SOLUCIÓN POR RADICALES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO, TERCER Y CUARTO GRADO

Diana Patricia Colmenares Velandia
Andrea Mayerly Roa Pinzón

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013

SOLUCIÓN POR RADICALES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO, TERCER Y CUARTO GRADO

Diana Patricia Colmenares Velandia
Andrea Mayerly Roa Pinzón

Monografía presentada como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Director

Rafael Fernando Isaacs Giraldo
Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2013

Este trabajo va dedicado a nuestros familiares, quienes nos han brindado paciencia, amor, comprensión y apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Damos nuestros más profundos agradecimientos:

- A **Dios**, por todas las bendiciones que nos ha brindado.
- A **nuestros padres**, por su apoyo incondicional.
- A los **profesores de la Escuela de Matemáticas**, a quienes les debemos nuestra formación académica.
- A **Rafael Fernando Isaacs Giraldo**, por su colaboración y apoyo en el momento justo.
- A todos nuestros **familiares y amigos**, que de una u otra forma estuvieron con nosotras, brindándonos su compañía, ayuda y cooperación.
- A los docentes **Bernardo José Mayorga, Javier Camargo y Edilberto J. Reyes**, quienes en su momento hicieron lo propio con este trabajo y contribuyeron con su valioso aporte.
- A mi esposo, **David Cajicá**, a mis hijos **Juan David y Valeria**, por que son mi motivación y mi orgullo. Andrea.
- A la **UIS**, institución que nos dió la oportunidad de escalar un peldaño en nuestra formación profesional.

TÍTULO: SOLUCIÓN POR RADICALES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO, TERCER Y CUARTO GRADO[1]

AUTOR: COLMENARES VELANDIA Diana Patricia, ROA PINZÓN Andrea Mayerly[2]

PALABRAS CLAVES: Solución de ecuaciones, polinomio, ecuación cuadrática, ecuación cúbica, ecuación cuártica, discriminante, Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Ludovico Ferrari, Tschirnhaus, historia.

DESCRIPCIÓN

En este trabajo de grado presentamos la forma cómo históricamente se da solución a las ecuaciones polinomiales de grado dos, tres y cuatro (ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas), y su respectiva ejemplificación, empezando con la reseña histórica que rodeó el hecho de encontrar cada una de éstas expresiones.

Esta monografía está compuesta de tres capítulos. En el primero, se presentan algunos conceptos preliminares sobre Teoría de Ecuaciones Algebraicas (definiciones, teoremas, gráficas), fundamentales para el desarrollo de este trabajo, así como las definiciones y los procesos por medio de los cuáles se realizan las operaciones básicas entre números complejos, al igual que la forma como se calculan las raíces n-ésimas de un número complejo y la razón matemática del hecho de que sean n raíces exactas, dando cumplimiento al Teorema Fundamental del Álgebra (TFA).

En el segundo capítulo, se da solución a las ecuaciones de la forma $x^n = z$, en los números complejos y se muestra la representación geométrica de estas, tratándose con profundidad el cálculo de las raíces de la unidad.

En el tercer capítulo, se desarrolla el objetivo general de este trabajo, es decir, se da la reseña histórica que rodea cada una de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, así como el desarrollo de las expresiones que permiten hallar las soluciones generales de estás ecuaciones, el cálculo del discriminante de cada ecuación y el desarrollo de ejemplos prácticos de aplicación de cada una de las expresiones halladas.

[1]Monografía

[2]Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

TITLE: SOLUTION FOR RADICALS OF EQUATIONS OF SECOND, THIRD AND QUARTER GRADE[1]

AUTHOR: COLMENARES VELANDIA Diana Patricia, ROA PINZÓN Andrea Mayerly[2]

KEY WORDS: Solution of equations, polynomial, quadratic equation, cubic equation, Solution of equations, polynomial, quadratic equation, cubic equation, quartic equation, discriminant, Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Ludovico Ferrari, Tschirnhaus, history.

DESCRIPTION

In this paper we present grade the way historically solves polynomial equations of degree two, three and four (quadratic equations, cubic and quartic), and their respective modeling, starting with the historical background surrounding the finding of each of these expressions.

This paper consists of three chapters. In the first, we present some preliminary concepts on Theory of Algebraic Equations (definitions, theorems, graphs), essential for the development of this work, and the definitions and processes through which basic operations are performed between complex numbers , as well as how to calculate the n root of a complex number and mathematical reason of the fact that they are n exact roots, in compliance with the Fundamental Theorem of Algebra (TFA).

In the second chapter, there is a solution to the equations of the form $x^n = z$ in the complex numbers and shows the geometric representation of these, being deeply calculating roots of unity.

In the third chapter develops the general objective of this paper is, given the historical background surrounding each of the solutions of quadratic equations, cubic and quartic, and the development of expressions that allow us to find the solutions general these equations, the calculation of the discriminant of each equation and the development of practical examples of each of the expressions found.

---

[1]Monograph

[2]Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

Contenido

Introducción

Desde tiempos inmemorables, el hombre ha tenido que solucionar problemas matemáticos, con el fin de mejorar su calidad de vida. No es extraño que casi todo lo que nos rodea implique situaciones de carácter geométrico, aritmético, algebraico, analítico y de razonamiento lógico. Así, el hombre se ha tenido que enfrentar a problemas que involucran cálculo de áreas o superficies, así como el cálculo de volúmenes o espacio, dando lugar al surgimiento de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, y teniendo éstas, plantearse ecuaciones de grado cuatro y grado superior.

Es así como, en ausencia de la tecnología, que actualmente permite solucionar cualquier polinomio por métodos numéricos, dando respuestas aproximadas o exactas, según el software que se use y en un tiempo mínimo, los matemáticos de la antigüedad debieron enfrentar el reto de encontrar expresiones que dieran solución a éstas ecuaciones.

En el renacimiento italiano, aparecen hombres como Del Ferro, Cardano, Tartaglia y Ferrari, que asumen este reto de manera apasionada, como lo evidencia la historia, y encuentran la forma de solucionarlas.

Son esos métodos los que forman la columna vertebral de este trabajo de grado, pues todos los estudiantes desde la educación básica secundaria han manejado la “fórmula cuadrática”, pero muchos no saben cómo se obtuvo, y algunos estudiantes de pregrado han tenido acceso a las expresiones que dan solución a ecuaciones cúbicas o cuárticas, pero desconocen su desarrollo, su aplicación y su entorno histórico.

Este trabajo se ha dividido en tres capítulos: En el primero, encontraremos algunos conceptos preliminares sobre Teoría de Ecuaciones Algebraicas (definiciones, teoremas, gráficas) fundamentales para el desarrollo de este trabajo. En el segundo capítulo, se da solución a las ecuaciones de la forma $x^n = z$, con z constante, variable x y n un número natural positivo, en los números complejos.

En el tercer capítulo, se desarrolla el objetivo general de este trabajo, es decir, se da la reseña histórica que rodea cada una de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, así como el desarrollo de las expresiones que permiten hallar las soluciones generales de estás ecuaciones, el cálculo del discriminante de cada ecuación y el desarrollo de ejemplos.

Hay que resaltar la importancia de la Teoría de Grupos o Teoría de Galois, que cuenta entre sus resultados principales la demostración de la imposibilidad de resolver ecuaciones de grado cinco o mayor a cinco, por métodos aritméticos y de cálculo de raíces, de forma general, recordando que resolver una ecuación por radicales, consiste en encontrar las raíces de un polinomio por medio de operaciones aritméticas básicas, como los son sustituciones, adiciones, productos, cocientes y el cálculo de raíces cuadradas, cúbicas, cuárticas, etc.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Ecuaciones

Una ***igualdad*** es un enunciado en el que dos expresiones (iguales o distintas) denotan el mismo objeto. En matemáticas eso se expresa separando esas dos cosas u objetos matemáticos mediante el signo $=$ (de igualdad) entre ellos.
Cuando en una igualdad hay algún elemento desconocido, se dice que se tiene una ***ecuación***. Si ese elemento desconocido se puede determinar, se dice que se ha encontrado ***una solución*** a la ecuación. Pero para una misma ecuación puede haber más de una solución válida, así como puede darse el caso de que no exista solución. ***Resolver*** una ecuación es hallar los elementos desconocidos (en caso de que existan) que hacen que la igualdad sea verdadera.
La ecuación

$$x = \text{tutor de Alejandro Magno}$$

tiene una única solución, $x =$ Aristóteles, que se convierte en una igualdad auténtica:

$$\text{Aristóteles} = \text{tutor de Alejandro Magno.}$$

De la misma manera,

$$x = \text{país campeón mundial de fútbol}$$

tiene varias soluciones, algunas de las cuales son incluso “múltiples”.
Pero la ecuación

$$x = \text{hombre que ha corrido 100 metros en menos de 5 segundos}$$

no tiene solución.

En esta monografía, por supuesto, nos ocuparemos sólo de ecuaciones en que aparecen números, y sólo de un cierto tipo de ecuaciones.

1.1.1. Ecuaciones numéricas

La ecuación numérica más simple se le pudo haber presentado al hombre primitivo cazador-recolector al encontrar, por ejemplo, una cantidad M de unidades de un determinado fruto, cantidad que había que repartir entre los N individuos del grupo en partes iguales (o aproximadamente iguales). Miles de años después nosotros escribimos

$$M = Nx,$$

en donde simbolizamos mediante la letra x la cantidad de frutos que corresponde a cada individuo; esa ecuación será llamada ***de primer grado***.

Ejemplos escritos de problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado las encontramos ya hace casi tres mil años. En el Papiro de Moscú (siglo -XIX), leemos[1]:

“Un cateto de un triángulo rectángulo es $2\frac{1}{2}$ veces el otro; el área es 20. ¿Cuáles son las dimensiones?”

Utilizando nuestros métodos contemporáneos, y denotando la longitud del cateto pequeño mediante x, tendremos

$$(x)(\tfrac{5}{2}x) = 2 \cdot 20,$$

o sea

$$5x^2 - 80 = 0,$$

una típica ecuación de segundo grado.

De la misma manera, al trabajar con volúmenes aparecían ecuaciones de tercer grado de manera natural (recuérdese, por ejemplo, el problema délico de la duplicación del cubo[2]).

[1] EVES Howard. Estudio de las geometrías, tomo I. UTEHA, México, 1969, p. 7.

[2] Los problemas délicos son un grupo de tres problemas relacionados con las construcciones con regla y compás conocidos desde la época de la antigua Grecia. Concretamente son la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo utilizando solamente regla y compás.

En todos los casos anteriores, la incógnita x representa siempre un número real. Pero ya en el siglo XVI, en pleno furor renacentista, cuando Tartaglia y Cardano logran "domar"las ecuaciones de tercero y cuarto grado, ven ellos que aunque en ciertos casos las ecuaciones no tienen soluciones en forma de números "corrientes" (lo que ahora llamamos "reales positivos"), hay casos en los cuales la solución aparece como suma o diferencia de cantidades imposibles de clasificar, que son los que ahora llamamos "números imaginarios".

Sin embargo, a fines del siglo XVI ya Rafaele BOMBELLI trata con confianza los números imaginarios en su libro Álgebra (1572). Lo que ahora llamamos $3i$, por ejemplo, él lo escribe como $R[0m, 9]$, en donde R significa radix y m meno; eso en notación moderna sería $\sqrt{0-9}$, o simplemente, $\sqrt{-9}$ (ver [STRUIK][3]).

1.2. Los números complejos

El nacimiento de los números complejos, estuvo ligado, como ya se dijo, a la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones de segundo y tercer grado. En esta monografía sólo se tratarán las ecuaciones polinómicas, es decir, aquellas que tienen la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ son números complejos, por lo que primero daremos una breve reseña histórica de los mismos.

Los números imaginarios se inventaron durante el siglo XVI cuando los matemáticos buscaban soluciones generales para las ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Como el cuadrado de todo número real siempre es mayor o igual que cero, la ecuación $x^2 = -1$ no puede resolverse en el campo de los números reales. Al principio, los números complejos fueron desarrollados uniendo el símbolo $\sqrt{-1}$ al sistema de los números reales. Este símbolo, sin embargo, lleva a "paradojas" como la siguiente:

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Para evitar paradojas como esta, Leonhard Euler (1707-1783, Suiza), presentó en 1777, la notación i con $i^2 = -1$ como propiedad básica. Así, las dos raíces de la ecuación $x^2 = -1$, son ahora $\pm i$. El símbolo i se llama la unidad imaginaria. La opción de la

[3]STRUIK Dirk. A concise history of mathematics. Dover Publications, 1987.

palabra “imaginario” es infortunada, pero indica la desconfianza con que se vieron los números complejos.

Éstas sospechas desaparecieron de forma lenta hacia finales del siglo XVIII, cuando Caspar Wessel (1747-1818, Noruega), en 1797 y Carl Friedrich Gauss (1777-1855, Alemania) en 1799, en su tesis doctoral, dieron una representación geométrica simple a los números complejos dándoles la forma $a + bi$[4].

Wessel y Gauss pensaron cómo representar a a y b en coordenadas rectangulares con un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R}$ representa la línea real).

Esta interpretación simple de los números complejos hizo a los matemáticos sentirse mucho más cómodos respecto a los números imaginarios, y su existencia se empezó a aceptar aunque de forma lenta.

En 1833, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865, Irlanda) presentó un artículo ante la Academia Real Irlandesa en el que introduce un álgebra formal de pares ordenados de números reales, las reglas de operación que aún hoy son usadas para el sistema de números complejos.

En el siglo XVIII, Euler empezó el estudio de funciones y series de una variable compleja. El observó que al sustituir x por xi en la función exponencial

$$e^x = 1 + \tfrac{x^1}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + ...$$

se obtenía

$$e^{xi} = (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - ...) + i(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - ...),$$

a partir de la cual podría definirse

$$e^{xi} = cosx + isenx.$$

Métodos similares llevaron a resultados llamativos. Sin embargo, a todos estos resultados “formales” les faltaba rigor matemático, y a menudo llevaban a paradojas.

Sólo hasta el siglo XIX este acercamiento al análisis complejo se reemplazó por un tratamiento riguroso.

Los fundadores de la teoría de funciones de una variable compleja, y de todo el análisis, fueron Augustin Louis Cauchy (1789-1857, Francia), profesor en el École Polytechnique en Paris, Karl Weiestrass (1815-1879, Alemania) profesor de la Universidad de Berlín,

[4]EVES Howard.Estudio de las geometrías, Tomo I. UTEHA, México, 1969.

y Bernhard Riemann (1826-1866, Alemania), profesor en Göttingen. Cauchy introdujo el concepto de integral sobre una línea compleja en 1814, y publicó su teorema básico de funciones de una variable compleja en 1825. Durante la segunda mitad del siglo XIX, Riemann desarrolló la teoría de funciones complejas desde un punto de vista físico-geométrico, y Weierstrass lo desarrolló desde un punto de vista lógico riguroso.
Antes de que hablemos de la solución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, e inclusive, las de grado uno, es necesario que recordemos algunos conceptos básicos de los números complejos, así como sus propiedades y el álgebra básica.
Empezaremos definiendo los números complejos del mismo modo en que fueron definidos por Hamilton en 1833, como un par ordenado (a, b) de números reales que obedecen ciertas operaciones algebraicas. Esta definición tiene la ventaja de mostrar a los principiantes en variable compleja, que no hay nada irreal sobre los llamados números imaginarios. La definición de Hamilton se usa hoy cuando se utilizan los números complejos en programación de computadores.
También estableceremos que la notación de Hamilton (a, b) y la notación de Euler, $a + bi$, donde a, b son números reales e $i = \sqrt{-1}$, son equivalentes.
Además, daremos a conocer las distintas representaciones geométricas de los números complejos y desarrollaremos el álgebra de números complejos, tal como fue explicada por Gauss en 1799, y presentaremos algunas aplicaciones de los números complejos en la solución de ecuaciones algebraicas (cálculo de raíces).

Definición 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. El conjunto de números dados por la expresión $z = a+bi$ se denomina conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$), donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

Dado el número $z = a + bi$, al término a se le conoce como la parte real, y al término b, como la parte imaginaria del complejo z, y se denotan Re z e Im z, respectivamente.

Sea z_1 y z_2 números complejos; entonces, de manera trivial se verifica que

a. $\text{Re}\,(z_1 + z_2) = \text{Re}\, z_1 + \text{Re}\, z_2$,

b. $\text{Im}\,(z_1 + z_2) = \text{Im}\, z_1 + \text{Im}\, z_2$,

c. $\text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\, z_1\, \text{Re}\, z_2 - \text{Im}\, z_1\, \text{Im}\, z_2$,

d. $\text{Im}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\, z_1\, \text{Im}\, z_2 + \text{Im}\, z_1\, \text{Re}\, z_2$.

Si tomamos Re $z = 0$ (es decir, $a = 0$), obtenemos un conjunto de números denominado "imaginarios puros", que tienen la forma $z = bi$. Por otra parte, si tomamos Im $z = 0$ (es decir, $b = 0$), obtenemos un conjunto de números de la forma $z = a$, con el que podemos establecer un isomorfismo con los números reales, mediante la siguiente función:

$$\text{f: } \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$a \mapsto a$$

De lo anterior, podemos concluir que los números complejos son una extensión de los números reales.
Como ya hemos visto, los números complejos también se pueden escribir en forma de pareja ordenada:

$$z = a + bi = (a, b)$$

Con esta notación, podemos construir una representación gráfica de los números complejos en el plano cartesiano, donde el eje de las ordenadas (eje Y) representa la parte imaginaria y el eje de las abscisas (eje X) representa la parte real del número complejo (ver figura 1). Así, el plano cartesiano pasa a denominarse Plano Complejo, diagrama de Argand (en 1806, el matemático francés Jean-Robert Argand representó geométricamente los números complejos como puntos del plano) o Plano de Gauss (Figura 1).

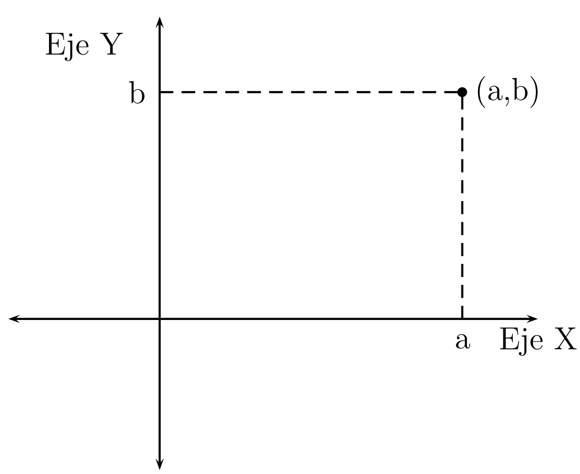

FIGURA 1. Representación geométrica de $z = (a, b)$

Otra representación gráfica de los números complejos se obtiene al usar un vector o segmento rectilíneo dirigido desde el origen del plano complejo $z_0 = (0,0)$ hasta el punto $z = (a,b)$, que equivale al número complejo $z = a + bi$ (ver figura 2).

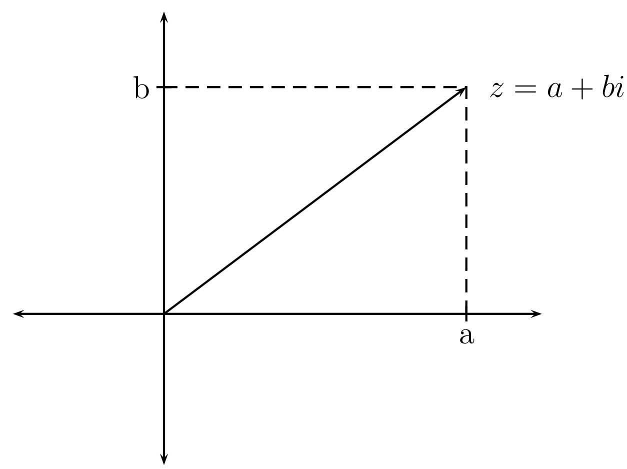

FIGURA 2. Representación gráfica de $z = a + bi$.

Con esta última representación podemos recordar algunas definiciones de gran importancia:

Definición 1.2. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. Se denomina **módulo** de z y se denota $|z|$, la distancia euclidiana entre el origen de coordenadas y el punto (a,b), así:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \equiv r.$$

La dirección del vector $\overrightarrow{z}$, denotada θ, se conoce como el argumento o la amplitud de z, y se puede obtener mediante las inversas de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta = \tfrac{b}{r} &\Rightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}(\tfrac{b}{r}), \\ \cos\theta = \tfrac{a}{r} &\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\tfrac{a}{r}), \\ \tan\theta = \tfrac{b}{a} &\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\tfrac{b}{a}). \end{aligned}$$

Usando el módulo y el argumento de z se puede escribir el complejo z en forma polar:

$$z = [r, \theta] = [\sqrt{a^2 + b^2}, \tan^{-1}\tfrac{b}{a}] = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y su respectiva representación gráfica es la que se muestra en la figura 3.

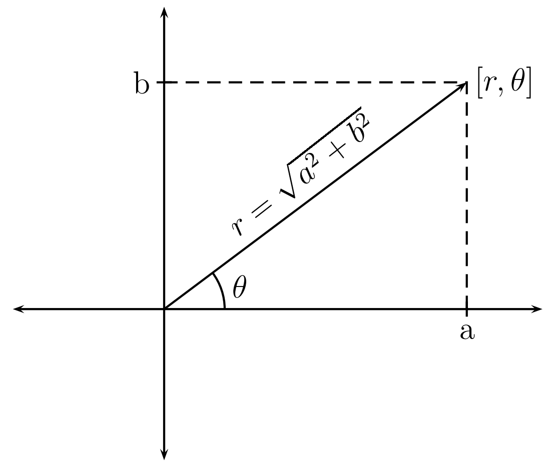

FIGURA 3. Representación gráfica en su forma polar de $z=(a,b)=[r,\theta]$.

1.3. Álgebra de números complejos

Así como en los números reales ($\mathbb{R}$) y en sus subconjuntos (racionales ($\mathbb{Q}$,), irracionales ($\mathbb{I}$), enteros ($\mathbb{Z}$) y naturales ($\mathbb{N}$)) se definen operaciones básicas, se hace lo mismo en los números complejos.

Definición 1.3. Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$. Se definen

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i \quad \text{y}$$

$$z_1\times z_2=z_1.z_2=z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

como la adición y la multiplicación de dos números complejos, respectivamente.

Nota 1.3.1. en adelante se suprimirá el punto que indica producto, a menos que sea absolutamente necesario su uso.

Las operaciones inversas a las definidas anteriormente, la sustracción y la división de números complejos, también las podemos realizar mediante los siguientes algoritmos:

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i \quad \text{y}$$

$$\tfrac{z_1}{z_2}=\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+(\tfrac{cb-ad}{c^2+d^2})i, \quad \text{siempre que } z_2\neq 0+0i.$$

Vemos entonces que el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es un campo no ordenado (no podemos indicar cuando un número complejo es mayor que otro, a menos que sean números cuya parte imaginaria es cero) con respecto a las operaciones adición y multiplicación y como tal, cumple las siguientes propiedades:

1. El cero para la adición es el módulo y está definido como $0 = (0,0) = 0 + 0i$.
2. El módulo para la multiplicación es el complejo $z = (1,0)$.
3. El inverso aditivo de un número complejo (a,b) es $(-a,-b)$.
4. El inverso multiplicativo de un número complejo $z = (a,b) \neq (0,0)$ es

$$z^{-1} = (a,b)^{-1} = (\tfrac{a}{a^2+b^2}, \tfrac{b}{a^2+b^2}).$$

Para demostrar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ forman un campo, todo lo que tenemos que probar son las siguientes afirmaciones:
Supongamos que $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$ y $z_3 = (e,f)$, entonces,

1. Propiedad clausurativa: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.
2. Propiedad conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ y $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
3. Propiedad asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ y $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
4. Propiedad modulativa: $z_1 + (0,0) = z_1$ y $z_1(1,0) = z_1$.
5. Propiedad invertiva: $z_1 + (-z_1) = (0,0)$ y $z_2 z_2^{-1} = (1,0)$
6. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:
   $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

La prueba de lo anterior es elemental y se la dejamos al lector.

Dos consecuencias elementales de la definición de $\mathbb{C}$, son:
Dados dos números complejos $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$,

1. La ecuación $z_1 + z_3 = z_2$, tiene la única solución $z_3 = (a-c, b-d)$, con z_3 llamado "diferencia de z_1 y de z_2", denotado por $z_1 - z_2$.

2. La ecuación $z_1z_3 = z_2$, con $z_1 \neq (0,0)$ tiene la única solución $z_3 = (\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2})$, con z_3 llamado el cociente de z_2 sobre z_1, notado por z_2/z_1. Notemos que $z_3 = z_1^{-1}z_2$.

Las funciones polinomiales y racionales (cociente de dos polinomios) en $\mathbb{C}$, son definidas como en $\mathbb{R}$. Sus propiedades son familiares para nosotros, pues son las mismas de los números reales:

1. $z^n z^m = z^{n+m}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$
2. $(z^n)^m = z^{nm}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$
3. $(z_1z_2)^n = z_1^n z_2^n, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}.$
4. $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, z \neq (0,0).$

Debemos tener en cuenta que ningún número complejo z puede ser (0,0) si su exponente es negativo.
Si n es un entero positivo, podemos demostrar por inducción, que la fórmula del binomio, también se cumple para los números complejos a y b:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

donde $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ para $1 \leq k \leq n$.
Fácilmente se verifica que para todo $n = 1, 2, 3, ...,$

1. $i^{4n} = 1$
2. $i^{4n+1} = i$
3. $i^{4n+2} = -1$
4. $i^{4n+3} = -i$

Utilizando esto, vemos, por ejemplo, que $(1+i)^{100} = -2^{50}$, puesto que
$(1+i)^{100} = [(1+i)^2]^{50} = [1+2i-1]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50}i^{50} = 2^{50}(i^2)^{25} = 2^{50}(-1)^{25} =$
$= 2^{50}(-1) = -2^{50}$

1.4. Conjugado y módulo de un número complejo

Definición 1.4. El ***complejo conjugado*** (o simplemente ***el conjugado***) de un número complejo $z = x + yi$ se denota por $\overline{z}$ y se define como $\overline{z} = x - yi$.

Consecuencia de la anterior definición son las siguientes propiedades, cuya demostración se deja al lector:
Sean $z, z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Entonces,

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, y por inducción,

1.1. $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$.

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$, y por inducción,

2.1. $\overline{z_1 z_2 ... z_n} = \overline{z_1}.\overline{z_2}...\overline{z_n}$.

3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Esto es, el conjugado de la suma, el producto, la diferencia o el cociente de dos números complejos, es respectivamente, la suma, el producto, la diferencia o el cociente de los conjugados.

5. $\overline{\overline{z}} = z$.

6. $\text{Re } z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ y $\text{Im } z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Por las propiedades 1.1, 2.1, 3 y 4, tenemos que si $Q(z_1, z_2, ..., z_n)$ es una función racional de $z_1, z_2, ..., z_n$, con coeficientes reales, entonces:

7. $\overline{Q(z_1, z_2, ..., z_n)} = Q(\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_n})$

Teorema 1.1. *Si z_0 es una raíz de la ecuación polinómica*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde todos los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ son reales, entonces $\overline{z_0}$ también es una raíz de $P(z) = 0$.

Demostración.
En efecto, $P(z) = 0$, y por consiguiente,

$$P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

$\square$

De la definición 1.2 de módulo tenemos las siguientes propiedades:

1. $|z|^2 = z\overline{z}$.

2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

3. $|z| = |\overline{z}|$.

4. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0$.

5. $|\text{ Re } z| \leq |z| \quad$ y $\quad |\text{ Im } z| \leq |z|$.

6. $|a| = |(a, 0)|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$, conservándose así el sentido de longitud en $\mathbb{R}$, mediante la relación $a \leftrightarrow (a, 0)$.

7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, y por inducción,

6.1 $|z_1 z_2 ... z_n| = |z_1||z_2|...|z_n|$, esto es, el módulo de un producto finito de números complejos es el producto de los módulos de cada uno de los factores.

8. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, es decir, el módulo del cociente de dos números complejos es el cociente de cada una de los módulos.

9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad$ (**Desigualdad triangular**).
   Demostremos esta última propiedad. Con base en las anteriores, tenemos:
   $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}$
   $= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \text{ Re } (z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2$
   $= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$, de donde

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2, \quad \text{es decir,}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

De aquí, por inducción,

8.1 $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$, es decir, el módulo de la suma de un número finito de números complejos no excede o es igual a la suma de las normas de cada uno de los complejos.

De manera similar a la comprobación del teorema 8, se muestra que

9. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

1.5. Producto y cociente de números complejos en su forma polar

El manejo de las operaciones Producto y Cociente de números complejos se facilita cuando hacemos uso de la representación polar de los números involucrados (ver figura 3). Trabajando con coordenadas polares, obtenemos las siguientes expresiones matemáticas:
$x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, cuando $z = x + yi$, por lo que sustituyendo tenemos que

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

La anterior es la forma polar de un número complejo z, donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + b^2}$, y $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$.
Cuando $z = 0$, tenemos que θ, que recibe el nombre de **argumento de z** y se denota por **arg z**, no se encuentra definido. Pero si $z \neq 0$ y si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces, por la periodicidad de las funciones trigonométricas, tenemos que θ se determina sólo dentro de los múltiplos enteros de 2π, es decir:

$$arg \quad z = \{\theta + 2\pi n : n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Sean $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$ dos números complejos en su forma polar. Entonces, usando las propiedades de la adición de funciones trigonométricas, tenemos que:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)], \text{ entonces,}$$
$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Es decir, el módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos de cada uno de ellos, y el argumento es la suma de los argumentos. Esto es,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \text{ y}$$
$$arg\ z_1 z_2 = arg\ z_1 + arg\ z_2$$

Si $z_2 \neq 0$, después de algunas manipulaciones algebraicas tenemos que

$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)} = |\tfrac{z_1}{z_2}|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Es decir, el módulo del cociente de dos números complejos es el cociente de los módulos, y el argumento es la diferencia de los dos argumentos. Esto es:

$$|\tfrac{z_1}{z_2}| = \tfrac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ y}$$
$$arg\ \tfrac{z_1}{z_2} = arg\ z_1 - arg\ z_2$$

Por inducción, podemos establecer que

$$z_1 z_2 ... z_n = |z_1 z_2 ... z_n|[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)]$$

En particular, tenemos que, si $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$$

De lo anterior, obtenemos:

Teorema 1.2. *Teorema de De Moivre:*

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta.$$

La anterior igualdad también se cumple para números enteros negativos:
Si $z = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$, entonces:

$$z^{-1} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{-1} = \cos -\theta + i\operatorname{sen} -\theta$$
$$z^{-n} = (z^{-1})^n$$

de donde concluimos que el teorema de De Moivre es válido para todos los números enteros.
Euler usa otra forma para notar un número complejo, conocida como "notación de Euler" y es la siguiente:
Cuando se conoce el módulo de un número complejo y su argumento, este se puede escribir como

$$z = re^{\theta i},$$

donde e representa el número irracional e. Esta forma recibe el nombre de notación polar, y es particularmente útil cuando lo que se requiere es hacer cálculos aritméticos sencillos con dos o más números complejos.

1.6. Raíces de números complejos

Definición 1.5. Sea $a \neq 0$ un número complejo, y sea n un entero positivo. La enésima raíz de a es por definición el conjunto $a^{\frac{1}{n}} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = a\}$.

Es decir, si z es una raíz de a, entonces $z^n = a$.
Sean $a = |a|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $z = |z|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ las formas polares de a y z, respectivamente, entonces, por el Teorema 1.2 y la definición 1.6, tenemos que

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = |a|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = a$$

Es decir, si $\sqrt[n]{|a|}$ denota la enésima raíz positiva real de $|a|$, igualando parte real y parte imaginaria en la anterior ecuación, tenemos que:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}, \text{ y } \phi = \tfrac{\theta+2\pi k}{n}, \text{ para todo entero } k.$$

Debido a la periodicidad del seno y el coseno, vemos fácilmente que para $k = n + m$ conseguimos la misma enésima raíz de a como cuando $k = n$, con un m apropiado. Por lo tanto,

$$\{z \in \mathbb{C} : z^n = a\} = \{\sqrt[n]{|a|}(\cos\tfrac{\theta+2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{\theta+2\pi k}{n}) : k = 0, 1, 2, ..., n-1\}.$$

Lo anterior simbólicamente es:

$$z = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a|}(\cos\tfrac{\theta+2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{\theta+2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Por consiguiente, a tiene exactamente n raíces n-ésimas.
Fácilmente podemos ver que la anterior expresión también es válida para números enteros negativos.
Adicional a los resultados anteriores, para cumplir con los objetivos de este trabajo de grado, se requiere que tengamos presente los siguientes teoremas, denominados "Transformación de Tschirnhaus"[5] y "Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)", con su respectivo corolario:

[5]También se conoce com Transformada de Tschirnhaus o Transformada de Tschirnhausen. Con este cambio de variable, se consigue eliminar el término cuyo grado es $n-1$ en cualquier polinomio de grado n. Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708) en el Acta Eruditorum de 1683 propuso un método que pretende transformar cualquier ecuación polinómica de grado n en otra del mismo grado sin términos intermedios.

Teorema 1.3 (Transformación de Tschirnhaus).
Sea $P_n(x) = 0$ una ecuación polinómica de orden n, donde

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

al hacer la sustitución $y = x + \frac{a_{n-1}}{na_n}$, $P_n(x)$ se convierte en el polinomio deprimido $b_n y^n + b_{n-2} y^{n-2} + ... + b_1 y + b_0 = 0$.

Demostración. Sustituyendo $y = x + \frac{a_{n-1}}{na_n}$ tenemos que

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}$$

Reemplazando y aplicando el Teorema del Binomio, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_n \left(y - \frac{a_{n-1}}{na_n} \right)^n + a_{n-1} \left(y - \frac{a_{n-1}}{na_n} \right)^{n-1} + ... + a_0 \\
&= a_n \left(y^n - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{n-1} + P'_{n-2}(y) \right) + a_{n-1} \left(y^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{n-2} + P''_{n-3}(y) \right) \\
&= a_n y^n - a_{n-1} y^{n-1} + a_n P'_{n-2}(y) + a_{n-1} y^{n-1} - \frac{(a_{n-1})^2}{a_n} y^{n-2} + a_{n-1} P''_{n-3}(y) \\
&= a_n y^n - a_{n-1} y^{n-1} + a_n P'_{n-2}(y) + a_{n-1} y^{n-1} - \frac{(a_{n-1})^2}{a_n} y^{n-2} + a_{n-1} P''_{n-3}(y) \\
&= a_n y^n + a_n P'_{n-2}(y) - \frac{(a_{n-1})^2}{a_n} y^{n-2} + a_{n-1} P''_{n-3}(y) \\
&= b_n y^n + b_{n-2} y^{n-2} + ... + b_1 y + b_0
\end{aligned}$$

donde $P'_{n-2}(y)$ es un polinomio en y de orden $n-2$ y $P''_{n-3}(y)$ es un polinomio en y de orden $n-3$. □

Definición 1.6 (Raíz de un polinomio). Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + ax + a_0$, un polinomio de coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a, a_0 \in \mathbb{C}$ cuyo grado $n \geq 1$. Decimos que $r \in \mathbb{C}$ **es una raíz** de $P(x)$ si $P(r) = 0$, es decir, $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + ar + a_0 = 0$.

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)). *Si $f(x)$ es un polinomio, $f(x) \in \mathbb{C}$ y el orden de $f(x)$ es n, entonces $f(x)$ tiene al menos una raíz compleja.*

La demostración de este teorema no es objetivo en este trabajo de grado. Dada su complejidad, esta sólo se puede hacer manejando teorías matemáticas avanzadas. Sin embargo, este resultado nos permite tener el siguiente:

Corolario 1.1. *Si $f(x)$ es un polinomio, $f(x) \in \mathbb{C}$ y el orden de $f(x)$ es n, entonces $f(x)$ tiene n raíces complejas (no necesariamente diferentes).*[6]

Teorema 1.5 (Teorema del Residuo). *Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes complejos y sea $r \in \mathbb{C}$ una raíz de $P(x)$. El residuo de dividir $P(x)$ entre el polinomio $x-r$ es $P(r)$, es decir, $P(x) = (x-r)Q(x) + P(r)$*

Demostración.
Por el algoritmo de la división, existen $Q(x)$ y $R(x)$, polinomios de coeficientes complejos, tales que

$$P(x) = (x-r)Q(x) + R(x),$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x) < grado(x-r) = 1$. Por consiguiente, $R(x) = 0$ o $gradoR(x) = 0$, en cuyo caso, $R(x)$ es una constante, supongamos $R(x) = r$, luego,

$$P(x) = (x-r)Q(x) + r$$

Como $P(c) = (r-r)Q(r) + r$, $P(r) = r$, por lo tanto,

$$P(x) = (x-r)Q(x) + P(r)$$

$\square$

Teorema 1.6 (Factores lineales de un polinomio).
Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + ax^n + a_o$ un polinomio de coeficientes complejos con grado $n \geq 1$ y sean $r_1, r_2, ..., r_m \in \mathbb{C}$ raíces diferentes de $P(x)$, es decir, $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$, entonces

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_m) \mid P(x)$$

y recíprocamente, si $(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_m) \mid P(x)$, $r_1, r_2, ..., r_m$ son raíces de $P(x)$.

Demostración.
Suponemos que $r_1, r_2, ..., r_m$ son raíces diferentes de $P(x)$, por inducción sobre m debemos probar que

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_m) \mid P(x)$$

[6] Cuando existen raíces iguales, se dice que la raíz tiene multiplicidad y el número de la multiplicidad corresponde a las veces que aparece la raíz.

i. Si $m = 1$, por el Teorema del Residuo (Teorema 1.5.), existe el polinomio de coeficientes complejos $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x) + P(r_1)$. Cómo r_1 es una raíz de $P(x)$, $P(r_1) = 0$, luego, $P(x) = (x-r_1)Q_1(x)$, es decir, $\frac{P(x)}{Q_1(x)} = (x-r_1)$, luego, $(x - r_1) \mid P(x)$.

ii. Suponemos cierto para $m = k$, esto es, suponemos que si $r_1, r_2, ..., r_k$ son raíces diferentes de $P(x)$, entonces

$$(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k) \mid P(x),$$

es decir, existe el polinomio de coeficientes complejos $Q_k(x)$ tal que
$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)Q_k(x)$.

iii. Debemos probar que se cumple para $m = k + 1$. Si $r_1, r_2, ..., r_k, r_{k+1}$ son raíces diferentes de $P(x)$ por ii), $P(x) = (x-r_1)(x-r_2)...(x-r_k)Q_k(x)$ y por el teorema del residuo (Teorema 1.5.), existe un polinomio de coeficientes complejos $Q_{k+1}(x)$ tal que $Q_k(x) = (x-r_{k+1})Q_{k+1}(x)+Q_k(r_{k+1})$. Cómo r_{k+1} es raíz de $P(x)$, tenemos que

$$0 = P(r_{k+1}) = (r_{k+1} - r_1)...(r_{k+1} - r_k)Q_x(r_{k+1})$$

Y cómo $r_{k+1} \neq r_i$ para cada $i = 1, 2, ..., k$, entonces $r_{k+1} - r_i \neq 0$ para cada $i = 1, 2, ..., k$. Por lo tanto $Q_k(r_{k+1}) = 0$, luego, $Q_k(x) = (x - r_{k+1})Q_{k+1}(x)$, y sustituyendo esto en $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)Q_k(x)$, tenemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)(x - r_{k+1})Q_{k+1}(x)$$

o sea,

$$(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)(x - r_{k+1}) \mid P(x).$$

Recíprocamente, si $(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_m) \mid P(x)$ entonces existe un polinomio con coeficiente complejos $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_m)Q(x)$.
Para cada $i = 1, 2, ..., m$ tenemos que

$$P(r_i) = (r_i - r_1)(r_i - r_2)...(r_i - r_m)Q(r_i)$$

Por lo tanto, para cada $i = 1, 2, ..., m$, r_i es raíz de $P(x)$. $\square$

Definición 1.7. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes complejos, cuyo grado es mayor o igual que uno. Sea r raíz de $P(x)$ y sea $\alpha \in \mathbb{N}$. Se dice que r es **raíz de multiplicidad** α de $P(x)$ si

$$(x-r)^{\alpha} \mid P(x) \text{ y } (x-r)^{\alpha+1} \nmid P(x).$$

Ejemplo 1.1. Solucione la ecuación $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.
Solución: Por algebra básica, el polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$, es decir, $x = 2$ es raíz de multiplicidad 3 de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1.7. Solubilidad de ecuaciones por radicales

Se dice que una ecuación es soluble por radicales, cuando, después de realizar las operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, producto y cociente) con coeficientes complejos, y de hacer ciertas sustituciones, podemos calcular raíces cuadradas, cúbicas, cuárticas, etc. para encontrar las soluciones de ésta.

Evariste GALOIS(25 de octubre de 1811 - 31 de mayo de 1832), es el padre de la Teoría de Grupos, y demostró que las únicas ecuaciones polinomiales generales que tienen solución general por métodos radicales son las cuadráticas, cúbicas y cuárticas. Las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o de grado superior, en general, no tienen solución general por radicales.[7] En esta monografía encontraremos la solución general para ecuaciones polinomiales generales de grado uno, dos, tres y cuatro, así como su ejemplificación.

Se resalta que algunas ecuaciones de grado cinco o superior pueden ser solubles por radicales, siempre y cuando, al realizar sustituciones convenientes, estas se puedan expresar, reescribir o ser reescritas como ecuaciones cuárticas, cúbicas, cuadráticas o lineales. En las conclusiones, se dan ejemplos de algunos casos, y el capítulo 2 trata ampliamente las ecuaciones del caso $x^n - z = 0$.

[7] Para ampliar esta información, existe la monografía de grado titulada Extensión de Campos. Teoría de Galois y la insolubilidad de la quíntica, de Rocío Rey Gamboa (UIS-1993).

Capítulo 2

Resolución de algunas ecuaciones especiales

En esta sección veremos como se resuelven algunas ecuaciones específicas, para lo cual nos será de gran utilidad el Teorema de De Moivre, la "notación de Euler" y el Teorema 1.4.(TFA) y su corolario 1.1..

2.1. Resolución de la ecuación $x^n - z = 0$

Veremos enseguida que la ecuación

$$x^n - z = 0$$

donde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}(n \geq 1)$, es soluble en el campo de los números complejos y que tiene exactamente n soluciones o raíces distintas (Corolario 1.1. del TFA). Es aquí donde haremos fuerte uso del Teorema de De Moivre.

En lugar de $x^n - z = 0$, podemos escribir $x^n = z$. Tanto a z como al valor numérico complejo, si lo hay, de la incógnita x que resuelve la ecuación, lo escribiremos en forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y

$$x = R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Por lo tanto

$$[R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

o sea,

$$R^n(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

Aplicando el Teorema de De Moivre, obtenemos:

$$R^n[\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)] = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

En consecuencia, $R^n = r$ y $n\varphi = \theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, considerando la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno, y por lo tanto

$$R = \sqrt[n]{r} \quad y \quad \varphi = \tfrac{\theta+2k\pi}{n}.$$

Así, si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$x = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}), \tag{$\star$}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$, es un número complejo que es la solución de la ecuación $x^n = z$.

Ahora probaremos que el número de soluciones o raíces distintas, de la ecuación $x^n = z$, es exactamente n (Corolario 1.1. del TFA), y que se obtienen sustituyendo en la fórmula ($\star$) los valores de $k = 0, 1, \ldots, n-1$, es decir, para cada valor de $k = 0, 1, \ldots,$ $n-1$ que se sustituya en la fórmula ($\star$), se obtiene una solución distinta de las otras y son todas las soluciones.

En efecto: considerando los enteros k y n, por el algoritmo de la división, tenemos que

$$k = nq + l, \text{ con } 0 \leq l < n \text{ y } q \in \mathbb{Z}.$$

Así que l es uno de los números $0, 1, \ldots, n-1$, y entonces

$$\begin{aligned}\frac{\theta + 2k\pi}{n} &= \frac{\theta + 2(nq+l)\pi}{n}\\ &= \frac{\theta + 2nq\pi + 2l\pi}{n}\\ &= \frac{\theta + 2l\pi}{n} + 2q\pi,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) = \cos(\tfrac{\theta+2l\pi}{n} + 2q\pi)$$

y

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) = \operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2l\pi}{n} + 2q\pi).$$

Mediante un procedimiento algebraico sencillo y aplicando las identidades trigonométricas correspondientes (ejercicio que se lo dejamos al lector) obtenemos:

$$\cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) = \cos(\tfrac{\theta+2l\pi}{n})$$

y

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) = \operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2l\pi}{n}).$$

Lo anterior sostiene que $\forall k \in \mathbb{Z}$, existe $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que

$$\cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) = \cos(\tfrac{\theta+2l\pi}{n}) + i\operatorname{sen}(\tfrac{\theta+2l\pi}{n}),$$

o sea, que a lo sumo hay n soluciones distintas de la ecuación $x^n = z$ y se obtienen al sustituir $k = 0, 1, ..., n-1$ en la fórmula $(\star)$.

Ahora demostraremos que todas éstas soluciones son distintas entre sí.

Sean $k_1, k_2 \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tales que $k_1 \neq k_2$, y sean

$$x_{k_1} = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\theta+2k_1\pi}{n} + i\operatorname{sen}\tfrac{\theta+2k_1\pi}{n})$$

y

$$x_{k_2} = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\theta+2k_2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\tfrac{\theta+2k_2\pi}{n}).$$

Supongamos que $x_{k_1} = x_{k_2}$; entonces,

$$\tfrac{\theta+2k_1\pi}{n} = \tfrac{\theta+2k_2\pi}{n} + 2s\pi \text{ con } s \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto

$$2k_1\theta = 2k_2\pi + 2ns\pi,$$

y finalmente

$$k_1 - k_2 = ns.$$

De allí, se deduce que $k_1 - k_2$ es un múltiplo de n, lo que no es posible pues $0 \leq k_1 \leq n-1$ y $0 \leq k_1 \leq n-1$, y por lo tanto

$$-(n-1) \leq k_1 - k_2 \leq n-1.$$

Así, $x_{k_1} \neq x_{k_2}$, es decir, al sustituir cada $k = 0, 1, ..., n-1$ en la fórmula $(\star)$, se obtiene una solución distinta de la ecuación $x^n = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, y esas son todas las soluciones.

En conclusión, todas las soluciones o raíces de la ecuación $x^n = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ $(r > 0)$ vienen dadas por

$$x = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{\theta+2k\pi}{n})$$

sustituyendo $k = 0, 1, ..., n-1$.

Nota 2.1.1. Cuando hablamos de resolver la ecuación $x^n = z$ o de encontrar las raíces n-ésimas del complejo z, estamos hablando de lo mismo, es decir, las dos expresiones son equivalentes.

Ejemplo 2.1. Resolver la ecuación $x^3 = 27i$.
Solución: En este caso es claro que $r = |27i| = \sqrt{0^2 + 27^2} = 27$ y que $\theta = \tan^{-1}(\frac{27}{0}) = \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto

$$27i = 27(\cos\tfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}).$$

Así, la ecuación dada puede escribirse como

$$x^3 = 27(\cos\tfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2})$$

y todas sus soluciones vienen dadas por

$$x = \sqrt[3]{27}(\cos\tfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\tfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$$

donde $k = 0, 1, 2$. Entonces las raíces de la ecuación son:

i. Para $k = 0$,

$$x_0 = 3(\cos\tfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6}) = 3(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i) = \tfrac{3\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3}{2}i.$$

ii. Para $k = 1$,

$$x_1 = 3(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{5\pi}{6}) = 3(\tfrac{-\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i) = \tfrac{-3\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3}{2}i.$$

iii. Para $k = 2$,

$$x_2 = 3(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{3\pi}{2}) = 3(0 - i) = -3i.$$

Entonces, las tres raíces de la ecuación $x^3 = 27i$, son:

i. $x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

ii. $x_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

iii. $x_2 = -3i$.

2.1.1. Representación geométrica de las raíces de la ecuación $x^n - z = 0$

De acuerdo con lo anterior, todas las raíces de la ecuación $x^n - z = 0$ tienen el mismo módulo $R = \sqrt[n]{r}$, y por lo tanto, geométricamente todas están en la circunferencia de radio $R = \sqrt[n]{r}$ y centro en el origen del plano.

Observemos ahora que la medida del ángulo entre dos raíces consecutivas, para $k_1 = j$ y $k_2 = j + 1$, viene dada por la diferencia de los argumentos de éstas raíces, o sea, por

$$\tfrac{\theta+2(j+1)\pi}{n} - \tfrac{\theta+2j\pi}{n} = \tfrac{2\pi}{n}.$$

Dado que existen o son n raíces se tienen n ángulos, por lo tanto, la suma de sus medidas es 2π. Así que, geométricamente las raíces dividen la circunferencia de radio $R = \sqrt[n]{r}$ y centro en el origen, en n arcos iguales. La figura 4 ilustra el ejemplo 1.2.

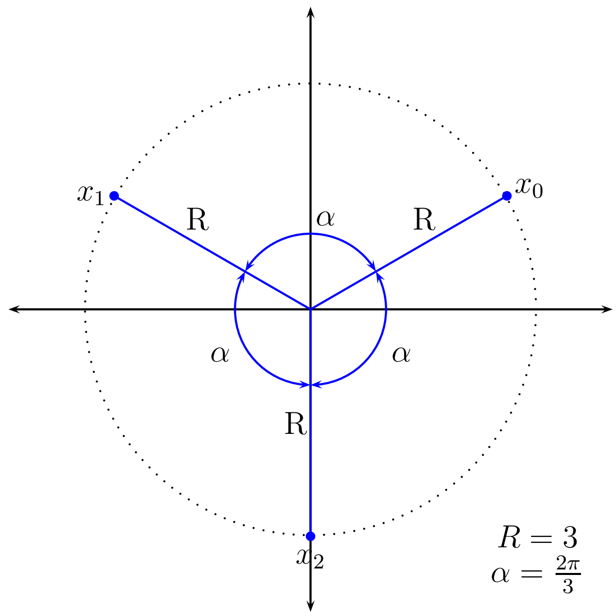

FIGURA 4. Representación gráfica de las raíces de la ecuación $x^3 = 27i$.

2.1.2. Las raíces n-ésimas de la unidad

Encontrar las raíces n-ésimas de la unidad significa encontrar las raíces o soluciones de la ecuación

$$x^n - 1 = 0.$$

El número 1 se puede expresar en su forma polar como

$$1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0,$$

así que la anterior ecuación la podemos escribir como

$$x^n = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0,$$

y por lo visto en la subsección anterior, tenemos que sus raíces o soluciones están dadas por

$$x = \cos \tfrac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \tfrac{2k\pi}{n},$$

donde $k = 0, 1, ..., n - 1$.

Debido a que

$$\cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{2k\pi}{n} = \cos k\tfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,k\tfrac{2\pi}{n},$$

por el teorema de De Moivre tenemos que

$$\cos k\tfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,k\tfrac{2\pi}{n} = [\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{2\pi}{n}]^k.$$

En consecuencia, las raíces n-ésimas de la unidad, es decir, las raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$, se obtienen al sustituir $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ en la expresión

$$x = [\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{2\pi}{n}]^k,$$

y son precisamente

$$1 = w^0, w, w^2, ..., w^{n-1},$$

donde

$$w = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{2\pi}{n}.$$

Geométricamente, las raíces de la unidad se encuentran ubicadas sobre una circunferencia, cuyo radio es la unidad, con centro en el origen, y como vimos anteriormente, la dividen en n arcos iguales.
Este tipo de ecuaciones puede emplearse para resolver la ecuación

$$x^m + x^{m-1} + ... + x + 1 = 0.$$

En efecto: inductivamente o por multiplicación directa (ejercicio que dejamos al lector) se comprueba que

$$x^{m+1} - 1 = (x-1)(x^m + x^{m-1} + ... + x + 1)$$

Como $1 = w^0, w, w^2, ..., w^m$, son las raíces, distintas entre sí, de la ecuación $x^{m+1} - 1 = 0$, entonces

$$0 = (w^k)^{m+1} - 1 = (w^k - 1)[(w^k)^m + ... + w^k + 1]$$

para todo $k = 0, 1, ..., m$.

Resumiendo,

$$w, w^2, ..., w^m.$$

son raíces de la ecuación

$$x^m + x^{m-1} + ... + x + 1 = 0,$$

y son todas, pues si hubiera otra diferente de ellas, entonces también lo sería de $x^{m+1} = 0$, lo que, como ya hemos demostrado, es imposible.

En conclusión, para resolver la ecuación $x^m + x^{m-1} + ... + x + 1 = 0$, basta resolver la ecuación $x^{m+1} - 1 = 0$, cuyas raíces son $1, w, w^2, ..., w^m$, donde $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, y de éstas, $w, w^2, ..., w^m$, son las raíces de $x^m + x^{m-1} + ... + x + 1 = 0$.

Ejemplo 2.2. Resolver la ecuación $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
Solución: Basta resolver la ecuación $x^6 - 1 = 0$, cuyas raíces se encuentran mediante la expresión

$$x = \cos\tfrac{2k\pi}{6} + i\operatorname{sen}\tfrac{2k\pi}{6} = \cos\tfrac{k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\tfrac{k\pi}{3},$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Éstas son:
Para $k = 0$, $x_0 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0 = 1$.
Para $k = 1$, $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Para $k = 2$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Para $k = 3$, $x_3 = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$.
Para $k = 4$, $x_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Para $k = 5$, $x_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Así que las raíces de la ecuación $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, son: $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Un resultado importante, que más adelante usaremos es el siguiente:

Teorema 2.1. *Si α es una raíz n-ésima del complejo z, y β_1, β_2, ... , β_n son raíces de $x^n = 1$, entonces $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, ..., $\alpha\beta_n$ son todas raíces de $x^n = z$.*

Demostración.

En efecto, si α es raíz de z^n, entonces $\alpha^n = z$ y si β_i, $i = 1, 2, ..., n$, es raíz n-ésima de la unidad, entonces $\beta_i^n = 1$.Realizando el respectivo producto:

$$\alpha^n = z$$
$$\beta_i^n = 1$$

tenemos que $\alpha^n \beta_i^n = z$, luego, $(\alpha\beta_i)^n = z$, para $i = 1, 2, ..., n$, por lo tanto $\alpha\beta_i$ es raíz n-ésima de z. $\square$

Cuando se habla de hallar las raíces de un polinomio con coeficiente reales, se hace indispensable conocer el discriminante de dicha ecuación, ya que este nos permite identificar que tipo de raíces tiene. A continuación, presentamos la definición de Discriminante de una ecuación polinómica de grado n:

Definición 2.1. Sea $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación de grado $n \geq 2$ y de coeficientes complejos y sean $x_1, x_2, ..., x_n$ sus raíces, no necesariamente diferentes, el discriminante de dicha ecuación se define como:

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

Capítulo 3

Solución general para ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas

Sea f un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. La ecuación $f(z) = 0$ se denomina *ecuación algebraica*. Resolver la ecuación $f(z) = 0$ requiere hallar todos los números complejos z tales que $f(z) = 0$. Estos números z se denominan las *raíces* o los *ceros* de la ecuación $f(z) = 0$. Consideremos la ecuación algebraica

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde $0 \neq a_0$, y $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$, y n es un entero positivo. A n se lo denomina el *orden* o *grado* de la ecuación.

En este capítulo, estudiaremos las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado 2, 3 y 4 (las ecuaciones de grado 1 tienen soluciones triviales en cualquier campo), por métodos que incluyen la adición, la sustracción, el producto, el cociente y el cálculo de raíces. Este proceso recibe el nombre de *solución por radicales*.

La razón por la cual trataremos sólo con ecuaciones de grado ≤ 4 es que, como lo demostraron Abel(1802-1829) y Galois(1811-1832), de grado quinto en adelante no existe en general soluciones por radicales[1].

[1]Ver *Galois: revolución y matemáticas*, de Fernando Corbalan, Nivola, España, 2010.

3.1. Ecuaciones cuadráticas

3.1.1. Reseña histórica

Hasta el siglo XVII, la teoría de ecuaciones estuvo limitada pues los matemáticos no fueron capaces de aceptar que los números negativos y complejos podían ser raíces de ecuaciones polinómicas. Sólo los antiguos matemáticos indios, como Brahmagupta[2], conocían las raíces negativas, pero fuera de China e India no se trabajaba con coeficientes negativos en los polinomios. En vez de un sólo tipo de ecuación de segundo grado, había seis tipos distintos, según cuáles fueran los coeficientes negativos.
La solución de la ecuación cuadrática (o de grado 2), en el campo de los reales era ya conocida por los mesopotámicos y los árabes[3].

3.1.2. Solución de ecuaciones cuadráticas

Consideremos la ecuación

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \tag{3.1}$$

con $A, B, C \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ y x es la incógnita. Como $A \neq 0$, y puesto que la ecuación

$$\tfrac{1}{A}(Ax^2 + Bx + C) = 0.$$

tiene las mismas raíces que la ecuación (3.1), no perdemos generalidad si en lugar de ésta, escribimos

$$x^2 + bx + c = 0. \tag{3.2}$$

Realizando la sustitución $y = x - \frac{b}{2}$, denominada "transformación de Tschirnhaus", en (3.2), tenemos:

$$\left(y - \tfrac{b}{2}\right)^2 + b\left(y - \tfrac{b}{2}\right) + c = 0.$$

Realizando las operaciones indicadas, obtenemos:

$$y^2 - by + \tfrac{b^2}{4} + by - \tfrac{b^2}{2} + c = 0,$$

es decir,

[2]Consultar EVES Howard. Estudio de las geometrías, tomo I. UTEHA, México, 1969.

[3]Ver STRUIK Dirk. *A concise history of mathemathics.* Dover Publications, EE.UU, 1987 y IBN-MUSA AL-JWARIZMI Mohammed.*El libro del Álgebra.* Nivola, España, 2009.

$$y^2 - \tfrac{1}{4}b^2 + c = 0.$$

Despejando y:

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - c}.$$

Reemplazando y en x (Transformada de Tschirnhaus), tenemos:

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - c} - \tfrac{b}{2}.$$

Realizando las respectivas operaciones, obtenemos la solución de (3.2):

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Teniendo en cuenta que las raíces de índice par, tiene dos soluciones (positiva y negativa), las dos soluciones de (3.2), y por lo tanto, de (3.1), son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \tag{3.3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \tag{3.4}$$

Cabe recordar que las expresiones (3.3) y (3.4) funcionan cuando el coeficiente de x^2 es 1.

Para generalizar la conocida "fórmula cuadrática", tal como se maneja desde los cursos básicos de álgebra en la educación básica, también presentamos el siguiente método, que involucra el uso del coeficiente a de x^2, siendo a cualquier número complejo:
Considere la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.5}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, y con incógnita x.
Multiplicando por $4a$ tenemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

y adicionando b^2 para completar cuadrados,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2,$$

de donde,

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac,\ 2ax+b = \sqrt{b^2-4ac},$$

así que

$$x = \tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Así, las dos raíces (no necesariamente diferentes) de la ecuación general de segundo grado están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{3.6}$$

y

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{3.7}$$

Las expresiones (3.6) y (3.7) corresponden a la famosa "fórmula cuadrática", cuyo uso es ampliamente conocido en todas las ramas de la ciencia.

Nota 3.1.1. (3.6) corresponde a (3.3) y (3.7) corresponde a (3.4), cuando $a = 1$.

3.1.3. Discriminante de la ecuación de segundo grado

El discriminante de la ecuación cuadrática (3.5) es, por la definición 2.1.:

$$\begin{aligned}
D &= a^2(x_1-x_2)^2,\\
&= a^2\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,\\
&= a^2\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,\\
&= \frac{4a^2(b^2-4ac)}{4a^2},\\
&= b^2-4ac.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el discriminante de la ecuación (3.5) es:

$$D = b^2 - 4ac, \tag{3.8}$$

de donde se puede concluir que si la ecuación tiene coeficientes reales, entonces:

1. Tiene dos raíces reales diferentes, si y sólo si, $D > 0$.
2. Tiene una raíz real doble, si y sólo si, $D = 0$. Esto corresponde a tener un trinomio cuadrado perfecto.
3. Tiene dos raíces imaginarias diferentes, si y sólo si, $D < 0$.

Ejemplo 3.1. Halle las raíces del polinomio $2x^2 - 7x - 15$.
Solución: Como el polinomio es de coeficientes reales, analicemos su discriminante, para determinar que tipo de raíces tiene:
Sea a = 2, b = -7 y c = -15, por (3.8),

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4(2)(-15) \\ &= 49 + 120 \\ &= 169 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos raíces del polinomio son reales. Usamos las expresiones (3.6) y (3.7) para solucionarla y tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2(2)}, \\ &= \frac{7 + 13}{4}, \\ &= \frac{20}{4}, \\ &= 5. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-7) - \sqrt{169}}{2(2)}, \\ &= \frac{7 - 13}{4}, \\ &= \frac{-6}{4}, \\ &= \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

$x_1 = 5$ y $x_2 = \frac{-3}{2}$ son las raíces (reales) del polinomio $2x^2 - 7x - 15$, como fácilmente lo puede comprobar el lector.

Ejemplo 3.2. Solucionar la siguiente ecuación cuadrática:

$$z^2 + (2-5i)z + (-6-4i) = 0$$

Solución:
Usando las expresiones (3.6) y (3.7), tenemos:

$$z = \frac{-2+5i+\sqrt{(2-5i)^2-4(1)(-6-4i)}}{2}.$$

Realizando las operaciones pertinentes, obtenemos

$$z = \frac{-2+5i+\sqrt{3-4i}}{2}.$$

Procedemos a calcular la raíz cuadrada que queda indicada, aplicando la expresión obtenida a partir de Teorema de Moivre, tenemos:

$$v = \sqrt{3-4i},$$
$$v^2 = 3-4i.$$

Usando coordenadas polares, el complejo v^2, puede escribirse como:

$$v^2 = 5(cos0{,}9273 - isen0{,}9273)$$
$$v = \sqrt{5}(cos(\tfrac{0{,}9273+2k\pi}{2}) - isen(\tfrac{0{,}9273+2k\pi}{2})), \text{ para } k=0 \text{ y } k=1.$$

Así, se tiene para $k=0$,

$$v_0 = \sqrt{5}(cos(\tfrac{0{,}9273}{2}) - isen(\tfrac{0{,}9273}{2}))$$

Es decir, $v_0 = 2-i$.
Para $k=1$, se tiene:

$$v_1 = \sqrt{5}(cos(\tfrac{0{,}9273+2\pi}{2}) - isen(\tfrac{0{,}9273+2\pi}{2}))$$

Es decir, $v_1 = -2+i$.
Sustituyendo en $z = \frac{-2+5i+\sqrt{3-4i}}{2}$, obtenemos:

$$z_1 = \frac{-2+5i+2-i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i,$$

$$z_2 = \frac{-2+5i-2+i}{2} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i.$$

El lector podrá verificar que, en efecto, z_1 y z_2 son las raíces de la ecuación cuadrática planteada.

3.2. Ecuaciones cúbicas

3.2.1. Reseña histórica

La siguiente redacción se obtuvo a partir de las lecturas de los siguientes textos:

1. *Historia de la matemática* de Julio REY y José BABINI.[4]
2. *An introduction to the history of mathematics* de Howard EVES[5].
3. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano* de Francisco Martín CASALDERREY[6].

El estudio y la solución de las ecuaciones de tercer grado por medio de radicales ocurre a comienzos del siglo XVI con los algebristas italianos y en difíciles situaciones dadas las costumbres de la época ya que era habitual esconder los descubrimientos para sobresalir sobre los contrincantes en los torneos o desafíos públicos en que se planteaban problemas científicos.

Scipione Del Ferro (c. 1465-1526) en Bolonia, *la sabia*, fue el primer profesor en resolver una ecuación cúbica de la forma $x3 + px = q$ que en esa época se nombraba “cubo más cosa igual a un número”que pudo ser en 1505 o 1515, pero no se conoció su solución ya que él nunca la contó, ni se encontraron apuntes referentes a la misma. Sólo poco antes de morir compartió su descubrimiento con su yerno Annibale della Nave y uno de sus alumnos, Antonio María del Fiore.

Pero, ¿por qué no publicar los descubrimientos de una investigación inmediatamente se tienen? La verdad, en esa época, hablamos del siglo XVI, las cosas eran distintas, los profesores no les interesaba el reconocimiento sino ser los ganadores en esos tan conocidos desafíos o disputas que se hacían de manera pública, el prestigio personal y la buena reputación era lo importante y eso sólo se lograba siendo poseedor de conocimientos misteriosos y únicos, ya que bastaba poner problemas al oponente que no supiera resolver por no conocer su fórmula y con esto ya se olía el triunfo. Se dice

[4]REY Julio, BABINI José. *Historia de la matemática.*Espasa-Calpe, Argentina, 1951.

[5]EVES Howard. *An introduction to the history of mathematics.* Holt, Rinehart and Winston, EE.UU, 1961.

[6]CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano.* Nivola, España, 2000.

entonces que muchos descubrimientos podrían haberse perdido por este motivo ya que sus descubridores de manera celosa se los llevaron a la tumba.

En 1534 y trasladados a Venecia se encuentran dos personajes: NICCOLO FONTANA, conocido como Tartaglia, o el Tartamudo, un reconocido profesor, y Antonio María Del Fiore, que no se sabe a qué se dedicaba en ese entonces, sólo era el poseedor de esa tan importante fórmula heredada de Del Ferro. Surgió el desafío matemático entre estos dos personajes, donde cada uno debía resolver 30 problemas; el ingenio y la lluvia de ideas por cada uno de los participantes era desesperante; Antonio María debía resolver problemas aritméticos, geométricos y algebraicos, en cambio para el caso de Tartaglia sabía que todos eran extrañamente parecidos y todos se reducían a la ecuación cúbica, así que sólo pensaba en encontrar esa extraña solución ya que él pensaba que si Fiore los había puesto, estos debían tener algún secreto que llevaba a la solución y sólo luchaba por redescubrir y encontrar este método para vencer la disputa. Sólo tenía ocho días para entregar estos resultados y consignar las soluciones ante el notario, momentos desesperantes invaden a este brillante matemático pero los arduos cálculos sólo buscan llegar "a la cosa" y efectivamente entrega las soluciones de manera exitosa teniendo como sorpresa que su contendor no había resuelto ni un sólo problema así que había sido el ganador de una deliciosa comida acompañada de tantas personas como respuestas correctas obtuviera, en este caso, 30, pero para más admiración, Tartaglia eximió a Del Fiore del pago de la comida, quizás por generosidad o simplemente para humillar a su adversario, sólo le bastaba saber que era el ganador.

Luego de esta merecida victoria, Tartaglia gana prestigio y su nombre es reconocido en las importantes ciudades de Italia, mientras que Antonio Maria del Fiore se desvanece simplemente en los recuerdos. Para esta época y tratando de conquistar los importantes descubrimientos de Tartaglia aparece Gerolamo Cardano, un hombre poco agraciado y muy infortunado en su vida: uno de sus hijos fue ejecutado por matar a su esposa, él personalmente le cortó una oreja a otro de sus hijos por la misma razón, y él estuvo preso por injuria al realizar el horóscopo de Jesucristo; pero a pesar de todos estos desatinos no se ignoraban sus diferentes títulos: médico, filósofo, astrólogo, matemático y escritor.

Tras el importante desafío de Tartaglia, Cardano empieza a buscarlo, de manera insistente, pidiéndole la fórmula para solucionar las ecuaciones cúbicas, pero en repetidas ocasiones es ignorado y no obtiene alguna respuesta positiva. Utilizando una nueva estrategia, Cardano decide invitar a Tartaglia a una reunión con el gobernador del Milan, Alfonso de Evalos, a quien podría enseñarle sus grandes avances en la artillería, y apuntando a la buena suerte esta vez Tartaglia acepta la invitación ; y es allí donde de manera audaz finalmente Tartaglia cede a comunicar su fórmula mediante unos versos que había escrito poniendo como condición y bajo juramento mantenerla en secreto, siendo así, Cardano continua su escrito del Ars Magna teniendo por supuesto muchas dudas referentes a algunos resultados que junto con su fiel sirviente y ayudante Ludovico Ferrari encontraron al estudiar con profundidad la fórmula, Cardano escribiría en repetidas ocasiones a Tartaglia pidiéndole explicaciones pero al parecer nunca obtuvo respuesta, en medio de las indagaciones encontraron al yerno de Scipione del Ferro quien sería uno de los conocedores de su secreto preciado y fue entonces donde se conoció que Tartaglia no había sido el primero en deducir aquella fórmula así que Cardano decide divulgar todo en su libro pensando que no rompería algún juramento ya que Tartaglia no habría sido el primero en descubrirlo, desde ese entonces las fórmulas para solucionar la ecuación cúbica son llamadas fórmulas de Cardano pero en realidad no fueron de él, sino, por lo anteriormente relatado, se le deberían atribuir a Del Ferro y Tartaglia.

Los siguientes dos enunciados pertenecen a los 30 ejercicios planteados por Fiore a Tartaglia[7]:

1. Determina por dónde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en tierra sea la raíz cúbica de la parte superior cortada.

2. Encuentra un número que se convierte en seis cuando se le suma su raíz cúbica.

Los siguientes son los versos y la traducción de los tres primeros, con los cuales Tartaglia le reveló a Cardano, la fórmula para solucionar las ecuaciones cúbicas[8]:

Quando che'l cubo con le cose appreso
se agguaglia a qualche numero discreto
trovan dui altri differnti in esso.

[7]Tomados de CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano.* Nivola, España, 2000.

[8]CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano.* Nivola, España, 2000.

Da poi terrai questo per consueto
che il lor produtto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sottratti
varrà la tua cosa principale.

In el secondo de codesti atti
quando che'l cubo restasse lui sólo
tu osserverai quast'altri contratti,

Del numero farai due tal part'a volo
che l' una in l' altra si produca schietto
el terzo cubo delle cose in stolo

Dalla qual poi, per commun precetto
torrai li lati cubi insieme gionti
et cotal somma sarà il tuo concetto

El terzo poi de questi nostri contì
se solve col secondo se ben guardì
che per natura son quasi congionotti

Questi trovai, et non con passi tardi
nel mille cinquecente, quatro e trenta
con fondamenti ben saldi e gagliardi
nella città dal mare intorno centa.

Los tres primeros versos, traducidos son[9]:

Cuando está el cubo con la cosa preso
y se iguala a algún número discreto
busca otros dos que difieran en eso

[9] CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano.* Nivola, España, 2000.

Después tú harás esto que te espeto
que su producto siempre sea igual
al tercio cubo de la nosa neto.

Después el resultado general
de sus lados cúbicos bien restados
te dará a tí la cosa principal.

Como se puede ver, solucionar una ecuación por medio del anterior proceso, no es fácil. A continuación, presentamos la solución de las ecuaciones cúbicas mostrando el proceso en lenguaje algebraico:

3.2.2. Solución de ecuaciones cúbicas

Considere la ecuación cúbica, con coeficientes $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ y x es la incógnita.:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \tag{3.9}$$

donde $A \neq 0$, y con incógnita x. Como $A \neq 0$, y puesto que la ecuación

$$\tfrac{1}{A}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0,$$

tiene las mismas raíces que la ecuación (3.9), entonces no perdemos generalidad si en lugar de ésta, escribimos

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{3.10}$$

con b, c y d números complejos.
Utilizando el recurso matemático denominado "transformación de Tschirnhaus", sustituyendo $x = y - \frac{b}{3}$ en (3.10), se tiene que

$$(y - \tfrac{b}{3})^3 + b(y - \tfrac{b}{3})^2 + c(y - \tfrac{b}{3}) + d = 0,$$

Por tanto,

$$y^3 + (c - \tfrac{b^2}{3})y + (d - \tfrac{bc}{3} + \tfrac{2b^3}{27}) = 0,$$

En consecuencia, resolver la ecuación cúbica (3.10) se reduce a resolver la ecuación

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3.11}$$

donde

$$p = c - \tfrac{b^2}{3} \quad \text{y} \quad q = d - \tfrac{bc}{3} + \tfrac{2b^3}{27}.$$

Si y_1, y_2 y y_3 son las raíces de $y^3 + py + q = 0$, entonces:

$$x_1 = y_1 - \tfrac{b}{3},$$

$$x_2 = y_2 - \tfrac{b}{3},$$

$$x_3 = y_3 - \tfrac{b}{3},$$

son las raíces de (3.10).

Resolveremos ahora la ecuación

$$y^3 + py + q = 0.$$

Por su desarrollo histórico, se realiza un nuevo cambio de variable, $y = u + v$ en la anterior ecuación (es decir, transformar la ecuación de una incógnita en otra de dos incógnitas), teniéndose que

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Desarrollando la expresión anterior, y escribiendo sus términos en forma apropiada, se tiene que

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0. \tag{3.12}$$

Imponiendo que

$$3uv + p = 0,$$

sobre la anterior ecuación, se tiene

$$u^3 + v^3 + q = 0, \tag{3.13}$$

de donde obtenemos,

$$uv = \frac{-p}{3}, \tag{3.14}$$

luego

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}, \tag{3.15}$$

y

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{3.16}$$

Considerando que estamos hallando los valores de u y v, de forma conveniente formamos una ecuación cuadrática con variable z donde u^3 y v^3 son raíces, es decir:

$$(z - u^3)(z - v^3) = z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3,$$

entonces por (3.17) y (3.16), sustituimos y tenemos

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{3.17}$$

A la ecuación (3.17) le podemos hallar las raíces usando la fórmula obtenida para las ecuaciones cuadráticas; al usarla obtenemos que las soluciones para (3.17), vienen dadas por:

$$z_1 = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}},$$

y

$$z_2 = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}.$$

Teniendo en cuenta que la misma ecuación tiene soluciones u^3, v^3, z_1 y z_2, y sabiendo que sólo puede tener dos raíces diferentes, podemos asumir que

$$u^3 = z_1 \quad y \quad v^3 = z_2. \tag{3.18}$$

Las ecuaciones (3.20) pueden resolverse por el método expuesto en el capítulo 2, sección 2.1. Cada una de dichas ecuaciones tiene tres raíces, supongamos u_1, u_2 y u_3, para $u^3 = z_1$, y v_1, v_2 y v_3, para $v^3 = z_2$.
Las raíces de la ecuación $x^3 = 1$ son $w^0 = 1$, $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y haciendo uso del teorema 2.1. tenemos que las raíces de $u^3 = z_1$ son:

$$u_1,\ u_2 = wu_1 \text{ y } u_3 = w^2u_1.$$

Y las raíces de $v^3 = z_2$ son:

$$v_1,\ v_2 = wv_1 \text{ y } v_3 = w^2v_1.$$

Como estamos determinando valores de u y v, de modo que la suma $u + v$ sea raíz de $y^3 + py + q = 0$ y que además $uv = \frac{-p}{3}$ y hemos determinado tres posibles valores para u: u_1, u_2 y u_3 y tres posibles valores para v: v_1, v_2 y v_3, debemos tener en cuenta que de los nueve posibles productos que se puedan formar entre los valores de u y de v, no todos satisfacen la condición inicial ($uv = \frac{-p}{3}$).
Vamos a analizar cada una de las nueve posibles combinaciones, para establecer cuáles de éstas son las que cumplen la condición inicial.

1. ¿$u_1.v_1 = \frac{-p}{3}$? Veamos:

$$
\begin{aligned}
u_1.v_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \cdot \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}, \\
&= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}, \\
&= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \\
&= \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}, \\
&= \frac{-p}{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $u_1.v_1$ cumple la condición inicial y $y_1 = u_1 + v_1$ es una raíz de (3.11).

2. ¿$u_1.v_2 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$
\begin{aligned}
u_1.v_2 = u_1.w.v_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \cdot \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right), \\
&= \frac{-p}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \neq \frac{-p}{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $u_1.v_2$ no cumple la condición inicial y $y_2 = u_1 + v_2$ no es una raíz de (3.11).

3. ¿$u_1.v_3 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} u_1.v_3 = u_1.w^2.v_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\cdot\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right), \\ &= \frac{-p}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \neq \frac{-p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_1.v_3$ no cumple la condición inicial y $y_3 = u_1 + v_3$ no es una raíz de (3.11).

4. ¿$u_2.v_1 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} u_2.v_1 = wu_1.v_1 &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\cdot\left(\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}, \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\frac{-p}{3} \neq \frac{-p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_2.v_1$ no cumple la condición inicial y $y_4 = u_2 + v_1$ no es una raíz de (3.11).

5. ¿$u_2.v_2 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} u_2.v_2 &= wu_1.v_2 = wu_1.wv_1 = (w)^2.u_1.v_1, \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\frac{-p}{3}, \\ &= \left(\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}\right)\frac{-p}{3} = \left(\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}\right)\frac{-p}{3} \neq \frac{-p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_2.v_2$ no cumple la condición inicial y $y_5 = u_2 + v_2$ no es una raíz de (3.11).

6. ¿$u_2.v_3 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned}
u_2.v_3 &= wu_1.v_3 = wu_1.w^2v_1 = u\overline{u}.u_1.v_1 \\
&= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right).\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
&= \left(\frac{1+3}{4}\right)\frac{-p}{3} \\
&= \frac{-p}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_2.v_3$ cumple la condición inicial y $y_6 = u_2+v_3$ es una raíz de (3.11).

7. ¿$u_3.v_1 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned}
u_3.v_1 &= w^2u_1.v_1, \\
&= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right).\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\
&= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\frac{-p}{3} \neq \frac{-p}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_3.v_1$ no cumple la condición inicial y $y_7 = u_3 + v_1$ no es una raíz de (3.11).

8. ¿$u_3.v_2 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned}
u_3.v_2 &= w^2u_1.wv_1 = u\overline{u}.u_1.v_1, \\
&= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right).\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\
&= \left(\frac{1+3}{4}\right)\frac{-p}{3}. \\
&= \frac{-p}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_3.v_2$ cumple la condición inicial y $y_8 = u_3+v_2$ es una raíz de (3.11).

9. ¿$u_3.v_3 = \frac{-p}{3}$?. Desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned} u_3.v_3 &= w^2u_1.w^2v_1 = (w^2)^2.u_1.v_1, \\ &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 .\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\quad \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \\ &= \left(\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}\right)\frac{-p}{3}, \\ &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\frac{-p}{3} \neq \frac{-p}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_3.v_3$ no cumple la condición inicial y $y_9 = u_3 + v_3$ no es una raíz de (3.11).

En conclusión, de los nueve posibles productos, sólo tres verifican la condición inicial, luego, de manera general, se concluye que las tres raíces que buscamos están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{3.19}$$

$$y_2 = u_2 + v_3 = wu_1 + w^2u_1, \tag{3.20}$$

y

$$y_3 = u_3 + v_2 = w^2u_1 + wu_1. \tag{3.21}$$

Las ecuaciones o fórmulas (3.19), (3.20) y (3.21) son conocidas como “fórmulas de Cardan”[10], “fórmulas de Cardano” o “fórmulas de Tartaglia-Cardano”, por su ámbito histórico.

Para hallar las raíces de la ecuación cúbica (3.10), resolvemos la “transformación de Tschirnhaus”que usamos inicialmente, y tenemos que las raíces de esta son:

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3} = u_1 + v_1 - \frac{b}{3} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3}, \tag{3.22}$$

$$x_2 = y_2 - \frac{b}{3} = wu_1 + w^2u_1 - \frac{b}{3}, \tag{3.23}$$

[10] COUDER Luciano. *Teoría de ecuaciones algebraicas.* Noriega Limusa, México, 1995.

y

$$x_3 = y_3 - \frac{b}{3} = w^2u_1 + wu_1 - \frac{b}{3}. \tag{3.24}$$

donde

$$p = c - \tfrac{b^2}{3} \quad \text{y} \quad q = d - \tfrac{bc}{3} + \tfrac{2b^3}{27},$$

x_1, x_2, y x_3 son, a su vez, las raíces de (3.9).

3.2.3. Discriminante de la ecuación de tercer grado

Retomando la definición 2.1. y las fórmulas de Cardano, el discriminante de la ecuación $y^3 + py + q = 0$ esta dado por:

$$\begin{aligned} D &= (1)^{2\cdot 3-2}(y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2, \\ &= (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2, \\ &= ((y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3))^2. \end{aligned}$$

Para calcular D, es necesario que recordemos que
$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, es raíz de la ecuación $x^3 = 1$, es decir, $w^3 = 1$. También es necesario que recordemos que $w^2 = (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, que es, efectivamente, la tercera raíz cúbica de la unidad.
Procedamos entonces a calcular cada una de las diferencias implicadas en el cálculo del discriminante:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (u_1 + v_1) - (wu_1 + w^2v_1), \\ &= u_1 + v_1 - wu_1 - w^2v_1, \\ &= (1 - w)u_1 - w^2v_1 + w^3v_1, \\ &= (1 - w)u_1 - w^2v_1(1 - w), \\ &= (1 - w)(u_1 - w^2v_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 - y_3 &= (u_1 + v_1) - (w^2 u_1 + w v_1),\\
&= u_1 + v_1 - w^2 u_1 - w v_1,\\
&= (1 - w^2) u_1 - w v_1 + w^3 v_1,\\
&= (1 - w^2) u_1 - w v_1 (1 - w^2),\\
&= (1 - w^2)(u_1 - w v_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 - y_3 &= (w u_1 + w^2 v_1) - (w^2 u_1 + w v_1),\\
&= w u_1 + w^2 v_1 - w^2 u_1 - w v_1,\\
&= (1 - w) w u_1 - (1 - w) w v_1,\\
&= (1 - w) w (u_1 - v_1),\\
&= (w - w^2)(u_1 - v_1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
D &= [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2, && (3.25)\\
&= [(1 - w)(u_1 - w^2 v_1)(1 - w^2)(u_1 - w v_1)(w - w^2)(u_1 - v_1)]^2, && (3.26)\\
&= [(1 - w)(1 - w^2)(w - w^2)(u_1 - v_1)(u_1 - w v_1)(u_1 - w^2 v_1)]^2. && (3.27)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x^3 - 1 = (x - 1)(x - w)(x - w^2)$ y haciendo convenientemente $x = \frac{u_1}{v_1}$, tenemos:

$$\left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 - 1 = \left(\frac{u_1}{v_1} - 1\right)\left(\frac{u_1}{v_1} - w\right)\left(\frac{u_1}{v_1} - w^2\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{u_1^3 - v_1^3}{v_1^3} = \left(\frac{u_1 - v_1}{v_1}\right)\left(\frac{u_1 - w v_1}{v_1}\right)\left(\frac{u_1 - w^2 v_1}{v_1}\right).$$

Así,

$$u_1^3 - v_1^3 = (u_1 - v_1)(u_1 - w v_1)(u_1 - w^2 v_1).$$

Por (3.20), tenemos que:

$$(u_1 - v_1)(u_1 - w v_1)(u_1 - w^2 v_1) = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right).$$
$$(u_1 - v_1)(u_1 - w v_1)(u_1 - w^2 v_1) = 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

En la expresión para determinar el discriminante de la ecuación de tercer grado, aparecen dos expresiones que pueden ser resueltas:

$$\begin{aligned}(1-w)(1-w^2) &= \left(1-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(1-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\\ &= \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right),\\ &= \frac{9-3(-1)}{4},\\ &= \frac{12}{4},\\ &= 3.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}w-w^2 &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i}{2},\\ &= \sqrt{3}i.\end{aligned}$$

Sustituyendo los tres resultados anteriores en (3.19), tenemos:

$$\begin{aligned}D &= [(1-w)(1-w^2)(w-w^2)(u_1-v_1)(u_1-wv_1)(u_1-w^2v_1)]^2,\\ &= \left[3\sqrt{3}i\left(2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\right]^2,\\ &= \left[9\cdot 3(-1)\cdot 4\cdot (\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27})\right],\\ &= -108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right),\\ &= -27q^2-4p^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el discriminante de la ecuación $y^3+py+q=0$ es $D=-4p^3-27q^2$. Como esta ecuación es la auxiliar a la ecuación cúbica general, para hallar el discriminante de la general, recordemos que $p=c-\frac{b^2}{3}$ y $q=d-\frac{bc}{3}+\frac{2b^3}{27}$ y las raíces de x^3+bx^2+cx+d son: $x_1=y_1-\frac{b}{3}$, $x_2=y_2-\frac{b}{3}$ y $x_3=y_3-\frac{b}{3}$, por tanto, el discriminante de $x^3 + bx^2 + cx + d$, esta dado por:

$$\begin{aligned} D &= (1)^{2\cdot 3-2}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2, \\ &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Resolviendo las diferencias, tenemos que:

$$x_1 - x_2 = y_1 - \tfrac{b}{3} - (y_2 - \tfrac{b}{3}) = y_1 - y_2.$$

Análogamente, $x_1 - x_3 = y_1 - y_3$ y $x_2 - x_3 = y_2 - y_3$, por lo tanto, las dos ecuaciones tienen el mismo discriminante, al que llamaremos Δ:

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2.$$

Reemplazando p y q, tenemos:

$$\Delta = -4\left(c - \tfrac{b^2}{3}\right)^3 - 27\left(d - \tfrac{bc}{3} + \tfrac{2b^3}{27}\right)^2.$$

Desarrollando el respectivo cubo del binomio y el cuadrado del trinomio, encontramos que:

$$\Delta = 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2. \tag{3.28}$$

Analizando el caso en que los coeficientes de $x^3 + bx^2 + cx + d$ sean números reales, teniendo en cuenta que la ecuación es de grado impar, sabemos que esta, al menos tiene una raíz real, luego, existen tres posibilidades para sus raíces:

1. Tiene tres raíces reales diferentes, cuando $\Delta > 0$.

2. Tiene tres raíces reales y por lo menos una con multiplicidad dos, cuando $\Delta = 0$.

3. Tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, cuando $\Delta < 0$.

Ejemplo 3.3. Encuentre todas las soluciones de la ecuación: $2x^3 + 6x^2 + 12x + 10 = 0$.
Solución: Usando las fórmulas de Tartaglia-Cardano, y siguiendo el procedimiento establecido en los párrafos anteriores, podemos reescribir $2x^3 + 6x^2 + 12x + 10 = 0$, al dividirla por 2, como $x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$, de donde tenemos que

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 6 \text{ y } d = 5$$

Calculemos el discriminante, para encontrar la naturaleza de las raíces:

$$\begin{aligned}\Delta &= 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2,\\ &= 18\cdot 3\cdot 6\cdot 5 - 4\cdot 3^3\cdot 5 + 3^2\cdot 6^2 - 4\cdot 6^3 - 27\cdot 5^2,\\ &= -135.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones a hallar son: una real y dos complejas conjugadas. Realizando la transformación de Tschirnshaus con $x = y - \frac{b}{3} = y - 1$, y reemplazando este valor en $x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$, obtenemos:

$$(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 6(y-1) + 5 = 0.$$

Realizando las operaciones pertinentes, la ecuación se puede escribir como:

$$y^3 + 3y + 1 = 0, \text{ con } p = 3 \text{ y } q = 1.$$

Luego, las tres raíces de la ecuación $y^3 + 3y + 1 = 0$ están dadas por:

$$\begin{aligned}y_1 &= \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{27}}},\\ &= \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}},\\ &= \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= wu_1 + w^2v_1,\\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3 &= w^2u_1 + wv_1,\\ &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right).\end{aligned}$$

Para determinar las raíces x_1, x_2 y x_3, reemplazamos estos valores en la transformación de Tschirnhaus $x = y - 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - 1, \\ &= \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - 1, \\ &\approx -1{,}3221853549. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2 - 1, \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3 - 1, \\ &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Luego, x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $2x^3 + 6x^2 + 12x + 10 = 0$. La verificación se la dejamos al lector.

Ejemplo 3.4. Solucionar la ecuación $16x^3 + 12x^2 - 72x - 81 = 0$.
Solución: Multiplicando la anterior expresión por $\frac{1}{16}$, esta se reduce a

$$x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{9}{2}x - \tfrac{81}{16} = 0$$

que, como ya vimos, tiene las mismas soluciones de la ecuación original. Así, $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{-9}{2}$ y $d = \frac{-81}{16}$. Antes de solucionar la ecuación, calculemos su discriminante y establezcamos la naturaleza de sus raíces:

$$\begin{aligned} \Delta &= 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2, \\ &= 18\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{-9}{2}\cdot\frac{-81}{16} - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{-81}{16} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{-9}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{-9}{2}\right)^3 - 27\left(\frac{-81}{16}\right)^2, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces a hallar, son números reales, al menos una con multiplicidad dos.

Ahora, vamos a solucionar la ecuación: realizando la transformación de Tschirnshaus con $x = y - \frac{b}{3} = y - \frac{1}{4}$, y calculando $p = c - \frac{b^2}{3} = \frac{-75}{16}$ y $q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27} = \frac{-125}{32}$, obtenemos la ecuación:

$$y^3 - \tfrac{75}{16}y - \tfrac{125}{32} = 0.$$

Por lo tanto, las tres raíces de la ecuación $y^3 - \frac{75}{16}y - \frac{125}{32} = 0$, están dadas por:

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + v_1,\\
&= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\\
&= \sqrt[3]{-\frac{\frac{-125}{32}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{-125}{32}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{-75}{16}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{-125}{32}}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{-125}{32}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{-75}{16}\right)^3}{27}}},\\
&= \frac{5}{4} + \frac{5}{4},\\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

$$y_2 = wu_1 + w^2v_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{-5}{4},$$

$$y_3 = w^2u_1 + wv_1 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{-5}{4}.$$

Ahora determinamos x_1, x_2 y x_3 reemplazando en la transformación de Tschirnshaus $x = y - \frac{1}{4}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4} = 2{,}25\\
x_2 &= y_2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{-5}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{-3}{2} = -1{,}5\\
x_3 &= y_3 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{-5}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{-3}{2} = -1{,}5
\end{aligned}$$

Fácilmente el lector puede verificar que $x_1 = 2{,}25$, $x_2 = -1{,}5$ y $x_3 = -1{,}5$ son, efectivamente, raíces de $16x^3 + 12x^2 - 72x - 81$ y que éstas cumplen lo que el cálculo del discriminante arrojó al ser cero, es decir, tiene tres raíces reales, una de ellas con multiplicidad dos.

3.3. Ecuaciones cuárticas

3.3.1. Reseña histórica

La redacción presentada a continuación, se obtuvo de la lectura de los siguientes textos:

1. *Historia de la matemática* de Julio REY y José BABINI.[11]
2. *An introduction to the history of mathematics* de Howard EVES[12].
3. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano* de Francisco Martín CASALDERREY[13].
4. *Historia de la matemática* de Carl B. BOYER[14].

Enlazados con la anterior reseña histórica renombramos a Gerolamo Cardano como el personaje que dió a conocer en su famosa obra *Ars Magna* la solución de la ecuación cúbica incluyendo en ella también el desarrollo de la cuártica, pero éste descubrimiento se le atribuye a su servidor y secretario Ludovico Ferrrari, quien por años lo acompañó , Cardano decide enseñarle griego , latín y matemáticas ya que veía en él un joven dotado de inteligencia(tenía en ese entonces 14 años).
Según cuenta la historia, Ferrari inventó la solución de la ecuación cuártica por petición de Cardano. En ella se muestra todos los casos posibles y explica su respetiva solución que básicamente se inicia reescribiendo la ecuación , adicionando números y cuadrados a ambos lados para completar un cuadrado perfecto en la primera parte, luego añade en ambos lados una incógnita del tal manera que el primer término siga siendo cuadrado perfecto y con esta busca armar el segundo cuadrado perfecto; y para esto aparece una ecuación cúbica o más conocida como "resolvente cúbica"que se soluciona con el método de Cardano , encontrando un valor para esta nueva incógnita, se reemplaza en los términos de los cuadrados perfectos y es allí donde se encuentra las raíces de la ecuación cuártica.

[11]REY Julio, BABINI José. *Historia de la matemática.*Espasa-Calpe, Argentina, 1951.
[12]EVES Howard. *An introduction to the history of mathematics.* Holt, Rinehart and Winston, EE.UU, 1961.
[13]CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano.* Nivola, España, 2000.
[14]BOYER Carl B. *Historia de la matemática.* Alianza, España, 1992.

Con el paso del tiempo, la reputación de Ferrrari creció y así consiguió numerosos empleos, entre estos, la dirección de la fundación Piatti de Milán tras la renuncia de Cardano, también era participe de aquellos ya tan renombrados desafíos consiguiendo así una gran fortuna, pero desafortunadamente, el 5 de octubre de 1565 muere tras ser envenenado con arsénico, supuestamente por su propia hermana.

3.3.2. Solución de ecuaciones cuárticas

Entre los métodos para solucionar algebraicamente ecuaciones cuárticas, existen el Método de Ferrari, el Método de Euler, el Método de Descartes, el método de Lagrange y el método de Alcalá. A continuación, explicaremos en que consiste el método de Ferrari.

Método de Ferrari.

El método desarrollado por Ludovico Ferrari es el siguiente:
Si se considera la ecuación general de cuarto grado,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{3.29}$$

donde $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ y x es la incógnita, dividiendo por A, tenemos:

$$\frac{1}{A}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) = 0 \tag{3.30}$$

que tiene las mismas raíces de (3.29), por lo tanto, podemos expresar la ecuación general de cuarto grado así:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{3.31}$$

La ecuación (3.31) la podemos escribir en la forma

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

y adicionando $\frac{a^2}{4}x^2$ a ambos miembros de la anterior expresión, tenemos a la izquierda un cuadrado perfecto, así:

$$x^4 + ax^3 + \tfrac{a^2}{4}x^2 = \tfrac{a^2}{4}x^2 - bx^2 - cx - d$$

Realizando las respectivas operaciones, hallamos:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d \tag{3.32}$$

Si el miembro derecho de (3.32) fuese un cuadrado perfecto, resolver dicha igualdad, y por tanto, resolver (3.31) sería inmediato, pero generalmente, dicho miembro no es un cuadrado perfecto, y el proceso debe seguir. Para ello, adicionamos a ambos miembros de (3.32) la expresión $\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)y+\frac{y^2}{4}$, de modo que podamos formar un trinomio a la izquierda de (3.32) y más adelante, hallemos y de forma que este trinomio sea cuadrado perfecto:

$$\left(x^2+\tfrac{a}{2}x\right)^2+\left(x^2+\tfrac{a}{2}x\right)y+\tfrac{y^2}{4}=\left(\tfrac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d+\left(x^2+\tfrac{a}{2}x\right)y+\tfrac{y^2}{4}$$

Factorizando el término de la izquierda y realizando las respectivas operaciones en el término de la derecha, tenemos:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(-c+\frac{1}{2}ay\right)x+\left(-d+\frac{1}{4}y^2\right) \tag{3.33}$$

Determinaremos y de modo que el miembro de la derecha de (3.33) sea un trinomio cuadrado perfecto. Para que esto suceda, el discriminante de la expresión de la derecha de (3.33) debe ser cero, es decir:

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(-c+\tfrac{1}{2}ay\right)x+\left(-d+\tfrac{1}{4}y^2\right)=(ex+f)^2\Leftrightarrow\\ \left(-c+\tfrac{1}{2}ay\right)^2-4\left(\tfrac{a^2}{4}-b+y\right)\left(-d+\tfrac{1}{4}y^2\right)=0\end{gathered}$$

Desarrollando el discriminante, tenemos que:

$$\begin{aligned}&\left(-c+\frac{1}{2}ay\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(-d+\frac{1}{4}y^2\right)=0\\ &c^2-2\frac{1}{2}cay+\frac{a^2y^2}{4}-4\left(\frac{-a^2d}{4}+\frac{a^2y^2}{16}+bd-\frac{by^2}{4}-dy+\frac{y^3}{4}\right)=0\\ &c^2-cay+\frac{a^2y^2}{4}+a^2d-\frac{a^2y^2}{4}-4bd+by^2+4dy-y^3=0\\ &-y^3+by^2+(4d-ca)y+a^2d-4bd+c^2=0\end{aligned}$$

$$y^3-by^2+(ac-4d)y+(4bd-a^2d-c^2)=0 \tag{3.34}$$

(3.34) es llamada “la resolvente”de (3.31). Teniendo en cuenta que al solucionar (3.34), por Cardano, y tomando y_0 como cualquiera de las soluciones de (3.34), tenemos, aplicando trinomios cuadrados perfectos:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_0}{2}\right)^2 = (ex+f)^2.$$

Por lo tanto:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_0}{2} = ex + f, \tag{3.35}$$

y

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_0}{2} = -ex - f, \tag{3.36}$$

Ahora, encontraremos a qué corresponde e y f. Como

$$\left(\tfrac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \tfrac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \tfrac{1}{4}y^2\right) = (ex+f)^2,$$
$$\left(\tfrac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \tfrac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \tfrac{1}{4}y^2\right) = e^2x^2 + 2efx + f^2.$$

Igualando término a término, tenemos:

$$\begin{aligned} e^2 &= \tfrac{a^2}{4} - b + y, \\ 2ef &= -c + \tfrac{1}{2}ay, \\ f^2 &= -d + \tfrac{1}{4}y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}, \tag{3.37}$$

$$f = \frac{-c + \frac{1}{2}ay}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}}, \tag{3.38}$$

$$f = \sqrt{-d + \frac{1}{4}y^2}. \tag{3.39}$$

Resumiendo, solucionando las ecuaciones (3.35) y (3.36), teniendo en cuenta las expresiones (3.37), (3.38) y (3.39), se encontrarán las cuatro soluciones de (3.31), que son las mismas raíces de (3.29).

3.3.3. Discriminante de la ecuación de cuarto grado

La naturaleza de las raíces de la ecuación de cuarto grado, están dadas por el discriminante de las dos ecuaciones cuadráticas que hay que solucionar. Para ello, usamos la expresión (3.8).

Hallar directamente el discriminante de la ecuación general de cuarto grado usando la definición 2.1. carece de sentido, dado que la ecuación general de cuarto grado se soluciona a partir de una ecuación cúbica y de dos ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 3.5. Solucione la ecuación $4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = 0$.
Solución:
Multiplicando $4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = 0$ por $\frac{1}{4}$, tenemos:

$$x^4 - 2x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Así, $a = -2$, $b = \frac{-3}{4}$, $c = \frac{5}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$. Entonces, siguiendo el proceso planteado,

$$x^4 - 2x^3 = \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{2}.$$

Adicionamos a los términos de la anterior ecuación $\frac{a^2}{4}x^2 = \frac{(-2)^2}{4}x^2 = x^2$, obteniendo:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{2} + x^2.$$

Realizando las operaciones planteadas:

$$(x^2 - x)^2 = \tfrac{7}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{2}.$$

Adicionamos a los términos de la ecuación anterior la expresión $(x^2 - x)y + \frac{y^2}{4}$, y se obtiene:

$$(x^2 - x)^2 + (x^2 - x)y + \tfrac{y^2}{4} = \tfrac{7}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{2} + (x^2 - x)y + \tfrac{y^2}{4}.$$

Y esa expresión es la que debemos convertir en un cuadrado perfecto, es decir, una expresión cuyo discriminante sea cero (ver expresiones (3.34), (3.35), y (3.36)).

$$\left(x^2 - x + \tfrac{y}{2}\right) = (ex + f)^2.$$

Para ello, hay que solucionar "la resolvente", que corresponde a:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0,$$

es decir, reemplazando:

$$y^3 + \tfrac{3}{4}y^2 + \left(-2 \cdot \tfrac{5}{4} - 4 \cdot \tfrac{1}{2}\right) y + \left(4 \cdot \tfrac{-3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} - (-2)^2 \cdot \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{5}{4}\right)^2\right) = 0.$$

Realizando las respectivas operaciones, se tiene:

$$y^3 + \tfrac{3}{4}y^2 - \tfrac{9}{2}y - \tfrac{81}{16} = 0.$$

La ecuación anterior corresponde al ejemplo 3.4. Luego, una de las tres soluciones de esta es $y_0 = 2{,}25$. Así, la ecuación a resolver es:

$$\left(x^2 - x + \tfrac{2{,}25}{2}\right)^2 = (ex+f)^2,$$

donde, usando (3.37), $e = \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{3}{4} + 2{,}25} = 2$ y usando (3.39), $f = \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2{,}25^2} = \frac{-7}{8}$. Por tanto

$$\left(x^2 - x + \tfrac{2{,}25}{2}\right)^2 = (2x - \tfrac{7}{8})^2.$$

Así, las expresiones (3.35) y (3.36), quedan:

$$x^2 - x + \frac{9}{8} = 2x - \frac{7}{8},$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$(x-2)(x-1) = 0.$$

$$x^2 - x + \frac{9}{8} = -2x + \frac{7}{8},$$
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0,$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$x_1 = 2,$$
$$x_2 = 1,$$
$$x_3 = \tfrac{-1}{2},$$
$$x_4 = \tfrac{-1}{2}.$$

son las raíces de la ecuación planteada. Esta ecuación tiene cuatro raíces reales, una con multiplicidad 2. La verificación se la dejamos al lector.

Ejemplo 3.6. Encontrar las raíces del polinomio $4x^4 + 16x^3 + 33x^2 + 23x + 5$.
Solución: Dividiendo $4x^4 + 16x^3 + 33x^2 + 23x + 5 = 0$ por 4, tenemos:

$$x^4 + 4x^3 + \frac{33}{4}x^2 + \frac{23}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

donde $a = 4$, $b = \frac{33}{4}$, $c = 234$ y $d = \frac{5}{4}$. Escrito de otra forma, tenemos:

$$x^4 + 4x^3 = -\frac{33}{4}x^2 - \frac{23}{4}x - \frac{5}{4}$$

Adicionando a ambos términos de la igualdad $\frac{a^2}{4}x^2 = 4x^2$, tenemos:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -\frac{33}{4}x^2 - \frac{23}{4}x - \frac{5}{4} + 4x^2$$

Realizando las operaciones pertinentes, hallamos:

$$(x^2 + 2x)^2 = \frac{-17}{4}x^2 - \frac{23}{4}x - \frac{5}{4}$$

Para formar el cuadrado perfecto que estamos buscando, adicionamos $\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)y+\frac{y^2}{4}=(x^2+2x)y+\frac{y^2}{4}$ a ambos miembros de la anterior igualdad:

$$(x^2+2x)^2+(x^2+2x)y+\frac{y^2}{4}=\frac{-17}{4}x^2-\frac{23}{4}x-\frac{5}{4}+(x^2+2x)y+\frac{y^2}{4}$$

Factorizando el cuadrado perfecto:

$$\left(x^2+2x+\frac{y}{2}\right)^2=(ex+f)^2,$$

donde $e=1$ por (3.37) y $f=\frac{19}{8}$ por (3.39). Luego

$$\left(x^2+2x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(x+\frac{19}{8}\right)^2.$$

Al formar la ecuación resolvente (expresión (3.34)), y solucionarla, encontramos el valor y_0, con el cual solucionamos la anterior expresión:

$$y^3-\frac{33}{4}y^2+18y-\frac{189}{16}=0.$$

Utilizando el método de Cardano, la ecuación $y^3-\frac{33}{4}y^2+18y-\frac{189}{16}=0$ se reduce a solucionar $z^3-\frac{75}{16}z-\frac{125}{32}=0$, que fue resuelta en el ejemplo 3.4. Por tanto, tenemos que una de las raíces de $z^3-\frac{75}{16}z-\frac{125}{32}=0$ es $z_0=2{,}5$, es decir, $y_0=\frac{21}{4}=5{,}25$. Reemplazando y_0, tenemos:

$$\left(x^2+2x+\frac{5{,}25}{2}\right)^2=\left(x+\frac{19}{8}\right)^2$$

$$\left(x^2+2x+\frac{21}{8}\right)^2=\left(x+\frac{19}{8}\right)^2$$

Así, las dos ecuaciones cuadráticas a solucionar son:

$$x^2+2x+\frac{21}{8}=x+\frac{19}{8} \qquad\qquad x^2+2x+\frac{21}{8}=-x-\frac{19}{8}$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=0 \qquad\qquad x^2+3x+5=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad\qquad x^2+3x+5=0$$

De allí, $x_1=x_2=\frac{-1}{2}$ y la ecuación de la derecha se debe resolver usando las expresiones (3.6) y (3.7):

$$x_3=\frac{-3+\sqrt{9-20}}{2}=\frac{-3+\sqrt{11}i}{2}$$

y

$$x_4 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{11}i}{2}$$

Por tanto, el polinomio planteado tiene una raíz real con multiplicidad 2 y dos raíces complejas conjugadas. Se deja al lector la verificación de los resultados, así como el cálculo de los discriminantes de las dos ecuaciones cuadráticas, donde se define la naturaleza de las mismas.

Conclusiones

1. Después de conocer el método como se resolvieron las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, podemos observar que éstas se resolvieron por medio de sustituciones, de forma que se convierte una ecuación cuya solución no se conocía, en otra ya conocida: las ecuaciones cuadráticas se solucionaron por medio de una sustitución, las cúbicas, por medio de una sustitución y una ecuación auxiliar, la cuártica, por medio de una sustitución, una "resolvente cúbica" y dos cuadráticas. Los matemáticos trataron de solucionar las ecuaciones de grado quinto y superior usando estos mismos métodos, pero fallaron. La razón de esto, la encontraron y demostraron Abel y Galois, con su Teoría de Grupos o teoría de Galois [15].

2. Algunas ecuaciones de grado superior a cuatro tienen solución por métodos algebraicos, dado que mediante sustituciones, se pueden reescribir como ecuaciones cuadráticas, cúbicas o cuárticas, cuya solución es conocida. Algunos ejemplos son:

   - $$ax^8 + bx^4 + c = 0$$

     Tomando $y = x^4$, la anterior ecuación puede reescribirse como:

     $$ay^2 + by + c = 0$$

     que es una ecuación cuadrática, que podemos resolver fácilmente usando las "fórmulas cuadráticas".

[15] Para ampliación de esta información, ver *Galois: revolución y matemáticas*, de Fernando Corbalan, Nivola, España, 2010 y la monografía de grado *Extensión de Campos, Teoría de Galois y la Insobulidad de la quíntica*, de Rocio Rey Gamboa, UIS, 1993.

- $$ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0$$

  Tomando $y = x^2$, la anterior ecuación puede reescribirse como:

  $$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

  que es una ecuación cúbica, que podemos resolver usando las fórmulas de Tartaglia-Cardano.

- $$ax^8 + bx^6 + cx^4 + dx^2 + e = 0$$

  Tomando $y = x^2$, la anterior ecuación puede reescribirse como:

  $$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

  que es una ecuación cuártica, que podemos solucionar por medio del método de Ferrari.

3. A pesar de que la tecnología actual facilita y agiliza los cálculos, no sobra conocer el algoritmo y la historia que permite solucionar las ecuaciones de primero, segundo, tercer y cuarto grado, ya que en nuestra labor como docentes es importante entender la conceptualización que hay detrás de cada método de solución.

Bibliografía

[1] EVES Howard.*Estudio de las geometrías, Tomo I*. UTEHA, México, 1969, p. 7.

[2] STRUIK Dirk. *A concise history of mathemathics.*Dover Publications, EE.UU, 1987.

[3] CASALDERREY Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el renacimiento italiano*. Nivola, España, 2000.

[4] COUDER Luciano. *Teoría de ecuaciones algebraicas*. Noriega Limusa, México, 1995.

[5] BOYER Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza, España, 1992.

[6] REY Julio, BABINI José. *Historia de la matemática.*Espasa-Calpe, Argentina, 1951.

[7] NEWMAN James. *Enciclopedia Sigma, El mundo de las matemáticas*. Grijalbo, España , 1979.

[8] BELL E.T. *Historia de las matemáticas, séptima edición*. Fondo de cultura económica, México, 2003.

[9] EVES Howard. *An introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart and Winston, EE.UU, 1961.

[10] CORBALAN Fernando. *Galois: revolución y matemáticas*. Nivola, España, 2010.

[11] REY GAMBOA Rocío. *Extensión de Campos. Teoría de Galois y la insolubilidad de la quíntica (Monografía de grado)*. Universidad Industrial de Santander, Colombia, 1993.

[12] IBN-MUSA AL-JWARIZMI Mohammed.*El libro del Álgebra*. Nivola, España, 2009.