometría proyectiva, vamos a construir un modelo de geometría plana en la cual no vale el postulado V de Euclides, valiendo en cambio los cuatro primeros. El modelo va a corresponder a la geometría hiperbólica o de **Lobachevsky-Bolyai**, la más interesante, pues en ella las rectas son abiertas e ilimitadas. Debemos definir:

- a) El plano no euclidiano, con los puntos y rectas del mismo.
- b) La igualdad o congruencia de figuras.

Para esto último se adopta, en esencia, la misma definición de Euclides: dos figuras son iguales cuando existe un movimiento que lleva una de ellas a coincidir con la otra. Debemos, por lo tanto, definir también que se entiende por un “movimiento”.

Sea  $Q$  una elipse fija del plano. Se llamará la *cónica absoluta* o, simplemente, el *absoluto* del plano. Si en vez de una elipse se tomara una hipérbola o una parábola, todo lo que sigue valdría igualmente, pero es más intuitivo razonar sobre una elipse por tener esta curva todos sus puntos a distancia finita. Incluso, para concretar más las ideas, se podría tomar una elipse especial, por ejemplo, una circunferencia.

**Definición 7.** *El plano de la geometría no euclidiana será el interior del absoluto. Los puntos y las rectas son los mismos elementos de la geometría ordinaria, pero las rectas se toman reducidas a la parte de ellas que es interior al absoluto.*

Es indispensable observar que se considera únicamente el interior de  $Q$ , es decir, se excluyen los puntos exteriores y también los puntos de  $Q$ . Esto hace que el plano no Euclidiano sea ilimitado, puesto que no tiene límite o contorno perteneciente al mismo. La recta  $AB$ , por ejemplo, no tiene puntos terminales, puesto que los puntos  $A$  y  $B$  de la cónica ya no pertenecen al plano no euclidiano ni, por lo tanto, a la recta (ver Figura 5.1).

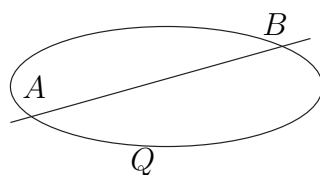


Figura 5.1: Cónica Absoluta

---

## 5.2. Los movimientos del plano no euclidiano.

---

Para cualquier geometría es fundamental el concepto de igualdad o congruencia de figuras. La definición misma de ángulo recto o la de rectas perpendiculares se apoyan en la igualdad de dos ángulos adyacentes. En la geometría euclidiana, dos figuras son iguales cuando pueden hacerse coincidir mediante un movimiento, entendiendo por tal una transformación del plano euclidiano en sí mismo, que conserva todas las distancias entre sus puntos (distancias entendidas en el sentido de la geometría elemental). Para el modelo de geometría no euclidiano que estamos considerando, los movimientos van a ser más complicados.

**Definición 8.** *Se llama movimiento del plano no euclidiano a toda colineación del plano en sí mismo que deje invariante la cónica absoluta.*

**Definición 9.** *Dos figuras se dirán iguales o congruentes, cuando exista un movimiento que transforme una en la otra.*

En este capítulo, al hablar de movimientos entenderemos siempre que se trata de movimientos no euclidianos, de acuerdo con la definición precedente.

**Observación 5.** Aunque el plano no euclidiano consta únicamente del interior de  $Q$ , en las construcciones sucesivas haremos uso de todo el plano proyectivo, incluidos  $Q$  y el exterior

de  $Q$ . Ello se hace por una razón de comodidad en los razonamientos, pero no debe perderse de vista que sólo interesa la parte interior a  $Q$ , y que los puntos de  $Q$  o exteriores a esta cónica no pertenecen al plano no euclidiano. Los llamaremos, como es costumbre, puntos “ideales”. Igualmente, las rectas tangentes o exteriores a  $Q$  se llamaría rectas “ideales”.

### 5.3. Ángulos rectos.

Aceptando la misma definición de Euclides, se llama ángulo recto a cada uno de dos adyacentes iguales. Las rectas que los forman se llaman perpendiculares.

Dadas dos rectas  $a \equiv A_1A_2$  y  $b \equiv B_1B_2$  que se cortan en  $p$ , queremos ver qué condición deben cumplir para que sean perpendiculares (ver Figura 5.2). Para ello debe existir un movimiento

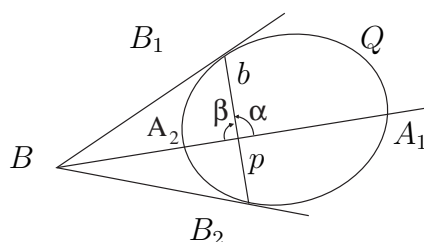


Figura 5.2: Ángulos rectos

que superponga el ángulo  $a = B_1pA_1$  con  $\beta = B_1pA_2$ .

### 5.4. Los cuatro primeros postulados de Euclides.

Vamos a ver como en el plano no euclidiano se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides.

**Postulado 1.** *Se cumple evidentemente, puesto que dos puntos cualesquiera, interiores a una cónica  $Q$ , pueden unirse con un segmento totalmente contenido en el interior de  $Q$ .*

**Postulado 2.** *También se cumple. Debemos tener en cuenta, nuevamente, que no perteneciendo la cónica  $Q$  al plano no euclidiano, las rectas son ilimitadas, es decir, cualquiera que sea*

el extremo de un segmento interior a  $Q$ , siempre puede prolongarse sin llegar a los puntos de  $Q$ .

**Postulado 3.** Equivale a decir que, dado un segmento  $AB$  (radio) y un punto  $O$  (centro) sobre cualquier semirrecta  $a$  que pase por  $O$  se puede tomar un segmento  $OH = AB$  (ver Figura 5.3); al variar  $a$ , el punto  $H$  describirá la circunferencia del enunciado. Para ello basta considerar un movimiento que lleve  $A$  sobre  $O$  y la semirrecta que contiene a  $AB$  sobre la semirrecta  $a$ ; el transformado de  $B$  (que es el mismo para cualquiera de estos dos movimientos) será el punto  $H$  buscado.

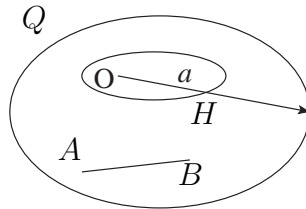


Figura 5.3: Postulado 3

**Postulado 4.** También se cumple. En efecto, dados dos ángulos rectos de vértices  $P$  y  $P'$ , formados respectivamente por los pares de semirrectas  $a, b$  y  $a', b'$  (ver Figura 5.4). Existen dos movimientos que llevan  $P$  sobre  $P'$  y  $a$  sobre  $a'$ . Como en un movimiento a elementos alineados les corresponden elementos alineados

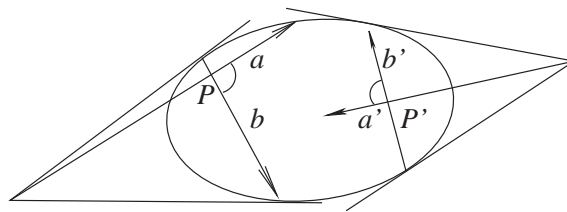


Figura 5.4: Postulado 4

también la recta que contiene a  $b$  coincidirá con la que contiene a  $b'$ , y de los dos movimientos uno de ellos lleva  $b$  sobre  $b'$ . Por lo tanto, siendo superpuestos por un movimiento, los dos ángulos rectos son iguales.

## 5.5. El quinto postulado.

El postulado V, en cambio, ha dejado de cumplirse. En efecto, por un punto  $P$  exterior a la recta  $AB$  (ver Figura 5.5) pasan:

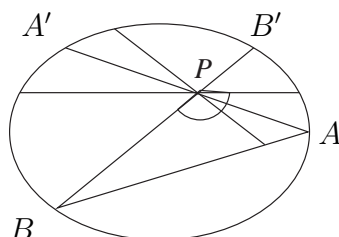


Figura 5.5: Postulado V

- las rectas interiores al ángulo  $APB$  que cortan a la recta  $r \equiv AB$  (rectas secantes);
- las rectas interiores al ángulo  $APB'$  que no cortan a  $r$  (rectas no secantes);
- las rectas  $AA'$  y  $BB'$  que separan ambas clases de rectas y tampoco cortan a  $r$ , pero que son límites de rectas secantes (rectas paralelas a  $r$ ).

Estamos, por consiguiente, en el caso correspondiente a la geometría no euclidiana hiperbólica. El ángulo  $APB$  es el doble del ángulo de paralelismo, ángulo que no debe medirse en su verdadera magnitud sobre el plano del dibujo. De c) resulta

**Teorema 8.** *En el modelo que estamos considerando, rectas paralelas son las que se cortan sobre el absoluto  $Q$ .*

Esto justifica el llamar punto del infinito del plano no euclidiano a los puntos de  $Q$ .

De lo anterior se deducen inmediatamente algunas propiedades simples que constituyen los primeros teoremas de la geometría no euclidiana hiperbólica.

- Por un punto  $P$  pasa una y solo una perpendicular a una recta dada  $r$ .  
Es la recta que une  $P$  con el polo  $R$  de  $r$ .

2. Dos rectas no secantes admiten siempre una perpendicular común. Rectas paralelas o secantes no admiten perpendicular común.

Si  $a$  y  $b$  son no secantes, su intersección es un punto “ideal”  $H$ , exterior a  $Q$  (ver Figura 5.6). La polar  $b$  de  $H$  es la perpendicular común. Si  $a$  y  $b$  son secantes o paralelas, su intersección  $H$  es interior o pertenece a  $Q$ ; por lo tanto su polar  $b$  es exterior, o sea, no pertenece al plano no euclidiano.

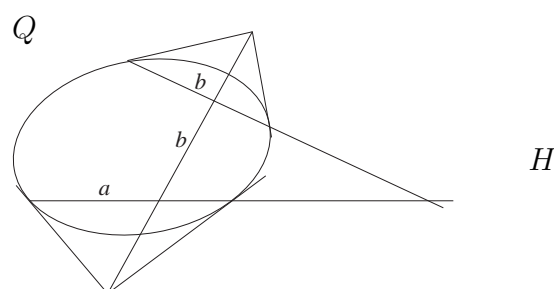


Figura 5.6: Punto Ideal

3. Dos semirrectas  $a$  y  $b$  admiten siempre una paralela común.

Es la recta  $r$  que une los puntos en que  $a$  y  $b$  cortan al absoluto (ver Figura 5.7). Si  $a$  y  $b$  son paralelas, cualquier recta que pasa por el punto en que cortan a  $Q$  es paralela a ambas.

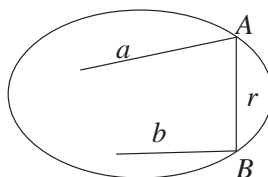


Figura 5.7: Paralelas en común

4. El ángulo de paralelismo es menor que un recto.

Sea la recta  $r \equiv AB$  y el punto  $P$  (ver Figura 5.8). Si  $R$  es el polo de  $r$ , la perpendicular por  $P$  a  $r$  es la recta  $b \equiv PR$ , y el ángulo de paralelismo es  $a = RPA$ . El polo  $H$  de  $b$

pertenece a  $r$  y es exterior a  $Q$ , por lo tanto  $a < \text{áng} RPH = 1$  recto, de acuerdo con el enunciado.

Esta propiedad es conocida con el nombre de axioma de **Lobachevsky**.

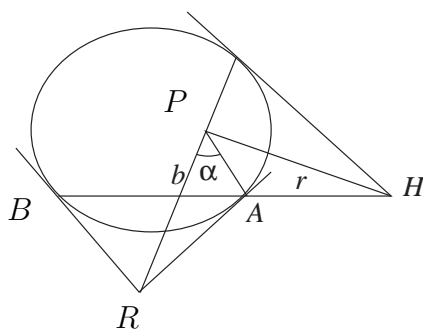


Figura 5.8: Lobachevsky

También es cierto que cada ángulo  $a$  menor que un recto es ángulo de paralelismo de cierto punto  $P$  y una recta  $r$ . Basta observar que, en la (ver Figura 5.9), dados  $P, b$  y  $a$  quedan determinados  $H$  y  $A$ , y por lo tanto también la recta  $r \equiv HA$ .

5. Dos pares de rectas paralelas son siempre congruentes.

Sean los pares  $a, b$  y  $a', b'$  (ver Figura 5.9). Según el teorema 4 del capítulo IV, existe un movimiento que transforma  $M$  en  $M'$ ,  $A$  en  $A'$  y  $B$  en  $B'$ , el cual lleva el par  $a, b$  a coincidir con el  $a', b'$ .

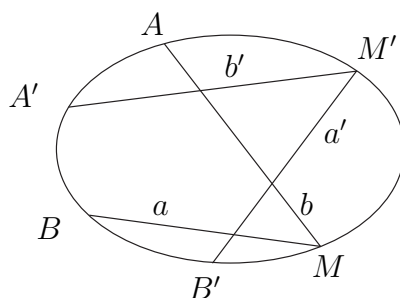


Figura 5.9: Congruencia

# Bibliografía

- [1] ALVES DE BARROS A., DE ASSIS PLÁCIDO F., *Introdução à Geometria Projetiva*. Brasil, XIII Escola de Geometria Diferencial, Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo. 2004.
- [2] GANS DAVID, *An Introduction Non-Euclidean Geometry*. Academic Press, New York, 1973.
- [3] MOISE, EDWIN E. *Elementos de Geometría Superior*, Adison-Wesley Publishing. Mexico, 1968.
- [4] LANGES LIMA E., *Grupo Fundamental e Espaços de recobrimento*, Segunda edição, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.
- [5] LANGES LIMA E., *Álgebra Linear*, Terceira edição, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.
- [6] SANTALÓ L.A., *Geometría Proyectiva*. Argentina, 1996. Editorial universitaria de Buenos Aires.
- [7] GROSSMAN STANLEY I., *Álgebra lineal*. Mexico, 1996. Editorial McGRAW-HILL.
- [8] <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/aspectosinsolitos/aspectosinsolitos.html> recuadro3.