SIMULACIÓN(3D) DE LA DINÁMICA GLOBAL Y LINEAL DEL PLASMA EN UN TOKAMAK ESFÉRICO

Jorge Andrés Quintero Graut

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Eduardo Alberto Orozco Ospino

Doctorado en Ciencias Naturales

Codirector

Jesús Eduardo López Durán

MSc. Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A mi hermana y a mis padres. No hay que olvidar de donde venimos. Somos el reflejo de quienes estuvieron con nosotros tanto en los momentos de alegría como de tristeza.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Jorge Elías Quintero Ortiz y Malviluz Graut López por el apoyo total e incondicional y por ser ejemplo de trabajo duro y sacrificio. También a mi hermana Angie Cristina Quintero, quien ha sido mi mano derecha, y cuyo apoyo emocional fue crucial para la culminación del trabajo de grado.

Agradezco especialmente a mi abuela Carmen Cecilia Ortiz quien soñó con verme recibir el título de Físico. También, a mi tío Juan Carlos Quintero, quien me mostró que la vida no gira en torno a la academia y que es necesario aplicar los conocimientos en beneficio de la sociedad. Además, que la perseverancia y la dedicación son las herramientas para alcanzar el éxito. A a mi abuelo Antonio Graut, cuya experiencia de vida me ha mostrado que no todo puede ser perfecto, que somos hijos de una época donde el trabajo duro es lo único nos permite salir adelante. A a mi familia, en especial a mis tíos y mis tías, quienes siempre han estado pendientes de mi desempeño académico. A mis amigos: Jean Carlos, Emmanuel, Luis Antonio, Mayerlys, Sara, Miguel, les doy infinitas gracias, y a mis compañeros de trabajo durante la carrera: Nicolás, Stephany, Jhon, Wilson, Angie, Tefa, Kevin, quienes son testigos de los sacrificios y las horas invertidas para poder alcanzar este logro. A mi director Eduardo Orozco y codirector Jesús Eduardo López por la asesoría, acompañamiento y ayuda brindada durante el desarrollo del trabajo. A mi entrenador de artes marciales, Ivan, con quien aprendí a encarar el miedo y llamarlo emoción.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: SIMULACIÓN(3D) DE LA DINÁMICA GLOBAL Y LINEAL DEL PLASMA EN UN TOKAMAK ESFÉRICO *

Autor: Jorge Andrés Quintero Graut , Jesús E. Lopez, Eduardo Orozco Ospino **

Palabras Clave: Plasma, Tokamak, Dynamics , MHD.

Descripció: Uno de los problemas más importantes en la física desde el siglo XX ha sido la generación eficiente de energía nuclear por medio del confinamiento magnéico del plasma. Este problema se centra en confinarlo durante el tiempo necesario de tal manera que la energía suministrada sea menor que la energía obtenida en determinados procesos. Para resolverlo, se ha estudiado el plasma desde el ámbito experimental, teórico y computacional. Desde los dos últimos enfoques, se puede modelar como un fluido para el estudio de su dinámica. De acuerdo con lo anterior, se presentará un estudio de la dinámica del plasma por medio del modelo MHD ideal en el régimen lineal partiendo de una configuración de equilibrio típica de sistemas de confinamiento toroidal tipo Tokamak. A partir del estado de equilibrio, el sistema es sometido a una perturbación, logrando visualizar la evolución de variables físicas como la presión cinética y magnética del plasma. Se concluye que la evolución responde a la linealidad de la ecuaciones y se logra simular la dinámica para los primeros 60 periodos de Alfven.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Eduardo Orozco Ospino, Ph.D. Codirector: Jesús E. Lopez, M.Sc

Abstract

Título: SIMULATION(3D) OF GLOBAL AND LINEAR PLASMA DYNAMICS IN A SPHERICAL TOKAMAK *

Autor: Jorge Andrés Quintero Graut, Jesús E. Lopez, Eduardo Orozco Ospino **

Palabras Clave: Plasma, Tokamak, Dynamics , MHD.

Descripción: One of the important physics problems from the tweny century has been the efficient generation of energy using nuclear fusion, via magnetic confinement of plasma. This problem consist in confine plasma so that the suministrate energy is less that the gain energy, which will convert in electricity. This problem has been studied in the experimental, theoretical and computational aproach. From this last two aproach, we can modelate the plasma as a fluid for his subsequent analysis of the dynnamics. According with this, we present a study of the plasma dynamics using ideal magnetohydronynamics(Ideal MHD) in the linear regime starting from a tipic equilibrium configuration of a ITER device. From the equilibrium state, the sistem is perturbated, then, physical variables as the magnetic and kinetic pressure can be visualized. It concludes that the evolution of plasma responses to the linearity of the equations and it achieve the simulation of the dynamics for the first sixty Alfven periods.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Eduardo Orozco Ospino, Ph.D. Codirector: Jesús E. Lopez, M.Sc

1. Introducción

El incremento actual de la demanda energética se ha satisfecho a lo largo de los años por medio de la extracción y procesamiento de combustibles fósiles, la construcción de centrales hidroeléctricas, de centrales térmicas de carbón y de plantas termonucleares de fisión. Sin embargo, a nivel mundial los daños ambientales producidos son altos. Por ello, la búsqueda de alternativas para la generación de energía se ha convertido en una necesidad. Una de estas alternativas es la fusión nuclear.

La fusión nuclear es el fenómeno físico que explica la formación y composición de núcleos atómicos. Consiste en la unión de los núcleos cuando se encuentran a distancias menores a 2Fm[9], distancia en la que la interacción nuclear es mayor que la interacción eléctrica. La investigaciones en este campo empezaron en secreto desde los años 30 para fines militares en el desarrollo de la bomba de hidrógeno. Después salieron a la luz en la Segunda Conferencia de las Naciones Unidas sobre la Utilización de la Energía Atómica con Fines Pacíficos celebrada en Ginebra en 1958, en donde países europeos, asiáticos y americanos empezaron a compartir sus avances en este campo, con el objetivo de propiciar una colaboración internacional con fines no militares [3], así, con la fusión nuclear, se encontró la posibilidad de producir electricidad sin necesidad de usar combustibles fósiles u otros métodos con alta emisión de dióxido de carbono [11, 20].

La generación de energía por este método consiste, básicamente, en que los núcleos deben tener la suficiente energía para contrarrestar las fuerzas de repulsión coulombiana, lograr la fusión, y aprovechar la energía remanente para generar electricidad. En la actualidad hay dos formas de crear fusión controlada. Entre ellas está la fusión por confinamiento inercial y la fusión por confinamiento magnético de plasma de alta temperatura, en la que se centrará este trabajo.

Se puede concebir el plasma como un gas de determinado material, excitado bien sea por calor o por un voltaje externo, donde los átomos se ionizan para luego producir densidades de carga positiva y negativa las cuales interactúan electromagnéticamente, y como consecuencia, el sistema presenta comportamientos colectivos[1]. La idea principal del uso de plasma para fusionar núcleos es que luego de generarlo, se transfiere energía otros medios, bien sea por la inyección de neutrones o por envío de señales de radiofrecuencia, para generar y mantener la ignición.

El primero en hablar de plasma fue Sir William Crookes en 1879, usándo el término "materia radiante"para referirse a los gases que radiaban en sus experimentos con rayos catódicos[6] o "tubos de Crookes", un tubo de descarga donde el aire se ionizaba por medio una de bobina inductora de voltaje. Fue Langmuir en 1927 el primero en usar el término "plasma", en la época cuando investigaba las descargas de mercurio, para estudiar la densidad y las distribución de velocidades de los iones[16]. En los años treinta, ya se conocían las propiedades básicas del plasma y fue en 1938 que Hans Bethe, el primero en hablar de fusión nuclear, quien propuso que tanto la formación de

---

1 Entendiéndose por colectivo como el hecho de que el movimiento de las partículas está limitado e influenciado por el estado en que se encuentren las demás.

plasma como las reacciones de fusión son procesos que llevan a cabo en el sol[4].

En una reacción típica de núcleos de Deuterio-Tritio(D-T) se deben calentar los reactivos a una temperatura de $\approx 4 \times 10^7$ Kelvin [33], los cuales, al entrar en contacto con las paredes del dispositivo que los contiene pueden producir daños en este, inhibiéndose el confinamiento de las partículas. En la reacción también se forman impurezas que pueden enfriar o diluir el combustible. Para evitar estos problemas se confina el plasma por medio de campos magnéticos [28]. Con base en este principio se han construido dispositivos de confinamiento, conocidos como trampas magnéticas, de los cuales se encuentran los llamados Tokamak, Stellerator, entre otros [10]. Uno de los más estudiados es el Tokamak [20], que se caracteriza por su topología de dona y el arreglo de las bobinas con simetría axial.

Las investigaciones en la estabilidad del plasma son motivadas por las ventajas que tienen las plantas de fusión, como la poca emisión de CO_2 y la poca producción de residuos dañinos con el medio ambiente, además de las grandes reservas de combustible y la poca cantidad necesaria por reacción. Estas razones hacen que la fusión sea una buena alternativa para suplir la alta demanda de combustibles fósiles que se prevé en los próximos 100 años [29].

Actualmente, el proyecto ITER promete producir 500 MW de potencia durante 20 minutos[17]. Este sería el reactor de mayor tamaño jamás construido. Su ensamble inició en julio del 2021 y se proyecta que generará el primer plasma para el año 2025. Promete superar varios récords como el actual en tiempo de confinamiento, correspondiente al dispositivo Tokamak Tore Supra, con 1 giga joule en seis minutos y medio[14]; y el récord a la mayor potencia generada, hasta ahora logrado por el Tokamak JET(Join European Torus), produciendo en 1997 16MW de potencia [19].

El sistema físico que se estudia en este trabajo consiste en plasma confinado en dispositivos del tipo Tokamak, con la configuración de equilibrio característica del dispositivo MAST. Para su estudio, se asume que el tamaño del plasma es mucho mayor que las distancias entre las especies que lo componen y que es altamente colisional. Como consecuencia, se comporta como un fluido, que responde a campos tanto externos como a los campos producidos por él mismo. Matemáticamente se recurre al modelo magnetohidrodinámico(MHD) , donde se acoplan las ecuaciones de un fluido con las ecuaciones de Maxwell. Computacionalmente se resuelven estas ecuaciones con el fin de obtener los perfiles de campo magnético y presión, variaciones de la energía magnética y espectros modales. El ánimo de este trabajo se centra en la confección de un código que simule la dinámica 3D del sistema, como herramienta clave para la comprensión de la dinámica del plasma desde un análisis modal. Los códigos desarrollados en este trabajo permiten realizar una descripción de la dinámica del plasma usando la teoría MHD ideal por medio del método de Runge Kutta de cuarto orden para la solución de las ecuaciones.

2. Plasma

El plasma es el cuarto estado de la materia. Tiene múltiples aplicaciones en la industria para recubrimiento de materiales, está presente en los rayos de una tormenta, o forman a las famosas Auroras Boreales. A diferencia del estado sólido, el líquido o el gaseoso, la interacción entre partículas no se da por enlaces iónicos, covalentes o de van de waals, sino por interacción eléctrica. Esto gracias a que las partículas que lo componen están cargadas, generalmente iones y electrones libres. El proceso que se debe llevar a cabo para producir plasma es el siguiente: se logra ionizar un gas por medios externos, ya sean campos o calor, y luego, este se mantiene en condiciones adecuadas de presión, densidad y temperatura de tal manera que presente comportamientos colectivos.

Dentro del plasma se produce el efecto de apantallamiento consecuencia de la alta movilidad de los electrones. Estos no permiten que otros logren enlazarse con los iones para formar partículas neutras, evitando la desionización. En el cuerpo del plasma, la carga neta se mantendrá nula y la interacción es completamente eléctrica. En la interfaz plasma-medio circundante se presenta la difusión de partículas, que puede ser alta o baja dependiendo del grado de ionización del sistema.

Para poder considerar a un sistema en estado de plasma, es decir, que a parte de ser un gas ionizado presente comportamientos colectivos, la **longitud de Debye** debe ser pequeña comparada con el tamaño del sistema y dentro de la esfera de Debye debe haber un gran número de partículas[13]. La longitud de Deybe corresponde a la usualmente llamada "longitud de apantallamiento", definida como la distancia en la cual el electrón deja de percibir el campo producido por un ion. Si la longitud de debye es pequeña respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema, se garantiza la **cuasineutralidad** en cualquier punto dentro del plasma lo que implica que un electrón tenga más probabilidad de encontrarse en un medio circundante iónico. Si la temperatura del sistema de partículas de partículas es alta, se garantiza un mayor grado de ionización [32] . La longitud de Debye se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa_B T_e}{n_e e^2}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

donde ε_0 denota la permitividad en el vacío, κ_B la constante de Boltzmann, T_e la temperatura, e la carga del electrón, n_i y n_e la densidad de número para los iones y electrones, respectivamente. Para tener en cuenta la condición de cuasineutralidad, basta con considerar que $n_e \approx n_i$. Además debe cumplir con la condición:

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1, \tag{2}$$

que corresponde a la densidad de partículas necesaria para que se lleven a cabo los efectos de apantallamiento [5]. En dispositivos Tokamak la longitud de Debye es de aproximadamente $10^{-4} m$. Los comportamientos colectivos son consecuencia de que el movimiento de una partícula cargada es afectado por el estado en que se encuentren las demás, de tal manera que en un sistema de referencia puesto fuera del plasma, se pueda describir la dinámica del sistema como un todo sin necesidad de conocer el movimiento de cada partícula del plasma. Con el **modelo cinético** se pueden describir fenómenos característicos del plasma desde escalas cercanas al radio de Larmor hasta escalas macroscópicas como la longitud característica del sistema. A partir de este modelo se puede deducir el modelo magnetohidrodinámico(MHD), en donde el plasma ya es considerado un fluido y del que se hablará más adelante. El modelo cinético consiste en la relación entre el cambio temporal de la función de distribución y las colisiones entre partículas:

$$\frac{df_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f_\alpha + \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}_v f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c, \tag{3}$$

Donde f_α es la función de distribución de la especie α, que depende de la posición, la velocidad y del tiempo, es decir, $f_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{t})$. La ecuación 3 indica que la derivada total respecto a tiempo de la función de distribución es igual a la tasa de cambio de la misma producto de la colisión entre partículas de la especie α. Así, las colisiones son generadas por la fuerzas de corto alcance, mientras que las fuerzas de largo alcance están dadas por la fuerza de Lorentz[12]. La interacción entre los campos se da a través de las ecuaciones de Maxwell y las funciones como la presión y la temperatura se escriben en términos de f_α, al igual que el tensor de presión, el flujo de calor, el momentum transferido entre partículas[12], etc.

3. Fusión nuclear

La fusión nuclear consiste en la formación de núcleos atómicos a partir de la colisión de dos núcleos de menor número atómico. La masa se conserva durante el proceso, sin embargo, luego de la unión, parte de la masa se presenta en forma de energía. La fusión se lleva a cabo cuando los núcleos tienen la suficiente energía para romper la barrera de Coulomb y logran atraerse gracias a la interacción nuclear fuerte. La energía potencial en función de la distancia respecto a uno de ellos se puede ver en la figura 1, donde dicha barrera de potencial se encuentra a dos femntómetros y es producida por la alta repulsión eléctrica. Luego de superarla, los núcleos se encuentran en un pozo de potencial, gracias a la interacción nuclear fuerte, y allí el sistema de dos partículas puede encontrarse a una energía menor, lográndose la fusión[27].

Superar esta barrera requiere de una energía alrededor de los $0.28MeV$ [33]. Como consecuencia, el sistema de partículas se encuentra en estado de plasma. El plasma debe ser altamente colisional para aumentar la probabilidad de colisión lo que implica garantizar que la sección transversal de colisión entre iones sea alta. Llegar a tal energía es una condición necesaria y suficiente para lograr la colisión de núcleos. Aquí los reactivos juegan un papel importante, porque la sección transversal de fusión difiere entre ellos, en función de la temperatura en la que se encuentren[11, 27, 33] .

Para procesos termonucleares, la reacción que brinda la mayor sección transversal de fusión entre los 5 y 120 eV es la de deuterio y tritio, llamada generalmente D-T. Esto debido a la baja energía de enlace entre los nucleones de cada componente. En la figura 1 se muestra(imagen de la derecha) la sección transversal en función de la energía cinética del centro de masa, a una escala de energía logarítmica. Por esta razón, es la de mayor interés para la realización de procesos nucleares enfocados en la generación de energía[27] .

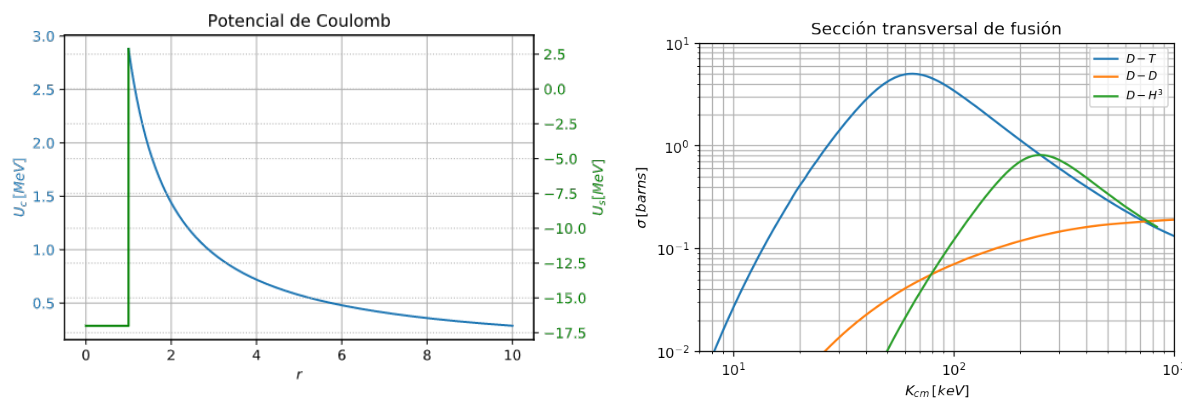

Figura 1. Barrera de couloumb entre nucleones(izquierda) y sección transversal de colisión para diferentes reactivos(derecha). Figura adaptada de [27]

La razón entre la potencia suministrada y la potencia brindada por el plasma durante la reacción es una medida clave en la realización de cualquier proceso de fusión. Se denomina **la ganancia de potencia Q**, que puede ser menor, igual o mayor a uno. Durante el proceso, el plasma se puede calentar por métodos auxiliares de calentamiento o por emisión de partículas alpha, sin embargo, pueden llevarse a cabo pérdidas de potencia debido a la radiación emitida por los iones y los electrones(radiación **Bremsstrahlung**), radiación debido a el contacto con impurezas, y radiación ciclotrónica(para el caso de confinamiento magnético)[20]. Con la ganancia de potencia se puede estimar el tiempo de confinamiento del plasma, definido como la razón entre la energía W_p requerida para aumentar la temperatura un grado y, la diferencia entre la potencia total por transferencia de calor P_{neta} y la potencia necesaria para aumentar la temperatura:

$$\tau_\epsilon = \frac{W_p}{P_{neta} - \frac{dW_p}{dt}}, \tag{4}$$

El tiempo de confinamiento está relacionado con la densidad de partículas del sistema, así en caso del D-T, con una proporción $50/50$ de cada reactivo, a una temperatura óptima de $15keV$, con base en las curvas mostradas en la figura 1, y con una ganancia de potencia igual a uno, se estima el **criterio de Lawson**:

$$n_\epsilon \tau_\epsilon = 10^{20} s \cdot m^{-3}, \tag{5}$$

El criterio de Lawson permite obtener el valor de temperatura cuando la densidad de potencia de la reacción excede la radiación Bremsstrahlung, por medio de su valor mínimo. Además, este mínimo indica la temperatura en la que se produce la mínima ganancia necesaria para que se produzca la ignición($Q = 1$)(ver figura 2).

4. Dispositivo Tokamak

La reacciones termonucleares controladas deben llevarse acabo en entornos de alto vacío en donde el plasma pueda mantenerse confinado. Debido a la alta temperatura del sistema, es necesario evitar el contacto de una gran cantidad de partículas altamente energéticas con las paredes.

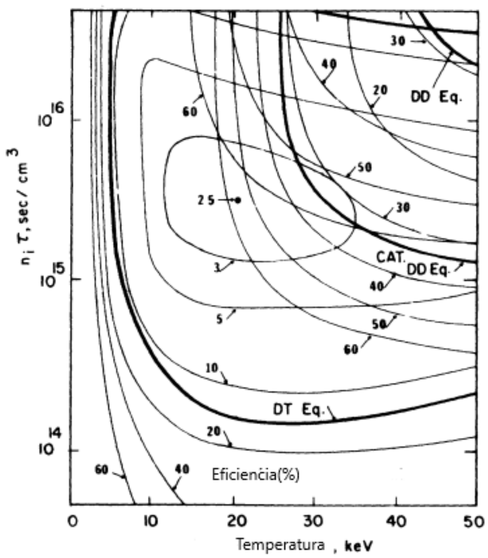

Figura 2. Criterio de Lawson en tres tipos de reacciones. Figura tomada de [26]

Esto con el fin de que la cámara en donde se crea el vacío y se confina el plasma mantenga sus condiciones y no cambie su estado. Como consecuencia de ello, se recurre a la disposición de una serie de bobinas, por medio de las cuales se produce el campo magnético necesario para dirigir y controlar al plasma.

Una disposición de bobinas como la mostrada en la figura 3 es característica del dispositivo **Tokamak**. Estas actúan como trampas magnéticas. La cámara de vacío se acomoda a la topología toroidal que debe tener las líneas de campo magnético. Esto también repercute en la topología de las isosuperficies de flujo poloidal magnético, presión y de densidad de corriente para el caso en que el plasma se encuentre en equilibrio.

En el dispositivo Tokamak, hay dos clases de bobinas: las poloidales y las toroidales. Las

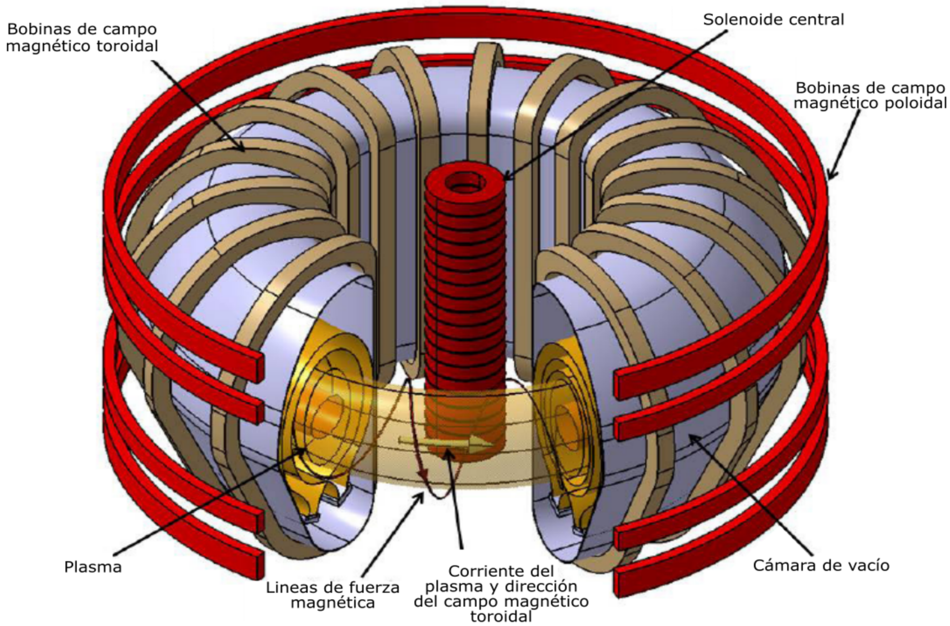

Figura 3. Geometría de un dispositivo Tokamak. Figura tomada de [20]

primeras se encargan de dar forma al plasma, y las segundas se encargan de confinarlo. El dispositivo cuenta además con varios elementos: el blanco o "blacket", que se encuentra dentro de la cámara de vacío y recibe la radiación producida en la reacción, mayormente por neutrones y partículas alpha; el divertor, que recibe las impurezas producidas durante la reacción de fusión, y el criostato, que se encarga de mantener todo el dispositivo a una temperatura adecuada. Otros elementos, como los inyectores de haces de partículas y las antenas de radio se encargan de suministrar energía al plasma. Un solenoide central se encarga de generar una descarga al interior de la cámara, a modo de un transformador[31]. La corriente inducida dentro de la cámara dará paso a la formación del plasma que será utilizado para la reacción termonuclear.

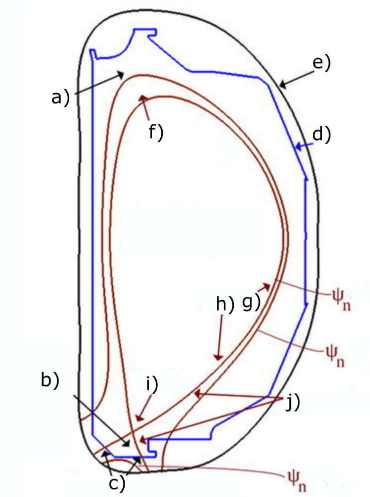

Figura 4. i)Ubicación del x-point, j) separatrix y e) cámara de vació, característicos de un dispositivo Tokamak. Figura tomada de [21].

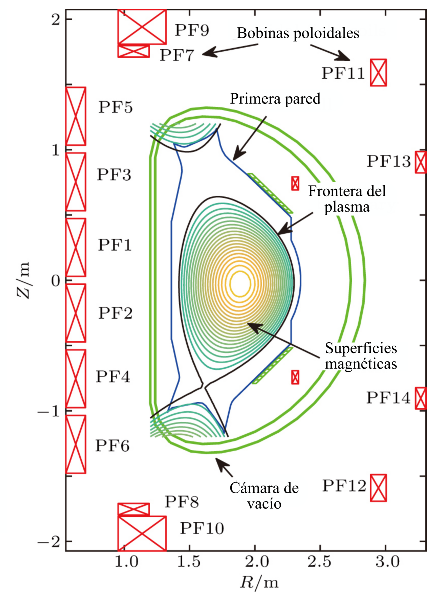

Figura 5. Sección transversal del EAST y forma del plasma. Figura tomada de [8].

Se puede caracterizar el plasma en un Tokamak en términos de sus dimensiones con una serie de parámetros geométricos. La sección trasversal del plasma no necesariamente es circular. Un bosquejo de la forma típica de una configuración de equilibrio del plasma se muestra en la figura 4, donde se ubican a) La región de líneas abiertas de flujo donde se producen aureolas, b) La región privada de flujo, c) Puntos de golpe del divertor, d) Primera pared limitante, f) Región abierta de flujo, g) y h) LCFS e i) la ubicación del x-point. El x-point define la separatix, lo cual es la última línea de campo magnético cerrada, y a su vez, define la frontera del plasma. En la figura 5 se muestra un esquema del perfil de flujo característico del plasma, específicamente, para el dispositivo EAST. Además, se muestra la ubicación de las bobinas toroidales, que varían dependiendo del dispositivo, pero en general mantienen la misma estructura.

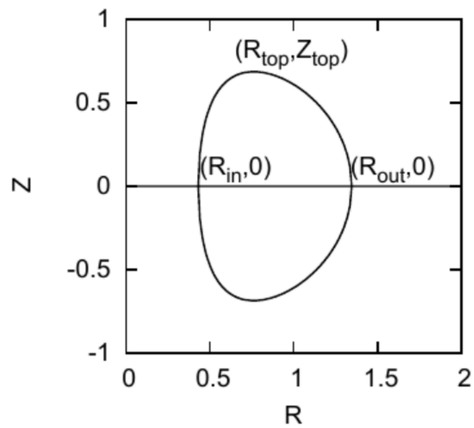

Figura 6. Parámetros para la caracterización espacial del plasma. La frontera del plasma generalmente presenta una forma de D. Figura tomada de [15]

La geometría del plasma(D-Shape) está caracterizada por 5 parámetros, que a su vez se definen de tres puntos ubicados en la separatríx, mostrados en la figura 6:

Radio mayor	Radio menor	Relación de aspecto	Triangularidad	Elipticidad
$R_0 = \frac{R_{int}+R_{out}}{2}$	$a = \frac{R_{out}-R_{int}}{2}$	$A = \frac{R_0}{a}$	$\delta = \frac{R_0-R_{top}}{a}$	$\kappa = \frac{Z_{top}}{a}$

Tabla 1
Factores que definen la geometría del d shape o la sección transversal de la columna de plasma en un tokamak

Otro parámetro característico es el **factor de seguridad**, que consiste en el cambio angular de una línea de campo magnético por cada vuelta que realiza en el toro. De manera más sencilla, consiste en la cantidad de vueltas que realiza una línea de campo magnético para cerrarse. Se expresa de la siguiente manera:

$$q = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{1}{R}\frac{B_\phi}{B_p} dl_p, \tag{6}$$

donde B_ϕ y B_p son las componentes toroidales y poloidales del campo, y dl_p el diferencial de línea a lo largo de la dirección del campo poloidal. La relación entre la presión magnética y la presión del fluido se caracteriza a través del parámetro β, y se expresa como:

$$\langle\beta\rangle = \frac{\langle p\rangle}{B^2/2\mu_0}, \tag{7}$$

donde $\langle X\rangle$ es el valor promedio de la función X en r sobre una sección trasversal de radio a y se expresa como $\langle X\rangle = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r X(r)dr$ [5].

5. Magnetohidrodinámica

En el modelo magnetohidrodinámico(MHD) se estudia el plasma como un fluido conductor, donde se asume que es un medio continuo en donde las cantidades macroscópicas son funciones continuas de la posición y del tiempo. Además, la longitud espacial hidrodinámica es mucho mayor que la distancia media entre partículas[5]. También se asume que solo está compuesto por iones de una sola especie y electrones, donde la condición de cuasi neutralidad se cumple, por lo que el campo eléctrico fuera del plasma se asume como nulo.

5.1. MHD ideal

Se empieza reduciendo el modelo MHD de dos fluidos al de uno solo asumiendo la baja inercia de los electrones, indicando que el movimiento de fluido se da en gran parte por el movimiento de los iones. También se asume que la presión es isótropa y no se consideran efectos relacionados con la viscosidad que puede tener el fluido. Asimismo, se considera que la frecuencia con la que oscilan los campos es lo suficientemente baja de modo que el fluido no se mueve a velocidades cercanas a la de la luz(aproximación clásica) [30]. Esto se mantiene en concordancia con la invarianza de la ecuaciones de Maxwell bajo el grupo de transformación de Galileo[2][12].

El plasma se considera altamente colisional, cuasineutro, tal que la presión magnética es mucho mayor que la presión ejercida por el fluido, haciendo que el radio de Larmor sea pequeño, despreciable respecto a las dimensiones del sistema. Por lo tanto, las partículas que lo componen siguen una distribución de Maxwell para las velocidades[12]. Así, la ecuación de estado para un gas ideal puede aplicarse también para el plasma si se considera que este evoluciona manteniendo un equilibrio cuasiestático [5].

Las características anteriores corresponden al modelo MHD ideal. En general, el modelo MHD se puede entender como el acople de la ecuaciones de Navier-Stokes con las de Mawxwell. Con las consideraciones anteriores MHD ideal se reduce a las siguientes cinco ecuaciones. La ecuación típica de continuidad se muestra en la ecuación 8 donde ρ es la densidad de masa y $\vec{u}$ la velocidad del elemento de fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{8}$$

la dinámica del fluido queda definida entre el balance entre la fuerza magnética y la fuerza

[2] El grupo de galileo consiste de las transformaciones que mantienen el intervalo espacial invariante y la simultaneidad temporal, y está constituido por la rotación, la traslación y el movimiento uniforme en el espacio-tiempo.

ejercida por la presión del fluido, mostradas en el segundo miembro de la ecuación 9, donde $J = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right) = J \times \mathbf{B} - \nabla P, \tag{9}$$

la presión evoluciona en el tiempo bajo la condición termodinámica de adiabaticidad:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} P = -\gamma P \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u}, \tag{10}$$

y por último, la evolución temporal de los campos se obtiene a partir de la ecuación de inducción de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}, \tag{11}$$

donde $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. A su vez, el campo magnético debe satisfacer la no existencia de monopolos magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{12}$$

Podemos ver que las ecuaciones magnetohidrodinámicas idealizadas reducen considerablemente el número de variables físicas a solucionar, como la temperatura electrónica e iónica(siendo estas la misma) y la presión total, como la suma de la presión iónica y electrónica; las cuales solo terminan siendo ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}$, P.

5.1.1. Equilibrio MHD: Ecuación de Grad Shafranov. El plasma generalmente se analiza en coordenadas cilíndricas. El sistema de coordenadas se muestra en la figura 7, donde la coordenada axial es la denotada como ϕ, y el plano poloidal consiste en los puntos del plano $R-z$ correspondientes a un valor de ϕ constante.

A partir de las ecuaciones MHD ideales se puede estudiar el estado de equilibrio estático y estacionario del plasma , donde para el caso de un Tokamak, se supone axialmente simétrico. Para esto, debemos asumir que las variables físicas no evolucionan en el tiempo, y que el fluido se encuentra en reposo. Como consecuencia, las ecuaciones MHD se reducen a las ecuaciones 13 [12, 5, 15, 30]:

$$\begin{aligned} \nabla P_0 &= \mathbf{J_0} \times \mathbf{B_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B_0} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B_0} &= \mu_0 \mathbf{J_0}, \end{aligned} \tag{13}$$

donde el subíndice cero indica que son funciones en el equilibrio. Como se mencionó anteriormente, se supone una simetría axial, es decir, las funciones no dependen de ϕ y solamente dependen de la coordenadas R y z(ver figura 7). Las componentes del campo magnético son todas independientes de la coordenada axial y el campo magnético puede escribirse como $\mathbf{B} = \nabla\Psi \times \nabla\phi + g\nabla$ donde Ψ es el flujo magnético poloidal, definido como $\Psi \equiv RA_\phi$. En adición a lo anterior, se define la función de corriente poloidal como $g \equiv RB_\phi$ [15].

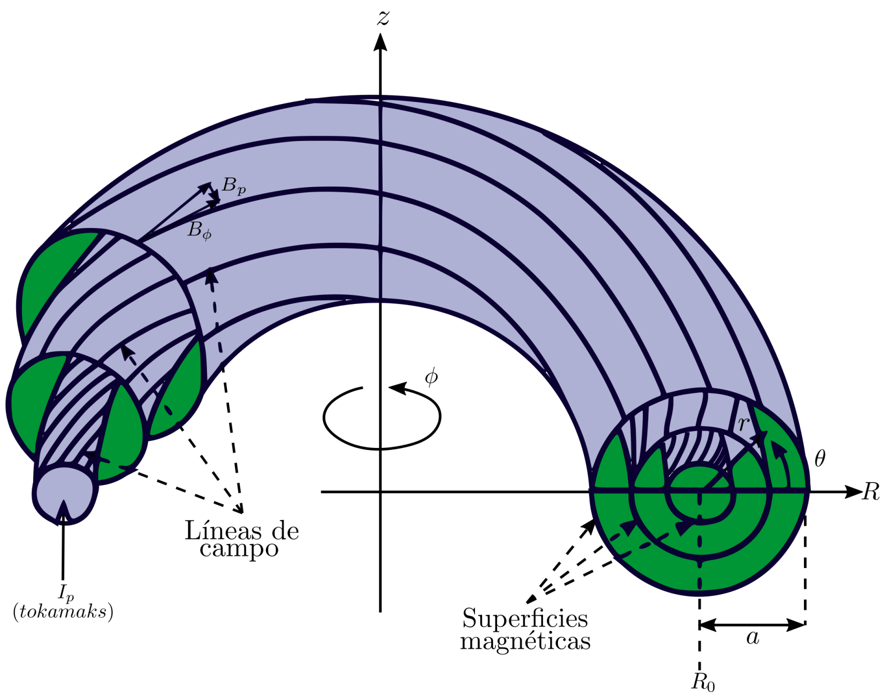

Figura 7. Sistema de coordenadas cilíndricas y esquema de superficies de campo magnético. Figura adaptada de [22]

Ahora, reemplazando la expresión del campo magnético en la ley de Ampere y tomando sólo la componente toroidal de la corriente, analíticamente se llega a que la densidad de corriente toroidal depende del flujo de campo magnético poloidal por medio del operador elíptico toroidal $\triangle^*$ de la siguiente manera:

$$\mu_0 J_\phi = -\frac{1}{R}\triangle^*\Psi, \tag{14}$$

donde:

$$\triangle^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}, \tag{15}$$

Si se analiza la componente radial(en dirección de R) del gradiente de presión del equilibrio(ver primera ecuación de 13) con el fin de realizar el balance de fuerzas a lo largo de este eje, se llega a una expresión que relaciona al flujo poloidal con la presión y la función de corriente poloidal. Esta expresión es la llamada **Ecuación de Grad Shafranov** y se expresa como:

$$\triangle^* \Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{dg}{d\Psi} g, \tag{16}$$

En este caso, $P = P(\Psi)$ y $g = g(\Psi)$. La ecuación de Shafranov tiene como solución la función de flujo poloidal Ψ. Se puede ver que en el lado izquierdo está expresado explícitamente respecto a Ψ , mientras que en el lado derecho la dependencia es implícita. Como consecuencia, puede resolverse analíticamente para casos muy particulares, sin considerar presencia de bobinas o presencia de vacío alrededor del plasma. Por lo anterior, las configuraciones de equilibrio suelen obtenerse de manera numérica. Finalmente, las componentes del campo magnético solo dependen de Ψ de forma explícita[15], donde:

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad B_z = \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}, \qquad B_\phi = g(\Psi)/R,$$

5.1.2. Linealización de las ecuaciones MHD. El interés de este proyecto es estudiar la dinámica del plasma en el régimen lineal. Como idea principal, las funciones se escriben como una función constante en el tiempo f_0 más una función en la que se asume que sí cambia f_1, donde $|f_0| \gg |f_1|$ indicando que f_1 es una pequeña perturbación [30]. Aplicando lo anterior con las variables físicas de estudio, la presión , la densidad de masa, el campo magnético y la densidad de corriente se pueden escribir como la suma de una función inicial más una función que represente tal perturbación. Estas funciones deben cumplir con las condiciones iniciales $\mathbf{B_1}(x,t=0)=0$, $\rho_1(x,t=0)=0$, $p_1(x,t=0)=0$ y $\mathbf{v}_1(x,t=0)=0$ ($\mathbf{v}=\mathbf{u}$), permitiendo expresar las ecuaciones MHD de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v}_1), \tag{17}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -P_0\gamma\nabla\cdot\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\cdot\nabla P_0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0), \tag{19}$$

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \mathbf{J}_0\times\mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1\times\mathbf{B}_0 - \nabla p_1, \tag{20}$$

5.1.3. Validez. La validez de la teoría MHD ideal recae en tres condiciones: alta colisionalidad, pequeño radio de giro y resistividad pequeña. Estas condiciones se puede escribir definiendo las variables x y y de la siguiente manera:

$$x = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}\left(\frac{V_{Ti}\tau_{ii}}{a}\right), \quad y = \left(\frac{r_{Li}}{a}\right), \tag{21}$$

donde r_{Li} es el radio de giro de un ion, m_i y m_e la masa iónica y la masa del electrón, V_{Ti} la velocidad termal de los iones, τ_{ii} la frecuencia de colisión entre iones y a la longitud característica del sistema, a veces llamada longitud macroscópica. La teoría considera el hecho de que la evolución del plasma se da escalas macroscópicas. Esto implica que la escala de tiempo de interés corresponda a la cantidad a/V_{Ti}, relacionada también con el tiempo característico de muchas inestabilidades MHD. A esta escala, las especies tienen la colisionalidad suficiente para que la función de distribución sea Maxweliana. La frecuencia del plasma sería entonces $\omega = V_{Ti}/a$, y deber se comparada con la frecuencia de colisión entre iones τ_{ii} y electrones τ_{ee}. Para los iones, se tiene que $\omega\tau_{ii} \ll 1$ y para los electrones, $\omega\tau_{ee} \ll 1$. Si se usa el hecho de que $\tau_{ee} \sim (m_e/m_i)^{1/2}\tau_{ii}$ cuando la temperatura electrónica y iónica son iguales($T_i = T_e$), se tiene que la condición es más restrictiva para los iones que para los electrones. Esta condición, la alta colisionalidad, implica la condición de baja viscosidad[12].

Entonces, las tres condiciones de validez se pueden resumir a lo siguiente:

$$x \ll 1; \quad y \ll 1; \quad y^2/x \ll 1, \tag{22}$$

con lo anterior podemos definir la región de validez de manera gráfica. En la figura 8 de la izquierda se muestra los valores de estas variables en donde las teoría(MHD Ideal) es válida. La región corresponde a los valores de y menores a la parábola $y^2 = x$ junto con valores de x menores a 1. En la figura 8 de la derecha se muestra la zona en la que estas variables corresponden a parámetros experimentales en experimentos de fusión junto con tres regiones: la I correspondiente a la región de alta colisionalidad, donde la temperatura de los iones y los electrones logra equilibrarse, la región II, donde la frecuencia de colisión electrónica y iónica no es suficiente para lograr la temperatura de equilibrio, la región III donde las colisiones entre iones empieza a disminuir, y la región IV donde el plasma es altamente no colisiona, por lo que las colisiones son mayormente entre electrones[12]. El modelo MHD ideal se encuentra en la región I, indicando que experimentalmente no se garantiza la alta colisionalidad, y por lo tanto, la temperatura electrónica no puede ser igual a la iónica.

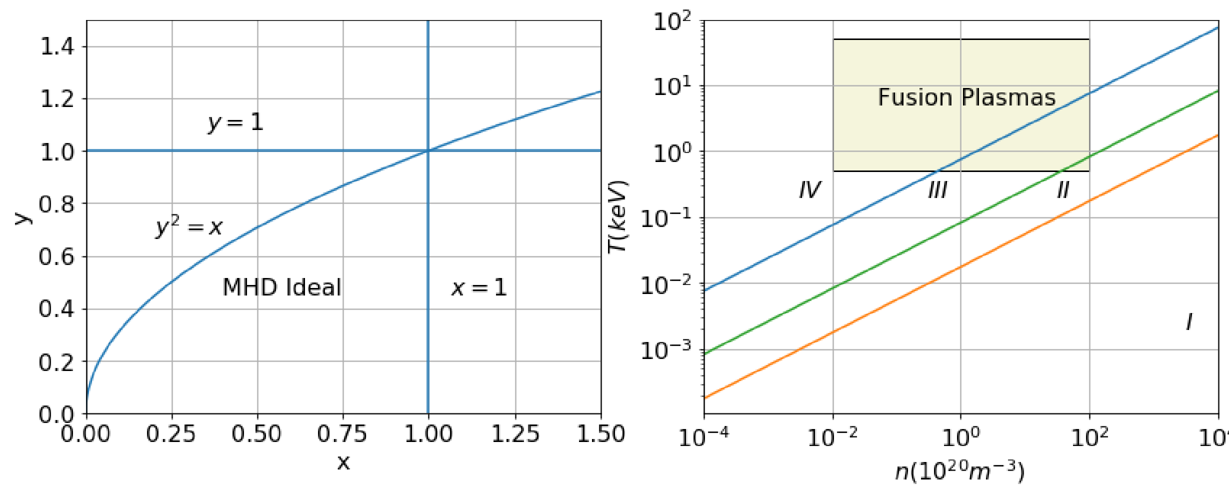

Figura 8. Régimen de valides de MHD ideal(izquieda) y valores experimentales para $\beta = 0.05$ y $a = 1m$. Figura adaptada de [11].

Estas condiciones también se pueden expresar de la siguiente manera:

$\omega\tau_{eq} \ll 1$ equilibio termodinámico

$\omega\tau_{ii} \ll 1$ las colisiones entre iones dominan

$\omega\tau_{ee} \ll 1$ las colisiones entre electrones dominan

5.1.4. Condiciones de frontera. Numéricamente, la identificación de la frontera del plasma puede tornarse complicada. Por ello generalmente se recure a solo considerar que el plasma no está rodeado de vacío. Esto es que la componente normal del campo eléctrico y la tangencial del campo magnético de desvanecen en las paredes, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\times \mathbf{E}|_{S_w} &= 0, \\ \mathbf{n}\cdot \mathbf{B}|_{S_w} &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

con la ley de ohm se ve que $\mathbf{n}\times\mathbf{E}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})\mathbf{v}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{B} = 0$, esto implica que en las paredes:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{S_w} = 0. \tag{24}$$

6. Resultados

6.1. Equilibrio

Para el cálculo del estado de equilibrio del sistema se resuelve numéricamente la ecuación de Grad Shafranov(ver ecuación 16), para ello se expresan las derivadas en un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden, permitiendo expresar el flujo poloidal como una función del flujo poloidal en un punto de malla como una función del flujo poloidal en la vecindad de dicho punto y del perfil de corriente del plasma. La región de simulación fue tomada, por simplicidad, como una región rectangular en el plano RZ, discretizada empleando 121 puntos sobre el eje radial y 161 puntos en z. Recordando que en la ecuación de Grad-Shafranov ya se asume simetría axial, el eje toroidal no es discretizado para este cálculo. En este orden de ideas, la solución numérica de la ecuación de Grad-Sharfranov se desarrolla bajo algoritmos similares a los esquemas del tipo Poisson, con la diferencia de que el termino fuente depende del perfil de ψ. Una vez se dan las condiciones de frontera apropiadas, se aplica el algoritmo implementado en el trabajo de Jardin [18] de frontera libre, el cual consiste el i) calcular la función de Green y ii) calcular la corriente del plasma teniendo en cuenta la corriente de las bobinas poloidales para posteriormente iii) calcular el flujo poloidal en la frontera del plasma. Posterior a esto se resuelve la ecuación de Grad Shafranov implementando el algoritmo de diferencia finitas y recalcular la corriente toroidal del plasma por medio del algoritmo de relajación sucesiva.

Considerando las funciones $g(\Psi) = \Psi^2$ y $P(\Psi) = \left(1 - (1-\Psi)^2\right)^2$ el equilibrio de la columna

Parámetros	Literatura	Simulación
R_0	0.7 m	0.87 m
a	0.5 m	0.58 m
A	1.4	1.5
δ	0.3	0.41
κ	2.0	1.55
x_{point_x}	0.6 m	0.6 m
$x_{point_{y1}}$	1.1 m	1.13 m
$x_{point_{y2}}$	-1.1 m	-1.3 m
$q(r = 0.8)$	2.75	2.75

Tabla 2
Parámetros del plasma en el equilibrio obtenidos de la literatura de [2], [25] y calculados en la simulación para este trabajo(columna tres).

toroidal del plasma presenta un perfil de presión ”plano” o uniforme cerca de la región central o eje magnético. Estos perfiles son los esperados en dispositivos como el MAST en las descargas conocidas como descargas de alto confinamiento [2].

El perfil de presión en el plano poloidal se muestra en la figura 9. La región rectangular de simulación contiene información del plasma así como de la región vacía a su alrededor. El plasma se encuentra como la región en el plano poloidal en la que las líneas de campo magnético son cerradas. La última línea cerrada se conoce como separatrix la cual es representada con la línea sólida color rojo. Las líneas de campo magnético poloidal también se muestran en la figura. La corriente del plasma y las componentes del campo magnético para z en el eje magnético se muestran en la figura 10. Estos perfiles se comparan con los de las referencias [24],[5] y [12], y se ve una alta correspondencia en cuanto a la forma y al valor de la corriente en la frontera del plasma y en el eje

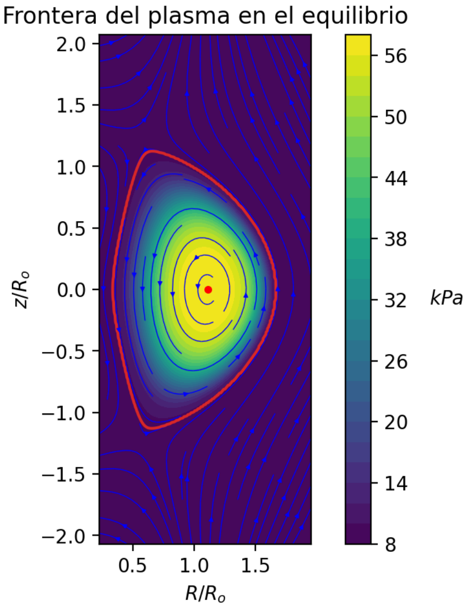

Figura 9. Perfil de campo poloidal(líneas azules), frontera del plasma(línea roja sólida), eje magnético(punto rojo) y contorno de presión, del plasma en el equilibrio. Figura realizada por los autores de este trabajo.

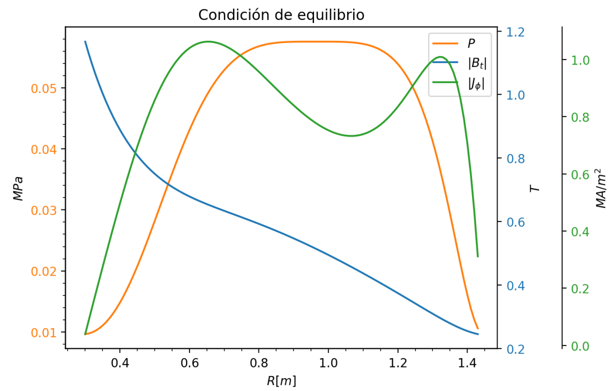

Figura 10. Perfiles presión y componentes de campo magnético en el equilibrio para z correspondiente a la posición del eje magnético. Figura realizada por los autores de este trabajo.

magnético.

En las figura 11 se muestran los valores del factor de seguridad q del perfil de equilibrio en función del radio menor, medido desde el eje magnético hasta regiones cercanas a la frontera del plasma. Se identifica que la curva es similar a la hallada en la literatura [25], [23], donde es cercano a uno en el eje magnético, a 2.2 en $r = 0.8m$ aproximadamente y crece a valores altos cerca de la frontera, menores a 10.

Mostrando los parámetros principales del equilibrio(ver tabla 2), se puede decir con referen-

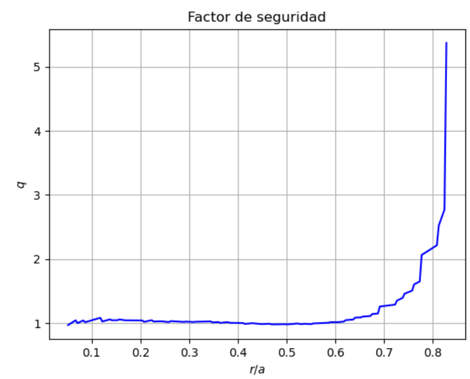

Figura 11. Factor de seguridad de equilibrio. Figura realizada por los autores de este trabajo.

cia a la forma de plasma, este presenta una gran triangularidad, con dos x-points en $(0.6m, 1.13m)$ y $(0.6m, -1.3m)$. Además, la presión alrededor del plasma, la del vacío, es de $8kPa$. En adición a esto, el eje magnético se ubica en $R = R_0 = 0.87m$ y allí la presión es de 55×10^3 pascales, el campo es de $0.53T$ y la corriente del plasma de $1.3MA$.

La presión de equilibrio tiene un crecimiento suave desde los $0.4m$ en R(ver figura 10). Esto concuerda con los contornos del perfil de equilibrio de la figura 9, lo que indica que el crecimiento de la presión desde la frontera del plasma no es abrupto. Luego el crecimiento disminuye y se mantiene constante, $0.2m$ alrededor del eje magnético, dándole a la presión la forma de una meseta, que como ya se mencionó, debe ser esencialmente la misma mostrada en la función de presión mencionada en el segundo párrafo.

Por último, el campo toroidal decrece desde los $1.2T$ en la región más interna del plasma, hasta los $0.2T$ en el exterior, comportamientos y valores típicos del MAST.

6.2. Dinámica

La dinámica se estudia a partir de la solución numérica de las ecuaciones MHD linealizadas presentadas en el capítulo anterior. Para ello se implementa el algoritmo de Runge Kutta de cuarto orden, para la evolución temporal de las variables de interés, las cuales se puede reescribir en la forma generalizada de Cauchy(ver ecuación 25).

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{u_3} \\ \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ P \\ \mathbf{v_1} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}; \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) \\ -P_0 \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \nabla P_0 \\ \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \\ (\mathbf{J_0} \times \mathbf{B_1} + \mathbf{J_1} \times \mathbf{B_0} - \nabla P_1)\rho_0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

La dinámica del sistema se estudia al romper el equilibrio inicial agregando una pequeña perturbación sobre alguna de las variables físicas, típicamente, la velocidad o la presión, tal como se presentan en este trabajo. Durante la dinámica, las paredes se consideraron como conductoras perfectas, lo que implica que la velocidad es cero en dicha región, según las ecuaciones MHD idealizadas. La malla computacional ya contempla las tres coordenadas, R, z y ϕ, siguiendo el esquema de coordenadas cilíndricas; y su tamaño es de $151 \times 261 \times 61$ puntos para R,ϕ y z respectivamente.

Se analizan tres casos de estudio: uno en el que se perturba la presión, de manera que el perfil inicial en el plano RZ corresponde a una gaussiana centrada en el eje magnético multiplicada por una función periódica en ϕ; otro en el que se perturba con el mismo patrón para cada una de las componentes de la velocidad, así, en estos casos no se tiene simetría axial, pero si se conserva la periodicidad a lo largo de ϕ.

$$P_1(R,\phi,z) = P_0 \exp -\kappa\Big((R-R_a)^2 - (z-z_{axis})\Big)^2 \sin n\phi \tag{26}$$

$$V_{1i}(R,\phi,z) = V_{0i} \exp -\kappa\Big((R-R_a)^2 - (z-z_{axis})\Big)^2 \sin n_i\phi \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

El tiempo es escalado en periodos de Alfven, igual a 2.763 micro segundos para un campo de $0.5T$, y $L_o = 0.9$ [1]. La simulaciones se ejecutan hasta los 60 periodos de Alfven.

6.2.1. Presión perturbada. Como ya se mencionó, en este caso la perturbación en la presión se induce con una forma gaussiana cuyo máximo se ubica sobre el eje magnético y a lo largo del eje toroidal se perturba sinosoidalmente tal como se presenta en la ecuación 28. Al realizar la simulación, cerca de los 60τ se observa que, sobre un plano RZ, en la frontera del plasma se forman a simple vista, entre ocho y diez lóbulos de máximos y mínimos de presión perturbada(ver figura 12). En otras palabras, se puede notar que cerca del límite o borde exterior las perturbaciones son más amplias e intensas y van decreciendo en tamaño e intensidad en el borde o límite inferior. En la mitad del costado derecho del plasma se localiza un máximo de gran área y seguido a este los tamaños de los demás lóbulos van disminuyendo en regiones cercanas al costado izquierdo. Los máximos y mínimos están intercalados, indicando que la perturbación tomó forma periódica o una estructura modal a lo largo de la frontera del plasma. Respecto a la magnitud del campo magnético, se logran localizar veinte máximos aproximadamente (ver figura 12). De estos máximos hay en mayor cantidad y de menor área al costado izquierdo del plasma.

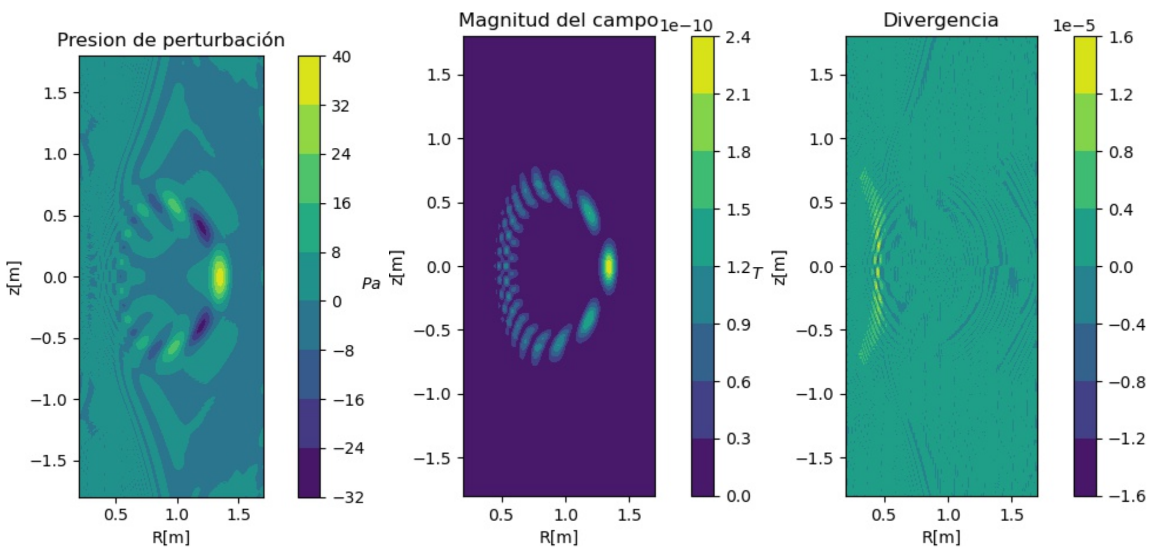

Figura 12. Perfil de presión de perturbación para $\tau \approx 60$(izquierda), magnitud del campo magnético perturbado(centro) y divergencia $\tau \approx 60$ (derecha) luego de perturbar la presión. Figura realizada por los autores de este trabajo.

A modo de verificación del código, se examina la divergencia del campo magnético en el plano poloidal y en el tiempo(ver figura 12). En el plano poloidal los valores de la divergencia son del orden de los 1×10^{-5} y los máximos de sitúan en las regiones del costado izquierdo, lo cual es lógico ya que como se muestra en las figuras anteriores los perfiles de presión tienen una alta variación espacial en las cercanías del límite inferior, logrando así evidenciar una de las limitantes del código y surge de forma natural por la estructura misma del método numérico implementado.

La figura 13 muestra los valores máximos de divergencia durante la ejecución del código, como una función del tiempo logrando evidenciar que los valores de divergencia se preservan por debajo del orden del método numérico empleado, garantizando la veracidad de las simulaciones. El crecimiento exponencial de la divergencia se puede ser originado por el crecimiento(exponencial) de las perturbaciones, como se verá más adelante.

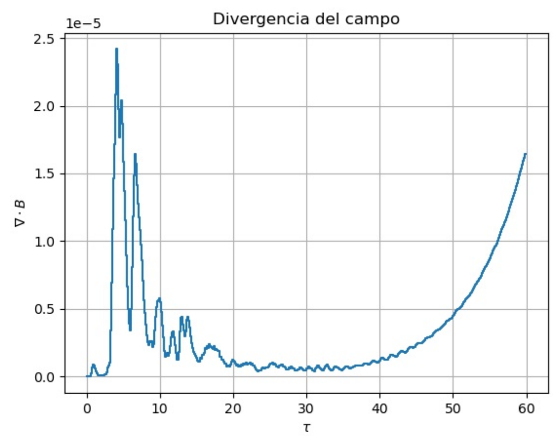

Figura 13. Evolución temporal de la divergencia al perturbar la presión. Figura realizada por los autores de este trabajo.

Para analizar si la evolución del sistema tiende a ser estable o inestable, es necesario calcular la variación de energía para las ondas de Alfven, magnetosónica, sónica, de presión, de corriente, y de energía total, las cuales se muestran en la figura 14. Antes de los treinta periodos de Alfven, la perturbación se 'acomoda', por lo que es relevante analizar la evolución después de este tiempo, hecho que se evidencia más adelante, en la figura 15. En la figura 14 se puede observar que la variación de la energía producida por las ondas sonoras predomina considerablemente respecto a las demás, en dos ordenes de magnitud y su evolución es oscilatoria. Por otro lado, las demás ondas

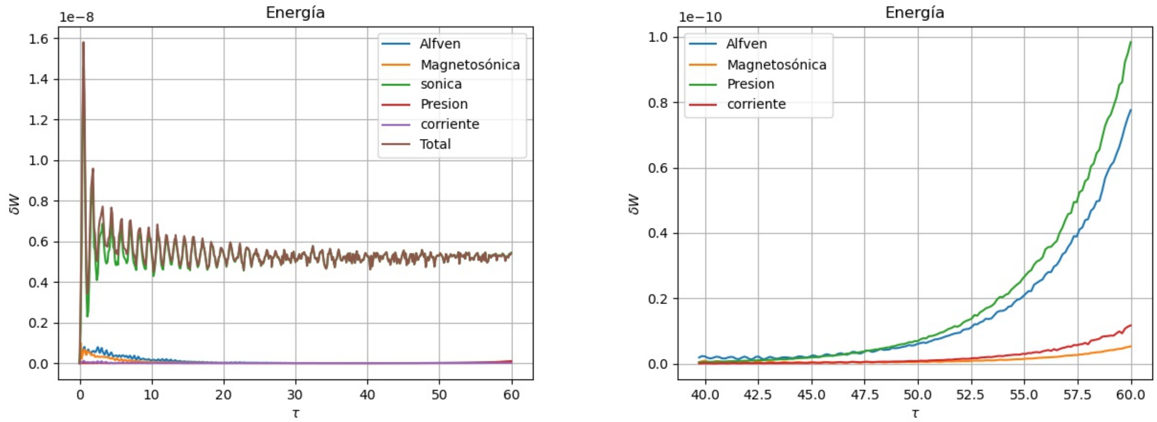

Figura 14. Energía de los cinco diferentes tipos ondas en el plasma y la energía total(izquierda); y energía de los diferentes tipos ondas en el plasma sin incluir la energía por presión magnética(derecha), al perturbar la presión. Figura realizada por los autores del trabajo.

exhiben un crecimiento exponencial(ver figura 14), en donde las ondas de presión y las de Alfven son las predominantes.

Las figuras 15 y 16 evidencian que la evolución del perfil de presión en el plano poloidal la perturbación tiende a tomar una forma modal, debido a la presencia de máximos y mínimos de presión intercalados y distribuidos periódicamente en algunas regiones del plasma. La formación de los modos al perturbar la presión se muestra en la figura 15, donde la perturbación inicialmente gaussiana, se expande desde el interior de la columna de plasma hasta encontrar la frontera, lugar donde se forman los lóbulos previamente mencionados. En el plano azimutal se evidencia la propagación de los nueve máximos y mínimos al costado derecho de la columna de plasma todos a una misma distancia respecto a donde se ubicarían las bobinas centrales, como también, la formación de otro grupo de nueve modos ubicados a una menor distancia, concéntrico al grupo anterior(ver figura 16). Por consiguiente es necesario llevar a cabo una descomposición en modos de fourier de la variación de la energía total del sistema. En adición a esto, se puede caracterizar la tasa de crecimiento de cada modo por medio de la pendiente de la recta del logaritmo natural de la variación de la energía magnética.

La descomposición de realiza expandiendo en series la variación de la energía por medio de la siguiente expresión:

$$f(\psi_N,\theta,\phi) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} [A_{m,n}\cos(m\theta+n\phi) + B_{m,n}\sin(m\theta+n\phi)] \tag{29}$$

donde los coeficientes de la expansión de expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi_N,\theta,\phi)\cos(m\theta+n\phi)d\theta d\phi \\ B_{m,n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi_N,\theta,\phi)\sin(m\theta+n\phi)d\theta d\phi \end{aligned} \tag{30}$$

En en análisis se tomó $m = 0$.

La variación de la energía magnética en gran medida es producida por el modo $n = 9$. Los demás modos se encuentran tres ordenes de magnitud por debajo de este y en todos los casos la evolución es exponencialmente creciente(ver figura 17).En adición a esto, es cercana a cero entre los 35 y 50 periodos de Alfven. La gráfica del logaritmo natural de la energía se muestra en la figura 17, donde se ve que el la tasa de crecimiento de los modos es aproximadamente la misma, de $0.091639\mu s^{-1}$.

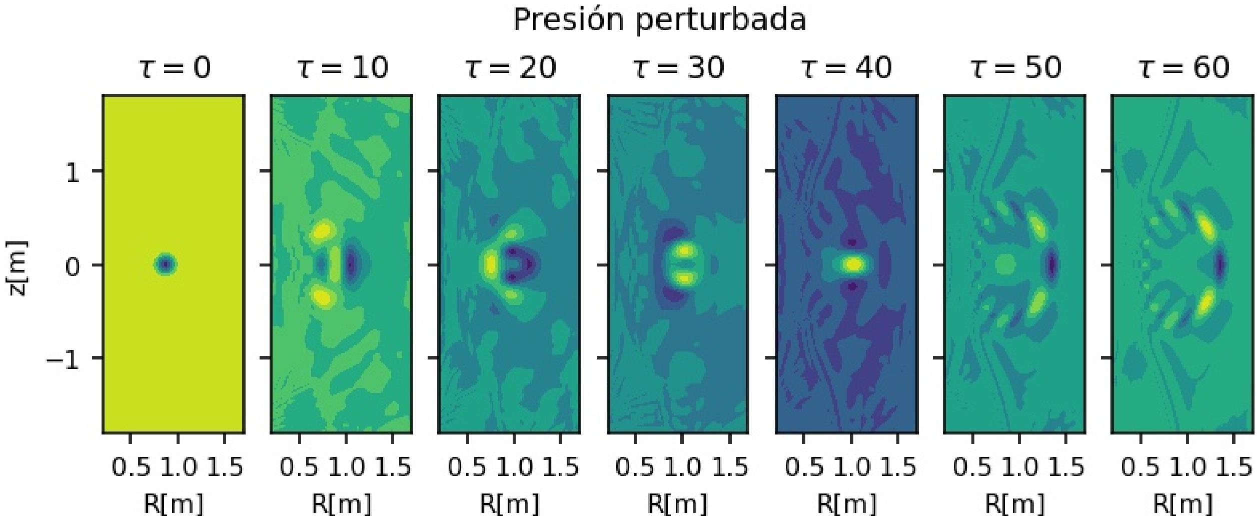

Figura 15. Evolución del plasma en el plano poloidal. Figura realizada por los autores del trabajo.

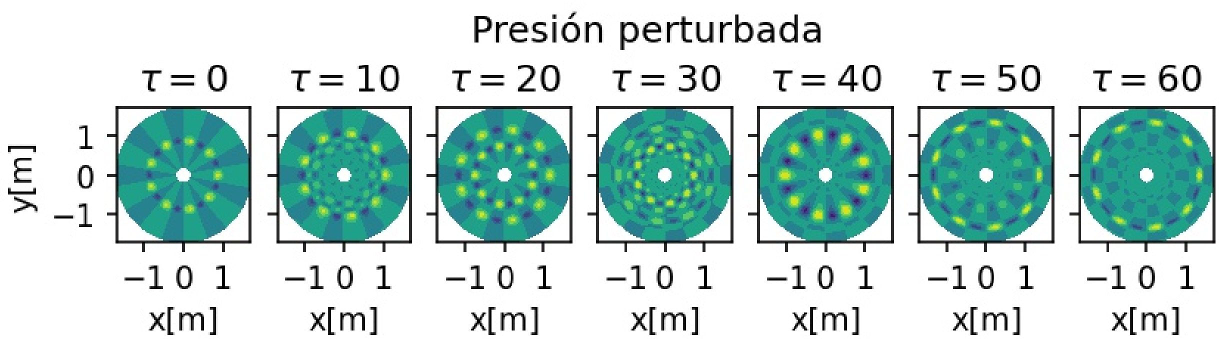

Figura 16. Evolución de plasma en el plano ecuatorial, $z = 0$. Figura realizada por los autores del trabajo.

6.2.2. Velocidad perturbada. En este caso la perturbación de realiza con un patrón similar al de la presión del caso anterior pero sobre cada una de las tres componentes de la velocidad, tal como se muestra en la ecuación 28. Al final de las simulaciones, cerca de los sesenta periodos de Alfven los lóbulos de máximos y mínimos de presión perturbada se sitúan en la frontera del plasma, observándose a simple vista catorce con valores de presión(ver figura 18). Estos

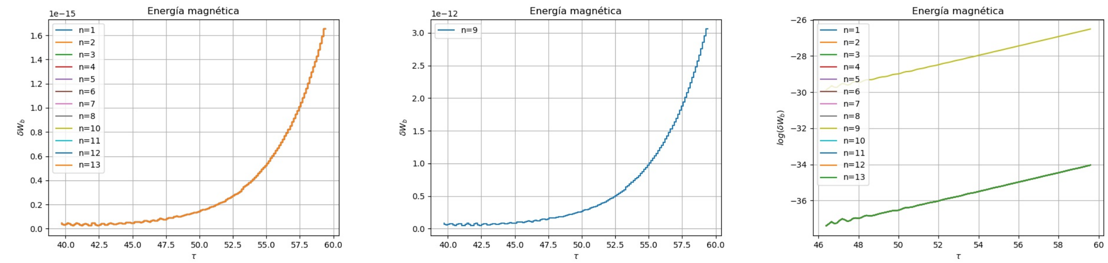

Figura 17. Delta de energía magnética para los primeros trece modos excepto el noveno(izquierda), delta de energía magnética del noveno modo(centro), logaritmo natural del diferencial de energía para los trece primeros modos; al perturbar la presión. Figura realizada por los autores del trabajo.

máximos y mínimos se hallan a dos ordenes de magnitud por debajo de los valores de presión en el equilibrio. A diferencia del caso en que se perturbó la presión, aquí no se presenta un máximo en la mitad del costado derecho del plasma, sino un punto de inflexión, donde un máximo de gran área se ubica encima del eje R, y un mínimo de área similar debajo, esto se puede interpretar como un efecto de fase en la perturbación, Lo interesante es que similar al caso anterior, la perturbación es mayor en tamaño y amplitud en la región o límite exterior del plasma y en la zona interior se reducen en tamaño y amplitud. El conjunto de máximos y mínimos presentan periodicidad, indicando que la perturbación presenta características modales. La magnitud del campo magnético presenta aproximadamente 16 máximos(ver figura 18) y es simétrica respecto al eje R.

Con respecto a la divergencia en el plano poloidal, esta es del orden de los $\pm 6\times 10^{-6} T/m$ y también presenta sus mayores valores en las regiones del costado izquierdo del plasma(ver figura 18) comparado con el perfil al perturbar la presión.

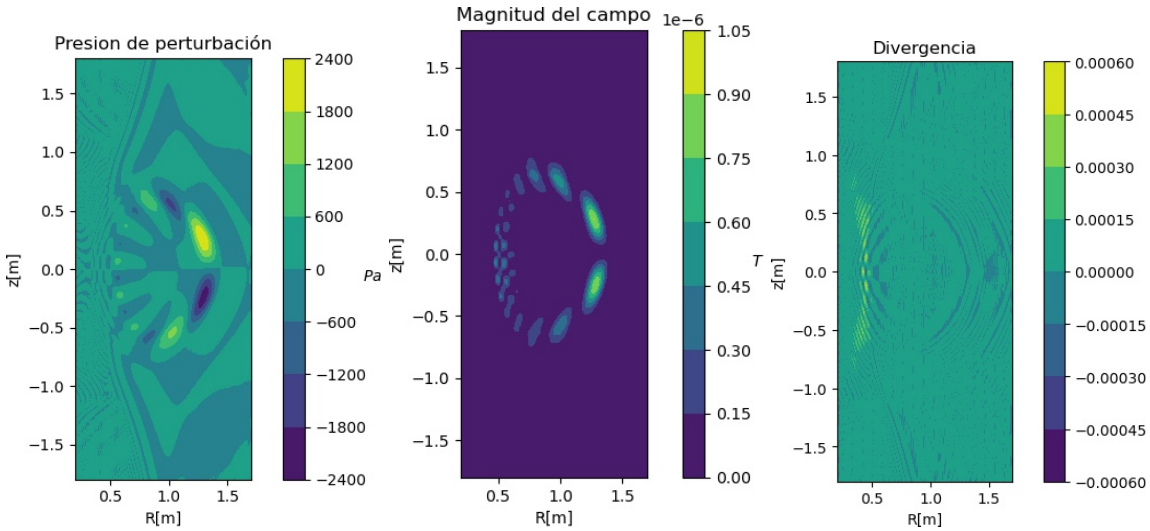

Figura 18. Perfil de presión de perturbación para $\tau \approx 60$(izquierda), magnitud del campo magnético perturbado (centro) y divergencia para $\tau \approx 60$(derecha) luego de perturbar a la velocidad sinusoidalmente. Figura realizada por autores del trabajo.

La variación de la energía las ondas se muestran en la figura 19. La energía total decrece a valores cada vez más negativos, indicando que la evolución tiende a ser inestable, tal como predice la teoría MHD ideal y linealizada[12]. La mayor contribución a la variación de la energía total se da con los modos de presión y las ondas de Alfven, de tal manera que una contrarresta la contribución de la otra. En todas se presenta crecimiento exponencial, resultado que se espera de un estudio lineal e ideal de la dinámica del plasma[12].

Le evolución de los modos asociados a la perturbación de la energía magnética se muestran en la figura 20. En las tres gráficas el crecimiento es exponencial. Se puede observar que el modo que predomina es el $m = 7$ seguido por el noveno y luego los demás, evolucionan todos de la misma manera pero con amplitudes muy por debajo de los casos anteriores, mostrando que los

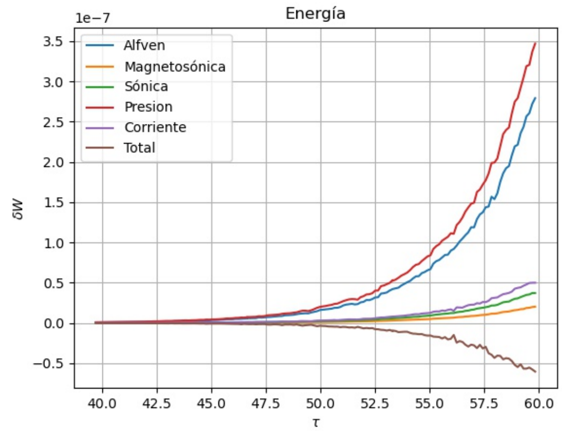

Figura 19. Energía de los cinco diferentes tipos ondas en el plasma y la energía total. Figura realizada por los autores del trabajo.

modos 7 y 9 son los más excitados. En la figura 21 se muestran las curvas del logaritmo natural de la variación de la energía para cada modo. El séptimo tiene una pendiente de $0.2987\tau^{-1}$, el noveno, de $0.2663\tau^{-1}$ y los demás, de $0.2953\tau^{-1}$. La recta correspondiente al séptimo modo se encuentra por encima de las demás, con punto de corte en -36.067. En medio, se encuentra la recta del noveno, con corte en -37.317 y los demás con corte en -43.233, indicando que la amplitud de amortiguamiento del séptimo modo es aproximadamente mil veces mayor a la de los demás(sin incluir el noveno) y el noveno es trescientas veces mayor. En unidades no normalizadas, la tasa de crecimiento de la energía magnética es de $0.108\mu s^{-1}$ y $0.0096\mu s^{-1}$ para el séptimo y noveno modo, respectivamente, evidenciando que las razones de crecimiento en el caso lineal son muy similares.

6.2.3. Velocidad Aleatoria. El último caso a analizar es en el que la perturbación se da en direcciones aleatorias de la velocidad, con magnitud gaussiana centrada en el eje magnético. Al igual que los casos anteriores, a los sesenta periodos del Alfven los máximos y mínimos

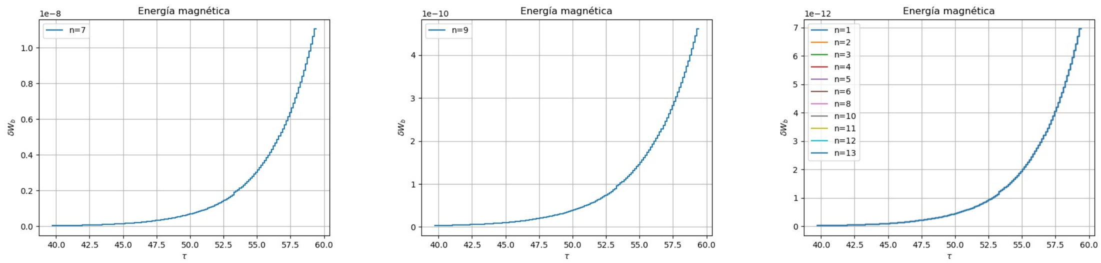

Figura 20. Delta de energía magnética del séptimo modo(izquierda), delta de energía magnética para el noveno modo(centro) y delta de energía magnética para los trece primeros modos excepto el séptimo y el noveno. Figura realizada por los autores del trabajo.

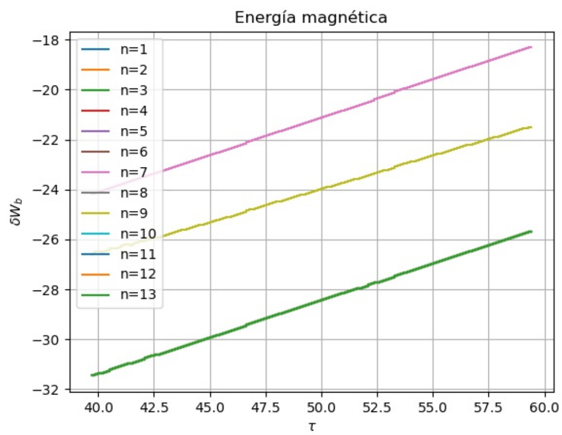

Figura 21. Logaritmo natural del diferencial de energía para los trece primeros modos. Figura realizada por los autores del trabajo.

se han formado en la frontera del plasma, los cuales tienen forma lobular. Estos se muestran en la figura 22, en donde se logran identificar cinco máximos y cinco mínimos. El perfil de la magnitud del campo magnético no presenta un comportamiento similar en cuanto a la ubicación de los lóbulos, con respecto al perfil de presión(ver figura 22) ya que los estos a pesar de encontrarse en la frontera, no presentan simetría y se ubican en ciertas regiones de la misma. Esto puede ser resultado del aporte multimodal, es decir, que la malformación de los lóbulos es producida por la superposición de varios modos en el campo perturbado.

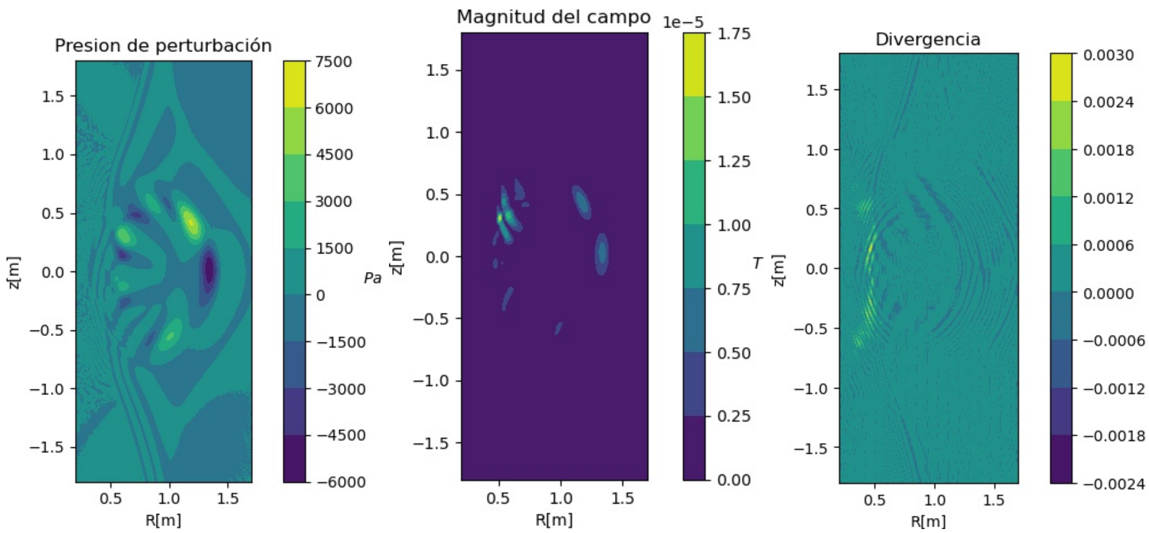

Figura 22. Perfil de presión de perturbación para $\tau \approx 60$ con perturbación aleatoria en las componentes de la velocidad(izquierda), Magnitud del campo magnético perturbado(centro) y divergencia para $\tau \approx 60$. Figura realizada por los autores del trabajo.

La divergencia en el plano poloidal tiene una estructura similar a los casos anteriores, lo cual es consistente con lo planteado anteriormente. Los modos tienen mayor variación espacial en el borde interior del plasma. Vale la pena aclarar que para este caso, las ecuaciones de evolución de velocidad son modificadas al añadir un termino de viscosidad artificial que ayuda a mitigar o suavizar las altas variaciones de la perturbación. Por la naturaleza del método numérico y de la perturbación, los valores de divergencia aumentan respecto a los casos anteriores pero el comportamiento propiamente dicho es similar(ver figura 22).

La variación de la energía de las ondas de Alfven, magnetosónica, sónica, de presión y de corriente se muestran en la figura 23. La variación de la energía total decrece a valores cada vez más negativos, además, las ondas de presión y de Alfven son las que más contribuyen a la variación total, indicando que estos dos tienden a contra restarse entre si y en definitiva, la evolución del plasma es inestable($\delta W < 0$).

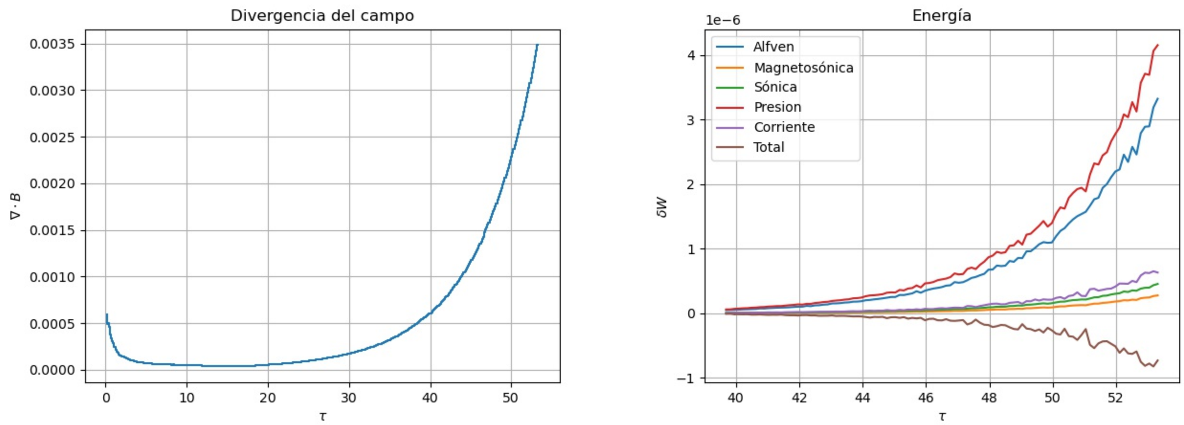

Figura 23. Evolución temporal de la divergencia(izquierda) y energía de los cinco diferentes tipos ondas en el plasma y la energía total(derecha) , luego de perturbar la velocidad aleatoriamente. Figura realizada por los autores de trabajo.

El logaritmo natural de la variación de la energía magnética se muestra en la figura 24. Se observa que todos los modos presentan una tasa de crecimiento y amplitudes diferentes, siempre crecientes, lo que implica que en algunos casos las rectas logran cortase, indicando el momento en que la influencia de un modo en la variación de la energía supera a otro. Así, el tercer modo supera al undécimo cerca de los 33 periodos, el décimo tercer modo supera al décimo cerca de los 40 periodos, el octavo al noveno cerca de los 35 periodos, el cuarto al séptimo a los 55 periodos, y el sexto y el quinto al primero cerca de los 40 y 47 periodos respectivamente. La tasas de crecimiento en unidades de Alfven se muestran en la tabla 3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
τ^{-1}	0.274	0.257	0.306	0.325	0.325	0.312	0.293	0.274	0.261	0.274	0.285	0.259	0.27

Tabla 3
Tasas de crecimiento en unidades de Alfven. Tabla realizada por los autores del trabajo.

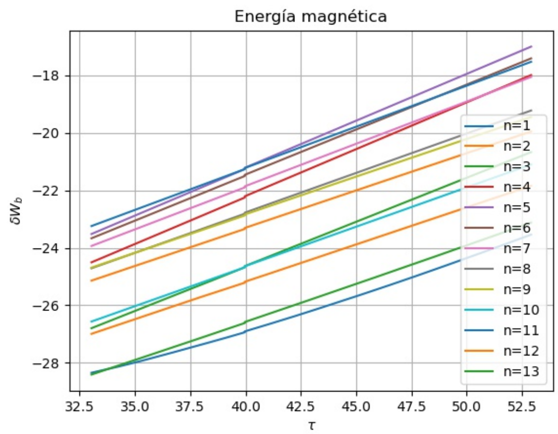

Figura 24. Logaritmo natural del diferencial de energía para los trece primeros modos luego de perturbar la velocidad aleatoriamente. Figura realizada por los autores del trabajo.

6.2.4. Espectro modal. Dentro del rango temporal estudiado se ubicaron los modos de más influencia en la variación de la energía por medio de espectro modal. En la figura 25 se muestra para cada modo, la variación de la energía en cuatro diferentes tiempos, para los tres casos estudiados previamente. El tiempo en que se obtuvo la mayor variación fue con $\tau = 52.9$, seguido de $\tau = 39.1$, $\tau = 50.9$ y $\tau = 37.1$ para el caso en que se perturba la presión. Asimismo, $\tau = 39$, seguido del $\tau = 37$, $\tau = 35$ y $\tau = 33$ para el caso en el se perturba la velocidad sinosoidalmente, y $\tau = 39$, seguido del $\tau = 37$, $\tau = 35$ y $\tau = 33$ para el caso en que se perturba la velocidad de manera aleatoria. Se observa que estas distribuciones temporales no se alteran en todos los modos.

Como se mencionó en la sección anterior, la perturbación en la presión se realiza con $n = 9$.

En la figura se observa que este mismo modo es el que se excita sobre el eje toroidal. Es decir, que la perturbación formada a los 60 periodos mantiene la estructura de la perturbación inicial a lo largo de ϕ. Para el caso perturbar las componentes en la velocidad con $n = 7, 9$, se observa que los mismos modos con lo que se perturbó, excitan al sistema, con variaciones más importantes entre los 30 y 40 periodos de Alfven para $n = 7$. El comportamiento es similar para el caso de $n = 9$. Sin embargo, el modo que presenta los mayores valores de variación de energía magnética es el séptimo, siendo este el predominante. Por último, para el caso en que se perturba la velocidad de manera aleatoria, el espectro es más variado. Se presenta variación de la energía para los modos mayores a 2. El de mayor contribución es el quinto modo, seguido luego por el sexto, décimo primero, cuarto, séptimo, octavo, noveno, décimo segundo, tercero, décimo, segundo y el décimo tercero.

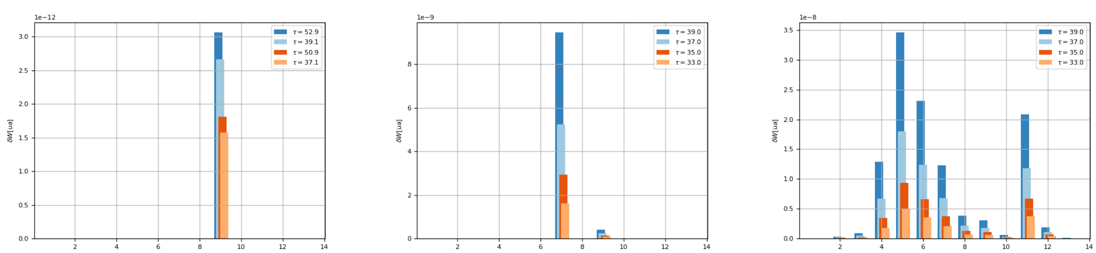

Figura 25. Espectro de energía de los modos durante la simulación al perturbar la presión sinosoidalmente en ϕ(izquierda), espectro de energía de los modos durante la simulación al perturbar la velocidad sinosoidalmente en ϕ(derecha) y Espectro de energía de los modos durante la simulación al perturbar la velocidad aleatoriamente. Figura realizada por los autores del trabajo.

7. Conclusiones

Se logró simular las condiciones de equilibrio del plasma para un dispositivo tokamak esférico con parámetros típicos. A partir de la configuración de equilibrio se realizó el análisis de la evolución temporal de la columna de plasma en el régimen lineal para sesenta periodos de Alfven en tres escenarios diferentes: i) perturbando la presión sinusoidalmente respecto a la coordenada axial, ii) perturbando sinusoidalmente las tres componentes de la velocidad, y iii) perturbado aleatoriamente nuevamente cada una de las tres componentes de la velocidad. En los perfiles de la presión perturbada, en todos los casos, se presenta un comportamiento modal desde los 30 periodos de Alfven evidenciando que dichos modos tienden a ubicarse en la región del borde exterior del plasma. En los dos primeros casos, en los que se perturba la presión y la velocidad de forma gaussiana pero sin simetría axial, el modo poloidal que en el tiempo excita al sistema, es el mismo con el que se perturbó. En el tercer caso, que es al perturbar la velocidad de manera aleatoria, el espectro modal es más variado, con contribuciones en la variación de la energía magnética desde los modos toroidales dos hasta el trece, siendo el quinto el de mayor contribución. Como verificación del código implementado, se examinó la evolución y comportamiento de la divergencia. Se observó que esta crece más rápidamente al perturbar la velocidad de forma aleatoria, comparado con el crecimiento al perturbar sinusoidal tanto la presión como a la velocidad. Resultado que es de esperarse debido a la naturaleza misma del esquema numérico. Con la variación de la energía para cada una de las ondas en el plasma y la variación total, se logró determinar que el sistema al perturbar la presión es estable, mientras que, en ambas formas de perturbar la velocidad, tiende a ser inestable. Generalmente las ondas de presión y las de Alfven mantienen tendencias similares, indicando que una contrarresta la contribución de la otra. En los casos en que se perturba sinusoidalmente, los modos excitados presentan tasas de crecimiento similares. Al perturbar la velocidad aleatoriamente, la contribución de un modo poloidal determinado en la variación de la energía magnética se comporta de tal manera que luego de los 30 periodos de Alfven, supera la de otro modo. Lo que indica que la contribución de cada modo no permanece constante en el tiempo, como consecuencia de las tasas de variación, las cuales son distintas. Los resultados de la simulación muestran que cuando un modo en particular es excitado, este tiende a dominar durante toda la simulación, tal como se presentó en los casos uno y dos. Esto es muy coherente si se compara con la dinámica de una cuerda pues al excitarse un modo en particular, la cuerda vibra con este único modo, así, es posible mencionar que estas simulaciones y estrategias de perturbación pueden ser empleadas como mecanismos de validación de códigos magnetohidrodinámicos. Así, se logró describir la dinámica del sistema con la evolución espacial del plasma en función del tiempo y una caracterización modal de la variación de la energía magnética para determinar en qué casos el sistemas es o no estable.

Referencias Bibliográficas

[1] Appel, L. C., Fülöp, T., Hole, M., Smith, H., Pinches, S. D., Vann, R., team, M., et al. (2008). Compressional alfvén eigenmodes on mast. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(11):115011.

[2] Applegate, D., Roach, C., Cowley, S., Dorland, W., Joiner, N., Akers, R., Conway, N., Field, A., Patel, A., Valovic, M., et al. (2004). Microstability in a “mast-like” high confinement mode spherical tokamak equilibrium. *Physics of plasmas*, 11(11):5085–5094.

[3] Barbarino, M. (2020). A brief history of nuclear fusion. *Nature Physics*, pages 1–4.

[4] Bethe, H. (citado el 12 de octubre del 2020). Hans bethe. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1967/bethe/lecture/.

[5] Boyd, T., Boyd, T., and Sanderson, J. (2003). *The physics of plasmas*. Cambridge University Press.

[6] Britannica, E. (Citado 12 de octubre del 2020). Sr william crookes. https://www.britannica.com/biography/William-Crookes (accessed: 12.10.2020).

[7] Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., and Benites, G. E. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*, volume 5. McGraw-Hill México.

[8] Chen, Y.-Y., Bao, X.-H., Fu, P., and Gao, G. (2019). Plasma shape optimization for east tokamak using orthogonal method. *Chinese Physics B*, 28(1):015201.

[9] D'Auria, S. (2018). Introduction to particle physics. In *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, pages 103–146. Springer.

[10] El-Guebaly, L. A. (2010). History and evolution of fusion power plant studies: Past, present, and future prospects. *International Journal of Energy, Environment and Economics*, 18(1):115.

[11] Freidberg, J. P. (2008). *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge university press.

[12] Freidberg, J. P. (2014). *ideal MHD*. Cambridge University Press.

[13] Goldston, R. J. and Rutherford, P. H. (1995). *Introduction to plasma physics*. CRC Press.

[14] group, T. (citado 28 de marzo del 2020). Tore supra. https://www.thalesgroup.com/en/microwave-imaging-sub-systems/magazine/tore-supra.

[15] Hu, Y. (2015). Notes on tokamak equilibrium. *Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences*.

[16] ITER (citado 12 de octubre del 2020). "why plasma?". https://www.iter.org/newsline/266/1571.

[17] ITER page (citado 28 de marzo del 2020). FACTS & FIGURES. https://www.iter.org/factsfigures.

[18] Jardin, S. (2010). *Computational methods in plasma physics*. CRC Press.

[19] Keilhacker, M. (1999). Jet deuterium: tritium results and their implications. *Philosophical*

Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 357(1752):415–442.

[20] Kikuchi, M., Lackner, K., and Tran, M. Q. (2012). Fusion physics.

[21] King, J., Kruger, S. E., Groebner, R. J., Hanson, J. D., Hebert, J., Held, E. D., and Jepson, J. (2017). Effect of scrape-off-layer current on reconstructed tokamak equilibrium. *Physics of Plasmas*, 24(1):012504.

[22] Kirschner, J. (2017). Influence of external magnetic perturbations on the plasma boundary in l-mode and on the plasma position control system of asdex upgrade.

[23] Liu, Y., Dudson, B., Gribov, Y., Gryaznevich, M., Hender, T., Kirk, A., Nardon, E., Umansky, M., Wilson, H., and Xu, X. (2010). Modelling of plasma response to rmp fields in mast and iter. *submitted to Nucl. Fusion (February 2011)*.

[24] López, J., Orozco, E., and Dugar-Zhabon, V. (2019). Numerical study of linear plasma dynamics in a spherical tokamak. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1386, page 012124. IOP Publishing.

[25] Ludwig, G. (1997). Direct variational solutions of the tokamak equilibrium problem. *Plasma physics and controlled fusion*, 39(12):2021.

[26] Mills, R. G. (1971). Lawson criteria. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 18(4):205–207.

[27] Ongena, J. (2015). Fusion: A true challenge for an enormous reward. In *EPJ Web of Conferences*, volume 98, page 05004. EDP Sciences.

[28] Ongena, J., Koch, R., Wolf, R., and Zohm, H. (2016). Magnetic-confinement fusion. *Nature Physics*, 12(5):398–410.

[29] Ongena, J. and Oost, G. V. (2012). Energy for future centuries: prospects for fusion power as a future energy source. *Fusion Science and Technology*, 61(2T):3–16.

[30] Schnack, D. D. (2009). *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer.

[31] Schultz, J. H., Antaya, T., Feng, J., Gung, C.-y., Martovetsky, N., Minervini, J. V., Michael, P., Radovinsky, A., and Titus, P. (2005). The iter central solenoid. In *21st IEEE/NPS Symposium on Fusion Engineering SOFE 05*, pages 1–4. IEEE.

[32] Spatschek, P. K.-H. (2011). Introduction. In *High Temperature Plasmas*, chapter 1, pages 1–39. John Wiley & Sons, Ltd.

[33] Zohuri, B. (2016). *Plasma physics and controlled thermonuclear reactions driven fusion energy*. Springer.

Apéndices

Apéndice A. Diferencias finitas

Una forma de calcular la derivada de una función discreta es a través del método de diferencias finitas. Este método consiste a aproximar la derivada expresándola como la pendiente de la recta secante entre dos puntos. El domino de la función es entonces un conjunto de puntos espaciados una distancia h. Este conjunto se define como malla unidimensional y el número de puntos de define en función del límite inferior y el límite superior de la malla, que corresponden a los valores límites que puede tener la variable independiente. Estos límites deben definirse, ya que la malla es finita. El número de puntos se calcula, en función de h y los límites inferior y superior x_0 y x_f siguiendo la expresión $np = \left(x_f - x_0\right)/h + 1$. El rango de la función corresponde a la función definida en cada uno de los puntos del dominio. Si se conoce el dominio, es posible calcular la derivada en un punto x_i dentro de la malla. Para ello se calcula la pendiente de la recta secante respecto a este punto, bien sea tomando este junto con uno aledaño, o los dos puntos aledaños. Para el primer caso, se dice que la diferencia finita es por izquierda o por derecha, y para el segundo, se dice que la diferencia finita es centrada.

De este modo, la derivada de una función f definida en el punto de malla x_i se escribe, tomando un paso adelante, como:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + Oh^2 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + Oh^2 \tag{31}$$

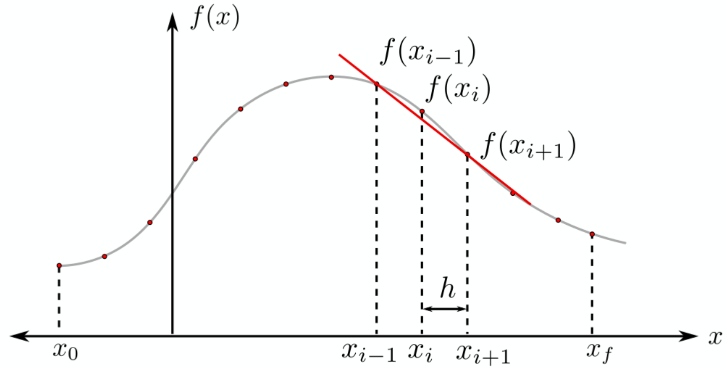

Figura 26. Recta secante en una malla unidimensional

un paso hacia atrás:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + Oh^2 = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + Oh^2 \tag{32}$$

y centrada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + Oh^2 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + Oh^2 \tag{33}$$

Si la función está definida en más de una variable, n variables, el método de diferencias finitas permite calcular la derivada parcial. El dominio es de dimensión n, por lo que la malla es n-dimensional. Como consecuencia, su tamaño es $npx \times npy \times npz$, para el caso tridimensional, por ejemplo. Los puntos aledaños a una malla en 3D se muestran en la figura 27. La derivada parcial se escribe del mismo modo al caso 1D con la particularidad de que los puntos aledaños corresponden a los puntos respecto a los cuales se deriva la función, manteniendo los índices de las demás variables, constante. Así, para el caso de diferencias finitas centradas se tiene que:

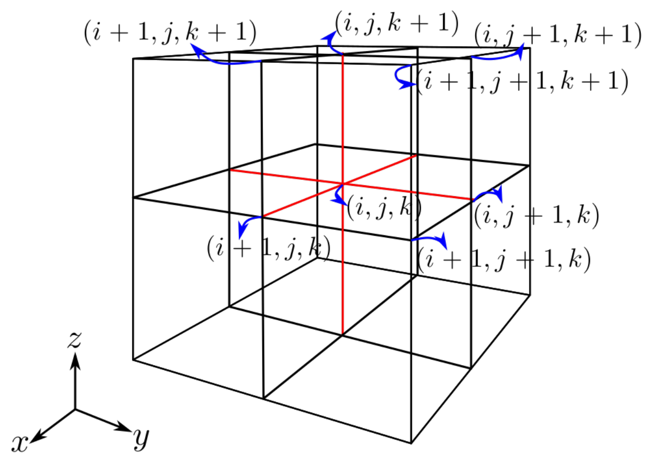

Figura 27. Puntos aledaños a un punto en una malla 3D

$$\frac{\partial f(x_{i,j,k})}{\partial x_{i,j,k}} = \frac{f(x_{i+1,j,k}) - f(x_{i-1,j,k})}{2h_x} + Oh_x^2 \tag{34}$$

Para finalizar, es importante resaltar que en los bordes de la región de simulación(o puntos extremos de malla) la derivaba debe calcularse con diferencias finitas un paso adelante(para el caso el límite inferior) y paso haca atrás(para el caso de límite superior).

Apéndice B. Algoritmo de Runge Kutta

El algoritmo de Runge Kutta permite resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ por medio del método de aproximación de pendientes. Este método consiste, para una malla dada, en que la solución de la función f_{i+1} se escribe en términos del valor de la función en el punto de malla anterior f_i por medio de la función incremento ϕ de la forma $f_{i+1} = f_i + \phi h$. La función incremento depende de $f(x,y)$ de la siguiente manera:

$$\phi = a_1 k_q + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{35}$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_4 &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned} \tag{36}$$

El orden de método es definido por la constante n. Las expresiones de k son relaciones de recurrencia y una vez elegido n, las constantes a_n, p_{n-1} y $q_{n-1,n-1}$ se pueden definir de manera analítica estableciendo un sistema de ecuaciones entre estos parámetros producto de la expansión de la función en series de Taylor de orden n para la función y_{i+1} [7]. h cooresponde al tamaño

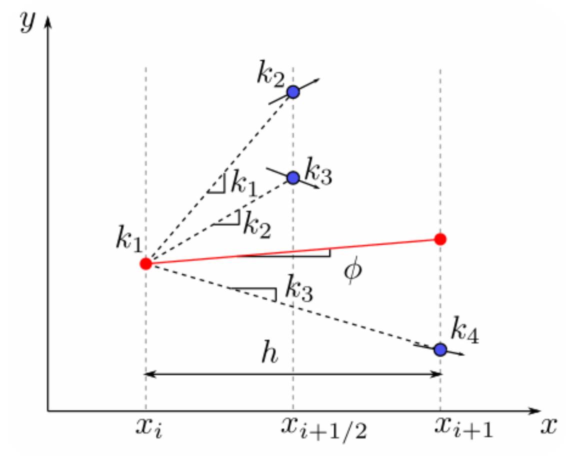

Figura 28. Esquema de las pendientes calculadas con Runge Kutta de cuarto orden

del paso de la malla correspondiente a la variable independiente respecto a la cual está definida la función. En este trabajo se implementa el método de Runge Kutta de cuarto orden(n = 4), por lo que los valores de k corresponden a los siguientes:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) \end{aligned} \tag{37}$$

de tal manera que la función y_{i+1} se expresa como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{38}$$

La ecuación 38 es entonces el promedio ponderado entre las pendientes mostradas en la figura 28, y corresponde al promedio ponderado para establecer la mejor pendiente.

Apéndice C. Algoritmo de frontera libre

El cálculo de flujo porloidal magnético en la frontera del plasma para encontrar la configuración de equilibrio correspondiente a una determinada distribución de bobinas toroidales se realiza partiendo de la función de green para el operador elíptico Δ^*, definido en la ecuación 15:

$$G(\mathbf{R};\mathbf{R}') = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{RR'}}{k}\left[(2-k^2)K(k) - 2E(k)\right] \tag{39}$$

donde $K(k)$ Y $E(k)$ son integrales elípticas completas de primer y segundo tipo, con:

$$k^2 = \frac{4RR'}{[(R+R')^2 + (Z-Z')^2]} \tag{40}$$

Integrando en todo el espacio, manteniendo el punto de observación R' en la frontera de la malla computacional y aplicando el teorema de Gauss para convertir divergencias en integrales de superficie que se desvanecen en el infinito[18], de tiene que el flujo poloidal en la frontera con coordenada (R', z') está dado por:

$$\Psi_b(R', z') = \int_{\mathrm{P}} G(R, Z; R', z')\, J_\phi(R, z) dR dz + \sum_{i=1}^{N_c} G\left(R_i^c, z_i^c; R', z'\right) I_i \tag{41}$$

El superíndice “c” indica que las coordenadas corresponden a la ubicación de las bobinas. La sumatoria se realiza respecto al número total de bobinas toroidales presentes. La integral del lado derecho de la ecuación se realiza en toda el área en que se encuentra el plasma. Esta depende de la corriente toroidal del plasma, mientras que el primero mencionado depende de la corriente en las bobinas. La corriente del plasma se calcula por medio del la llamada **iteración de Picard**, generalizada con la incorporación de **doblamiento y el promediado de fondo**[18]. De manera general, este método consiste en calcular el flujo poloidal partiendo de un perfil de corriente “antiguo", con el fin de tomar el valor nuevo de flujo como una combinación lineal de un valor nuevo provisional y el valor antiguo de flujo. Tener en cuenta que con “viejoz “nuevo"se hace referencia a que el proceso es iterativo. Durante todo el proceso se procura mantener la corriente toroidal y la presión del plasma central(generalmente la presión en el eje magnético), fijas.

Entonces, de la ecuación de Grad Shafranov, se tiene que:

$$\mu_0 R J_\phi(R,\Psi) = -\left(\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\Psi} + g\frac{dg}{d\Psi}\right) \tag{42}$$

las funciones p y g se escriben en función del flujo poloidal normalizado $\tilde{\Psi}$ definido respecto a su valor en el eje magnético, donde es igual a uno, y su valor en la separatrix, donde su valor es cero. Sus derivadas se calculan teniendo en cuenta que:

$$\begin{gathered} p(\Psi) = p_0\hat{p}(\tilde{\Psi}) = p_0(1-(1-\tilde{\Psi})^2)^2 \\ \frac{1}{2}g^2(\Psi) = \frac{1}{2}g_0^2\left[1+\alpha_g\hat{g}(\tilde{\Psi})\right];\, \hat{g}(\tilde{\Psi}) = \tilde{\Psi}^2 \end{gathered} \tag{43}$$

donde α_g se restringe de tal manera de que se mantenga la corriente del plasma constante. Por lo tanto, α_g se expresa como:

$$\alpha_g = \mu_0 \left[\frac{-p_0 \sum_{i,j} R_i \hat{p}'(\tilde{\Psi}^n_{i,j}) + I_P \Delta\Psi / \delta R \delta z}{\frac{1}{2} g_0^2 \sum_{i,j} \hat{g}'(\tilde{\Psi}^n_{i,j}) / R_i} \right] \tag{44}$$

Aquí I_P es la corriente total del plasma y $\Delta\Psi = \Psi_l - \Psi_0$, siendo estos los valores de flujo en la frontera y en el eje magnético. Entonces, el flujo magnético en el paso $n+1$ de la iteración se calcula expandiendo el operador elíptico en diferencias finitas centradas y despejando Φ_i. Como consecuencia, el flujo se expresa de la siguiente manera:

$$\Psi^{n+1}_{i,j} = A_i \Psi^n_{i+1,j} + B_i \Psi^n_{i-1,j} + C_i \left(\Psi^n_{i,j+1} + \Psi^n_{i,j-1} \right) + \mu_0 r_i J^n_{\phi_{i,j}} \tag{45}$$

A_i, B_i, C_i son funciones que dependen de R y no cambian durante la iteración, y se obtienen a partir de la expansión del operador elíptico.