

**FORMULACIÓN DE UNA NOCIÓN DE COHERENCIA BASADA EN
CORRELACIÓN FRACCIONARIA**

NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNÁNDEZ

**FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
BUCARAMANGA
2016**

**FORMULACIÓN DE UNA NOCIÓN DE COHERENCIA BASADA EN
CORRELACIÓN FRACCIONARIA.**

NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNÁNDEZ

**Propuesta de trabajo de grado para optar a
Título de físico**

Director

Dr. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016**

Cuando tengas una tarea difícil que hacer, algo que parece imposible, solamente trabaja cada día un poco, todos los días un poco, y de repente verás que el trabajo estará terminado.

Karen Blixen

Agradecimientos

A Dios por permitirme ser quien soy y por su infinita misericordia hacia mí y a aquellos allegados a mi familia.

A mi familia por su ayuda y apoyo constante durante este proceso educativo.

A mi director Rafael Ángel Torres Amarís, por su apoyo, paciencia y orientación.

A aquellas personas que por su ayudaron tanto económica como humanamente, para poder alcanzar este gran objetivo

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. FUNDAMENTOS	16
1.1. VARIABLE ALEATORIA	17
1.2. SEÑALES ALEATORIAS	17
1.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN (FUNCIÓN DE REPARTICIÓN) Y DENSIDAD DE DISTRIBUCIÓN	17
1.4. REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LA TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER	18
1.4.1. Propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria	19
15. ESTACIONARIEDAD	20
1.5.1. Estacionariedad en el sentido fuerte	20
1.5.2. Estacionariedad en el sentido débil.	21
1.5.3. Estacionariedad en el sentido amplio	22
1.5.4. α -estacionariedad.	22
1.6. CORRELACIÓN	23
1.6.1. Correlación estándar	23
1.6.2. Correlación fraccionaria.	24
1.7. COHERENCIA	25
1.7.1. Grado complejo de coherencia.	26
1.7.2. Visibilidad	27
1.8. PROPAGACIÓN DE LA COHERENCIA	29
2. COHERENCIA EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS α -ESTACIONARIOS	32
2.1. ESCALAMIENTO DE LA SEÑAL	33

2.2. COHERENCIA DE ORDEN ALFA	33
2.3. INTERFERENCIA ENTRE SEÑALES α -ESTACIONARIAS	34
2.4. PROPAGACIÓN DE LA COHERENCIA DE ORDEN α	37
2.4.1. Ecuación de Helmholtz	37
2.4.2. Teorema de Green.....	39
2.4.3. Teorema de Helmholtz-Kirchhoff	40
2.4.4. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld.....	41
2.4.5. Ondas policromáticas a-estacionarias.	43
2.4.6. Aproximación al espectro estrecho.	43
3. CONCLUSIONES	46
4. TRABAJOS FUTUROS.....	47
REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA.....	48
BIBLIOGRAFIA	51

TABLA DE ILUSTRACIONES

	Pág.
Ilustración 1. Estacionariedad en el sentido fuerte.....	21
Ilustración 2 estacionariedad en el sentido débil.....	21
Ilustración 3 propagación de los frentes de onda.....	30

TABLA DE ANEXOS

Anexo A. Ejecutables

(ver carpeta anexa)

RESUMEN

TÍTULO: FORMULACIÓN DE UNA NOCIÓN DE COHERENCIA BASADA EN CORRELACIÓN FRACCIONARIA*

AUTOR: NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNANDEZ**

PALABRAS CLAVES: coherencia fraccionaria, grado complejo de coherencia de orden alfa, visibilidad de orden alfa, propagación de la coherencia de orden alfa.

DESCRIPCIÓN

En este trabajo se propone una definición de coherencia a partir de conceptos como correlación fraccionaria y α -estacionariedad. Se define el grado complejo de coherencia fraccionario, a partir de la coherencia de orden alfa. Se establece la relación entre la visibilidad de las franjas de interferencia para señales α -estacionarias y el grado complejo de coherencia de orden alfa, en forma similar al caso estándar. Se propaga la coherencia fraccionaria hasta una distancia Z, esta coherencia se determina para señales que son α -estacionarias, para esto se utiliza el principio de Huygens-Fresnel, para $\alpha=\pi/2$, se corrobora que es la expresión en el caso estándar.

Inicialmente se muestran conceptos teóricos como variable, función y señal aleatoria, estacionariedad (débil, rigurosa, amplia y α -estacionariedad), correlación (estándar y fraccionaria), coherencia asociada a señales estacionarias, visibilidad de asociada a las franjas de interferencia.

En el capítulo 2 se establece la definición de coherencia fraccionaria o generalizada, a partir de conceptos como correlación fraccionaria y α -estacionariedad. Se propone un desarrollo teórico para encontrar la relación entre el grado complejo de coherencia de orden alfa y las franjas de visibilidad asociadas a señales α -estacionarias. Se determina la propagación de la coherencia fraccionaria utilizando el principio de Huygens-Fresnel, obteniendo una relación entre la coherencia de orden alfa en el punto origen y en el punto z.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director Rafael Angel Torres Amarís

ABSTRACT

TITLE: FORMULATION OF A NOTION OF COHERENCE BASED ON FRACTIONAL CORRELATION

AUTHOR: NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNANDEZ^{1**}

KEY WORDS: alpha order coherence, complex degree of alpha order coherence, alpha order visibility, propagation of alpha order coherence.

DESCRIPTION

This work propose a definition of coherence based on concepts as fractional correlation and α -stationary. It defined the complex degree of alpha order coherence from alpha order coherence. The relationship set up between visibility of the interference fringes associated with α -stationary signals and complex degree of alpha order coherence, similar to the standard case. The alpha order coherence spread to distance z using the theorem Huygens-Fresnel; it was adapted to non-stationary signals, for $\alpha = \frac{\pi}{2}$, it confirmed that is the expression in the standard case.

Initially, it showed theoretical concepts as: variable, function and aleatory signal, stationary (weak, strong, wide and α -stationary), correlation (standard and fractional), coherence associated with signal stationary, visibility of interference fringes associated to stationary signals.

In chapter 2, it set up the definition of alpha order coherence, from concepts as fractional correlation and α -stationary. It proposed a theoretical development to find the relationship between visibility of the interference fringes associated with α -stationary signals and complex degree of alpha order coherence. The alpha order coherence spreads up to a distance z using the principle of Huygens-Fresnel, we obtaining a relationship between the alpha order coherence at the origin point and at the z point.

^{*} Degree work

^{**} Physics department, Science College, Director, Rafael Angel Torres Amarís

INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento estadístico de diversas señales estacionarias (2) (3) y no estacionarias (4) (5) (6) (7) es de gran interés en todas las ramas de las ciencias, por tal motivo se ha visto la necesidad de establecer las posibles correlaciones existentes entre estas; si las correlaciones son asociadas a señales electromagnéticas se define el concepto de coherencia. La coherencia es una herramienta diseñada para conocer el grado de correlación existente entre dos frentes de onda o dos puntos, alejados espacial o temporalmente (8), L. Mandel y E. Wolf en (1965) la define como la aptitud de una fuente de radiación para generar fenómenos de interferencia, para Hanbury Brown -Twiss (1956) es el conjunto de propiedades estadísticas entre los elementos de los campos ópticos. Tiene valores establecidos para 3 regiones: en la primera región se encuentran todos los fenómenos que son incoherentes; cuyo valor es cero, la segunda región es la denominada como coherencia total o de valor 1, y la última se establece para correlaciones dadas entre estos dos valores esta se ha denominado coherencia parcial. Los primeros adelantos teóricos sobre este tema se dieron para fuentes totalmente coherentes o incoherentes pero fue hasta 1860 que Emile Verdet, demostró que el sol no era una fuente totalmente incoherente, así se estableció la denominada coherencia parcial, en 1930 es retomada por PH. Van Cittert y posteriormente por Fritz Zernike (9), en la actualidad es de gran estudio en el avance tecnológico y científico (10) (11) (12).

La noción de coherencia es aplicada a señales electromagnéticas estacionarias, debido a que sus correlaciones cruzadas no son función del tiempo. En el transcurso de los años se ha intentado ampliar este concepto a señales cuya densidad espectral de potencia varía en el tiempo, para poder lograrlo se han utilizado algunos métodos (13) (14) (15) (16), en donde se dan restricciones a las

señales para volverlas estacionarias y no se establece la noción a partir de las correlaciones cruzadas. En este proyecto se propone la utilización de conceptos estadísticos como correlación y estacionariedad, los cuales son la esencia de la definición de coherencia, para dar una posible definición para señales electromagnéticas no estacionarias, esta nueva noción se ha de denominar coherencia de orden alfa

La coherencia de orden fraccionario, se puede determinar a partir de conceptos como correlación fraccionaria y α -estacionariedad (1). Una señal es α -estacionaria en el sentido amplio si su distribución de Wigner Ville es invariante a lo largo de un eje oblicuo en el diagrama tiempo-frecuencia, para los momentos cruzados de este tipo de señales la herramienta utilizada es la correlación fraccionarias definida en (1), donde el producto no demuestra ser función del tiempo, sino de un parámetro α al cual es adaptativo para los diferentes tipos de señales no estacionarias, para el caso de señales estacionarias el parámetro α es igual $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Un ejemplo de aplicación es a señales con características α - estacionarias (17) o señales tipo Chirp, debido a que sus correlaciones y sus momentos no dependen del parámetro denominado tiempo.

En el primer capítulo de este trabajo, se describen todas las herramientas y fundamentos para el diseño y formulación de la coherencia de orden fraccionario, conceptos como variable aleatoria, estacionariedad y correlación. También establece la definición de coherencia convencional o asociada a señales que son estacionarias y ergódicas, se corrobora la estrecha relación entre el grado complejo de coherencia y las franjas de visibilidad asociadas a señales estacionarias.

La definición matemática de la coherencia de orden fraccionario, se muestra en el capítulo 2, donde se formula esta noción a partir de la correlación fraccionaria, además se muestra aplicaciones directas, en donde se redefine el grado complejo

de coherencia, para señales que son a-estacionarias, se propaga la coherencia de orden alfa, donde si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ es la coherencia en el punto z para el caso estándar.

1. FUNDAMENTOS

Las variables aleatorias son funciones que dirigen del espacio muestral a la recta real, asociándole un escalar. El conjunto de realizaciones se denomina señal aleatoria, cada realización está regida por una ley de probabilidad dada en el espacio muestral. Un proceso estocástico o proceso aleatorio es un conjunto de variables aleatorias indexadas por un parámetro t ; si el conjunto al que pertenece el elemento t es un conjunto numerable se dice que el proceso es de tiempo discreto, por el contrario si t pertenece a un intervalo en la recta real se dice que es un proceso a tiempo continuo; cabe notar que un proceso aleatorio no es una cantidad escalar (2). Un ejemplo de un proceso estocástico es el movimiento de partículas microscópicas con las moléculas en un fluido (movimiento browniano) (18).

En física es de gran aplicabilidad el cálculo de los momentos centrados o no centrados de una señal. El primer momento es denominado esperanza matemática de la señal (19), con ella se puede determinar la estacionariedad a primer orden de una señal, si la función resultante no depende del parámetro t se dice que es estacionaria, de lo contrario ser 'a no estacionaria. Existen diferentes tipos de estacionariedad a primer orden; estacionariedad rigurosa, estacionariedad débil, estacionariedad amplia y una nueva noción de estacionariedad

(α -estacionariedad). El segundo momento no centrado determina la desviación estándar de la señal. La correlación de las señales aleatorias se determina por los momentos cruzados de estas, en física esta noción se aplica para determinar la coherencia entre señales aleatorias.

1.1. VARIABLE ALEATORIA

Dado un espacio de probabilidad (Ω, M, P) $(x; \mathcal{L})$ un espacio medible, siendo \mathcal{L} un σ -álgebra de Lebesgue sobre x . Se llama variable aleatoria a cualquier función, X ,

$$X: \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

$$\omega \rightarrow x(\omega),$$

que asocia a cada suceso elemental un número real (19), a ese número real le llamamos realización de la variable aleatoria X .

1.2. SEÑALES ALEATORIAS

Se define la función aleatoria $X_z = \{\omega X_z\} = \omega X(z)$, como el conjunto de variables aleatorias X_{z_0} definidas sobre el espacio (Ω, M, P) , indexadas por el parámetro $z \in T$ del conjunto T .

Es posible adaptar el tratamiento de funciones aleatorias al estudio de señales aleatorias, de esta manera se puede asociar una función aleatoria a una señal aleatoria $X(t)$, donde $\omega \in \Omega$, y $t \in T$ para un instante $t = t_0$ dado se tiene una variable aleatoria, y para $\omega = \omega_0$, tenemos una función determinista del tiempo $\{\omega X(t)\} = X(t)$

1.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN (FUNCIÓN DE REPARTICIÓN) Y DENSIDAD DE DISTRIBUCIÓN

Definimos la repartición a primer orden de la variable aleatoria X , por

$$\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{F}(x) = P(A) = P(\{\omega: \omega X \leq x\}) \quad (1.3.1)$$

donde la función F asigna a cada valor real x , la probabilidad de que una variable aleatoria ω, X , posea un valor inferior o igual a x . Las propiedades más importantes de la función de repartición son

1. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(\{\omega: X \leq x\}) = 0$
2. $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(\{\omega: X \leq x\}) = 1$
3. La función es continua por la derecha, es decir $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x)$
4. F es no decreciente, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$

La probabilidad de que la variable aleatoria X tenga un valor entre x y $x + \Delta x$ viene dada por $F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$. Así se define la densidad de distribución a primer orden por

$$p_x(x) = \frac{dF}{dx} \quad (1.3.2)$$

para un orden n-ésimo por

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Para describir completamente las propiedades estadísticas de la función X se hace necesario conocer todas las distribuciones con $x \rightarrow \infty$. En física, típicamente es suficiente con una estadística de segundo orden y en algunos casos de cuarto orden.

1.4. REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LA TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER

Toda función $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ se puede desarrollar de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{H}_n(x) \quad \text{donde } a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n f(x)$$

donde \mathcal{H}_n son los polinomios de Hermite-Gauss, entonces su transformación es

$$\mathfrak{F}_\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\alpha} \mathbf{H}_n \quad (1.4.1)$$

Reemplazando el valor de a_n en la transformación y usando la fórmula de Melher basada en la representación integral de los polinomios de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2^n n!} \mathbf{H}_n(\sqrt{2\pi}x) \mathbf{H}_n(\sqrt{2\pi}x') = (1 - e^{i2\alpha})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{e^{4\pi x x'} e^{i\alpha} - e^{i2\alpha} 2\pi(x^2 + x'^2)}{1 - e^{i2\alpha}} \right]$$

escribiendo el valor de a_n en (1.4.1)

$$\mathfrak{F}_\alpha f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha} \mathbf{H}_n(x) \mathbf{H}_n(x') f(x') dx'$$

Realizando un procedimiento similar al descrito en (20) obtenemos

$$\mathfrak{F}_\alpha f(x) = C_\alpha e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i\pi x'^2 \cot \alpha} e^{\frac{i2\pi x x'}{\sin \alpha}} dx' \quad (1.4.3)$$

es la transformación integral de Fourier fraccionaria y donde la función

$$C_\alpha = \frac{e^{i \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \frac{\pi}{4} \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \quad \text{la transformación inversa se obtiene cambiando}$$

α por $-\alpha$ en la ecuación (1.4.3)

1.4.1. Propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria. A continuación, se presentan algunas propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria, en este trabajo se utilizará en el teorema de modulación.

1. Teorema de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x_{\alpha}) \overline{g_{\alpha}(x_{\alpha})} dx_{\alpha} \quad (1.4.4)$$

2. Teorema de traslación

$$\mathfrak{F}_{\alpha}[f(x - \xi)](x_{\alpha}) = f_{\alpha}(x_{\alpha} - \xi \cos \alpha) e^{-i\pi \sin \alpha (\xi^2 \cos \alpha - 2x_{\alpha} \xi)} \quad (1.4.5)$$

3. Teorema de modulación

$$\mathfrak{F}_{\alpha}[f(x) e^{-2\pi i \nu x}](x_{\alpha}) = f_{\alpha}(x_{\alpha} - \nu \sin \alpha) e^{-i\pi \cos \alpha (\nu^2 \sin \alpha - 2x_{\alpha} \nu)} \quad (1.4.6)$$

4. Teorema de escalamiento

$$\mathfrak{F}_{\alpha} \left[f \left(\frac{x}{c} \right) \right] x_{\alpha} = \sqrt{\frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}} e^{\frac{i}{2}(\alpha - \alpha')} e^{-i\pi x_{\alpha}^2 \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha'}{\cos^2 \alpha} \right)} f_{\alpha'} \left(\frac{x_{\alpha} c \sin \alpha'}{\sin \alpha} \right) \quad (1.4.7)$$

Donde $\cot \alpha' = c^2 \cot \alpha$

15. ESTACIONARIEDAD

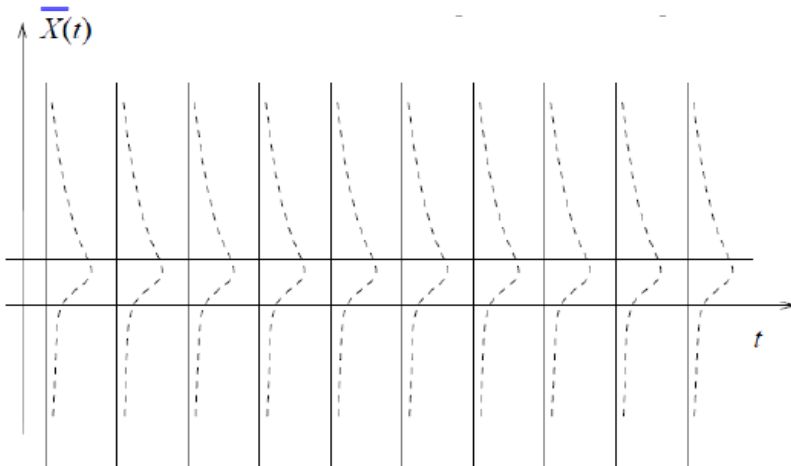
Se denominan procesos estacionarios a aquellos cuya distribución de probabilidad es la misma en todo instante de tiempo, también un proceso es estacionario si todos sus momentos

$$m_n = E\{|X(t)|^n\} = \int_{\mathbb{R}} |x|^n p_x(x; t) dx, \quad (1.5.1)$$

Son independientes de t, es decir $m_1(t) = m_1 \dots m_n(t) = m_n$ son constantes.

1.5.1. Estacionariedad en el sentido fuerte. Un proceso $x(t)$ es estacionario en el sentido fuerte si sus propiedades estadísticas son invariantes a un cambio del origen. Esto significa que el proceso $x(t)$ y $x(t+c)$ tienen la misma estadística para cualquier c . Así que las distribuciones de probabilidad hasta el orden n -ésimo son independientes del tiempo

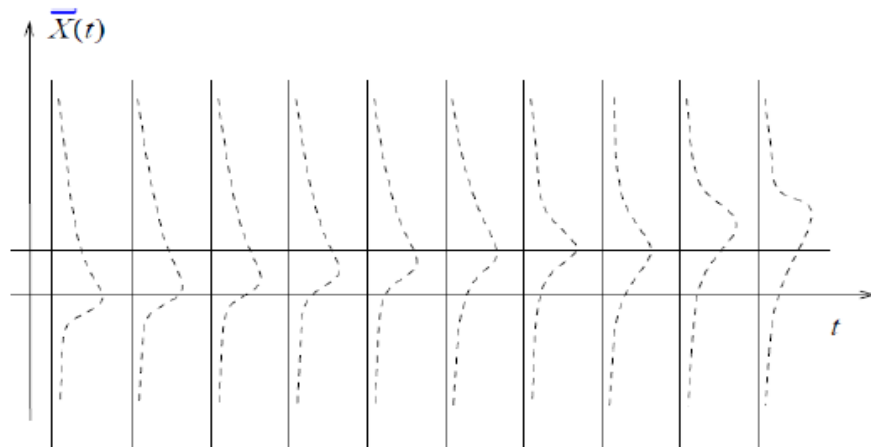
Ilustración 1. Estacionariedad en el sentido fuerte



notas de óptica profesor Rafael Torres

1.5.2. Estacionariedad en el sentido débil. Un proceso se dice estrictamente estacionario en el sentido débil si para todo m_n tenemos que los momentos $m_n(t) = m_n$. Una señal se dice débilmente estacionaria de orden n si los momentos son independientes del tiempo hasta el orden n ; significando que para un orden k con $n < k$, el proceso no será constante.

Ilustración 2 estacionariedad en el sentido débil



notas de óptica profesor Rafael Torres

1.5.3. Estacionariedad en el sentido amplio. Se dice que un proceso es estacionaria en el sentido amplio si la función de repartición de primer orden no depende del tiempo esta condición es la más utilizada en física para determinar si una señal es estacionaria, y consiste en

$$F(x; t) = F(x) \quad (1.5.2)$$

en donde la función $F(x)$ definida en la ecuación (1.3.1) no depende del tiempo a primer orden y la función de repartición de segundo orden depende solo de la diferencia de tiempos

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; t_1 - t_2) = F(x_1, x_2; \tau) \quad (1.5.3)$$

1.5.4. α -estacionariedad. La estadista diseñada para señales aleatorias se describe en (21) en donde simplemente se restringe hasta el segundo orden para de esta manera comprobar que este tipo de señales es estacionaria. Para el caso de señales que no cumplen la condición mencionada anteriormente se ha diseñado una herramienta estadística y es la α -estacionariedad. Una señal es α -estacionaria en el sentido amplio si su distribución de Wigner Ville es invariante a lo largo de un eje oblicuo en el diagrama tiempo-frecuencia [1]. Para señales como por ejemplo tipo radares de efecto doppler acelerado [17]

$$.^\omega \xi(x) = C_\alpha .^\omega U(x) e^{\frac{i2\pi x x'}{\sin \alpha}} e^{-i\pi \cot \alpha x^2} \quad (1.5.4)$$

donde $x' \in [0, \infty)$.

Al calcular el valor esperado de la señal $E\{.^\omega \xi(x)\} = cte$, es posible comprobar directamente que se debe cumplir: $.^\omega \xi(x)$ es una señal a primer orden estacionaria, entonces $.^\omega U(x)$, lo debe ser a un orden α –estacionario.

1.6. CORRELACIÓN

La correlación estudia el grado de asociación existente entre diferentes variables. Se establece la dependencia perfecta si los puntos del diagrama de dispersión se encuentran sobre la línea de regresión; entre más alejados estén dichos puntos de la línea de regresión, menor será la dependencia entre estas variables (22).

1.6.1. Correlación estándar. Los momentos centrados vienen dados por

$$m_n(t) = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{X})^n p_x(x; t) dx, \quad (1.6.1)$$

donde \bar{X} representa el momento $n = 1$ de la ecuación (1.5.1), cuando $n = 2$ representa la varianza (σ^2). Se puede definir la desviación estándar como

$$\sigma_x(t) = \left[\int_{\mathbb{R}} (x - \bar{X})^2 p_x(x; t) dx \right]^{\frac{1}{2}} = [E\{X(t)^2\} - E\{X(t)\}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.6.2)$$

Para dos variables aleatorias se tiene que la función de distribución $F(x)$ definida en (1.3.1) se escribe como

$$p_{x_1, x_2; t_1, t_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Es posible determinar los momentos cruzados como

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_1 \bar{x}_2 p_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.6.3)$$

caso particular si $t_1 = t_2 = t$,

$$R(t, t) = E\{X(t)\overline{X(t)}\}$$

es conocido como **autocorrelación**.

La covarianza asociada a dos variables aleatorias se define como

$$C(t_1, t_2) = E\{(X(t_1) - E\{X(t_1)\})(X(t_2) - E\{X(t_2)\})\}$$

realizando los cálculos correspondientes se tiene que

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \overline{X_1 X_2}$$

Al normalizar la covarianza se obtiene

$$r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sigma_{x_1}(t_1)\sigma_{x_2}(t_2)} \quad (1.6.4)$$

donde **r(t1; t2)** es el coeficiente de correlación.

1.6.2. Correlación fraccionaria. Cuando se tienen señales no estacionarias como (2.2.2), las cuales se discutirá su tratamiento en el siguiente capítulo, los momentos cruzados son funciones dependientes del tiempo, para esto se utiliza una nueva herramienta, la cual se define como la correlación fraccionaria (1)

$$R_U^\alpha(x_1, x_2) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E\{\omega U(x_1) \cdot \overline{\omega U(x_2)} e^{-2i\pi x_2(x_1 - x_2) \cot \alpha}\} \quad (1.6.5)$$

estableciendo el grado de independencia entre dos señales $U(x_1)$ y $U(x_2)$, que son α -estacionarias a primer orden. Un caso particular se da cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, para este caso se obtiene que $R_U^\alpha(x_1, x_2) = R_U(x_1, x_2)$, en donde $R_U(x_1, x_2)$, es la denominada correlación estándar.

1.7. COHERENCIA

La coherencia expresa la relación existente entre dos haces luminosos o dos emisores de señales aleatorias electromagnéticas. Cuando los dos emisores son perfectamente coherentes se puede determinar su diferencia de fase con gran precisión y es constante, cuando son incoherentes, la diferencia de fase varía de manera irregular sin valor definido (23)

Se posee un haz el cual es generado por el campo el cual posee una representación compleja $\mathbb{E}(r; t)$, pasaremos por alto efectos de polarización y se ha de realizar un tratamiento escalar. La distribución en dos puntos en el espacio s_1 y s_2 son $\mathbb{E}(s_1; t)$, y $\mathbb{E}(s_2; t)$, o $\mathbb{E}_1(t)$, y $\mathbb{E}_2(t)$, como el interés es poder determinar el grado de correlación de dichas fuentes puntuales se ha de utilizar estadística de segundo orden

$$R(t - t_1, t - t_2) = E\{\mathbb{E}_1(t - t_1) \overline{\mathbb{E}_2(t - t_2)}\}. \quad (1.7.1)$$

Para un proceso ergódico, proceso en el cual los promedios temporales son iguales a los promedios estadísticos, se tiene

$$R(t - t_1, t - t_2) = \Gamma(t - t_1, t - t_2) = \langle \mathbb{E}_1(t - t_1) \overline{\mathbb{E}_2(t - t_2)} \rangle_T, \quad (1.7.2)$$

además si es un proceso estacionario el promedio del tiempo es independiente para cualquier origen tomado, cuando es estacionario en el sentido amplio, la densidad espectral de potencia a segundo orden solamente depende de un parámetro $\tau = t_2 - t_1$, quedando

$$\Gamma(t, t + \tau) = \left\{ \mathbb{E}_1(t) \overline{\mathbb{E}_2(t + \tau)} \right\}_T \quad (1.7.3)$$

en donde el origen fue desplazado por las cantidades t_1 y t_2 . Esta expresión genera la noción de coherencia, la cual establece el grado de correlación entre campos electromagnéticos.

1.7.1. Grado complejo de coherencia. Se tiene dos puntos S_1 y S_2 los cuales tienen una distribución electromagnética $E_1(t)$ y $E_2(t)$, si se hacen coincidir

$$\Gamma_{11}(\tau) = \{ E_1(t) \overline{E_1(t - \tau)} \} \quad (1.7.4)$$

$$\Gamma_{22}(\tau) = \{ E_2(t) \overline{E_2(t - \tau)} \} \quad (1.7.5)$$

Asumiendo que las dos ondas electromagnéticas son detectadas al mismo tiempo,

$\tau = 0$, reduciéndose las expresiones (1.7.4) y (1.7.5) a $I_{S_1} = \{ E_1(t) \overline{E_1(t)} \}$ y $I_{S_2} = \{ E_2(t) \overline{E_2(t)} \}$, respectivamente. Por lo tanto

$$\Gamma_{11}(0) = I_{S_1} \quad \text{y} \quad \Gamma_{22}(0) = I_{S_2}$$

Por lo tanto la normalización de la coherencia mutua (1.7.3) queda

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (1.7.6)$$

La expresión (1.7.6) se denomina grado complejo de coherencia. Como $\gamma_{12}(\tau)$ es una cantidad compleja es expresable como

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i\Phi_{12}(\tau)}$$

donde $\Phi_{12}(\tau)$ es el ángulo entre los campos. Si existe un desfase inicial $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \phi$, quedando expresado el grado complejo de coherencia como:

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|e^{i(\alpha_{12}(\tau)-\phi)}, \quad (1.7.7)$$

utilizándose esta expresión posteriormente para calcular la visibilidad.

1.7.2. Visibilidad. Utilizando una pantalla opaca con dos aberturas circulares (experimento de Young) [9], donde estas sirven como fuentes puntuales de la ondas secundarias que se propagan hasta un punto p, el campo resultante es

$$\mathbf{E}_p(t) = \mathbf{E}_1(t - t_1) + \mathbf{E}_2(t - t_2) \quad (1.7.8)$$

donde $t_1 = r_1/c$ y $t_2 = r_2/c$. Calculando la irradiancia medida en el punto p, sobre un intervalo finito de tiempo

$$\mathbf{I} = E \left\{ \mathbf{E}_p(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_p(t)} \right\}_T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= E \left\{ \mathbf{E}_1(t - t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(t - t_1)} \right\}_T \\ &+ E \left\{ \mathbf{E}_2(t - t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t - t_2)} \right\}_T \\ &+ E \left\{ \mathbf{E}_1(t - t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t - t_2)} \right\}_T \\ &+ E \left\{ \mathbf{E}_2(t - t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(t - t_1)} \right\}_T \end{aligned}$$

Asumiendo los campos son estacionarios, de acuerdo con esto los dos primeros promedios de tiempo se pueden escribir como

$$I_1 = E \left\{ \mathbf{E}_1(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(t)} \right\}_T \quad y \quad I_2 = E \left\{ \mathbf{E}_2(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t)} \right\}_T$$

Asumiendo que $\tau = t_2 - t_1$ se obtiene

$$E \left\{ \mathbf{E}_1(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t - \tau)} \right\}_T + E \left\{ \mathbf{E}_2(t - \tau) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(t)} \right\}_T$$

estas cantidades son el doble de la parte real, es decir que es igual

$$2\Re \left[E \left\{ \mathbf{E}_1(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t - \tau)} \right\}_T \right] \quad (1.7.9)$$

Los promedios temporales de este término son una función de la correlación cruzada, la cual se denota

$$\Gamma_{12}(\tau) = E \left\{ \mathbf{E}_1(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(t - \tau)} \right\}_T \quad (1.7.10)$$

refiriéndose a la función de coherencia mutua de la onda electromagnética en el campo S1 y S2. La irradiancia obtenida en el punto quedará

$$\mathbf{I} = I_1 + I_2 + 2\Re [\Gamma_{12}(\tau)] \quad (1.7.11)$$

utilizando la definición del grado complejo de coherencia (1.7.6), multiplicando y dividiendo por $\sqrt{I_1 I_2}$, se puede(1.7.11) reescribir como

$$\mathbf{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Re [\gamma_{12}(\tau)] \quad (1.7.12)$$

teniendo en cuenta que la diferencia del ángulo de fase con la diferencia de camino óptico, se tiene que la irradiancia es

$$\mathbf{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \cos(\alpha_{12} - \phi) \quad (1.7.13)$$

Se define la visibilidad de las franjas de interferencia como

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}| \quad (1.7.14)$$

en donde se observa la clara dependencia entre el grado complejo de coherencia y visibilidad de las franjas de interferencia.

1.8. PROPAGACIÓN DE LA COHERENCIA

La propagación de la coherencia se estudiara basados en el principio de Huygens-Fresnel, bajo la hipótesis de una fuente de espectro estrecho. Se tomará el caso de una fuente de espectro estrecho

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_z(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{\Sigma} \frac{1}{i\tilde{\lambda}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}', t \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c} \right) \cos(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}' \\ & - \mathbf{r}) d\sigma' \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

Como

$$\Gamma_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle \mathcal{E}_z(\mathbf{r}_1, t) \overline{\mathcal{E}_z(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \rangle \quad (1.8.2)$$

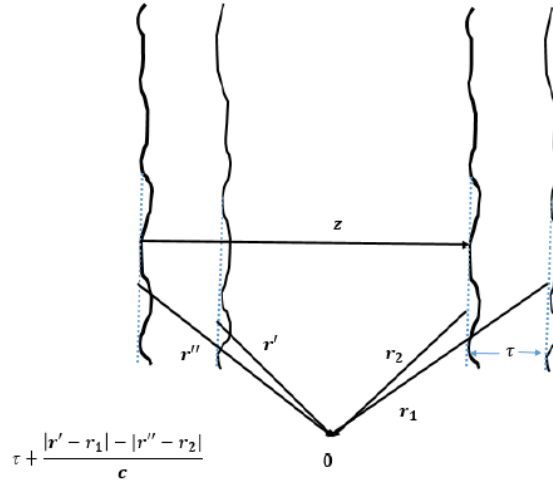
Donde

$$\mathcal{E}_z(\mathbf{r}, t) = \int_{\Sigma} \frac{1}{i\tilde{\lambda}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}', t \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \cos(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) d\sigma' \quad (1.8.3)$$

Y

$$\overline{\mathcal{E}_z(\mathbf{r}, t)} = \int_{\Sigma} \frac{-1}{i\tilde{\lambda}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \overline{\mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}'', t \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right) \cos(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) d\sigma'} \quad (1.8.4)$$

Ilustración 3 propagación de los frentes de onda



Luego

$$\Gamma_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \langle \mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \overline{\mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right)} \rangle$$

$$\times \frac{\cos(\hat{z}, \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{\tilde{\lambda}^2 |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} d\sigma' d\sigma$$

se define

$$\Gamma_0 \left(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; \tau + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right)$$

$$= \langle \mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \overline{\mathcal{E}_0 \left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right)} \rangle$$

Así queda escrito la coherencia en el punto z

$$\Gamma_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \Gamma_0 \left(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; \tau + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right) \frac{\cos(\hat{z}, \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{\tilde{\lambda}^2 |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} d\sigma' d\sigma \quad (1.8.5)$$

Se observa la clara dependencia entre la coherencia en el punto origen y el punto z, en el caso estándar.

2. COHERENCIA EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS α -ESTACIONARIOS

El tratamiento estadístico asociado a señales electromagnéticas estacionarias ha sido descrito en el anterior capítulo. Pero hay algunas señales que su tratamiento es diferente debido a que no son estacionarias bajo ningún criterio expuesto. Un tipo de señal no estacionaria son las descritas en los radares doppler acelerados donde la dependencia temporal es expresada en señales de tipo Chirp; las señales descritas de esa manera son de fácil tratamiento utilizando herramientas como α -estacionariedad a primer y segundo orden, también se posibilita el desarrollo para encontrar los momentos cruzados de dos señales aleatorias para procesos estocásticos. La siguiente señal es tipo Chirp

$$\mathbb{E}(x, t) = A_0 E(t) e^{i2\pi \nu t} e^{-i\pi \beta t^2} e^{i(kx + \phi(x))} \widehat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.0.1)$$

en donde A_0 representa una amplitud compleja, $E(t)$, ν , $\phi(x)$ representan variables aleatorias, β representa un Chirp.

Esta señal se ha de escalar y demostrar que es una señal α -estacionaria, con base en esa definición se desea definir un desarrollo de coherencia a cualquier orden, en casos límites, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se corrobora que es la definición de coherencia asociada a las señales estacionarias en el sentido amplio. Como se verifica la auto dependencia entre el grado complejo de coherencia y las franjas de visibilidad para señales estacionarias también, es de gran interés, el obtener dicha dependencia para señales α -estacionarias entre estos conceptos.

2.1. ESCALAMIENTO DE LA SEÑAL

La señal descrita en (2.0.1) la cual es una señal Chirpiada, donde son propias de señales que no son estacionarias, pero mediante un tratamiento matemático es posible, definir variables de escalamiento y así obtener la equivalencia determinada por un parámetro α .

Para tal fin se realiza un procedimiento similar descrito en (24), donde se definirá

$$\tan \alpha = \beta \mathcal{E}$$

Donde $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\mathcal{E} > 0$ y utilizando las variables reducibles

$$f = \sqrt{\mathcal{E}} \cos(\alpha) \nu \quad y \quad \tau = \beta t \sqrt{\mathcal{E}}$$

reemplazando en la ecuación (2.0.1), se obtiene

$$\mathbb{E}'(x, t) = A_0 \mathbb{E}(t) e^{\frac{i2\pi f \tau}{\sin \alpha}} e^{-i\pi \cot \alpha \tau^2} e^{i(kx + \phi(x))} \widehat{\mathbf{e}}_z \quad (2.1.1)$$

Donde, $\mathbb{E}'(x, t) = \mathbb{E}\left(x, \frac{\tau}{\beta\sqrt{\mathcal{E}}}\right)$ y $\mathbb{E}'(\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\tau}{\beta\sqrt{\mathcal{E}}}\right)$

2.2. COHERENCIA DE ORDEN ALFA

Se calcula la correlación fraccionaria (1.6.5) a dos señales que poseen un perfil de onda descrito en (2.1.1), debido a que se trata de una señal α -estacionaria a primer y segundo orden (1) además como se ha podido establecer, para un proceso ergódico; para lo cual los promedios temporales son iguales a los promedios estadísticos

$$\Gamma_E^\alpha(x_1, x_2; t_1, t_2) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E\{ E(x_1; t_1) \overline{E(x_2; t_2)} e^{-2\pi i t_2(t_1-t_2)\cot(\alpha)} \} \quad (2.2.1)$$

De esta forma se define la coherencia de orden alfa, como la correlación fraccionaria establecida entre señales electromagnéticas no estacionarias. Si se asume que $t_1 = t$ y además que $t_2 = t_1 - \tau$, entonces la coherencia quedaría descrita como

$$\Gamma_E^\alpha(x_1, x_2; t_1, t_2) = C_\alpha \overline{C_\alpha} E\{ E(x_1; t) \overline{E(x_2; t - \tau)} e^{-2\pi i \tau(t-\tau)\cot(\alpha)} \} \quad (2.2.2)$$

Calculando el grado complejo de coherencia

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_E^\alpha(x_1, x_2; t, t - \tau)}{\sqrt{\Gamma_{E_1}^\alpha(x_1, x_2; t, t)} \sqrt{\Gamma_{E_2}^\alpha(x_1, x_2; t, t)}} \quad (2.2.3)$$

como es una función compleja se puede describir

$$\gamma_E(\tau) = |\gamma_E(\tau)| e^{i\phi(\tau)}$$

Donde $|\gamma_E(\tau)|$ es la magnitud de la función de correlación fraccionaria y $\phi(\tau)$ representa el ángulo de desfase.

2.3. INTERFERENCIA ENTRE SEÑALES α -ESTACIONARIAS

Se tienen dos frentes de onda asociados a señales Chirp de la forma

$$\mathbf{E}(x, t) = A_0 \mathbf{E}(t) e^{-i\pi \cot(\alpha) t^2} \quad (2.3.1)$$

los cuales se superponen para poder calcular la interferencia entre ellos,

$$\mathbf{E}_p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbf{E}(x_1, t_1) + \mathbf{E}(x_2, t_2) \quad (2.3.2)$$

luego la interferencia se define como

$$\mathbf{I} = E \left\{ \mathbf{E}_p(x_1, x_2; t_1, t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_p(x_1, x_2; t_1, t_2)} \right\}$$

Asumiendo los campos son α -estacionarios, de acuerdo con esto los dos primeros promedios de tiempo se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= E\{\mathbf{E}_p(t) \cdot \overline{\mathbf{E}_p(t)}\} \\ \mathbf{I} &= E\{\mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(x_1, t_1)}\} \\ &+ E\{\mathbf{E}_2(x_2, t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t_2)}\} \\ &+ E\{\mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t_2)}\} \\ &+ E\{\mathbf{E}_2(x_2, t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(x_1, t_1)}\} \end{aligned}$$

Reemplazando cada término por la expresión obtenida en 2.1.1, después simplificando y asumiendo que los campos son α -estacionarios, las dos primeras expresiones de la suma se escriben como

$$I_1 = E\{\mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(x_1, t_1)}\} \quad \text{y} \quad I_2 = E\{\mathbf{E}_2(x_2, t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t_2)}\}$$

Asumiendo que $\tau = t_2 - t_1$ se obtiene

$$E\{\mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t_2)}\} \quad + \quad E\{\mathbf{E}_2(x_2, t_2) \cdot \overline{\mathbf{E}_1(x_1, t_1)}\}$$

estas cantidades son el doble de la parte real, es decir que es igual

$$2\Re \left[E \left\{ A_2 \overline{A_1} \mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t - \tau)} e^{-i\pi \cot(\alpha) \tau(2t-\tau)} \right\} \right]$$

Reescribiendo

$$2\Re \left[e^{-i\pi \cot(\alpha) \tau^2} E \left\{ A_2 \overline{A_1} \mathbf{E}_1(x_1, t_1) \cdot \overline{\mathbf{E}_2(x_2, t - \tau)} e^{-i2\pi \cot(\alpha) \tau(2t-\tau)} \right\} \right]$$

en donde

$$\Gamma^\alpha(x_1, x_2; \tau) = A_2 \overline{A_1} E \left\{ E(x_1; t) \overline{E(x_2; t - \tau)} e^{-2\pi i \tau(t-\tau) \cot(\alpha)} \right\}$$

la cuál es la definición de la coherencia de orden alfa, descrita en(2.2.2).

Reescribiendo la irradiancia en términos de la coherencia de orden alfa

$$\mathbf{I} = I_1 + I_2 + 2 \Re \left[e^{-i\pi \cot(\alpha) \tau^2} \Gamma^\alpha(\tau) \right]. \quad (2.3.3)$$

Multiplicando y dividiendo en el tercer término de la expresión anterior por $\sqrt{I_1 I_2}$ además sacando factor común $(I_1 + I_2)$ y utilizando la definición del grado complejo de coherencia (2.2.3), se obtiene

$$\mathbf{I} = (I_1 + I_2) \left(1 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_E(\tau)| \cos(\phi(\tau) - \pi \tau^2 \cot(\alpha))}{I_1 + I_2} \right) \quad (2.3.4)$$

$\phi(\tau)$ es la diferencia de fase entre $E(t) \overline{E(t - \tau)}$ y $0 \leq |\gamma_E(\tau)| \leq 1$.

Utilizando la definición de $\cos(\beta - \nu)$ en donde $\beta = \phi(\tau)$ y $\nu = \pi \tau^2 \cot(\alpha)$, reemplazando en la ecuación (2.2.3) se obtiene

$$I = (I_1 + I_2) \left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_E(\tau)| \cos(\phi(\tau) - \pi\tau^2 \cot(\alpha))}{I_1 + I_2} \right) \quad (2.3.5)$$

Se define el grado complejo de coherencia de orden alfa como

$$|\gamma_E^\alpha(\tau)| = |\gamma_E(\tau)| \cos(\pi\tau^2 \cot(\alpha))$$

Para el caso de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obtiene que $|\gamma_E^\alpha(\tau)| = |\gamma_E(\tau)|$ el cuál es el grado complejo de coherencia estándar.

La visibilidad de las franjas de interferencia para señales a-estacionarias, vendrá dada por

$$V^\alpha = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_E^\alpha(\tau)|}{I_1 + I_2} \quad (2.3.6)$$

2.4. PROPAGACIÓN DE LA COHERENCIA DE ORDEN α

Un promedio de ensamble del campo electromagnético en el vacío se propaga de acuerdo a la ecuación de onda, si se intercambia el orden del promedio de ensamble estas se definen como funciones de correlación a segundo orden, las cuales también cumplen con la ecuación de (25)

2.4.1. Ecuación de Helmholtz. Un campo eléctrico $E = (E_x; E_y; E_z)$ y magnético $B = (B_x; B_y; B_z)$, obedecen a la ecuación de onda, satisface para cada componente

$$\nabla^2 E_x - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Por el principio de superposición se puede escribir la ecuación de onda en forma escalar como

$$\nabla^2 \Psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

donde Ψ representa cualquiera de las componentes de un campo vectorial.

Podemos escribir una señal analítica de la siguiente forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r})} e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi\cot(\alpha)\nu^2} \quad (2.4.1)$$

La amplitud compleja se escribe como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r})}$$

se puede escribir la ecuación de la señal analítica como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi\cot(\alpha)\nu^2} \quad (2.4.2)$$

un campo policromático se puede escribir como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi\cot(\alpha)\nu^2} d\nu \quad (2.4.3)$$

debido a que las funciones Chirp forman una base completa, la ecuación de onda queda

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left[\left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) \psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) \right] e^{\frac{(-i2\pi\nu t)}{\sin(\alpha)}} e^{i\pi \cot(\alpha) \nu^2} d\nu = 0 \quad (2.4.4.)$$

Entonces

$$\left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) \psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = 0$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\lambda = \frac{c}{n\nu}$, n representa el índice de refracción del medio donde se propaga la señal.

2.4.2. Teorema de Green. Se tienen dos funciones bien comportadas con sus dos primeras derivadas, con respecto

a x, y, z , continuas $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$, se calcula que

$$\nabla \cdot [f(\mathbf{r})\nabla g(\mathbf{r})] = f(\mathbf{r})\nabla^2 g(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})\nabla g(\mathbf{r})$$

tenemos además que

$$\nabla \cdot [f\nabla g - g\nabla f] = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$$

Integrando sobre el volumen V se tiene

$$\int_V \nabla \cdot [f\nabla g - g\nabla f] dv = \int_V f\nabla^2 g - g\nabla^2 f dv$$

utilizando el teorema de divergencia de Gauss, escribimos

$$\oint_{\Sigma(v)} \left[f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right] d\sigma = \int_V f\nabla^2 g - g\nabla^2 f dv$$

donde $d\sigma$ es un elemento diferencial de superficie, sobre una superficie cualesquiera $\Sigma(V)$ que encierra un volumen V y $\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla$, representa la derivada parcial en dirección perpendicular a la superficie, dada por el vector \hat{n} .

2.4.3. Teorema de Helmholtz-Kirchhoff. Tomando f como una señal analítica con frecuencia angular ω , que es emitida por un punto \mathbf{r}

$$f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$$

tomando $g = \Psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)$, el teorema de Green se reescribe como

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(\nu)} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma \\ = \int_V f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \nabla^2 \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \nabla^2 f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dv \end{aligned}$$

sumando y restando $\frac{k^2}{\sin(\alpha)} f^\alpha \Psi^\alpha$ se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(\nu)} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma \\ = \int_V f^\alpha \left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) \psi^\alpha dv - \int_V \psi^\alpha \left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) f^\alpha dv \\ = - \int_V \psi^\alpha \left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) f^\alpha dv \end{aligned}$$

Como

$$\left(\nabla^2 + \frac{k^2}{\sin(\alpha)} \right) f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -4\pi \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

Entonces

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma(\nu)} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \quad (2.4.5)$$

La integral de Helmholtz- Kirchhoff se puede escribir como

$$\begin{aligned} \psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \end{aligned}$$

si la distancia es infinito en Σ_2 , solamente queda la primera integral

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left[f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - \psi^\alpha(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \quad (2.4.6)$$

2.4.4. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld. Como la función f se puede definir de múltiples maneras, a continuación ser 'a escrita

$$f^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|} - \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad \text{condición de Dirichlet}$$

donde $\mathbf{r} = (x; y; z)$ y $\mathbf{r}^* = (x; y; -z)$, como $f_1^\alpha(x_0; y_0; z_0 = 0) = 0$, tenemos

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\alpha(x', y', z' = 0; \nu) \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dx' dy'$$

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\alpha(x', y'; \nu) \left[\frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}^*|} - \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right]_{z'=0} dx' dy'$$

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\alpha(x', y'; \nu) \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right]_{z'=0} dx' dy'$$

Calculamos

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right] = \hat{z}' \cdot \nabla \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} = \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) \left(\frac{ik}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right) \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$$

Para $\lambda \leq |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \right] = \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) \left(\frac{ik}{\sin(\alpha)} \right) \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$$

de esta manera tenemos que

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = \frac{k}{2i\pi\sin(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\alpha(x', y'; \nu) \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) dx' dy' \quad (2.4.7)$$

El principio de Huygens-Fresnel mostrado en la ecuación 2.4.7 (26), establece que cada punto en el frente de onda se puede considerar como una fuente puntual que genera una onda esférica.

En donde $\psi^\alpha(x', y'; \nu) \frac{e^{\frac{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{\sin(\alpha)}}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$ es una onda esférica parametrizada por un valor α y

$\cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r})$, es el factor de oblicuidad. Con base en este principio se puede determinar la propagación de un frente de onda hasta una distancia z .

2.4.5. Ondas policromáticas a-estacionarias. Una señal aleatoria policromáticas está compuesta por una superposición de señales aleatorias monocromáticas, cada una con una frecuencia característica. Se tiene una señal de perfil descrita en (2.1.1), las cuales se superponen de la siguiente manera

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2A_\alpha e^{-i\pi \cot(\alpha)t^2} \int_{\mathfrak{R}^+} \mathbf{E}^\alpha(\mathbf{r}', \nu) e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi \cot(\alpha)\nu^2} d\nu \quad (2.4.8)$$

Utilizando el principio Huygens-Fresnel 2.4.7 para propagar la señal α -estacionaria,

$$\mathbf{E}^\alpha(\mathbf{r}, \nu) = \frac{A_\alpha e^{-i\pi \cot(\alpha)t^2}}{i\lambda \sin(\alpha)} \int_{\Sigma} \mathbf{E}_0^\alpha(\mathbf{r}', \nu) e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi \cot(\alpha)\nu^2} \frac{e^{\frac{i2\pi\nu}{\sin(\alpha)c}|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\sigma' \quad (2.4.9)$$

En donde $\mathbf{E}(\mathbf{r}; t)$ es una señal que se ha definido como a-estacionaria, escribimos

$$\mathbf{E}_Z(\mathbf{r}, \nu) = \frac{A_\alpha e^{-i\pi \cot(\alpha)t^2}}{i\lambda \sin(\alpha)} \int_{\Sigma} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \int_{\mathfrak{R}^+} \nu \mathbf{E}_0^\alpha(\mathbf{r}', \nu) e^{\frac{i2\pi\nu t}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi \cot(\alpha)\nu^2} e^{\frac{i2\pi\nu}{\sin(\alpha)c}|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} d\nu d\sigma' \quad (2.4.10)$$

2.4.6. Aproximación al espectro estrecho. Para ondas de espectro estrecho $\tilde{\nu} \gg \Delta\nu$ utilizando el teorema de modulación (1.4.6) se justifica la aproximación

$$\mathbf{E}_Z(\mathbf{r}, \nu) = \frac{A_\alpha e^{-i\pi \cot(\alpha)t^2}}{i\lambda \sin(\alpha)} \int_{\Sigma} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c} \right) e^{-i\pi \cot(\alpha) \left[\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{c^2} + 2 \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|t}{c} \right]} d\sigma'$$

Calculando la coherencia de estas señales a una distancia z

$$\Gamma_Z^\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = E\{\mathbf{E}_z(\mathbf{r}_1; t) \cdot \overline{\mathbf{E}_z(\mathbf{r}_2; t - \tau)} e^{-i2\pi \cot(\alpha)\tau(t-\tau)}\} \quad (2.4.11)$$

$$\Gamma_Z^\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{A_\alpha \overline{A_\alpha}}{\tilde{\lambda}^2 \sin^2(\alpha)} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} d\sigma d\sigma'$$

$$\times E\left\{ \mathbf{E}_0\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c}\right) \overline{\mathbf{E}_0\left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c}\right)} \right.$$

$$\left. \times e^{-i\pi \cot(\alpha) \left[\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^2}{c^2} + 2 \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| t}{c} \right]} e^{i\pi \cot(\alpha) \left[\frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|^2}{c^2} + 2 \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| (t - \tau)}{c} \right]} \right\} d\sigma d\sigma'$$

organizando los términos en la coherencia se tiene que

$$\Gamma_Z^\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{A_\alpha \overline{A_\alpha}}{\tilde{\lambda}^2 \sin^2(\alpha)} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}$$

$$\times E\left\{ \mathbf{E}_0\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c}\right) \overline{\mathbf{E}_0\left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c}\right)} \right.$$

$$\left. \times e^{i\pi \cot(\alpha) \left[\frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|^2}{c^2} + 2 \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| (t - \tau)}{c} - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^2}{c^2} - 2 \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| t}{c} - 2t\tau + 2\tau^2 \right]} \right\} d\sigma d\sigma'$$

definiendo la variable

$$\tau' = \tau + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c}$$

Sustituyendo

$$\Gamma_Z^\alpha(r_1, r_2; \tau) = \frac{A_\alpha \overline{A_\alpha}}{\tilde{\lambda}^2 \sin^2(\alpha)} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}$$

$$XE \left\{ \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \overline{\mathbf{E}_0 \left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right)} e^{-i2\pi \cot(\alpha) \tau'(t - \tau')} \right\}$$

$$X \exp \left[-i\pi \cot(\alpha) \left(-2\tau' \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} - \left\{ \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right\}^2 + 4 \left\{ \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right\}^2 \right) \right] d\sigma d\sigma'$$

definiendo la coherencia

$$\Gamma_0^\alpha(r_1, r_2; \tau') = A_\alpha \overline{A_\alpha} E \left\{ \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \overline{\mathbf{E}_0 \left(\mathbf{r}'', t - \tau + \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right)} e^{-i2\pi \cot(\alpha) \tau'(t - \tau')} \right\}$$

En donde $\Gamma_0^\alpha(r_1, r_2; \tau')$ es la denominada coherencia de orden alfa en el punto origen de la señal aleatoria

$$\Gamma_Z^\alpha(r_1, r_2; \tau) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma'} \frac{\cos(\hat{z}', \mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cos(\hat{z}', \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{\tilde{\lambda}^2 \sin^2(\alpha) |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} \Gamma_0^\alpha(r_1, r_2; \tau')$$

$$X \exp \left[-i\pi \cot(\alpha) \left(-2\tau' \frac{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} - \left\{ \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2|}{c} \right\}^2 + 4 \left\{ \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|}{c} \right\}^2 \right) \right] d\sigma d\sigma'$$

En donde si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ es la propagación de la coherencia en forma estándar 1.8.6

3. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una dedición de coherencia asociada a señales no estacionarias, a partir de herramientas estadísticas como a-estacionariedad y correlación fraccionaria, esta definición es posible utilizarla para señales estacionarias cuando el parámetro $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Con base en la definición de coherencia de orden alfa, se definió el grado complejo de coherencia para señales no estacionarias, este se utiliza para hallar la expresión de la visibilidad de las franjas de interferencia asociadas a señales no estacionarias (tipo Chirp), y se encontró que poseen una dependencia similar a la establecida entre el grado complejo de coherencia y la visibilidad en su forma estándar.

Se propago la coherencia asociada a las señales a-estacionarias, utilizando la noción del principio de Huygens-Fresnel, este principio se adaptó a señales tipo Chirp, generando un desarrollo analítico del comportamiento de la coherencia a una distancia z de un punto origen.

4. TRABAJOS FUTUROS

Se propone retomar este trabajo para poder calcular la densidad espectral de potencia asociada a señales a-estacionarias, para la región del espectro estrecho, adaptando el teorema de Van Cittert-Zernike a este tipo de señales no estacionarias.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA

- [1] *Fractional Fourier Analysis of Random Signals and the Notion of a-Stationarity of the Wigner Ville Distribution*. Torres, R. and Torres, E. 2013, Signal Processing, IEEE Transactions on, Vol. 61, págs. 1555-1560.
- [2] Franks, L. *Teoría de la señal*. s.l. : Reverté, 1975.
- [3] Priemer, R. *Introductory Signal Processing*. s.l. : Advanced Series in Electrical and Computer Engineering, World Scientific Publishing Company Incorporated, 1991.
- [4] *Time-local spectral analysis for non-stationary time series: The s-transform for noisy signals*. C. R. Pinnegar and L. Mansinha. 03, 2003, Fluctuation and Noise Letters, Vol. 03, págs. L357-L364.
- [5] *Detrended cross-correlation analysis for non-stationary time series with periodic trends*. D. Horvatic, H. E. Stanley, and B. Podobnik,. 1, 2011, EPL (Europhysics Letters), Vol. 94, pág. 18007.
- [6] *A method of blind separation for convolved non-stationary signals*. M. Kawamoto, K. Matsuoka, and N. Ohnishi. 1–3, 1998, Neurocomputing, Vol. 22, págs. 157 – 171,.
- [7] *Prediction of a noise-distorted, multivariate, non-stationary signal*. E. Sobel. 2, 1967, Journal of Applied Probability,, Vol. 4, págs. 330–342.
- [8] Glauber, R. *Quantum Theory of Optical Coherence: Selected Papers and Lectures*. s.l. : Wiley, 2007.
- [9] Hecht, E. *optica. Serie de compendios Schaum*. s.l. : McGraw-Hill, 1992.
- [10] *Acoustic reciprocity of spatial coherence in ultrasound imaging*. N. Bottenus and K. Ustuner. may de 2015, Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on, Vol. 62, págs. 852–861.
- [11] *Atomic coherence: Leveraging nanophotonics to build race-free cache coherence protocols*. D. Vantrease, M. Lipasti, and N. Binkert,. 2011, High

- Performance Computer Architecture (HPCA), 2011 IEEE 17th International Symposium on, págs. 132-143.
- [12] *Optical noise coherence effects in a mach-zehnder system.* Y.Weissman. May de 1996, Lightwave Technology, Journal of, Vol. 14, págs. 888–893.
- [13] *On the spectral coherence of nonstationary processes.* Gardner, W. Feb de 1991, Signal Processing, IEEE Transactions on,, Vol. 39, págs. 424–430.
- [14] *Adaptive coherence analysis of nonstationary time series using the adaptive lomb spectrum.* Zhang, S. Chan and Z. July de 2005, in Statistical Signal Processing, 2005 IEEE/SP 13th Workshop on, págs. 901–904.
- [15] *Time-frequency coherence analysis of nonstationary random processes.* Hlawatsch, G. Matz and F. 2000., in Statistical Signal and Array Processing, 2000. Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on, págs. 554–558.
- [16] *Estimation of stationary and nonstationary coherence in SAR imagery.* Touzi, R. 1998, Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings, 1998. IGARSS '98. 1998 IEEE International, págs. 2659-2661.
- [17] *A theoretical combination of frequency modulation and doppler effect.* Shahosseini, S. Hosseini and S. 2009, in Research and Development (SCORED), 2009 IEEE Student Conference on, págs. 574–576.
- [18] Pillai, A. Papoulis and S. Probability, random variables, and stochastic processes. s.l. : McGraw-Hill electrical and electronic engineering series, McGraw-Hill, 2002, pág. 298.
- [19] Peña, D. *Fundamentos de estadística.* s.l. : El Libro Universitario - Manuales, Alianza Editorial, 2008.
- [20] *Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico.* Amarís, R. A. T. 2008, Universidad Industrial de Santander.
- [21] Pillai, A. Papoulis and S. Probability, random variables, and stochastic processes. s.l. : McGraw-Hill electrical and electronic engineering series, McGraw-Hill, 2002, pág. 286.

- [22] J. Ramos, C. González, and G. Garzón. *Estadística administrativa*. s.l. : Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz,, 2006.
- [23] Ditchburn, R. *óptica*. s.l. : Reverté, 1982.
- [24] Pellat-Finet, P. *Lecciones de óptica de Fourier*. s.l. : Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [25] Wolf, L. Mandel and E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. s.l. : Cambridge University Press, 1995.
- [26] J. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. s.l. : McGraw-Hill physical and quantum electronics series, Roberts & Company, 2005.

BIBLIOGRAFIA

AMARÍS, R. A. T. Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico. 2008, Universidad Industrial de Santander.

C. R. PINNEGAR AND L. MANSINHA. Time-local spectral analysis for non-stationary time series: The s-transform for noisy signals. 03, 2003, Fluctuation and Noise Letters, Vol. 03, págs. L357-L364.

D. HORVATIC, H. E. STANLEY, AND B. PODOBNIK. Detrended cross-correlation analysis for non-stationary time series with periodic trends.,. 1, 2011, EPL (Europhysics Letters), Vol. 94, pág. 18007.

D. VANTREASE, M. LIPASTI, AND N. BINKERT,. Atomic Coherence: Leveraging nanophotonics to build race-free cache coherence protocols. 2011, High Performance Computer Architecture (HPCA), 2011 IEEE 17th International Symposium on, págs. 132-143.

DITCHBURN, R. óptica. s.l. : Reverté, 1982.

E. SOBEL.. Prediction of a noise-distorted, multivariate, non-stationary signal. 2, 1967, Journal of Applied Probability,, Vol. 4, págs. 330–342.

FRANKS, L. Teoría de la señal. s.l. : Reverté, 1975.

GARDNER, W. On the spectral coherence of nonstationary processes. Feb de 1991, Signal Processing, IEEE Transactions on,, Vol. 39, págs. 424–430.

GLAUBER, R. Quantum Theory of Optical Coherence: Selected Papers and Lectures. s.l. : Wiley, 2007.

HECHT, E. optica. Serie de compendios Schaum. s.l. : McGraw-Hill, 1992.

HLAWATSCH, G. MATZ & F. Time-frequency coherence analysis of nonstationary random processes. 2000., in Statistical Signal and Array Processing, 2000. Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on, págs. 554–558.

J. GOODMAN. Introduction to Fourier Optics. s.l. : McGraw-Hill physical and quantum electronics series, Roberts & Company, 2005.

J. RAMOS, C. GONZÁLEZ, & G. GARZÓN. Estadística administrativa. s.l. : Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz,, 2006.

M. KAWAMOTO, K. MATSUOKA, AND N. OHNISHI. A method of blind separation for convolved non-stationary signals.. 1–3, 1998, Neurocomputing, Vol. 22, págs. 157 – 171,.

N. BOTTENUS AND K. USTUNER. Acoustic reciprocity of spatial coherence in ultrasound imaging may de 2015, Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on, Vol. 62, págs. 852–861.

PELLAT-FINET, P. Lecciones de óptica de Fourier. s.l. : Universidad Industrial de Santander, 2004.

PEÑA, D. Fundamentos de estadística. s.l. : El Libro Universitario - Manuales, Alianza Editorial, 2008.

PILLAI, A. Papoulis and S. Probability, random variables, and stochastic processes. s.l. : McGraw-Hill electrical and electronic engineering series, McGraw-Hill, 2002, pág. 298.

PRIEMER, R. Introductory Signal Processing. s.l. : Advanced Series in Electrical and Computer Engineering, World Scientific Publishing Company Incorporated, 1991.

SHAHOSSEINI, S. HOSSEINI AND S. A theoretical combination of frequency modulation and doppler effect. 2009, in Research and Development (SCORed), 2009 IEEE Student Conference on, págs. 574–576.

TORRES, R. & TORRES, E Fractional Fourier Analysis of Random Signals and the Notion of α -Stationarity of the Wigner Ville Distribution.. 2013, Signal Processing, IEEE Transactions on, Vol. 61, págs. 1555-1560.

TOUZI, R. Estimation of stationary and nonstationary coherence in SAR imagery. 1998, Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings, 1998. IGARSS '98. 1998 IEEE International, págs. 2659-2661.

WOLF, L. MANDEL AND E. Optical Coherence and Quantum Optics. s.l. : Cambridge University Press, 1995.

Y.WEISSMAN. Optical noise coherence effects in a mach-zehnder system.. May de 1996, Lightwave Technology, Journal of, Vol. 14, págs. 888–893.

ZHANG, S. CHAN AND Z. Adaptive coherence analysis of nonstationary time series using the adaptive lomb spectrum. July de 2005, in Statistical Signal Processing, 2005 IEEE/SP 13th Workshop on, págs. 901–904.