

**UN ESTUDIO LONGITUDINAL DEL RAZONAMIENTO BAYESIANO EN
ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

CINDY NATHALIA MORGADO HERNÁNDEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013**

**UN ESTUDIO LONGITUDINAL DEL RAZONAMIENTO BAYESIANO EN
ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

CINDY NATHALIA MORGADO HERNÁNDEZ

**Trabajo de Grado para obtener el Grado de
Magister en Educación Matemática**

Director

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

Doctor en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2013

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por poner en mi camino a personas que me brindaron su apoyo y fortaleza para realización de este trabajo, sobre todo, he tenido dos grandes apoyos y sin ellos hubiera sido imposible culminar esta investigación. El profesor Gabriel Yáñez por su paciencia y sabiduría como director y Danny Samuel Martínez quien ha estado a mi lado ayudando, colaborando e impulsándome día a día.

También agradezco a mi familia, en especial a mi madre por sus consejos en los malos momentos y su esfuerzo incasable de luchar por el bienestar de mi hermano y mío. Además, gracias a los profesores y estudiantes de algunas universidades de Bucaramanga que participaron en las pruebas.

Gracias, muchas gracias por su apoyo y ánimo.

Cindy Nathalia Morgado

Contenido

INTRODUCCIÓN	13
REVISIÓN DE LA LITERATURA	19
2.1. REFERENTES MATEMATICOS	19
2.1.1. Espacio de probabilidad, medida de probabilidad y sus axiomas básicos	19
2.1.2. Probabilidad condicional.	19
2.1.3. Independencia	20
2.1.4. Teorema de probabilidad total.	20
2.1.5. El teorema de Bayes	21
2.2. INVESTIGACIONES PREVIAS	22
2.2.1. Antecedentes sicológicos	23
2.2.2. Antecedentes didácticos	25
2.2.2.1. Dificultades en la resolución de problemas	25
2.2.2.2. Formatos y representación de la información	32
EL MODELO LINEAL MIXTO PARA DATOS LONGITUDINALES	40
METODOLOGÍA	44
4.1. PANORAMA GENERAL DEL ESTUDIO	44
4.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA	44
4.3. DISEÑO DE LAS PRUEBAS	46
4.3.1. <i>Aplicación de la primera prueba.</i>	47
4.3.2. <i>Aplicación de la segunda prueba.</i>	48
4.3.3. <i>Aplicación de la tercera prueba.</i>	50
ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PRUEBAS	52
5.1. Análisis a priori de los ítems de la primera prueba	52
5.2. Análisis a priori de los ítems de la segunda prueba	62
5.3. Análisis a priori de los ítems de la tercera prueba	71
ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS RESULTADOS	83

6.1. Análisis de las respuestas en la primera prueba	83
6.2. Análisis de las respuestas en la segunda prueba	88
6.3. Análisis de las respuestas en la tercera prueba	92
6.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONJUNTO E1	96
6.4.1. Análisis de los resultados de los grupos A1 y A2 de Estadística para Ingenieros	100
6.4.2. Análisis de los resultados de los grupos B1 y B2 de Bioestadística I	108
6.5. ANALISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONJUNTO E2	116
6.5.1. Análisis de los resultados de los grupos C1 y C2 de estadística Inferencial	117
ANÁLISIS Y RESULTADOS DEL MODELO LINEAL MIXTO	125
PERFIL DE DESARROLLO DE LOS ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON LAS TRES PRUEBAS	129
8.1. Los estudiantes del curso de estadística para ingenieros	129
8.2. Los estudiantes del curso de bioestadística	131
8.3. Los estudiantes del curso de estadística inferencial	132
ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS RESPUESTAS	135
CONCLUSIONES GENERALES	151
9.1. Limitaciones de esta Investigación	156
9.2. Implicaciones para la enseñanza e investigaciones futuras	157
Referencias bibliográficas	159
ANEXOS	163

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Elementos que se evalúan en las diferentes pruebas aplicadas	52
Tabla 2. Formato típico de la Tabla de doble entrada 2x2	53
Tabla 3. Resumen de los ítems de la primera prueba	61
Tabla 4. Resumen de los ítems de la segunda prueba	71
Tabla 5. Resumen de los ítems de la tercera prueba	81
Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2	85
Tabla 7. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2	86
Tabla 8. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2	86
Tabla 9. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad marginal en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2	87
Tabla 10. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2	87
Tabla 11. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2	89
Tabla 12. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2	90
Tabla 13. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2	90
Tabla 14. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2	91
Tabla 15. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2	92

Tabla 16. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2	93
Tabla 17. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2	94
Tabla 18. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2	95
Tabla 19. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2.	95
Tabla 24. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de estadística para ingenieros a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.	129
Tabla 25. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística para ingenieros	130
Tabla 26. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de bioestadística I a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.	131
Tabla 27. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de bioestadística I.	132
Tabla 28. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de estadística inferencial a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.	132
Tabla 29. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística inferencial.	133
Tabla 30. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de bioestadística I a cada uno de los ítems que plantean problemas de máquinas para las tres pruebas.	147

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Actualizando una probabilidad usando el teorema de Bayes	16
Figura 2. Diagrama de árbol para la solución del ítem 7 de la segunda prueba	66
Figura 3. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la primera prueba.	84
Figura 4. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la segunda prueba.	88
Figura 5. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la tercera prueba.	93
Figura 6. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E1 en cada momento	97
Figura 7. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del curso estadística para ingenieros en cada prueba.	98
Figura 8. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del curso bioestadística I en cada prueba.	98
Figura 9. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo A1 de estadística para ingenieros en cada prueba.	100
Figura 10. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo A2 de estadística para ingenieros en cada prueba	100
Figura 11. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo de los grupos A1 y A2 de estadística para ingenieros	101
Figura 12. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk de los resultados del grupo A1 para cada uno de los momentos	102
Figura 13. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los diferentes momentos	103
Figura 14. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo A2 para cada uno de los momentos	104

Figura 15. Pruebas t-student para comparar medias del grupo A1 en el primer y segundo momento	104
Figura 16. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los momentos (1—3) y (2-3)	105
Figura 17. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el primer momento	106
Figura 18. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el segundo momento	106
Figura 19. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el tercer momento	107
Figura 20. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo B1 de bioestadística en cada prueba.	108
Figura 21. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo B2 de bioestadística en cada prueba.	108
Figura 22. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo de los grupos B1 y B2 de bioestadística I.	110
Figura 23. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk de los resultados del grupo B1 para cada uno de los momentos	111
Figura 24. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo B1 en los diferentes momentos	111
Figura 25. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo B2 para cada uno de los momentos	112
Figura 26. Prueba t-student para comparar medias del grupo B1 en el primer y segundo momento	113
Figura 27. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los momentos (2—3) y (1-3)	113
Figura 28. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el primer momento	114
Figura 29. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el segundo momento	115

Figura 30. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el tercer momento	116
Figura 31. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E2 en cada prueba.	117
Figura 32. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo C1 de estadística inferencial en cada prueba.	118
Figura 33. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo C2 de estadística inferencial en cada prueba.	118
Figura 34. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para cada grupo de estadística inferencial	119
Figura 35. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo C2 para cada uno de los momentos	120
Figura 36. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo C1 en los diferentes momentos	120
Figura 37. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo C2 para cada uno de los momentos	121
Figura 38. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo C2 en los diferentes momentos	121
Figura 39. Prueba de Welch para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el primer momento	122
Figura 40. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el segundo momento	123
Figura 41. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el tercer momento	124
Figura 42. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para todos los estudiantes del curso de bioestadística I	126
Figura 43. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para todos los estudiantes del curso de estadística para ingenieros	126

Figura 44. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de la primera prueba	137
Figura 45. Respuesta de un estudiante a los ítems 3 y 4 de la primera prueba	138
Figura 46. Respuesta de un estudiante al ítem 6 de la segunda prueba	139
Figura 47. Respuesta de un estudiante al ítem 1 de la tercera prueba	140
Figura 48. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de la primera prueba	143
Figura 49. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de las segunda prueba	143
Figura 50. Respuesta de un estudiante al ítem 8 de la primera prueba	145
Figura 51. Respuesta de un estudiante al ítem 7 de la segunda prueba	146
Figura 52. Respuesta de un estudiante al ítem 12 de la primera prueba	148
Figura 53. Respuesta de un estudiante al ítem 13 de la tercera prueba	149

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Primera prueba	163
Anexo B. Segunda prueba	166
Anexo C. Tercera prueba	169

1. **TÍTULO:**
UN ESTUDIO LONGITUDINAL DEL RAZONAMIENTO BAYESIANO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS*.
2. **AUTOR:**
Cindy Nathalia Morgado Hernández**
3. **PALABRAS CLAVES:**
Datos longitudinales
Razonamiento Bayesiano
Probabilidad condicional
Modelo lineal mixto
4. **RESUMEN:**

En este trabajo se presentan algunos de los resultados obtenidos de una investigación cuyo objetivo es examinar el cambio en el razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que toman uno o dos cursos de probabilidad y estadística.

Para lograr el objetivo propuesto se elaboraron tres pruebas que fueron aplicadas en momentos distintos a estudiantes universitarios de diferentes carreras y diferentes universidades en Bucaramanga, Colombia. Con los resultados de los cuestionarios se realizó un análisis estadístico de los resultados, utilizando el modelo de lineal mixto y un análisis cualitativo que permitió observar la transformación en los niveles de comprensión de los diversos elementos implicados en el razonamiento bayesiano.

Los resultados permitieron observar, entre otras cosas, que si bien los estudiantes responden mejor los problemas bayesianos inmediatamente después de haber estudiado la regla de Bayes y los temas afines, después de un tiempo vuelven a aparecer las malas concepciones y los sesgos detectados previamente en la primera prueba cuando no habían estudiado esos temas. En algunas ocasiones, incluso, desaparecen las buenas intuiciones de las que habían dado muestra como utilización de la regla de tres, por lo que se sugiere una enseñanza que empiece con un profundo tratamiento aritmético asociado a los porcentajes que trate los conceptos asociados con la probabilidad condicional pero desde el punto de vista de razones o proporciones.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Maestría en Educación Matemática. Dr. Gabriel Yáñez Canal

1. TÍTULO:

A LONGITUDINAL STUDY OF COLLEGE STUDENTS BAYESIAN REASONING*.

2. AUTHOR:

Cindy Nathalia Morgado Hernández**

3. KEY WORDS:

Longitudinal data
Bayesian reasoning
Conditional probability
Linear mixed model

4. ABSTRACT

In this paper we present some of the results obtained of an investigation whose objective is to examine the change in the Bayesian reasoning of college students who take one or two probability and statistics courses.

To achieve the objective three questionnaires were developed that were applied at different moments to university students from different areas and different universities in Bucaramanga, Colombia. With the results of the questionnaires conducted a statistical analysis of the results, using the mixed effects model and a qualitative analysis that allowed analyze the transformation observed in the levels of Bayesian reasoning.

Results allowed to observe, among other things, that while students Bayesian problems respond better immediately after studied the Bayes rule, after a while reappear misconceptions and biases detected previously in the first test when they had not studied these topics. Even, Sometimes even disappear good intuitions which had been shown as using the rule of three, so teaching begins with a deep arithmetic processing associated with the percentages concerned concepts associated with probability suggests conditional but from the point of view of reason or proportions.

* Thesis Project

** Faculty of Sciences. Masters in Mathematics Education. Dr. Gabriel Yáñez Canal

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de temas de probabilidad y estadística son reconocidos como fundamentales tanto en la educación básica como en la educación superior. De hecho, y solo para citar un ejemplo representativo, en los estándares curriculares de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), desde su primera edición de 1989 y ratificada en la versión del 2000 se incluyen estos temas. En esta última versión, en el capítulo 3, se incluyen el análisis de datos y la probabilidad como conocimientos que deben adquirir los estudiantes. A nivel universitario, los temas básicos de probabilidad y estadística están presentes en prácticamente todas las carreras.

La comprensión conceptual de los temas básicos de probabilidad y estadística permite hacer inferencia e interpretar los resultados estadísticos, el razonamiento estadístico combina distintos conceptos probabilísticos, este estudio está enfocado en uno de ellos llamado el Teorema de Bayes, el cual es el punto central del razonamiento bayesiano.

El razonamiento bayesiano, matemáticamente hablando, hace referencia al cálculo de probabilidades condicionales inversas mediante el teorema de Bayes, o de probabilidades a posteriori, a partir de probabilidades a priori, y de datos obtenidos experimentalmente. Este cálculo está claramente explícito en el así llamado teorema de Bayes, cuya presentación estándar es de la forma:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum P(B|A_j)P(A_j)} \quad (1)$$

La idea es que la ocurrencia del evento B está condicionado a la realización de algunos de los eventos A_j que se constituyen en una partición del espacio muestral. La idea es que B ocurrió y se indaga por la probabilidad de que haya sido A_i el causante de la ocurrencia de B . Es así que $P(A_i|B)$ es la probabilidad a posteriori en tanto que $P(A_i)$ es la probabilidad a priori, y los valores $P(B|A_i)$ son las verosimilitudes o probabilidad de que la causa de ocurrencia de B haya sido A_i .

La ecuación (1) es la forma más común del teorema de Bayes, y corresponde a la relación entre los siguientes componentes: La partición de A_i , las verosimilitudes $P(B|A_i)$, la probabilidad a posteriori $P(A_i|B)$ y la probabilidad total $P(B)$. Para explicar mejor el teorema se presenta el siguiente ejemplo.

Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina M1?¹

La probabilidad de que la bola defectuosa sea producida por la máquina 1 se denota por $P(M1|-)$; $P(M1)$ y $P(M2)$ son la probabilidad de que pertenezca a la máquina 1 y a la máquina 2 respectivamente; $P(-|M1)$ es la probabilidad de que la máquina 1 produzca una bola defectuosa, en igual forma para M2. Con la información dada en el problema, aplicando el teorema de Bayes se tiene:

$$P(M1|-) = \frac{P(-|M1)P(M1)}{P(-|M1)P(M1) + P(-|M2)P(M2)} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{100} \cdot \frac{3}{5}\right)} = 0,76$$

¹ Tomado de Totahasina (1992)

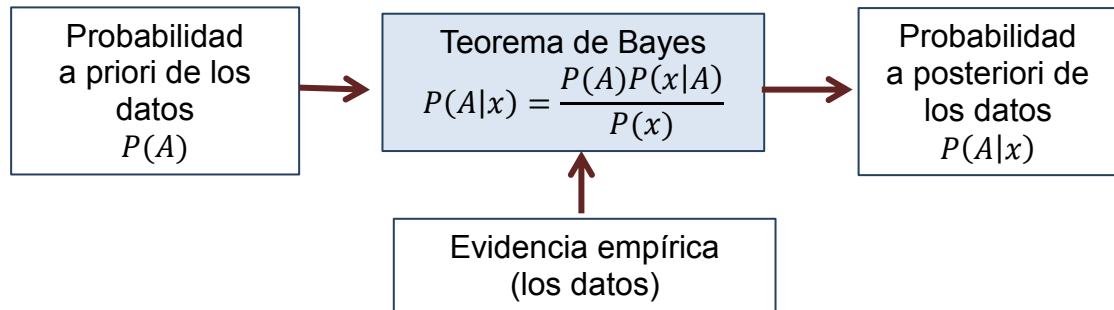
Por lo tanto la probabilidad de que la bola defectuosa extraída haya sido fabricada por la M1 es de 0,76.

El Teorema de Bayes es una herramienta que permite a través de las probabilidades iniciales y de los datos obtenidos experimentalmente, obtener un conocimiento sobre las probabilidades finales. En otras palabras, se puede afirmar que cuando las personas utilizan como método el razonamiento bayesiano inician de un elemento subjetivo mediante el empleo del conocimiento que tienen del problema, es decir, de la percepción a priori de los sucesos, con el fin de asignar una probabilidad inicial sobre una hipótesis H . Luego aparece el elemento objetivo que viene dado por el análisis de datos a través de la combinación de estos dos elementos resulta una probabilidad final o a posteriori.

$$P(H|x) = \frac{P(H)P(x|H)}{P(x)}$$

Donde $P(H)$ es la probabilidad a priori de la hipótesis, $P(x)$ es la probabilidad de x , o sea de los datos, lo que implica que éstos se den por causa de la hipótesis propuesta o sin ella; y $P(x|H)$ es la probabilidad condicional de x dada la hipótesis H , esta probabilidad se conoce como la verosimilitud de producir los datos a la luz de la hipótesis propuesta. A continuación la Figura 1, muestra el proceso que se realiza al analizar datos, utilizando el teorema de Bayes, donde se observa cómo la probabilidad a priori de los datos se ve transformada en una probabilidad a posteriori de los datos.

Figura 1. Actualizando una probabilidad usando el teorema de Bayes



Iversen (1984) menciona que uno de los beneficios de utilizar el enfoque bayesiano es que este puede ser utilizado por aquellos que tienen un conocimiento muy limitado de la estadística, manifestando que son pocas las personas que toman un curso de estadística en su educación de pregrado. A su vez Iversen afirma que: “La inferencia Bayesiana es más natural y las conclusiones son mucho más fáciles de entender” (pág. 75), sugiriendo que el razonamiento bayesiano está orientado al propio proceso de investigación. Quizás Iversen hace referencia a que cuando un investigador inicia el proceso de investigación, necesariamente parte de una incertidumbre inicial o plantea una hipótesis producto del quehacer como profesional. Como paso siguiente de la investigación viene el hecho de recopilar datos y analizarlos con el fin de tomar una decisión sobre la hipótesis que se planteó y reducir la incertidumbre inicial.

A pesar de la gran importancia del razonamiento bayesiano en la personas y en los futuros profesionales existe una tendencia a suprimir o reducir la enseñanza del teorema de Bayes en la educación secundaria y los cursos de análisis de datos a nivel universitario (Moore, 1997 citado por Díaz y de la Fuente, 2006). De otro lado está el hecho de que la enseñanza que se imparte en los cursos de probabilidad y estadística no muestra una introducción intuitiva del Teorema de Bayes, solo se ve este como la aplicación mecánica de una ecuación. Dado que es transcendente que los educadores se esfuercen por comprender y

favorecer la capacidad de los estudiantes para razonar. Nos propusimos realizar una investigación que diera respuesta a la siguiente pregunta: *¿Cómo cambia el razonamiento bayesiano en estudiantes universitarios que toman un curso de probabilidad y estadística?*

Para dar respuesta a la pregunta de investigación llevamos a cabo un estudio longitudinal que pretende caracterizar el cambio en el nivel de razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que toman un curso de probabilidad y estadística. Para resaltar la importancia de los estudios del cambio conceptual a lo largo del tiempo basta citar a Davis (1964):

Producir aprendizaje (es decir, cambio) y la cantidad y tipo de aprendizaje que se produce solo se puede determinar mediante la comparación del estado de un individuo o grupo antes del periodo de aprendizaje con el periodo después del aprendizaje (p.234).

Esta idea de medir el cambio es relevante en la era actual de la investigación educativa (por ejemplo, *A Longitudinal Investigation Of The Development Of College Students' Reasoning About Bivariate Data During An Introductory Statistics Course* de Zieffler, 2006).

Para cumplir con el objetivo general de caracterizar el cambio en el nivel de razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que toman un curso de probabilidad y estadística, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar e implementar instrumentos para evaluar el razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que toman un curso de estadística.
- Modelar estadísticamente el cambio del razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que toman un curso de estadística.

- Describir el razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios que hayan tomado un curso de estadística.

A continuación se describen brevemente los nueve capítulos que componen este documento.

En el segundo capítulo se presentan los elementos matemáticos o ideas básicas que caracterizan el razonamiento bayesiano. Posteriormente se presentan algunos antecedentes de investigaciones dirigidas a determinar las concepciones entre los estudiantes respecto a la probabilidad condicional y al teorema de Bayes. En el capítulo 3 se aborda el modelo lineal mixto, seguido el capítulo 4 donde se describe la metodología utilizada. En el capítulo 5 se muestra el análisis a priori de las pruebas, los capítulos 6, 7, 8 y 9 comprenden el análisis de resultados de esta investigación. Finalmente se presentan las conclusiones y las referencias utilizadas en esta investigación.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. REFERENTES MATEMATICOS

A continuación se presentan los fundamentos matemáticos asociados con la probabilidad y, en particular, con la probabilidad condicional. La presentación comprende definiciones y teoremas que se ven involucrados en el razonamiento bayesiano, el cual tiene como punto central el teorema de Bayes.

Para introducir el teorema de Bayes, son necesarias algunas ideas previas, entre ellas la de espacio de probabilidad y medida de probabilidad, la probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total.

2.1.1. Espacio de probabilidad, medida de probabilidad y sus axiomas básicos

Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, Λ, P) donde Ω es un conjunto finito no vacío que llamamos el *espacio muestral*. Λ es un álgebra definida en Ω (subconjuntos de partes de Ω que contiene a Ω y que es cerrada con la unión finita y con el complemento) cuyos elementos los llamamos *eventos*, y P es una medida de probabilidad definida en Λ , es decir, es una función definida en Λ con valores reales que satisface:

$$i) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Lambda$$

$$ii) P(\Omega) = 1$$

$$iii) \text{ Si } A \text{ y } B \text{ son eventos disyuntos, } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2.1.2. Probabilidad condicional.

En el razonamiento bayesiano, tanto las probabilidades a posteriori como las verosimilitudes se definen en términos de la probabilidad condicional.

Definición: Sean A y B eventos y $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B está definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(AyB)}{P(B)} \quad (1)$$

Donde B es el evento condicionante y A es el evento condicionado. Despejando el numerador se obtiene la regla del producto para la probabilidad de la realización conjunta de dos eventos.

$$P(AyB) = P(A|B)P(B)$$

2.1.3. Independencia

La independencia se relaciona con la probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro y se define de la siguiente manera:

A y B son independientes si y sólo si $P(A|B) = P(A)$ que por (1) se convierte en la siguiente igualdad $P(AyB) = P(A)P(B)$

Algunos investigadores como Tarr y Lannin (2005), recomiendan la introducción del concepto de independencia a través de la definición de probabilidad condicional, debido a que las representaciones de independencia son un caso especial de probabilidad condicional y es más intuitivo para los estudiantes.

2.1.4. Teorema de probabilidad total.

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ sucesos mutuamente excluyentes² y exhaustivos³ y B cualquier evento, entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \quad (2)$$

Este resultado permite hallar la probabilidad marginal de un evento en función de sus probabilidades conjuntas con un conjunto de eventos que agotan todas las posibilidades de un experimento aleatorio.

2.1.5. El teorema de Bayes

Tenemos un suceso B (los datos) y queremos saber si ha sido producido por una de las causas $A_1, A_2, \dots, A_n$ (una serie de hipótesis científicas rivales son las posibles causas de B). Se conocen las probabilidades $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$, es decir la probabilidad inicial o a *priori* de cada una de las hipótesis rivales, así como las probabilidades $P(B|A_1), P(B|A_2), \dots, P(B|A_n)$, o *verosimilitud* de obtener los datos B dependiendo de cuál de las hipótesis es cierta. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ (probabilidad final o a *posteriori* de que la hipótesis A_i sea la verdadera, una vez que hemos obtenido los datos B) viene dada por la siguiente expresión:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)} \quad (3)$$

Donde;

$P(A_i)$: Probabilidad a priori

$P(B|A_i)$: Probabilidad condicional

² Se dice que son sucesos excluyentes si estos no ocurren juntos a la vez, es decir su intersección es el conjunto vacío.

³ Se dice que son sucesos exhaustivos cuando al menos uno de ellos ocurre siempre. En otras palabras, deberá cumplirse que la suma de las probabilidades de todos los sucesos deberá ser igual a 1.

$$\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) = P(B): \text{Probabilidad Total}$$

$P(A_i|B)$: Probabilidad a posteriori

Demostración.

Por definición de probabilidad condicional se tiene que $P(A_i | B)$ es igual a:

$$\frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Aplicando, en el numerador la regla de la multiplicación donde, $P(A_i \cap B) = P(B|A_i)P(A_i)$ y el denominador el teorema de probabilidad total (2) se obtiene la siguiente expresión para el teorema de Bayes.

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades a posteriori en función de las probabilidades a priori y de las verosimilitudes. Este resultado traducido en términos de funciones de densidad de variables aleatorias conduce al método de inferencia bayesiana tan utilizado hoy en día (Yáñez, 2003 p.26).

2.2. INVESTIGACIONES PREVIAS

A continuación se presenta una revisión de las investigaciones sobre el razonamiento bayesiano, que de alguna manera justifican la investigación a realizar.

2.2.1. Antecedentes psicológicos

Las primeras investigaciones que se realizaron sobre el razonamiento bayesiano fueron acerca de las intuiciones y concepciones de las personas, estos primeros trabajos fomentaron el interés para el inicio de más estudios sobre los conceptos asociados al teorema de bayes.

Phillips y Edwards

Uno de los primeros estudios lo realizaron Phillips y Edwards (1966) quienes investigaron acerca del razonamiento bayesiano usando problemas de urnas, Su estudio consistió en mostrar a las personas 2 bolsas opacas e iguales con contenidos diferentes: una contiene 70 bolas rojas y 30 bolas azules; la otra contiene 30 rojas y 70 azules. Para diferenciar las bolsas, a la primera bolsa se le llama la bolsa roja y a la segunda, la bolsa azul. El experimentador lanzaba una moneda para elegir en secreto una de las bolsas de la cual empezaba a extraer bolas con reemplazo. Después de cada extracción el sujeto evaluaba la probabilidad de que una de las dos bolsas (por ejemplo, la roja) haya sido la elegida. Estos investigadores compararon la conducta de las personas con la solución obtenida utilizando el teorema de Bayes, describiendo que los sujetos dieron una probabilidad lejos de la probabilidad que proporciona la regla de Bayes. Estudios posteriores (Edwards, 1968), llevaron a Edwards a afirmar que las personas son bayesianos conservadores, es decir, las personas estimaban probabilidades a posteriori de menor valor a las obtenidas con la regla de Bayes.

Kahneman y Tversky

Kahneman y Tversky (1972) estudiaron las estrategias usadas por los sujetos cuando se les pedía que estimasen la probabilidad de un determinado acontecimiento, encontrando evidencia que las personas ignoran o menosprecian significativamente las probabilidades previas o tasas básicas de frecuencia, aún cuando se les presenten explícitamente, lo cual los llevó a afirmar: “el hombre no es que sea un bayesiano conservador sino que nos es bayesiano en absoluto” (p.46). Uno de los problemas famosos planteado por Kahneman y Tversky (1972) relacionados con el olvido de la tasa base es el problema del taxi:

Un carro se ve envuelto en un accidente nocturno de pega y corre. Hay dos compañías de taxis que operan en la ciudad, la compañía de taxis verdes y la compañía de taxis azules. Se sabe que el 85% de los taxis en la ciudad son verdes y 15% son azules. Un testigo, que había observado el accidente, identificó el carro como azul. La corte probó la confiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que existían en la noche del accidente y concluyó que el testigo identificó correctamente cada uno de los dos colores el 80% de las veces y se equivocó el 20% de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el carro envuelto en el accidente haya sido azul? (p.156)

La respuesta dada por muchas personas es que la probabilidad es 0,80, es decir, la confiabilidad del testigo, sin tener en cuenta para nada la distribución de los taxis en la ciudad, lo que condujo a los investigadores a formular el olvido de la tasa base. Desde otro punto de vista más formal, y como se verá más adelante en el trabajo de otros investigadores, se podría pensar que las personas confunden la probabilidad condicional requerida con su inversa, confusión que se conoce como la falacia de condicional inversa.

En un experimento posterior de Kahneman y Tversky (1973), los participantes leían una descripción del perfil de una persona perteneciente a una población compuesta por 30 ingenieros y 70 abogados. Luego se les pedía que evaluaran

la probabilidad de que cada descripción correspondiese a un ingeniero. Los juicios de los participantes menospreciaron las probabilidades previas de cada categoría, es decir la proporción existente de profesionales de ambos tipos y se limitaban a asociar la descripción con el prototipo de persona que se asocia corrientemente con un ingeniero o con un abogado. El tamaño del efecto de estas probabilidades previas fue estadísticamente significativo pero pequeño y, en todo caso, muy lejos de lo que debiera haber ocurrido si los participantes hubieran usado el teorema de Bayes.

De los anteriores estudios psicológicos relacionados con el razonamiento bayesiano, se concluye la insensibilidad a las probabilidades previas en las personas. Los investigadores encontraron que las personas tendían a calcular la probabilidad de un evento utilizando reglas no estadística tales como la heurística de representatividad, por medio de la cual se evalúa la probabilidad de un evento por el grado de representatividad que se presume tiene respecto al proceso que lo genera, y se manifiesta en el razonamiento bayesiano en el olvido de las probabilidades a priori.

2.2.2. Antecedentes didácticos

En este apartado, se muestran algunas investigaciones didácticas alrededor de la probabilidad condicional y el teorema de Bayes. Se consideran trabajos didácticos las que detectan dificultades en los estudiantes al enfrentarse a problemas que involucran el razonamiento bayesiano. Seguido se muestran algunos estudios realizados alrededor de la influencia que tiene el formato de los problemas en el razonamiento de las personas.

2.2.2.1. Dificultades en la resolución de problemas

En cuanto a las dificultades que los estudiantes presentan referentes a la probabilidad condicional y el Teorema de Bayes se han desarrollado un gran número de estudios.

Falk

Falk (1986), aborda tres sesgos o malas concepciones relacionados con las probabilidades condicionales. Uno es la confusión de la inversa, también llamada falacia de la condicional transpuesta. Cuando las personas presentan este problema no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional $P(A|B)$ y $P(B|A)$, y una posible explicación dada por el autor de la prevalencia de este error, es que el lenguaje usado en el enunciado de los problemas de probabilidad no es preciso. Falk observó este error en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de que una persona tenga una enfermedad cuando el test de diagnóstico le ha dado positivo, con la probabilidad de obtener un test de diagnóstico positivo dado que tiene la enfermedad. Además, trata el problema de la interpretación de la condicionalidad como causalidad que es cuando las personas interpretan la probabilidad condicional $P(A|B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante es la causa y el condicionado es la consecuencia. Falk (1989) en su estudio planteó a sus estudiantes el experimento de extracción sin reposición de dos bolas de una urna que contiene dos bolas blancas y dos bolas negras al preguntar: ¿cuál es la probabilidad de haber obtenido una bola blanca en la primera extracción cuando se sabe que en la segunda extracción se obtuvo una bola blanca?, encontró que gran parte de los estudiantes responden que es $\frac{1}{2}$ porque la segunda bola extraída no influye sobre la primera extracción. A esta dificultad de no creer que un evento que ocurre después pueda condicionar o afectar la probabilidad de ocurrencia de un evento que es anterior en el tiempo Falk la denominó falacia del eje temporal.

Pollatsek, Well, Konold y Hardiman

Pollatsek y cols. (1987) analizan algunas de las variables que pueden influir en la resolución de los problemas de probabilidad condicional: el formato en que se da el enunciado (con probabilidades o porcentajes) y el contexto. El porcentaje de respuestas correctas fue similar para los problemas dados en probabilidades y los dados en porcentajes. Si el factor causal se hacía presente, el formato de porcentajes genera mayor número de respuestas correctas que en la versión probabilística.

Su investigación se realizó con estudiantes de psicología que no habían tomado un curso de estadística y algunas de sus conclusiones fueron:

1. Las personas sin instrucción en probabilidad son capaces de comprender el concepto de probabilidad condicional y su dirección.
2. Varias características de los datos sugieren que una de las mayores fuentes de error es la confusión entre las probabilidades condicionales y las probabilidades conjuntas. Se podría especular que algunas personas, en lugar de poseer dos conceptos diferenciados, pueden tener un concepto que es la amalgama de los dos.
3. Aunque se dieron los sesgos causales, no lo fueron de forma dominante. Más aún, los datos dan a entender que éstos están muy relacionados con la redacción del problema: se dan más en los problemas con porcentual.
4. Los autores consideran que sus resultados se corresponden con la hipótesis de que las dificultades con las probabilidades condicionales son a menudo causadas por errores de translación del lenguaje natural al algebraico.

Totohasina y Gras

Totohasina (1992) después de haber enseñado a los estudiantes la probabilidad condicional y el teorema de Bayes, les propuso el siguiente problema de Bayes:

Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?
- b. Si la bola es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

El objetivo de la investigación fue estudiar la forma cómo los estudiantes utilizaban los diagramas de árbol para resolver el problema. De un total de 65 alumnos que participaron en la evaluación, 26 construyeron un árbol directo, con lo que se resaltó claramente el aspecto secuencial en los experimentos (cálculo de la probabilidad directa); 9 de estos estudiantes llegaron a construir correctamente al árbol. Otros 7 alumnos usaron el diagrama en árbol, pero no contemplaron el aspecto secuencial y no llegaron a asignar correctamente las probabilidades. En esta investigación se concluyó que el uso de un diagrama de árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema ordenado en el tiempo.

Gras y Totohasina (1995) utilizaron entrevistas y las siguientes preguntas directas:

Para calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$, ¿Debe ocurrir el suceso B cronológicamente antes que el suceso A? Sí__ No__ No sabe__

Para calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$, ¿Debemos asumir que el suceso B es la causa y el suceso A el efecto o la consecuencia de B? Si___
No___ No sé___ (p.55)

Su investigación fue con 75 estudiantes de secundaria entre 17 y 18 años, quienes ya habían recibido enseñanza experimental sobre probabilidad condicional. Entre las ideas erróneas que reflejaron los estudiantes sobre las probabilidades condicionales Figuran:

- Una concepción cronológica, donde los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A .
- Una concepción causal, donde los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia, la cual se manifiesta cuando utilizan el teorema de Bayes.

Tarr y Lannin

Tarr y Lannin (2005), en su estudio sobre la probabilidad condicional e independencia con estudiantes de bachillerato, demuestran que a través del contexto de modelos de urna con y sin reemplazo, se puede evaluar el razonamiento de los estudiantes en probabilidad condicional. El tipo de investigación realizada por estos autores fue el estudio de casos (15 estudiantes), donde enfrentaban a cada estudiante a cuatro ítems de independencia y cuatro de probabilidad condicional, de manera alternada, con el fin de explorar el pensamiento a través de cuatro niveles que muestran el desarrollo del pensamiento subjetivo al razonamiento cuantitativo formal. Los niveles que consideran son: el nivel 1 está asociado con el pensamiento

subjetivo: tiende a emitir juicios subjetivos, creen que pueden controlar los resultados de un evento; el nivel 2 es la etapa de transición entre el pensamiento subjetivo y el pensamiento cuantitativo informal: algunas veces hacen uso apropiado de la información cuantitativa, formulando juicios de probabilidad condicional, pero se distraen con información irrelevante; el nivel 3 es el que involucra uso de pensamiento cuantitativo informal: han ganado conocimiento sobre el papel de las cantidades en los juicios de probabilidad condicional, pero la mayoría de veces no asignan probabilidades numéricas, sino frecuencias relativas o algunas proporciones para determinar probabilidades condicionales en situaciones con o sin reemplazo, y el nivel 4 incorpora el razonamiento cuantitativo formal: pueden asignar probabilidades numéricas cuando interpretan situaciones de probabilidad y reflejan en sus respuestas cierta sofisticación en el pensamiento probabilístico.

Los investigadores concluyeron que es pertinente y necesario que en el currículo de matemáticas de la escuela se presenten de la mano estos dos temas (probabilidad condicional e independencia), ya que ambos son conceptos claves en el desarrollo del pensamiento probabilístico. Además, recomiendan la introducción del concepto de independencia través de la definición de probabilidad condicional, debido a que las representaciones de independencia son un caso especial de probabilidad condicional y es más intuitiva para los estudiantes.

Díaz y de la Fuente

Díaz y de la Fuente (2007a), describen el proceso de elaboración de un cuestionario que permita observar las dificultades de 414 estudiantes de psicología, sobre la probabilidad condicional y el razonamiento bayesiano, después de haberse enseñado los temas. Concluyeron que el desempeño de los estudiantes en la prueba fue bastante bueno, en particular observaron un alto porcentaje de respuestas correctas en problemas que involucraban la

probabilidad total y de Bayes. Sin embargo, también se observó en los estudiantes algunos sesgos (falacia de la condicional transpuesta, falacia eje de tiempo, falacia de la tasa base), como algunos casos relacionados con componentes matemáticos de la comprensión de la probabilidad condicional, por lo que sugieren la necesidad no solo de reforzar el estudio de la probabilidad condicional en la enseñanza a nivel universitario, sino también un cambio de enfoque en la enseñanza, presentando problemas reales y proponiendo actividades interactivas y el uso de representaciones como Tablas de doble entrada y diagramas de árbol, y la implementación de la tecnología para facilitar el aprendizaje.

Díaz y de la Fuente (2007b) describen la validación de un cuestionario destinado a evaluar el razonamiento probabilístico condicional (RPC), para lo cual realizaron tres estudios, en el primero de ellos con 591 alumnos de psicología, los cuales cursaban la asignatura análisis de datos, con edades entre 18 y 20 años. En este primer estudio se analiza la validez del constructo analizando las estructuras de las respuestas al cuestionario mediante un análisis factorial por componentes principales. En el segundo estudio se seleccionaron 112 sujetos del estudio 1, a los cuales se les aplicó dos veces el estudio de la fiabilidad del test siendo la puntuación media en el cuestionario en este grupo similar al del resto de la muestra, y la prueba T de diferencia de medias independientes no significativa ($p=0,22$). El intervalo de tiempo entre las dos aplicaciones del cuestionario fue de cuatro semanas. En el estudio 3, participaron dos grupos de alumnos de primer curso de psicología del estudio 1, algunos de los cuáles ya habían estudiado la probabilidad condicional y otros no ($n=177$, grupo sin instrucción; $n=208$, grupo con instrucción). Las investigadoras deseaban determinar la validez de criterio del cuestionario, considerándose el criterio dicotómico haber estudiado o no la probabilidad condicional en el curso al que se le aplicó el cuestionario. Respecto a la fiabilidad y validez del cuestionario todos los coeficientes obtenidos indicaron una alta fiabilidad. Como

aporte final sugieren que la estadística debería enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento.

Díaz, Ortiz y Serrano

Díaz, Ortiz y Serrano (2007) analizan teóricamente los pasos necesarios en la aplicación del teorema de Bayes en una muestra de 414 estudiantes de psicología, confirmando los resultados obtenidos en Díaz y de la Fuente (2007a) sobre la misma muestra y adicionando que la mayor frecuencia de error se da en la confusión de probabilidad condicional y probabilidad conjunta. Además, a muchos estudiantes les fue difícil diferenciar entre probabilidades simples, compuestas y condicionales, o confundieron una probabilidad condicional $P(A|B)$ con su inversa $P(B|A)$, dificultades ya señaladas en las investigaciones previas sobre probabilidad condicional.

El olvido de la fórmula de Bayes también ocasionó un número importante de errores, pero su número es pequeño, en comparación con los causados por identificación de datos y errores en los conceptos que intervienen.

2.2.2.2. Formatos y representación de la información

Se han propuesto varias estrategias para impedir la creación de sesgos como los que se describieron sobre la probabilidad condicional, como el uso de formatos de frecuencia que reemplacen la información probabilística.

Gigerenzer, Hoffrage y Sedlmeier

Gigerenzer (1993) sugiere que la dificultad en la resolución de problemas referidos al teorema de Bayes desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. En esta investigación analiza las respuestas en la que cambia el enunciado de los problemas en términos de frecuencia y en los que observa un aumento notable de los razonamientos válidos de tipo bayesiano.

Gigerenzer y Hoffrage (1995) muestran que los algoritmos bayesianos son más simples en formatos de frecuencia que en formatos de probabilidad, analizando varias soluciones a problemas bayesianos. Los autores hallaron que cuando se da la información en formatos de frecuencia, el 50% de los participantes dedujeron los algoritmos bayesianos. Continuando su investigación Sedlmeier y Gigerenzer (2001) ponen a prueba un método de enseñanza del razonamiento bayesiano, capacitando a la personas mediante un programa de computador, con el fin de construir representaciones de frecuencia en lugar de introducir la probabilidades de la regla de Bayes, concluyendo que los cálculos bayesianos son más fáciles de realizar con frecuencias naturales que con las probabilidades.

Por lo tanto, Gigerenzer sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas bayesianos cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Llama a este formato frecuencias naturales porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de muestreo natural a lo largo de nuestra experiencia.

Basándose en las investigaciones anteriores realizadas por Gigerenzer y Hoffrage, donde se mostró que el rendimiento bayesiano mejora si la información se presenta en frecuencias naturales, Chapman y Liu (2009), aplican un cuestionario a 342 estudiantes, replicando el efecto de Gigerenzer y Hoffrage. Estos investigadores encontraron que uno de los beneficios que producían las presentaciones de los problemas en frecuencias naturales, era un

alto puntaje en cálculo. Sin embargo, añaden que incluso la comprensión y manipulación de frecuencias naturales requiere un cierto umbral de capacidad de cálculo, y que los efectos beneficiosos de la presentación en frecuencia natural no pueden ser tan generales como se creía anteriormente.

Martignon y Wassner

Martignon y Wassner (2002) investigan la influencia de diferentes representaciones en la probabilidad condicional. Este estudio fue realizado con estudiantes entre 15 y 19 años, a quienes se les enseñó, mediante el computador, las diferentes representaciones. Los efectos de este estudio fueron medidos mediante test. Los resultados mostraron que los grupos a los que se les enseñó con representaciones frecuenciales tenían una mejor comprensión de los problemas de probabilidad condicional, por lo que plantean el uso de una representación especial en forma de diagrama en árbol, junto con las frecuencias naturales para enseñar la resolución de problemas que involucren el Teorema de Bayes. Estos autores indican que, mientras que los problemas de probabilidad que los estudiantes encuentran en la vida diaria son concretos y numéricos, los instrumentos de cálculo que les presentamos (por ejemplo el teorema de Bayes) son altamente formalizados. En esta misma dirección están las investigaciones de Cosmides y Tobby (1996) y Hoffrage, et. al (2002).

Yáñez

Yáñez (2001), en su análisis de todos los casos de problemas binarios (dos eventos y sus complementos) de probabilidad condicional, mostrando su solución algebraica completa y las forma de resolverlos usando las Tablas y los árboles, concluye que el único registro que permite resolver totalmente cualquier problema de probabilidad condicional es el algebraico, las Tablas y los arboles tienen aplicaciones limitadas. Sin embargo, sugiere que en la resolución

de problemas de probabilidad condicional es necesaria la coordinación de varios registros de representación semióticos para aprovechar las ventajas organizativas y operativas que poseen. Además afirma que la dificultad de un problema de probabilidad condicional es mayor cuanto mayor sea el número de probabilidades condicionales que contiene en su parte informativa.

Yáñez (2003) en un estudio con seis estudiantes universitarios de ingeniería, sobre el efecto que tiene un proceso de enseñanza y aprendizaje fundamentado en el enfoque frecuencial de la probabilidad mediante el uso del computador acerca de la comprensión de la probabilidad condicional, concluyó que aunque los estudiantes resolvieron exitosamente algunos problemas de probabilidad condicional a través de la simulación, incluso respondiendo preguntas que requerían del teorema de Bayes y del teorema de probabilidad total, su uso no fue adoptado consistentemente, prefiriendo la utilización de otras representaciones en particular, la Tabla de frecuencias o de probabilidades.

Lonjedo, Huerta y Cerdán

En sus investigaciones exploraron las actuaciones de los estudiantes al resolver un problema de probabilidad condicional (Lonjedo y Huerta, 2004, 2006, 2007a, 2007b y Lonjedo, 2007). Lo primero que hicieron los investigadores fue recoger, de los enunciados de los problemas, expresiones del lenguaje natural no simbólico que inducen a interpretaciones no deseadas en los datos y en las preguntas, con el fin de eliminar la ambigüedad de los textos de los problemas de probabilidad condicional y ayudar al éxito de los participantes en el problema. También investigaron sobre la influencia del formato de presentación del problema en la resolución del mismo y encontraron que los problemas presentados en términos de frecuencias fueron más fáciles que los de probabilidad y porcentajes, aún para estudiantes en niveles educativos básicos; estos resultados concuerdan con los de Gigerenzer y Hoffrage (1995), pero agregan que en los problemas en términos de frecuencias cuando se da un

dato que se refiere a probabilidades condicionales es mejor darlo como porcentaje ya que así es posible diferenciarlo de las frecuencias absolutas, o naturales, mientras se realiza su lectura.

Cerdán, Lonjedo y Huerta (2009) partiendo de las soluciones de 165 estudiantes entre 15 y 16 años sobre un tipo particular de problemas que Yáñez (2001) llama de Nivel 0 y corresponden aquellos que en su parte informativa no presentan información condicional, analizan las dificultades y las relacionan con su estructura (por ejemplo los problemas que se formulan con dos marginales y una intersección, el hecho de que estén directamente relacionadas o no entre ellas, influyen en la respuesta al problema) y con el contexto (una situación particular, ejemplo contexto social y el contexto de salud) en el que están formulados. Concluyendo que cuando los problemas se formulan proporcionando los mínimos datos necesarios para encontrar la respuesta a lo que se pregunta, entonces la influencia tanto de la estructura de los datos como del contexto en el que se formulan surgen como factores influyentes en las dificultades de los problemas. Sugiriendo que a la hora de diseñar secuencias de enseñanza o trabajos de investigación relacionados con la resolución de problemas de probabilidad condicional, los factores de contexto y de estructura no deberían ser variables despreciables sino que, por el contrario, deberían tenerse en cuenta a la luz de los datos aportados por su investigación.

Rátiva y Lozano

Rátiva y Lozano (2010) estudian el efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas y estrategias que utilizan los estudiantes para resolver un problema binario de probabilidad condicional. Para esto se realizaron dos estudios en los que participaron 432 estudiantes de diversas carreras de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

En el primer estudio se analizó el efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas, cuyos resultados mostraron que para problemas en los que se da información condicional hay efecto tanto del formato como del tipo de información, sin embargo para aquellos que no contienen información condicional el formato no tuvo un efecto significativo.

El segundo estudio trató las dificultades que se presentan a la hora de resolver un problema binario de probabilidad condicional, entre las que se destacaron: confusión de una probabilidad conjunta y una condicional, el uso de las representaciones, el lenguaje utilizado para expresar la condicionalidad, la falacia de la condicional transpuesta.

Concluyeron que para problemas en los que se da información condicional hay efecto tanto del formato como del tipo de información, sin embargo para aquellos que no contienen información condicional el formato no tuvo un efecto significativo.

A manera de conclusiones

Los resultados de las investigaciones presentadas permiten extraer unas ideas básicas que deben tenerse en cuenta a la hora de diseñar estudios didácticos de investigación relacionados con la probabilidad condicional.

1. Los alumnos en su mayor parte no tienen en cuenta las probabilidades a priori en el cálculo de la probabilidad inversa (Kahneman y Tversky, 1972; Phillips y Edwards 1996).
2. La dificultad también está influida por la confusión del papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional o falacia de la condicional transpuesta, es decir confunden $P(A|B)$ con la $P(B|A)$ (Falk,

1986). Investigaciones posteriores de Ojeda (1994), Yáñez (2003) y Díaz y de la Fuente (2006) también dan cuenta de ello.

3. La falacia del eje de tiempo descrita por Falk (1986) como la dificultad de creer que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) dan cuenta de esta dificultad como la concepción cronológica de la probabilidad condicional $P(B|A)$, donde el evento B siempre precede al suceso A. Esta confusión se ha detectado también en la investigación de Díaz (2007).
4. La investigación reciente sugiere que la aplicación del teorema de Bayes es más sencilla cuando la información se da en frecuencias naturales (Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Gigerenzer y Sedlmeier, 2001).
5. Las mayores fuentes de error es la confusión entre las probabilidades condicionales y las probabilidades conjuntas (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987)
6. Los trabajos de Gigerenzer y Hoffrage (1995) Sedlmeier y Gigerenzer (2001), Martignon y Wassner (2002) y Hoffrage, et. al (2002), muestran que cuando la información de un problema de probabilidad condicional se presenta en frecuencias absolutas o naturales el porcentaje de buenas respuestas crece significativamente. Sin embargo, el trabajo de Chapman y Liu (2009) circunscriben y limitan la aplicación y el éxito de estos hallazgos.

En su conjunto, las investigaciones sobre el razonamiento bayesiano han examinado muchas cuestiones sobre los conceptos erróneos y las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentarse a problemas de probabilidad

condicional y el teorema de Bayes, y se han propuesto métodos para la enseñanza y aprendizaje de estas ideas que, es necesario decirlo, no han sido validados suficientemente (Shaughnessy, 1997; Yáñez, 2003; Díaz y de la Fuente, 2005; Contreras, 2009)

EL MODELO LINEAL MIXTO PARA DATOS LONGITUDINALES

La investigación realizada pretendía conocer la forma como evoluciona el razonamiento bayesiano a lo largo de un semestre académico en estudiantes que realizan un curso de estadística básica en el cual se estudia el teorema de Bayes. Si bien el estudio es, fundamentalmente, de carácter cualitativo ya que pretende conocer la forma como los estudiantes confrontan situaciones problemáticas relacionadas con la probabilidad condicional y el teorema de Bayes en diferentes momentos del semestre académico, también se abordó desde el punto de vista estadístico, ajustando un modelo lineal que explicara el nivel del razonamiento, representado en el puntaje obtenido en las pruebas realizadas, en función del tiempo y de la metodología utilizada. Si bien podría incluirse la variable grupos (con referencia al grupo del mismo profesor al cual pertenecía el estudiante). La variable profesor es sinónimo de la asignatura impartida, de su metodología, de la secuencia como se presentaron los temas y del texto guía utilizado.

El modelo que se pretende ajustar debe explicar el comportamiento de los puntajes a través del tiempo (modelo longitudinal) y explicar el valor de los coeficientes que acompañen la variable tiempo en el modelo que mejor se ajuste en términos de la variable predictora (grupo o profesor).

Una ventaja de los modelos lineales mixtos es el no requerir la independencia de los valores de la variable respuesta que sí la exigen los modelos lineales tradicionales, lo que permite superar la correlación que existe entre las puntuaciones de los estudiantes en cada una de las pruebas. Los modelos lineales de efecto mixto, o de diseños anidados o jerárquicos, descomponen la

variabilidad en términos de las diferencias existentes entre los individuos y las diferencias existentes entre las observaciones de cada individuo.

Otra ventaja de los modelos lineales de efecto mixto es que permiten trabajar con datos con información faltante. Por ejemplo, en la presente investigación muchos estudiantes no asistieron a todas las pruebas realizadas: algunos presentaron la primera prueba, pero no la segunda, otros presentaron las dos primeras y no la tercera, la primera y la tercera pero no la segunda, o puede ser que por las bajas notas cancelaran el curso y solo presentaron la primera prueba. Luego, se tiene gran cantidad de observaciones no balanceadas (no iguales en número) en el tiempo en cada uno de los grupos, la metodología de efectos mixtos permite modelar la evolución en el razonamiento bayesiano, a pesar de las anteriores dificultades.

Partiendo de Zieffler (2006) se expondrá la teoría del modelo lineal mixto.

El modelo lineal mixto combina dos modelos de regresión, a dos niveles, para explicar la variabilidad y dos tipos de parámetros los parámetros de los efectos fijos y los parámetros de los efectos aleatorios.

Supongamos que tenemos N individuos (nivel 1) anidados en J grupos (Nivel 2). El concepto de anidación hace referencia, en nuestro caso, al hecho de que los estudiantes pertenecen a grupos que tienen los mismos profesores, lo que se traduce en que los estudiantes forman grupos naturales que definen la variable profesor.

En el nivel 1 se define una ecuación de regresión para cada grupo, siendo las unidades de este nivel los individuos. Si el modelo consta de una variable dependiente Y , y de la variable tiempo como única variable predictora, la ecuación del nivel 1 se expresa por

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}(\text{tiempo})_j + \varepsilon_{ij}$$

Donde y_{ij} es la variable respuesta del i -ésimo sujeto (nivel 1) en el tiempo j -ésimo, β_{0i} es el intercepto o valor inicial del i -ésimo individuo. β_{1i} es el coeficiente de regresión asociado a la variable predictora tiempo y ε_{ij} es el error aleatorio asociado al i -ésimo sujeto en el momento j , el cual $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_Z^2)$.

En estos modelos adquiere importancia la significancia de la varianza σ_Z^2 , es indicativa de que los puntajes de los estudiantes varían con el tiempo y que se hace necesario incluir predictores en el modelo.

En el nivel 2, los coeficientes de regresión del nivel 1 actúan como variables dependientes que han de ser explicadas por variables predictoras del nivel 2. En el caso de tener una sola variable predictora Z , las ecuaciones del nivel 2 se expresan como sigue.

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j}$$

Donde β_{0i} y β_{1i} son parámetros para el intercepto y la pendiente del i -ésimo sujeto que actúan de variables dependientes en las ecuaciones anteriores. La idea es explicar las diferencias que existen entre sujetos a partir de la variable predictora Z .

γ_{00} y γ_{10} son las correspondientes medias poblacionales de estos parámetros. γ_{01} y γ_{11} son los correspondientes coeficientes de regresión sobre la variable predictora Z asociados a los parámetros β_{0i} y β_{1i} . u_{0j} y u_{1j} son las desviaciones aleatorias, tanto respecto del intercepto como de la pendiente fija, en una y otra

ecuación del nivel 2 que se asume siguen una distribución normal multivariada de media el vector 0 y con cierta matriz de correlación que da cuenta de la varianza de estas desviaciones y de la correlación existente entre ellas.

Sustituyendo las ecuaciones de los parámetros estimados en la primera ecuación obtenemos:

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + \gamma_{10}tiempo_j + \gamma_{11}Z_jtiempo_j + u_{0j} + u_{1j} tiempo_j + \varepsilon_{ij}$$

Donde $u_{1j} tiempo + \varepsilon_{ij}$ es la parte aleatoria que puede variar de grupo a grupo y $\gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + \gamma_{10}t_j + \gamma_{11}Z_jt_j$ es la parte fija que no varía a través de los grupos.

METODOLOGÍA

4.1. PANORAMA GENERAL DEL ESTUDIO

Se desarrolla un estudio longitudinal en el primer semestre académico del año 2013, con 164 estudiantes de universidades diferentes, de los cuales 102 estudiantes por primera vez toman una asignatura donde el contenido es probabilidad y estadística básica, y 62 estudiantes que por segunda vez toman una asignatura de estadística. Es de resaltar, que la asignatura en cada una de las universidades de los estudiantes que por primera vez toman una asignatura de probabilidad y estadística recibe nombres diferentes (Bioestadística I, Estadística para Ingenieros) y la asignatura de estadística que toman los estudiantes por segunda vez recibe el nombre de Estadística Inferencial. La duración de los cursos fue de 16 semanas.

Para esta investigación se plantea el diseño de tres pruebas para evaluar el razonamiento bayesiano, las cuales fueron aplicados en diferentes momentos durante el primer semestre académico del año 2013. Con los resultados obtenidos en las diferentes pruebas se obtuvieron puntajes, los cuales se analizan estadísticamente para describir el cambio en el razonamiento bayesiano.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

Conjunto 1. Los sujetos son 102 estudiantes, de los cuales 51 son estudiantes de Ingeniería Ambiental, que cursan la asignatura estadística para ingenieros

en el cuarto semestre de su carrera. Los restantes 51 estudiantes pertenecen a la Facultad de Salud (Terapia Ocupacional, Fonoaudiología y Bacteriología), quienes cursan la asignatura de bioestadística I en el cuarto semestre de su carrera. Estos estudiantes no habían estudiado previamente el teorema de Bayes, tema que hace parte del contenido de la asignatura.

Los 51 estudiantes de Ingeniería Ambiental estaban distribuidos en dos grupos de estadística para ingenieros: 32 estudiantes en el grupo A1 y 19 estudiantes en el grupo A2; cada curso tenía dos clases en la semana con una intensidad 1 hora y 30 minutos. En estos grupos un mismo profesor les impartía la asignatura, quien utilizaba como libro guía para sus clases: *Introducción a la probabilidad y estadística de Mendenhall, 2002*. La metodología de enseñanza del profesor fue magistral: básicamente exponía los temas en el tablero, realizaba algunos ejemplos y ejercicios del libro. Los estudiantes se limitan a escuchar y sólo en ocasiones, intervenían preguntando. El profesor en algunas ocasiones solicitaba conformar grupos de máximo tres estudiantes para resolver los ejercicios presentes en el libro, los cuales debían entregar como taller de clase y otras veces quedaba como taller para la casa. Además por decisión del profesor no se dio ningún valor cuantitativo a las pruebas aplicadas para esta investigación, estas no formaban parte de la nota para aprobar el curso.

Los 51 estudiantes de la Facultad de Salud estaban conformados por dos grupos de bioestadística I, 38 estudiantes en el grupo B1 y 13 estudiantes en el grupo B2; cada curso tenía una clase en la semana con una intensidad 2 horas y 30 minutos. En estos grupos un mismo profesor les impartía la asignatura, no utilizaba un libro guía en particular. La metodología de enseñanza del profesor fue magistral básicamente exponía los temas en el tablero, realizaba muchos ejercicios, basándose en las siguientes referencias bibliográficas: *Walpole (1999, Spiegel (2006), Moore y Comas (2004) y Wackerly, Dennis, Mendenhall*

et al. (2002). Los estudiantes eran bastante participativos cuando el profesor empezaba a resolver los ejercicios en el tablero, dando ideas de cómo resolverlos, pero nunca pasaban al tablero a resolver alguno. El profesor mediante un grupo en *Facebook* compartía talleres para que los estudiantes resolvieran en casa. Además por decisión del profesor se dio valor cuantitativo a las pruebas aplicadas para esta investigación, formaban parte de la nota de pruebas cortas.

Conjunto 2. Los sujetos son 62 estudiantes de Ingeniería Industrial, quienes cursan la asignatura de estadística inferencial en el cuarto semestre.

Los 62 estudiantes de Ingeniería Industrial están conformados por dos grupos de estadística inferencial, 16 estudiantes del grupo C1 y 46 estudiantes del grupo C2. En estos grupos un mismo profesor les impartía la asignatura, quien utilizaba como libro guía para sus clases: *Estadística aplicada a los negocios y la economía de Marchal y Wathen, 2008*. La metodología de enseñanza del profesor fue magistral: básicamente exponía los temas en el tablero, realizaba algunos ejemplos y ejercicios del libro, en ocasiones dejaba ejercicios como trabajo individual para la casa que debían ser entregados. En clase los estudiantes se limitan a escuchar y sólo en ocasiones, intervenían preguntando. Además por decisión del profesor no se dio ningún valor cuantitativo a las pruebas aplicadas para esta investigación, éstas no formaban parte de la nota para aprobar el curso.

Esta muestra corresponde a los estudiantes que iniciaron un segundo curso, por lo tanto ya han visto el teorema de Bayes en el semestre anterior.

4.3. DISEÑO DE LAS PRUEBAS

Se diseñaron tres pruebas con el fin de evaluar el razonamiento bayesiano de los estudiantes, se fijó esta cantidad de pruebas teniendo en cuenta que el semestre académico de las universidades es de 16 semanas. Además porque no se pretendía cansar a los estudiantes evaluándolos en todo momento. Aproximadamente se aplicó una prueba cada 5 semanas. El procedimiento para el diseño de las pruebas consistió en elaborar un listado con la descomposición del constructo teorema de Bayes, teniendo en cuenta lo siguiente:

De la definición de probabilidad condicional se tiene que $P(A_i | B)$ es igual a:

$$\frac{P(A_i y B)}{P(B)}$$

Aplicando, en el numerador la regla de la multiplicación donde, $P(A_i y B) = P(B|A_i)P(A_i)$ y el denominador el teorema de probabilidad total (TPT) se obtiene la siguiente expresión para el teorema de Bayes.

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}$$

El pensamiento bayesiano se fundamenta en el teorema o regla de Bayes que, a su vez, está constituido por los siguientes elementos: Probabilidad condicional, probabilidad marginal, teorema de probabilidad total y regla del producto.

Los problemas que se diseñaron para cada una de las pruebas fueron con la intención de evaluar cada uno de los anteriores elementos, naturalmente también se diseñaron problemas referentes al teorema de Bayes.

4.3.1. Aplicación de la primera prueba.

Para la primera prueba se tomaron 14 ítems del cuestionario diseñado de Díaz (2007). La aplicación de la primera prueba se realizó en la tercera semana de clase en ambos cursos. Los profesores estaban enseñando los temas previstos en el primer corte en el contenido del curso

Los temas que hacían parte del contenido en el curso de estadística para ingenieros, vistos antes de la aplicación de la primera prueba fueron: ¿Qué es la Estadística?, medibilidad y variabilidad, muestreo y recolección de datos, tipos de variables, gráficas estadísticas, distribuciones de frecuencia e histogramas y medidas de tendencia central. Los temas en los cursos de bioestadística I fueron: Introducción a la bioestadística, medidas de resumen, distribuciones de frecuencia agrupadas, gráficos estadísticos, Tablas de contingencia, coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis. Por otro lado, los temas en los cursos de estadística inferencial se relacionaban con la estimación de parámetros: Estimadores puntuales e intervalos de confianza de una media, intervalos de confianza de una proporción, factor de corrección para una población finita, cálculo del tamaño de muestra adecuado.

Los ítems en esta prueba son: 8 ítems correspondientes a la probabilidad condicional, un ítem correspondiente al teorema de probabilidad total, un ítem correspondiente al teorema de Bayes, un ítem correspondiente a una probabilidad marginal y 3 ítems correspondientes a probabilidades conjuntas.

42 estudiantes de estadística para ingenieros presentaron esta prueba, 51 de bioestadística I y 58 de estadística inferencial también lo hicieron.

4.3.2. Aplicación de la segunda prueba.

La segunda prueba se aplicó en la décimo segunda y constó de 13 ítems, los cuales fueron semejantes a los propuestos en la primera prueba. Los cursos de

estadística para ingenieros no habían visto probabilidad condicional ni los temas afines al teorema de Bayes, se encontraban terminando los temas previstos para el primer corte e iniciando con probabilidades de eventos, reglas de probabilidad y probabilidad condicional. Por otro lado los cursos de bioestadística I ya habían estudiado los temas previstos para el segundo corte que correspondía a todo un tópico completo de probabilidad. Luego ya habían terminado de estudiar todos los elementos conceptuales presentes en el teorema de Bayes.

En los cursos de estadística para ingenieros, el profesor enseñaba los siguientes temas: medidas de posición y diagramas de caja, la desviación estándar, regresión lineal, regresión logarítmica, probabilidades de eventos, reglas de probabilidad y probabilidad condicional. Los temas en los cursos de bioestadística I fueron: definición de probabilidad, enfoques para asignar la probabilidad, reglas para calcular probabilidades, teorema de Bayes y principios de conteo. Los temas en los cursos de estadística inferencial se relacionaban con las pruebas de hipótesis asociadas a una muestra: ¿Qué es la prueba de hipótesis?, procedimiento para probar una hipótesis, prueba de hipótesis de una y dos colas, pruebas para la media de una población, valor p en la prueba de hipótesis, prueba para la media poblacional, pruebas relacionadas con proporciones y error tipo II.

Los ítems se distribuyeron de la siguiente forma: 4 ítems correspondientes a la probabilidad condicional, un ítem correspondiente al teorema de probabilidad total, 5 ítems correspondientes al teorema de Bayes, un ítem correspondiente a una probabilidad marginal y 2 ítems correspondientes a probabilidades conjuntas.

42 estudiantes de bioestadística I, presentaron esta prueba, 50 de estadística para ingenieros y 46 de estadística inferencial también lo hicieron.

4.3.3. Aplicación de la tercera prueba.

La tercera prueba se aplicó en la última semana del semestre en todos los cursos y se compone de 14 ítems, los cuales se diseñaron teniendo en cuenta solamente los siguientes tres elementos: La probabilidad condicional, el teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes. La dificultad de esta prueba fue mayor dado que los estudiantes ya habían visto en los cursos estos temas.

En los cursos de estadística para ingenieros, el profesor terminaba de enseñar los siguientes temas: teorema de Bayes, eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes, variables aleatorias, distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta: binomial, Poisson, y distribuciones de variables continuas: Cauchy, distribución normal y lognormal. Los temas de los cursos de bioestadística I para el tercer corte fueron: variable aleatoria, distribuciones de probabilidad discreta y distribuciones de probabilidad continua (distribución normal). Los temas en los cursos de estadística inferencial se relacionaban con pruebas de hipótesis para dos muestras: Muestra independientes, pruebas de proporciones de dos muestras comparación de medias poblacionales con desviaciones estándares desconocidas, comparación de medias poblacionales con desviaciones estándares desiguales, muestras dependientes, comparación de muestras dependientes e independientes y análisis de la varianza.

Los ítems elaborados para esta prueba se distribuyeron de la siguiente forma: 6 ítems correspondientes a la probabilidad condicional, 2 ítems correspondientes al teorema de probabilidad total y 6 ítems correspondientes al teorema de Bayes.

34 estudiantes de bioestadística I, presentaron esta prueba, 51 de estadística para ingenieros y 46 de estadística inferencial también lo hicieron.

ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PRUEBAS

En este capítulo se muestra el análisis a priori de cada uno de los ítems, teniendo en cuenta las posibles dificultades que se pueden presentar y que han sido descritas en las investigaciones previas. Las categorías que se consideran para presentar los ítems de cada prueba son con base en los elementos que componen el teorema de Bayes, los cuales se pretendían evaluar, en la Tabla 1 se muestra el orden como se presentarán los ítems para el análisis de estos elementos.

Tabla 1. Elementos que se evalúan en las diferentes pruebas aplicadas

	Probabilidad marginal, conjunta y condicional
	Teorema de probabilidad total
	Teorema de bayes

5.1. Análisis a priori de los ítems de la primera prueba

CONTENIDO: Probabilidad marginal, conjunta y condicional.

El siguiente problema comprende los ítems 1, 2, 3 y 4 donde se presenta una Tabla de doble entrada o de contingencia 2x2, la cual da en forma resumida la distribución de frecuencias absolutas de una muestra de datos. El contenido de los ítems es: un ítem de una probabilidad marginal (ítem 1), un ítem de una probabilidad conjunta (ítem 2) y dos ítems de probabilidad condicional (3 y 4).

En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados:

	menos de 55 años	más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

Ítem 1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 2. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 3. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 4. Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Yáñez (2001) menciona que la Tablas de contingencia son piezas importantes al momento de organizar información, así como para resolver problemas de probabilidad condicional. En una Tabla de contingencia las casillas centrales se encuentran las frecuencias absolutas, los totales marginales y el gran total, que permiten establecer las razones para determinar probabilidades marginales, conjuntas y condicionales.

Tabla 2. Formato típico de la Tabla de doble entrada 2x2

	<i>B</i>	<i>No B</i>	<i>Total</i>
<i>A</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a+b</i>
<i>No A</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c+d</i>
<i>Total</i>	<i>a+c</i>	<i>b+d</i>	<i>a+b+c+d</i>

Yáñez (2001) describe que la operación de realizar una probabilidad condicional sobre la Tabla es de manera directa. Por ejemplo, en la Tabla dada en esta primera prueba nos dicen: Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?, se obtiene dividiendo la casilla cruzada de tiene más de 55 años y ha sufrido un ataque al corazón (es 75) por la marginal de tiene más de 55 años (es 350). Por lo

tanto para responder a los ítems de probabilidad condicional (ítems 3 y 4) se debe interpretar que la probabilidad condicional es igual al cociente entre una intersección y una probabilidad marginal. Por ejemplo, $P(A/B) = \frac{a}{a+c}$

Además, este tipo de problemas puede presentar la dificultad descrita por Falk (1996), la cual es confundir $P(B|A)$ con $P(A|B)$, es decir, intercambiar los términos de una probabilidad condicional y confundir las dos frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos como lo encontrado por Batanero, Estepa, Godino y Green (1996).

El siguiente problema corresponde a una probabilidad conjunta que se calcula con la regla del producto para sucesos independientes (Díaz, 2007).

Ítem 9. A un grupo de alumnos de un colegio se les evalúa en matemáticas e inglés. La proporción de alumnos que aprueban matemáticas es del 80% y la proporción de alumnos que aprueba inglés es del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

Para resolver este ítem hay que utilizar la propiedad de independencia de dos sucesos, que dice que la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades simples de cada uno de los sucesos:

$$P(M \cap I) = P(M) * P(I) = (0,8)(0,7) = 0,56$$

A continuación, se muestra otro ítem correspondiente a una probabilidad conjunta, pero en este caso para sucesos dependientes.

Ítem 11. En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y, de ellos, el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?

En el ítem 11 los sucesos son dependientes, pues si una persona no miente, tampoco miente sobre cosas importantes (Contreras, 2011). Denotando, I : mienten sobre cosas importantes y por M : Mienten. Aplicando la regla del producto para el caso de sucesos dependientes, tenemos:

$$P(I) = P(M \cap I) = P(M)P(I|M)$$

$$P(I) = (0,91) * (0,36) = 0,327$$

El ítem 5 es de opción múltiple y corresponde a una probabilidad condicional donde se debe identificar una intersección y una probabilidad marginal con formato de porcentajes.

Ítem 5. La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es 10.3%. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

- a. **0,8/10,3=0,0776, probabilidad 7,76 %**
- b. $10,3 \times 0,8 = 8,24$, probabilidad 8,24%
- c. 0,8 %

Con este ítem se pretende evaluar la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, error descrito por Falk (1986) y Totohasina (1992). Si denotamos, $+$: Al suceso “mujer con una mamografía positiva” y C : Al suceso “mujer con cáncer de pecho”. Se debe obtener la $P(C|+)$.

De los datos se tiene que: $P(+) = 0,103$ y $P(C \cap +) = 0,008$. Luego $P(C|+) = \frac{0,8}{10,3} = 0,0776$

El distractor (b) pretende identificar a las personas que asumen el cálculo de una condicional como el producto en lugar del cociente que define la probabilidad condicional. Si se elige la opción (c) se asume la probabilidad conjunta como respuesta confundiéndola con la probabilidad condicional.

El siguiente ítem, también corresponde a una probabilidad condicional.

Ítem 6. Hemos lanzado dos dados y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Para resolver este ítem es necesario restringir el espacio muestral ya que solo se debe tomar como casos posibles el conjunto $\{(2,6)(3,4)(4,3)(6,2)\}$. Luego se debe obtener $P(\neq 6|prod12)$, donde $\neq 6$: se denota diferente de 6 y $prod12$: se denota el producto sea 12. Se tiene que $P(\neq 6 \cap prod12) = 2$ y $P(prod12) = 4$. Por lo tanto:

$$P(\neq 6|prod12) = \frac{P(\neq 6 \cap prod12)}{P(prod12)} = \frac{2}{4}$$

Algunos de los errores que se pueden presentar en este ítem son: la falla en restringir el espacio muestral o calcularlo incorrectamente, el no identificar los casos favorables y posibles dentro del espacio muestral; calcular la probabilidad marginal en lugar de una condicional.

El siguiente ítem de opción múltiple es una situación condicional en la cual no se pueden realizar cálculos, solo es una apreciación intuitiva sobre probabilidades condicionales en contextos médicos.

Ítem 7. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

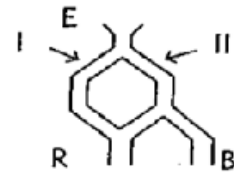
- a. Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
- b. Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.**
- c. Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

Este ítem puede evidenciar la creencia de infalibilidad que muchas personas asumen respecto a los test. Precisamente esta creencia puede ser la causante de la creencia de que las probabilidades condicional directa e inversa hacen referencia a lo mismo.

El ítem 10 corresponde a una probabilidad condicional en un experimento simple consecutivo.

Ítem 10. Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal 1?

- a. $1/2$
- b. $1/3$
- c. $2/3$
- d. No se puede calcular



En este ítem se puede cometer la falacia del eje de tiempo descrita por Falk (1986), sino se tiene en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior. Además se debe tener en cuenta que si la bola pasa por el canal II puede caer por

R o por B, y si pasa por I, solo puede caer por R. El espacio muestral de este experimento sería: $\{(I, R), (II, R), (II, B)\}$ siendo: $P(I, R) = \frac{1}{2}$, $P(II, R) = \frac{1}{4}$, $P(II, B) = \frac{1}{4}$.

Por tanto la probabilidad condicionada viene dada por:

$$P(I|R) = \frac{P(I, R)}{P(R)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Si se elige la opción (a) se comete la “falacia del eje de tiempo”, ya que se piensa que no se puede calcular la probabilidad de un suceso condicionado a otro que ocurra anteriormente. Si se elige la opción (b) se está tomando el suceso condicionado incorrecto, ya que se estará calculando la probabilidad de que habiendo salido la bola por R, la bola haya pasado por II, la cual viene dada por:

$$P(II|R) = \frac{P(II, R)}{P(R)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Si se elige la opción (d) se comete la “falacia del eje de tiempos”, ya que se piensa que no se puede calcular la probabilidad de un suceso condicionado a otro que ocurra anteriormente.

Los ítems 13 y 14 corresponden a dos probabilidades condicionales en un contexto de urna sin reposición.

Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin devolver la primera a la urna.

Ítem 13. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N_2/N_1)$
a. $1/2$ b. $1/6$ c. $1/3$ d. $1/4$

Ítem 14. ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar?

P (N1/ N2)

a. 1/ 3

b. No se puede calcular

c. 1/ 6

d. 1/ 2

Con el ítem 13 se pretende saber la capacidad de resolver esta situación identificando que se trata de un contexto de urna sin reposición. Es decir, una vez sacada la bola negra de la urna se restringe el espacio muestral a una bola negra y dos blancas, por lo que la probabilidad de obtener una bola negra es igual a $1/3$. Si se elige la opción (a) no se está teniendo en cuenta la extracción de la bola negra por lo que no modifica el espacio muestral; si se elige la opción (b) está hallando una intersección y no una probabilidad condicional: $(1/2) (1/3)=1/6$ y si elige la opción (d) está calculando una probabilidad simple, en donde se considera que los casos favorables se reducen a la bola que se saca y no a las que tienen color negro: $(1/4)$.

El ítem 14 es una situación donde se presenta un cambio del eje de tiempo. Para resolverlo se debe tener en cuenta que si se extrajo una bola negra en segundo lugar esta queda eliminada para la primera extracción, por lo tanto se restringe el espacio muestral de la primera extracción. Si no se tiene en cuenta lo anterior se cae en la falacia del eje temporal descrita por Falk (1986). La solución parte de que al conocer que la segunda bola es negra el espacio muestral se restringe a $\{(n, n); (b_1, n); (b_2, n)\}$ y por tanto $P(n, n) = \frac{1}{3}$.

Si se elige la opción (b) se está dando a entender que no se ha asumido la medida de probabilidad como medida de certeza o que ésta se relaciona con aspectos fuera del ámbito matemático, si elige la opción (c) está aplicando la regla del producto y no una probabilidad condicional $(1/2) (1/3)=1/6$ y si elige la opción (d) está calculando una probabilidad simple, ya que calcula la probabilidad de obtener una bola negra en la primera extracción y no tiene en cuenta la segunda

extracción

CONTENIDO: Teorema de probabilidad total

El siguiente ítem corresponde a un problema donde es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total.

Ítem 8. En una ciudad el 60 % son hombres y el 40 % mujeres. El 50 % de los hombres y el 25 % de las mujeres fuman. Si se escoge una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

Para resolver el anterior ítem se debe distinguir que se trata de dos eventos dependientes por lo cual se deben calcular probabilidades compuestas, haciendo uso de la regla del producto para eventos dependientes. Además, se debe identificar correctamente cuáles son las probabilidades condicionales necesarias para resolver las probabilidades compuestas. Denotando, F : fumar, M : mujer, H : hombre y aplicando la fórmula de probabilidad total tenemos que:

$$P(F) = P(H \cap F) + P(M \cap F)$$

$$P(F) = P(H)P(F|H) + P(M)P(F|M)$$

$$P(F) = (0,6 * 0,5) + (0,4 * 0,25) = 0,4$$

CONTENIDO: Teorema de Bayes

Con el siguiente ítem se pretende saber si el estudiante logra resolver un problema donde debe aplicarse el teorema de Bayes.

Ítem 12. Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

Para este ítem se debe reconocer la necesidad del uso del teorema de Bayes. Denotando por (–): defectuosa, M1: máquina 1 y M2: máquina 2. Utilizando el teorema de Bayes se obtiene

$$P(M1|–) = \frac{P(–|M1)P(M1)}{P(–|M1)P(M1) + P(–|M2)P(M2)}$$

$$P(M1|–) = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{100} \cdot \frac{3}{5}\right)} = 0,76$$

En la siguiente Tabla resumimos el contenido de los ítems, diferenciando el formato de cada uno y la principal característica o la situación que se plantea en cada problema.

Tabla 3. Resumen de los ítems de la primera prueba

Ítems	Contenido	Formato	Característica
3	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Tabla 2x2- Situación médica
4	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Tabla 2x2- Situación médica
5	Probabilidad Condicional	Porcentaje	Una intersección y una marginal (situación médica)
6	Probabilidad Condicional	Frecuencias	En una situación sin reemplazo (datos, experimento único)
7	Probabilidad Condicional	Lenguaje Natural	Situación médica condicional
10	Probabilidad Condicional	Frecuencias	En un experimento simple consecutivo, un condicionamiento por un suceso posterior

13	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Situación de muestreo sin Reposición
14	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Situación de muestreo sin Reposición (se invierte el eje de tiempo)
2	Probabilidad Conjunta	Frecuencias	Tabla 2x2- Situación medica
9	Probabilidad Conjunta	Porcentaje	Sucesos independientes
11	Probabilidad Conjunta	Porcentaje	Sucesos dependientes
12	Teorema de Bayes	Porcentajes	Regla de Bayes
8	Teorema de Probabilidad Total	Porcentaje	Regla de la probabilidad total en sucesos dependientes
1	Probabilidad Marginal	Frecuencias	Tabla 2x2- Situación medica

5.2. Análisis a priori de los ítems de la segunda prueba

CONTENIDO: Probabilidad marginal, conjunta y condicional

El siguiente problema comprende los ítems 1, 2 y 3, se presenta una Tabla de doble entrada o de contingencia 2x2, la cual da en forma resumida la distribución de frecuencias absolutas de una muestra de datos. El contenido de los ítems es: un ítem de una probabilidad marginal (ítem 1), un ítem de una probabilidad conjunta (ítem 2) y un ítem de probabilidad condicional (3).

Responda los ítems del 1 al 3 con base en la siguiente información. En un centro médico se han observado a 250 personas para estudiar si el hábito de fumar tiene relación con los trastornos bronquiales, obteniéndose los siguientes resultados:

	Fuma	No	Total
--	------	----	-------

		Fuma		Completa la anterior Tabla y responde. Si escogemos al azar una persona: Ítem 1. ¿Cuál es la probabilidad de tener trastornos bronquiales? Ítem 2. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga trastornos y fume? Ítem 3. ¿Cuál es la probabilidad de que fume si sabemos que tiene trastornos?
Padece trastornos			50	
No padece trastornos	60			
Total		100	250	

Como se observa se presenta una Tabla de doble entrada con casillas vacías, esta se puede completar fácilmente, quedando de la siguiente manera:

	Fuma	No Fuma	Total
Padece trastornos	90	60	150
No padece trastornos	60	40	100
Total	150	100	250

Completándola se pueden resolver los ítems planteados sin mayores inconvenientes.

En este tipo de problemas se puede presentar la dificultad descrita por Falk (1996), es decir, confundir $P(B|A)$ con $P(A|B)$.

El siguiente problema corresponde a una probabilidad conjunta que se obtiene haciendo uso de la regla del producto en caso de sucesos dependientes.

En una universidad terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 50% de Letras (sólo hay estas carreras). Se sabe que el 20% estudian arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Si escogemos al azar un estudiante:

Ítem 4 ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera?

En este ítem los sucesos son dependientes. Sea, (T) : Terminó, A : Arquitectura, C : Ciencia y L :Letras.

$$\begin{aligned}P(T \text{ y } A) &= P(A)P(T|A) \\&= 0.2 \times 0.05 \\&= 0.01\end{aligned}$$

El ítem 6 corresponde a una probabilidad condicional donde se debe identificar una intersección y una probabilidad marginal.

Ítem 6. En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios es 0,10. Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad es 0,25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas coronarios y de obesidad es 0,05. Calcular la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios si está obesa.

Con este ítem se pretende evaluar la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, error descrito ampliamente en la literatura (Falk, 1986, Totahasina, 1992, Yáñez, 2001). Si denotamos, por $P(C)$: probabilidad de problemas coronarios, por $P(O)$: probabilidad de problemas de obesidad y por $P(C \text{ y } O)$: probabilidad de problemas coronarios y de obesidad. Se debe obtener la $P(C|O)$.

De los datos se tiene que: $P(C) = 0.10$ $P(O) = 0.25$ y $P(C \text{ y } O) = 0.05$ Luego,

$$P(C|O) = \frac{P(C \text{ y } O)}{P(O)} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5} = 0.2$$

El siguiente ítem de opción múltiple es una situación condicional donde se deben identificar las probabilidades que se dan en las diferentes opciones.

Ítem 11. Imagina que tienes una muestra de 100.000 personas elegidas al azar. Imagina que 5 de cada 1000 está deprimida. Supón que una prueba de depresión da positivo en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 3 de cada 100 personas sanas. Si D significa depresión y + significa prueba positiva, entonces:

- a. $P(D) = 0.005$; $P(D|+) = 0.99$; $P(+|D) = 0.03$
- b. $P(D) = 0.0005$; $P(+|D) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$
- c. $P(D) = 0.005$; $P(D|+) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$
- d. **$P(D) = 0.005$; $P(+|D) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$**

Este ítem puede evidenciar la falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1986) o la dificultad de distinguir correctamente el evento condicionante y el condicionado.

El ítem 13 corresponde a una probabilidad condicional en un experimento simple.

Ítem 13. Se extraen tres cartas una tras otra, sin reemplazo, de una baraja de poker ordinaria. La baraja de poker está formada por 52 cartas repartidas en cuatro palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Calcule la probabilidad de que ninguna sea trébol.

Este es un problema que se resuelve con el teorema de probabilidad total extendido a tres eventos que son, además, negativos:

$P(\sim \text{Trébol}_1 \text{ y } \sim \text{Trébol}_2 \text{ y } \sim \text{Trébol}_3)$ que es igual a:

$$P(\sim \text{Trébol}_1) \cdot P(\sim \text{Trébol}_2 | \sim \text{Trébol}_1) \cdot P(\sim \text{Trébol}_3 | \sim \text{Trébol}_2 \text{ y } \sim \text{Trébol}_1) = \frac{39}{52} * \frac{38}{51} * \frac{37}{50} = 0.41$$

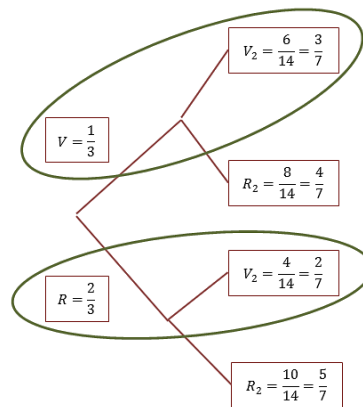
CONTENIDO: Teorema de probabilidad total

El ítem 7 corresponde a un problema de urna donde es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total.

Ítem 7. Una caja contiene 4 bolas verdes y 8 rojas. Se saca una bola al azar y se devuelve a la caja junto con otras dos del mismo color. Si ahora se saca al azar por segunda vez una bola, halle la probabilidad de que la segunda bola sea verde.

Para este ítem se debe distinguir que los dos sucesos son dependientes por lo tanto se debe identificar cuáles son las probabilidades condicionales necesarias y hacer uso de la regla del producto para sucesos dependientes de la siguiente manera: $P(V_2) = P(V_2) \cdot P(V_2|V_1) + P(R_1) \cdot P(V_2|R_1) = ?$ Empleando el diagrama de árbol para la solución se tendría:

Figura 2. Diagrama de árbol para la solución del ítem 7 de la segunda prueba



Luego,

$$P(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{1}{3} = 0.333$$

CONTENIDO: Teorema de Bayes

Con los siguientes ítems se pretende saber si el estudiante logra resolver problemas donde debe aplicarse el teorema de Bayes.

En una universidad terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 50% de Letras (sólo hay estas carreras). Se sabe que el 20% estudian arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Si escogemos al azar un estudiante:

Ítem 5. Si el estudiante ya ha terminado la carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Arquitectura?

Para el ítem 5, sea: $P(T)$: Término la carrera, A : Arquitectura, C : Ciencia y L : Letras. Se pregunta por: $P(A|T) = ?$ Luego, aplicando Bayes se tiene:

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|C)P(C) + P(T|L)P(L)}$$

$$P(A|T) = \frac{0.2 \times 0.05}{(0.2 \times 0.05) + (0.3 \times 0.1) + (0.5 \times 0.5)}$$

$$P(A|T) = 0.03448$$

Ítem 8. Las probabilidades de que un artículo proceda de una fábrica A o de una B son 0,6 y 0,4, respectivamente. La fábrica A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,01, y la B, con probabilidad 0,05. Se observa un artículo y resulta defectuoso. Calcula la probabilidad de que provenga de la fábrica A.

Para el ítem 8, sea D : Defectuoso y $\sim D$: No sea Defectuoso, se pregunta por $P(A|D) = ?$ Luego aplicando Bayes se tiene:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

$$P(A|D) = \frac{0.01 \times 0.6}{(0.01 \times 0.6) + (0.05 \times 0.4)}$$

$$P(A|D) = 0.230$$

Ítem 9. Se sabe que 100 de cada 10000 personas está enferma. De cada 100 personas enfermas, el test será positivo en 80 de ellas. De cada 9900 personas sanas el test saldrá positivo en 950 de ellas. El test resulta positivo en 103 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que estas personas estén realmente enfermas?

Del ítem 9, se tiene lo siguiente: La probabilidad de seleccionar una persona enferma es $P(E) = \frac{100}{10000}$, la Probabilidad de seleccionar una persona sana $P(S) = \frac{9900}{10000}$, probabilidad de que el test de positivo en una persona enferma $P(+|E) = \frac{80}{100}$ y probabilidad de que el test de positivo en una persona sana $P(+|S) = \frac{950}{9900}$. Aplicando Bayes se tiene:

$$P(E|+) = \frac{P(+|E) * P(E)}{P(+|E) * P(E) + P(+|S) * P(S)}$$

$$P(E|+) = \frac{\frac{80}{100} * \frac{100}{10000}}{\frac{80}{100} * \frac{100}{10000} + \frac{950}{9900} * \frac{9900}{10000}}$$

$$P(E|+) = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{125} + \frac{19}{200}} = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{103}{1000}}$$

$$P(E|+) = \frac{8}{103}$$

El problema dice que el test resulta positivo en 103 personas, luego la probabilidad de que estén realmente enfermas es:

$$\frac{8}{103} * 103 = 8$$

Ítem 10. A un congreso asisten 100 personas, de las cuales 65 son hombres y 35 son mujeres. Se sabe que el 10% de los hombres y el 6% de las mujeres son especialistas en computación. Si se selecciona al azar a un especialista en computación ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

En el ítem 10, denotando la probabilidad de seleccionar un hombre $P(H) = 0.65$, la probabilidad de seleccionar una mujer $P(M) = 0.35$, la probabilidad de seleccionar un especialista en computación dado que es hombre $P(E|H) = 0.1$ y la probabilidad de seleccionar un especialista en computación dado que es mujer $P(E|M) = 0.06$. Luego aplicando la regla de Bayes se tiene:

$$P(M|E) = \frac{P(M) * P(E|M)}{P(M) * P(E|M) + P(H) * P(E|H)}$$

$$P(M|E) = \frac{0.35 * 0.06}{0.35 * 0.06 + 0.65 * 0.1}$$

$$P(M|E) = \frac{0.021}{0.086}$$

$$P(M|E) = 0.24$$

Ítem 12. Una empresa que fabrica camisetas posee dos máquinas, A y B, que producen el 55% y el 45% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. De las camisetas producidas por la máquina A, el 3% son defectuosas y de las camisetas producidas por la máquina B el 5% son defectuosas. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido una camiseta defectuosa?

Del ítem 12, se tiene lo siguiente:

Probabilidad de seleccionar la maquina A: $P(A) = 0.55$,

La probabilidad de seleccionar la maquina B: $P(B) = 0.45$

La probabilidad de seleccionar una camiseta defectuosa dado que fue producida por A: $P(D|A) = 0.03$ y la probabilidad de seleccionar una camiseta defectuosa dado que fue producida por B: $P(D|B) = 0.05$

Luego aplicando la regla de Bayes para encontrar la probabilidad de que sea de la máquina A dado que resulto defectuosa es:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) * P(A)}{P(D|A) * P(A) + P(D|B) * P(B)}$$

$$P(A|D) = \frac{0.03 * 0.55}{0.03 * 0.55 + 0.05 * 0.45}$$

$$P(A|D) = \frac{11}{26} = 0.42$$

Igualmente aplicando la regla de Bayes para encontrar la probabilidad de que sea de la máquina B dado que resulto defectuosa es:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) * P(B)}{P(D|A) * P(A) + P(D|B) * P(B)}$$

$$P(B|D) = \frac{0.05 * 0.45}{0.03 * 0.55 + 0.05 * 0.45}$$

$$P(B|D) = \frac{23}{39} = 0.58$$

Luego la máquina que tiene la mayor probabilidad de haber producido una camiseta defectuosa es máquina B.

Con los anteriores ítems en distintos tipos de formato (porcentajes, decimales, frecuencias) en que se presentan se debe reconocer la necesidad del uso del teorema de Bayes.

En la siguiente Tabla resumimos el contenido de los ítems, diferenciando el formato de cada uno y la principal característica o la situación que se plantea en cada problema.

Tabla 4. Resumen de los ítems de la segunda prueba

Ítems	Contenido	Formato	Característica
3	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Tabla 2x2 Incompleta- Situación médica
6	Probabilidad Condicional	Decimales	Una intersección y una marginal (situación médica)
11	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Situación condicional médica
13	Probabilidad Conjunta	Frecuencias	En un experimento simple realizar un probabilidad conjunta extendida
2	Probabilidad Conjunta	Frecuencias	Tabla 2x2 Incompleta- Situación médica
4	Probabilidad Conjunta	Porcentajes	Sucesos dependientes
5	Teorema de Bayes	Porcentajes	Regla de Bayes
8	Teorema de Bayes	Decimales	
9	Teorema de Bayes	Frecuencias	
10	Teorema de Bayes	Porcentajes y Frecuencias	
12	Teorema de Bayes	Porcentajes	
7	Teorema de Probabilidad Total	Frecuencias	Regla de la probabilidad total en sucesos dependientes en una situación de muestreo con Reposición
1	Probabilidad Marginal	Frecuencias	Tabla 2x2 Incompleta- Situación médica

5.3. Análisis a priori de los ítems de la tercera prueba

CONTENIDO: Probabilidad marginal, conjunta y condicional

Los siguientes ítems corresponden a probabilidades condicionales donde se debe identificar una intersección y una probabilidad marginal.

Responda los ítems del 1 al 2 con base en la siguiente información. La probabilidad de que un vuelo programado salga a tiempo es de 0.83; la probabilidad de que llegue a tiempo es de 0.82, y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es de 0.78.

Ítem 1. Si 100 aviones salen a tiempo de una terminal área ¿Cuántos de estos aviones aproximadamente llegarán a tiempo?

Ítem 2. Si 100 aviones llegan a tiempo de una terminal área ¿Cuántos de estos aviones aproximadamente salieron a tiempo?

Con este ítem se pretende evaluar la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, error descrito por Falk (1986) y Totohasina (1992). Denotando como L : Llega a Tiempo y S : Sale a Tiempo. Se debe obtener la $P(L|S)$ para el ítem 1.

De los datos se tiene que: $P(S) = 0.83$ y $P(L \text{ y } S) = 0.78$.

Luego,

$$P(L|S) = \frac{P(L \text{ y } S)}{P(S)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.93$$

Para el ítem 2 se debe obtener la $P(S|L)$. De los datos se tiene que: $P(L) = 0.82$ y $P(L \text{ y } S) = 0.78$. Luego,

$$P(S|L) = \frac{P(L \text{ y } S)}{P(L)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

Se puede dar que las personas que asuman el cálculo de una condicional como el producto en lugar del cociente que define la probabilidad condicional.

El siguiente problema comprende los ítems 3 y 4 de probabilidad condicional, se presenta una Tabla de doble entrada o de contingencia 2x3, la cual da en forma

resumida la distribución de frecuencias absolutas de una muestra de datos. El contenido de los ítems es: un ítem de una probabilidad marginal (ítem 1), un ítem de una probabilidad conjunta (ítem 2) y dos ítems de probabilidad condicional (3 y 4).

Responda los ítems 3 y 4 con base en la siguiente información. En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial y el hábito de fumar, se reúnen los siguientes datos para 180 individuos:

	No fumadores	Fumadores Moderados	Fumadores Empedernidos
Con Hipertensión	21	36	30
Sin Hipertensión	48	26	19

Si elegimos al azar una de estas personas:

Ítem 3. Sabiendo que la persona escogida es fumador empedernido, ¿Cuál es la probabilidad de que sufra de hipertensión?

Ítem 4. Sabiendo que la persona escogida no sufre de hipertensión, ¿Cuál es la probabilidad de no sea fumador?

Como se afirmó anteriormente se podrá realizar los ítems planteados sobre la Tabla de manera directa, para lo cual se debe interpretar que la probabilidad condicional es igual al cociente entre una intersección y una probabilidad marginal.

Por ejemplo, $P(A|B) = \frac{a}{a+c}$

Además, este tipo de problemas puede presentar la dificultad descrita por Falk (1996), la cual es confundir $P(B|A)$ con $P(A|B)$, es decir, intercambiar los términos de una probabilidad condicional y confundir las dos frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos como lo encontrado por Batanero, Estepa, Godino y Green (1996), para el ítem 3 se pide calcular la $P(\text{Sufrir Hipertensión}|\text{Fumador empedernido})$ y para el ítem 4 la $P(\text{No es fumadora}|\text{No sufre de Hipertensión})$.

El ítem 5 corresponde a una probabilidad condicional donde se presenta una triple intersección y una probabilidad marginal.

Ítem 5. En el último año de una clase de graduados de preparatoria con 100 alumnos, 42 cursaron matemáticas; 68 sicología; 54 historia; 22 matemáticas e historia; 25 matemáticas y sicología, 7 historia pero no cursaron matemáticas ni psicología; 10 cursaron las tres materias y 8 no tomaron ninguna de las tres. Se selecciona un estudiante al azar, sabiendo que no cursó sicología ¿Cuál es la probabilidad de que tomara los cursos de historia y matemáticas?

Con este ítem se pretende evaluar la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, error descrito por Falk (1986) y Totohasina (1992). Denotando por M : cursa matemáticas, S : cursa sicología, $\sim S$: no cursa sicología y H : cursa historia. Se debe obtener la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar cursó historia y matemáticas dado que no cursó sicología: $P(H \text{ y } M | \sim S)$

$$P(H \text{ y } M | \sim S) = \frac{P(H \text{ y } M \text{ y } \sim S)}{P(\sim S)}$$

$$P(H \text{ y } M | \sim S) = \frac{22 - 10}{100 - 68} = \frac{12}{32} = 0.375$$

También se puede presentar la dificultad de la falacia de la condicional transpuesta, descrita por Falk (1986), es decir confunden $P(B|A)$ con $P(A|B)$.

A continuación se presenta el ítem 6 de opción múltiple que es una situación condicional donde se deben identificar las probabilidades que se dan en las diferentes opciones.

Ítem 6. La probabilidad de que una persona que visita a su dentista necesite rayos X es de 0.6, la probabilidad que una persona que necesite una placa de rayos X también necesite una calza es de 0.3, y la probabilidad de que una persona que necesita una placa de rayo X y una calza también necesite una extracción dental es de 0.1. Si denotamos por X: la persona que necesita una placa de rayos X, por C: necesita calza y por E que necesita una extracción de diente. La probabilidad de que una persona que visita a su dentista necesite los tres procedimientos está dada por:

- a. $P(X) \cdot P(C|X) \cdot P(E|X \text{ y } C) = 0.018$
- b. $P(X) \cdot P(E) \cdot P(C) = 0.018$
- c. $P(X \text{ y } E \text{ y } C) = 0.1$

En este ítem se puede presentar la dificultad de distinguir las condicionales y asumir las probabilidades como producto de las marginales eligiendo la opción (b) o como una intersección entre los sucesos individuales opción (c), ignorando las condicionalidades.

CONTENIDO: Teorema de probabilidad total

El siguiente ítem corresponde a un problema donde es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total.

Ítem 10. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 azules. Son retiradas 2 bolas al azar y entonces una bola es seleccionada de las restantes cuatro. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja si las dos primeras fueron azul y roja?

Para resolver el anterior ítem se debe distinguir que se trata de dos eventos dependientes por lo cual se deben calcular probabilidades compuestas, haciendo unos de la regla del producto para eventos dependientes. Se debe encontrar la probabilidad de sacar roja en la tercera extracción (R_3) dado que se sacó azul en la primera o en la segunda extracción ($A_{1,2}$) y roja en la primera o en la segunda extracción ($R_{1,2}$):

$$P(R_3|A_{1,2} \text{ y } R_{1,2}) = P(R_1) \cdot P(A_2|R_1) \cdot P(R_3|R_1 \text{ y } A_2) + P(A_1) \cdot P(R_2|A_1) \cdot P(R_3|A_1 \text{ y } R_2) = ?$$

Luego,

$$P(R_3|A_{1,2} \text{ y } R_{1,2}) = \frac{2}{4} * \frac{3}{5} * \frac{1}{2} + \frac{2}{4} * \frac{3}{5} * \frac{1}{2}$$

$$P(R_3|A_{1,2} \text{ y } R_{1,2}) = \frac{3}{20} + \frac{3}{20}$$

$$P(R_3|A_{1,2} \text{ y } R_{1,2}) = \frac{3}{10} = 0.3$$

El ítem 12 corresponde a un problema donde es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total.

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. La probabilidad de producción de piezas defectuosas de estas máquinas son de 0.03 para la máquina A, 0.04 para la máquina B y de 0.05 para la máquina C.

Ítem 12. Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

Denotando por $P(D)$ la probabilidad de que sea defectuosa, de los datos tenemos: Probabilidad de producción de la máquina A como $P(A) = 0,45$, la probabilidad de producción de la maquina B: $P(B) = 0,30$ y la probabilidad de producción de la máquina C: $P(C) = 0,25$

Además se tiene la probabilidad de que la pieza sea defectuosa dado que sea de la máquina A, B y C como $P(D|A) = 0,03$, $P(D|B) = 0,04$ y $P(D|C) = 0,05$, respectivamente. Luego:

$$P(D) = P(A) * P(D|A) + P(B) * P(D|B) + P(C) * P(D|C)$$

$$P(D) = 0,45 * 0,03 + 0,30 * 0,04 + 0,25 * 0,05$$

$$P(D) = 0,038$$

CONTENIDO: Teorema de Bayes

Con los siguientes ítems se pretende saber si el estudiante logra resolver un problema donde debe aplicarse el teorema de Bayes.

Ítem 7. En cierto país el 90 % de los delincuentes son condenados. El 1% de las veces se condena a una persona inocente. Además el 5% de la población en algún momento de su vida ha sido delincuente. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona condenada sea inocente?

Sea C : Sea Culpable, I : Sea Inocente y g : Sea juzgado culpable

$$P(I|g) = \frac{P(g|I) * P(I)}{P(g|I) * P(I) + P(g|C) * P(C)}$$

$$P(I|g) = \frac{0.01 * 0.95}{0.01 * 0.95 + 0.05 * 0.90}$$

$$P(I|g) = 0.1743$$

Ítem 8. La cuarta parte de los conductores de coche son mujeres. La probabilidad de que una mujer sufra un accidente en un año es de 5/10.000, y para los hombres es de 1/10.000. ¿Cuál es la probabilidad de que si ocurre un accidente, el accidentado sea hombre?

a. $\frac{0.0001}{0.0005+0.0001} = 0.166$

b. $\frac{1}{10.000} = 0.0001$

c. $\frac{0.0001 \times 0.25}{(0.0005 \times 0.75) + (0.0001 \times 0.25)} = 0.04$

Para el ítem 8, sea $P(M)$: la cuarta parte de los conductores son mujeres (0.75), $P(A|M)$: la probabilidad de que sufra un accidente siendo mujer es de 0.0005 y $P(A|H)$ la probabilidad de que sufra un accidente siendo hombre (0.0001). Luego, aplicando Bayes se tiene:

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A|M)P(M) + P(A|H)P(H)}$$

$$P(H|A) = \frac{0.0001 \times 0.25}{(0.0005 \times 0.75) + (0.0001 \times 0.25)}$$

Ítem 9. En una rifa con 100 billetes, numerados del 1 al 100, se seleccionan dos billetes al azar, sin reposición. El primer billete seleccionado premia con una batidora al comprador, el segundo con una licuadora al comprador. Una persona compra cuatro billetes. Calcule la probabilidad de que esa persona gane ambos premios si sabemos que gana la licuadora.

Probabilidad de ganar la batidora: $P(B) = \frac{4}{100}$, probabilidad de no ganar la batidora:

$P(\sim B) = \frac{96}{100}$, probabilidad de ganar la licuadora dado que se ganó la batidora:

$$P(L|B) = \frac{3}{99}$$

Probabilidad de ganar la licuadora dado que no se ganó la batidora $P(L|\sim B) = \frac{4}{99}$

$$P(B|L) = \frac{P(L|B) * P(B)}{P(L|B) * P(B) + P(L|\sim B) * P(\sim B)}$$

$$P(B|L) = \frac{\frac{4}{100} * \frac{3}{99}}{\frac{4}{100} * \frac{3}{99} + \frac{4}{99} * \frac{96}{100}}$$

Ítem 11. Los estudios epidemiológicos indican que el 20 % de los ancianos sufren un deterioro neuropsicológico. Sabemos que la tomografía axial computarizada (TAC) es capaz de detectar este trastorno en el 80 % de los que lo sufren, pero que también da un 3 % de falsos positivos entre personas sanas. Si tomamos un anciano al azar y da positivo en el TAC, ¿Cuál es la probabilidad de que esté realmente enfermo?

- a. $\frac{20}{100} = 0.2$
- b. $\frac{0.8}{0.8+0.03} = 0.96$
- c. $\frac{0.8 \times 0.2}{(0.8 \times 0.2) + (0.03 \times 0.8)} = \mathbf{0.16}$

Para el ítem 11, sea $P(S)$: la probabilidad de que sufra un deterioro neuropsicológico es de 0.2, $P(TAC + |S)$: la probabilidad de que el TAC resulte positivo dado que sufre de un deterioro neuropsicológico es de 0.8 y $P(NS|TAC +)$ la probabilidad de que no sufra de un deterioro neuropsicológico es de 0.03 . Luego, aplicando Bayes se tiene:

$$P(S|TAC +) = \frac{P(TAC + |S)P(S)}{P(TAC + |S)P(S) + P(TAC + |N)P(N)}$$

$$P(H|A) = \frac{0.8 \times 0.2}{(0.8 \times 0.2) + (0.03 \times 0.8)}$$

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. La probabilidad de producción de piezas defectuosas de estas máquinas son de 0.03 para la máquina A, 0.04 para la máquina B y de 0.05 para la máquina C.

Ítem 13 Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.

Ítem 14. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Para los ítems 13 y 14 denotemos,

Probabilidad de seleccionar la máquina A $P(A) = 0.45$

Probabilidad de seleccionar la máquina B $P(B) = 0.30$

Probabilidad de seleccionar la máquina C $P(C) = 0.25$

Probabilidad de seleccionar una pieza defectuosa dado que fue producida por la máquina A $P(D|A) = 0.03$

Probabilidad de que una pieza sea defectuosa dado que fue producida por la máquina B $P(D|B) = 0.04$

Probabilidad de que una pieza sea defectuosa dado que fue producida por la máquina C $P(D|C) = 0.05$

Solución ítem 13.

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) * P(B)}{P(D|B) * P(B) + P(D|A) * P(A) + P(D|C) * P(C)}$$

$$P(B|D) = \frac{0.30 * 0.04}{0.038}$$

$$P(B|D) = 0.316$$

Solución ítem 14.

$$P(A|D) = \frac{0.45 * 0.03}{0.038}$$

$$P(A|D) = 0.355$$

$$P(C|D) = \frac{0.25 * 0.05}{0.038}$$

$$P(C|D) = 0.329$$

Respuesta: La máquina A. tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa

Con los anteriores ítems en distintos tipos de formato (porcentajes, decimales, frecuencias) en que se presentan se debe reconocer la necesidad del uso del teorema de Bayes.

En la siguiente Tabla resumimos el contenido de los ítems, diferenciando el formato de cada uno y la principal característica o la situación que se plantea en cada problema.

Tabla 5. Resumen de los ítems de la tercera prueba

Ítems	Contenido	Formato	Característica
1	Probabilidad Condicional	Decimales	Una intersección y una marginal (situación médica)
2	Probabilidad Condicional	Decimales	Una intersección y una marginal (situación médica)

3	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Tabla 2x2 Situación médica
4	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Tabla 2x2 Situación médica
5	Probabilidad Condicional	Frecuencias	Probabilidad condicional donde se presenta una triple intersección y una probabilidad marginal
6	Probabilidad Conjunta	Decimales	Situación médica identificar probabilidad conjunta extendida
7	Teorema de Bayes	Porcentajes	Regla de Bayes
8	Teorema de Bayes	Fracciones	
9	Teorema de Bayes	Frecuencias	
11	Teorema de Bayes	Porcentajes	
13	Teorema de Bayes	Porcentajes y Decimales	
14	Teorema de Bayes	Porcentajes y Decimales	
10	Teorema de Probabilidad Total	Frecuencias	Situación en un contexto sin reposición

ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS RESULTADOS

En esta sección se realiza el análisis descriptivo del número de respuestas correctas dadas por los estudiantes a cada una de las pruebas. El análisis está organizado de la siguiente manera:

En primer lugar se realiza el análisis del número de respuestas correctas de los dos grupos de estudiantes en cada prueba, denotando por E1 las respuestas de los estudiantes que por primera vez tomaban una asignatura donde el contenido es probabilidad y estadística básica, y por E2 las respuestas de los estudiantes que tomaban un segundo curso de probabilidad y estadística.

En segundo lugar se realiza un análisis de los resultados de los diferentes grupos que conforman el conjunto E1: A1 y A2 de Estadística para Ingenieros y B1 y B2 de Bioestadística I en cada una de las pruebas.

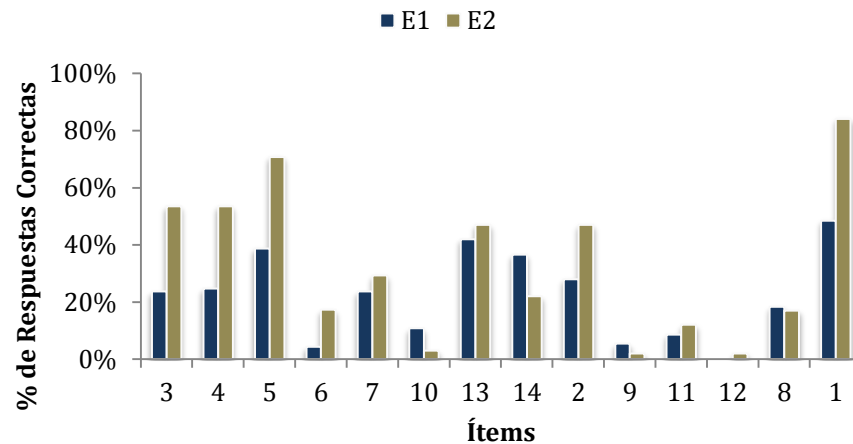
Finalmente, se analiza el número de respuestas correctas en cada uno de los ítems en cada una de las pruebas en los dos grupos (C1 y C2) de ingeniería industrial que constituyen el conjunto E2.

Además, se realiza un análisis de varianza para datos pareados con el fin de comparar las medias de las respuestas entre grupos de un mismo curso para cada momento y otro análisis de varianza para comparar las medias de las respuestas para cada grupo entre momentos.

6.1. Análisis de las respuestas en la primera prueba

Esta prueba la contestaron 93 estudiantes del conjunto E1 y 58 estudiantes del conjunto E2. La Figura 1 muestra el porcentaje de respuestas correctas de los conjuntos E1 y E2 para cada ítem de la primera prueba.

Figura 3. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la primera prueba.



En la Figura 3 se observa que los porcentajes de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E2 en 10 ítems están por encima de los porcentajes de los estudiantes del conjunto E1. Además los estudiantes del conjunto E2 obtuvieron en 4 ítems un porcentaje por encima del 50%.

A continuación se presenta el análisis de los ítems teniendo en cuenta el contenido: Probabilidad condicional, probabilidad conjunta, teorema de probabilidad total, probabilidad marginal y teorema de bayes para cada uno de los conjuntos (E1 y E2) en esta primera prueba.

La Tabla 6 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad condicional en la primera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Condicional	3	22	24%	31	53%
	4	23	25%	31	53%
	5	36	39%	41	71%
	6	4	4%	10	17%
	7	22	24%	17	29%
	10	10	11%	2	3%
	13	39	42%	27	47%
	14	34	37%	13	22%

De la Tabla 6 cabe destacar que los estudiantes que tomaron por segunda vez un curso de probabilidad y estadística (conjunto E2) obtuvieron porcentajes más altos en la mayoría de los ítems que evaluaban la probabilidad condicional que los estudiantes que por primera vez tomaron un curso (conjunto E1), quizás esto se debió a que los estudiantes del conjunto E2 recordaban el tema de probabilidad condicional visto en el semestre anterior. Solo en dos ítems (10 y 14) los porcentajes fueron menores para el conjunto E2. El ítem 10 que corresponde a un problema que plantea un experimento simple consecutivo donde se debe tener en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior y el ítem 14 donde se presenta un cambio del eje de tiempo. En el conjunto E1 el ítem de mayor porcentaje fue el 13 que corresponde a un problema en contexto de urna sin reposición, este ítem obtuvo un 42% de respuestas correctas. En el conjunto E2 el ítem 5 obtuvo un 71% de respuestas correctas y corresponde a un problema donde se debe identificar una intersección y una probabilidad marginal para establecer el cociente de la probabilidad condicional.

La Tabla 7 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad conjunta en la primera prueba, con la frecuencia y el respectivo de porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 7. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Conjunta	2	26	28%	27	47%
	9	5	5%	1	2%
	11	8	9%	7	12%

Respecto a los tres ítems de probabilidad conjunta, en la Tabla 7 se observa que el conjunto E2 presentó porcentajes altos para los ítems 2 y 11 comparados con los porcentajes del conjunto E1. El ítem 2 corresponde a un problema donde se debe identificar la probabilidad conjunta en una Tabla de contingencia 2x2, y en el ítem 11 se debe aplicar la regla del producto para sucesos dependientes. Ambos conjuntos (E1 y E2) obtuvieron porcentajes bajos para los ítems de probabilidad conjunta, pero el ítem 9 presentó el porcentaje menor para ambos conjuntos (E1 y E2), en el cual se debe aplicar la regla del producto para sucesos independientes.

La Tabla 8 muestra el ítem que se presentó referente al teorema de Bayes en la primera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 8. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Teorema de Bayes	12	0	0%	1	2%

Los estudiantes que por primera vez tomaron un curso de probabilidad y estadística (conjunto E1) presentó un 0% de respuestas correctas respecto al problema donde debe aplicarse el teorema de Bayes, por otro lado se esperaba

que los estudiantes que por segunda vez tomaban el curso (conjunto E2), presentarán porcentajes mayores pero estos solo obtuvieron un 2%.

La Tabla 9 muestra el ítem que se presentó referente al teorema de probabilidad total en la primera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 9. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad marginal en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Teorema de Probabilidad Total	8	17	18%	10	17%

No se presentó gran diferencia entre los porcentajes de respuestas correctas de los conjuntos E1 y E2, respecto al ítem de probabilidad total, en el cuál se debe distinguir que se trata de dos eventos dependientes y aplicar la regla de producto.

La Tabla 10 muestra el ítem que se presentó referente la probabilidad marginal en la primera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 10. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la primera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Marginal	1	45	48%	49	84%

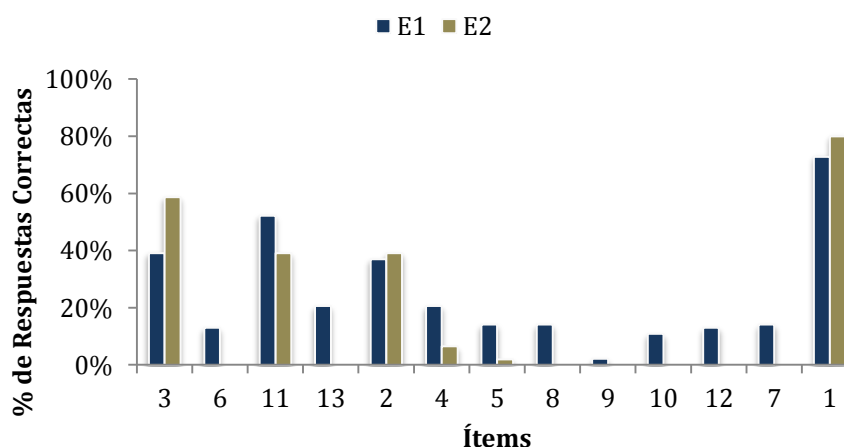
Como se observa en la Tabla 10, en el conjunto E2, un 84% de los estudiantes contestaron correctamente este ítem y un 48% del conjunto E1. Este ítem presentó el mayor porcentaje de respuestas correctas comparado con los

demás ítems que evalúan contenidos diferentes. Este ítem comprende un problema basado en una Tabla de contingencia 2x2 dada en frecuencias absolutas, en la cual se debe identificar la probabilidad marginal preguntada.

6.2. Análisis de las respuestas en la segunda prueba

Esta prueba la contestaron 92 estudiantes del conjunto E1 (estudiantes que por primera vez tomaron una asignatura donde el contenido es probabilidad y estadística básica) y 46 estudiantes del conjunto E2 (estudiantes que por segunda vez tomaron una asignatura donde el contenido es probabilidad y estadística básica). La Figura 4 muestra el porcentaje de respuestas correctas de los conjuntos para cada ítem de la segunda prueba.

Figura 4. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la segunda prueba.



En la Figura 4 observamos que los porcentajes de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E1 en 10 ítems están por encima de los porcentajes de los estudiantes del conjunto E2. Además los estudiantes del conjunto E2 obtuvieron en 2 ítems un porcentaje por encima del 50%, el ítem 1 presentó un

porcentaje del 73%, el cual fue el más alto para este conjunto, igualmente fue el de mayor porcentaje para el conjunto E1 con un 80% de respuestas correctas. A continuación se presenta el análisis de los ítems teniendo en cuenta el contenido: Probabilidad condicional, probabilidad conjunta, teorema de probabilidad total, probabilidad marginal y teorema de Bayes para cada uno de los conjuntos (E1 y E2) en esta segunda prueba.

La Tabla 11 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad condicional en la segunda prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 11. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Condicional	3	36	39%	27	59%
	6	12	13%	0	0%
	11	48	52%	18	39%

Se observa en la Tabla 11 que los estudiantes que tomaron por primera vez un curso de probabilidad y estadística (conjunto E1) los porcentajes reflejan un mejor rendimiento en los ítems que evaluaban la probabilidad condicional comparado con el rendimiento de los estudiantes que por segunda vez tomaron un curso (conjunto E2), tal vez porque los estudiantes del conjunto E2 en esta prueba olvidaron el tema de probabilidad condicional visto en el semestre anterior y los estudiantes del conjunto E1 acababan de recibir instrucción sobre este tema. El conjunto E2 presentó un 0% de respuestas correctas en el ítem 6, estos mismos ítems presentaron porcentajes bajos en el conjunto E1. El ítem 6 corresponde a un problema donde se debe identificar la intersección y la marginal para realizar el cociente correspondiente a la probabilidad condicional.

La Tabla 12 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad conjunta en la segunda prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 12. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Conjunta	2	34	37%	18	39%
	4	19	21%	3	7%
	13	19	21%	0	0%

El ítem 2 comprende la identificación de una probabilidad conjunta en una Tabla de contingencia 2x2 dada en frecuencias absolutas, este ítem presentó un porcentaje muy similar en ambos conjuntos (E1 y E2) por debajo del 40%. En el ítem 4 se debe usar la regla del producto en caso de sucesos dependientes, este ítem obtuvo un 7% de respuestas correctas en el conjunto E2 y en el conjunto E1 un 21%. El ítem 13 corresponde a una probabilidad conjunta extendida presento un 21% de respuestas correctas para el conjunto E1 y 0% para el conjunto E2.

La Tabla 13 muestra los ítems que se presentaron referentes al teorema de Bayes en la segunda prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 13. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas
-----------	-------	----------------------------------	---------------------------	----------------------------------	---------------------------

		E1	E1	E2	E2
Teorema de Bayes	5	13	14%	1	2%
	8	13	14%	0	0%
	9	2	2%	0	0%
	10	10	11%	0	0%
	12	12	13%	0	0%

Notablemente el conjunto E1 presentó un buen rendimiento comparado con los resultados del conjunto E2 en los ítems donde se debe aplicar la regla de Bayes. Sin embargo los porcentajes de respuestas correctas del conjunto E1 estuvieron por debajo del 15%.

La Tabla 14 muestra el ítem que se presentó referente al teorema de probabilidad total en la segunda prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 14. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Teorema de Probabilidad Total	7	13	14%	0	0%

El ítem 7 comprende un problema donde es necesario aplicar la regla de probabilidad total para eventos dependientes haciendo uso de la regla del producto. Este ítem presentó un 14% de respuestas correctas en el conjunto E1 y un 0% de respuestas correctas en el conjunto E2.

La Tabla 15 muestra el ítem que se presentó referente a la probabilidad marginal en la segunda prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 15. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la segunda prueba para los conjuntos E1 y E2

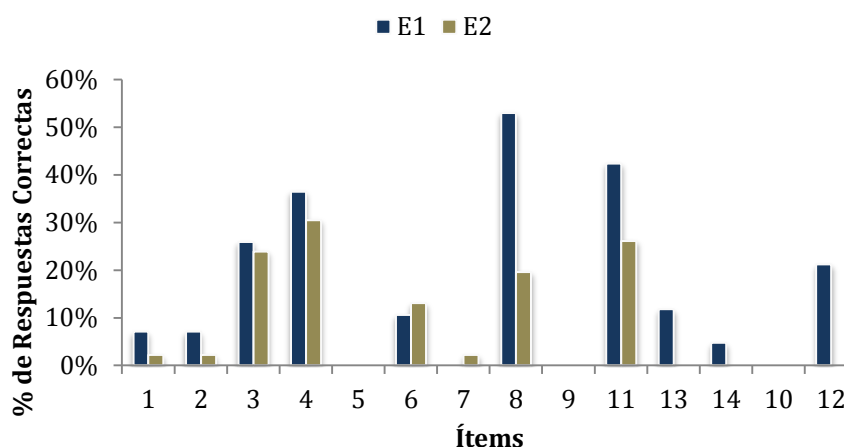
Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Marginal	1	67	73%	37	80%

Se destaca que este ítem presentó un alto porcentaje de respuestas correctas en ambos conjuntos, un 73% en el conjunto E1 y un 80% en el conjunto E2. En este ítem se debe identificar una probabilidad marginal en una Tabla de contingencia de 2x2 dada en frecuencias absolutas.

6.3. Análisis de las respuestas en la tercera prueba

Esta prueba la contestaron 85 estudiantes del conjunto E1 (estudiantes que por primera vez toman una asignatura donde el contenido es probabilidad y estadística básica) y 46 estudiantes del conjunto E2 (estudiantes que toman un segundo curso de probabilidad y estadística). La Figura 5 muestra el porcentaje de respuestas correctas de los conjuntos para cada ítem de la tercera prueba.

Figura 5. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems correspondientes a los conjuntos E1 y E2 en la tercera prueba.



En la Figura 5 observamos que el ítem con mayor porcentaje de respuestas correctas para el conjunto E1 fue el 8, correspondiente a un problema de Teorema de Bayes con un 53%. Ningún ítem en el conjunto E2 presentó porcentaje por encima del 50% y 6 ítems en este conjunto obtuvieron 0% de respuestas correctas. Por otro lado en el conjunto E1 tres ítems presentaron porcentaje de 0%. A continuación se presenta el análisis de los ítems teniendo en cuenta el contenido: Probabilidad condicional, probabilidad conjunta, teorema de probabilidad total, probabilidad marginal y teorema de Bayes para cada uno de los conjuntos (E1 y E2) en esta tercera prueba.

La Tabla 16 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad condicional en la tercera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 16. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad condicional en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Condicional	1	6	7%	1	2%
	2	6	7%	1	2%
	3	22	26%	11	24%
	4	31	36%	14	30%

	5	0	0%	0	0%
--	---	---	----	---	----

En la Tabla 16 se observa que el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem en ambos conjuntos estuvieron por debajo del 40%, ambos conjuntos presentaron porcentajes muy similares en algunos ítems (3, 5 y 6) también se resalta que el ítem 5 presentó un porcentaje del 0% de respuestas correctas en ambos conjuntos, este ítem tiene un mayor grado de dificultad, ya que comprendía el cociente entre una triple intersección y una probabilidad marginal para obtener la probabilidad condicional. Los ítems 1 y 2 corresponden a probabilidades condicionales donde se debe identificar una intersección y una probabilidad marginal, estos ítems presentaron un 7% de respuestas correctas cada uno en el conjunto E1 y un 2% en el conjunto E2. En los ítems 3 y 4 se deben identificar las probabilidades condicionales en una Tabla de contingencia de 2x2.

La Tabla 17 muestra los ítems que se presentaron referentes a la probabilidad conjunta en la tercera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 17. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de probabilidad conjunta en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Probabilidad Conjunta	6	9	11%	6	13%

El porcentaje de respuestas correctas no presentó grandes diferencias entre ambos conjuntos para el ítem 6 de opción múltiple que corresponde a una situación condicional donde se deben identificar la probabilidad conjunta extendida de tres eventos que se dan en el enunciado.

La Tabla 18 muestra los ítems que se presentaron referentes al teorema de Bayes en la tercera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 18. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems de teorema de Bayes en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2

Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Teorema de Bayes	7	0	0%	1	2%
	8	45	53%	9	20%
	9	0	0%	0	0%
	11	36	42%	12	26%
	13	10	12%	0	0%
	14	4	5%	0	0%

En los ítems que muestra la Tabla 18 plantean problemas donde se debe reconocer la necesidad del uso del teorema de Bayes para resolverlos, estos difieren en los distintos tipos de formato en que se dan los datos. El ítem 8 que presento un 53% de respuestas correctas en el conjunto E1, los datos están dados en fracciones. Los datos de los ítems 7, 11, 13 y 14 están dados en porcentajes y los del ítem 9 en frecuencias.

La Tabla 19 muestra el ítem que se presentó referente al teorema de probabilidad total en la tercera prueba, con la frecuencia y el respectivo porcentaje de respuestas correctas que presentó cada ítem en los conjuntos E1 y E2.

Tabla 19. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas de los ítems del teorema de probabilidad total en la tercera prueba para los conjuntos E1 y E2.

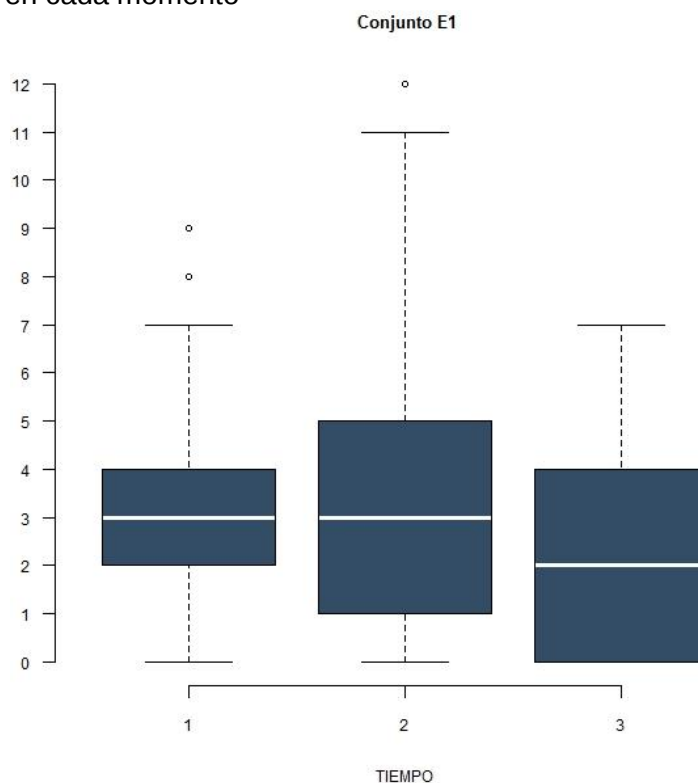
Contenido	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas E1	% de Respuestas Correctas E1	Cantidad de Respuestas Correctas E2	% de Respuestas Correctas E2
Teorema de Probabilidad Total	10	0	0%	0	0%
	12	18	21%	0	0%

En la Tabla 19 se observa que los ítems referentes al teorema de probabilidad total en el conjunto E2 obtuvieron porcentajes de 0%. El conjunto E1 presentó un 0% de respuestas correctas en el ítem 10, en este ítem es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total en eventos en un experimento simple consecutivo. El ítem 12 presentó un 21% de respuestas correctas, donde es necesario aplicar la fórmula de la probabilidad total en un problema de producción de tres máquinas con piezas defectuosas.

6.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONJUNTO E1

En la Figura 6 se observan los diagramas de caja del número de respuestas correctas obtenidas en cada una de las pruebas por los estudiantes del conjunto E1 (estudiantes que por primera vez tomaron un curso de probabilidad y estadística). El eje vertical del diagrama, muestra una escala de 0 a 12, dado que 12 fue el puntaje máximo que se presentó pero se recuerda que la puntuación máxima en la primera prueba es de 14 puntos, en la segunda prueba es de 13 puntos y en tercera prueba de 14 puntos.

Figura 6. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E1 en cada momento



En los diagramas de caja de la Figura 6 se observa que 50% de las respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E1 respondieron entre 2 y 4 ítems correctamente en la primera prueba. En la segunda prueba el 50% de los estudiantes respondieron correctamente entre 1 y 5 ítems, en cambio, en la tercera prueba el 25% de los estudiantes no respondieron bien ni un solo ítem en tanto que el 75% obtuvieron puntuaciones entre 0 y 4 ítems. La dispersión en el número de buenas respuestas aumenta a medida que pasa el tiempo, dando cuenta del efecto que tiene la instrucción sobre las intuiciones previas de los estudiantes, que son relativamente homogéneas.

Las Figuras que se muestran a continuación son los diagramas de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes en cada prueba de acuerdo

al curso al que pertenecían, los del curso de estadística para ingenieros y los del curso de bioestadística I.

Figura 7. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del curso estadística para ingenieros en cada prueba.

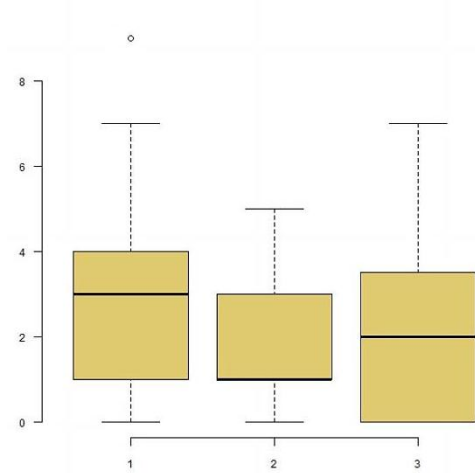
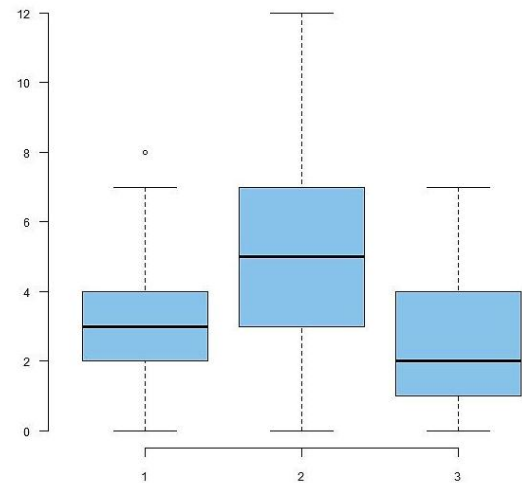


Figura 8. Diagrama de cajas del números respuestas correctas de los estudiantes del curso bioestadística I en cada prueba.



En la Figura 7 se observa que el 75% de los estudiantes de estadística para ingenieros respondieron menos de 4 ítems correctamente en las tres pruebas. Por otro lado se observa una distribución medianamente simétrica para el primer momento, en cambio, para el segundo momento se observa que la mediana es igual al primer cuartil, luego existen gran cantidad de respuestas idénticas (notas de 1), finalmente en el tercer momento se observa una distribución de las respuestas muy simétrica con el 25% de los estudiantes con puntaje 0, es decir, sin ninguna respuesta correcta. Cabe recordar que para la segunda prueba los estudiantes todavía no habían visto el teorema de Bayes, y que este tema solo pudo ser evaluado en la tercera prueba. Se resalta que la mayor mediana de los resultados de los estudiantes de ingeniería se presenta en el primer momento en que los estudiantes no tienen idea de los tipos de procedimientos a seguir para resolver problemas de probabilidad condicional y

teorema de Bayes, por lo cual, responden desde la intuición y sus creencias personales. Este resultado es llamativo, ya que se esperaba que los estudiantes, a medida que aumentaban sus conocimientos en los temas relacionados con el teorema de Bayes, obtuvieran mejores resultados en las pruebas, cosa que no ocurrió en los cursos de estadística para ingenieros.

En los diagramas de caja de la Figura 8 se observa que el 75% de los estudiantes de bioestadística I respondieron menos de 8 ítems correctamente en los tres momentos. Además en el primer momento el 50% de los puntajes se encuentran entre 2 y 4, contrario a lo que ocurre con los estudiantes de estadística para ingenieros, donde el 50% de las notas se encuentran entre 1 y 4. Un estudiante de estadística para ingenieros obtuvo un resultado de 9 puntos correctos en la primera prueba en tanto que la mayor nota en bioestadística I fue igual a 8. En la segunda prueba, la mediana de las respuestas del curso de estadística para ingenieros fue 1, en bioestadística I fue 5. Este hecho se podría explicar porque a los estudiantes del curso de bioestadística I ya se les había impartido el concepto de probabilidad condicional y teorema de Bayes. En el tercer momento, se observa que el 50% de las notas de los estudiantes de bioestadística I se encuentran entre 0 y 4, en cambio el 50% de las notas de los estudiantes de estadística para ingenieros se encuentran entre 1 y 4, las medianas de las respuestas son idénticas para el tercer momento para los dos cursos, igual a 2. Salvo en la segunda prueba, donde los dos grupos presentan variabilidades muy semejantes, en las demás pruebas es menor la variabilidad en las puntuaciones de los estudiantes de bioestadística I comparativamente con los de estadística para ingenieros, indicando mayor homogeneidad en las respuestas de los primeros.

6.4.1. Análisis de los resultados de los grupos A1 y A2 de Estadística para Ingenieros

Las Figuras que se muestran a continuación son los diagramas de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes en cada momento para cada grupo (A1 y A2) de estadística para ingenieros.

Figura 9. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo A1 de estadística para ingenieros en cada prueba.

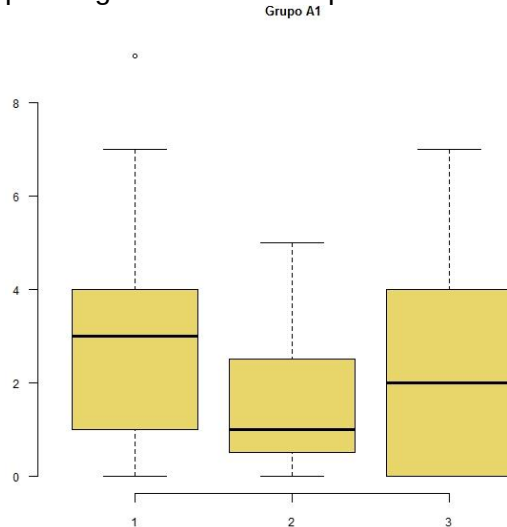
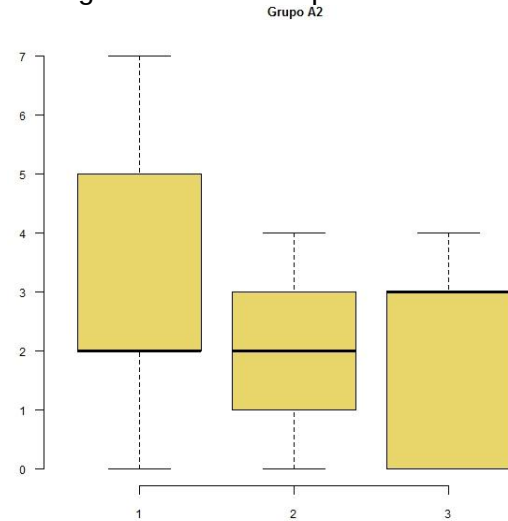


Figura 10. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo A2 de estadística para ingenieros en cada prueba.

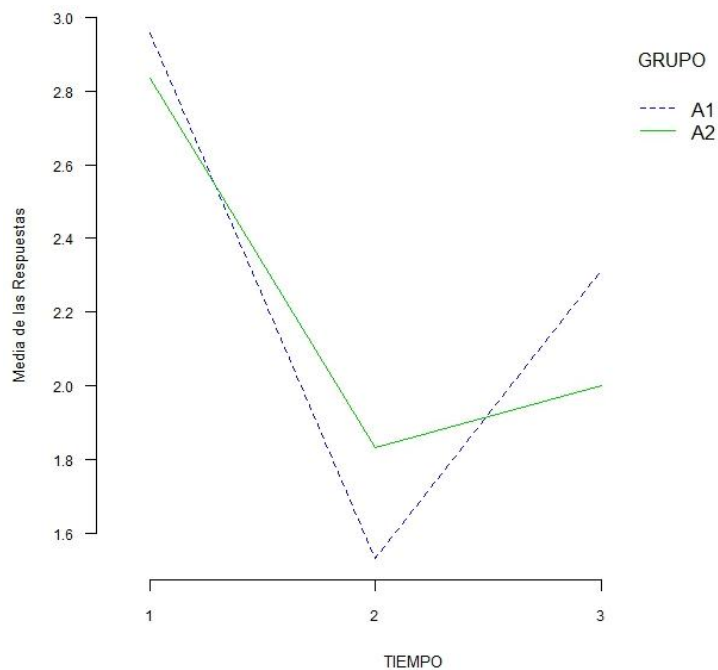


Las medianas son diferentes para las tres pruebas del grupo A1 (Ver Figura 9), los puntajes de los estudiantes presentan bastante variabilidad, en el tercer momento el 80% de las respuestas estuvieron entre 0 y 4 ítems correctos, en el grupo A2 se observa que la mediana es igual al primer cuartil, luego existen gran cantidad de respuestas idénticas (notas de 2). Se observan diferencias en la variabilidad entre momentos en cada uno de los grupos, en el grupo A1 la variabilidad de las respuestas en el momento 2 (caja bastante pequeña) es mucho menor a la que presentan las respuestas en los momentos 1 y 3 (cajas

grandes), este hecho también lo presentan el grupo A2, la variabilidad de las respuestas es menor en el momento 2 a la que presentan los momentos 1 y 3.

La Figura 11 muestra el factor puntaje de respuestas correctas de los estudiantes para los tres momentos (en el eje vertical se muestra la media de las respuestas) en los grupos A1, A2 de estadística para ingenieros.

Figura 11. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo de los grupos A1 y A2 de estadística para ingenieros



En la Figura 11 se observan ciertas características que los diagramas de cajas habían puesto en evidencia. Se observa un comportamiento similar para ambos grupos de estadística para ingenieros (A1 y A2). En el primer momento se observa que la media de las respuestas es mayor para el grupo A1, en el segundo momento se observa una disminución en la media de las respuestas para los dos grupos, situación bastante anómala ya que se esperaba que la media de las repuestas aumentara. Sin embargo, la media para el curso A2 es

mayor en el segundo momento. En ambos pares de grupos se presentó un hecho llamativo: En los grupos A1 y A2, se observa una disminución en el rendimiento de los estudiantes que no se puede entender claramente, ya que en la medida que avanza el tiempo, al adquirir mayor conocimiento en temas de probabilidad y estadística, se esperaba que los resultados fuesen mejores, cosa que la Figura 11 desmiente, al menos en el tiempo transcurrido entre la primera y la segunda prueba; ya en la tercera la situación es algo mejor, aunque en menor medida de lo acontecido en la primera prueba cuando los estudiantes respondieron con base en sus intuiciones y conocimientos previos.

A continuación, se realiza un análisis de varianza para comparar las medias de ambos grupos (A1 y A2) en los diferentes momentos.

Análisis de varianza del grupo A1 de estadística para ingenieros para los diferentes momentos

En el análisis de varianza para comparar las medias de las tres pruebas en los diferentes momentos, se realizó una prueba no paramétrica de Wilcoxon dado que el conjunto de datos no se ajusta a una distribución normal como se muestra en la Figura 12 donde se muestran los resultados de la prueba de Shapiro Wilk para normalidad.

Figura 12. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk de los resultados del grupo A1 para cada uno de los momentos

<pre>> shapiro.test(A11) data: A11 W = 0.911, p-value = 0.03701</pre>	<pre>> shapiro.test(A12) data: A12 W = 0.8404, p-value = 0.0002592</pre>	<pre>> shapiro.test(A13) data: A13 W = 0.9086, p-value = 0.01033</pre>
---	--	--

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 12 se observa que para un nivel de

significancia del 0.05, se rechaza la hipótesis nula. Es decir, en ninguno de los tres momentos se cumple el supuesto de la normalidad.

Teniendo en cuenta la premisa anterior se realiza la prueba de Wilcoxon, acordando que la hipótesis nula es que es que las medias de cada uno de los momentos son iguales.

Figura 13. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los diferentes momentos

<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo2) data: A11 and A12 V = 107.5, p-value = 0.04278 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo2,Tiempo3) data: A12 and A13 V = 88.5, p-value = 0.07653 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo3) data: A11 and A13 V = 165.5, p-value = 0.2057 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
--	---	---

En la Figura 13 se observa que para los momentos 1 y 2, el p-valor es igual a 0.04278, esto a un nivel de significancia del 0.05 se tiene que existe una diferencia significativa entre las medias del primer y segundo momento del grupo A1. Para los momentos 2 y 3, se observa que el p-valor es de 0.07653, luego, no existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias del grupo A1 en el segundo y tercer momento. Para los momentos 1 y 3, se observa que el p-valor es igual a 0.2057, luego no se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto, no existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de los momentos 1 y 3. En conclusión, estos estudiantes sufrieron un descenso significativo en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un nivel semejante al de la primera prueba.

Análisis de varianza del grupo A2 de estadísticas para ingenieros para los diferentes momentos

Los resultados que arrojaron las pruebas de Shapiro Wilk, (Ver Figura 14) son:

Figura 14. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo A2 para cada uno de los momentos

<pre>> shapiro.test(A21) data: A21 W = 0.9187, p-value = 0.1226</pre>	<pre>> shapiro.test(A22) data: A22 W = 0.9237, p-value = 0.1503</pre>	<pre>> shapiro.test(A23) data: A23 W = 0.8207, p-value = 0.002317</pre>
---	---	---

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 14 se observa en la prueba Shapiro-Wilk que la hipótesis de normalidad se cumple para el primer y segundo momento en el grupo A2, por el contrario el tercer momento no cumple dicho supuesto. Por lo anterior entre el primer y segundo momento se realiza una prueba t-student, para las otras comparaciones se utiliza la prueba de Wilcoxon.

Teniendo en cuenta la premisa anterior, a continuación se muestra la prueba t de comparación de medias. La hipótesis nula es que no existe una diferencia significativa entre la media en el primer y segundo momento en las respuestas del grupo A2.

Figura 15. Pruebas t-student para comparar medias del grupo A1 en el primer y segundo momento

```
Paired t-test (Tiempo1,Tiempo2)
data:  A21 and A22
t = 1.8043, df = 17, p-value = 0.08894
alternative hypothesis: true difference
in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.1693586  2.1693586
sample estimates:
mean of the differences
```

Se observa que el p valor es igual a 0.08894. Por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05, no se rechaza la hipótesis nula, luego no existe una diferencia significativa entre las medias del grupo A2 en el primer y segundo momento.

Las pruebas Wilcoxon de comparación de medias entre el segundo y tercer momento del grupo y entre el primer y tercer momento del grupo arrojó lo siguiente:

Figura 16. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los momentos (1—3) y (2-3)

<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo3) data: A21 and A23 V = 103, p-value = 0.2142 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo2,Tiempo3) data: A22 and A23 V = 62.5, p-value = 0.7928 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
---	--

La hipótesis nula es que no existe una diferencia significativa entre la media en el primer y tercer momento en las respuestas del grupo A2. Se observa que el p valor es igual a 0.2142 para el primer y tercer momento, por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05, no se rechaza la hipótesis nula, esto es no existe una diferencia significativa entre las medias del grupo A2 en el primer y tercer momento. Se observa que el p valor es igual a 0.7928, a un nivel de significancia del 0.05, no se rechaza la hipótesis nula, esto es no existe una diferencia significativa entre las medias del grupo A2 en el segundo y tercer momento. En conclusión, este grupo se comportó estadísticamente de una forma similar en las tres pruebas realizadas, no tuvo ninguna influencia sobre sus resultados el momento académico que estaban viviendo la aplicación de la prueba.

A continuación, se realiza un análisis de varianza para comparar las medias entre grupos (A1 y A2) para cada uno de los momentos.

Análisis de varianza para los grupos A1 y A2 en el primer momento.

Se realizó una prueba no paramétrica de Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo A1 y A2 en la primera prueba, dado que el conjunto de datos del grupos en el primer momento, no se ajustaron a una distribución normal

como mostraron los test de Shapiro-Wilk (Figura 12, para el grupo A1 en el primer momento y Figura 14 para el grupo A2 segundo momento).

La Figura 17 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de medias de los grupos A1 y A2 en el primer momento.

Figura 17. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el primer momento

```
> wilcox.test(A11, A21, paired=F)
data:  A11 and A21
W = 220.5, p-value = 0.918
alternative hypothesis: true location
shift is not equal to 0
```

Se observa que para un nivel de significancia del 0.05, la hipótesis nula no se rechaza, es decir, no existe diferencia estadísticamente significativa entre las medias de los grupos A1 y A2 en el primer momento.

Análisis de varianza para los grupos A1 y A2 en el segundo momento.

La prueba de normalidad Shapiro-Wilk para el grupo A1 en el primer momento arrojó que los dato no tienen una distribución normal (ver Figura 18). Luego realizan la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo A1 y A2 se tiene:

Figura 18. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el segundo momento

```
> wilcox.test(A12, A22, paired=F)
data:  A12 and A22
W = 235, p-value = 0.2741
alternative hypothesis: true location
shift is not equal to 0
```

Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una

diferencia significativa entre las medias de los grupos A1 y A2 en el segundo momento.

Análisis de varianza para los grupos A1 y A2 en el tercer momento

La pruebas de normalidad Shapiro-Wilk para los dos grupos en el tercer momento rechazan el supuesto de que los datos se ajustan a una distribución normal (ver Figuras 12 y 14). Luego, la prueba no paramétrica de Wilcoxon es la apropiada para comparar las medias entre los dos grupos en el tercer momento.

La Figura 19 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo A1 y A2 en el tercer momento,

Figura 19. Prueba de Wilcoxon para comparar medias de los grupos A1 y A2 en el tercer momento

```
> wilcox.test(A13, A23, paired=F)
data:  A13 and A23
W = 319.5, p-value = 0.7648
alternative hypothesis: true location
shift is not equal to 0
```

Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos A1 y A2 en el tercer momento.

El análisis estadístico muestra que los dos grupos de estudiantes del curso de estadística para ingenieros no presentaron diferencias significativas en su rendimiento en ninguna de las pruebas realizadas.

6.4.2. Análisis de los resultados de los grupos B1 y B2 de Bioestadística I

Las Figuras que se muestran a continuación son los diagramas de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes en cada momento para cada grupo (B1 y B2) de bioestadística I, en cada uno de los tres momentos.

Figura 20. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo B1 de bioestadística en cada prueba.

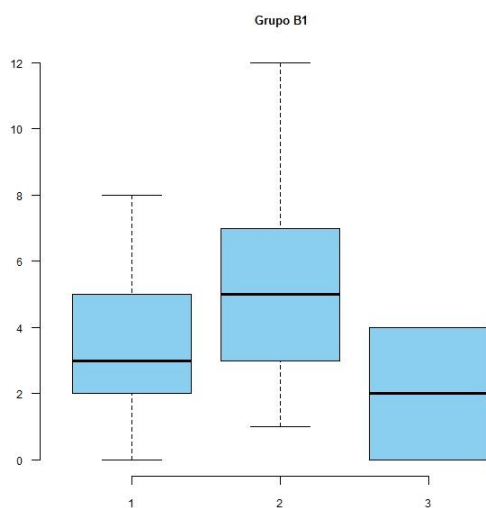
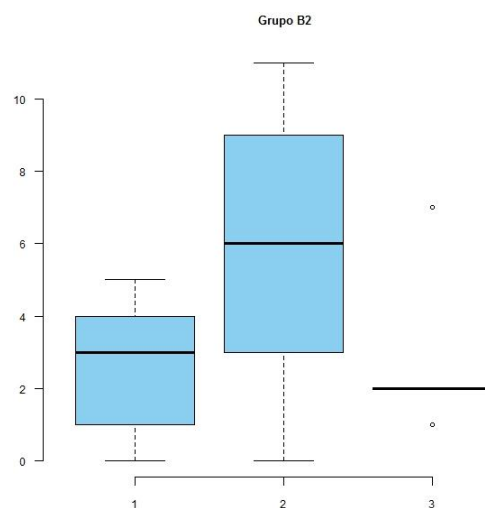


Figura 21. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo B2 de bioestadística en cada prueba.



En la Figura 20 se observa que el 75% de los resultados del grupo B1 son menores a 7. La variabilidad para el primer y segundo momento en el grupo B1 son muy similares, contrario a lo que ocurre en el grupo B2 que son muy diferentes.

En el primer momento se observa para el grupo B1 que el 75% de las respuestas son mayores a 2, y el 75% de las respuestas del grupo B2 son menores a 4 (ver Figura 21), esto muestra que las respuestas del grupo B1

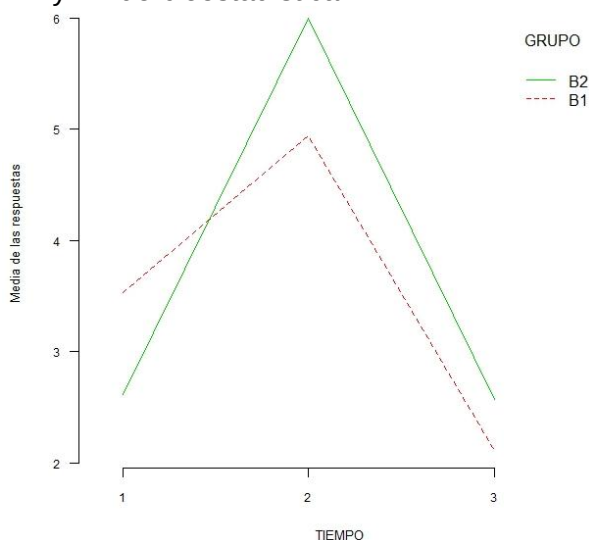
fueron mayores que las del grupo B2. Las medianas para el primer momento son iguales para ambos grupos con un puntaje de 3. Las respuestas del grupo B1 para el primer momento presentan una distribución ligeramente a la derecha, esto quiere decir que la mayor cantidad de las notas fueron menores a 3, por el contrario las respuestas, del primer momento, del grupo B2 presentan una leve asimetría a la izquierda.

Para la segunda prueba se observa que las notas de los estudiantes tuvieron un aumento notable, este hecho se esperaba debido a que para este segundo momento los estudiantes ya conocían los conceptos de probabilidad condicional y teorema de Bayes. Se observa una mayor dispersión en las notas del grupo B2 (caja mucho más larga) respecto a la dispersión que presentan los puntajes del curso B1. Se observa que el 75% de las notas son mayores a 3 en ambos grupos y la mediana del curso B2 es mayor que la que presenta el grupo B1.

En la tercera prueba se observa una disminución en la mediana de las notas para ambos grupos, sin embargo, la dispersión que presenta el curso B1 es mayor a la que presenta el grupo B2, en realidad se observa que el grupo B2 es una línea horizontal, es decir, todos los estudiantes obtuvieron un puntaje de 2, y una estudiante con un puntaje de 7. En el grupo B1 el 100% de las notas fueron menores a 4, lo cual muestra que ningún estudiante obtuvo una nota alta en el tercer momento.

La Figura 22 muestra el factor puntaje de respuestas correctas de los estudiantes para los tres momentos (en el eje vertical se muestra la media de las respuestas) en los grupos B1 y B2 del curso de bioestadística I.

Figura 22. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo de los grupos B1 y B2 de bioestadística I.



En la Figura 22 se observan ciertas características que los diagramas de cajas habían puesto en evidencia. Se observa un comportamiento similar para ambos grupos de bioestadística I (B1 y B2). Por otro lado la media de los puntajes del grupo B1 fue mayor, y en el segundo momento los puntajes de los dos cursos tuvieron un fuerte aumento, donde la media de las notas del grupo B2 fueron mayores a las del grupo B1 y disminuyeron en el tercer momento, donde se muestra que el grupo B1 obtuvo un puntaje final menor a del grupo B2. Si bien con los estudiantes de bioestadística, al pasar de la primera a la segunda prueba ocurre lo esperado, ya que para la segunda prueba los estudiantes acababan de recibir instrucción sobre los temas afines al teorema de Bayes. Por otro lado se observa que los puntajes en la tercera prueba son ligeramente inferiores a los obtenidos en la primera. Esta disminución de la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional después de una instrucción dirigida a ese fin será motivo de atención en el capítulo 8 donde se realiza un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes.

A continuación, se realiza un análisis de varianza para comparar las medias de ambos grupos (B1 y B2) en los diferentes momentos.

Análisis de varianza del grupo B1 de bioestadística I en los diferentes momentos

En el análisis de varianza para comparar las medias de las tres pruebas en los diferentes momentos, se realizó una prueba no paramétrica de Wilcoxon dado que el conjunto de datos no se ajusta a una distribución normal como se muestra en la Figura 23 donde se muestran los resultados de la prueba de Shapiro Wilk para normalidad.

Figura 23. Prueba de normalidad Shapiro-Wilk de los resultados del grupo B1 para cada uno de los momentos

<pre>> shapiro.test(B11) data: B11 W = 0.9287, p-value = 0.01831</pre>	<pre>> shapiro.test(B12) data: B12 W = 0.9254, p-value = 0.02587</pre>	<pre>> shapiro.test(B13) data: B13 W = 0.8023, p-value = 0.0001503</pre>
---	---	---

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 23 se observa que para un nivel de significancia del 0.05, se rechaza la hipótesis nula. Es decir, en ninguno de los tres momentos se cumple el supuesto de la normalidad.

Teniendo en cuenta la premisa anterior se realiza la prueba de Wilcoxon, acordando que la hipótesis nula es que las medias de cada uno de los momentos son iguales.

Figura 24. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo B1 en los diferentes momentos

<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo2) data: B11 and B12 V = 139, p-value = 0.09027 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo2,Tiempo3) data: B12 and B13 V = 301, p-value = 0.0001932 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo3) data: B11 and B13 V = 218, p-value = 0.01521 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
--	--	--

En la Figura 24 se observa que para los momentos 1 y 2, el p-valor es igual a 0.09027. Por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05 no existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo en el primer y segundo momento del grupo B1. Para los momentos 2 y 3, se observa que el p-valor es igual 0.0001932. Por lo tanto se tiene que existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo B1 en el segundo y tercer momento. Para los momentos 1 y 3, se observa que el p-valor es de 0.01521. Luego, existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo B1 en el primer y tercer momento. En conclusión, estos estudiantes no presentaron ningún cambio en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un nivel diferente que se refleja un rendimiento aún más bajo que en la primera prueba.

Análisis de varianza del grupo B2 de estadística para ingenieros en los diferentes momentos

Los resultados que arrojaron las pruebas de Shapiro Wilk, para saber si los datos se ajustan a una distribución normal (ver Figura 25) son:

Figura 25. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo B2 para cada uno de los momentos

> shapiro.test(B21) data: B21 W = 0.9316, p-value = 0.3571	> shapiro.test(B22) data: B22 W = 0.9045, p-value = 0.2795	> shapiro.test(B23) data: B23 W = 0.5894, p-value = 0.0002041
--	--	---

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 25 se observa en la prueba Shapiro-Wilk que la hipótesis de normalidad se cumple para el primer y segundo momento en el grupo B2, por el contrario el tercer momento no cumple dicho supuesto. Por lo anterior entre el primer y segundo momento se realiza una prueba t-student, para las otras comparaciones se utiliza la prueba de Wilcoxon.

Teniendo en cuenta la premisa anterior, a continuación se muestra la prueba t de comparación de medias. La hipótesis nula es que no existe una diferencia significativa entre la media en el primer y segundo momento en las respuestas del grupo B2.

Figura 26. Prueba t-student para comparar medias del grupo B1 en el primer y segundo momento

```
Paired t-test
data: B21 and B22
t = -2.4474, df = 8, p-value = 0.0401
alternative hypothesis: true difference
in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-7.3373370 -0.2182185
sample estimates:
mean of the differences -3.777778
```

Se observa que el p valor es igual a 0.08894. Por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05, se tiene que existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo en el primer y segundo momento.

Las pruebas Wilcoxon de comparación de medias entre el segundo y tercer momento del grupo y entre el primer y tercer momento del grupo arrojó lo siguiente:

Figura 27. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo A1 en los momentos (2—3) y (1-3)

<pre>wilcoxon.test(Tiempo1,Tiempo3) data: B11 and B13 V = 218, p-value = 0.01521 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon.test(Tiempo2,Tiempo3) data: B12 and B13 V = 301, p-value = 0.0001932 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
--	--

La hipótesis nula es que no existe una diferencia significativa entre la media en el primer y tercer momento en las respuestas del grupo B2. Se observa que el p valor es igual a 0.01521 para el primer y tercer momento, por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05, se rechaza la hipótesis nula, luego existe una

diferencia significativa entre las medias del grupo B2 en el primer y tercer momento. Se observa que el p valor es igual a 0.00019, a un nivel de significancia del 0.05, se rechaza la hipótesis nula, esto es que existe una diferencia significativa entre las medias del grupo B2 en el segundo y tercer momento. En conclusión, este grupo se comportó estadísticamente similar en las tres pruebas realizadas.

A continuación, se realiza un análisis de varianza para comparar las medias entre grupos (B1 y B2) para cada uno de los momentos.

Análisis de varianza para los grupos B1 y B2 en el primer momento.

Se realizó una prueba no paramétrica de Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo B1 y B2 en la primera prueba, dado que el conjunto de datos del grupos en el primer momento, no se ajustaron a una distribución normal como mostraron los test de Shapiro-Wilk (Figura 23 para el grupo B1 en el primer momento y Figura 25 para el grupo B2 segundo momento).

La Figura 28 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de medias de los grupos B1 y B2 en el primer momento.

Figura 28. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el primer momento

```
wilcoxon.test(B11,B21)
data: B11 and B21
W = 297, p-value = 0.2777
alternative hypothesis: true
location shift is not equal to 0
```

Se observa que para un nivel de significancia del 0.05, la hipótesis nula no se rechaza, es decir, no existe diferencia estadísticamente significativa entre las medias de los grupos B1 y B2 en el primer momento.

Análisis de varianza para los grupos B1 y B2 en el segundo momento.

La prueba de normalidad Shapiro-Wilk para el grupo B1 en el primer momento arrojó que los dato no tienen una distribución normal (ver Figura 29). Luego realizan la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo B1 y B2 se tiene:

Figura 29. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el segundo momento

```
wilcoxon.test(B12,B21)
data: B12 and B22
W = 123, p-value = 0.4393
alternative hypothesis: true
ocation shift is not equal to 0
```

Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos B1 y B2 en el segundo momento.

Análisis de varianza para los grupos B1 y B2 en el tercer momento

Las pruebas de normalidad Shapiro-Wilk para los dos grupos en el tercer momento rechazan el supuesto de que los datos se ajustan a una distribución normal (ver Figura 30). Luego, la prueba no paramétrica de Wilcoxon es la apropiada para comparar las medias entre los dos grupos en el tercer momento.

La Figura 30 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo B1 y B2 en el tercer momento,

Figura 30. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos B1 y B2 en el tercer momento

```
wilcoxon.test(B13,B23)
data: B13 and B23
W = 87.5, p-value = 0.7755
alternative hypothesis: true
location shift is not equal to 0
```

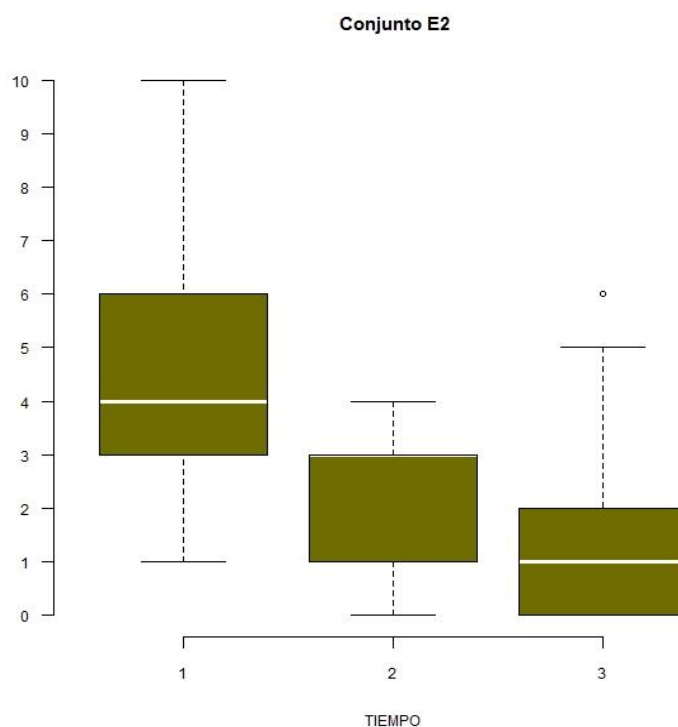
Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos B1 y B2 en el tercer momento.

El análisis estadístico muestra que los dos grupos de estudiantes del curso de bioestadística I no presentaron diferencias significativas en su rendimiento en ninguna de las pruebas realizadas.

6.5. ANALISIS DE LAS RESPUESTAS DEL CONJUNTO E2

Las Figura 31, que se muestra a continuación, son los diagramas de caja del número de respuestas correctas de los estudiantes en cada prueba del conjunto E2 (estudiantes que cursaban estadística II), en cada uno de los tres momentos. La puntuación máxima en la primera prueba fue de 14 puntos, en la segunda prueba fue de 13 puntos y en tercera prueba de 14 puntos.

Figura 31. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del conjunto E2 en cada prueba.



En el primer diagrama de caja de la Figura 31 se observa que 50% de los estudiantes obtuvieron puntajes entre 1 y 4 ítems correctamente en la primera prueba. En la segunda prueba, el 50% de los datos se encuentran entre 0 y 3, en la tercera prueba el 50% de las respuestas se encuentran entre 0 y 1, lo que evidencia puntajes cada vez más bajos al transcurrir el tiempo.

6.5.1. Análisis de los resultados de los grupos C1 y C2 de estadística Inferencial

Las Figuras que se muestran a continuación son los diagramas del número de respuestas correctas de los estudiantes en cada momento para cada grupo (C1 y C2) de estadística inferencial, en cada uno de los tres momentos.

Figura 32. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo C1 de estadística inferencial en cada prueba.

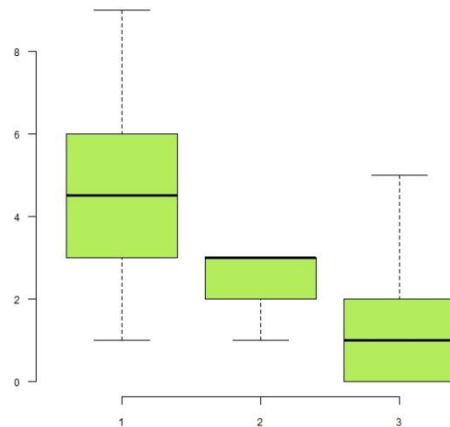
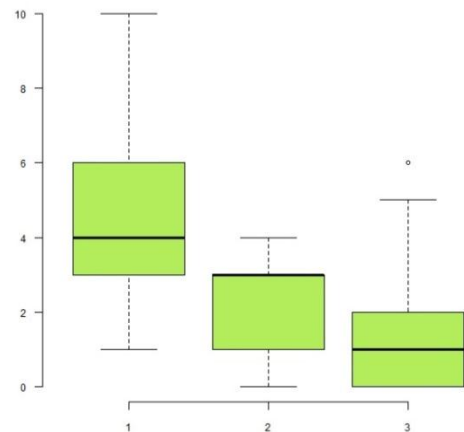


Figura 33. Diagrama de cajas del número de respuestas correctas de los estudiantes del grupo C2 de estadística inferencial en cada prueba.



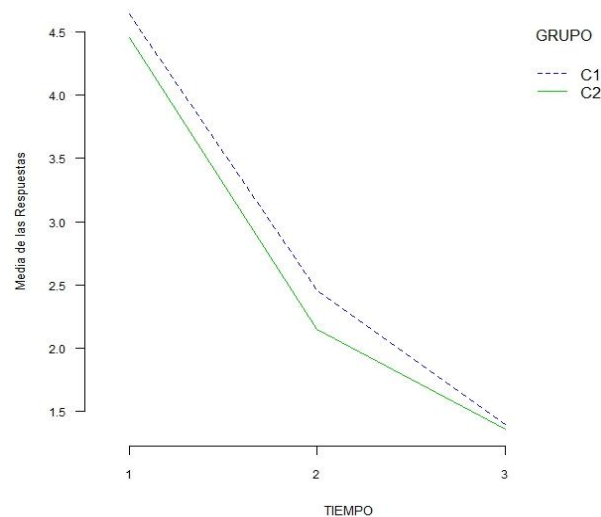
En ambos diagramas se observa un comportamiento similar entre los grupos en cada uno de los tres momentos. En el primer momento el 75% de las notas para los dos grupos fue mayor a 3, en el segundo momento el 75% de las notas, de los dos grupos, fue menor a 3, es de resaltarse que el 50% de las notas del grupo C1 fueron iguales a 3 (la mediana es igual al tercer cuartil y al límite superior), en el tercer momento el 75% de las respuestas, de los dos grupos, son menores a 2, se resalta que el 25% (la cuarta parte) de las notas de los dos grupos fueron iguales a 0, el límite inferior es igual al primer cuartil.

De todo lo anterior se pueden observar diferencias entre las medias entre los momentos de cada uno de los grupos, se observa que la mediana disminuye conforme aumenta el tiempo, de igual manera se observan diferencias entre la dispersión de los resultados en cada uno de los momentos, las cajas conforme aumenta el tiempo cambian de longitud, en el primer momento se observan distribuciones simétricas, en el segundo momento las dos cajas muestran

distribuciones asimétricas a la izquierda, es decir, valores relativamente muy pequeños y finalmente en el tercer momento se observan distribuciones asimétricas a la derecha, es decir, se presentaron valores relativamente grandes comparativamente con el resto.

La Figura 34 muestra el factor puntaje de respuestas correctas de los estudiantes para los tres momentos (en el eje vertical se muestra la media de las respuestas) y los niveles grupos (C1 y C2) del curso de estadística inferencial.

Figura 34. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para cada grupo de estadística inferencial



La Figura 34 muestra que a medida que aumenta el tiempo, el promedio de las respuestas de los estudiantes disminuye. El hecho de que a medida que transcurre el tiempo disminuya la media de los puntajes de los estudiantes en la prueba, evidencia el hecho que los estudiantes al iniciar el curso recuerdan los procedimientos y los conceptos adquiridos en el curso inmediatamente anterior y que después se acentúa el olvido.

Análisis de varianza del grupo C1 de estadística inferencial en los diferentes momentos

Los resultados que arrojaron las pruebas de Shapiro Wilk, para saber si los datos se ajustan a una distribución normal (Ver Figura 35) son:

Figura 35. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo C2 para cada uno de los momentos

<pre>> shapiro.test(c11) data: c11 W = 0.9331, p-value = 0.3372</pre>	<pre>> shapiro.test(c12) data: c12 W = 0.7056, p-value = 0.0006317</pre>	<pre>> shapiro.test(c13) data: c13 W = 0.8152, p-value = 0.02217</pre>
---	--	--

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 35 se observa en la prueba Shapiro-Wilk que la hipótesis de normalidad se cumple para el primer en el grupo C1, por el contrario para el segundo y el tercer momento no se cumple dicho supuesto.

Teniendo en cuenta la premisa anterior se realiza la prueba de Wilcoxon, acordando que la hipótesis nula es que es que las medias de cada uno de los momentos son iguales.

Figura 36. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo C1 en los diferentes momentos

<pre>wilcoxon(Tiempo1,Tiempo2) data: c11 and c12 V = 45, p-value = 0.008969 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon(Tiempo2,Tiempo3) data: c12 and c13 V = 30.5, p-value = 0.08728 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon(Tiempo1,Tiempo3) data: c11 and c13 V = 45, p-value = 0.00903 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
--	---	---

En la Figura 36 se observa que para los momentos 1 y 2, el p-valor es igual a 0.0089. Por lo cual, a un nivel de significancia del 0.05, existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo en el primer y segundo momento del grupo C1. Para los momentos 2 y 3, se observa que el p-valor es igual 0.0872. Por lo tanto se tiene que no existe una diferencia significativa entre el segundo y tercer momento. Para los momentos 1 y 3, se observa que el p-valor es de

0.0090. Luego, existe una diferencia significativa entre primer y tercer momento. En conclusión, estos estudiantes presentaron un cambio en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un nivel diferente que se refleja un rendimiento aún más bajo que en la primera prueba.

Análisis de varianza del grupo C2 de estadística inferencial en los diferentes momentos

Los resultados que arrojaron las pruebas de Shapiro Wilk, muestran que el conjunto de datos no se ajusta a una distribución normal (Ver Figura 37)

Figura 37. Prueba de normalidad Shapiro Wilk de los resultados del grupo C2 para cada uno de los momentos

<pre>> shapiro.test(C21) data: C21 W = 0.9611, p-value = 0.1432</pre>	<pre>> shapiro.test(C22) data: C22 W = 0.8932, p-value = 0.00356</pre>	<pre>> shapiro.test(C23) data: C23 W = 0.8398, p-value = 0.000112</pre>
---	--	---

La hipótesis nula en la prueba Shapiro-Wilk es que los datos se ajustan a una distribución normal. En la Figura 37 se observa en la prueba Shapiro-Wilk que la hipótesis de normalidad se cumple para el primer momento en el grupo C2, por el contrario, para el segundo y el tercer momento no se cumple dicho supuesto.

Figura 38. Pruebas Wilcoxon para comparar medias del grupo C2 en los diferentes momentos

<pre>wilcoxon(Tiempo1,Tiempo2) data: C21 and C22 V = 439, p-value = 2.037e-05 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon(Tiempo2,Tiempo3) data: C22 and C23 V = 221.5, p-value = 0.03969 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>	<pre>wilcoxon(Tiempo1,Tiempo3) data: C21 and C23 V = 582, p-value = 1.107e-06 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0</pre>
--	--	--

En la Figura 38 se observa que para los momentos 1 y 2, existe una diferencia significativa entre los resultados del grupo en el primer y segundo momento del grupo C2. Para los momentos 2 y 3, se observa que el p-valor es igual 0.03969.

Por lo tanto se tiene que existe una diferencia significativa entre el segundo y tercer momento. Para los momentos 1 y 3, existe una diferencia significativa entre primer y tercer momento.

En conclusión, estos estudiantes presentaron un cambio en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un nivel diferente que se refleja un rendimiento aún más bajo que en la primera prueba.

A continuación, se realiza un análisis de varianza para comparar las medias entre grupos (C1 y C2) para cada uno de los momentos.

Análisis de varianza para los grupos C1 y C2 en el primer momento.

Se realizó una prueba no paramétrica de Welch para la comparación de las medias del grupo C1 y C2 en la primera prueba, dado que el conjunto de datos del grupos en el primer momento, se ajustaron a una distribución normal como mostraron los test de Shapiro-Wilk (Figura 35, para el grupo C1 en el primer momento y Figura 37 para el grupo C2 segundo momento).

La Figura 39 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de medias de los grupos C1 y C2 en el primer momento.

Figura 39. Prueba de Welch para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el primer momento

```
welch Two Sample t-test
data:  C11 and C21
t = 0.2771, df = 22.265, p-value = 0.7843
alternative hypothesis: true
difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.220304  1.596928
sample estimates:
mean of x mean of y 4.642857  4.454545
```

Se observa que el p valor es igual a 0.7843. Por lo cual, no se rechaza la hipótesis nula luego, no existe diferencia significativa entre las medias de los grupos C1 y C2 en el primer momento.

Análisis de varianza para los grupos C1 y C2 en el segundo momento.

La prueba de normalidad Shapiro-Wilk para el grupo B1 en el primer momento arrojó que los dato no tienen una distribución normal (ver Figura 40). Luego realizan la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo C1 y C2 se tiene:

Figura 40. Prueba de Wilconxon para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el segundo momento

```
wilcoxon.test(C12,C22)
data: C12 and C22
W = 238, p-value = 0.5574
alternative hypothesis: true
location shift is not equal to 0
```

Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos C1 y C2 en el segundo momento.

Análisis de varianza para los grupos C1 y C2 en el tercer momento

La pruebas de normalidad Shapiro-Wilk para los dos grupos en el tercer momento rechazan el supuesto de que los datos se ajustan a una distribución normal (ver Figuras 35 y 37). Luego, la prueba no paramétrica de Wilcoxon es la apropiada para comparar las medias entre los dos grupos en el tercer momento.

La Figura 41 muestra la prueba Wilcoxon para la comparación de las medias del grupo C1 y C2 en el tercer momento,

Figura 41. Prueba de Wilcoxon para comparar medias de los grupos C1 y C2 en el tercer momento

```
wilcoxon.test(C13,C13)
data: C13 and C23
W = 182, p-value = 0.9669
alternative hypothesis: true
location shift is not equal to 0
```

Para un nivel de significancia del 0.05, el p-valor es mayor que el nivel de significancia por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos C1 y C2 en el tercer momento.

El análisis estadístico muestra que los dos grupos de estudiantes del curso de estadística inferencial no presentaron diferencias significativas en su rendimiento en ninguna de las pruebas realizadas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS DEL MODELO LINEAL MIXTO

Los resultados de la aplicación del modelo lineal mixto fueron calculados con el programa R versión 2.14.1 y los paquetes lme4 y nlmer de R, paquetes que permiten utilizar la metodología de modelos lineales mixtos.

Para modelar el cambio en el razonamiento bayesiano de los estudiantes, se utiliza el modelo lineal mixto que permitirá la explicación de la variable respuesta (número de respuestas correctas de los estudiantes en cada una de las pruebas) en términos de los factores medidos en la investigación (grupos, tiempo y profesor).

Una cuestión importante en la adecuación del modelo es la correcta especificación de la estructura de los efectos fijos y aleatorios. Para especificar tales estructuras se consideraron previamente las posibles variables y se establecieron a partir de las interacciones que surgieron del análisis descriptivo. A partir de tales estructuras se propusieron varios modelos que se compararon mediante pruebas de bondad de ajuste y criterios de información.

Uno de los objetivos propuestos en esta investigación es modelar el cambio en el razonamiento bayesiano de los estudiantes a partir de los resultados que se dieron en las tres pruebas que fueron aplicadas en diferentes momentos del curso, es decir, proponiendo como variable explicativa de los resultados el tiempo, aunque puede ser que existan otras variables que influyan en la modelación de tal cambio.

Las siguientes Figuras muestran el diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para todos los estudiantes del curso de bioestadística I (Figura 42 de la izquierda) y de estadística para ingenieros (Figura 43 de la derecha).

Figura 42. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para todos los estudiantes del curso de bioestadística I

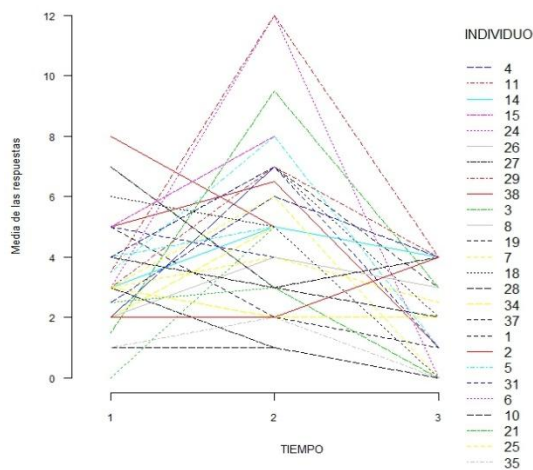
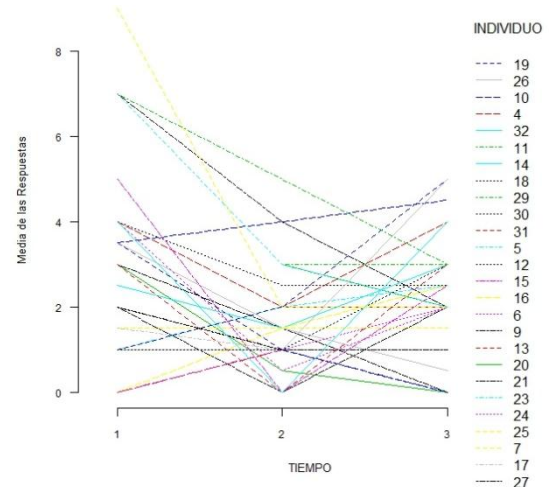


Figura 43. Diagrama de interacción de la media de las respuestas correctas versus el tiempo para todos los estudiantes del curso de estadística para ingenieros



En la Figura 42 de la izquierda se observa el comportamiento que ya se había revelado en el análisis descriptivo de los estudiantes de bioestadística I, para quienes la media de las respuestas correctas en la segunda prueba presentó un crecimiento y luego decayó en la tercera prueba. En cuanto al comportamiento de la media de las respuestas de los estudiantes de estadística para ingenieros fue diferente, en la segunda prueba decayó y presentó un crecimiento en la tercera prueba, pero con resultados bajos comparados con los resultados obtenidos en el primer momento. Las líneas incompletas muestran hasta que momento el estudiante fue medido en su razonamiento, es decir, son aquellos estudiantes que no presentaron todas las pruebas.

El modelo que propuesto inicialmente en la presente investigación para explicar las diferencias intra-individuales respecto al tiempo era:

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}(time)_j + \varepsilon_{ij}$$

Donde este primer nivel explica las diferencias intra-individuales a través del tiempo.

Las diferencias entre individuos se esperaban que las explicara otras variables, como el grupo o el profesor.

$$\beta_{0i} = \gamma_{00} + \gamma_{01}G_i + \gamma_{02}P_i + \rho_{0j}$$

$$\beta_{1i} = \gamma_{10} + \gamma_{11}G_i + \gamma_{12}P_i + \rho_{1j}$$

Se comenzó el estudio proponiendo un modelo que solamente explicara las diferencias intra-individuales en términos de la media de las respuestas correctas de todos los individuos (β_{0i}), sin variables explicativas en el segundo nivel.

El modelo propuesto, en el primer nivel es:

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \varepsilon_{ij}$$

Y el segundo nivel;

$$\beta_{0i} = \gamma_{00} + \rho_{0j}$$

La varianza estimada para el primer nivel es de $\varepsilon_{ij}^2 = 1,44167 \times 10^{-8}$, la varianza para el segundo nivel es de $\rho_{0i}^2 = 0.020593$ y el intercepto de $\gamma_{00} = 2.874074$. La varianza estimada para el primer nivel (ε_{ij}^2) muestra un valor muy bajo para la variabilidad intra-individual, esto quiere decir que las diferencias

entre los resultados de cada individuo es mínima, prácticamente nula. Este resultado, muestra que no es significativo indagar por las diferencias entre individuos ya que estadísticamente se podría decir que los individuos presentaron el mismo puntaje en todos los momentos.

Para estar seguros del resultado anterior se modelo los resultados de los individuos en términos del tiempo para el primer nivel con el fin de explicar las diferencias intra-individuales y en el segundo nivel sin variable explicativa.

Primer Nivel

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}(time)_j + \varepsilon_{ij}$$

Segundo Nivel

$$\beta_{0i} = \gamma_{00} + \rho_{0j}$$

$$\beta_{1i} = \gamma_{10} + \rho_{1j}$$

Los resultados estimados para el modelo anterior fueron de; la varianza estimada para el primer nivel $\varepsilon_{ij}^2 = 0.00000693286$, la varianza para el segundo nivel en el intercepto es de $\rho_{0j}^2 = 0.1435$ y la varianza en el segundo nivel para la pendiente es de $\rho_{1j}^2 = 0.0002090664$ y el intercepto $\gamma_{00} = 2.874074$. Este modelo reafirma las suposiciones anteriores que el modelo no se ajusta a los datos, los resultados son prácticamente nulos.

PERFIL DE DESARROLLO DE LOS ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON LAS TRES PRUEBAS

A continuación se realiza el análisis de las respuestas de solo los estudiantes que presentaron las tres pruebas, es decir, se descartaron los estudiantes que presentaron solo una o dos pruebas. Teniendo en cuenta que se pretende conocer cómo cambia el razonamiento bayesiano en los estudiantes a lo largo del curso, a continuación se analizan los resultados de acuerdo al tipo de problema: problemas en que se requiere aplicar el teorema de Bayes, problemas en que se pide calcular una probabilidad condicional que se obtiene en forma directa, o una probabilidad conjunta, o una probabilidad marginal directa o una que requiera el uso del teorema de probabilidad total.

8.1. Los estudiantes del curso de estadística para ingenieros

De los 51 estudiantes de estadística para ingenieros, 26 de ellos presentaron todas las pruebas. A continuación en la Tabla 24 se presentan los ítems junto a su respectivo contenido, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas para cada una de las pruebas de acuerdo al tipo de problema.

Tabla 20. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de estadística para ingenieros a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.

PRIMERA PRUEBA			SEGUNDA PRUEBA			TERCERA PRUEBA		
Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas
3	7	27%	3	7	27%	1	4	15%

4	6	23%	6	0	0%	2	4	15%
5	10	38%	11	10	38%	3	3	12%
6	0	0%	5	1	4%	4	10	38%
7	9	35%	8	0	0%	5	0	0%
10	5	19%	9	0	0%	6	4	15%
13	8	31%	10	0	0%	7	0	0%
14	9	35%	12	0	0%	8	17	65%
12	0	0%	13	0	0%	9	0	0%
2	8	31%	2	11	42%	11	21	81%
9	0	0%	4	2	8%	13	6	23%
11	3	12%	1	21	81%	14	2	8%
1	9	35%	7	1	4%	10	0	0%
8	5	19%				12	6	23%

	Probabilidad Condicional		Probabilidad Marginal
	Teorema de Probabilidad Total		Probabilidad Conjunta
	Teorema de Bayes		

La siguiente Tabla muestra el promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística para ingenieros.

Tabla 21. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística para ingenieros

	Cursos de Estadística	Primera Prueba	Segunda Prueba	Tercera Prueba
		Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros
Contenido	Probabilidad condicional	26%	22%	16%
	Teorema de Bayes	0%	1%	29%
	Teorema de Probabilidad Total	19%	4%	12%
	Probabilidad Conjunta	14%	17%	15%
	Probabilidad Marginal	35%	81%	

El grupo de ingenieros en la segunda prueba presentó avances en los ítems relacionados con probabilidades marginales y conjuntas, temas que los estudiantes habían acabado de estudiar. Sin embargo, en los temas que requerían la coordinación e integración de estas probabilidades los porcentajes disminuyeron: en probabilidad condicional (de 26% a 22%), en el teorema de probabilidad total (19% a 4%), conservándose el mismo porcentaje, casi nulo, en los ítems relacionados con el teorema de Bayes que todavía no habían

estudiado en el salón de clase. Respecto a este último, se presentó un significativo avance en el tercer cuestionario posterior a la instrucción recibida sobre este tema. Igual sucedió con el teorema de probabilidad total. Comparando el primer y último momento, los avances claros de este grupo se dieron en los ítems relacionados con el teorema de Bayes, en tanto que con la probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total las respuestas de carácter aritmético de la primera prueba fueron más exitosas que los razonamientos basados en los modelos probabilísticos de la tercera prueba.

8.2. Los estudiantes del curso de bioestadística

De los 51 estudiantes de bioestadística I, 32 de ellos presentaron todas las pruebas. A continuación en la Tabla 26 se presentan los ítems junto a su respectivo contenido, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas para cada una de las pruebas de acuerdo al tipo de problema.

Tabla 22. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de bioestadística I a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.

PRIMERA PRUEBA			SEGUNDA PRUEBA			TERCERA PRUEBA		
Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas
3	10	31%	3	16	50%	1	1	3%
4	9	28%	6	9	28%	2	1	3%
5	15	47%	11	6	19%	3	16	50%
6	1	3%	5	11	34%	4	15	47%
7	6	19%	8	11	34%	5	0	0%
10	0	0%	9	2	6%	6	2	6%
13	13	41%	10	8	25%	7	0	0%
14	7	22%	12	10	31%	8	19	59%
12	0	0%	2	14	44%	9	0	0%
2	14	44%	4	13	41%	11	6	19%
9	3	9%	13	15	47%	13	1	3%
11	2	6%	1	26	81%	14	0	0%
1	24	75%	7	9	28%	10	0	0%
8	6	19%				12	8	25%

	Probabilidad Condicional		Probabilidad Marginal
	Teorema de Probabilidad Total		Probabilidad Conjunta
	Teorema de Bayes		

La siguiente Tabla muestra el promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de bioestadística I.

Tabla 23. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de bioestadística I.

	Cursos de Estadística	Primera Prueba	Segunda Prueba	Tercera Prueba
		Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros
Contenido	Probabilidad condicional	24%	32%	21%
	Teorema de Bayes	0%	26%	14%
	Teorema de Probabilidad Total	19%	28%	13%
	Probabilidad Conjunta	20%	44%	6%
	Probabilidad Marginal	19%	81%	

De la Tabla 27 cabe destacar el considerable aumento en el porcentaje de respuestas correctas en todos los aspectos al pasar de la primera prueba a la segunda, así como también el descenso, igualmente considerable, en el tercer cuestionario, en los aspectos evaluados en esta última prueba. El descenso también se dio respecto a la primera prueba en los temas de probabilidad conjunta (de 20% a 6%) y el teorema de probabilidad total (de 19% a 13%).

8.3. Los estudiantes del curso de estadística inferencial

De los 62 estudiantes de estadística inferencial, 33 de ellos presentaron todas las pruebas. A continuación en la Tabla 28 se presentan los ítems junto a su respectivo contenido, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas para cada una de las pruebas de acuerdo al tipo de problema.

Tabla 24. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de estadística inferencial a cada uno de los ítems según su contenido para las tres pruebas.

PRIMERA PRUEBA			SEGUNDA PRUEBA			TERCERA PRUEBA		
Ítems	Cantidad	% de	Ítems	Cantidad	% de	Ítems	Cantidad	% de

	de Respuestas Correctas	Respuestas Correctas		de Respuestas Correctas	Respuestas Correctas		de Respuestas Correctas	Respuestas Correctas
3	16	48%	3	18	55%	1	1	3%
4	16	48%	6	0	0%	2	1	3%
5	25	76%	11	11	33%	3	9	27%
6	6	18%	5	0	0%	4	10	30%
7	9	27%	8	0	0%	5	0	0%
10	1	3%	9	0	0%	6	3	9%
13	15	45%	10	0	0%	7	1	3%
14	4	12%	12	0	0%	8	8	24%
12	1	3%	2	15	45%	9	0	0%
2	18	55%	4	2	6%	11	10	30%
9	1	3%	13	0	0%	13	0	0%
11	5	15%	1	27	82%	14	0	0%
1	29	88%	7	0	0%	10	0	0%
8	7	21%				12	0	0%

	Probabilidad Condicional		Probabilidad Marginal
	Teorema de Probabilidad Total		Probabilidad Conjunta
	Teorema de Bayes		

La siguiente Tabla muestra el promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística inferencial.

Tabla 25. Promedio de los porcentajes de las respuestas correctas según el contenido de los ítems para las tres pruebas de los estudiantes de estadística inferencial.

		Primera Prueba	Segunda Prueba	Tercera Prueba
Cursos de Estadística		Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros	Estadística para Ingenieros
Contenido	Probabilidad condicional	35%	29%	13%
	Teorema de Bayes	3%	0%	10%
	Teorema de Probabilidad Total	21%	0%	0%
	Probabilidad Conjunta	24%	17%	9%
	Probabilidad Marginal	88%	82%	

En el grupo de estadística inferencial en la primera prueba presentaron un buen rendimiento, quizás porque recordaban los temas que habían visto el semestre anterior, en la segunda prueba presentan avances en los ítems relacionados

con probabilidades conjuntas. Sin embargo, en los temas que requerían la coordinación e integración de estas probabilidades los porcentajes disminuyeron: en probabilidad condicional (de 35% a 29%), en el teorema de probabilidad total (21% a 0%). En una dirección opuesta se encuentran los resultados del teorema de Bayes que pasó de 3% a 10% de éxitos. Comparando el primer y último momento, se observa un decaimiento respecto a la probabilidad condicional y el teorema de probabilidad total, algo que se podría explicar por el olvido de estos temas que habían cursado el semestre anterior. El progreso observado respecto al teorema de Bayes, se puede considerar parcial dado que los ítems 8 y 11 en la tercera prueba, donde los porcentajes de éxito fueron 24% y 30% respectivamente, son ítems de opción múltiple donde la opción correcta es claramente distinguible de las otras dos y que por su extensa operatividad pudo haber estimulado el recuerdo de los estudiantes que lo asociaban con un proceso engorroso algebraicamente. En los demás ítems el rendimiento fue casi nulo.

ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS RESPUESTAS

En este capítulo se realiza el análisis cualitativo con el fin de observar la transformación en los niveles de comprensión de los diversos elementos implicados en el razonamiento bayesiano, así como identificar cuáles fueron las intuiciones que permanecieron y desaparecieron como consecuencia del proceso de instrucción. De acuerdo al análisis realizado en el apartado 8.2 que mostró que los resultados verdaderamente diferentes en algunas de las pruebas realizadas fueron los obtenidos por los estudiantes de bioestadística I y que alcanzaron el mejor nivel después de la instrucción recibida, limitamos este análisis cualitativo a los 32 estudiantes de estos cursos que presentaron las tres pruebas.

Para este análisis, se utiliza la siguiente notación entre paréntesis: (Nro. Prueba-Nro. Del ítem) con el fin de facilitar la identificación del ítem a que se hace referencia y a que prueba pertenece; por ejemplo, (II-8) hace referencia al ítem 8 de la segunda prueba.

Respecto a la probabilidad condicional

Los ítems que indagaban por probabilidades condicionales directas se presentaron en diferentes formatos y contextos aplicados en las tres pruebas:

1. Tablas 2x2 con datos en frecuencias absolutas: ítems 3 y 4 en la primera prueba [(I-3) y (I-4)]; ítem 3 en la segunda prueba (II-3) e ítems 3 y 4 en la tercera prueba [(III-3) y (III-4)].
2. Con información sobre la conjunta y la marginal necesarias.

- Con formato porcentual y de opción múltiple: ítem 5 en la primera prueba (I-5)
- Con formato de probabilidad con decimales, pregunta abierta: ítem 6 de la segunda prueba (II-6).
- Exige el cálculo de valores esperados: ítem 1 y 2 de la tercera prueba [(III-1) (III-2)].
- Información en frecuencias absolutas que obliga a utilizar una conjunta triple y el teorema de probabilidad total con intersecciones: ítem 5 de la tercera prueba (III-5).

3. Identificar la notación condicional.

- Distinguir probabilidades condicionales asociadas a una situación causal y a una diagnóstica: ítem 7 de la prueba 1 (I-7)
- Identificar la notación condicional y marginal Información en frecuencias relativas (“5 de cada 1000”) y se trata de: ítem 11 de la segunda prueba (II-11).

4. Restricción del espacio muestral: ítem 6 de la primera prueba (I-6).

5. Contexto temporal: ítem 10, ítem 13 e ítem 14 de la primera prueba [(I-10); (I-13) y (I-14)].

A continuación analizamos el desarrollo que experimentó la argumentación de los estudiantes dependiendo de la forma como se presentó y fue formulada la pregunta:

1. *Tablas 2x2 con datos en frecuencias absolutas*

Al observar los porcentajes de éxito de los estudiantes en este tipo de problemas en las tres pruebas realizadas se observa un desarrollo interesante: de 30% de éxito en la primera prueba ascienden a 50% en la segunda que se mantiene igual en la tercera prueba. Este resultado nos permite afirmar que cuando la información se presenta en Tablas, los estudiantes no solamente obtienen más fácilmente la información requerida sino que esta habilidad la mantienen a través del tiempo. Esta conclusión, aunque en menor grado, también es válida para los estudiantes de estadística para ingenieros. En el caso de los estudiantes de estadística II, estos ítems que fueron los de mejor rendimiento en todas las pruebas, aunque descendieron en la tercera prueba obtuvieron porcentajes de éxito por encima del 27%.

A pesar del éxito registrado, las malas concepciones no dejaron de presentarse:

- La probabilidad condicional se asimiló con una probabilidad conjunta (ver c de la Figura 44). Mostrando que para algunos estudiantes estas dos probabilidades son exactamente la misma cosa. Esta confusión se manifestó en todas las pruebas realizadas, evidenciando que esta intuición es muy difícil de erradicar en algunos estudiantes, hecho que obliga a ser más creativos en los procesos de instrucción para confrontarla directamente.

Figura 44. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de la primera prueba

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón? $\frac{75}{720} = 0,09$

Rta: La probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque es de 0,09

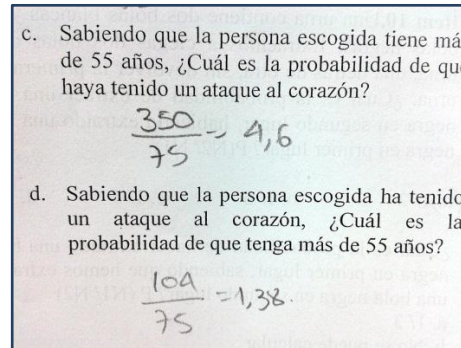
c. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

$\frac{75}{780} = 0,09$

Rta: La probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón es de 0,09.

- Las respuestas que asignan valores a la probabilidad superiores a 1 producto de invertir la expresión de la probabilidad condicional (Ver Figura 45). Este comportamiento se presenta en todas las pruebas.

Figura 45. Respuesta de un estudiante a los ítems 3 y 4 de la primera prueba



Vale la pena observar que en este grupo de estudiantes en estos problemas con información en Tabla no se presentó la falacia de la probabilidad inversa (Falk, 1986).

2. Con información sobre la conjunta y la marginal

Como es propio de los ítems de opción múltiple (I-5), donde muchas veces es imposible conocer el argumento que condujo a la respuesta, el porcentaje de éxito fue de 47% superior al 33% que se podría obtener con respuestas aleatorias. Cuando la pregunta se realizó en forma abierta (II-6) el porcentaje disminuyó a 28%. Se presentaron respuestas que evidencian errores como el de asumir la probabilidad de la unión con una condicional (Ver Figura 46).

Figura 46. Respuesta de un estudiante al ítem 6 de la segunda prueba

Handwritten student response on a grid background:

Problemas resueltos es $0,10 \rightarrow A$
 Problemas de la semana $\rightarrow 0,25 \rightarrow B$
 Problemas de los dos $0,05$

$$A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0,10 + 0,25 - 0,05$$

$$= 0,3$$

En la tercera prueba los resultados correctos en este tipo de ítems fueron prácticamente nulos. En este último caso hay que reconocer que el nivel de dificultad era mayor que el de las pruebas anteriores, de hecho en los ítems 1 y 2 la pregunta indagaba por un valor esperado, en tanto que el ítem 5 (con ninguna respuesta acertada) requería el cálculo de una probabilidad conjunta de tres eventos y el cálculo de una marginal utilizando el teorema de probabilidad total contando con los valores de las probabilidades de las intersecciones requeridas. Los resultados de la tercera prueba son un reflejo de la incapacidad que tienen algunos estudiantes de integrar diferentes conceptos tratados en momentos distintos, en otras palabras, no establecen relaciones con otros conceptos lo que refleja que su aprendizaje no es suficientemente significativo (Ausubel, 1968). Además se dieron respuestas que evidencian que los estudiantes tratan de recordar fórmulas que vieron anteriormente y asumen Bayes para dar respuesta a una probabilidad condicional (Ver Figura 47).

Figura 47. Respuesta de un estudiante al ítem 1 de la tercera prueba

1. La probabilidad de que un vuelo programado salga a tiempo es de 0.83; la probabilidad de que llegue a tiempo es de 0.82, y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es de 0.78.

X 1.1 Si 100 aviones salen a tiempo de una terminal área ¿Cuántos de estos aviones aproximadamente llegarán a tiempo?

$$P(A_i/B) = \frac{0,83 \times 0,82}{0,83 \times 0,82 + 0,82 \times 0,78}$$
$$P(A_i/B) = 1.312$$

3. Identificar la notación condicional.

Se dio la falacia de la condicional transpuesta descrita por Falk (1986), 81% de los estudiantes cometieron este error (II, 11). Esta falacia no se presentó ni en la primera ni en la tercera prueba. Es pertinente aclarar que en el ítem 11(II, 11), se trataba de asociar un texto en lenguaje natural con el lenguaje algebraico, razón por la cual no se puede asimilar con los contextos donde previamente ha sido referenciada esta falacia (Falk, 1986; Yáñez, 2003; Díaz, 2007; Contreras, 2011). Esta equivocación en la interpretación de la notación clásica de probabilidad condicional puede estar inducida por una concepción temporal de la probabilidad condicional que conduzca al estudiante a asumir en su escritura como primer evento al evento condicionante. Esta falacia se presentó inicialmente (II, 7), donde los estudiantes identifican como igualmente probables la situación causal y diagnóstica, lo que pone de relieve que esta falsa concepción es refractaria a los procesos de instrucción.

4. Restricción del espacio muestral

El ítem 6 de la primera prueba dio lugar a errores como no identificar los casos posibles y los favorables con relación al nuevo espacio muestral. Además se dieron respuestas que evidenciaron el error de calcular una probabilidad marginal en lugar de una condicional. Esta confusión no se presentó ni en la primera ni en la tercera prueba.

5. Contexto temporal

Los ítems 10 y 14 de opción múltiple presentes en la primera prueba dieron lugar a la falacia del eje temporal descrita por Falk (1986). En estos ítems, de opción múltiple donde no se presentó ninguna respuesta correcta, se trata de hallar la probabilidad de un evento que es condicionado por otro que ocurre posteriormente, aspecto que se ha reportado en multitud de investigaciones (Díaz, 2007; Díaz y Batanero, 2009; Contreras, 2011) y que los estudiantes consideran “imposible” porque lo que ocurre antes no puede depender de lo que ocurre después. Esta manera de pensar puede estar asociada con *el enfoque en el resultado aislado* descrito por Konold (1991) y que básicamente hace referencia a una concepción de probabilidad basada en una realización del experimento aleatorio en contraposición del enfoque frecuencial de la probabilidad.

Respecto a la probabilidad conjunta

Los ítems que examinaban por probabilidades conjuntas se presentaron en diferentes formatos y contextos aplicados en las tres pruebas:

1. Tablas 2x2 con datos en frecuencias absolutas: ítem 2 en la primera prueba (I-2); ítem 2 en la segunda prueba (II-2).
2. Uso de la regla del producto:

- Con formato porcentual en sucesos dependientes: el ítem 11 en la primera prueba (I, 11) y el ítem 4 en la segunda prueba (II-4).
 - Con formato frecuencial en sucesos dependientes: ítem 13 en la segunda prueba (II-13).
 - Con formato decimal: ítem 6 en la tercera prueba (III-6).
3. Con formato porcentual para sucesos independientes: ítem 9 de la primera prueba (I-9).

A continuación analizamos el desarrollo que experimentó la argumentación de los estudiantes dependiendo de la forma como se presentó y fue formulada la pregunta:

1. Tablas 2x2 con datos en frecuencias absolutas

El porcentaje de éxito en este tipo de problemas pasó de 20% en la primera prueba a 44% en la segunda prueba, lo cual podría explicarse por la instrucción recibida sobre el tema dado antes de la segunda prueba.

A pesar del éxito registrado, las malas concepciones no dejaron de presentarse:

- La probabilidad conjunta se asimiló como una condicional hasta tal punto que cuando se indagó por ambas las respuestas fueron idénticas. En la primera prueba (ver b y c de la Figura 48) y en la segunda prueba (ver II y III de la Figura 49).

Figura 48. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de la primera prueba

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?

$$= \frac{75}{350} = 0.21$$

c. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

$$= \frac{75}{350} = 0.21$$

Figura 49. Respuesta de un estudiante a los ítems 2 y 3 de las segunda prueba

Ítem 1.

	Fuma	No Fuma	Total
Parece Trastornado	90	60	150
No Parece Trastornado	60	40	100
Total	150	100	250

I. Trastornos bronquiales = $\frac{150}{250} = \frac{3}{5} = 0.6$

II. Tenga Trastorno al Fumar = $\frac{90}{150} = \frac{3}{5} = 0.6$

III. Fume si tiene Trastorno = $\frac{90}{150} = 0.6$

4. Uso de la regla del producto:

El porcentaje de éxito en los ítems donde debe utilizarse la regla del producto para eventos dependientes mostró un comportamiento llamativo: de un 6% de respuestas correctas (I-11) a un 41% de (II-4) y para la tercera prueba un retorno a un 6% de éxitos (III-6). Cabe aclarar que el ítem 11 en la primera prueba es de pregunta abierta a diferencia del ítem 6 en la tercera prueba que es de opción múltiple y se debía identificar la regla del producto con las condicionales correctas para dar cuenta de una probabilidad conjunta con tres eventos. Si bien el ítem mencionado en la tercera prueba (III,6) se podría considerar, en principio, más complejo ya que se trataba de una conjunta con tres eventos primarios, el hecho de que se tratara de identificar entre varias respuestas hace que se considere válido para saber si los estudiantes habían asimilado suficientemente la regla del producto y eran capaces de identificarla en un contexto dado. Muchos de los estudiantes aplicaron la regla del producto para eventos independientes.

El resultado muestra que la regla del producto para eventos dependientes no fue suficientemente asimiladas por los estudiantes, no obstante que inmediatamente después de la instrucción un alto porcentaje de estudiantes

fueron capaces de escribir el modelo completamente y resolver el problema adecuadamente.

Un aspecto para resaltar es el buen uso del producto de porcentajes que utilizaron algunos estudiantes para hallar estas probabilidades conjuntas en lo que podríamos denominar la versión aritmética de la regla del producto.

Respecto al teorema de probabilidad total (TPT)

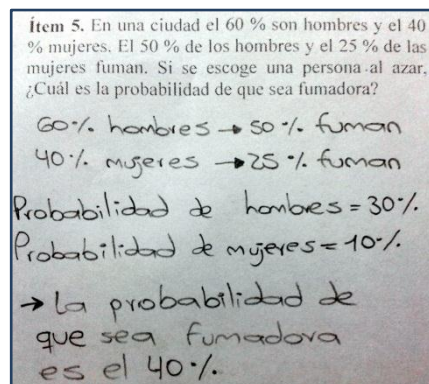
Los ítems que evaluaban el teorema de probabilidad total se presentaron en diferentes formatos y contextos que se describen a continuación, seguido del porcentaje de respuestas correctas de cada uno.

- Con formato porcentual: el ítem 8 en la primera prueba (I-8). 19% de respuestas correctas.
- Con problemas de Bayes: los ítems III-10 (sin respuestas correctas) y III-12 (25%). Este problema indaga por una condicional inversa que requiere calcular la probabilidad del evento condicionante con el teorema de probabilidad total.
- Modelo de urna: ítem II-7 (28%)

En los problemas con información porcentual (I-8 y III-12) los estudiantes obtuvieron porcentajes de relativo éxito al compararlos con otros ítems. El formato de estos problemas es congruente con el diagrama de árbol, de hecho el III-12 es un problema de tipo 7(i) en la clasificación de Yáñez (2001), lo que facilita su resolución. Esta compatibilidad entre este tipo de problemas con el árbol y los buenos resultados obtenidos, incluso en la primera prueba donde no había ocurrido ninguna instrucción específica dirigida a resolver este tipo de problemas, se podría pensar que está en la misma dirección de las investigaciones de Gigerenzer y Hoffrage (1995) a pesar de que en este caso en

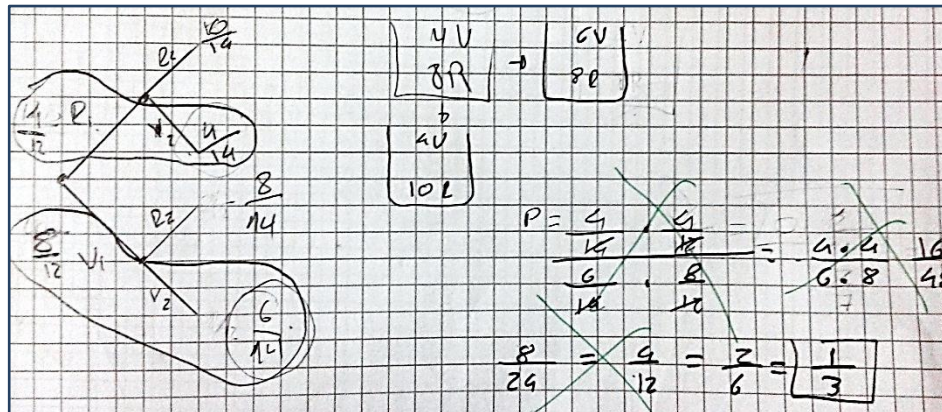
lugar de frecuencias naturales se tienen porcentajes. Los estudiantes que resolvieron bien el ítem 8 de la primera prueba, lo hicieron siguiendo el siguiente procedimiento: hallaron el 50% del 60% que es igual al 30% y lo sumaron con el 25% del 40% que es el 10%, como muestra la Figura 50.

Figura 50. Respuesta de un estudiante al ítem 8 de la primera prueba



Con el problema dado en modelo de urna (II-7) los estudiantes, después de la instrucción, utilizaron el diagrama de árbol para resolver el problema. Unos, los que obtuvieron éxito, lo utilizaron para representar la información que después reemplazaban en la fórmula de la probabilidad total; otros, en cambio, terminaban el proceso con el diagrama de árbol y no realizaban ninguna operación que les permitiera obtener el resultado (ver Figura 51). Esta relación entre el diagrama de árbol y la representación algebraica aparece también en los problemas de Bayes que se comentan más adelante.

Figura 51. Respuesta de un estudiante al ítem 7 de la segunda prueba



En términos evolutivos se puede decir que algunos estudiantes poseían intuiciones aritméticas relacionadas con el producto de porcentajes y con resultados marginales que, posteriormente se complementaron con el diagrama de árbol permitiéndoles mostrar buenos resultados en todos los momentos en que fueron evaluados. En este caso, la expresión algebraica propia del TPT fue utilizada por algunos estudiantes tanto en la segunda como en la tercera prueba.

Respecto al Teorema de Bayes

El análisis de las respuestas a los problemas del teorema de Bayes se presenta en dos partes: la primera trata exclusivamente los problemas de máquinas, problemas clásicos cuyo formato es tradicionalmente porcentual; la segunda trata de los otros problemas que exigían el uso del teorema de Bayes para poderlos resolver.

1. Problemas de máquinas

Con formato porcentual: (I-12), (II-12),

Con formato decimal: (II-8)

Con formato decimal y porcentual: (III-13), (III-14)

2. Problemas en otros contextos:

Con formato porcentual: (II-5), (II-10), (III-7), (III-11).

Con formato frecuencial: (II-9), (III-8), (III-9)

1. Los problemas de máquinas.

En Tabla 1 se presentan los ítems que plantean problemas de máquinas junto con la frecuencia y porcentaje de respuestas correctas para cada una de las pruebas.

Tabla 26. Frecuencias y porcentajes de las respuestas correctas de los estudiantes de bioestadística I a cada uno de los ítems que plantean problemas de máquinas para las tres pruebas.

PRIMERA PRUEBA			SEGUNDA PRUEBA			TERCERA PRUEBA		
Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	Ítems	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas
12	0	0%	8	11	34%	13	1	3%
			12	10	31%	14	0	0%

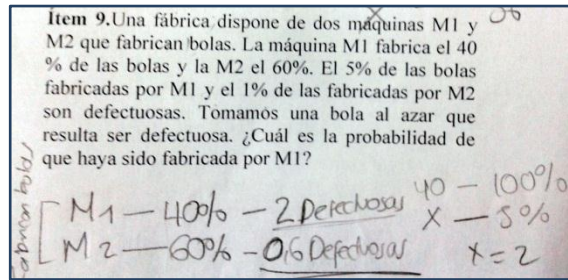
En la Tabla se observa un notable aumento en el porcentaje de éxito para la segunda prueba y un decaimiento fuerte para la tercera prueba de 33% a un 3%. A continuación se describen las respuestas de los estudiantes en cada prueba respecto a este tipo de problemas.

- En el test I los estudiantes recurren a la regla de tres para resolver el problema (Ver Figura 52), siendo la más usada la siguiente:

40 ----- 100%

X ----- 5%

Figura 52. Respuesta de un estudiante al ítem 12 de la primera prueba



Que es equivalente a calcular el porcentaje del porcentaje: $\%(M1) \times \%(D|M1) = 40\% \times 5\% = 2\%$ y que no es otra cosa que el $\%(M1 \text{ y } D)$. Los estudiantes no comprenden el significado de la pregunta que se les hace y terminan asimilándola con algo que es más fácil de entender y de calcular: la probabilidad o, mejor, el porcentaje de bolas defectuosas fabricadas por la máquina 1. Esta suposición se compadece con la regla de tres, cosa que no sucede con la pregunta sobre la condicional inversa que implica calcular el porcentaje total que representan las bolas defectuosas para luego hallar la proporción de las defectuosas fabricadas por la máquina M1, en un proceso que se podría asimilar como una estandarización.

- En el segundo test, los estudiantes que ya habían estudiado el teorema de Bayes y que conocían el diagrama de árbol, consiguen, salvo algunas excepciones, resolver el problema de las máquinas dado en formato decimal. Los estudiantes que no logran resolverlo es porque no logran hacer bien el árbol o no utilizan bien la regla de Bayes. Existieron estudiantes que lograron resolver el problema utilizando únicamente la regla de Bayes, así como ninguno pudo resolverlo basándose exclusivamente en el diagrama de árbol. A propósito del diagrama de árbol, la representación de los estudiantes termina en las probabilidades condicionales, no fue aprovechado para obtener directamente las intersecciones y menos para obtener las otras marginales: defectuosos y

no defectuosos. El árbol que construyen los estudiantes suministra los valores de las marginales y condicionales que los estudiantes utilizan para reemplazar en la regla de Bayes. Las dos representaciones están íntimamente ligadas, siendo el árbol el que suministra los valores para la regla de Bayes. Esta postura auxiliar del árbol se verá reflejada en el tercer test cuando los estudiantes solo sean capaces de construirlo y no sean capaces de realizar ningún cálculo.

- En el tercer test, se tiene un formato combinado: porcentajes para las marginales y decimales para las condicionales. Muchos estudiantes construyen el árbol pero no hacen nada con él, en tanto que otros, proponen una regla equivocada para el teorema de Bayes. Uno de los errores repetidos de los estudiantes en este problema es el que asume la probabilidad condicional $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)}{P(B)}$ (Ver Figura 53). Esta igualdad refleja la concepción de $\frac{A_i}{B}$ como un cociente y el operador P actuando individualmente sobre cada término del cociente.

Figura 53. Respuesta de un estudiante al ítem 13 de la tercera prueba

$$\textcircled{2} P(A_i|B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{0.07}{0.03} \cdot 0.03$$

$$P(A_i|B) = \frac{0.97}{0.97} = 1$$

Los análisis aritméticos, que pudiera sugerir la información dada en porcentajes, tal como habían ocurrido en la primera prueba, estuvieron totalmente ausentes en el tercer test, de hecho ningún estudiante construyó una regla de tres para

intentar resolver algún problema. Parece que los formatos en que se presentó la información no tuvieron efecto sobre el éxito en la solución de los problemas. En la segunda prueba, donde se obtuvieron la mayor cantidad de éxitos, había problemas en formato de porcentajes y en formato decimal que fueron resueltos con la misma estrategia de construir un árbol con la información para luego trasladarla a la regla de Bayes.

2. Los otros problemas de Bayes

Con los problemas de Bayes en otros contextos, no hay nada nuevo que añadir: relativo buen manejo del árbol y de la regla de Bayes cuando se habían estudiado estos temas y falta de claridad de la relación entre las dos representaciones en la tercera prueba. A veces el árbol se construye bien pero no es utilizado para resolver la pregunta propuesta, en otros, mal concebida la regla de Bayes.

CONCLUSIONES GENERALES

El objetivo general de esta investigación era caracterizar el cambio en el nivel de razonamiento bayesiano de los estudiantes universitarios que tomaron un curso de probabilidad y estadística. Teniendo en cuenta el análisis descriptivo y cualitativo de las respuestas de los estudiantes, en este capítulo se presentan los hechos más relevantes obtenidos de esta investigación.

Conclusión 1. *Los estudiantes de los cursos de estadística I para ingenieros.* El análisis estadístico mostró que, a pesar de la instrucción, o, tal vez por culpa de ella, los estudiantes del grupo A1 sufrieron un descenso significativo en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un nivel semejante al de la primera. En el grupo A2, los resultados se comportaron estadísticamente de una forma similar en las tres pruebas realizadas, no tuvo ninguna influencia sobre sus resultados el momento académico que estaban viviendo cuando se aplicaron las pruebas. El rendimiento en cada momento de los dos grupos (A1 y A2) fue muy similar en todas las pruebas realizadas.

Conclusión 2. *Los estudiantes de los cursos de bioestadística I.* Las pruebas de comparación de medias para las respuestas de los estudiantes del grupo B1 entre cada momento mostró que no se presentó ningún cambio en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba, pero luego en la tercera prueba alcanzaron un rendimiento más bajo que en la primera prueba. Igualmente se comportó el grupo B2. Además, el análisis estadístico mostró que entre los grupos (B1 y B2) de estudiantes del curso de bioestadística I no se presentaron diferencias significativas en su rendimiento en las pruebas realizadas.

Conclusión 3. *Los estudiantes de los cursos de estadística inferencial.* El análisis estadístico mostró que a medida que transcurre el tiempo disminuye la media de los puntajes de los estudiantes en la prueba, evidenciando el hecho de que a medida que pasa el tiempo los estudiantes van olvidando procedimientos y los conceptos adquiridos en el curso inmediatamente anterior y, lo que es más lamentable, ya no se atreven ni a usar sus intuiciones primarias aritméticas. En cuanto a los cursos C1 y C2 los estudiantes presentaron un decaimiento en su rendimiento al pasar de la primera a la segunda prueba y de ésta a la tercera prueba donde su nivel reflejó un rendimiento aún más bajo que en la primera prueba. Además, los dos grupos de estudiantes del curso de estadística inferencial no presentaron diferencias significativas en su rendimiento en ninguna de las pruebas realizadas.

Conclusión 4. *Respecto al modelo lineal mixto.* La varianza estimada para el primer nivel (ε_{ij}^2) fue demasiado bajo ($1,44167 \times 10^{-8}$) para explicar la variabilidad intra-individual, es decir los estudiantes presentaron puntajes estadísticamente similares, sus diferencias entre ellos son demasiado pequeñas por lo cual no valió la pena indagar por las diferencias entre los individuos.

Conclusión 5. *Respecto a la probabilidad condicional.* Los estudiantes cuando no han estudiado los temas de probabilidad condicional, estimulados, tal vez, por la presencia de porcentajes, proponen modelos de regla de tres que no son otra cosa que la regla del producto para el cálculo de la probabilidad de una intersección, es decir, asimilaron la probabilidad condicional con una probabilidad conjunta. Igualmente, en otro contexto, también respondieron a probabilidades conjuntas con probabilidades condicionales, lo que puede implicar que, para algunos estudiantes, que estas dos probabilidades son exactamente la misma cosa. Además se dieron respuestas que evidencian que

los estudiantes tratan de recordar fórmulas que vieron anteriormente y asumen Bayes para dar respuesta a una probabilidad condicional.

Conclusión 6. *Respecto a la probabilidad conjunta.* En cuanto a la regla del producto para eventos dependientes no fue suficientemente asimilada por los estudiantes, no obstante inmediatamente después de la instrucción un alto porcentaje de estudiantes fueron capaces de escribir el modelo completamente y resolver el problema adecuadamente. Un aspecto para resaltar es el buen uso del producto de porcentajes que utilizaron algunos estudiantes para hallar estas probabilidades conjuntas en lo que podríamos denominar la versión aritmética de la regla del producto.

Conclusión 7. *Respecto al teorema de probabilidad total (TPT).* En términos evolutivos se puede decir que algunos estudiantes poseían intuiciones aritméticas relacionadas con el producto de porcentajes y con resultados marginales que, posteriormente se complementaron con el diagrama de árbol permitiéndoles mostrar buenos resultados en todos los momentos en que fueron evaluados. En el caso de la expresión algebraica propia del TPT fue utilizada por algunos estudiantes tanto en la segunda como en la tercera prueba.

Conclusión 8. *Respecto al teorema de Bayes.* El hecho que los estudiantes asimilaron la probabilidad condicional con una conjunta en los problemas respecto a la probabilidad condicional, confusión que se manifestó en todas las pruebas realizadas, evidencia que esta intuición es muy difícil de erradicar en algunos estudiantes, lo cual influye directamente en la regla de Bayes dado que para calcular la condicional inversa se requiere calcular previamente la marginal del denominador utilizando el teorema de probabilidad total. El no considerar en los problemas de máquinas el valor del porcentaje de defectuosos (II-12) para el cálculo del denominador es la falta de un razonamiento de “estandarización” del

total de defectuosos de la máquina 1 en el contexto de todos los defectuosos, para adjudicarle el carácter aleatorio de la selección aleatoria de un producto, ya que en aritmética la pregunta sería: ¿qué porcentaje del total de defectuosos representan los defectuosos de la máquina 1? Definitivamente el manejo aritmético de los porcentajes es fundamental para el cálculo de las probabilidades, no obstante que sus interpretaciones son diferentes.

Los estudiantes del curso de bioestadística I, que fueron los de mejores resultados, mejoran ostensiblemente su rendimiento en la segunda prueba realizada inmediatamente después de haber estudiado los temas en el curso. Se observa que, para los estudiantes, el árbol solo tiene la función de registrar la información dada por el problema pero que necesariamente se debe recurrir a la regla de Bayes para poderlo resolver.

Cuando dos meses después se propone el tercer test, los estudiantes ya no tienen el mismo éxito al resolver problemas de probabilidad condicional. Los resultados demuestran que los estudiantes habían olvidado la regla de Bayes y que, no obstante, que pudieron construir el árbol con la información suministrada por el problema, no supieron qué más hacer. Esta íntima asociación entre el diagrama de árbol y la regla de Bayes donde el árbol asume un papel meramente informativo al servicio de la regla de Bayes, hizo que al olvidarse la regla el árbol quedara huérfano e incapaz por sí mismo de resolver el problema propuesto. Queda la duda de saber si este matrimonio entre las dos representaciones fue sugerido por el profesor del curso o si fue producto de una concepción creada por los mismos estudiantes.

Conclusión 9. *Respecto a las representaciones utilizadas.* Cuando la información se presenta en Tablas, los estudiantes de bioestadística, no solamente obtienen más fácilmente la información requerida sino que esta habilidad la mantienen a través del tiempo. Esta conclusión, aunque en menor

grado, también es válida para los estudiantes de estadística para ingenieros. Incluso, los estudiantes de estadística II, obtuvieron sus mejores resultados en los ítems con información tabular.

Otro error inducido por la notación de la probabilidad condicional es el que asume la probabilidad condicional $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)}{P(B)}$. Esta igualdad refleja la concepción de $\frac{A_i}{B}$ como un cociente y el operador P actuando individualmente sobre cada término del cociente. También se observó la utilización del diagrama de árbol, a veces bien construido y en otras ocasiones no.

Los resultados evidencian que si bien los estudiantes utilizan con cierta comodidad los diagramas de árbol, terminan por no saber que con base en ellos se pueden obtener las probabilidades conjuntas y las otras marginales lo que les permitiría resolver una amplia gama de problemas de probabilidad condicional. En contraposición, la información contenida en Tablas es más intuitiva, lo que hace pensar que una instrucción que propendiera por el manejo conjunto de estas dos representaciones podría tener resultados positivos, tal y como lo señalan Ávila (2001) y Yáñez (2001).

9.1. Limitaciones de esta Investigación

Se considera que la realización de esta investigación enfrentó diversas limitaciones que afectaron las posibilidades de obtener mejores explicaciones del cambio del razonamiento bayesiano en los estudiantes a lo largo del tiempo. Estas fueron:

Desde el punto de vista de la aplicación del modelo lineal mixto el tamaño muestral fue muy pequeño: 102 estudiantes. Para completar esta deficiencia, solo 58 estudiantes respondieron los tres cuestionarios.

No se realizó prueba de confiabilidad de los test debido a su extensión y al tiempo previsto para realizar la investigación.

Los profesores de los cursos de estadística para ingenieros y de estadística inferencial no brindaron ninguna nota apreciativa por la participación de los estudiantes al responder las pruebas, lo que influyó en que muchos de los estudiantes de estos cursos no respondieran con interés a las pruebas. El hecho mismo de aplicar tantas pruebas durante el semestre, además de las propias que los profesores realizaron en sus cursos, pudo haber sido otro aspecto que contribuyó al cansancio y a la falta de interés de muchos estudiantes que respondieron los cuestionarios.

Si se considera el comentario anterior, se tiene que admitir que la extensión de los test fue demasiado grande, de hecho se configuraron pensando en que los estudiantes tendrían al menos una hora para resolverlos, algo que en la práctica fue imposible ya que fueron aplicados en las horas de clase de los profesores que gentilmente lo permitieron.

9.2. Implicaciones para la enseñanza e investigaciones futuras

A pesar de las limitaciones descritas anteriormente en relación a esta investigación, los resultados sugieren algunas implicaciones prácticas para los profesores de los cursos de probabilidad y estadística. Por ejemplo, los resultados sugieren que es importante dedicar tiempo suficiente sobre los elementos que componen el teorema de Bayes con el fin de proporcionarles un fundamento sólido para el razonamiento bayesiano. Es decir, una comprensión más profunda de los temas tratados se puede convertir en una mayor comprensión de los temas que se traten en un momento posterior.

Las confusiones que se presentaron en las tres pruebas evidenciaron que son muy difíciles de erradicar en algunos estudiantes, hecho que obliga a ser más creativos en los procesos de instrucción para confrontarlas directamente. Por lo tanto para investigaciones futuras se sugiere que se examine el razonamiento bayesiano en paralelo con una instrucción que recoja algunos de los elementos obtenidos en este trabajo. En particular, se sugiere empezar con un profundo tratamiento aritmético asociado a los porcentajes que trate los conceptos asociados con la probabilidad condicional pero desde el punto de vista de razones o proporciones. Es asumir la probabilidad clásica como una simple razón aritmética y desarrollar las razones relacionadas con grupos condicionados, grupos conjuntos y grupos marginales.

Además de sugerir la repetición de esta investigación en la que se tenga mayor control sobre el tamaño de la muestra y las condiciones de respuesta de los estudiantes, así como de la extensión de los cuestionarios y del nivel de dificultad de los problemas propuestos, se sugiere la realización de una investigación que evalúe el razonamiento bayesiano cuando se asume como una estrategia de contraste de hipótesis que se asumen inicialmente con cierta

probabilidad (dada o estimada subjetivamente) y que se actualizan a la luz de algún resultado obtenido.

Para futuras investigaciones utilizar información bayesiana para la selección del modelo adecuado. Es decir, utilizar información a priori basada en conocimiento previo que se tenga sobre los parámetros, para la selección adecuada de los modelos, estos modelos utilizan cadenas markovianas de Monte Carlo que generan muestras aleatorias a partir de distribuciones de valores de los parámetros para estimar los parámetros de los efectos fijos y predecir la respuesta esperada de los efectos aleatorios.

Referencias bibliográficas

- Ávila, R. (2001) Hacia una apropiación operatoria de la estocástica: el caso de la probabilidad condicional. Tesis doctoral. México, CINVESTAV
- Ausubel, D. P., (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York, Holt, Rinehart and Winston.
- Cerdán, C., Huerta. M., Lonjedo, M. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En González, María José; González, María Teresa; Murillo, Jesús (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, SEIEM, 173-187.
- Chapman, G. B., y Liu, J. J. (2009). Numeracy, frequency, and Bayesian reasoning. *Judgment and Decision Making*, 4, 34–40.
- Contreras, J. M. (2009). *Recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada*. Tesis de Master. Universidad de Granada, Granada, España.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.
- Cosmides, L., Tobby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, 58, 1-73.
- Davis, F. B. (1964). Measurement of change. In F. B. Davis, *Educational measurements and their interpretation*. Belmont, CA: Wadsworth.
- Díaz Batanero, M.C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología* (Suitability of teaching Bayesian inference in data analysis courses directed to psychologists). Tesis Doctoral. Departamento de Psicología Social y Metodología de las Ciencias del Comportamiento. Facultad de Psicología. Universidad de Granada Directora: Dra. Inmaculada de la Fuente Solana. (Tesis doctoral alojada en Internet en Recent Doctoral Dissertations in Statistics Education, International Association for Statistical Education (IASE).
- Díaz, C. y Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 131-162.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005a). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en internet, *Congreso Internacional: El Profesorado ante el reto de las Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento*. Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada. Granada, Marzo 2005.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de*

- matemáticas. *Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4. CD ROM.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007a) Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (2), 128-148.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007b). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *REMA*, 12(1).
- Díaz, C., Ortiz, Juan J., Serrano, L. (2007). Dificultades de los estudiantes de psicología en el cálculo de probabilidades inversas mediante el teorema de Bayes. *Publicaciones. Facultad de educación y humanidades campus de melilla*. 37 (23), 141-156
- Edwards, E., (1968). Conservatism inhuman Information Processing. En Kahneman, D., y Tversky, A., (eds), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, 1982.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. University of Victoria. 292 – 297
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 15 (1), 49 – 95.
- Gigerenzer, G., (1993). The superego, the ego, and the id in statistical reasoning. In: Keren, G., Lewis, C. (Eds.), *A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences: Methodological Issues*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 311–339
- Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (p. 129-161). *Psychological Review*, 102, 684 – 704
- Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition*, 84, 343-352.
- Iversen, G. R. (1998), Student perceptions of Bayesian statistics. En Pereira-Mendoza (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. Singapore: International Statistical Institute, 234-240
- Kahneman y Tversky (1972) Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology* 3, 430–454
- Kahnemtm, D. y Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review*, 80, 237-251.
- Konold, C., (1991). Understanding Students' Beliefs about Probability. En E. Von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 139-156.
- Lonjedo, M.A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral publicada en la Universidad de Valencia. España.
- Lonjedo, M.A. & Huerta, M.P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el

análisis de textos. *VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. En Castro, de la Torre (Eds.). Coruña, España, 229-238

- Lonjedo, M.A. y Huerta, M.P. (2006). The Nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem solving behavior. *IV Conference of European Research in Mathematics Education*. En M. Bosch (Ed.). Sant Feliu de Guixols, España, 528-538.
- Lonjedo, M.A. & Huerta, M.P. (2007a). The “same” problem in three presentation formats: different percentages of success and thinking processes. *V Conference of European Research in Mathematics Education*. En Demetra Pitta-Pantazi & George Philippou (Eds.). Larnaca, Cyprus, 732-742.
- Lonjedo, M.A. & Huerta, M.P. (2007b). Un análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas isomorfos de probabilidad condicional. *Investigación en educación matemática XI*. En Camacho, Flores y Bolea (Eds.). La Laguna, España, 273-282.
- Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.
- Moore, D.S. (1997), “New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics”, *International Statistical Review*, 65, (2), 123-155
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Phillips, L.D. & Edwards, W. (1966). Conservatism in a simple probability inference task. *Journal of Experimental Psychology*, 72, 346-354.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.
- Rátiva y Lozano (2010). *Efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas y estrategias para resolver un problema binario de probabilidad condicional*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Sedlmeier, P. y Gigerenzer, G. (2001). Teaching bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of experimental psychology: general*, 3, 380-400.
- Shaughnessy, J. M., (1997). Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational studies in mathematics*, 8, 295-316
- Tarr, J. E. y Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. New York: Springer.

- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.
- Yáñez, G. (2001). El álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. *Homenaje al profesor Mauricio Castro*. En Gómez, P., y Rico, L. Granada, España, p. 355-37.
- Yáñez, G. (2003). *Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Zieffler, A. (2006) A Longitudinal Investigation of the Development of College Students' Reasoning About Bivariate Data During an Introductory Statistics Course. Tesis Doctoral. University Of Minnesota.
- Zuur, A.F., Ieno, E. I., Walker, N.J., Saveliev, A. A., Smith, G. (2009). *Mixed Effects Models and Extensions in Ecology with R*. Springer.

ANEXOS

Anexo A. Primera prueba

Lee atentamente los enunciados y elabora o selecciona la respuesta que consideres correcta.

- Responda los ítems del 1 al 4 con base en la siguiente información. En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados

	menos de 55 años	más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

Ítem 1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 2. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 3. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

Ítem 4. Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Ítem 5. La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es el 10.3%. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

- $8/10,3=0,0776$, probabilidad 7,76 %
- $10,3 \times 0,8=8,24$, probabilidad 8,24%
- 0,8 %

Ítem 6. Hemos lanzado dos dados y

sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Ítem 7. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

- Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
- Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
- Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

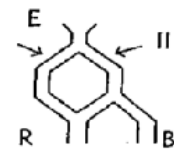
Ítem 8. En una ciudad el 60 % son hombres y el 40 % mujeres. El 50 % de los hombres y el 25 % de las mujeres fuman. Si se escoge una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

Ítem 9. A un grupo de alumnos de un colegio se les evalúa en matemáticas

e inglés. La proporción de alumnos que aprueban matemáticas es del 80% y la proporción de alumnos que aprueba inglés es del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

Ítem 10. Una bola se suelta por la entrada E. Si

sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de



que haya pasado por el canal 1?

- 1/2
- 1/3
- 2/3
- No se puede calcular

Ítem 11. En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y, de ellos, el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?

Ítem 12. Una fábrica dispone de dos

máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

- Responda el ítem 13 y 14 teniendo en cuenta la siguiente información. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin devolver la primera a la urna.

Ítem 13. ¿Cuál es la probabilidad de

extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N2/ N1)$

- a. $1/ 2$
- b. $1/ 6$
- c. $1/ 3$
- d. $1/ 4$

Ítem 14. ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N1/ N2)$

- a. $1/ 3$
- b. No se puede calcular
- c. $1/ 6$
- d. $1/ 2$

Anexo B. Segunda prueba

Lee atentamente los enunciados y elabora o selecciona la respuesta que consideres correcta.

- Responda los ítems del 1 al 3 con base en la siguiente información. En un centro médico se han observado a 250 personas para estudiar si el hábito de fumar tiene relación con los trastornos bronquiales, obteniéndose los siguientes resultados:

	Fuma	No Fuma	Total
Padece trastornos			150
No padece trastornos	60		
Total		100	250

Completa la anterior Tabla y responde. Si escogemos al azar una persona:

- Ítem 1.** ¿Cuál es la probabilidad de tener trastornos bronquiales?
- Ítem 2.** ¿Cuál es la probabilidad de que tenga trastornos y fume?
- Ítem 3.** ¿Cuál es la probabilidad de que fume si sabemos que tiene trastornos?

- En una universidad terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 10% de Ciencias y el 50% de Letras (sólo hay estas carreras). Se sabe que el 20% estudian arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras.

Si escogemos al azar un estudiante:

Ítem 4 ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera?

Ítem 5. Si el estudiante ya ha terminado la carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Arquitectura?

Ítem 6. En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios es 0,10. Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad es 0,25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas coronarios y de obesidad es 0,05. Calcular la probabilidad de que una

persona sufra problemas coronarios si está obesa.

Ítem 7. Una caja contiene 4 bolas verdes y 8 rojas. Se saca una bola al azar y se devuelve a la caja junto con otras dos del mismo color. Si ahora se saca al azar por segunda vez una bola, halle la probabilidad de que la segunda bola sea verde.

Ítem 8. Las probabilidades de que un artículo proceda de una fábrica A o de una B son 0,6 y 0,4, respectivamente. La fábrica A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,01, y la B, con probabilidad 0,05. Se observa un artículo y resulta defectuoso. Calcula la probabilidad de que provenga de la fábrica A.

Ítem 9. Se sabe que 100 de cada 10000 personas está enferma. De cada 100 personas enfermas, el test será positivo en 80 de ellas. De cada 9900 personas sanas el test saldrá positivo en 950 de ellas. El test resulta positivo en 103 personas. ¿Cuántas de estas personas están realmente enfermas?

Ítem 10. A un congreso asisten 100 personas, de las cuales 65 son

hombres y 35 son mujeres. Se sabe que el 10% de los hombres y el 6% de las mujeres son especialistas en computación. Si se selecciona al azar a un especialista en computación ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Ítem 11. Imagina que tienes una muestra de 100.000 personas elegidas al azar. Imagina que 5 de cada 1000 está deprimida. Supón que una prueba de depresión da positivo en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 3 de cada 100 personas sanas. Si D significa depresión y + significa prueba positiva, entonces:

a. $P(D) = 0.005$; $P(D|+) = 0.99$; $P(S|+) = 0.03$

b. $P(D) = 0.0005$; $P(+|D) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$

c. $P(D) = 0.005$; $P(D|+) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$

d. $P(D) = 0.005$; $P(+|D) = 0.99$; $P(-|D) = 0.01$

Ítem 12. Una empresa que fabrica camisetas posee dos máquinas, A y B, producen el 55% y el 45% respectivamente, del total de las

piezas producidas en la fábrica. De las camisetas producidas por la máquina A el 3% son defectuosas y de las camisetas producidas por la máquina B el 5% son defectuosas. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido una camiseta defectuosa?

Ítem 13. Se extraen tres cartas una tras otra, sin reemplazo, de una baraja de poker ordinaria. La baraja de poker está formado por 52 cartas repartidas en cuatro palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Calcule la probabilidad de que ninguna sea trébol.

Anexo C. Tercera prueba

Lee atentamente los enunciados y elabora o selecciona la respuesta que consideres correcta.

- Responda los ítems del 1 al 2 con base en la siguiente información. La probabilidad de que un vuelo programado salga a tiempo es de 0.83; la probabilidad de que llegue a tiempo es de 0.82, y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es de 0.78.

Ítem 1. Si 100 aviones salen a tiempo de una terminal área ¿Cuántos de estos aviones aproximadamente llegaran a tiempo?

Ítem 2. Si 100 aviones llegan a tiempo de una terminal área ¿Cuántos de estos aviones aproximadamente salieron a tiempo?

- Responda los ítems del 3 y 4 con base en la siguiente información. En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial y el hábito de fumar, se reúnen los siguientes datos para 180 individuos:

	No fumadores	Fumadores Moderados	Fumadores Empedernidos
Con Hipertensión	21	36	30
Sin Hipertensión	48	26	19

Si elegimos al azar una de estas personas:

Ítem 3. Sabiendo que la persona escogida es fumador empedernido, ¿Cuál es la probabilidad de que sufra de hipertensión?

Ítem 4. Sabiendo que la persona escogida no sufre de hipertensión, ¿Cuál es la probabilidad de no sea fumador?

Ítem 5. En el último año de una clase de graduados de preparatoria con 100 alumnos, 42 cursaron matemáticas; 68 psicología; 54 historia; 22 matemáticas e historia; 25 matemáticas y psicología, 7 historia pero no cursaron matemáticas ni psicología; 10 cursaron las tres materias y 8 no tomaron ninguna de

las tres. Se selecciona un estudiante al azar, sabiendo que no cursó psicología ¿Cuál es la probabilidad de que tomara los cursos de historia y matemáticas

Ítem 6. La probabilidad de que una persona que visita a su dentista necesite rayos X es de 0.6, la probabilidad que una persona que necesite una placa de rayos X también necesite una calza es de 0.3, y la probabilidad de que una persona que necesita una placa de rayo X y una calza también necesite una extracción dental es de 0.1. Si denotamos por X: la persona que necesita una placa de rayos X, por C: necesita calza y por E que necesita una extracción de diente. La probabilidad de que una persona que visita a su dentista necesite los tres procedimientos está dada por:

- a. $P(X) \cdot P(C|E) \cdot P(E|X \cap C) = 0.018$
- b. $P(X) \cdot P(E) \cdot P(C) = 0.018$
- c. $P(X \cap E \cap C) = 0.1$

Ítem 7. En cierto país el 90 % de los delincuentes son condenados. El 1% de las veces se condena a una persona inocente. Además el 5% de

la población en algún momento de su vida ha sido delincuente. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona condenada sea inocente?

Ítem 8. La cuarta parte de los conductores de coche son mujeres. La probabilidad de que una mujer sufra un accidente en un año es de 5/10.000, y para los hombres es de 1/10.000. ¿Cuál es la probabilidad de que si ocurre un accidente, el accidentado sea hombre?

d. $\frac{0.0001}{0.0005+0.0001} = 0.166$

e. $\frac{1}{10.000} = 0.0001$

f. $\frac{0.0001 \times 0.25}{(0.0005 \times 0.75) + (0.0001 \times 0.25)} = 0.04$

Ítem 9. En una rifa con 100 billetes, numerados del 1 al 100, se seleccionan dos billetes al azar, sin reposición. El primer billete seleccionado premia con una batidora al comprador, el segundo con una licuadora al comprador. Una persona compra cuatro billetes. Calcule la probabilidad de que esa persona gane ambos premios si sabemos que gano la licuadora.

Ítem 10. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 azules. Son retiradas 2 bolas al azar y entonces una bola es

seleccionada de las restantes cuatro.
¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja si las dos primeras fueron azul y roja?

Ítem 11. Los estudios epidemiológicos indican que el 20 % de los ancianos sufren un deterioro neuropsicológico. Sabemos que la tomografía axial computarizada (TAC) es capaz de detectar este trastorno en el 80 % de los que lo sufren, pero que también da un 3 % de falsos positivos entre personas sanas. Si tomamos un anciano al azar y da positivo en el TAC, ¿Cuál es la probabilidad de que esté realmente enfermo?

- a. $\frac{20}{100} = 0.2$
- b. $\frac{0.8}{0.8+0.03} = 0.96$
- c. $\frac{0.8 \times 0.2}{(0.8 \times 0.2) + (0.03 \times 0.8)} = 0.16$

- Responda los ítems del 12 al 14 con base en la siguiente

información. Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. La probabilidad de producción de piezas defectuosas de estas máquinas son de 0.03 para la máquina A, 0.04 para la máquina B y de 0.05 para la máquina C.

Ítem 12. Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

Ítem 13 Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.

Ítem 14. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?