

NOCIÓN DE DIMENSIÓN EN ESPACIOS
MÉTRICOS SEPARABLES

LILIANA ROMÁN GÓMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004

NOCIÓN DE DIMENSIÓN EN ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES

LILIANA ROMÁN GÓMEZ

Proyecto de grado presentado como requisito
para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Directora

Sonia Marleni Sabogal Pedraza
Doctora en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004

TÍTULO:

LA NOCIÓN DE DIMENSIÓN EN ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES *

AUTOR:

ROMÁN GÓMEZ Liliana **

PALABRAS CLAVES:

Dimensión, dimensión topológica, vecindad, frontera, espacio métrico separable.

DESCRIPCIÓN Y CONTENIDO:

La noción intuitiva que conocemos de dimensión es la que asigna los enteros 1,2,3 a los objetos que poseen longitud positiva (área y volumen cero), área positiva (longitud infinita y volumen cero) y volumen positivo, respectivamente. Indagando en la historia encontramos que Platón y Euclides expusieron la idea de lo que ellos entendían en ese entonces por dimensión; partiendo de esto grandes matemáticos se interesaron por buscar una definición o interpretación formal de este concepto, logrando encontrar una definición de tantas que fuera compatible con cierta clase de espacios específicos, permitiendo así el desarrollo más avanzado de la topología desarrollando una teoría formal : la teoría de la dimensión.

En el desarrollo de este trabajo de grado se hace una introducción de la teoría antes mencionada, con una noción formal del concepto de dimensión dada por una definición inductiva debida a los matemáticos Uryson y Karl Menger. Esta definición es para espacios métricos separables, y por la forma como está planteada se puede interpretar como una noción topológica de la dimensión. Dicha definición es inductiva, ya que parte del hecho de que la dimensión del conjunto vacío (\emptyset) es -1, y de aquí resulta toda la teoría que ha permitido justificar que la dimensión del espacio R^n es n; este resultado se muestra en este trabajo, así como otras propiedades de la dimensión.

Las consultas hechas para el desarrollo del presente trabajo han permitido verificar que el concepto tratado es un tanto complejo requiere de muchas más investigaciones para lograr encontrar algo más de lo oculto que esconde. Con este trabajo se da inicio al estudio formal de este tema.

* Proyecto de grado

** Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. Asesor: Sonia Marleni Sabogal.

TITLE:
THE INTUITIVE NOTION IN SEPARABLES METRIC SPACES*

AUTHOR:
ROMÁN GÓMEZ Liliana**

KEY WORDS:
Dimension, topological dimension, neighborhood, boundary, separable metric space.

DESCRIPTION AND CONTENT

The intuitive notion of dimension as we know, is that one that assigns whole numbers 1, 2, 3 to the objects that have positive length (area and volume zero), positive area (infinite length and volume zero) and positive volume, respectively. Investigating in history we found that Plato and Euclides exposed the idea of which they understood by dimension. Starting from this point, great mathematicians were interested in looking for a formal definition or of this concept, a definition compatible with certain class of specific spaces, allowing therefore the more advanced development of the topology, developing a formal theory: the theory of the dimension.

In the development of this work of degree an introduction of the theory is made saying before, with a formal notion of the concept of dimension given by an inductive definition due to the mathematicians Urysohn and Karl Menger. This definition is for separable metric spaces, and by the form it is posed, it can be interpreted like a topological notion of the dimension. This definition is inductive since it leaves from the fact that the dimension empty set is -1 , and from this it has been possible to justify that the dimension of the R^n space is n ; this result is in this work, as well as other properties of the dimension.

The consultations done for the development of the present work have allowed to verify that the treated concept is somewhat complex and that it requires of many more investigations to manage to find something more. The present work begins the formal study of this concept.

* Graduation project

** Faculty of sciences, School of Mathematics. Adviser: Sonia Marleni Sabogal

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Separación de subconjuntos en un espacio X .	9
Figura 2. Bola abierta.	12
Figura 3. La esfera.	12
Figura 4. Conjunto de Cantor.	16
Figura 5. Curva de Peano.	21
Figura 6. Dimensión 0.	27
Figura 7. Dimensión de los racionales.	28
Figura 8. Dimensión de $\mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$.	29
Figura 9. Dimensión de \mathcal{R}_1^2 .	30
Figura 10. Dimensión de un conjunto contable.	34
Figura 11. Dimensión de un subconjunto de un espacio 0 – dimensional.	35
Figura 12. Dimensión n .	42
Figura 13. Dimensión de \mathbb{R} .	43
Figura 14. Dimensión de un subespacio.	45
Figura 15. Dimensión de S_0 .	48
Figura 16. Proyección estereográfica de $S^1 - \{p\}$ sobre la recta real.	59
Figura 17. El cubo I^n con $n = 2, 3, 4$.	65
Figura 18. La Crucifixión.	81

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	2
1.1. Conceptos de conjuntos y topología	2
1.2. Espacios métricos	11
2. Algunos datos históricos y generalidades	18
2.1. Datos históricos	18
2.2. Generalidades sobre la noción de dimensión	22
3. Dimensión 0	26
4. Definición de dimensión n	41
4.1. Dimensión n	41
4.2. Dimensión de subespacios	45
5. Algunas propiedades de la dimensión	52
5.1. Teorema de la unión para la dimensión n	53
5.2. La imagen topológica de un conjunto n -dimensional es n -dimensional	56
5.3. El Espacio n -Euclideo \mathbb{R}^n es n -dimensional.	60

5.4. Cada parte de un conjunto n -dimensional es a lo más n -dimensional.	66
5.5. Cada conjunto de dimensión n puede ser transformado topológicamente en un subconjunto de un conjunto compacto de dimensión n .	67
5.6. Traducción del artículo ¿WHAT IS DIMENSION?	67
5.7. Algunos comentarios	79

Introducción

El concepto de dimensión siempre ha despertado interés entre la comunidad educativa incluyendo matemáticos puros, especialistas en la educación matemática, y otros campos de la ciencia, tanto que mucho antes de Euclides, más específicamente Platón, a través de una analogía, que veremos más adelante, trata de dar una idea o noción de lo que él entendía por dimensión en ese entonces. Durante todo este tiempo hasta nuestros días se han dado muchas interpretaciones de lo que es la dimensión en nuestro espacio, una es la noción de movimiento o también conocida como el grado de libertad, es decir, si el espacio sólo constara de un punto, allí no habría posibilidad de movimiento, no habría lugar a donde caminar, por esto se dice que el punto tiene dimensión 0, si estuviéramos parados sobre una recta, sólo hay una posibilidad de movimiento, hacia delante o hacia atrás, luego se dice que la recta tiene dimensión 1; si se tratara del plano entonces hay dos posibles movimientos arriba-abajo, derecha-izquierda entonces se dice que el plano es de dimensión 2, y en nuestro espacio hay tres posibles movimientos arriba-abajo, derecha-izquierda y delante-atrás, cuya dimensión en esta interpretación es 3.

La noción matemática que se presenta en este trabajo con la exposición de la definición de dimensión n , es una noción topológica ya que involucra conceptos topológicos como son frontera y vecindad, términos que cualquier estudiante

de análisis matemático y claramente de topología, puede comprender. Los espacios a los cuales se aplica dicha definición, es a **espacios métricos separables**.

El contenido de este trabajo de grado consta de cinco capítulos descritos de la siguiente forma: el primer capítulo consta de todos los conceptos, teoremas, proposiciones y ejemplos previos necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. El capítulo dos contiene datos históricos que muestran los hallazgos de matemáticos importantes que permitieron el desarrollo de una rama nueva de la topología como es la **teoría de la dimensión**; y en general algo más sobre la noción de dimensión. El capítulo tres trata aspectos importantes de la dimensión 0 que es un caso particular de la definición general. En el capítulo cuatro se expone la definición de dimensión n , proposiciones y teoremas necesarios para el desarrollo del capítulo quinto que consta de cinco propiedades de la dimensión presentadas en el artículo **¿What is dimension?** cuyo autor es **Karl Menger** [7], en este capítulo se incluye además una traducción del artículo mencionado y finalmente algunos comentarios adicionales. La Teoría de la Dimensión ha desarrollado muchos más aspectos de este concepto, aquí sólo se hace una introducción a una noción formal del concepto de dimensión.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo del presente trabajo de grado fue necesario tener en cuenta algunos conceptos básicos de topología y conjuntos como definiciones y teoremas que se precisan en este capítulo para un mejor entendimiento del lector, conceptos tomados principalmente de [5], [9], [10], [13] y [17].

1.1. Conceptos de conjuntos y topología

Definición 1.1 Una *topología* sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto X para el cual una topología τ esta definida es llamado un **espacio topológico**.

Si X es un **espacio topológico** con **topología** τ , un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** de X si $U \in \tau$.

Ejemplo 1.1 En \mathbb{R} todos los conjuntos que son uniones de intervalos abiertos, forman una topología llamada la **topología usual** de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.2 Sea X un conjunto cualquiera, entonces $\tau_{discreta} = P(X)$ ¹ (conjunto de partes de X). $P(X)$ forma una topología sobre X , que es conocida como la **topología discreta**.

Definición 1.2 Si (X, τ) es un espacio topológico, una **base** para τ es una subfamilia $\beta \subseteq \tau$ con la propiedad que: dados un abierto U y un punto $x \in U$, existe un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$; esto indica que cada abierto de τ es unión de elementos de β .

Ejemplo 1.3 Los intervalos abiertos de \mathbb{R} constituyen una base para la topología usual de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.4 La colección $\{\{x\} \mid x \in X\}$ es base para la topología discreta sobre X .

Definición 1.3 Sea X un conjunto. $\beta \subseteq P(X)$ es **base de una topología para** X si y sólo si se cumple que

1. $X = \cup\{B \mid B \in \beta\}$.
2. Dados cualesquiera $U, V \in \beta$ y $x \in U \cap V$ existe un B en β tal que $x \in B \subseteq U \cap V$. Es decir, $U \cap V$ es unión de elementos de β para todo par U, V de β .

Una colección $\beta \subseteq 2^X = P(X)$ que satisface 1 se llama un **cubrimiento** de X .

¹ $P(X)$ se le llama **Partes de X** y es el conjunto formado por todos los subconjuntos de X .

Teorema 1.1 Sea X un conjunto. Si β es base de una topología entonces la familia de subconjuntos de X , que son uniones de elementos de β , es una topología sobre X que notaremos $\tau = \langle \beta \rangle$. τ es la **topología generada** por β .

Definición 1.4 Sea (X, τ) es un espacio topológico. $V \subseteq X$ es **vecindad** de x , $x \in X$, que se notará V_x , si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq V_x$.

Definición 1.5 Sea (X, τ) espacio topológico, un **sistema fundamental de vecindades** para un punto $x \in X$, es un conjunto \mathcal{W} tal que, para cada vecindad V_x existe una vecindad $W \in \mathcal{W}$ con $W \subseteq V_x$.

Definición 1.6 Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ una función entre espacios topológicos. Dado $x \in X$ decimos que f es **continua** en x si y sólo si dada una vecindad $V_{f(x)}$ existe una vecindad U_x tal que $f(U_x) \subseteq V_{f(x)}$. Si f es continua en cada punto de X decimos que f es una **función continua**.

Teorema 1.2 Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ una función entre espacios topológicos. f es **continua** si y sólo si para cada $V \in \mathcal{G}$ tenemos que $f^{-1}(V) \in \tau$.

Teorema 1.3 Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ una función entre espacios topológicos. f es **continua** si y sólo si para cada conjunto cerrado U en Y tenemos que $f^{-1}(U)$ es cerrado en X .

Definición 1.7 Sea (X, τ) un espacio topológico y $F \subseteq X$. F se llama **cerrado** si y sólo si F^c (F^c simboliza el complemento del conjunto F que también se escribe como $X - F$) es un conjunto abierto; es decir, $F^c \in \tau$.

Ejemplo 1.5 El subconjunto $[a, b]$ de \mathbb{R} es cerrado, pues su complemento

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

es abierto en \mathbb{R} . Igualmente $[a, \infty)$ es cerrado, su complemento $(-\infty, a)$ es abierto.

Teorema 1.4 Si \mathcal{F} es la colección de conjuntos cerrados en un espacio topológico (X, τ) , entonces,

1. cualquier intersección de miembros de \mathcal{F} pertenece a \mathcal{F} ;
2. cualquier unión finita de miembros de \mathcal{F} pertenece a \mathcal{F} ;
3. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Definición 1.8 Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto adherente** a A si y sólo si para toda V_x se tiene que $V_x \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto de todos los puntos adherentes a A que se denota \overline{A} , se le llama la **adherencia de A** .

$$\overline{A} = \{x : x \text{ es adherente a } A\}$$

Corolario 1.1 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $A \subseteq \overline{A}$.
3. \overline{A} es cerrado.
4. $A = \overline{A}$ si y sólo si A es cerrado.

Definición 1.9 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que x es un **punto interior** de A si y sólo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U \subseteq A$.

Al conjunto de puntos interiores de A se le nota A° .

$$A^\circ = \{x : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Corolario 1.2 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. $A \subseteq X$ es **abierto** si y sólo si $A^\circ = A$.

Definición 1.10 Dados $A \subseteq (X, \tau)$ y $x \in X$ decimos que x es **punto frontera** de A si y sólo si para toda V_x se tiene que $V_x \cap A \neq \emptyset$ y $V_x \cap A^c \neq \emptyset$.

El conjunto frontera de A se le nota $fr(A)$.

$$fr(A) = \{x : x \text{ es un punto frontera para } A\}$$

Proposición 1.1 Sea (X, τ) espacio topológico, $A \subseteq X$, entonces $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$.

Demostración.

$$fr(A) \subseteq \overline{A} \cap \overline{(X - A)};$$

Sea $x \in fr(A)$ esto significa que para toda V_x vecindad de x se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$ y $V_x \cap A^c \neq \emptyset$, luego por definición de punto adherente $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{X - A}$ entonces $x \in \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$.

$$\overline{A} \cap \overline{(X - A)} \subseteq fr(A);$$

Sea $x \in \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ esto es que $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{(X - A)}$, entonces para toda vecindad V_x de x se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$ y $V_x \cap A^c \neq \emptyset$. Luego $x \in fr(A)$.

Por tanto se concluye que $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$. ■

Proposición 1.2 Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$. A es abierto y cerrado si y sólo si $fr(A) = \emptyset$

Demostración.

\Rightarrow) Sea $x \in fr(A)$ por la definición de frontera tenemos que

$$(\forall V_x)(V_x \cap A \neq \emptyset \quad y \quad V_x \cap A^c \neq \emptyset)$$

es claro que x no es punto interior de A , como $x \in fr(A)$, x es punto adherente de A , esto es que $\forall V_x : V_x \cap A \neq \emptyset$, tenemos que $\overline{A} = A^\circ = A$ por ser A abierto y cerrado, luego $x \in A^\circ$, esto significa que x es punto interior de A , contradicción.
 \Leftrightarrow **i.** Supongamos que A no es abierto, entonces

$$(\exists a \in A)(\forall V_a)(V_a \cap A^c \neq \emptyset)$$

además se tiene que $V_a \cap A \neq \emptyset$, luego $a \in fr(A)$, contradicción. Por tanto A es abierto.

ii. Si A no es cerrado, existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin A$, entonces para toda V_x vecindad de x se tiene $V_x \cap A \neq \emptyset$ y como $x \in A^c$, también $x \in V_x \cap A^c$ entonces $x \in fr(A)$, contradicción. ■

Definición 1.11 *Dados dos espacios topológicos X, Y diremos que X es **homeomorfo** a Y , o que X es **topológicamente equivalente** a Y , si y sólo si existe $f : X \rightarrow Y$ biyección y tanto f como f^{-1} son continuas.*

Un homeomorfismo conserva fronteras, la proposición siguiente y su demostración son importantes para la prueba posterior del teorema 5.2 el cual afirma que tener dimensión n es **un invariante topológico**.

Proposición 1.3 *Si $h : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$, entonces $h[fr(A)] = fr[h(A)]$.*

Demostración.

i. $h[fr(A)] \subseteq fr[h(A)]$.

Sea $y \in h[fr(A)]$ entonces $y = h(x)$ para algún $x \in fr(A)$. Sea V_y vecindad de y . Queremos ver que: $V_y \cap h(A) \neq \emptyset$ y $V_y \cap h(A)^c \neq \emptyset$. Como h es homeomorfismo,

$h^{-1}(V_y)$ es vecindad de x , por lo tanto

$$h^{-1}(V_y) \cap A \neq \emptyset \text{ y } h^{-1}(V_y) \cap A^c \neq \emptyset, \quad \text{aplicando } h$$

$$h(h^{-1}(V_y) \cap A) \neq \emptyset \text{ y } h(h^{-1}(V_y) \cap A^c) \neq \emptyset,$$

por ser h biyectiva se tiene lo siguiente

$$V_y \cap h(A) \neq \emptyset \text{ y } V_y \cap h(A^c) \neq \emptyset.$$

Luego $y \in fr[h(A)]$.

ii. $fr[h(A)] \subseteq h[fr(A)]$.

Sea $y \in fr[h(A)]$. Como h es sobre, existe $x \in X$ tal que $y = h(x)$. Veamos que $x \in fr(A)$. Sea V_x vecindad de x (queremos ver: $V_x \cap A \neq \emptyset$ y $V_x \cap A^c \neq \emptyset$).

Como h es homeomorfismo, entonces $h(V_x)$ es vecindad de $h(x) = y$, $y \in fr[h(A)]$ entonces

$$h(V_x) \cap h(A) \neq \emptyset \text{ y } h(V_x) \cap h(A^c) \neq \emptyset$$

y como $h(A^c) = h(A)^c$ entonces

$$h(V_x) \cap h(A) \neq \emptyset \text{ y } h(V_x) \cap h(A)^c \neq \emptyset$$

por ser h 1-1 se tiene,

$$h(V_x \cap A) \neq \emptyset \text{ y } h(V_x \cap A^c) \neq \emptyset$$

como h es biyección,

$$V_x \cap A \neq \emptyset \text{ y } V_x \cap A^c \neq \emptyset$$

entonces $x \in fr(A)$. Luego $y \in h[fr(A)]$. ■

Definición 1.12 Sea P una propiedad de espacios topológicos. P es un **invariante topológico** si y sólo si dados (Y, \mathcal{G}) que satisface P y $h : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ un homeomorfismo se tiene que X satisface P .

Ejemplo 1.6 *La propiedad que tiene la circunferencia de dividir al plano en dos regiones es un invariante topológico; si transformamos una circunferencia en una elipse o en un triángulo, esta propiedad se mantiene.*

Definición 1.13 *Sean A_1 , A_2 y B subconjuntos mutuamente disyuntos de un espacio topológico (X, τ) , se dice que A_1 y A_2 están **separados** en X por B si $X - B$ se puede dividir en dos conjuntos disyuntos abiertos en $X - B$ y conteniendo a A_1 y A_2 respectivamente. Ver figura 1.*

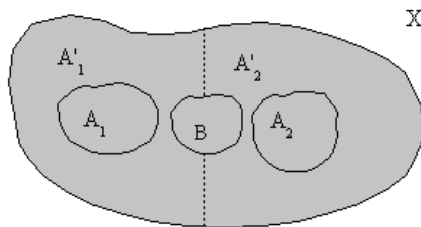
En otras palabras, si existen A'_1, A'_2 para el cual

$$\begin{aligned} X - B &= A'_1 \cup A'_2, \\ A_1 &\subset A'_1, & \text{y} & & A_2 &\subset A'_2, \\ A'_1 &\cap A'_2 &= & \emptyset \end{aligned}$$

con A'_1 y A'_2 abiertos en $X - B$ (o lo que es lo mismo ambos cerrados en $X - B$).

Nota: Si A_1 y A_2 son separados por el conjunto vacío, decimos simplemente que A_1 y A_2 están **separados** en X .

Figura 1. Separación de subconjuntos en un espacio X .



Proposición 1.4 Sea X un espacio topológico y A_1 y A_2 subconjuntos de X . A_1 y A_2 están separados en X si y sólo si existe un A'_1 tal que

$$A_1 \subset A'_1 \quad \text{y} \quad A'_1 \cap A_2 = \emptyset;$$

con A'_1 abierto y cerrado. A'_2 es $X - A'_1$.

La demostración de la proposición anterior es resultado de la definición 1.13

Definición 1.14 Un espacio topológico (X, τ) se dice **2-contable** o que satisface el segundo axioma de enumerabilidad si y sólo si entre sus bases existe alguna con un número contable de elementos.

Ejemplo 1.7 $(\mathbb{R}, \text{usual})$ es 2-contable.

La colección $\beta = \{(p, q), p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$ es base para la topología de \mathbb{R} y además contable pues su cardinal es el mismo de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Definición 1.15 Un espacio topológico (X, τ) es **normal** si y sólo si para cada par de conjuntos A y B cerrados disyuntos de X , existen conjuntos abiertos disyuntos U y V en X con $A \subset U$ y $B \subset V$.

Proposición 1.5 Si H y K son conjuntos cerrados disyuntos de un espacio normal S , entonces existen dos conjuntos abiertos con clausuras disyuntas, uno conteniendo a H y el otro a K .

Definición 1.16 Un espacio (X, τ) es **completamente normal** si y sólo si cualquier subespacio de X es normal.

Proposición 1.6 (X, τ) es completamente normal si y sólo si siempre que A y B subconjuntos de X con $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$ (esto significa que ninguno de los conjuntos tiene puntos de acumulación² del otro), entonces existen conjuntos abiertos disyuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

² $x \in A$ es **punto de acumulación** de A si y sólo si para toda V_x se tiene $(V_x - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 1.17 Un espacio topológico (X, τ) es **regular** si y sólo si dados $x \in X$ y un cerrado $A \subseteq X$ con $x \notin A$, entonces existen abiertos disyuntos U y V con $x \in U$ y $A \subset V$.

1.2. Espacios métricos

En esta sección se presentarán algunos aspectos de los espacios métricos necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos; no es una sección aparte de los conceptos topológicos, sólo se quiere hacer notar en esta parte principalmente los espacios con los cuales se va a trabajar en los capítulos posteriores.

Definición 1.18 Un conjunto X está dotado de una **distancia o métrica** d , si d es una función definida sobre $X \times X$ que toma valores en los números reales tal que para cualquier $x, y, z \in X$ se cumple:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

El par (X, d) se llama un **espacio métrico**.

Ejemplo 1.8 Métrica discreta. Sea X un conjunto cualquiera. Para $x, y \in X$ se define

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

Ejemplo 1.9 $X = \mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos puntos en X , definimos

$$d(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

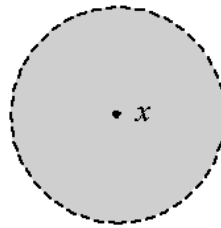
d se conoce como **la distancia euclídea**, o **métrica usual**.

Definición 1.19 Dado x en (X, d) y un número real $\varepsilon > 0$ definimos:

1. La **bola abierta** de centro en x y radio ε , se denota $B_\varepsilon(x)$, como

$$B_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Figura 2. Bola abierta.

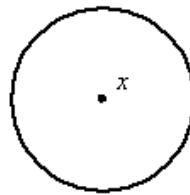


Tomada de [13].

2. La **esfera** de centro en x y de radio ε , la notamos

$$S_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) = \varepsilon\}.$$

Figura 3. La esfera



Tomada de [13].

Teorema 1.5 Si (X, d) es un espacio métrico entonces

$$\beta = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

es base para una topología en X .

Ejemplo 1.10 Una base para \mathbb{R}^n definida como sigue:

$$\beta = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

La topología generada por esta base es comúnmente conocida como la **topología usual de \mathbb{R}^n** .

Definición 1.20 La topología τ asociada a la base formada por la totalidad de las bolas abiertas se llama la **topología inducida o generada** por la métrica d y se nota como: $\tau = \langle d \rangle$.

Lo anterior significa que todo espacio métrico es un espacio topológico. Un espacio topológico cuya topología proviene de una métrica, se dice un espacio **metrizable**.

Definición 1.21 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, A no vacío. Se define la función:

$$d^* : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\forall x, y \in A : d^*(x, y) = d(x, y)$; es decir, d^* es la restricción de d a $A \times A$ de la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Es claro que d^* es una métrica sobre A , luego (A, d^*) se llama un **subespacio métrico** de (X, d) .

Definición 1.22 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. La colección

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

es una topología sobre A .

τ_A se llama la **topología inducida** sobre A o la **topología asociada al subespacio A** .

Teorema 1.6 Si A es un subespacio de un espacio topológico (X, τ) , entonces:

1. $H \subseteq A$ es abierto en A si y sólo si $H = G \cap A$, donde $G \in \tau$.
2. $F \subseteq A$ es cerrado en A si y sólo si $F = K \cap A$, donde K es cerrado en X .

Definición 1.23 Un subconjunto de un espacio topológico (X, τ) es llamado un **conjunto F_σ** si y sólo si es la unión contable de conjuntos cerrados.

Ejemplo 1.11 En $(\mathbb{R}, \text{usual})$ el conjunto $(0, 1) = \cup \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right]$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.7 Todo conjunto abierto en un espacio métrico (X, d) es un F_σ .

Teorema 1.7 Sea (X, τ) espacio topológico, se tiene

1. La unión contable de conjuntos F_σ es un F_σ .
2. La intersección finita de conjuntos F_σ es un F_σ .

Definición 1.24 Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. A se llama **denso** en X si y sólo si $\bar{A} = X$. Es decir, para cualquier $x \in X$ y cualquier V_x tenemos $V_x \cap A \neq \emptyset$.

Definición 1.25 Sean (X, τ) un espacio topológico; X es un **espacio separable** si existe $A \subseteq X$ contable y denso. Si $\tau = \langle d \rangle$ se dice entonces que X es un **espacio métrico separable**.

Ejemplo 1.12 Todo conjunto contable (finito o infinito) con cualquier topología es separable.

Ejemplo 1.13 La recta real es métrico separable, ya que el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es denso y contable.

Proposición 1.8 Todo espacio métrico (X, d) es 2-contable.

Proposición 1.9 *Todo espacio métrico (X, d) es normal.*

Proposición 1.10 *Todo espacio métrico (X, d) es completamente normal.*

Demostración. Sea X' subespacio de X , claramente X' es espacio métrico y por tanto normal, por la definición 1.16 X es completamente normal.

Definición 1.26 *Sea (X, τ) un espacio topológico, X es **conexo** si y sólo si no existen abiertos A y B subconjuntos de X disjuntos no vacíos tal que $X = A \cup B$.*

Definición 1.27 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subespacio de X . Decimos que A es una **componente conexa** de X si y sólo si A es conexo y no es subconjunto propio de algún otro subespacio conexo de X .*

Definición 1.28 *Un espacio topológico (X, τ) se llama **desconectado totalmente** si y sólo si cada conjunto unitario es una componente conexa.*

Ejemplo 1.14 $X = \mathbb{I} \subseteq (\mathbb{R}, \text{usual})$ es un espacio desconectado totalmente.

Ejemplo 1.15 *El conjunto de Cantor \mathcal{C} . Introducido por G. Cantor y por H. J. Smith en 1875, es un espacio totalmente desconectado.*

\mathcal{C} es un subconjunto no contable del intervalo $I = [0, 1]$; consiste de todos los números reales x que se pueden expresar de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n \in \{0, 2\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

\mathcal{C} como subespacio posee la topología que hereda de $(\mathbb{R}, \text{usual})$. \mathcal{C} es el conjunto de todos los números $x \in [0, 1]$ cuya representación $x = 0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ en base 3 no utiliza el dígito 1; es decir, $x_i \neq 1 \forall i \in \mathbb{N}$ y $x_i \in \{0, 2\}$. Ver figura 4.

Geoméricamente,

$$A_0 = [0, 1]$$

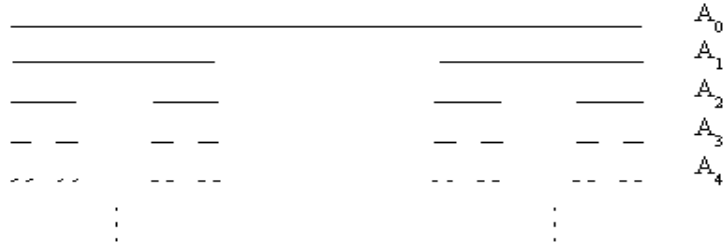
$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = [0, 1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
A_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

El conjunto de Cantor se define como la intersección de la familia antes descrita, es decir,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

En la figura se observa que lo que se hace es quitar el tercio medio de cada porción de recta que queda del proceso anterior, pero C es lo que queda al final del proceso infinito de pasos antes descrito.

Figura 4. Conjunto de Cantor



Tomada de [13].

Definición 1.29 Dados un espacio topológico (X, τ) y $A \subseteq X$, una colección $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $(i \in I)$ de abiertos (cerrados) de X es un **cubrimiento abierto (cerrado)** de A si y sólo si

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

si existe $J \subseteq I$ tal que $\{U_j\}$, $(j \in J)$ cubre a A , a la familia $\{U_j\}$, $(j \in J)$ se le llama un **subrecubrimiento** de A .

Definición 1.30 Sea (X, τ) espacio topológico, (X, τ) es **compacto** si y sólo si cada cubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.

Los conceptos que se omiten son muy conocidos por el lector, sólo se tuvieron en cuenta los que consideramos más importantes.

Capítulo 2

Algunos datos históricos y generalidades

2.1. Datos históricos

El hombre a través de su propia curiosidad y necesidad se ha puesto en la tarea de descubrir y sumergirse en mundos diferentes al nuestro con la noción de dimensión, proponiendo diversas nociones de este concepto en diversas épocas, de tal forma que ha llegado en la actualidad a desarrollar una teoría moderna necesaria para la evolución de la propia matemática y de otras ciencias. Haciendo uso de lo escrito por la historia anotaremos algunos datos que muestran evidencias de los logros alcanzados por investigaciones previas a la teoría definitiva.

Platón (430-349 A. C) en su famosa *Alegoría de la cueva* trata de interpretar lo que era la dimensión en ese entonces de la siguiente forma: “*nos pide que imaginemos una extraña raza de hombres que estan encerrados en una extraña cueva subterránea encadenados de tal modo que sólo pueden ver las sombras que se proyectan sobre la pared de la cueva. Detrás de los hombres hay un talud bajo y*

detrás de este una hoguera. Los objetos se mueven atrás y adelante en la rampa y el fuego proyecta sombras de estos objetos sobre la pared de la cueva. Los prisioneros piensan que estas sombras son la única realidad. Ni siquiera notan que sus cuerpos tienen forma tridimensional. Hablan entre ellos pero oyendo los ecos que devuelve el muro, admiten que ellos y sus compañeros son también sombras” [14]. Es notorio que en la alegoría de Platón se introduce la noción de dimensión dos cuando los personajes creen que la única realidad son las sombras proyectadas sobre la pared, se crea entonces un mundo bidimensional y aquí es donde se inicia la curiosidad de saber como sería un mundo en una dimensión superior y la posibilidad de poder percibirlo.

Más tarde **Euclides** (365?-275? A.C) quien en su obra maestra **Los Elementos**, introduce una noción topológica de la dimensión, cuando define el punto como el extremo de una línea (es decir, la frontera), la línea como el extremo o borde de una superficie (Libro I de los Elementos), y una superficie como el borde de un sólido (Libro XI de los Elementos) de esta manera Euclides caracterizó la dimensión de los objetos que estaban al alcance de su percepción; que Euclides haya notado dichas propiedades de los objetos permitió continuar con el estudio del concepto, tanto que uno de los filósofos que abordó con mucha vehemencia la idea de espacios de dimensión mayor o superior fue **Immanuel Kant** (1724-1804). En uno de sus ensayos escribió: “ *Una ciencia de todas estas posibles clases de espacios sería, sin duda la empresa más elevada que el raciocinio finito podría emprender en el campo de la geometría. Si es posible que existan regiones con otras dimensiones, es muy probable que Dios las haya creado en otra parte* ” [14], en esta valiosa frase Kant hace alusión a su concepto de dimensión y surge entonces otra interpretación de la dimensión en otro campo.

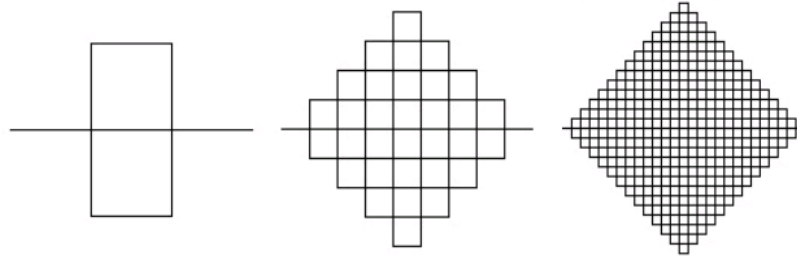
Volviendo a la interpretación matemática de la dimensión, después de un tiempo

en que los matemáticos creían que la dimensión de dos objetos diferentes se debía a la cantidad de elementos (o puntos) que tuvieran, aparece **George Cantor** (1845-1910) quien demostró la falsedad de esta creencia al probar que hay el mismo número de puntos en el plano que en la recta, además demostró que conjuntos que diríamos que tienen mas elementos que otros tienen la misma cantidad de elementos, al establecer una correspondencia biyectiva entre los conjuntos, de aquí resulta que un segmento recto, un cuadrado y un cubo tienen igual cantidad de elementos; así como dos conjuntos infinitos no necesariamente tienen igual cantidad de elementos, se dedujo entonces que la dimensión no es una propiedad cuantitativa, por tanto no se podía definir la dimensión en cuanto a la cantidad de elementos que un conjunto u objeto tuviese.

Mas tarde los matemáticos pensaron que la diferencia entre un objeto de dimensión uno y uno de dimensión mayor, se debía a que el primero se podía recorrer por el movimiento continuo de un punto y el segundo no, sin embargo **Giuseppe Peano** (1858-1932) encontró que un punto moviéndose continuamente puede rellenar una superficie e incluso un cubo (ver figura 5), por tanto con este resultado no se podía establecer algo sobre la dimensión de los objetos en cuanto a la trayectoria de un punto.

En 1884, se publica por primera vez la famosa historia de un cuadrado que viaja a una dimensión superior, historia que es conocida como **Planilandia** [14], cuyo autor es **Edwin Abbott Abbott** maestro de escuela (nacido en Londres el 20 de diciembre de 1838). Planilandia es un mundo imaginario de dimensión dos donde un cuadrado vive una aventura espacial para entender la tercera dimensión.

Figura 5. Curva de Peano



Tomada de [12].

Posteriormente **H. Poincaré** (1854-1912) en 1912 interesado en aclarar la dimensionalidad de un espacio propone una definición de dimensión dándole importancia a la noción intuitiva que nos presenta Euclides, pero no fue del todo aceptada; un año más tarde **L. E. J. Brouwer** (1882-1966) basado en las ideas de Poincaré construye una definición para una clase muy amplia de espacios, que sólo se uso para demostrar que \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n no son homeomorfos para $n \neq m$; fue hasta entonces en 1922 cuando **Karl Menger** (1902-1985) y **P. Urysohn** (1898-1924) independiente de Brouwer y cada uno por su lado recrearon la definición de Brouwer, en 1922 P. Urysohn propuso su definición y K. Menger en 1923 hizo lo mismo, definiciones que permitieron el posterior desarrollo de la **teoría de la dimensión**. **H. L. Lebesgue** (1875-1941) también dió sus aportes para el desarrollo de esta teoría que fue satisfactoriamente desarrollada para espacios métrico separables por las definiciones dadas por Urysohn y Menger y después ampliada a espacios topológicos. Esta breve reseña histórica permite ver que el concepto de dimensión ha venido evolucionando de acuerdo a las necesidades y el

desarrollo de la misma matemática hasta establecerse una definición satisfactoria que es la que se presenta en el capítulo 4 de este trabajo y que permite obtener importantes resultados propios de la topología. Es claro que aquí no estan todos las personas que han estudiado este concepto, escapándose quizá otros matemáticos que dieron aportes valiosos para el desarrollo de esta teoría.

2.2. Generalidades sobre la noción de dimensión

Las primeras nociones relacionadas con la de dimensión, que nos exponen a temprana edad son las siguientes: la noción de longitud, área y volumen, noción de extensión o espacio, que se expresa más específicamente cuando se dice que si el objeto tiene área pero no volumen entonces tiene dos dimensiones y si el objeto es sólido es de tres dimensiones y por tanto posee volumen, de esto resulta que todo objeto material es de tres dimensiones, lo que conduce a las tres dimensiones del espacio \mathbb{R}^3 , llamadas **longitud, anchura y profundidad**, por esto se considera que la línea es de una dimensión, pues posee longitud, más no anchura, las superficies poseen las dos, longitud y anchura y los volúmenes poseen las tres dimensiones, uno de los que usó estas palabras fue Euclides en los Elementos (Libros I y XI). En los cursos de básica secundaria se plantean problemas como: encuentre las dimensiones de un rectángulo sabiendo que un lado es el doble del otro y cuyo perímetro es 10cm. En esta interpretación la dimensión esta relacionada con las medidas que determinan la cantidad de espacio que ocupa un objeto en determinado lugar.

La otra noción de dimensión es la que tiene que ver con la libertad de movimiento que un objeto pueda efectuar en un espacio; es decir, en un espacio de dimensión 0, sospecharíamos que esta formado por un punto, en donde no hay posibilidad de movimiento, esto es, no existe ningún grado de libertad. Ahora si admitimos que

en tal espacio no existe más que una línea, resultado del rastro del movimiento de un punto, el punto tiene la posibilidad de continuar o retroceder sobre la línea, tendrá entonces un grado de libertad, hacia delante o hacia atrás, luego el punto se moverá en una dimensión, lo que concluye que la línea es de dimensión uno. Ahora si el punto abandona su trayectoria y decide tomar otra dirección, derecha o izquierda, entonces se moverá en una superficie teniendo el punto un grado de libertad más, un movimiento más por hacer, por tanto en una superficie hay dos grados de libertad delante-atrás y derecha-izquierda; apareciendo un espacio de dos dimensiones; posteriormente el punto toma otra dirección abandonando la superficie permitiéndose viajar por encima o por debajo de ella, luego aparece otro grado de libertad, entrando entonces al espacio tridimensional, con sus tres grados de libertad que son: delante-atrás, izquierda-derecha y arriba-abajo, estas nociones de dimensión son intuitivas, son producto de lo que nuestros sentidos han podido percibir y deducir. Si incursionamos en otro campo como la Física, allí se tiene otra noción de dimensión; teniendo en cuenta la Teoría de la Relatividad de **Albert Einstein**, para él y para muchos más versados en la materia, consideran el tiempo como la cuarta dimensión en la interpretación de que para ubicar un objeto en el espacio no sólo se necesita la posición de este sino el tiempo en el que se puede encontrar en dicha posición. Lo anterior fue necesario para que expertos en la materia dieran nociones mucho más precisas del concepto de dimensión que fueran aplicables a espacios mucho más abstractos.

Tenemos el concepto de dimensión en espacios vectoriales que se maneja en el curso de Álgebra Lineal, incluso algunos docentes la introducen en el curso de Álgebra Superior en los primeros semestres de universidad; recordemos que en un **espacio vectorial** los elementos que lo conforman se les llama vectores. Veamos como se define en un espacio vectorial la dimensión:

Definición 2.1 Si un espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores que contiene la base y se escribe

$$\dim V = n$$

si $V = \{0\}$, se define $\dim V = 0$; V se llama **espacio vectorial de dimensión finita**.

Como sabemos \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ya que posee un conjunto finito $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, cuyos vectores son linealmente independientes y generan \mathbb{R}^3 , por tanto B es base para \mathbb{R}^3 , llamada la base canónica de \mathbb{R}^3 .

A continuación se darán otras definiciones de dimensión que tienen que ver principalmente con conceptos topológicos. Las dos primeras son definiciones inductivas. La dimensión en un espacio X en estas definiciones se denotan $ind(X)$, $Ind(X)$, y $\dim(X)$ respectivamente, en algunos libros de topología, siendo n entero no negativo.

Definición 2.2

- i. $ind(\emptyset) = -1$.
- ii. $ind(X) \leq n$ si y sólo si cada punto $x \in X$, tiene una base de vecindades U^1 con $ind[fr(U)] \leq n - 1$.

Esta definición hace parte de la que se expone en el capítulo 4 con algunos cambios y se debe a **K. Menger** y **P. Urysohn**, conocida también como **dimensión inductiva débil** es aplicada a **espacios regulares** y posteriormente desarrollada para espacios métricos separables, con desventajas para espacios más generales.

¹Es equivalente a decir que cada punto de X tiene un sistema fundamental de vecindades.

Definición 2.3

- i. $Ind(\emptyset) = -1$.
- ii. $Ind(X) \leq n$ si y sólo si dados dos conjuntos cerrados disyuntos A y B de X , existe un abierto U con $A \subset U$, $U \cap B = \emptyset$ y $Ind[fr(U)] \leq n - 1$.

Definición aplicada a **espacios normales** dada por **E. Čech** en 1932. Se denomina a ésta, **dimensión inductiva fuerte**.

Definición 2.4 $\dim(X) \leq n$ si y sólo si cualquier cubrimiento abierto de X tiene un recubrimiento de orden $\leq n+1$, donde el orden de un cubrimiento es el número más grande de conjuntos del cubrimiento teniendo algún punto en común.

Ha sido llamada **dimensión topológica**, **dimensión de Lebesgue** o **dimensión de cubrimiento**.

Lo curioso de las tres definiciones de dimensión es que las tres son equivalentes para espacios métricos separables esto quiere decir que la teoría de la dimensión para espacios métricos separables es mucho más completa que las desarrolladas para cada una de las definiciones individualmente. Estas definiciones son la base para ampliar la teoría de la dimensión a otros espacios desarrolladas por otros matemáticos como **Katetov**, **Morita** entre otros. Claramente no son las únicas nociones de dimensión, existe una variedad de dimensiones, como por ejemplo las llamadas dimensión de Hausdorff y dimensión fractal, que están relacionadas con el grado de complejidad e irregularidad de los fractales, y en la mayoría de los casos dichas dimensiones **no** son números enteros. En definitiva la noción de dimensión no es algo inventado sin justificación alguna; la matemática ha sido la herramienta para formalizar lo que la intuición sospecha de antemano, siendo todo lo anterior producto de la gran capacidad humana.

Capítulo 3

Dimensión 0

En este capítulo se inicia el estudio formal del concepto de dimensión y en especial de dimensión 0. Se ilustrará con ejemplos y gráficos los conceptos a tratar. Se verán otras formas alternativas de poder definir un espacio 0-dimensional equivalentes a la definición que se expondrá inicialmente en este capítulo.

Para tener una idea precisa sobre el concepto de dimensión como lo indica el artículo [7] y como lo muestra la definición que sigue, debemos tener en cuenta dos conceptos topológicos claves como son : **vecindad** y **frontera**, podemos de esta forma hacernos una idea o tener una noción del concepto de dimensión en espacios métrico separables. En adelante X será un espacio métrico separable.

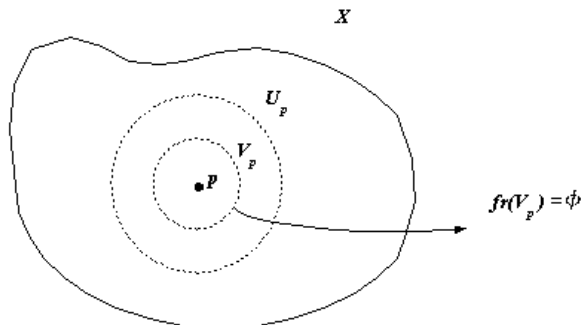
Definición 3.1 *Un espacio X es de **dimensión 0** o es **0-dimensional** en un punto $p \in X$, si p tiene vecindades¹ arbitrariamente pequeñas con fronteras vacías; o lo que es lo mismo si para cada vecindad U_p de p existe una vecindad V_p de p tal que*

$$V_p \subset U_p \quad y \quad fr(V_p) = \emptyset.$$

¹Todas las vecindades serán abiertas , a no ser que se especifique lo contrario.

No olvidar que la frontera de la vecindad depende de la métrica del espacio al que corresponde (ver figura 6)

Figura 6. Dimensión 0



Un espacio no vacío es **0-dimensional**, $\dim X = 0$, si X tiene **dimensión 0** en cada uno de sus puntos.

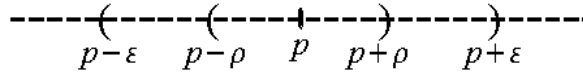
Ejemplo 3.1 \mathbb{Q} es 0-dimensional

Demostración.

Sea $p \in \mathbb{Q}$, sea una vecindad U_p que podemos tomar como $U_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)^2$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, por la densidad de \mathbb{I} existe ρ irracional con $\rho < \varepsilon$ tal que la vecindad $V = (p - \rho, p + \rho) \subset U_p$ (ver figura 7) se tiene que $p - \rho \notin \mathbb{Q}$ y $p + \rho \notin \mathbb{Q}$, es decir $p - \rho$ y $p + \rho$ son irracionales, por lo tanto $fr(V_p) = \emptyset$, ya que los únicos “candidatos” a ser puntos frontera de V_p serían $p - \rho$ y $p + \rho$, pero estos no son racionales, por consiguiente \mathbb{Q} es 0-dimensional. ■

² \mathbb{Q} como subespacio hereda la métrica de \mathbb{R} y por tanto la topología, es decir, la topología usual.

Figura 7. Dimensión de los racionales.



Ejemplo 3.2 *El conjunto \mathbb{I} de números irracionales es 0-dimensional.*

Demostración.

Dada cualquier vecindad U_p de p con $p \in \mathbb{I}$ existen por la densidad de los racionales ρ, σ tales que $\rho < p < \sigma$ y $V = \{x \in \mathbb{I} \mid \rho < x < \sigma\}$ es el conjunto de números irracionales que están entre ρ y σ tal que $V \subset U_p$. En el espacio \mathbb{I} V es abierto, en efecto para cada $x \in V$ existe una vecindad lo suficientemente pequeña que está totalmente contenida en V por lo tanto cada x es punto interior de V , lo que implica que V es abierto en \mathbb{I} ; además $fr(V) = \emptyset$ pues sucede lo mismo que en el ejemplo 3.1, los únicos candidatos en este caso a ser puntos frontera son ρ y σ , pero éstos no pertenecen a \mathbb{I} , por tanto $fr(V) = \emptyset$ esto implica que \mathbb{I} es **0-dimensional.** ■

Ejemplo 3.3 *En \mathbb{R}^2 el conjunto $\mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$ de puntos en el plano cuyas coordenadas son ambas irracionales es 0-dimensional.*

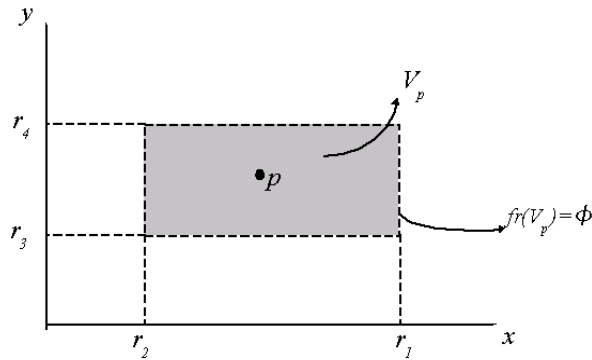
Demostración.

Sea $p \in \mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$, p está contenido en rectángulos arbitrariamente pequeños³ V_p cuyas fronteras son líneas rectas que intersecan los ejes coordenados en ángulo recto en puntos racionales, donde r_1, r_2, r_3, r_4 pertenecen a \mathbb{Q} , como se puede observar ningún punto de la frontera de V_p pertenece a $\mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$, ya que todo punto de la frontera

³La topología generada por los rectángulos abiertos es equivalente a la generada por los discos abiertos siendo esta última la topología usual.

tiene exactamente una coordenada racional, por tanto $fr(V_p) = \emptyset$ luego $\mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$ es **0-dimensional**, (ver figura 8). ■

Figura 8. Dimensión de $\mathcal{R}_{\mathbb{I}}^2$



Ejemplo 3.4 El conjunto \mathcal{R}_1^2 de puntos en el plano con exactamente una coordenada racional es 0-dimensional.

Demostración.

Para cualquier $p \in \mathcal{R}_1^2$ tomamos vecindades arbitrariamente pequeñas V_p limitadas por líneas rectas que intersecan a los ejes coordenados en puntos racionales con ángulo a 45°; es decir, que las líneas rectas:

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + r_1, r_1 \in \mathbb{Q}\},$$

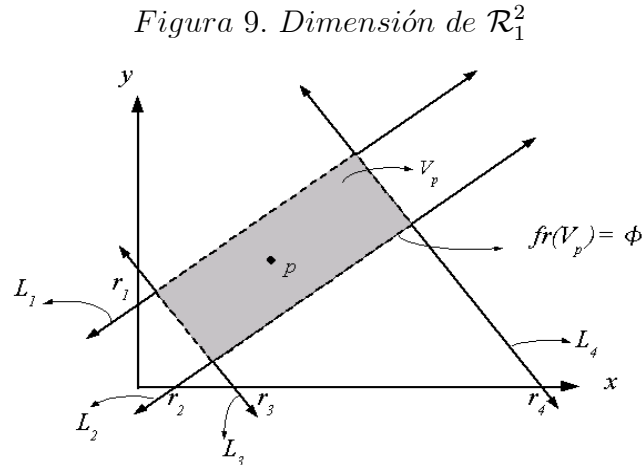
$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + r_2, r_2 \in \mathbb{Q}\},$$

$$L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + r_3, r_3 \in \mathbb{Q}\},$$

$$L_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + r_4, r_4 \in \mathbb{Q}\},$$

como se observa todas las rectas se intersecan formando un rectángulo. Ningún punto que pertenezca a cualquiera de dichas rectas pertenece a \mathcal{R}_1^2 , ya que si $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$ y si $x \in \mathbb{I}$, $y \in \mathbb{I}$, este resultado es sencillo y se deja a cargo

del lector como ejercicio. Por tanto $fr(V_p) = \emptyset$ luego \mathcal{R}_1^2 es **0-dimensional** (ver figura 9). ■



Como fue visto en el capítulo 1 proposición 1.2, cualquier conjunto cuya frontera es vacía es abierto-cerrado (ó aberrado como lo llaman en algunos libros de topología) y recíprocamente también es cierto; esta afirmación es esencial para posteriores resultados.

¿Ser 0-dimensional es un invariante topológico?, efectivamente, la respuesta se demuestra en la proposición siguiente.

Proposición 3.1 *Ser 0-dimensional o ser 0-dimensional en un punto p es un invariante topológico.*

Demostración.

Sean X, Y homeomorfos donde X es 0-dimensional y $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, veamos que Y es 0-dimensional.

Sea $y \in Y$ y V_y vecindad de y en Y como h es sobre existe un $x \in X$ tal que $h(x) = y$, como h es continua en X existe U_x vecindad de x abierta y cerrada

tal que $h(U_x) \subseteq V_{h(x)} = V_y$; tenemos que h es bicontinua luego $h(U_x)$ es abierto y cerrado, $y \in h(U_x) \subseteq V_y$ por ser h biyección, luego Y es 0-dimensional. ■

El significado de la proposición anterior muestra que cualquier espacio X con la propiedad de ser 0-dimensional permanece invariante si se somete a homeomorfismos. Luego ser 0-dimensional es un invariante topológico.

Que X sea 0-dimensional es equivalente a tener una base para τ con una característica muy particular:

Proposición 3.2 *Un espacio X no vacío es 0-dimensional si y sólo si existe una base para los conjuntos abiertos de X compuesta de conjuntos abiertos y cerrados.*

Demostración.

\Rightarrow) Como X es 0-dimensional $\forall p \in X$ y para cada vecindad U de p existe una vecindad B de p tal que

$$p \in B \subset U \quad \text{y} \quad fr(B) = \emptyset$$

lo que significa que B es abierto y cerrado. Tomando la colección $\beta = \{B \subseteq X, B \text{ es abierto y cerrado}\}$, vemos que β es una base para los abiertos de X .

\Leftarrow) Tomando β base de abierto-cerrados; $p \in X$ y G abierto con $p \in G$ como β es base entonces G lo podemos expresar como $G = \cup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \beta$, por tanto para algún B_i se tiene que $p \in B_i \subseteq G$, como B_i es abierto y cerrado por la proposición 1.2 $fr(B_i) = \emptyset$, luego por definición 3.1 X es 0-dimensional. ■

Ejemplo 3.5 *El conjunto de Cantor denotado por \mathcal{C} , es el conjunto de todos los puntos reales entre 0 y 1 que se pueden expresar en la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, donde $a_n = 0$ o $a_n = 2$, es 0-dimensional.*

Por ejemplo: $\frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n-1}} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = 6 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 \right) = 6 \left(\frac{9}{8} - 1 \right) = \frac{3}{4} \in \mathcal{C}$.

Demostración.

Tomando el conjunto $\Sigma = \{x_1x_2\cdots \mid x_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall i = 1, 2, \dots\}$ con N entero positivo. Los elementos de Σ se les denomina códigos y se define la función

$d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = d(x_1x_2\cdots, y_1y_2\cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}$$

Veamos que la sumatoria anterior converge. Tenemos que $0 \leq x_i \leq N-1$ (1) y $0 \leq y_i \leq N-1$ (2) $\forall x_i, y_i$; con $i = 1, 2, \dots$. $-(N-1) \leq -y_i \leq 0$ (3), sumando (1) y (3) resulta

$$-(N-1) \leq x_i - y_i \leq (N-1)$$

de donde se deduce

$$|x_i - y_i| \leq N-1 < N+1, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Multiplicando por $\frac{1}{(N+1)^i}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} &\leq \frac{N-1}{(N+1)^i} < \frac{N+1}{(N+1)^i} = \frac{1}{(N+1)^{i-1}} \\ \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} &< \frac{1}{(N+1)^{i-1}} \end{aligned}$$

aplicando sumatoria ambos lados de la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^{i-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = 1 + \frac{1}{N}.$$

Luego, la sumatoria converge ya que es menor que una que converge (tomado de [4]). Se puede verificar que d es métrica (no confundir el conjunto Σ con el simbolo de la sumatoria). Luego (Σ, d) es espacio métrico; más conocido como el **Espacio de los códigos** (Tomado de [4]). Consideremos las siguientes bolas abiertas en (Σ, d)

$$B \left(a; \frac{1}{(N+1)^k} \right) = \{x \in \Sigma : a_i = x_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, k\} \quad (1)$$

para $k \in \mathbb{N}$, la bola de radio $\frac{1}{(N+1)^k}$ y centro en a , es el conjunto de todos los códigos que coinciden con el centro de la bola en sus primeras k cifra, por ejemplo:

$$B \left(x, \frac{1}{(N+1)} \right) = \{y \in \Sigma \mid y_1 = x_1\} = [x_1],$$

$$B \left(x, \frac{1}{(N+1)} \right) = \{y \in \Sigma \mid y_1 = x_1, \wedge, y_2\} = [x_1x_2].$$

La familia formada por (1) es una base para la topología generada por d , pero además cada una de estas bolas es abierta y cerrada (aberrada, ver [4]), entonces tenemos una base formada por conjuntos abiertos y cerrados por tanto por la proposición 3.2 (Σ, d) es **0-dimensional**. Como (Σ, d) es homeomorfo a \mathcal{C} (ver [4]), por la proposición 3.1 se tiene que \mathcal{C} es **0-dimensional**. ■

Ejemplo 3.6 *El conjunto de los naturales \mathbb{N} . Tomemos a (\mathbb{N}, d) , d es la métrica discreta. (\mathbb{N}, d) es espacio métrico separable, ya que \mathbb{N} es enumerable y $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. Escogiendo como base la colección $\beta = \{ \{n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$ es base para los abiertos de \mathbb{N} , se puede demostrar que efectivamente es base y además cada $\{n\}$ es abierto-cerrados, entonces β es una base formada de abierto-cerrados, luego por la proposición anterior, \mathbb{N} es **0-dimensional**.*

Generalizando el ejemplo anterior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.3 *Cualquier espacio X contable⁴ no-vacío es 0-dimensional.*

Demostración.⁵

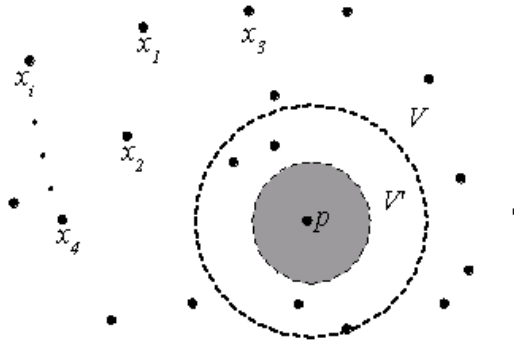
Dada cualquier vecindad U de p , $p \in X$, sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sea la bola V de radio ε alrededor de p , con $V \subseteq U$. Enumerando los elementos de X , x_1, x_2, \dots , tal que

⁴Claramente si el espacio métrico es contable es separable. Contable significa que se puede construir una biyección del conjunto de los naturales a tal conjunto.

⁵Demostración tomada de [5].

$d(x_i, p) < \varepsilon$. Por la densidad de \mathbb{R} existe un ε' con $\varepsilon' < \varepsilon$ y $\varepsilon' \neq d(x_i, p)$ para todo x_i con $i = 1, 2, \dots$. Por tanto $V' = B_{\varepsilon'}(p) \subset B_{\varepsilon}(p) = V$ (ver figura 10), luego se tiene que $fr(V') = \emptyset$ ya que ningún elemento de X pertenece a la frontera de V' . Luego X es 0-dimensional (ver figura 10). ■

Figura 10. Dimensión de un conjunto contable



La proposición anterior proporciona otra forma de deducir que \mathbb{Q} es 0-dimensional como se vio en el ejemplo 3.1. Con esta proposición la idea o noción de dimensión de un punto p o el monopuntual⁶ como se le conoce, es 0, que se ha interpretado de la siguiente forma como ya se mencionó antes: al pararse sobre tal punto la imposibilidad de moverse hacia cualquier dirección es evidente, podrían haber más puntos tan cercanos como se quiera como en \mathbb{Q} o tan lejos que no haya posibilidad de hacer un salto tan largo que sea posible caer sobre uno de ellos, en cualquiera de los dos casos sigue siendo de dimensión 0, luego nuestra intuición no es tan errada con respecto a lo que la teoría formal nos presenta.

Ejemplo 3.7 *El conjunto $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^n$ de puntos en el Espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , cuyas coordenadas son racionales es 0-dimensional. En efecto $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^n$ es contable.*

⁶El monopuntual o singulete es el conjunto formado por un punto o elemento.

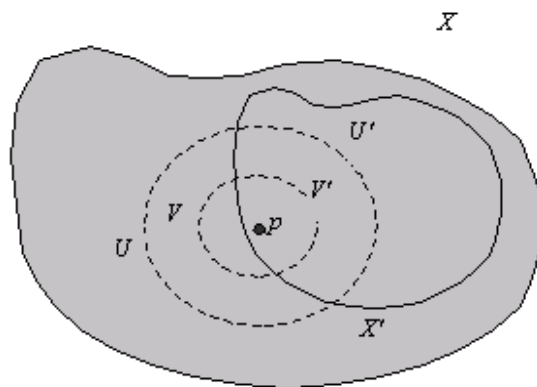
Podríamos preguntar qué sucederá con la dimensión de un subconjunto no vacío de un espacio 0-dimensional, según nuestra intuición nos responderíamos que la propiedad se hereda, veamos que esto es cierto en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Un subconjunto no vacío de un espacio 0-dimensional es 0-dimensional.*

Demostración.⁷

Sea p un punto cualquiera de un subconjunto X' de un espacio 0-dimensional X y sea U' cualquier vecindad de p en X' entonces existe una vecindad U de p en X tal que $U' = U \cap X'$. Como X es 0-dimensional existe un V abierto y cerrado en X tal que $p \in V \subset U$, tomando $V' = V \cap X'$ entonces V' es abierto y cerrado en X' , se tiene que $p \in V' \subset U'$ por tanto X' es **0-dimensional**. Ver figura 11. ■

Figura 11. Dimensión de un subconjunto de un espacio 0 – dimensional



El resultado anterior nos permite afirmar que la propiedad de ser **0-dimensional** se hereda, lo que no sucede con el inverso, por ejemplo \mathbb{Q} es 0-dimensional y es

⁷ Demostración tomada de [5].

subconjunto de \mathbb{R} , sin embargo \mathbb{R} es 1-dimensional, resultado que se presentará en el capítulo IV.

La ventaja de que un espacio X se pueda dividir en dos conjuntos abiertos disyuntos en él mismo, permite exponer otra definición de un espacio 0-dimensional por separación equivalente a la definición 3.1.

Definición 3.2 *Un espacio X no vacío tiene **dimensión 0** si cada punto p , $p \in X$ y cada conjunto cerrado C en X con $p \notin C$ se pueden separar.*

En seguida veremos que la definición 3.1 es equivalente a la definición 3.2.

Proposición 3.4 *Definición 3.1 si y sólo si Definición 3.2*

Demostración.

\Rightarrow) Sea X un espacio 0-dimensional, y C un conjunto cerrado en X , $p \in X$ y $p \notin C$, luego tenemos que $X - C$ es vecindad de p , por la definición 3.1 existe V tal que $p \in V \subset X - C$ con V abierto y cerrado, claramente $V \cap C = \emptyset$ luego de la proposición 1.4 p y C están separados en X .

\Leftarrow) Sea $p \in X$ y sea V vecindad de p , luego $X - V$ es cerrado en X , $p \notin X - V$ por la definición 3.2 p y $X - V$ están separados en X , por la proposición 1.4 existe A' tal que $X - V \subset A'$ con A' abierto y cerrado tal que $A' \cap \{p\} = \emptyset$; como $X - A'$ es abierto y cerrado, tenemos $X - A' \subset V$ (ya que si $X - V \subset A'$ entonces $(A')^c \subset (X - V)^c = V$, esto es $X - A' \subset V$), luego se tiene que $p \in X - A' \subset V$ con $fr(X - A') = \emptyset$ por lo tanto X es **0-dimensional** como lo requiere la definición 3.1. ■

Cualquiera de las dos definiciones anteriores para un espacio 0-dimensional es útil para el desarrollo de la teoría.

Proposición 3.5 *Si X es 0-dimensional entonces cualquier par de conjuntos cerrados disyuntos en X pueden ser separados.*

Demostración.⁸

De la definición 3.2 cada $p \in X$ y cada cerrado en X se pueden separar. Tomemos dos conjuntos C y K cerrados disyuntos en X . Hay que encontrar una separación de C y K en X .

Para cada $p \in X$ se tiene una de las dos $\{p\} \cap C = \emptyset$ o $\{p\} \cap K = \emptyset$. Como X es 0-dimensional existen vecindades U_p para cada p con $fr(U_p) = \emptyset$ tal que $U_p \cap C = \emptyset$ o $U_p \cap K = \emptyset$. Usando el hecho de que X tiene una base contable de abiertos (es decir, X es 2-contable) existe una sucesión U_1, U_2, \dots de estos U_p cuya unión es X . Definamos una nueva sucesión de conjuntos V_i como sigue:

$$V_1 = U_1$$

$$V_i = U_i - \cup_{k=1}^{i-1} U_k = U_i \cap (X - \cup_{k=1}^{i-1} U_k) \quad (1)$$

Del inciso (1) se tiene la sucesión recursiva formada por los V_i con $i = 1, 2, \dots$, que también recubre a X por tanto

$$X = \cup_{i=1}^{\infty} V_i, \quad (2)$$

además se tiene que

$$V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \text{para } i \neq j \quad (3)$$

Recordemos que la unión finita de cerrados es cerrado, luego de (1) tenemos que $X - \cup_{k=1}^{i-1} U_k$ es abierto e intersectado con U_i es abierto ya que U_i es abierto, por tanto

$$V_i \text{ es abierto} \quad (4)$$

y una de las dos siguientes se tiene

$$V_i \cap C = \emptyset \quad \text{o} \quad V_i \cap K = \emptyset \quad (5)$$

⁸Demostración tomada de [5].

Tomemos a C' la unión de todos los V_i para los que $V_i \cap K = \emptyset$ y K' la unión de los restantes V_i . Entonces por (2) tenemos que $X = C' \cup K'$ por (3) $C' \cap K' = \emptyset$, de (4) C' y K' son abiertos, y de (5)

$$C' \cap K = \emptyset \quad y \quad K' \cap C = \emptyset \quad (6)$$

luego $(C' \cap K) \cup (K' \cap C) = \emptyset$, de (6) se tiene que $C \subset C'$ y $K \subset K'$. En definitiva se encontró la separación deseada dada por C' y K' . ■

El recíproco de la proposición anterior es cierto ya que es resultado de la propia definición 3.2.

La unión de conjuntos 0-dimensionales en un espacio X no necesariamente es 0-dimensional, como se mostró en los ejemplos 3.1 y 3.2, \mathbb{Q} y \mathbb{I} son 0-dimensionales y su unión es \mathbb{R} que más adelante veremos es 1-dimensional. Sin embargo se tiene el siguiente teorema: **Teorema de la unión para conjuntos 0-dimensionales:**

Teorema 3.2 *Un espacio el cual es la unión contable de subconjuntos cerrados 0-dimensionales es él mismo 0-dimensional.*

Demostración.⁹

Supongase que

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_i \cup \dots,$$

donde cada C_i es cerrado y 0-dimensional en X . Sean K y L dos subconjuntos cerrados disyuntos en X . Veamos si K y L pueden ser separados.

$K \cap C_1$ y $L \cap C_1$ son subconjuntos cerrados disyuntos del espacio 0-dimensional C_1 , entonces de la proposición 3.5 existen subconjuntos cerrados A_1 y B_1 en C_1 , y por consiguiente en X ¹⁰, tal que

$$K \cap C_1 \subset A_1 \quad y \quad L \cap C_1 \subset B_1 \quad (1)$$

⁹Demostración tomada de [5].

¹⁰Son cerrados en X , esto se deduce del teorema 1.6.

$$A_1 \cup B_1 = C_1, \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad (2)$$

de (1) y(2) los conjuntos $A_1 \cup K$ y $B_1 \cup L$ son cerrados y disjuntos en X . Por la normalidad de X existen conjuntos abiertos G_1 y H_1 en X tal que

$$A_1 \cup K \subset G_1 \quad y \quad B_1 \cup L \subset H_1 \quad (3)$$

$$\overline{G_1} \cap \overline{H_1} = \emptyset$$

por lo tanto de (2) se tiene que

$$C_1 \subset G_1 \cup H_1$$

de (3)

$$K \subset G_1 \quad y \quad L \subset H_1, \quad (4)$$

$$\overline{G_1} \cap \overline{H_1} = \emptyset$$

repitiendo el mismo proceso, reemplazando K y L por $\overline{G_1}$ y $\overline{H_1}$ y C_1 por C_2 .

Esto produce conjuntos abiertos G_2 y H_2 para los cuales

$$C_2 \subset G_2 \cup H_2,$$

$$\overline{G_1} \subset G_2 \quad y \quad \overline{H_1} \subset H_2$$

$$\overline{H_2} \cap \overline{G_2} = \emptyset$$

por inducción construimos las sucesiones $\{G_i\}$ y $\{H_i\}$ de conjuntos abiertos en X , tal que generalizando tenemos, que

$$C_i \subset H_i \cup G_i$$

$$\overline{G_{i-1}} \subset G_i \quad y \quad \overline{H_{i-1}} \subset H_i$$

$$\overline{G_i} \cap \overline{H_i} = \emptyset$$

tomando

$$G = \cup G_i \quad , \quad H = \cup H_i$$

donde G y H son conjuntos abiertos disyuntos en X con

$$X = \cup C_i \subset G \cup H$$

de (4) se tiene que

$$K \subset G \quad y \quad L \subset H$$

Luego K y L es la separación deseada así X es 0-dimensional. ■

El desarrollo de este capítulo fué necesario para comprender la definición general de dimensión n y hacer uso de algunas demostraciones para proposiciones posteriores. Si el lector desea estudiar algo más sobre dimensión 0 puede consultar [2], [5], [11], [17].

Capítulo 4

Definición de dimensión n

Después de tantos tropiezos en la búsqueda de una definición satisfactoria que funcionara para una cantidad de espacios, se llega a una definición que se debe a **Menger y Urysohn**, adoptada en el libro [11] y que se expondrá en este capítulo, así como algunos teoremas, proposiciones y ejemplos. Incluimos también el análisis de cuatro conjuntos (ejemplos tomados de [7]), que constituyen un ejemplo interesante..

4.1. Dimensión n

La definición presentada es una definición inductiva en las dos primeras partes. Se usará \dim en lugar de dimensión, para abreviar la expresión dimensión del espacio X , entonces se escribirá $\dim(X)$ y $\dim_p(X)$ para expresar la dimensión del espacio X y dimensión del espacio X en el punto p , respectivamente.

Definición 4.1

1. $\dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.

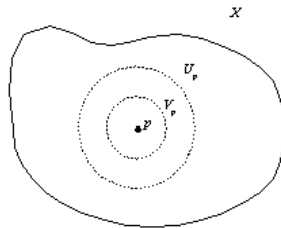
2. Asumimos inductivamente que hemos definido la $\dim(Y) \leq n - 1$ para un entero $n \geq 0$ dado y cualquier espacio Y . Entonces, para un espacio X y un punto $p \in X$, definimos

$$\dim_p(X) \leq n$$

si y sólo si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas abiertas en X cuyas fronteras tienen dimensión $\leq n - 1$ (ver figura 12)

3. $\dim X \leq n$ si y sólo si $\dim_p(X) \leq n$ para todo $p \in X$.
4. $\dim X = n$ si y sólo si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \not\leq n - 1$.
5. $\dim_p(X) = n$ si y sólo si $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) \not\leq n - 1$.
6. $\dim(X) = \infty$ si y sólo si $\dim(X) \not\leq n$ para cualquier $n \geq -1$.
7. $\dim_p(X) = \infty$ si y sólo si $\dim_p(X) \not\leq n$ para cualquier $n \geq -1$.

Figura 12. Dimensión n



Tomada de [11].

Para $n = 0$ la definición 3.1 y la definición 4.1 coinciden. Los numerales 6 y 7 de la definición anterior no se tendrán en cuenta ya que sólo nos ocuparemos del caso n finito.

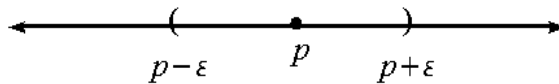
En el ejemplo que sigue se demostrará que \mathbb{R} el conjunto de los números reales o en otras palabras la línea recta es 1-dimensional.

Ejemplo 4.1 $\dim(\mathbb{R}) = 1$

Demostración. Se debe demostrar que $\dim(\mathbb{R}) \leq 1$ y $\dim(\mathbb{R}) > 0$ por tanto es necesario demostrar primeramente que $\dim_p(\mathbb{R}) \leq 1$ para todo $p \in \mathbb{R}$.

i. Sean $p, \varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tomando las vecindades abiertas con la métrica usual $V_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, (ver figura 13) con $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ luego la $fr(V_p) = \{p - \varepsilon, p + \varepsilon\}$, es claro que la $fr(V_p)$ es un conjunto contable finito por lo tanto por la proposición 3.3 la $\dim(frV_p) = 0$, luego por la definición 4.1 parte 1 y 2, $\dim \mathbb{R} \leq 1$.

Figura 13. Dimensión de \mathbb{R}



ii. Veamos que $\dim(\mathbb{R}) > 0$.

Supongamos lo contrario, $\dim \mathbb{R} \leq 0$, esto implica que para cada $p \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y para cada V_p vecindad de p , existe $\rho < \varepsilon$ ($\rho > 0$), tal que la vecindad $U_p = (p - \rho, p + \rho) \subset V_p$ y $\dim fr(U_p) \leq -1$, de la parte 1 de la definición 4.1 se entiende que el único conjunto con dimensión ≤ -1 es el conjunto vacío; significa que $fr(U_p) = \emptyset$, pero sabemos que $fr(U_p) = \{p - \rho, p + \rho\}$, luego entonces hay una contradicción. Si la $fr(U_p) = \emptyset$ significa que U_p es abierto y cerrado, los únicos abiertos y cerrados en \mathbb{R} con la usual son \mathbb{R} y \emptyset , vacío no es vecindad de ningún punto y \mathbb{R} no es una vecindad arbitrariamente pequeña de ningún punto en \mathbb{R} . Luego $\dim_p(\mathbb{R}) > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$, por tanto $\dim(\mathbb{R}) > 0$.

Luego de i. y ii. $\dim(\mathbb{R}) = 1$. ■

De lo anterior resulta importante resaltar que cualquier intervalo A contenido en \mathbb{R} es 1-dimensional, ya que A por sí sólo es espacio métrico, hereda la métrica de \mathbb{R} restringida al conjunto A por tanto la demostración es semejante a la de \mathbb{R} .

En la siguiente proposición se establece una caracterización de lo que significa $\dim X \leq n$, y su demostración es inmediata a partir de la definición 4.1.

Proposición 4.1 *Sea un espacio X , $\dim X \leq n$ si y sólo si existe una base de X compuesta de conjuntos abiertos cuyas fronteras tienen dimensión $\leq n - 1$.*

Como un espacio métrico separable es 2–contable, entonces existe una base contable formada de conjuntos abiertos con las características que se expone en la proposición anterior, hecho importante que se usa en una demostración posterior. El teorema que sigue relaciona la dimensión de un subespacio con respecto a la dimensión del espacio mayor, algo importante es que la dimensión de un subespacio de un espacio de dimensión $\leq n$ es a lo más n , antes es necesario demostrar un lema (tomado de [11]):

Lema 4.1 *Sea $Y \subset X$, Y subespacio de X . Entonces, para cualquier $A \subseteq X$*

$$fr_Y(A \cap Y) \subseteq fr(A)$$

Demostración.

Por la proposición 1.1 $fr_Y(A \cap Y) = (\overline{A \cap Y})_Y \cap \overline{(Y - A)}_Y$

como $(\overline{A \cap Y})_Y \subseteq \overline{A}$ y $\overline{(Y - A)}_Y \subseteq \overline{(X - A)}$, entonces

$(\overline{A \cap Y})_Y \cap \overline{(Y - A)}_Y \subseteq \overline{A} \cap \overline{(X - A)} = fr(A)$ por tanto se concluye que

$$fr_Y(A \cap Y) \subseteq fr(A). \blacksquare$$

Teorema 4.1 *Un subespacio de un espacio de dimensión $\leq n$ tiene dimensión $\leq n$.*

Demostración.¹

Se hará por inducción. El teorema es verdadero para $n = -1$.

Suponemos que el teorema es verdadero para $n - 1$.

Sea X' un subespacio de un espacio X de dimensión $\leq n$, $p \in X'$ y U'_p vecindad en X' de p . Entonces existe una vecindad U de p en X tal que $U'_p = U \cap X'$. Como

la $\dim X \leq n$, existe V abierto en X tal que $p \in V \subseteq U$ con $\dim fr(V) \leq n - 1$.

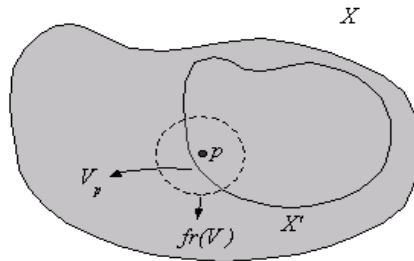
Tomando $V' = V \cap X'$, por el lema anterior $fr(V') \subseteq fr(V)$, por la hipótesis de inducción $\dim fr(V') \leq n - 1$, luego $\dim X \leq n$. ■

4.2. Dimensión de subespacios

Como se vio en el teorema 4.1 la dimensión de un subespacio no sobrepasa la dimensión del espacio mayor, más específicamente veremos como se determina la dimensión de un subespacio haciendo uso claramente de los abiertos en el espacio mayor.

Proposición 4.2 *Un subespacio X' de un espacio X tiene dimensión $\leq n$ si y sólo si cualquier $p \in X'$ tiene vecindades arbitrariamente pequeñas en X cuyas fronteras tienen intersecciones con X' de dimensión $\leq n - 1$. Ver figura 14.*

Figura 14. Dimensión de un subespacio.



$$\dim [fr(V) \cap X'] \leq n - 1$$

¹Demostración tomada de [5].

Demostración.²

\Leftarrow) Sea $p \in X'$ y U'_p en X' . Entonces existe U en X tal que $U'_p = U \cap X'$. Por

hipótesis existe un V abierto en X , tal que

$$p \in V \subseteq U \quad y$$

$$\dim(X' \cap fr(V)) \leq n - 1$$

tomando $V' = V \cap X'$, V' es abierto en X' (pues X' es abierto), con $p \in V' \subseteq U'_p$, por el lema anterior

$$frV' \subseteq X' \cap fr(V),$$

entonces por el teorema 4.1 la $\dim fr(V') \leq n - 1$, por lo tanto $\dim X' \leq n$. ■

\Rightarrow) Se tiene que la $\dim X' \leq n$. Sea $p \in X'$ y U_p en X . Entonces $U' = U_p \cap X'$ es vecindad de p en X' , por tanto existe un V'_p en X' tal que

$$p \in V'_p \subseteq U'$$

$$\dim fr(V'_p) \leq n - 1$$

Ninguno de los conjuntos disyuntos V'_p y $X' - \overline{V'_p}$ contiene puntos de acumulación del otro, por la normalidad completa³ de X existe un W abierto en X que satisface

$$V'_p \subseteq W \quad y \quad \overline{W} \cap (X' - \overline{V'_p}) = \emptyset$$

reemplazando W por $W \cap U_p$ podemos suponer que $W \subseteq U_p$, como $\overline{W} - W = frW$ ⁴ no contiene puntos de $X' - \overline{V'_p}$ y tampoco de V'_p , se sigue que $X' \cap fr(W) \subseteq fr(V'_p)$ por el teorema 4.1 $\dim(X' \cap fr(W)) \leq n - 1$. ■

²Demostración tomada de [5].

³Proposición 1.6.

⁴Esta igualdad se puede demostrar fácilmente, se deja al lector la verificación de esta afirmación.

A continuación veremos cuatro subconjuntos de \mathbb{R}^3 , usando las vecindades sugeridas en [7], se verá que estos conjuntos son 0-dimensional aplicando la proposición anterior. La notación de tales conjuntos es la misma que muestra el artículo, estos conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3 ya que heredan la métrica y por tanto la topología de \mathbb{R}^3 . Las vecindades son paralelepípedos abiertos que generan la misma topología usual generada por las bolas abiertas en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 4.2 S_0 es el conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^3 con todas las coordenadas irracionales; es decir,

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{I}\}$$

se va a demostrar que $\dim(S_0) = 0$.

Demostración.

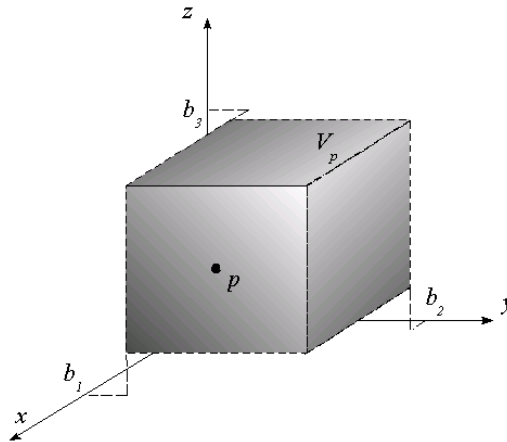
Tomando los planos en \mathbb{R}^3 $x = a$, $y = b$, $z = c$, con a, b, c tres constantes racionales, es claro que cada uno de estos planos no contienen puntos que pertenezcan a S_0 , los puntos de tales planos tienen como mínimo una coordenada racional. Se mostrará gráficamente una vecindad V_p de un punto $p \in S_0$, tomando $p = (\alpha, \beta, \gamma)$ y los planos

$$\begin{aligned} x &= a_1, & x &= b_1, \\ y &= a_2, & y &= b_2, \\ z &= a_3, & z &= b_3, \end{aligned}$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, 3$, donde $a_1 < \alpha < b_1$, $a_2 < \beta < b_2$, $a_3 < \gamma < b_3$. Las intersecciones de tales planos forman un paralelepípedo (ver figura 15), cuya frontera de V_p intersecada con S_0 es vacía, esto es $fr(V_p) \cap S_0 = \emptyset$ luego la $\dim[fr(V_p) \cap S_0] = -1$, por la proposición 4.2 $\dim S_0 \leq 0$, como $S_0 \neq \emptyset$ entonces

$\dim S_0 = 0$. ■

Figura 15. Dimensión de S_0



Ejemplo 4.3 S_2 el conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 con una coordenada irracional y dos coordenadas racionales. Veamos que S_2 es 0- dimensional.

Demostración.

Los planos $ax + by + cz = 1$ donde $a, b, c \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ⁵, no contienen puntos de S_2 , veamos

si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces $z \in \mathbb{Q}$;

si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{I}$, entonces $z \in \mathbb{I}$,

si $x, y \in \mathbb{I}$, entonces $z \in \mathbb{I}$,

agotando todos los casos para los valores de x, y, z se concluye que los planos con las ecuaciones antes escritas no poseen puntos en común con S_2 , entonces para

⁵Si tomamos a \mathbb{Q} con el 0 aparecen planos cuya frontera intersecada con S_2 es no vacía, como es el plano $ax + by = 1$ con $c = 0$ cuyo resultado es un plano perpendicular al plano xy donde z toma cualquier valor.

$p \in S_2$ y cualquier vecindad de p (U_p), existe una vecindad de V_p cuya frontera forma parte de estos planos tal que $fr(V_p) \cap S_2 = \emptyset$ luego la $\dim(fr(V_p) \cap S_2) = -1$ por la proposición 4.2 $\dim(S_2) \leq 0$ como $S_2 \neq \emptyset$ entonces $\dim(S_2) = 0$. ■

Ejemplo 4.4 S_3 el conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^3 cuyas tres coordenadas son racionales.

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}.$$

Se vera que S_3 es 0-dimensional.

Demostración.

Tomando los planos $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{I}$, cualquier punto que pertenezca a cualquiera de estos planos tiene como mínimo una coordenada irracional, luego al intersecar cada plano de estos con S_3 la intersección es vacía. Sea $p \in S_3$, $p = (a, b, c)$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$, y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{I}$ entonces los planos

$$\begin{aligned} x &= a + \varepsilon, & x &= a - \varepsilon, \\ y &= b + \varepsilon, & y &= b - \varepsilon, \\ z &= c + \varepsilon, & z &= c - \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $a + \varepsilon$, $a - \varepsilon$, $b + \varepsilon$, $b - \varepsilon$, $c + \varepsilon$, $c - \varepsilon$ pertenecen a \mathbb{I} , luego la vecindad V de p cuya frontera esta formada por la intersección de estos planos no tiene puntos en común con S_3 , entonces para cualquier vecindad de p con ε lo suficientemente pequeño $fr(V) \cap S_3 = \emptyset$ por tanto $\dim fr(V) \cap S_3 = -1$, por la proposición 4.2 $\dim S_3 \leq 0$, como $S_3 \neq \emptyset$ se tiene entonces que $\dim S_3 = 0$. ■

Ejemplo 4.5 S_1 es el conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 con una coordenada racional y dos irracionales, es 0-dimensional.

La demostración de la afirmación anterior es más complicada, se puede consultar en el libro de Hurewicz y Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1941. Los conjuntos en \mathbb{R}^n con exactamente m coordenadas racionales con $m < n$ tienen dimensión 0 la demostración se puede ver en [11] de allí se deduce que S_1 y S_2 son 0-dimensionales. Es importante anotar que el autor del artículo [7] junto con S. G. Reed, Jr construyeron una vecindad complicada⁶ cuya frontera no tiene puntos en común con S_1 .

Finalmente los cuatro ejemplos mostrados sirvieron para ilustrar la proposición 4.2. Efectivamente como se notó todos los conjuntos anteriores son 0-dimensionales, además como ya se vió en el capítulo 3 todo subconjunto de cualquiera de los conjuntos anteriores también es 0-dimensional, se tiene $S_i \cap S_j = \emptyset$ con $i \neq j$ y $\cup_{i=0}^3 S_i = \mathbb{R}^3$, cada conjunto de estos es denso, donde se quiera se puede encontrar puntos que pertenezcan a estos conjuntos.

Ahora veamos que se puede decir de la dimensión de la unión de dos subespacios:

Proposición 4.3 Sean A y B dos subespacios de un espacio X , entonces

$$\dim(A \cup B) \leq 1 + \dim(A) + \dim(B).$$

Demostración.⁷

Haciendo doble inducción sobre las dimensiones de A y B . La proposición se cumple para

$$\dim(A) = \dim(B) = -1$$

Sea $\dim(A) = m$, $\dim(B) = n$, y suponemos cierto para los casos

$$\dim(A) \leq m, \quad \dim(B) \leq n - 1 \quad y \quad (1)$$

⁶Esta construcción fue publicada en la impresión No. 5 en el Reporte del Coloquio de Matemática en la Universidad de Notre Dame.

⁷Demostración tomada de [5].

$$\dim(A) \leq m - 1, \dim(B) \leq n. \quad (2)$$

Sea $p \in A \cup B$, tomando $p \in A$. Sea U vecindad de p en X , por la proposición 4.2 existe un abierto V , tal que

$$p \in V \subseteq U, \quad y \quad \dim(W \cap A) \leq m - 1$$

donde $W = fr(V)$. Pero $W \cap B$ es un subconjunto de B , se tiene entonces que

$$\dim(W \cap B) \leq n.$$

Por teoría de conjuntos tenemos que $(W \cap A) \cup (W \cap B) = W \cap (A \cup B)$

Por la hipótesis de inducción (1) y (2),

$$\dim[(W \cap B) \cup (W \cap A)] \leq 1 + \dim(W \cap B) + \dim(W \cap A)$$

como $\dim(W \cap B) + \dim(W \cap A) \leq n + m - 1$, se tiene que

$$\dim[(W \cap B) \cup (W \cap A)] \leq 1 + n + m - 1 = m + n$$

$$\dim[W \cap (A \cup B)] \leq m + n.$$

Esto prueba por la proposición 4.2 que

$$\dim(A \cup B) \leq m + n + 1,$$

completándose así la inducción. ■

La proposición anterior será usada en la demostración de un resultado importante de la Teoría de la dimensión como es el Teorema de la unión para la dimensión n .

Capítulo 5

Algunas propiedades de la dimensión

Las propiedades que se presentan en este capítulo son cinco teoremas que el artículo [7] (cuya traducción se adjunta), menciona. Son cinco teoremas de la teoría de la dimensión, resultado de aciertos y desaciertos de algunos matemáticos que han dedicado su vida a desarrollar resultados teóricos, que posteriormente han servido de herramienta para el desarrollo de otras ramas de la ciencia; propiedades cuyas demostraciones quizás por razones de espacio para no extender el artículo o para hacer más interesante el contenido de este no se hacen; aquí solo se detallan las cuatro primeras propiedades y la última se menciona. Para el desarrollo de las demostraciones de cada propiedad se deben tener en cuenta algunas proposiciones y conceptos previos que se encuentran tanto en este capítulo como en los anteriores. Algunas demostraciones se omiten debido a la complejidad de éstas.

5.1. Teorema de la unión para la dimensión n .

Esta propiedad es uno de los importantes resultados de la teoría de la dimensión que se puede expresar de la siguiente forma: un conjunto S no puede dividirse en la unión enumerable de cerrados cada uno de los cuales es de dimensión menor que S , propiedad que se debe a Urysohn y Karl Menger. La demostración fue tomada de [5].

Proposición 5.1 *Cualquier espacio de dimensión $\leq n$ es la unión de un subespacio de dimensión $\leq n - 1$ y un subespacio de dimensión ≤ 0 . (Su demostración se encuentra en [5])*

Teorema 5.1 ¹

Un espacio el cual es la unión contable de subconjuntos cerrados de dimensión $\leq n$, es de dimensión $\leq n$.

El Teorema de la unión para dimensión n se denota por \sum_n . La demostración se hará por inducción.

Demostración.

Para \sum_{-1} se cumple el teorema. Por el teorema 3.2 se tiene que \sum_0 se cumple.

Se supone cierto para \sum_{n-1} . \sum_n se deduce de \sum_{n-1} haciendo uso de \sum_0 .

Supongamos que

$$X = C_1 \cup \dots \cup C_i \cup \dots, \text{ y}$$

$$\dim(C_i) \leq n,$$

cada C_i cerrado. Queremos probar que la $\dim(X) \leq n$.

Sea

$$K_1 = C_1$$

¹Teorema de la unión para la dimensión n ; es equivalente a decir que, cualquier espacio que es la unión contable de conjuntos F_σ de dimensión $\leq n$ tiene dimensión $\leq n$.

$$K_i = C_i - \cup_{j=1}^{i-1} C_j = C_i \cap (X - \cup_{j=1}^{i-1} C_j), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (1)$$

entonces

$$X = \cup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad (2)$$

$$K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \text{si } i \neq j, \quad (3)$$

$$K_i \text{ es un } F_{\sigma} \text{ en } X, \quad (4)$$

(2) y (3) son claros. Veamos de donde se tiene (4), note que $\cup_{j=1}^{i-1} C_j$ es cerrado; por tanto $X - \cup_{j=1}^{i-1} C_j$ es abierto, como un conjunto abierto en un espacio métrico es un F_{σ} ; K_i es la intersección de estos F_{σ} con el conjunto cerrado C_i , también es un F_{σ} . Como cada K_i es un subconjunto de C_i y $\dim C_i \leq n$ entonces se tiene que

$$\dim(K_i) \leq n \quad (5)$$

aplicando la proposición 5.1 a (5) para cada K_i , existen subespacios M_i y N_i tal que

$$K_i = M_i \cup N_i, \quad \text{con}$$

$$\dim M_i \leq n - 1, \quad \dim N_i \leq 0.$$

tomando $M = \cup M_i$ y $N = \cup N_i$ de (2)

$$X = M \cup N$$

cada M_i es un F_{σ} en M . Cada M_i se puede expresar como sigue:

$$M_i = M_i \cap K_i = (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i \cup \dots) \cap K_i = M \cap K_i,$$

dado que $M_i \subset K_i$ y $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$ por (3).

Por lo tanto M_i , es la intersección de M con K_i , la cual es un F_{σ} por (4), es en sí mismo un F_{σ} en M , por lo tanto por la hipótesis de inducción podemos aplicar \sum_{n-1} para concluir que $\dim M \leq n - 1$. Y por un argumento similar cada N_i es

un F_σ en N y por tanto $\dim N \leq 0$ por \sum_0 , tenemos que $X = M \cup N$, luego por la proposición 4.3 se tiene que

$$\begin{aligned}\dim(M \cup N) &\leq 1 + \dim(M) + \dim(N) \leq 1 + (n - 1) + 0 \\ \dim(X) &\leq 1 + n - 1 = n \\ \dim(X) &\leq n. \blacksquare\end{aligned}$$

Consecuencia del anterior teorema resultan los siguientes corolarios.

Corolario 5.1 *La unión de dos subespacios cada uno de los cuales tiene dimensión $\leq n$ y uno de los cuales es cerrado tiene dimensión $\leq n$.*

Demostración.

Sean A y B subespacios de dimensión $\leq n$ y B cerrado, entonces $(A \cup B) - B$ es abierto en $A \cup B$, tenemos que $(A \cup B) - B$ es un F_σ en $A \cup B$, de la ecuación

$$A \cup B = B \cup ((A \cup B) - B)$$

B es un F_σ , por tanto $A \cup B$ es la unión contable de conjuntos F_σ cada uno con dimensión $\leq n$, luego del teorema de la unión para dimensión n se sigue que $A \cup B$ tiene dimensión $\leq n$. \blacksquare

El siguiente corolario garantiza que la dimensión de un espacio permanece constante después de adjuntarle un punto.

Corolario 5.2 *La dimensión de un espacio no vacío X no aumenta al unirle un monopuntual.*

Demostración.

Es consecuencia inmediata del corolario anterior, ya que en un espacio métrico el monopuntual es cerrado. \blacksquare

Este corolario muestra otra propiedad de la dimensión.

5.2. La imagen topológica de un conjunto n -dimensional es n -dimensional

Esto significa que la propiedad de ser n -dimensional es un invariante topológico. En el capítulo 3 se demostró que ser 0-dimensional es un invariante topológico. El siguiente teorema demuestra en general esta propiedad. La primera parte de la demostración fue tomada de [11], para un buen entendimiento de ésta se tuvo que demostrar la proposición 1.3, las otras partes de la demostración son resultado de la primera.

Teorema 5.2 *Dimensión de un espacio X en un punto p es $\leq n, = n$ y la dimensión de un espacio X es $\leq n, = n$ son invariantes topológicos.*

Demostración.

El teorema es verdadero para $n = -1$ y de la proposición 3.1 es verdadero para $n = 0$. Supongamos que todas las partes del teorema son verdaderas para $n - 1$. Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo.

i. Sea $p \in X$ y $\dim_p X \leq n$ esto es que p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas V_p con $\dim(fr(V_p)) \leq n - 1$, como h es homeomorfismo $h(V_p)$ es vecindad de $h(p)$, por la proposición 1.3, h preserva fronteras; es decir, $h[fr(V_p)] = fr[h(V_p)]$ y de la hipótesis de inducción tenemos que $\dim(fr[h(V_p)]) \leq n - 1$ para cada vecindad $h(V_p)$ de $h(p)$ luego $\dim_{h(p)}(Y) \leq n$.

ii. Sea $\dim X \leq n$, esto es para todo $p \in X$, $\dim_p X \leq n$, de **i** tenemos que $\dim_{h(p)}(Y) \leq n$ para todo $h(p) \in Y$ luego $\dim(Y) \leq n$.

iii. Sea $p \in X$ y $\dim_p(X) = n$ por la definición 4.1 (parte 4) $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) > n - 1$ sabemos por **i** que $\dim_{h(p)}(Y) \leq n$ veamos la otra parte, como $\dim_p(X) > n - 1$ existe al menos una vecindad U_p de p con $\dim(fr(U_p)) > n - 2$,

h preserva fronteras y por la hipótesis de inducción $\dim(fr[h(U_p)]) > n - 2$ por ser h homeomorfismo $h(U_p)$ es vecindad de $h(p)$ luego $\dim_{h(p)}(Y) > n - 1$ entonces $\dim_{h(p)}(Y) = n$.

iv. $\dim(X) = n$ significa $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) > n - 1$, tenemos que la $\dim X \leq n$, entonces por **ii**, $\dim(Y) \leq n$. Que la $\dim(X) > n - 1$ significa que existe un $p_0 \in X$ y una vecindad U_{p_0} de p_0 tal que para todo abierto V con

$$p_0 \in V \subseteq U_{p_0} \quad \text{se tiene} \quad \dim(fr(V)) > n - 2$$

ahora por la hipótesis de inducción y la proposición 1.3 $\dim(fr[h(V)]) > n - 2$, luego $\dim Y > n - 1$, entonces $\dim(Y) = n$.

Por tanto para todo $n \geq -1$ el teorema es verdadero. ■

El resultado anterior nos permite concluir que ser n -dimensional es una propiedad topológica. Ilustraremos la proposición anterior con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1 *Sea la circunferencia S^1 (o esfera S^1) definida de la siguiente forma:*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Veamos que S^1 es 1-dimensional.

Demostración.

Haciendo uso de la proyección estereográfica (ver figura 16) que esta dada por la siguiente función $F : S^1 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $p = (0, 1)$, definida como sigue:

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{1 - y}, 0 \right)$$

es un homeomorfismo cuya inversa es:

$$G(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

Veamos que G es la inversa de F , resolviendo la compuesta tanto a derecha como a izquierda; es decir, se debe probar que $F \circ G = I_{\mathbb{R}}$ y $G \circ F = I_{S^1 - \{p\}}$ respectivamente para concluir que tanto F como G son biyectivas:

i.

$$\begin{aligned}
 F \circ G(x) &= F(G(x)) \\
 &= F\left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \\
 &= \left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1 - \frac{x^2-1}{x^2+1}}, 0\right) \\
 &= \left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1}}, 0\right) \\
 &= \left(\frac{2x(x^2+1)}{2(x^2+1)}, 0\right) = (x, 0)
 \end{aligned}$$

se tiene entonces que G es la inversa a derecha de F .

ii.

$$\begin{aligned}
 G \circ F(x) &= G\left(\frac{x}{1-y}, 0\right) \\
 &= \left(\frac{2\frac{x}{1-y}}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + 1}\right) \\
 &= \left(\frac{\frac{2x}{1-y}}{\frac{x^2}{(1-y)^2} + 1}, \frac{\frac{x^2}{(1-y)^2} - 1}{\frac{x^2}{(1-y)^2} + 1}\right) \\
 &= \left(\frac{\frac{2x}{1-y}}{\frac{x^2+(1-y)^2}{(1-y)^2}}, \frac{\frac{x^2-(1-y)^2}{(1-y)^2}}{\frac{x^2+(1-y)^2}{(1-y)^2}}\right) \\
 &= \left(\frac{2x(1-y)}{x^2+(1-y)^2}, \frac{x^2-(1-y)^2}{x^2+(1-y)^2}\right) \\
 &= \left(\frac{2x(1-y)}{x^2+1-2y+y^2}, \frac{x^2-1+2y-y^2}{x^2+1-2y+y^2}\right)
 \end{aligned}$$

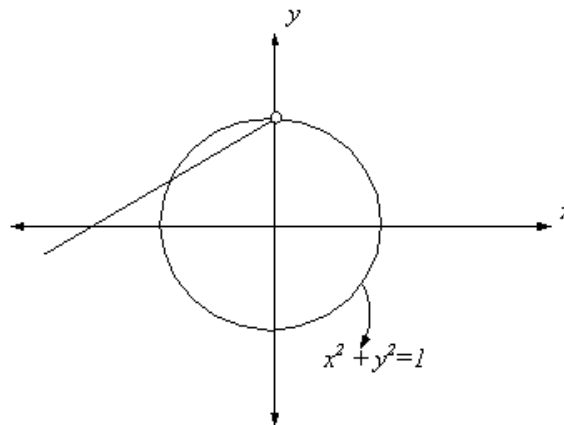
como $x^2 + y^2 = 1$, y $-x^2 - y^2 = -1$ se tiene

$$\begin{aligned}
G \circ F(x) &= \left(\frac{2x(1-y)}{1+1-2y}, \frac{x^2 - x^2 - y^2 + 2y - y^2}{1+1-2y} \right) \\
&= \left(\frac{2x(1-y)}{2(1-y)}, \frac{-2y^2 + 2y}{2-2y} \right) \\
&= \left(x, \frac{2y(1-y)}{2(1-y)} \right) \\
&= (x, y)
\end{aligned}$$

luego G es la inversa a izquierda de F , por tanto de **i** y **ii** F es biyectiva esto implica que su inversa G también es biyectiva.

Por la forma como estan definidas F y G son funciones continuas ya que cada una tiene componentes continuas, luego F es un homeomorfismo de $S^1 - \{p\}$ en \mathbb{R} y G es un homeomorfismo de \mathbb{R} en $S^1 - \{p\}$, como \mathbb{R} es 1-dimensional y la dimensionalidad es un invariante topológico entonces se tiene que $S^1 - \{p\}$ es 1-dimensional, al unir el punto p a $S^1 - \{p\}$ se tiene entonces que $(S^1 - \{p\}) \cup \{p\} = S^1$, por el corolario 5.2 S^1 es 1-dimensional. ■

Figura 16. Proyección estereográfica de $S^1 - \{p\}$ sobre la recta real



Generalizando el ejemplo anterior para la esfera S^n definida como sigue:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

cuya proyección estereográfica de $S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $p = (0, 0, \dots, 0, 1)$ esta dada por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0 \right)$$

F es un homeomorfismo cuya inversa esta dada por

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1} \right)$$

y tanto F como G son continuas , entonces se deduce que $S^n - \{p\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n , este homeomorfismo nos permitirá realizar la demostración completa de la propiedad que sigue.

5.3. El Espacio n -Euclideo \mathbb{R}^n es n -dimensional.

Hasta ahora se ha mostrado la existencia de espacios 1-dimensionales; aquí se presentará la dimensión para espacios de dimensión mayor que 1, esta propiedad se debe a **Brouwer** [7]. El n -espacio euclidiano esta denotado por \mathbb{R}^n y la métrica asociada a este espacio es la métrica euclidiana, por eso su nombre.

Para demostrar que la dimensión de \mathbb{R}^n es n se deben probar dos cosas, que $\dim \mathbb{R}^n \leq n$ y $\dim \mathbb{R}^n \geq n$ para concluir que $\dim \mathbb{R}^n = n$, este es uno de los resultados más importantes de la topología que se presentará en este trabajo y

que permitió el desarrollo de la Teoría de la Dimensión. La prueba de $\dim \mathbb{R}^n \geq n$ fue tomada de [5].

Proposición 5.2 $\dim \mathbb{R}^n \leq n$.

Demostración.

Por inducción,

i. para $n = 1$ por el ejemplo 4.1 se tiene que $\dim \mathbb{R} \leq 1$.

ii. Suponemos que la proposición se cumple para $n - 1$, es decir $\dim \mathbb{R}^{n-1} \leq n - 1$.

Ahora se demostrará para n . Sea $p \in \mathbb{R}^n$ con $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ donde $p_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ y sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tomando la métrica euclidiana (usual) en \mathbb{R}^n es decir, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$d(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

luego la bola abierta con centro en p y radio ε esta dada por

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p) < \varepsilon\}$$

es claro que $B_\varepsilon(p)$ es vecindad de p cuya frontera es

$$fr(B_\varepsilon(p)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 = \varepsilon^2\}$$

donde la $fr(B_\varepsilon(p))$ es homeomorfa a S^{n-1} , tenemos por la generalización del ejemplo 5.1 que $S^{n-1} - \{(0, 0, \dots, 1)\} \cong {}^2 \mathbb{R}^{n-1}$ por la hipótesis de inducción $\dim \mathbb{R}^{n-1} \leq n - 1$ como la dimensionalidad es un invariante topológico entonces se tiene que $S^{n-1} - \{(0, 0, \dots, 1)\}$ es $(n - 1)$ -dimensional, como

$$(S^{n-1} - \{(0, 0, \dots, 1)\}) \cup \{(0, 0, \dots, 1)\} = S^{n-1},$$

por el corolario 5.2, S^{n-1} es $(n - 1)$ -dimensional y $S^{n-1} \cong fr(B_\varepsilon(p))$ entonces se tiene que $\dim[fr(B_\varepsilon(p))] \leq n - 1$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier vecindad $B_\varepsilon(p)$

² \cong se usa para decir que dos espacios son homeomorfos.

de p , entonces por la definición se tiene que $\dim_p \mathbb{R}^n \leq n$ como p es cualquier punto de \mathbb{R}^n se deduce que $\dim \mathbb{R}^n \leq n$. ■

Proposición 5.3 *Sea I^n un cubo³ en \mathbb{R}^n . C_i es la cara de I^n determinada por la ecuación $x_i = 1$ y C'_i la cara opuesta, B_i es un conjunto cerrado separando a C_i y C'_i . Entonces $B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$. (La demostración de esta proposición se encuentra en [5]).*

Proposición 5.4 *Si un espacio X tiene dimensión $\leq n$ entonces cualquier par de subconjuntos cerrados disyuntos en X se pueden separar por un conjunto cerrado de dimensión $\leq n - 1$.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados disyuntos en X , por la normalidad de X existen conjuntos en X abiertos A_1 y B_1 tal que

$$A \subset A_1 \text{ y } B \subset B_1 \text{ con}$$

$$A_1 \cap B_1 = \emptyset$$

claramente $X - \overline{A_1}$ es abierto y $B_2 \subset X - \overline{A_1}$, además $A_1 \cap (X - \overline{A_1}) = \emptyset$. Para $p \in B$ se tiene $p \in B \subset B_1 \subset X - A_1$ entonces B_1 es vecindad de p , como $\dim X \leq n$ se tiene que $\dim(fr(B_1)) \leq n - 1$, es claro que $fr(B_1)$ es cerrado y separa a A y B . ■

Proposición 5.5 *Si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados disyuntos en un espacio X (de dimensión arbitraria) y A es un subconjunto de X de dimensión $\leq n$, entonces existe un conjunto cerrado B en X separando a C_1 y C_2 con $\dim(A \cap B) \leq n - 1$. (La demostración se encuentra en [5]).*

³ I^n es el conjunto de puntos en \mathbb{R}^n cuyas n coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n satisfacen $|x_i| \leq 1$, o sea $-1 \leq x_i \leq 1$.

Proposición 5.6 Sea X un espacio de dimensión $\leq n - 1$ y sea C_i y C'_i , con $i = 1, \dots, n$, n pares de subconjuntos cerrados en X para los cuales

$$C_i \cap C'_i = \emptyset.$$

Entonces existen n conjuntos cerrados B_i tal que B_i separa C_i y C'_i y $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n = \emptyset$.

Demostración. De la proposición 5.4 existe un conjunto B_1 cerrado en X separando a C_1 y C'_1 con

$$\dim(B_1) \leq n - 2$$

De la proposición 5.5 existe un B_2 cerrado separando a C_2 y C'_2 con

$$\dim(B_1 \cap B_2) \leq n - 3$$

y haciendo uso repetido de la proposición 5.5 llegamos a n conjuntos B_i cerrados tal que B_i separa a C_i y C'_i y

$$\dim(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k) \leq n - k - 1, \quad k = 1, \dots, n$$

para $k = n$ se tiene entonces que

$$\dim(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \leq -1$$

por definición se tiene que $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n = \emptyset$. ■

Proposición 5.7 $\dim I^n \geq n$

Demostración.⁴

Supongamos lo contrario que la $\dim I^n < n$ esto implica que $\dim I^n \leq n - 1$, de la proposición anterior existirán n subconjuntos cerrados B_i de I^n , cada uno

⁴Demostración tomada de [5].

separando a pares diferentes de caras opuestas con $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n = \emptyset$ pero esto contradice la proposición 5.3, luego $\dim I^n \geq n$. ■

Haciendo uso de las proposiciones anteriormente descritas se llega entonces a la siguiente proposición:

Proposición 5.8 $\dim \mathbb{R}^n \geq n$

Demostración.

Tenemos que $I^n \subset \mathbb{R}^n$ y la $\dim I^n \geq n$, entonces $n \leq \dim I^n \leq \dim \mathbb{R}^n$, luego se tiene la $\dim \mathbb{R}^n \geq n$. ■

Ahora si enunciamos el teorema deseado.

Teorema 5.3 $\dim \mathbb{R}^n = n$

Demostración.

Combinando $\dim \mathbb{R}^n \leq n$ y $\dim \mathbb{R}^n \geq n$ se concluye que $\dim \mathbb{R}^n = n$. ■

Ya que existe un resultado teórico que justifica lo que por mucho tiempo hemos afirmado, podemos ahora entonces decir con tranquilidad que la dimensión del plano es 2 y que la dimensión del espacio que habitamos es 3 y de aquí se deduce que todo objeto homeomorfo a \mathbb{R}^3 es de dimensión 3.

Consecuencia del teorema anterior es el siguiente corolario:

Corolario 5.3 *El n -cubo euclidiano I^n tiene dimensión n .*

Demostración.

Sabemos de la proposición 5.7 que $\dim I^n \geq n$, $\dim \mathbb{R}^n \leq n$ y $I^n \subset \mathbb{R}^n$ luego resulta que $\dim I^n \leq n$, por tanto se concluye que $\dim I^n = n$. ■

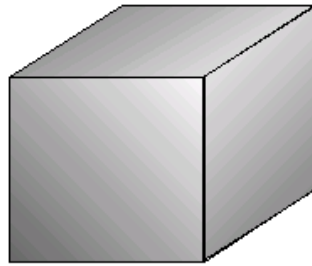
Ejemplo 5.2 a) $\dim I^2 = 2$, b) $\dim I^3 = 3$, c) $\dim I^4 = 4$.

Figura 17. El cubo I^n con $n = 2, 3, 4$

a) I^2 . Cuadrado

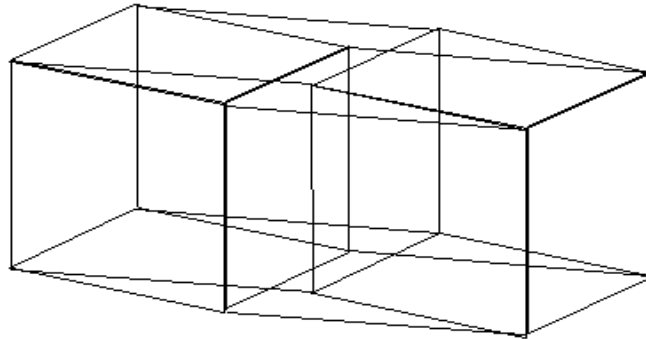


b) I^3 . Cubo



Tomado de [12].

c) I^4 . Proyección sobre \mathbb{R}^3 del *Hipercubo o Tesseracto*



Tomado de [16].

El tesseracto es un objeto en \mathbb{R}^4 que se puede proyectar en el plano y en \mathbb{R}^3 . Ya que sabemos cual es nuestra dimensión y como es nuestra vida en ella podríamos imaginarnos como sería la vida en una dimensión mayor o menor a la nuestra por medio de analogías podríamos lograrlo como por ejemplo con la más cercana, la cuarta dimensión.

5.4. Cada parte de un conjunto n -dimensional es a lo más n -dimensional.

La demostración de esta propiedad es corta y sencilla ya que se usa la definición 4.1 y la dimensión de un subespacio de un espacio de dimensión $\leq n$. El siguiente teorema se debe a Menger y Urysohn.

Teorema 5.4 *Cada parte de un espacio n -dimensional es a lo más n -dimensional.*

Demostración.

Sea X un espacio n -dimensional y sea $X' \subseteq X$ un subespacio de X , como $\dim X = n$ significa que $\dim X \leq n$ y $\dim X > n - 1$, tenemos que la $\dim X \leq n$ entonces por la teorema 4.1, $\dim X' \leq n$. ■

Este teorema garantiza que ningún subespacio de un espacio de dimensión n tendrá dimensión mayor que la del espacio, será igual o menor.

5.5. Cada conjunto de dimensión n puede ser transformado topológicamente en un subconjunto de un conjunto compacto de dimensión n .

Este teorema fue demostrado por **Witold Hurewicz** (1904-1966); en el contenido de la demostración de esta propiedad se trabaja con espacios de funciones los cuales no se estudian en ninguna parte de este trabajo y por tanto implicaría un estudio más profundo y extenso de este concepto y sus demás resultados, algo que aumentaría más el contenido del presente trabajo; la demostración es muy compleja, por esta razón no se presenta; se puede consultar en [5].

5.6. Traducción del artículo ¿WHAT IS DIMENSION?

¿QUE ES DIMENSIÓN?

1. SÓLIDOS, SUPERFICIES, Y LINEAS.

Estrictamente hablando todos los objetos materiales son de dimensión 3. Sin embargo, solo objetos como una esfera metálica, un bloque de madera o una piedra son considerados representaciones típicas de objetos de dimensión 3 (sólidos). Una lámina de hierro, de papel y una membrana aproximan lo que para nosotros significa hablar de objetos de dimensión-dos (superficies). Alambre, hilo y

una línea o raya hecha con tiza representan nuestra idea de objetos de dimensión-uno (líneas).

¿Qué diferencia existe entre objetos de diferente dimensión?. *Al principio los matemáticos creyeron que esta era una diferencia en cantidad en el sentido de que una superficie contiene más puntos que una línea y menos puntos que un sólido. Ahora primeramente las palabras “ más ”, “ menos ” e “ igual cantidad ” estaban restringidas a conjuntos finitos, en tanto que las superficies así como las líneas y los sólidos contienen infinitos puntos. Pero George Cantor extendió su uso a todos los conjuntos. Nosotros decimos que dos conjuntos finitos o infinitos contienen igual cantidad de elementos si podemos establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos. Cantor encontró que dos conjuntos infinitos no necesariamente contienen igual cantidad de elementos. Por ejemplo, entre los objetos geométricos un segmento de línea recta contiene más puntos que algunos conjuntos infinitos dispersos, es decir, el conjunto de todos los puntos sobre una línea recta cuyas distancias a cierto punto son enteras. Sin embargo, un segmento de línea recta, un cuadrado y un cubo contienen igual cantidad de puntos [1]. Dado que estos objetos son de dimensiones diferentes, se sigue que la dimensión no es una propiedad cuantitativa.*

Más tarde los geómetras pensaron que la diferencia entre un objeto de dimensión uno y uno de dimensión mayor consistía en el hecho de que el primero pero no el último, puede ser recorrido por un punto moviéndose continuamente. En verdad, las líneas sobre un papel o un tablero son dibujadas, esto es, recorridas por la punta de un lápiz o tiza. Sin embargo, Peano encontró que un punto moviéndose continuamente puede recorrer una superficie cuadrada o un cubo sólido aunque nadie los llamaría objetos de dimensión uno, por otra parte se encontraron

objetos 1-dimensionales que no pueden ser recorridos por un punto que se mueve continuamente [2]. El hecho que un objeto sea la trayectoria de un punto es interesante por él mismo, pero no tiene resultado sobre la discusión de la dimensión del objeto [3].

Cuando se probó que las funciones uno a uno y continuas son bases inadecuadas para la definición de dimensión, los matemáticos intentaron caracterizar la dimensión de un conjunto T como el menor de los números reales requerido para describir topológicamente (función uno a uno y bicontinua) los elementos de T . Cada punto de nuestro espacio ordinario puede ser topológicamente caracterizado por tres, pero no menos que tres números reales, esto es sus coordenadas cartesianas o esféricas; cada punto de una superficie por dos, pero no menos que dos números reales, por ejemplo los puntos de una esfera por longitud y amplitud; cada punto de una línea simple por un número. Así por la última definición, nuestro espacio es de dimensión tres, una superficie simple es de dimensión dos, una línea simple es de dimensión uno. Análogamente cada sensación de color de un ojo normal puede ser caracterizado topológicamente por tres, pero no menos que tres números reales, las cantidades de tres colores estándar producen una sensación idéntica. Por lo tanto el conjunto de sensaciones de color de un ojo normal es de dimensión tres, mientras que las totalidades correspondientes de color para un ojo parcial o totalmente oculto solo es de dimensión dos y dimensión uno respectivamente. De la misma manera el conjunto de todas las mezclas de cuatro ingredientes las cuales no se pueden obtener con una mezcla menor de cuatro de ellos, es llamado de dimensión cuatro. En efecto, en esta dirección esta nuestro único análisis elemental aproximado para la cuarta dimensión y espacios de dimensión mayor.

Desafortunadamente, sin embargo, la última definición se aplica solamente

a espacios muy simples, aquellos que pueden ser obtenidos por medio de transformaciones simples de un segmento recto, un cuadrado o un cubo. Tales objetos son llamados arcos, discos y esferas topológicas. En nuestro espacio y en el plano arcos y discos forman solo una pequeña parte de las líneas y las superficies estudiadas por la geometría moderna.

Aún si admitimos objetos los cuales son unión de un número finito de arcos y discos nuestro dominio es aún muy restringido. Por ejemplo la línea mencionada atrás, la cual no puede ser recorrida por un punto moviéndose continuamente [2] no pertenece al dominio dado, esta no es la unión de un número finito de arcos. En efecto, es la unión de infinitos arcos, pero todos los conjuntos que son uniones de infinitos arcos no pueden ser llamados de dimensión-uno dado que el cuadrado y el cubo son unión de cantidades infinitas de segmentos rectos [4].

Para formular la diferencia intuitiva entre líneas, superficies y sólidos se puede construir un experimento simple cuyo resultado depende de la dimensión del objeto al cual se este aplicando [5]. Cortamos del objeto una pieza rodeando un punto dado. Si el objeto es un sólido necesitamos una sierra para poder hacer esto y el corte es a lo largo de superficies. Si el objeto es una superficie con un par de tijeras es suficiente y los cortes son curvas. Si tratamos con una curva podemos usar un par de tenazas y pellizcar el objeto en puntos dispersos. Finalmente en un objeto disperso no se requiere instrumento para nuestro experimento dado que ninguna cosa necesita ser disectada. Esta caracterización de la dimensión conduce de un objeto de dimensión n a uno de dimensión $n - 1$. Esto termina con los conjuntos dispersos naturalmente llamados de dimensión 0 y más allá de estos con el conjunto "nada", en teoría de conjuntos llamado el conjunto vacío. Por esto es conveniente considerar el último como de dimensión -1 .

2. LA DEFINICIÓN DE DIMENSIÓN

Para hacer esta idea precisa solo necesitamos dos conceptos auxiliares simples: vecindad y frontera. En nuestro espacio llamamos un conjunto N una vecindad si cada punto de N es centro de una esfera (aunque quizá una esfera muy pequeña) cuyos puntos todos pertenecen a N . El interior de un cubo es una vecindad, mientras que un cubo con sus caras no lo es. Por pequeña que sea una esfera alrededor de un punto que está en una cara, contiene puntos que no pertenecen al cubo. Un plano no es una vecindad de nuestro espacio. Porque cada esfera alrededor de cada punto de un plano contiene puntos que no pertenecen al plano. La frontera de una vecindad N es el conjunto de todos los puntos que no pertenecen a N , pero son centro de esferas arbitrariamente pequeñas que contienen algunos puntos de N . Para el interior del cubo la frontera consiste precisamente de las seis caras.

En términos de estos conceptos el resultado de nuestro experimento de dimensión recursiva puede ser explicado como sigue:

◆ *Un conjunto S de puntos en nuestro espacio es a lo más n -dimensional si cada punto de S está en vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen intersecciones con S a lo más de dimensión $n - 1$.*

◆ *El conjunto S es de dimensión n si este es a lo más de dimensión n pero no a lo más de dimensión $n - 1$.*

Que S no es a lo más de dimensión $n - 1$ significa que S contiene al menos un punto en el cual S es al menos de dimensión n , es decir, un punto que no está en vecindades arbitrariamente pequeñas cuya frontera tiene intersecciones con S de dimensión a lo más $n - 2$; las fronteras de todas las vecindades lo suficientemente pequeñas de tal punto tiene intersecciones con S al menos dimensión $n - 1$.

El conjunto vacío, llamado de dimensión -1 , es el punto de partida de nuestra definición recursiva [6].

Por esta definición un conjunto S es de dimensión 0 si éste no es vacío y cada punto de S esta en vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen intersecciones con S de dimensión -1 , esto es, intersecciones con S vacías, en otras palabras no tiene puntos en común con S .

Un conjunto S es de dimensión 1 , si no es de dimensión 0 y cada punto esta en vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen intersecciones con S de a lo más dimensión 0 . Pero es claro que un punto de un conjunto 1 -dimensional puede estar contenido en vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen intersecciones con S de dimensión mayor que 0 . Por ejemplo, cada punto de una línea recta S esta contenido en vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras contienen piezas completas de S . Tales vecindades pueden formarse añadiendo dos cubos de diferente tamaño, uno de los cuales tiene una cara que pasa a través de S .

Además sería claro que no siempre podemos encontrar vecindades simples de un punto que esta en un conjunto de dimensión n cuyas fronteras tienen intersecciones con S de dimensión a lo más $n - 1$. Uno de los ejemplos más interesantes al respecto surge del estudio detallado de los siguientes cuatro conjuntos cuya unión incidentalmente llena nuestro espacio:

El conjunto S_0 de todos los puntos que tienen tres coordenadas irracionales.

El conjunto S_1 de todos los puntos que tienen una coordenada racional y dos irracionales.

El conjunto S_2 de todos los puntos que tienen dos coordenadas racionales y una irracional.

El conjunto S_3 de todos los puntos que tienen tres coordenadas racionales.

Si a, b, c son tres cualesquiera constantes racionales, entonces los planos $x = a, y = b, z = c$ no contienen puntos de S_0 , y los planos $ax + by + cz = 1$ no contienen puntos de S_2 . Si α, β, γ son tres cualesquiera constantes irracionales, entonces los planos $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ no contienen puntos de S_3 .

Ahora para $i = 0, 2, 3$ cada punto de S_i esta contenido en cubos arbitrariamente pequeños cuyas caras son parte de tales planos los cuales no tienen puntos en común con S_i . Por lo tanto S_0, S_2, S_3 son de dimensión 0. Así es para S_1 pero la prueba de este hecho es mucho más complicada [7]. No solamente para cada plano que interseca a S_1 , pero como notó Schreier, cada superficie de la forma $z = f(x, y)$ donde f es una función continua, tiene puntos en común con S_1 lo mismo es cierto para cada superficie de la forma $y = f(x, z)$ y $x = f(y, z)$. En efecto, solo recientemente S. G. Reed, Jr y el autor construyeron [8] una vecindad cuya frontera necesariamente complicada, no tiene puntos en común con S_1 .

Dado que la dimensión de subconjuntos de nuestro espacio ha sido definida en términos de vecindades, la definición es aplicable a los subconjuntos de todos los espacios en los cuales las vecindades están dadas. Un ejemplo de tal espacio es el espacio euclideo de dimensión 4 cuyos puntos son las cuádruplas de números reales x, y, z, u y en el cual la esfera con radio r y centro x_0, y_0, z_0, u_0 consta de los puntos x, y, z, u que satisfacen la desigualdad

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (u - u_0)^2 \leq r^2$$

Un conjunto N es una vecindad si cada punto de N es centro de una esfera donde todos sus puntos pertenecen a N .

3. CRITERIOS PARA UNA DEFINICIÓN SATISFACTORIA

Ahora examinemos la definición de dimensión . El objetivo es precisar y ampliar el uso ordinario de las palabras “ dimensión 1 ”, “ dimensión 2 ”, “ dimensión 3 ”. Una buena definición de una palabra debe incluir todos los entes que son siempre denotados y debe excluir todos los entes que nunca están denotados por la palabra. Para la palabra “dimensión 1”, línea recta, elipse y lemniscatas son objetos del primer tipo; superficies cuadradas , cubos sólidos, y conjuntos finitos del otro tipo. Una buena definición debe extender el uso de la palabra tratando de relacionarla con objetos no conocidos o no tratados con un lenguaje ordinario. Al considerar tales entes, una definición arbitraria no puede ayudar. En conexión con la palabra “dimensión uno” considereremos los cuatro conjuntos S_i cuya unión es nuestro espacio. Una definición general de dimensión uno implicará para cada uno de los conjuntos $S_0, S_0 \cup S_1, S_0 \cup S_1 \cup S_2$ si es o no de dimensión 1. Nuestra definición implícitamente asigna a estos conjuntos las dimensiones 0, 1 y 2 respectivamente, cada asignación es de alguna manera arbitraria dado que el lenguaje ordinario no asigna a ellos alguna dimensión.

Una buena definición debe producir muchas consecuencias, en particular teoremas los cuales son estéticamente satisfactorios por su generalidad y simplicidad, y teoremas que conectan los conceptos definidos con conceptos de otras teorías. Esto es, teoremas los cuales justifican el inevitable elemento arbitrario de la definición. Algunos de los teoremas extenderán afirmaciones que son verdaderas en el dominio restringido del lenguaje ordinario al dominio extendido de la definición. Otros teoremas exhibirán excepciones importantes o aún corregir hábitos erróneos del pensamiento.

La definición mostrada en este artículo ha producido una extensiva teoría de la dimensión, que desde de su fundamentación temprana en los veinte se ha desarrollado como una de las ramas centrales de la topología. Dado que aún una enumeración de los importantes resultados superan los límites de este artículo nosotros nos restringiremos a unas pocas ilustraciones del criterio general del párrafo anterior.

Un ejemplo de las numerosas afirmaciones que se extienden a todos los conjuntos, una proposición conocida válida para los objetos simples del lenguaje ordinario es el teorema [5] que un conjunto S de dimensión n contiene infinitos puntos en los cuales S es de dimensión n y que estos puntos forman un conjunto S' el cual es por lo menos de dimensión $n - 1$. Bajo ciertas condiciones podemos decir que S' es n -dimensional. Sin embargo hay pocas excepciones inesperadas en las cuales S' es solamente $(n - 1)$ -dimensional. Uno de los hechos que justifica nuestra definición de dimensionalidad-0 es el hermoso y simple teorema general de que cada conjunto de dimensión n es la unión de $n + 1$ pero no menos que $n + 1$ conjuntos de dimensión 0. Si nosotros hemos asignado a los conjuntos $S_0, S_0 \cup S_1, S_0 \cup S_1 \cup S_2$ otras dimensiones tendrá que ser el resultado de una teoría simple sistemática.

4. CINCO PROPIEDADES DE LA DIMENSIÓN

Para concluir seleccionamos cinco de los teoremas de la teoría de la dimensión, los cuales como veremos son de una importancia particular:

I. El n -espacio euclidiano es de dimensión n . (*Este teorema es debido a Brouwer*).

Los casos $n = 1, 2, 3$ de este teorema muestran en particular, que la definición

de 1–dimensionalidad excluye superficies cuadradas y cubos sólidos los cuales siempre en el lenguaje ordinario se excluyen y por lo cual las definiciones antiguas fracasaron o fallaron.

II La imagen topológica de un conjunto de dimensión n es de dimensión n .

Junto con el teorema I este simple teorema muestra que los conceptos de dimensión 1 y dimensión 2 incluye los conjuntos arcos y discos que son siempre llamados de dimensión 1 y dimensión 2 respectivamente.

III. Cada parte de un conjunto de dimensión n es a lo más de dimensión n

Natural y simple como este teorema es que no es válido para algunas otras definiciones de dimensión [9].

IV. Un conjunto S no puede ser dividido en la unión enumerable de cerrados cada uno de los cuales es de dimensión menor que S . (*Así llamado **Teorema de la unión** el cual ocupa un papel central en la Teoría de la Dimensión también como los teoremas II y III son debido a Urysohn y el autor).*

V. Cada conjunto de dimensión- n puede ser topológicamente transformado en un subconjunto de un conjunto compacto [10] de dimensión n . (*Este teorema es debido a Hurewicz).*

5. MÁS ASPECTOS DEL PROBLEMA

¿ Qué es dimensión?. ¿Hemos respondido esta pregunta?. En un sentido lo hemos hecho. Hemos explicado que son conjuntos de dimensión 1, de dimensión 2, etc. En efecto, con cada subconjunto de nuestro espacio y con cada subconjunto de

un espacio más general hemos asociado un entero a la dimensión del conjunto. Esto también se expresa diciendo que la dimensión es una función de conjuntos. Sin embargo hay muchas otras funciones de conjuntos. Con cada conjunto de nuestro espacio podemos, por ejemplo, asociar el número de partes que consta, o su medida (en algún sentido). En relación con la pregunta “¿qué es dimensión?” puede ser interpretada en el siguiente sentido: “¿ Entre las funciones de conjuntos establecidas, por cuáles propiedades esta caracterizada la dimensión?” más allá de esta pregunta, ha sido respondida solamente para el plano [11]. Allí la dimensión es caracterizada por las propiedades descritas en los teoremas del I al V, es decir: en el plano, la dimensión es la única función de conjuntos con las siguientes propiedades:

- 1) Toma los valores 2,1,0,-1 para el cuadrado, la línea recta, el singulete y el conjunto vacío respectivamente;
- 2) Toma el mismo valor para cualquier par de conjuntos que pueden ser obtenidos cada uno del otro por una transformación topológica.
- 3) Nunca tiene un valor mayor para la parte que para el todo.
- 4) Ningún conjunto puede ser dividido en una cantidad enumerable de conjuntos cerrados donde la función toma menor valor.
- 5) Cada conjunto puede ser transformado topológicamente en un subconjunto de un conjunto compacto de igual valor funcional.

En el plano por lo tanto, esta es otra respuesta para la pregunta “Qué es dimensión?”.

Notas pie de página:

1. También algunos conjuntos totalmente desconectados y un segmento recto contienen igual cantidad de puntos, esto es, el conjunto de todos los puntos sobre una línea cuya distancia a un cierto punto es irracional, o el así

llamado discontinuo de Cantor.

2. Por ejemplo, el llamado sinusoides que consiste de los puntos (x,y) del plano para los cuales se tiene $0 < x \leq 1$ y $y = \text{sen}(1/x)$ o $x = 0$ y $-1 \leq y \leq 1$.

3. En conexión con esto podemos mencionar un resultado comparativamente reciente de la teoría de curvas. Si un conjunto S y cada subcontinuo de S puede ser recorrido por el movimiento continuo de un punto, entonces S es 1-dimensional en el sentido definido en este artículo. El recíproco de este teorema no es cierto.

4. Uno podría pensar que 1-dimensionales son los conjuntos que son la unión de una cantidad enumerable de arcos, esto es, tantos arcos como enteros. Pero esta definición sin embargo será también limitada pues las clases de entes que son uniones no enumerables de muchos arcos contiene el cuadrado y el cubo y así es más amplia.

5. Ver los autores del libro "Dimensionstheorie" 1928.

6 La historia de esta definición y el resultado de la teoría esta esbozada en la hermosa exposición de Hurewicz y Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1941.

7. Ver Hurewicz y Wallman, p. 19.

8. Se publicó en la impresión No.5 de *Reports of a Mathematical Colloquium*, publicación de la Universidad de Notre Dame.

9. Ver el apéndice de Hurewicz y Wallman, *Dimension Theory*.

10. Un conjunto C es cerrado si su complemento es una vecindad, y por lo tanto C contiene todos los puntos de acumulación de C , es decir, todos los puntos para los cuales cada vecindad tiene infinitos puntos en común con C . Un conjunto

C es llamado compacto si para cada subconjunto infinito de C existe un punto de acumulación en C. Se notará que el teorema IV no es válido si omitimos la palabra cerrado: nuestro espacio 3-dimensional puede ser dividido entre un número finito de conjuntos de dimensión menor que no son cerrados, esto es, entre los cuatro conjuntos 0-dimensionales S_0, S_1, S_2, S_3 . El teorema IV no será válido si admitimos dividir en más que una cantidad enumerable de muchos conjuntos cerrados. Nuestro espacio 3-dimensional es la unión infinita de muchos (pero no enumerable) conjuntos cerrados 0-dimensionales, es esto, de conjuntos cada uno consiste de exactamente un punto.

11. Monatshefte f. Mathematik u. Physik, 36, 1929, p. 193.

5.7. Algunos comentarios

► El artículo [7] presenta un error tal vez de escritura en la página 5 (del artículo sin traducir), en la ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (u - u_0)^2 = r^2$, que no cumple con lo que el artículo expone, donde menciona que es una desigualdad cuando lo que muestra es una igualdad, al hacer la corrección (que se hace en la traducción) teniendo en cuenta la noción de vecindad sería: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (u - u_0)^2 < r^2$ para poder decir que el conjunto de puntos (x, y, z, u) que cumplen con la desigualdad anterior es una vecindad del punto (x_0, y_0, z_0, u_0) .

► En las vecindades para el conjunto S_2 (el conjunto del plano cuyas coordenadas son dos racionales y una irracional) sugeridas por el autor del artículo [7] página 4 (del artículo sin traducir) hay una inconsistencia, en los planos con ecuación correspondiente $ax + by + cz = 1$, para que las vecindades formadas por tales planos intersecten a S_2 y para que la frontera de tal intersección sea vacía, es necesario restringir el dominio de a, b, c que son constantes racionales, al conjunto

$\mathbb{Q} - \{0\}$, esto se especifica en el capítulo 4 más exactamente en el ejemplo 4.3.

► **Theoni Pappas** [12] hace el siguiente razonamiento: “*Un segmento se obtiene a partir de un punto trasladándolo una determinada distancia, de manera que el punto original y el trasladado sean los extremos del segmento. Trasladando el segmento esa misma distancia en dirección perpendicular, se obtiene un cuadrado. Trasladando el cuadrado en dirección perpendicular al plano, es decir, hacia lo alto o tercera dimensión, se obtiene un cubo. En forma analoga, para obtener un hipercubo a partir del cubo, se lo traslada en una dirección perpendicular al espacio tridimensional. Esta dirección es, desde el punto de vista matemático, una nueva dimensión distinta de las anteriores: la cuarta. El procedimiento puede seguirse para obtener hipercubos de cinco y más dimensiones*”[12]. Este razonamiento muestra una forma de como poder interpretar la cuarta dimensión por medio de analogías, algo que despierta aún más el interés por conocer más sobre estos mundos matemáticos.

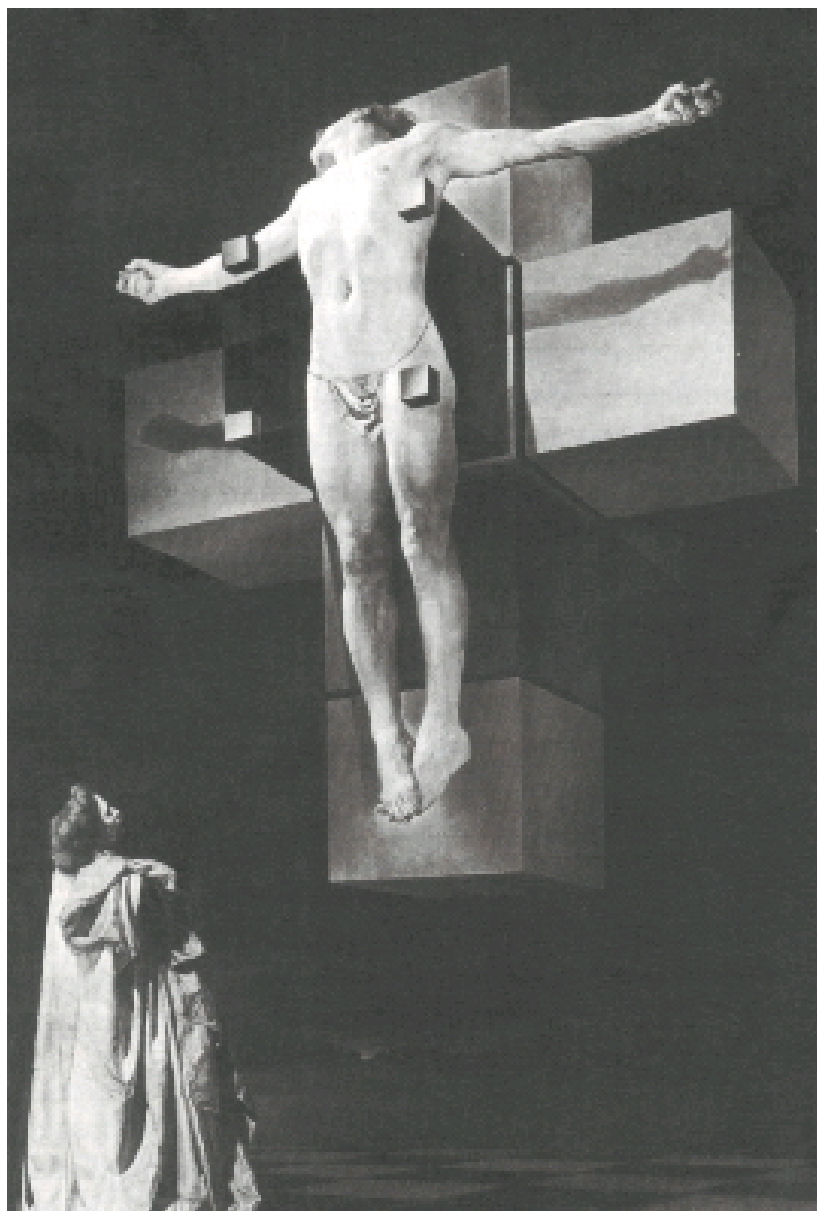
► Cabe resaltar que la matemática ha inspirado a artistas como **Salvador Dalí** en cuanto al concepto de dimensión que se trata a diario, usando un modelo del hipercubo para plasmarlo en la pintura **La Crucifixión**, ver figura 18.

► Queda abierta la discusión sobre el concepto de dimensión no entera; es decir, la dimensión fraccionaria que poseen algunos objetos como los fractales; al hacer un estudio formal sobre el tema se crea la posibilidad de realizar un trabajo de grado al respecto.

► Finalmente hay mucho más por estudiar sobre el concepto de dimensión, como ya mencioné es una teoría muy extensa, pero esperamos que por lo menos se haya despertado el interés por conocer algo más sobre esto, sabiendo por lo que se pudo

consultar, que es algo complejo.

Figura 18. La crucifixión



Tomada de [12], pag. 72.

Bibliografía

- [1] BELL E. T. Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económico. México. 1985.
- [2] ENGELKING R. y SIEKLUCKI K. Outline of General Topology. North-Holland Publishing Company-Amsterdam. Polonia. 1968.
- [3] EUCLIDES. Elementos. Editorial Gredos, S. A. Madrid. 1996.
- [4] HERNÁNDEZ Edgar Estevez. El espacio de los códigos. Monografía Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. 1994.
- [5] HUREWICZ Witold y WALLMAN Henry. Dimension Theory. Princeton University Press. United States of American. 1948.
- [6] IRIBAREN T. Ignacio L. Topología de espacios métricos. Editorial Limusa-Wiley, S.A. México. 1973.
- [7] KARL Menger. ¿What is dimension?. American Mathematical Monthly, volumen 50. January, 1943.
- [8] MOND David. Sobre la teoría de la dimensión. Revista Boletín de Matemáticas Vol. XII Nos. 1,2,3. Bogotá, Colombia. 1978.
- [9] MUNKRES James Raimond. Topology: a first course. Prentice Hall, INC. United States of American. 1975.

- [10] MURDESHWAR Mangesh G. General Topology. John Wiley & Sons. India. 1983.
- [11] NADLER Sam B. Jr. Dimension theory: an introduccion with exercises. Sociedad Matemática Mexicana. México. 2002.
- [12] PAPPAS Theoni. La Magia de la Matemática. Juegos & co. Zugarto Ediciones. España. 1996.
- [13] RUBIANO O. Gustavo N. Topología General. Segunda Edición. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D.C, Colombia. 2002.
- [14] RUCKER Rudy. La cuarta Dimensión. Salvat Editores, S. A. España. 1987.
- [15] STANLEY I. Grossman. Algebra Lineal. Quinta Edición. McGraw-Hill. México. 1996.
- [16] STEEN Lynn Arthur. La enseñanza agradable de las matemáticas. Editorial Limusa, S.A. México. 1998.
- [17] WILLARD Stephen. General Topology. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. United States of American. 1968.

ANEXO

WHAT IS DIMENSION?

KARL MENGER, University of Notre Dame

1. **Solids, surfaces, and lines.** Strictly speaking, all material objects are 3-dimensional. Yet, only such objects as a metal sphere, a wooden block, or a rock are considered to be typical representatives of 3-dimensional entities (solids). A piece of sheet-iron, paper, and a membrane approach what we mean when we speak of 2-dimensional objects (surfaces). Wire, threads, and streaks of chalk represent our idea of 1-dimensional entities (lines).

What is the difference between objects of different dimensions? Originally, mathematicians believed it to be a difference in quantity, in the sense that a surface contains more points than a line and less points than a solid. Now primarily the words "more," "less," and "equally many" are restricted to finite sets while surfaces, as well as lines and solids, contain infinitely many points. But Georg Cantor extended their use to all sets. We say that two sets—finite or infinite—contain equally many elements if we can establish a one-to-one correspondence between their elements. Cantor found that two infinite totalities do not necessarily contain equally many elements. For instance, among geometrical objects a straight line segment contains more points than some dispersed infinite sets, *e.g.*, the set of all points on a straight line whose distances from a certain point are integers. However, a straight line segment, a square, and a cube do contain equally many points [1]. Since these objects are of different dimensions, it follows that dimension is not a quantitative property.

Later, geometers thought that the difference between a 1-dimensional and a higher-dimensional object lay in the fact that the former, but not the latter, can be traversed by a continuously moving point. Indeed, lines on a paper or a blackboard are drawn, *i.e.*, traversed by the point of a pencil or chalk. However, Peano found that a continuously moving point can traverse a square surface or a solid cube though nobody would call these objects 1-dimensional. On the other hand, 1-dimensional objects were found which cannot be traversed by a continuously moving point [2]. The fact that an object is the path of a point is interesting in itself, but has no bearing on the question of the dimension of the object [3].

When one-to-one, as well as continuous, mappings had proved to be inadequate bases for the definition of dimension, mathematicians attempted to characterize dimension of a totality T as the least number of real numbers required to describe topologically (in a one-to-one and bi-continuous way) the elements of T . Each point of our ordinary space can be topologically characterized by three, but not less than three, real numbers, *e.g.*, its Cartesian or spherical coordinates; each point of a simple surface by two, but not less than two, real numbers, *e.g.*, the points of a sphere by longitude and latitude; each point of a simple line by one number. Thus, by the last definition, our space is 3-dimensional, simple surfaces are 2-dimensional, simple lines are 1-dimensional. Similarly, each color sensation of a normal eye can be topologically characterized by

three, but not less than three, real numbers, *viz.*, the quantities of three standard colors whose mixture produces an identical sensation. Hence, the totality of color sensations of a normal eye is 3-dimensional while the corresponding totalities for a partially or totally color blind eye are but 2- and 1-dimensional, respectively. In the same way, a totality of all mixtures of four ingredients which cannot be obtained by mixing less than four of them is called four-dimensional. In fact, in this direction lies our only elementary analytical approach to the fourth dimension and higher-dimensional spaces.

Unfortunately, however, the last definition applies only to very simple spatial entities, *viz.*, to those which can be obtained by means of a very simple transformation from a straight segment, a square, or a cube. Such entities are called arcs, discs, and topological spheres. In our space and in the plane, arcs and discs form only a small part of the lines and surfaces studied by modern geometry. Even if we admit objects which are sums of a finite number of arcs and discs our domain is still very restricted. For instance, the line mentioned above, which cannot be traversed by a continuously moving point [2], does not belong to this domain since it is not a sum of a finite number of arcs. In fact, it is the sum of infinitely many arcs, but all sets which are sums of infinitely many arcs cannot possibly be called 1-dimensional since the square and the cube are sums of infinitely many straight segments. [4].

To formulate the intuitive difference between lines, surfaces, and solids one can devise a simple experiment whose outcome depends upon the dimension of the object to which it is applied [5]. We cut out from the object a piece surrounding a given point. If the object is a solid we need a saw to accomplish this, and the cutting is along surfaces. If the object is a surface a pair of scissors suffices, and the cuts are along curves. If we deal with a curve we may use a pair of pliers and have to pinch the object in dispersed points. Finally, in a dispersed object no tool is required to perform our experiment, since nothing needs to be dissected. This characterization of dimension leads from n -dimensional to $(n-1)$ -dimensional objects. It ends with dispersed sets, naturally called 0-dimensional, and, beyond these, with "nothing," in set theory called the "vacuous set." It is, therefore, convenient to consider the latter as -1 -dimensional.

2. The definition of dimension. To make this idea precise we need only two simple auxiliary concepts: neighborhood and boundary. In our space we call a set N a *neighborhood* if each point of N is center of a sphere (though perhaps a very small sphere) all of whose points belong to N . The interior of a cube is a neighborhood, whereas a cube with its faces is not. For even the smallest sphere about a point of a face contains points not belonging to the cube. Nor is a plane a neighborhood in our space. For each sphere about each point of a plane contains points not belonging to the plane. The *boundary* of a neighborhood N is the set of all points which do not belong to N but are centers of arbitrarily small spheres which contain some points of N . For the interior of the cube the boundary obviously consists just of the six faces.

In terms of these concepts the result of our recursive dimension experiment can be explained as follows: A set S of points of our space is *at most n -dimensional* if each point of S lies in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries have at most $(n-1)$ -dimensional intersections with S . The set S is *n -dimensional* if it is at most n -dimensional but not at most $(n-1)$ -dimensional. That S is not at most $(n-1)$ -dimensional means that S contains at least one point at which S is at least n -dimensional, that is to say, a point which does not lie in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries have at most $(n-2)$ -dimensional intersections with S ; the boundaries of all sufficiently small neighborhoods of such a point have at least $(n-1)$ -dimensional intersections with S . The vacuous set, called -1 -dimensional, is the starting point of the recursive definition [6].

By this definition, a set S is 0-dimensional if it is not vacuous, and each point of S lies in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries have -1 -dimensional, *i.e.*, vacuous, intersections with S —in other words, no points in common with S . A set S is 1-dimensional if it is not 0-dimensional and each point lies in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries have at most 0-dimensional intersections with S . But it should be clearly understood that a point of a 1-dimensional set S may also be contained in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries have more than 0-dimensional intersections with S . For instance, each point of a straight line S is contained in arbitrarily small neighborhoods whose boundaries contain whole pieces of S . Such neighborhoods can be formed by adding two cubes of different size, one of which has a face passing through S .

Furthermore, it should be clear that we cannot always expect to find *simple* neighborhoods of a point of an n -dimensional set whose boundaries have at most $(n-1)$ -dimensional intersections with S . One of the most interesting examples in this respect arises from the study of the following four sets whose sum incidentally exhausts our space:

- the set S_0 of all points which have three irrational coordinates,
- the set S_1 of all points which have one rational and two irrational coordinates,
- the set S_2 of all points which have two rational and one irrational coordinate,
- the set S_3 of all points which have three rational coordinates.

If a, b, c are any three rational constants, then the planes $x=a, y=b, z=c$ do not contain any points of S_0 , and the planes $ax+by+cz=1$ do not contain any points of S_3 . If α, β, γ are any three irrational constants, then the planes $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ do not contain any points of S_3 . Now, for $i=0, 2, 3$, each point of S_i is contained in arbitrarily small *cubes* whose faces are part of such planes which have no point in common with S_i . Hence, S_0, S_2, S_3 are 0-dimensional. So is S_1 but the proof of this fact is much more difficult [7]. For not only each plane meets S_1 , but as Schreier noticed, each surface of the form $z=f(x, y)$ where f is a continuous function, has points in common with S_1 and the same is true for each surface $y=f(x, z)$ and $x=f(y, z)$. In fact, only recently S. G. Reed, Jr. and the author constructed [8] a neighborhood whose necessarily complicated boundary has no point in common with S_1 .

Since dimension of the subsets of our space has been defined in terms of neighborhoods the definition is applicable to the subsets of all spaces in which neighborhoods are given. An example of such a space is the 4-dimensional euclidean space whose points are the quadruples of real numbers x, y, z, u and in which the sphere with radius r and center x_0, y_0, z_0, u_0 consists of the points x, y, z, u satisfying the inequality $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(u-u_0)^2=r^2$. A set N is a neighborhood if each point of N is center of a sphere all of whose points belong to N .

3. **Criteria for a satisfactory definition.** Now let us examine the definition of dimension. Its objective is to make precise and to extend the ordinary usage of the words "1-dimensional," "2-dimensional," and "3-dimensional." *A good definition of a word must include all entities which are always denoted and must exclude all entities which are never denoted by the word.* For the word "1-dimensional" straight lines, ellipses, and lemniscates are objects of the former type; square surfaces, solid cubes, and finite sets of the latter type. *A good definition should extend the use of the word by dealing with objects not known or not dealt with in ordinary language. With regard to such entities, a definition cannot help being arbitrary.* In connection with the word "1-dimensional" consider the four sets S_i whose sum exhausts our space. A general definition of "1-dimensional" will imply for each of the sets $S_0, S_0+S_1, S_0+S_1+S_2$ whether or not it is 1-dimensional. Our definition implicitly assigns to these sets the dimensions 0, 1, and 2, respectively, which like each assignment is somewhat arbitrary since ordinary language does not assign to them any dimension. *A good definition must yield many consequences, in particular theorems which are aesthetically satisfactory by their generality and simplicity, and theorems connecting the defined concept with concepts of other theories.* It is these theorems which justify the unavoidable arbitrary element of the definition. Some of the theorems will extend statements which are true in the restricted domain of ordinary language to the extended domain of the definition. Other theorems will exhibit interesting exceptions or even correct erroneous habits of thinking.

The definition outlined in this paper has yielded an extensive dimension theory which, since its foundation in the early twenties, has developed into one of the central branches of topology. Since even an enumeration of the main results would surpass the limits of this paper we shall confine ourselves to a few illustrations of the general criteria of the previous paragraph. An example of the numerous statements extending to all sets a proposition known to hold for the simple objects of ordinary language, is the theorem [5] that an n -dimensional set S contains infinitely many points at which S is n -dimensional, and that these points form a set S' which is at least $(n-1)$ -dimensional. Under certain conditions we can say that S' is n -dimensional. However, there are rather unexpected exceptions in which S' is only $(n-1)$ -dimensional. One of the facts which justify our definition of 0-dimensionality is the simple and beautiful general theorem that each n -dimensional set is the sum of $n+1$ but not less than $n+1$ 0-dimen-

sional sets. If we had assigned to the sets S_0 , S_0+S_1 , $S_0+S_1+S_2$ other dimensions than we did, it would have been at the expense of a simple systematic theory.

4. Five properties of dimension. In concluding, I shall select five of the theorems of dimension theory which, as we shall see, are of a particular importance:

I. *The euclidean n -space is n -dimensional.* (This theorem is due to Brouwer.) The cases $n=1, 2, 3$ of this theorem show, in particular, that the definition of 1-dimensionality excludes square surfaces and solid cubes which ordinary language always excludes and which older definitions failed to exclude.

II. *The topological image of an n -dimensional set is n -dimensional.* In conjunction with theorem I this simple theorem shows that the concepts of 1-dimensional and 2-dimensional sets include arcs and discs which are always called 1-dimensional and 2-dimensional, respectively.

III. *Each part of an n -dimensional set is at most n -dimensional.* Natural and simple as this theorem is it does not hold for some other definitions of dimension [9].

IV. *A set S cannot be split into denumerably many [4] closed [10] summands each of which is of smaller dimension than S .* (This so-called sum-theorem which occupies a central role in dimension theory, as well as the simple theorems II and III are due to Urysohn and the author.)

V. *Each n -dimensional set can be topologically transformed into a subset of a compact [10] n -dimensional set.* (This theorem is due to Hurewicz.)

5. Further aspects of the problem. What is dimension? Have we answered this question? In one sense, we have. We have explained which sets are 1-dimensional, which are 2-dimensional, etc. In fact, with each subset of our space and with each subset of much more general spaces we have associated an integer, the dimension of the set. This is also expressed by saying that dimension is a set function. However, there are many other set functions. With each set in our space we may, for example, associate the number of pieces of which it consists, or its measure (in some sense). In this connection the question "What is dimension?" may be interpreted in the following sense: "Among the many set functions, by which properties is dimension characterized?"

So far this question has only been answered for the plane [11]. There dimension is characterized by the properties described in theorems I to V, that is to say: In the plane, dimension is the only set function with the following properties:

- 1) It assumes the values 2, 1, 0, -1 for the square, the straight line segment, the single point, and the vacuous set, respectively;
- 2) It assumes the same value for any two sets which can be obtained from each other by a topological transformation;
- 3) It never has a greater value for the part than for the whole;
- 4) No set can be split into denumerably many closed sets of smaller function value;

5) Each set can be topologically transformed into a part of a compact set of equal function value.

In the plane, therefore, this is another answer to the question, "What is dimension?"

Footnotes

1. Also some dispersed sets and a straight line segment contain equally many points, e.g., the set of all points on a line whose distance from a certain point is irrational, or Cantor's so-called *discontinuum*.

2. E.g., the so-called *sinusoid* consisting of the points (x, y) of the plane for which either $0 < x \leq 1$ and $y = \sin 1/x$ or $x = 0$ and $-1 \leq y \leq 1$.

3. In this connection we may mention a comparatively recent result of the theory of curves. If a set S as well as each subcontinuum of S can be traversed by a continuously moving point, then S is 1-dimensional in the sense defined in this paper. The converse of this theorem is not true.

4. One might think that 1-dimensional are the sets which are the sum of *denumerably many* arcs, i.e., of as many arcs as there are integers. But this definition would still be too narrow while the class of entities which are sums of *non*-denumerably many arcs contains the square and the cube and thus is too wide.

5. See the author's book "Dimensionstheorie" 1928.

6. The history of this definition and the ensuing theory is outlined in the beautiful exposition of Hurewicz and Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1941.

7. See Hurewicz and Wallman, p. 19.

8. To be published in Issue 5 of the Reports of a Mathematical Colloquium, University of Notre Dame publication.

9. See the Appendix to Hurewicz and Wallman, *Dimension Theory*.

10. A set C is *closed* if its complement is a neighborhood, and hence C contains all cluster points of C , i.e., all points of which each neighborhood has infinitely many points in common with C . A set C is called *compact* if for each infinite subset of C there exists a cluster point in C . It should be noted that theorem IV, would not hold if we omitted the word *closed*: Our 3-dimensional space can be split into a finite number of sets of smaller dimensions which are not closed, e.g., into the four 0-dimensional sets S_0, S_1, S_2, S_3 . Nor would theorem IV hold if we admitted splitting in more than denumerably many closed sets. Our 3-dimensional space is sum of infinitely many (but not denumerably many) closed 0-dimensional sets e.g., of sets each of which consists of exactly one point.

11. Monatshefte f. Mathematik u. Physik, 36, 1929, p. 193.

DIVISORS OF ZERO IN POLYNOMIAL RINGS

ALEXANDRA FORSYTHE, Vassar College

This is an alternative proof to Theorem 2 of an article by N. H. McCoy* on divisors of zero. The definitions are those of Professor McCoy unless otherwise stated.

We postulate a commutative ring R and let $R[x]$ be the commutative extension ring obtained through the adjunction of an indeterminate x to the ring R . We shall say that an element $f(x)$ is a *divisor of zero* in $R[x]$ if there exists a non-zero element $g(x)$ of $R[x]$ such that the product $g(x)f(x) = 0$.

* McCoy, N. H., Remarks on divisors of zero, this MONTHLY, vol. 49, May 1942, pp. 286-295.