

**CALIBRACIÓN AUTOMÁTICA A PARTIR DE MODELOS NUMÉRICOS DE  
ELEMENTOS FINITOS**



**OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA**

**Monografía de Grado presentada como requisito para optar el título de Especialista en  
Estructuras**

**Directora: LAURA VARGAS**

**INGENIERA CIVIL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL**

**ESPECIALIZACION EN ESTRUCTURAS**

**BUCARAMANGA**

**2017**

### **Agradecimientos**

Quiero darle gracias a dios, a mis padres, familiares, directora de proyecto, amigos, compañeros, profesores y a todas las personas que de una u otra manera ayudaron a mi formación como especialista en estructuras.

## Contenido

Introducción .....	8
Objetivo General .....	11
Objetivo Especifico .....	11
1. Estado del Arte .....	12
1.1. Métodos de Correlación.....	14
1.1.1. Correlación directa de la frecuencia natural.....	14
1.1.2. Correlación directa del modo de vibración.....	15
1.1.3. Comparación de energía y fuerzas de balance.....	15
1.1.4. Función de Correlación de la Respuesta en Frecuencia.....	16
1.2. Criterios de Calibración.....	16
1.2.1. Factor de Escala Modal (Msf).....	16
1.2.2. Metodos de Ortogonalidad (Orthogonality Methods).....	18
1.2.3. Criterio de Garantía Modal (The Modal Assurance Criterion (MAC)).....	19
1.2.4. Variaciones del Mac y métodos semejantes.....	22
2. Aplicación .....	31
Conclusiones .....	41
Apéndices.....	45

### Lista de Figuras.

<i>Figura 1</i> Modal Assurance Criterion. Formato de presentación del MAC,(Miroslav Pastor, 2012).	21
<i>Figura 2.</i> Nuevo puente Guillermo Gómez Ortiz, (Vargas, 2016).	32
<i>Figura 3</i> Modelo numérico MIDAS CIVIL 2016.	33
<i>Figura 4</i> Gráfica de la comparación de modos de vibración entre el Modelo de Artemis y Midas Civil.	36
<i>Figura 5</i> Gráfica del resultado del AutoMAC.	37
<i>Figura 6</i> Gráfica de la comparación de modos de vibración.	39
<i>Figura 7</i> Gráfica del resultado del AutoMAC experimental.	40

### Lista de Tablas.

Tabla 1. <i>Frecuencias fundamentales del modelo analítico MIDAS CIVIL</i>	33
Tabla 2. <i>Frecuencia fundamental experimental</i>	34
Tabla 3. <i>Mac del Modelo Artemis vs Midas Civil</i>	35
Tabla 4. <i>Resultados del Auto MAC entre las formas modales obtenidas de PP, Y EFDD</i>	38
Tabla 5. <i>Vector modal de 11 modos de vibración experimental, Matlab</i>	45
Tabla 6. <i>Vector modal de 12 modos de vibración analítico, Artemis</i>	46
Tabla 7. <i>Vector modal de 10 modos de vibración experimental, Midas Civil</i>	47

### Lista de Apéndices.

Apéndice A. Tablas de los resultados obtenidos en matlab	45
Apéndice B. Código Matlab para calcular el MAC	48

## Resumen

**TÍTULO:** CALIBRACIÓN AUTOMÁTICA A PARTIR DE MODELOS NUMÉRICOS DE ELEMENTOS FINITOS.

**AUTOR:** OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA

### **PALABRAS CLAVES:**

Criterios de garantía modal, modelos numéricos, Ortogonalidad, Elementos finitos, modelo analítico y experimental.

### **DESCRIPCIÓN:**

El alcance de esta monografía contempla la recopilación, análisis y documentación de las metodologías existentes para la calibración de modelos numéricos, clasificando las metodologías según las posibles aplicaciones y los parámetros que se deberían analizar con el fin de obtener mejores resultados. Una vez definidas las metodologías y toda la información relevante, se definirá la metodología a aplicar para la calibración del modelo numérico seleccionado. Se utilizará un modelo numérico existente realizado en un trabajo de maestría. La optimización de estructuras es un campo que ha sido ampliamente estudiado, por lo que existen cantidades de técnicas que hace posible la obtención de mejores resultados, logrando así dar competitividad al avance que existe entre la relación rendimiento costo entre otros factores; ya que los modelos difieren por incertidumbre, del comportamiento real de lo que se pretende modelar, es necesario desarrollar métodos que ayuden a mejorar el rango de confiabilidad, aumentando la certeza y la confiabilidad de los resultados que se pueden obtener de modelos numéricos, haciendo posible que se pueda invertir adecuadamente los recursos existentes, sin recurrir a sobre costos.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Directora: Laura Vargas, Ingeniera Civil.

### **Abstract**

**TÍTULO:** AUTOMATIC CALIBRATION BASED ON NUMERICAL MODELS OF  
FINITE ELEMENTS.

**AUTHOR:** OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA

**KEY WORDS:**

Modal assurance criterion, numeric models, orthogonality, finite element models, analytical  
and experimental models.

**DESCRIPTION:**

The scope of this monograph includes the collection, analysis and documentation of existing methodologies for the updating of numerical models, classifying the methodologies according to the possible applications and the parameters that should be analyzed in order to obtain better results. Once the methodologies and all relevant information have been defined, the methodology to be applied for the updating of the selected numerical model will be defined. An existing numerical model used in a master's project will be used. The optimization of structures is a field that has been widely studied, so that there are quantities of techniques that makes it possible to obtain better results, thus making it possible to compete with the idea that exists between the cost performance ratio among other factors; since the models differ by uncertainty, from the actual behavior of what is intended to be modeled, it is necessary to develop methods that help to improve the range of reliability, increasing the certainty and reliability of the results that can be obtained from numerical models, making possible that existing resources can be adequately invested, without recourse to cost overruns.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Directora: Laura Vargas, Ingeniera Civil.

## Introducción

Un modelo en su definición según la RAE es una “representación de una cosa”, que aplicado en ingeniería, un modelo es un esquema de una estructura civil. Bien lo describe H. Skipper “Un modelo es una mentira que ayuda a entender la realidad”. El éxito de este se basa en qué tanto se acerque a esa realidad que pretende representar. Desde el desarrollo computacional, se han venido construyendo modelos numéricos teóricos con el objetivo de ser comparados, ajustados o calibrados y validados experimentalmente.

Un gran número de parámetros pueden incidir en la calibración de un modelo numérico, el cual es un proceso iterativo: a partir de una entrada o parámetro de calibración donde se realiza el proceso de análisis que arroja una salida o parámetros de validación. El ajuste y control manual de estos valores resulta tedioso debido a la cantidad de información, por lo cual surge la necesidad de automatizar este proceso de calibración.

En este orden de ideas y para responder a esta necesidad de desarrollar métodos para comprobar la fiabilidad de los modelos analíticos y experimentales, en el año de 1980 Allemang y Brown desarrollaron el criterio de garantía modal o MAC (Modal Assurance Criterion), por el cual se da un estimado estadístico de la consistencia entre los modelos a partir de la comparación de las formas modales.

Las facilidades que nos ofrece la tecnología en estos tiempos hace que se puedan mejorar los métodos y técnicas ya desarrolladas para la calibración de modelos, es por esto que en la presente monografía se recopila un resumen del estado del arte

donde se desarrolla un histórico de los métodos de calibración, tratando de mostrar la utilidad de cada alternativa.

Con base en las propiedades dinámicas de las estructuras, se contempla la obtención de parámetros críticos con tal de analizar cualquier detalle que pueda afectar la consistencia de los resultados esperados.

A partir de un modelo existente de elementos finitos que fue calibrado manualmente, se implementará un método de calibración automática para comparar sus resultados.

### **Objetivo General**

Aplicar una metodología para la calibración automática de modelos de elementos finitos.

### **Objetivo Especifico**

- Identificar y clasificar las técnicas y/o metodologías existentes para la calibración automática de modelos de elementos finitos según criterios de clasificación.
- Seleccionar y aplicar una de las metodologías para calibración automática a un modelo existente de elementos finitos.
- Comparar los resultados de la calibración automática y la calibración manual.

## 1. Estado del Arte

Desde que se comenzó a desarrollar el campo de la calibración de modelos numéricos, diferentes criterios y métodos se han tomado como base para desarrollar el proceso de correlación entre un modelo analítico y un experimental.

Primero se desarrolló el cálculo de coherencia ordinaria (Rigner, 1990) asociado con el cálculo de la función de respuesta de frecuencia. La forma de relacionar los cuadrados en un análisis de regresión lineal produce un indicador más sensible a las grandes diferencias en la comparación de valores, y menos sensible a pequeñas variaciones, considerado así, como una ventaja en los valores eficientes que son a menudo sesgados en la medición de la función de respuesta de la frecuencia o estimación de error en los parámetros.

Posteriormente, alrededor de los 70s, se implementó el Orthogonality check (OC) pero no era buena aproximación, ya que se utilizaba un solo indicador, y no representaba bien la reducción del modelo y los resultados de los vectores propios del mismo, además en muchas ocasiones el modelo analítico no estaba disponible haciendo inútil el OC.

También se hacían variaciones incluyendo vectores modales analíticos en conjunto con los experimentales y la correcta dimensión de la matriz de masa y rigidez, llamado pseudo-Orthogonality check (POC), evaluando la ortogonalidad entre los vectores modales experimentales y analíticos. (Allemang, 2003)

Posterior al desarrollo del OC, se implementó el MAC (Modal Assurance Criteria) o criterio de garantía modal, este fue presentado por primera vez en el año de 1980 por Allemang y Brown en su artículo de “A correlation coefficient for modal vector analysis”, siendo este un método sensible a diferencias grandes y menos sensible a diferencias pequeñas. Surgió como necesidad a la falta de un indicador de calidad para los resultados obtenidos experimentalmente de una función de respuesta de la frecuencia. (Allemang & Brown, 1983).

## 1.1. Métodos de Correlación.

**1.1.1. Correlación directa de la frecuencia natural.** El método más simple puede ser el de la correlación directa de la frecuencia natural de dos modelos, donde se refleja el porcentaje de diferencia de error, como se puede apreciar en las siguientes ecuaciones: (Allemang, 2003)

$$\varepsilon w = \frac{wAi - wXi}{wAi} * 100$$

$$\varepsilon w = \left[ \frac{\sum_{i=1}^L (wAi - wXi)^2}{\sum_{i=1}^L w^2 * Ai} \right]^{0,5} * 100$$

Donde:

$wAi$  = Frecuencia natural analítica del modo  $i$

$wXi$  = Frecuencia natural experimental del modo  $i$

**1.1.2. Correlación directa del modo de vibración.** La correlación entre modos de vibración puede ser estimada a partir del factor de escala modal, MSF (Modal Scale Factor por sus siglas en inglés), el cual se calcula como sigue:

$$MSF(\phi A, \phi X) = \frac{\{\phi A\}^T * \{\phi X\}^*}{\{\phi A\}^T * \{\phi A\}^*}$$

Donde  $\{\phi A\}^T$  es la transpuesta del vector modal analítico y el  $\{\phi X\}^*$  y  $\{\phi A\}^*$  corresponden al vector modal conjugado experimental y analítico respectivamente.

En términos de múltiples referencias de parámetros modales, el factor de escala modal es una normalización de la estimación de la participación modal entre dos referencias para un modo de vibración específico donde se representa de una manera una escala entre los modelos analizados. (Allemang, 2003).

**1.1.3. Comparación de energía y fuerzas de balance.** Bugeat y Lallement en el 1976 propusieron el método de comparar la energía potencial ( $\epsilon p$ ) con la cinética ( $\epsilon k$ ) de un modelo experimental y un modelo analítico, para de esta manera lograr resolver las ecuaciones necesarias para obtener la frecuencia natural del sistema (Rad, 1997)

$$\epsilon p = \frac{1}{2} * \{\phi X\}_i^T * [MA] * \{\phi X\}_i - \frac{1}{2} * \{\phi A\}_i^T * [MA] * \{\phi A\}_i$$

$$\epsilon k = \frac{1}{2} * \{\phi X\}_i^T * [KA] * \{\phi X\}_i - \frac{1}{2} * \{\phi A\}_i^T * [KA] * \{\phi A\}_i$$

Donde:

$\phi X$  = Vector modal experimental.

$KA$  = Matriz de rigidez.

$MA$  = Matriz de Masa.

$\Phi A$  = Vector modal analítico.

$i$  = modo de vibración.

**1.1.4. Función de Correlación de la Respuesta en Frecuencia. Frequency Response Function Correlation.** Se basa en comparar de una forma lineal la función de respuesta en frecuencia de un modelo analítico y un modelo experimental, calculando el error existente entre estas funciones. (Allemang, 2003)

$$\varepsilon_{Hij} = \frac{\|(HA)_{ij} - (HX)_{ij}\|}{\|(HA)_{ij}\|}$$

$(HA)_{ij}$  = Función de la respuesta en frecuencia del modelo analítico.

$(HX)_{ij}$  = Función de la respuesta en frecuencia del modelo experimental.

## 1.2. Criterios de Calibración.

**1.2.1. Factor de Escala Modal (Msf).** La función del factor de escala modal (modal scale factor, MSF) provee una forma de estimar la normalización de todos los vectores modales teniendo en cuenta la magnitud y la fase entre dos referencias de un modo de vibración en específico.

Si los resultados analíticos y experimentales son consistentes o iguales, el modelo analítico junto al factor de escala podría completar los grados de libertad faltantes en el modelo experimental. (Allemang, 2003)

La ecuación para calcular el factor de escala modal es:

$$MSF_{cdr} = \frac{\sum_{q=1}^{N^{\circ}} \psi_{cqr} * \psi_{dqr}^*}{\sum_{q=1}^{N^{\circ}} \psi_{dqr} * \psi_{dqr}^*}$$

$$MSF_{cdr} = \frac{\{\psi_{cqr}\}^T * \{\psi_{dqr}^*\}}{\{\psi_{dqr}\}^T * \{\psi_{dqr}^*\}}$$

Donde:

$\{\psi_{cqr}\}^T$  = Transpuesta del coeficiente modal del modelo c con grados de libertad q y modo de vibración r.

$\{\psi_{dqr}\}^T$  = Transpuesta del coeficiente modal del modelo d con grados de libertad q y modo de vibración r.

$\{\psi_{dqr}^*\}$  = Coeficiente modal del modelo complejo c con grados de libertad q y modo de vibración r.

Si la respuesta es un escalar complejo la ecuación es igual a:

$$MSF_{cdr} = \frac{\{\psi_{dr}\}^H * \{\psi_{cr}^*\}}{\{\psi_{dr}\}^H * \{\psi_{dr}^*\}}$$

**1.2.2. Metodos de Ortogonalidad (Orthogonality Methods).** El método de la ortogonalidad busca obtener una matriz con resultados menores a 0.1 en las esquinas, y mayores a 0.9 en la diagonal, relacionando la masa con los modos de vibración. Aunque por el tamaño de compatibilidad de las matrices en ocasiones es necesario recurrir a una condensación que puede provocar discrepancia en los resultados siendo así necesario recurrir al Pseudo Orthogonality check. (Rigner, 1990). Se calcula a partir de:

$$[COM A, X] = [\Phi A]^T * [MA] * [\Phi X]$$

$[\Phi A]^T =$  *Transpuesta del vector modal analítico*

$MA =$  *Matriz masa del modelo analítico*

$\Phi X =$  *Vector modal experimental*

La forma mixta:

$$[MOC A, X] = [\Phi X]^T * [MA] * [\Phi X]$$

$[\Phi X]^T =$  *Transpuesta del vector modal experimental*

$MA =$  *Matriz masa del modelo analítico*

$\Phi X =$  *Vector modal experimental*

**1.2.3. Criterio de Garantía Modal (The Modal Assurance Criterion (MAC)).** La comparación de modos propuesta por Allemang y Brown en 1986 resulta algo compleja en caso de tener una gran cantidad de modos. Por medio de los criterios de garantía modal podemos saber si un modelo analítico es consistente con respecto al mismo modelo experimental.

La función del Modal Assurance Criterion (MAC), provee una medida de correlación entre los modelos de un vector modal, desde diferentes puntos de excitación o diferentes estimaciones de parámetros. (Rad, 1997)

Por medio del MAC se calcula el error de los cuadrados, basado en un modelo lineal, entre los vectores de las formas modales de dos modelos. El índice MAC se calcula de la siguiente manera:

$$MAC_{ij} = \frac{\left( \{\Phi A\}_i^T * \{\Phi X\}_j^* \right)^2}{\{\Phi A\}_i^T * \{\Phi A\}_i^* * \{\Phi X\}_j^T * \{\Phi X\}_j^*}$$

$\{\Phi A\}_i^T$  = Transpuesta del vector modal del modelo analítico en el modo de vibración i.

$\{\Phi X\}_j^*$  = Vector modal del modelo experimental en el modo de vibración j.

$\{\Phi X\}_j^T$  = Transpuesta del vector modal del modelo experimental en el modo de vibración i.

$\{\Phi A\}_i^*$  = Vector modal del modelo analítico en el modo de vibración i.

Los resultados cercanos a 1, indican que el modelo es consistente. Para calcular el porcentaje de error se utiliza la siguiente ecuación

$$\varepsilon\phi = \left[ 1 - \frac{1}{L} * \sqrt{\sum_{i=1}^L (MAC)^2_i} \right] * 100$$

L = Cantidad de modos de vibración.

**1.2.3.1. Posibilidades del Mac. Mac zero.** Si el Mac toma un valor = 0 puede deberse a las siguientes razones: (Miroslav Pastor, 2012)

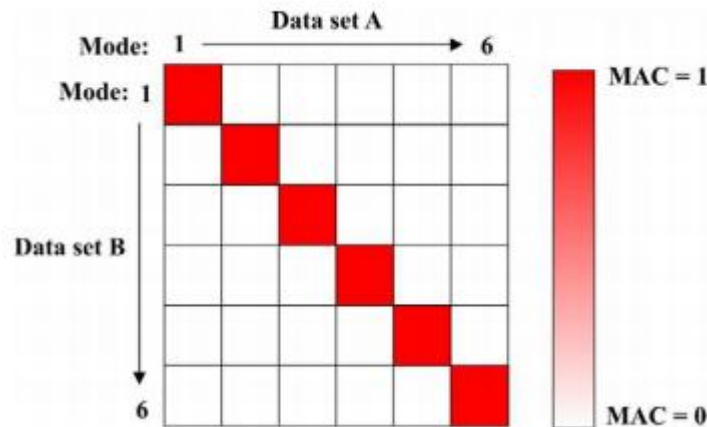
- No linealidad del sistema, toma de muestras en diferentes niveles o puntos.
- Ruido en el modelo de referencia.
- Parámetros inconsistentes.
- Los vectores modales no tienen una relación lineal.
- Despreciando todos los tipos de errores, se puede decir que los vectores son ortogonales.

**Mac unity.** Si el Mac toma un valor = 1 puede deberse a las siguientes razones: (Miroslav Pastor, 2012)

- Un valor de unidad indica que los vectores modales son consistentes, pero no significa que están correctos.
- Pocos puntos de medición.
- El resultado de los vectores modales es el resultado de otra fuerza diferente a la introducida, por mal calibración de los equipos.

- Error en el modelo de referencia.
- Los vectores modales representan el mismo modo, pero a una escala diferente.
- Si se puede decir que no existen estos errores, se puede asumir que el factor de escala representa la relación entre los modelos.
- Si el error parece ser aleatorio y el MAC tiene un valor alto, dichos resultados pueden ser promediados, pero sí parece ser que el error es producido por un sesgo, muy posiblemente la causa es por una estimación incorrecta de parámetros o la forma de excitación del elemento estructural.

El cálculo del índice MAC entre dos modelos A y B resulta en valores discretos que representan la comparación de modo a modo entre estos modelos, organizados en una matriz:



*Figura 1* Modal Assurance Criterion. Formato de presentación del MAC, Adaptado de (Miroslav Pastor, 2012)

#### 1.2.4. Variaciones del Mac y métodos semejantes.

**1.2.4.1.1. Actualización de modelos con criterios de garantía modal y sensibilidad (modal assurance criterion sensitivities and model updating).** La calibración de modelos en ocasiones puede requerir de mucho tiempo, es por esto que las técnicas para actualizar modelos han ganado interés en su estudio. Un grupo de metodologías usan la sensibilidad de parámetros del modelo tales como sus propiedades dinámicas. Los métodos discutidos por Heylen (1987) y Janter (1987) son basados en la sensibilidad de la frecuencia de resonancia y las condiciones de ortogonalidad. La más reciente idea es incluir también la sensibilidad de los valores del MAC entre la medición analítica y el procedimiento de calibración.

La frecuencia y sensibilidad de la ortogonalidad puede ser calculada utilizando una formulación aproximada (Vanhonacker, 1980; Janter et., 1987). Un procedimiento es propuesto en base a la transformación de coordenadas para el modelo coordinado siendo claro que en este caso la calibración del modelo se recomienda con sensibilidad de criterio de garantía modal con un cálculo que se basa en lo que sería la sensibilidad de los modelos y la aplicación del MAC. (Rad, 1997). Se calcula a partir de la siguiente ecuación: (Alvin, 1997)

$$\Phi_i = \left( -\frac{1}{2} * \Phi_i^T * M * \Phi_i - \Phi_i^T * M * (K - \lambda_i * M)^+ * f_i \right) * \Phi_i + (K - \lambda_i * M)^+ * f_i$$

Donde:

$$f_i = -(K' - \lambda_i * M' - \lambda_i' * M) * \Phi_i \Phi_i = \text{Vector de sensibilidad}$$

$$\Phi_i^T = \text{Transpuesta del vector de sensibilidad}$$

$$M = \text{Matriz de masa}$$

$$K = \text{Matriz de rigidez}$$

$K'$  y  $\lambda_i'$  = Derivada de la matriz de rigidez y la derivada de la frecuencia respectivamente

**1.2.4.2. Criterios de análisis ponderado de modelos (weighted modal analysis criterion (WMAC)).** El propósito de la matriz ponderada es mostrar que el MAC no es sensible a la distribución de masa y rigidez. Un número de autores han utilizado la matriz de ponderación modal con tal de reconocer la distribución de masa y rigidez. En este caso el WMAC se convierte en una ortogonalidad normalizada, donde los resultados en la diagonal de la matriz deben ser uno y zeros en las esquinas. (Golinval, 2003). Se calcula a partir de las siguientes expresiones: (Clerck, 2014)

$$riMACcd = rWc \times rMACcd \text{ where } rWc = \frac{(Re(\Psi_c)^H * Re(\Psi_c))}{(\Psi_c)^H * (\Psi_c)}$$

$$iwMACcd = iWc \times iMACcd \text{ where } iWc = \frac{(Im(\Psi_c)^H * Im(\Psi_c))}{(\Psi_c)^H * (\Psi_c)}$$

$$riwMACcd = rWc \times iWd \times riMACcd$$

Donde:

$rMAC$  = MAC parte real vs compleja.

$riMAC$  = MAC parte real vs imaginaria.

$riwMAC$  = MAC ponderado, parte real vs imaginaria.

$Re(\Psi c)^H$  = Transpuesta del vector modal  $\Psi c$ , perteneciente a la matriz Re.

$\Psi c$  = Vector modal.

$Re(\Psi c)$  = Vector modal  $\Psi c$ , perteneciente a la matriz Re.

$Im(\Psi c)^H$  = Transpuesta del vector modal  $\Psi c$ , perteneciente a la matriz Im.

$Im(\Psi c)$  = Vector modal  $\Psi c$ , perteneciente a la matriz Im.

**1.2.4.3. Criterio de análisis modal parcial (partial modal analysis Criterion (PMAC)).** Es un método espacialmente limitado donde solo se muestran las direcciones seleccionadas. El Partial Modal Assurance Criterion (PMAC) es desarrollado como una versión espacialmente limitada al criterio de garantía modal donde un subconjunto del vector modal es usado en el cálculo. (Rad, 1997)

**1.2.4.4. Criterios de garantía modal de raíz cuadrada (modal assurance criterion square root (MACSR)).** Es más consistente con ortogonalidad y pseudo ortogonalidad, esencialmente esta aproximación utiliza la raíz cuadrada del cálculo del MAC lo cual tiende generalmente a resultados que son muy pequeños. (Allemang, 2003).

**1.2.4.5. Criterios de garantía modal escalado (scaled modal assurance criterion (SMAC)).** Es una ponderación del índice MAC (WMAC) donde se balancea los resultados de los grados de libertad traslacionales y rotacionales incluidos en el vector modal. Esta metodología es requerida para minimizar el error del Modal Assurance Criterion, cuando diferentes tipos de información son incluidos en el mismo vector modal normalizado. (Allemang, 2003).

**1.2.4.6. Criterios de garantía modal usando vectores recíprocos (modal assurance criterion using reciprocal vectors (MACRV)).** Un vector modal es un vector que tiende a uno cuando se traspone y se pre multiplica por un vector modal específico. Este vector se describe como el producto del vector modal y de la matriz ponderada desconocida que producirá un resultado ortogonal perfecto y es extraído directamente de los datos experimentales.

Usando vectores modales recíprocos se puede hacer una comparación con el vector analítico siendo esto similar a un chequeo pseudo ortogonal. Cuando el mismo cálculo computacional (Vector modal recíproco vs analítico) es realizado con este vector modal recíproco, el resultado es cero. Los vectores modales recíprocos son computados directamente desde las funciones de respuesta en frecuencia medidas y desde los vectores modales experimentales. (Allemang, 2003)

**1.2.4.7. Criterios de garantía modal con frecuencias escaladas (modal assurance criterion with frequency scales (FMAC)).** El método consiste en adicionar escalas de la frecuencia al MAC. Este método ofrece simultáneamente una correlación de la forma modal, el grado de aliasing espacial y una comparación entre las frecuencias, en una única gráfica. Esta metodología es particularmente utilizada en la aplicación de modelos de correlación. (Allemang, 2003).

**1.2.4.8. Criterio de garantía modal coordinado (coordinate modal assurance criterion (COMAC)).** El COMAC (Criterio de Garantía Modal Coordinado) es una extensión del criterio de garantía modal. Este método fue propuesto por Lieven y Ewins en 1988 siguiendo el mismo concepto de correlación.

El COMAC pretende identificar cuales grados de libertad medidos contribuyen negativamente a valores bajos de MAC. El COMAC es calculado sobre un par de modos ya sea analíticamente vs analíticamente, experimental vs experimental o experimental vs analíticamente. Los dos vectores modales en cada par de modos representan el mismo vector modal, pero el conjunto de pares de modos representan todos los modos de interés en un rango de frecuencia. (Rad, 1997)

El criterio de garantía modal coordinado es calculado usando la siguiente aproximación, desde el par de modos que han sido identificados con MAC o con alguna otra metodología.

$$COMAC_i = \frac{\sum_{r=1}^L |(\phi A)_{ir} * (\phi X)_{ir}^*|^2}{\sum_{r=1}^L (\phi A)_{ir}^2 * \sum_{r=1}^L (\phi X)_{ir}^2}$$

$\phi A$  = Vector modal del modelo A

$\phi X$  = Vector modal del modelo X

$ir$  = Grado de libertad y modo de vibración.

**1.2.4.9. Criterio de garantía modal coordinado mejorado (the enhanced coordinate modal assurance criterion (ECOMAC)).** Este método se creó para ser más conscientes de los errores que se pueden generar por la calibración del modelo. El criterio de garantía modal coordinado mejorado fue desarrollado para extender el COMAC y ser más consciente de errores típicos experimentales que ocurren definiendo el vector modal tal como los errores de ubicación de sensores y errores de orientación de los mismos. (Golinval, 2003)

**1.2.4.10. Criterio mutuo de correspondencia (mutual correspondence criterion (MCC)).** Este criterio es utilizado en vectores que son generados por información acústica (velocidad, presión, intensidad, etc). El coeficiente de correlación modal es una modificación del MAC que intenta proveer un indicador más sensitivo. Esta aproximación es particularmente importante donde se usan vectores modales en situaciones de detección de daño, donde la magnitud de cambio de los vectores modales que están siendo medidos, es mínima. (Allemang, 2003)

**1.2.4.11. Criterio de garantía modal inverso (inverse modal assurance criterion (IMAC)).** Una estrategia muy útil para incrementar la sensibilidad a valores pequeños en el MAC, es utilizar el inverso del mismo. Esta aproximación usa esencialmente el mismo esquema computacional que el MAC, pero usando el inverso de los coeficientes modales. Naturalmente esta computación tiene el problema que un coeficiente modal puede ser numéricamente cero. (Allemang, 2003)

**1.2.4.12. Criterio de garantía de la respuesta en frecuencia (frequency response assurance criterion (FRAC)).** Este método compara los resultados de los modelos experimental y analítico. El ejemplo más simple es una validación que compara la suposición de que la función de respuesta de la frecuencia y la función naturalmente medida, puede ser comparada totalmente o en un rango parcial de frecuencia tan largo como la discretización misma. Esta aproximación ha sido utilizada en la identificación de parámetros modales desde hace varios años bajo varias designaciones (estimación de parámetros, sintonización del coeficiente de correlación, vector de respuesta con criterio de garantía modal (RVAC)). (Allemang, 2003). El FRAC se calcula a partir de:

$$FRAC = \frac{|(Hf) * (Hr)^T|^2}{(Hf)^2 * (Hr)^2}$$

$Hf$  = Vector analítico de la función de respuesta en frecuencia.

$Hr$  = Vector medido de la función de respuesta en frecuencia.

$(Hr)^T$  = Transpuesta del vector medido de la función de respuesta en frecuencia.

Es muy útil para las siguientes afirmaciones: (Nefske, 2000)

- Complementación del vector modal experimental y/o expansión.
- Ponderación de la actualización del algoritmo del modelo.
- Consistencia en el vector modal en los parámetros estimados en el algoritmo.
- Detección, repetición y pseudo repetición.
- Detección de daño.
- Control de calidad y evaluación.
- Sensores óptimamente localizados

**1.2.4.13. Correlacion compleja de coeficientes (complex correlation coefficient (CCF)).** El CCF es útil para identificar los errores comunes en el modelo experimental por medio de la detección del cambio de fase del vector. La magnitud del coeficiente es la misma como en el Frequency Response Assurance Criterion. En situaciones donde analítica y experimentalmente el FRFs es comparado, el CCF detectara el problema común de una constante de cambio que puede tener condiciones de señales experimentales. (Allemang, 2003).

**1.2.4.14. Criterios de garantía del dominio de la frecuencia (frequency domain assurance criterion (FDAC)).** Es una variación del FRAC evaluado con diferentes cambios de frecuencia. Este método combina vectores modales analíticos con funciones de respuesta en frecuencia (FRF) medidas en una extensión de FRAC y FDAC que pesa o filtra los datos FRF basados en los vectores modales analíticos esperados. (Allemang, 2003).

**1.2.4.15. Chequeo ortogonal coordinado (coordinate orthogonality check (CORTHOG)).** Se basa en la estimación del error normalizado entre el cálculo analítico de Pseudo-Ortogonalidad y los vectores modales del modelo analítico. Sin embargo, el chequeo de ortogonalidad no identifica como los grados de libertad de los vectores modales contribuyen a la ortogonalidad. El CORTHOG se calcula de la siguiente manera: (Avirabile & Pechinsky, 1993)

$$CORTHOG_{ij} = \frac{eki * mkl * ulj - uki * mkl * ulj}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m (eki * mkl * ulj - uki * mkl * ulj)}$$

$eki * mkl * ulj$  = Producto de los grados de libertad que hacen parte del cálculo de Ortogonalidad.

**1.2.4.16. Técnicas de correlación del vector modal (modal vector correlation techniques).** La comparación entre el vector modal experimental y analítico puede ser complementado por varias técnicas, uno de los más utilizados es el MAC, que estima el grado de independencia o correlación. Una de las dificultades del procedimiento del MAC es que los vectores experimentales puedan ser expandidos para el dimensionamiento espacial completo, con tal de ser comparado con el vector modal analítico. El proceso de expansión es computacionalmente costoso y la selección del método de expansión es extremadamente importante.

El factor de escala modal y los criterios de garantía modal también proveen un método de fácil comparación de vectores modales originados desde diferentes fuentes. El vector modal desde un análisis de elementos finitos puede ser comparado y contrarrestado con esos experimentalmente determinados con los vectores modales producidos con otro método experimental o estimación paramétrica. (Callahan, 1998)

## **2. Aplicación**

La metodología a utilizar para analizar la calidad de las formas modales analíticas y experimentales es la actualización automática con criterios de garantía modal, MAC. Se seleccionó el MAC como metodología de calibración automática del modelo de elementos finitos ya existente por su fácil aplicación y porque se ajusta al caso en estudio. Por medio del método señalado se puede analizar los resultados obtenidos en cuanto a los modos de vibración en una comparación del modelo analítico y experimental. Los resultados cercanos a 1 se expresan en una buena consistencia de los modelos, y los valores cercanos a 0

representan valores de baja relación siendo esto un indicador de baja confiabilidad en el modelo analizado.

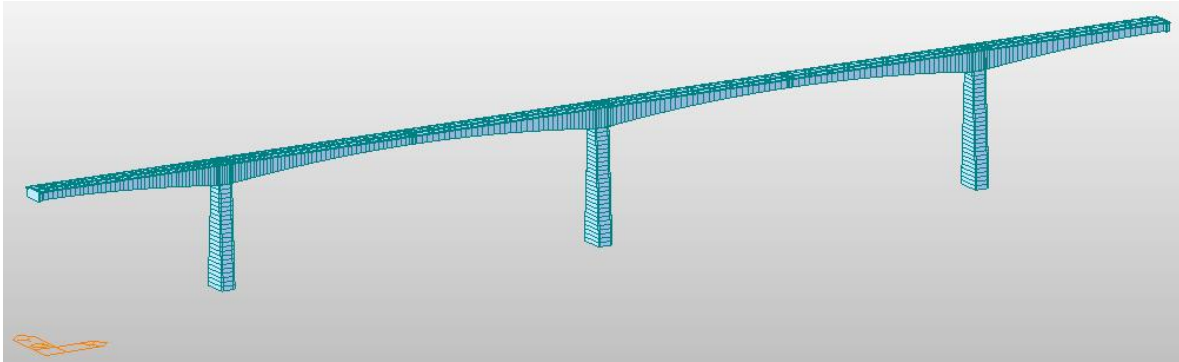
Los datos experimentales provienen de ensayos de vibración ambiental realizados en el puente Guillermo Gómez Ortiz localizado sobre el Rio Sogamoso en la vía que conduce de Girón a Zapatoca, Santander. El puente es tipo viga cajón con 4 luces de 85m, 170m, 170, y 85m respectivamente, para un total de 510 m y una altura aproximada de pilas de 42 a 47m. Las mediciones se llevaron a cabo en 52 configuraciones de sensores, analizando 104 puntos, 52 a cada costado del eje del puente. (Vargas, 2016)



*Figura 2.* Nuevo puente Guillermo Gómez Ortiz, adaptado de (Vargas, 2016).

Las formas modales analíticas se obtuvieron a partir de un modelo numérico de elementos finitos tridimensional, realizado en el software MIDAS CIVIL 2016, donde los elementos fueron modelados como tipo beam unidos por nodos de tres grados de

libertad (traslaciones y rotacionales), para un total de 484 elementos tipo beam, 203 nodos y 599 grados de libertad.



*Figura 3* Modelo numérico MIDAS CIVIL 2016.

En la tabla 1, se pueden apreciar las frecuencias relacionadas a los modos de vibración estudiados con mayor porcentaje de participación.

**Tabla 1**

*Frecuencias fundamentales del modelo analítico MIDAS CIVIL*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencia Hz</b>	<b>Participación</b>	<b>Dirección</b>
1	0,563114	8,93%	Transversal
2	0,598116	47,29%	Transversal
3	0,72003	76,49%	Longitudinal
4	0,80818	1,45%	Longitudinal
5	0,976353	7,48%	Transversal
6	0,99917	20,07%	Vertical
7	1,093054	0,78%	Transversal
8	1,331807	15,84%	Transversal

9	1,700519	0,00%	Transversal
10	1,797822	9,53%	Longitudinal

---

Resultados obtenidos del modelamiento realizado en el programa MIDAS CIVIL.

En la siguiente tabla, se presentan las frecuencias fundamentales resultantes del análisis modal experimental a partir de los ensayos de vibración ambiental.

**Tabla 2.**

*Frecuencia fundamental experimental*

Frecuencia experimental	
EFDD	
0,683	1,455
0,698	1,851
0,894	2,148
1,147	2,354
2,609	

Con los vectores modales normalizados asociados a las frecuencias obtenidas teóricas y experimentales se realizó la estimación del índice MAC, a partir de un código desarrollado en el software MATLAB (Ver Anexo B), los resultados son presentados a continuación.

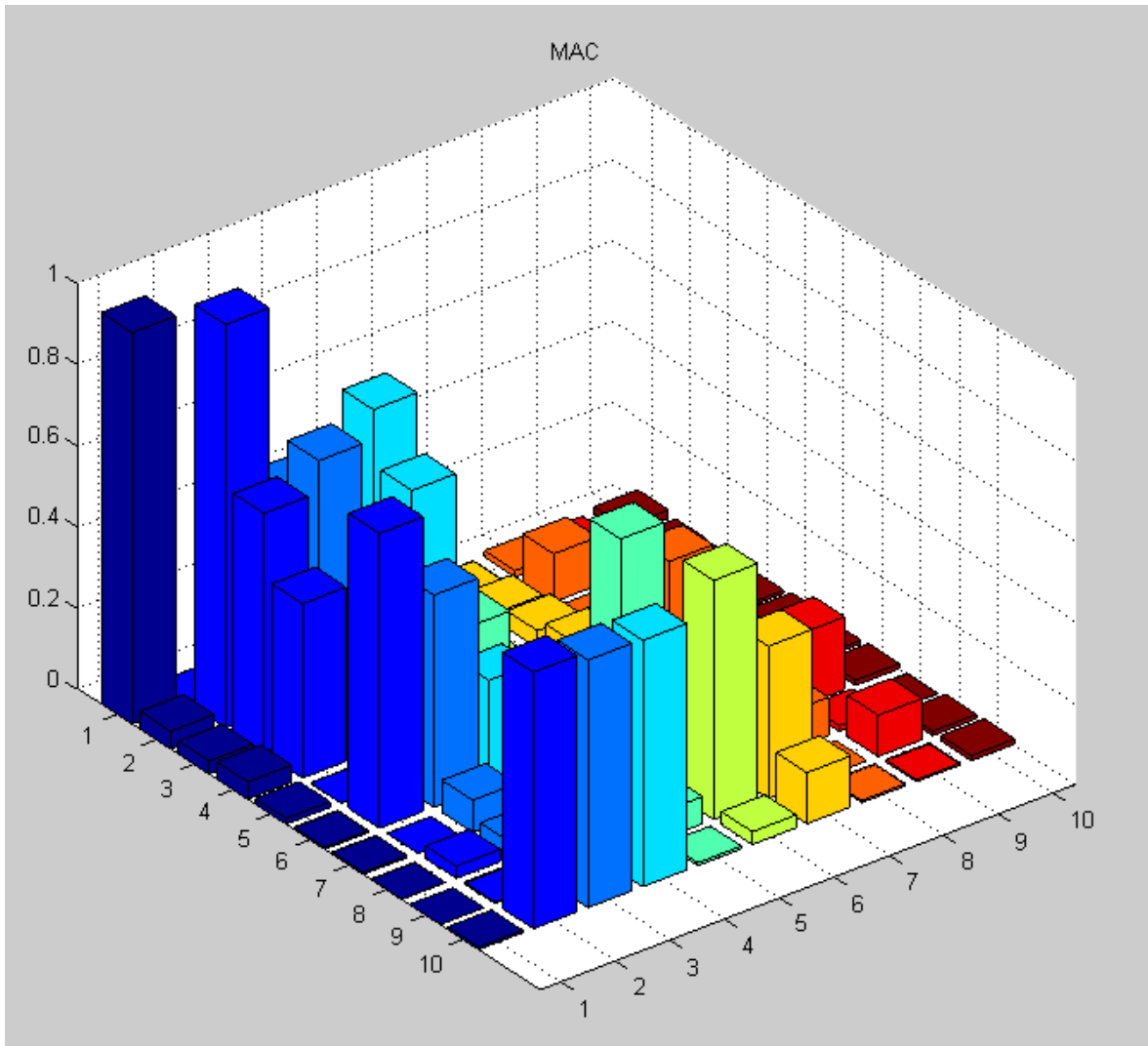
**Tabla 3.**

*Mac del Modelo Artemis vs Midas Civil*

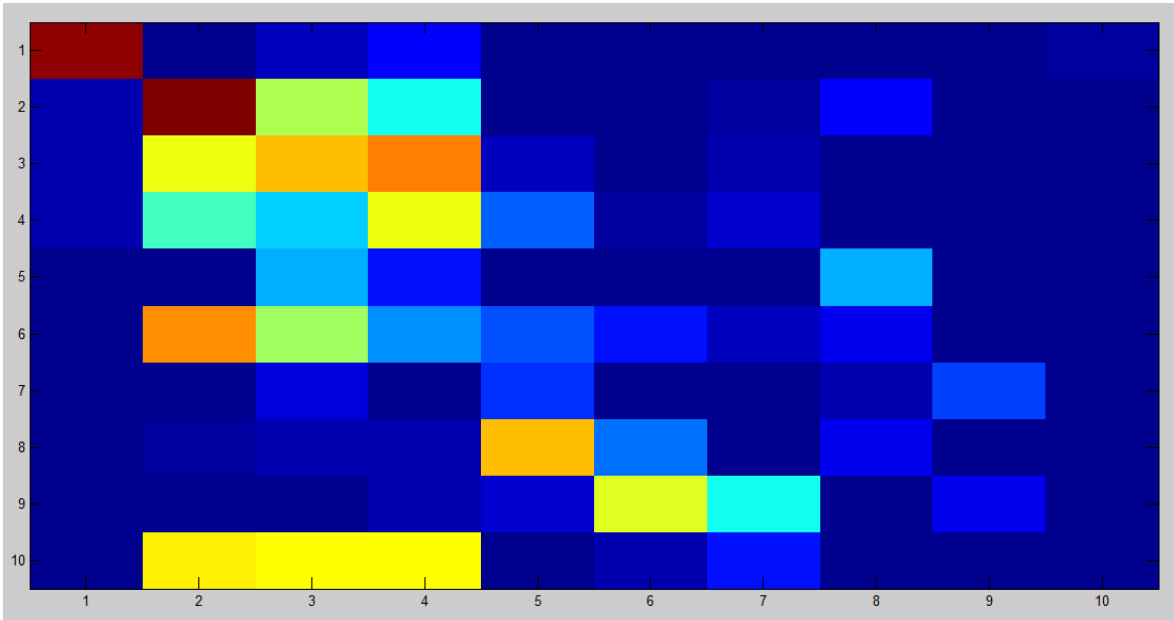
		FRECUENCIAS POR MEDIO DEL FFDD HZ									
		0,683	0,698	0,894	1,147	1,455	1,851	2,354	2,609	2,838	3,567
FRECUENCIAS DEL MODELO ANALITICO MIDAS CIVIL	0,566	0,9638	0,0005	0,0617	0,1153	0,0127	0,0102	0,0009	0,0153	0,0069	0,0206
	0,600	0,0434	0,9934	0,5307	0,3829	0,0075	0,0136	0,0278	0,1185	0,0047	0,0106
	0,723	0,0319	0,5901	0,6685	0,7424	0,0546	0,0005	0,0429	0,0063	0,0018	0,0094
	0,813	0,0426	0,4292	0,3114	0,6050	0,2152	0,0168	0,0719	0,0040	0,0010	0,0076
	0,979	0,0143	0,0009	0,2912	0,1254	0,0012	0,0003	0,0015	0,2848	0,0041	0,0140
	1,007	0,0050	0,7260	0,5225	0,2608	0,1867	0,1267	0,0601	0,0973	0,0020	0,0087
	1,097	0,0054	0,0003	0,0790	0,0055	0,1674	0,0035	0,0012	0,0422	0,1792	0,0127
	1,340	0,0009	0,0304	0,0359	0,0315	0,6806	0,2293	0,0024	0,0948	0,0146	0,0011
	1,714	0,0000	0,0036	0,0001	0,0366	0,0668	0,5889	0,3752	0,0001	0,1016	0,0108
	1,808	0,0067	0,6311	0,6096	0,6064	0,0069	0,0318	0,1257	0,0052	0,0046	0,0123

Estos resultados se han agrupado en cuatro categorías: los números de color rojo representan los valores MAC mayores a 0.90, es decir, aquellos modos cuyas coordenadas modales presentan entre sí una consistencia mayor en relación a los otros por motivo de ser más cercano al valor de 1; , el color naranja representa los valores MAC entre 0.70 y 0.90 es decir, es un poco menos consistente; y el color amarillo aquellos con valores entre 0.50 y 0.70, significando menos consistencia entre los modos de vibración. Por último, se presentan valores de índice MAC sin color definido, para los menores a 0.50, es decir, no tienen una consistencia que indique su correlación.

A continuación, se presentan estos resultados en un gráfico de barras:



**Figura 4** Grafica de la comparación de modos de vibración entre el Modelo de Artemis y Midas Civil.



**Figura 5** Gráfica del resultado del AutoMAC.

El color rojo de la gráfica corresponde a valores mayores a 0.90, el color naranja indica colores con valores mayores a 0.70, el color verde representa valores mayores a 0.50 y el azul claro al azul oscuro corresponde a números entre 0.50 a 0.

Las gráficas anteriores son el resultado del programa Matlab, el cual genera el Automac por medio de un código de MAC adaptado para analizar las coordenadas de las formas modales experimentales con las obtenidas del modelo analítico (Anexos B). Por medio del código mencionado se puede analizar la consistencia de los dos modelos y gracias a las diferentes formas que suministra el software matlab para graficar, se puede apreciar mejor los resultados y lograr comprender, que modos son más consistentes.

Como se puede apreciar, la relación entre los modos de vibración es muy baja, de acuerdo a la imagen 3 y los resultados de la tabla 6, solo tiene relación el 1, 2,3 modo

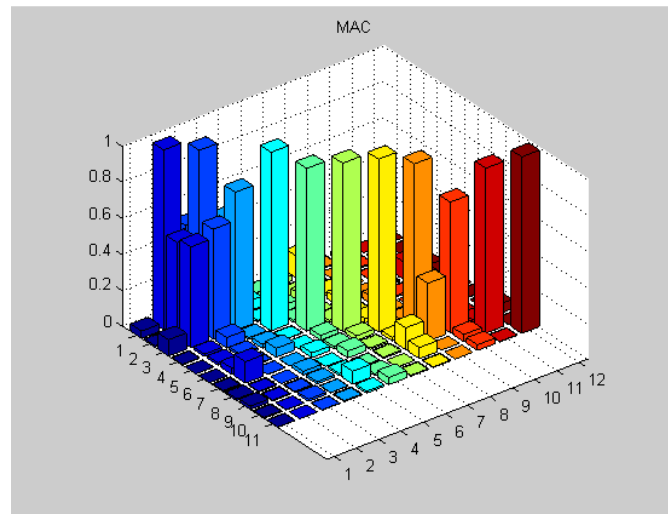
de vibración del modelo de Midas Civil con el 2 modo de vibración del Artemis y el 3-10, 4-9 y 5 – 8 respectivamente.

En proyectos anteriores se realizó el cálculo del índice MAC entre las formas modales experimentales obtenidas mediante dos técnicas de identificación modal: el método de selección de picos (PP) desarrollado en MATLAB y el método mejorado de descomposición en el dominio de la frecuencia (EFDD) desarrollado en ARTEMIS (Colocar referencia), en la tabla 7 se muestran los resultados obtenidos:

**Tabla 4.**

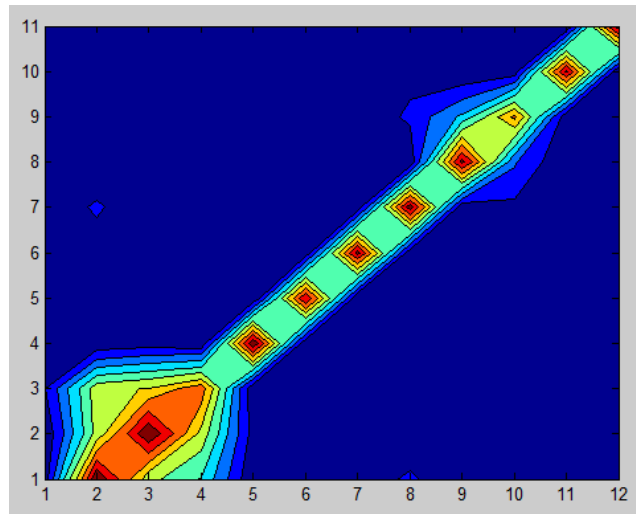
*Resultados del Auto MAC entre las formas modales obtenidas de PP, Y EFDD*

	EFDD [Hz]											
	0,039963	0,997835	0,530948	0,389930	0,014645	0,008909	0,029059	0,122655	0,003809	0,012360	0,000599	0,000748
	0,007919	0,532908	0,997841	0,568309	0,054450	0,020935	0,003317	0,003958	0,000510	0,007351	0,002861	0,000893
	0,090743	0,558581	0,609250	0,767060	0,009148	0,036824	0,052759	0,018899	0,001139	0,003162	0,008320	0,000271
	0,003792	0,013390	0,057381	0,009566	0,990941	0,012180	0,000211	0,037904	0,000004	0,007454	0,096846	0,019073
PP	0,000709	0,013462	0,014035	0,021454	0,002363	0,903676	0,012551	0,004672	0,040807	0,007425	0,002441	0,045788
	0,000759	0,034289	0,003556	0,049164	0,000205	0,025253	0,934719	0,024945	0,014026	0,000972	0,008460	0,000012
	0,006021	0,119002	0,001519	0,000700	0,025506	0,013817	0,025720	0,958788	0,021897	0,071549	0,047989	0,002410
	0,009269	0,004845	0,000000	0,020182	0,000074	0,037930	0,008353	0,019240	0,934613	0,215529	0,000867	0,000843
	0,019099	0,005172	0,006053	0,012148	0,010003	0,001284	0,007130	0,121816	0,321324	0,724091	0,024675	0,053018
	0,005719	0,000947	0,012086	0,001421	0,072493	0,010149	0,000459	0,061783	0,000000	0,039023	0,915192	0,001472
	0,001976	0,000148	0,002555	0,005828	0,010093	0,039631	0,004454	0,003587	0,000150	0,031253	0,002574	0,979801



*Figura 6* Gráfica de la comparación de modos de vibración.

Como se puede apreciar la consistencia, entre modelos experimentales es mucho mejor que la consistencia con el modelo analítico (MIDAS CIVIL), esto se ve reflejado en la forma del diagrama de barras, donde se aprecian barras altas en la diagonal, lo que significa consistencia entre las formales modales asociadas a las frecuencias de intersección, y barras más pequeñas en las esquinas, con baja correlación. Los resultados de consistencia y correlación entre las formas modales analíticas reflejan una gran dispersión.



*Figura 7* Gráfica del resultado del AutoMAC experimental.

Como se puede apreciar la diferencia entre los dos modelos (Imagen 6), es más consistente que la analizada con el programa Midas Civil por lo que se requiere calibrar el modelo de Midas Civil y aplicar nuevamente la metodología.

Programando en Excel la tonalidad en función al número en la casilla, se puede apreciar como el color rojo indica valores de MAC de 0,5 a 1, naranja valores entre 0,4 a 0,5, amarillo de 0,2 a 0,4 y color azul 0 a 0,2, lo cual se puede apreciar en la siguiente tabla.

## Conclusiones

Por medio de los criterios de garantía modal podemos obtener una estimación de la calidad correspondiente de los resultados tanto experimentales como analíticos, siendo esto una herramienta útil para calibrar los resultados de los modelos numéricos que en ocasiones presentan diferencias con el modelo experimental.

El índice Mac es un método muy útil para identificar si los modos de vibración analizados en el modelo experimental son consistentes, siendo esto necesario al momento de analizar el comportamiento dinámico de la estructura ya que así se verifican los resultados del vector modal asociado a las frecuencias fundamentales y se podrían obtener modelos más acertados en la representación del estado de las estructuras.

La calibración de modelos numéricos se facilita una vez se han identificado los modos de vibración consistentes, por lo cual la aplicación del MAC en sus diferentes variaciones ayuda a corroborar si la utilización de un modelo analítico es fiable o es necesario mejorar aspectos de su modelación en base a resultados experimentales.

En visto a los resultados obtenidos del MAC entre las formas modales teóricas y experimentales, es necesario mencionar que los datos obtenidos teóricamente presentan una consistencia baja en comparación a los datos obtenidos de los modelos experimentales, siendo así necesario verificar la inconsistencia observada.

La diferencia entre los modelos teóricos se debe a que los nodos no están localizados exactamente en la posición esperada en comparación al modelo experimental, ya que en el software se utilizaron 350 nodos los cuales varían su posición levemente en toda la longitud, haciendo que la selección de datos varíe en cada vector modal.

Como se puede apreciar a partir de los resultados de la comparación de modos de vibración del Modelo experimental y analítico estos, dependen de la manejabilidad de la metodología de cálculo y la interpretación que se puede tener la información obtenida con las diferentes opciones computacionales, como lo son las gráficas o el reconocimiento del valor de un número y su caracterización en colores (Excel). Se reducen los tiempos de análisis de la información y se mejora el rendimiento en cuanto a la precisión en la calidad de los datos seleccionados para calibrar un modelo numérico.

### Referencias Bibliográficas

- Allegand, & Brown. (1983). A correlation coefficient for modal vector analysis. *University of Cincinnati*.
- Allemang, R. J. (2003). The Modal Assurance Criterion-Twenty Years of use and abuse. *Sound and Vibration* , 14-21.
- Alvin, K. F. (1997). Efficient Computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics via conjugate gradients. *Structural Dynamics and Vibration Control Dept*, 652-659.
- Avirabile, P., & Pechinsky, F. (1993). Coordinate Orthogonality Check. *University of Massachusetts*, 753-760.
- Callahan, J. O. (1998). Correlation Considerations part 4. *Modal Analysis and control Laboratory*, 197-206.
- Clerck, J. d. (2014). Topics in Modal Analysis. *Springer*, 176-178.
- Golinval, J. -C. (2003). Model Updating Based on Frequency Response Functions Using a General Finite Element Code. *European Journal*, 149-162.
- Guillaume Martin, E. B. (s.f.). Improved Modal Assurance Criterion using a quantification of identification errors per mode/sensor.
- Kai Chun Chang, C. W. (2016). Modal Parameter identification and vibration-based damage detection of a damaged steel truss bridge. *Engineering Structures*, 156-173.

- Li Li, Y. H. (2014). Direct way of computing the variability of modal assurance criteria. *Mechanics Research Communications*, 53-58.
- Miroslav Pastor, M. B. (2012). Modal Assurance Criterion. *SciVerse ScienceDirect*, *Procedia Engineering* 48 ( 2012 ) 543 – 548.
- Nefske, H. S. (2000). Correlation of a Coarse-Mesh Finite Element Model using structural system identification and a frequency response Assurance Criterion. *General Motors Research and Development Center*, 597-602.
- Paquet, P. (s.f.). *Control Based Finite Element Model Updating of Structures* . Waterloo: University of Waterloo.
- Rad, S. Z. (1997). *Methods For Updating Numerical Models in Structural Dynamics*.
- Rigner, L. (1990). Modal Assurance Criteria Value for two Orthogonal Modal Vectors. *Volvo Car Corporation*, 1320-1325.
- Vargas, L. A. (2016). Propuesta de plan de monitoreo del comportamiento dinámico para la salud estructural del nuevo puente Gómez Ortiz en la vía girón Zapatoca.
- W. Heylen, T. J. (1990). Extension of the Modal Assurance Criterion. *Mechanical Engineering*, 468-472.

Apéndices

Apéndice A. Tablas de los resultados obtenidos en matlab

Tabla 5.

Vector modal de 11 modos de vibración experimental, Matlab (Vargas, 2016)

Nodos	X[m]	MATLAB										
		0,703	0,898	1,152	1,445	1,855	2,354	2,598	2,852	3,457	4,121	4,609
1	4,25	-0,0699	0,0451	0	-1,6079	5,9081	1,6119	1,32175	-0,5631	-1,242	-0,3089	-0,15945
3	14,25	-0,0474	0,1004	0,0438	-1,5219	4,30525	1,2239	0,1985	0,29715	-0,3339	-0,263	0,06945
5	24,25	-0,0195	0,2942	0,35	-1,54575	5,8573	0,8429	-1,51025	1,9314	0,5282	0,0871	0,4048
7	34,25	0,0044	0,2458	0,51845	-1,1982	3,8108	0,37245	-2,9995	4,17785	0,8375	0,53	0,70235
9	44,25	0,04815	0,3714	0,6655	-1,12495	2,63465	-0,08005	-4,67115	4,31475	1,6844	0,43985	0,7164
2	54,25	0,0874	0,3389	0,9207	-0,6759	0,1942	-0,4773	-4,32625	3,26165	1,0183	0,4507	0,50345
4	64,25	0,1455	0,4933	0,87835	-0,3322	-0,9898	-0,71835	-4,94645	4,7975	0,6484	-0,11195	0,1332
6	74,25	0,2087	0,6497	1,1344	-0,005	-2,65285	-0,79705	-3,67515	3,00905	0,2321	-0,5328	-0,382
8	84,25	0,28025	0,5729	0,86195	0,33395	-3,6057	-0,74835	-1,91905	1,4327	-0,2586	-0,5838	-0,6798
10	94,25	0,37475	0,73075	1,0243	0,57095	-4,63005	-0,63005	-0,96165	-0,3696	-1,0428	-1,51405	-1,0297
11	104,25	0,4847	0,8584	1,1472	0,92955	-4,83215	-0,3613	0,54495	-1,8711	-0,893	-1,21295	-1,166
13	114,25	0,60285	0,9811	1,1118	1,09525	-4,05225	-0,0511	1,3647	-2,82435	-0,7817	-1,4906	-0,81465
19	124,25	0,7227	1,02695	1,18175	1,07715	-2,884	0,2587	1,55135	-3,3746	-0,7408	-0,9706	-0,1887
17	134,25	0,83065	1,0963	1,14115	1,3103	-2,12085	0,60445	2,28695	-1,9285	-1,2062	0,0772	0,61565
15	144,25	0,923	1,0721	1,2707	1,22365	-1,65325	0,86145	1,9116	-1,0287	0,4253	0,74285	1,1338
Ref	154,25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	159,25	1,03545	0,8258	0,93815	0,7182	2,67885	0,9621	0,18345	2,1173	1,0769	0,50025	0,3019
23	164,25	1,04485	0,70795	0,8829	0,5402	3,10105	0,9107	-0,07035	2,05395	0,4346	0,18755	-0,14655
25	169,25	1,0466	0,60505	0,6528	0,37825	3,84575	0,8157	-0,4198	1,2811	0,9429	-0,0464	-0,5263
12	179,25	1,0272	0,481	0,74385	-0,1782	4,9585	0,4685	-0,4115	1,24475	1,1166	-0,6856	-1,03495
14	189,25	0,97525	0,29245	0,85785	-0,4424	4,6752	0,1433	0,29975	-0,4884	0,6072	-1,1985	-0,9052
16	199,25	0,9151	0,14525	0,5881	-0,86565	6,2524	-0,1842	1,2291	-2,5338	0,2664	-0,93735	-0,30775
18	209,25	0,8235	0,17375	0,8098	-1,0879	3,28735	-0,4883	2,1497	-2,69285	-0,0941	-0,10905	0,383
27	219,25	0,7523	0,0422	0,5271	-1,1108	1,8519	-0,7027	2,2539	-3,158	-0,7482	0,40725	0,9511
20	229,25	0,62785	0,10405	0,703	-1,23735	0,74425	-0,8007	3,6544	-3,2117	-0,9521	1,45255	1,0161
29	239,25	0,5503	0,2008	1,00545	-1,2301	-0,6165	-0,77155	3,03555	-1,2207	-0,6456	1,39665	0,6422
31	249,25	0,4758	0,3229	1,13265	-1,13625	-2,25365	-0,62165	3,55115	-0,3116	-0,7661	1,79395	0,09165
33	259,25	0,41965	0,2056	1,28945	-0,988	-3,9609	-0,35855	3,7748	1,02865	-0,1457	1,86145	-0,63305
35	269,25	0,4059	0,0929	1,3423	-0,77915	-4,0795	-0,0496	3,0519	1,6584	0,4378	1,71075	-0,94465
22	279,25	0,45325	0,03305	1,6044	-0,51025	-5,44185	0,292	3,73045	3,2754	0,4246	1,2571	-1,06545
24	289,25	0,3501	-0,05335	1,43575	-0,2293	-4,71075	0,5953	2,96545	2,8734	0,1869	0,3045	-0,72355
26	299,25	0,4009	-0,00535	1,72315	0,1125	-4,24685	0,8328	1,8158	1,40255	0,852	-0,4724	0,03155
28	309,25	0,4834	0,13825	1,75175	0,416	-2,6689	0,9351	0,6836	0,8552	0,9013	-1,21205	0,63145
37	319,25	0,44155	0,26645	1,48565	0,7186	-1,43575	0,87825	-0,288	-0,513	0,3323	-0,7989	0,811
30	329,25	0,3894	0,4975	1,48755	0,9254	0,6489	0,54565	-0,4867	-1,1711	-0,1756	-0,248	0,5096
32	334,25	0,36195	0,54775	1,2411	0,9485	1,57665	0,59575	-0,2562	-1,87335	-0,7163	0,2717	0,24895
39	339,25	0,42555	0,6856	1,2466	1,03615	2,1278	0,42835	-0,1664	-2,1806	-0,6801	0,7874	-0,0607
41	349,25	0,273	0,8083	0,9228	1,0252	4,1121	0,03445	0,2076	-0,73925	-1,1342	0,5732	-0,42365
43	359,25	0,32665	0,99125	0,95695	0,96365	4,7903	-0,2702	1,36305	0,0343	-0,6609	0,87635	-0,7678
45	369,25	0,3506	1,0285	0,9623	0,78475	4,8284	-0,59825	1,73385	0,9588	-0,865	0,52605	-0,59785
47	379,25	0,30935	1,03315	1,1614	0,4939	5,263	-0,7598	1,90505	1,2719	-0,4347	-0,2528	0,0804
40	389,25	0,25785	0,9369	0,94395	0,1977	3,8302	-0,8195	2,07655	2,63145	-0,2446	-1,0426	0,5864
38	399,25	0,1813	0,7617	1,1409	-0,0705	2,7516	-0,7548	1,1973	1,8285	0,2365	-1,185	0,7856
36	409,25	0,14545	0,7242	1,2072	-0,2682	1,619	-0,66225	0,24	-0,05395	0,9611	-1,2568	0,8762
34	419,25	0,10765	0,57325	1,3281	-0,7003	-0,37105	-0,36815	-1,1847	0,05485	0,6615	-0,78265	1,003
49	429,25	0,0946	0,51695	1,1034	-1,028	-1,5892	-0,0379	-2,95645	-2,14985	0,8088	-0,3525	0,4427
42	439,25	0,06945	0,44625	0,88935	-1,19925	-3,47255	0,2973	-3,8203	-2,97025	0,418	0,20865	0,0934
44	449,25	0,06405	0,44225	0,93725	-1,2945	-4,56305	0,61715	-3,4123	-2,72305	-0,0889	0,2125	-0,1684
46	459,25	0,04985	0,3096	1,17405	-1,365	-4,84325	0,83775	-2,72815	-2,8177	-0,5018	0,6206	-0,35125
48	469,25	0,01565	0,2215	1,1794	-1,3373	-5,6279	0,922	-1,0744	-1,09595	0,1531	0,4597	-0,3526
51	479,25	0,0246	0,1401	1,342	-1,09585	-3,89645	0,9096	-1,2627	-2,06725	-1,2972	0,50195	-0,22665
52	489,25	0,01455	0,06985	1,28745	-0,8052	-3,0187	0,75905	0,32465	-0,46905	-1,3224	0,15835	0,04685
50	499,25	0,0026	-0,00145	0,8094	-0,31415	-0,73485	0,2541	0,7075	0,382	0,1315	-0,0625	0,1017

Nota: \*Vectores modales del modelo experimental cuyos datos fueron

analizados con el software matlab, adaptado de (Vargas, 2016)

**Tabla 6.**

*Vector modal de 12 modos de vibración analítico, Artemis (Vargas, 2016)*

X[m]	ARTEMIS											
	0,683	0,698	0,894	1,147	1,455	1,851	2,354	2,609	2,838	3,567	4,098	4,609
4,25	0,0760	-0,0683	0,1006	0,6813	-1,3218	8,8056	1,7080	0,7949	-0,1081	-2,5820	0,7819	0,0106
14,25	0,0480	-0,0410	0,1677	0,2750	-1,6089	5,8333	0,8319	-0,3590	0,9324	-1,0984	-0,2394	0,1972
24,25	0,0080	-0,0164	0,3354	0,7438	-1,5396	5,5833	0,5133	-1,5000	2,1757	-0,0902	0,0160	0,4049
34,25	0,0000	0,0082	0,2652	0,3063	-1,3317	4,6389	0,3097	-3,1410	4,5946	1,1967	0,5957	0,6901
44,25	-0,0440	0,0519	0,3872	0,5625	-1,1436	3,5278	0,0221	-5,3590	4,5405	1,5328	0,4309	0,7218
54,25	-0,0840	0,0929	0,3902	0,8250	-0,7030	0,4444	-0,5221	-4,1154	4,6351	1,7295	0,7713	0,4366
64,25	-0,1480	0,1475	0,5274	0,7438	-0,3564	-1,2778	-0,4204	-3,6667	4,5676	1,1885	-0,4043	0,0035
74,25	-0,2160	0,2104	0,6280	1,1563	0,0396	-2,4444	-0,4690	-3,6667	3,4189	0,4180	-0,5479	-0,4049
84,25	-0,2800	0,2814	0,5793	0,7500	0,2228	-3,7778	-0,5000	-1,9231	1,6892	-0,2787	-0,0745	-0,7500
94,25	-0,3800	0,3770	0,7439	1,0313	0,5149	-5,6944	-0,3584	-1,0256	-0,4324	-0,8525	-1,5266	-0,9930
104,25	-0,4840	0,4836	0,8628	1,2000	0,5347	-4,0000	-0,3230	0,3718	-1,8784	-1,3607	-1,9787	-1,1972
114,25	-0,6080	0,6011	0,9787	1,3375	1,1040	-1,6111	-0,0664	1,3974	-3,2027	-1,2295	-1,6862	-0,9120
124,25	-0,7280	0,7213	1,0732	1,4250	1,1881	-5,0000	0,3274	1,9872	-3,2432	-0,3443	-1,0691	-0,1831
134,25	-0,8400	0,8333	1,1098	1,4875	1,3168	-3,3611	0,4735	2,1026	-2,1622	-0,6967	-0,2021	0,5880
144,25	-0,9280	0,9235	1,0945	1,3438	1,2277	-1,9167	0,5221	1,9359	-1,1757	0,1393	0,8191	1,1620
154,25	-1,0000	1,0000	0,9848	1,0625	1,0000	1,0000	1,0000	1,0385	0,8243	1,0000	0,9043	0,9155
164,25	-1,0160	1,0328	0,8293	0,8813	0,7475	2,4444	1,0708	0,1667	2,1486	0,3934	0,4947	0,3063
169,25	-1,0160	1,0437	0,7104	0,7188	0,5545	2,4722	0,6018	-0,0641	2,2838	1,3934	0,1915	-0,1479
174,25	-1,0080	1,0464	0,6067	0,5000	0,4010	4,6389	1,0265	-0,4744	2,0000	2,4262	-0,2606	-0,5810
184,25	-0,9720	1,0273	0,4939	0,5063	0,0000	4,0278	0,4071	-0,3718	1,2703	1,7541	-1,0851	-1,0423
194,25	-0,8800	0,9781	0,2378	0,5563	-0,4901	1,6389	0,1681	0,2821	-0,5405	0,9344	-1,3191	-0,9683
204,25	-0,7760	0,9235	0,1799	0,7188	-0,8267	7,0000	-0,1018	1,3333	-2,7027	0,4508	-0,8936	-0,3310
214,25	-0,6400	0,8224	0,1982	0,5688	-1,0743	4,9722	-0,3850	2,0256	-3,2297	-0,3033	-0,2340	0,3697
224,25	-0,4960	0,7541	0,0854	0,4250	-1,1782	3,1667	-0,8938	2,9359	-3,5405	-0,4590	0,7606	0,8768
234,25	-0,2880	0,6366	0,1006	0,6500	-1,2921	1,4167	-0,9912	3,7436	-3,0135	-0,9918	1,4574	1,0915
244,25	-0,1400	0,5628	0,1921	0,8375	-1,2624	-0,9167	-0,9735	3,9872	-2,2568	-1,7541	1,7181	0,7676
254,25	0,0480	0,4863	0,3049	1,1188	-1,1782	-2,1389	-0,6327	4,0256	-0,6486	-1,2131	2,2074	0,1655
264,25	0,4120	0,4590	0,1982	1,3250	-1,0446	-5,1944	-0,4204	4,2821	1,0405	-0,3197	2,0319	-0,6268
274,25	0,5160	0,4399	0,0976	1,6000	-0,8119	-6,3333	-0,0575	4,0513	3,2568	0,7213	1,8670	-0,9718
284,25	0,7800	0,4781	0,0335	1,8188	-0,5594	-5,3333	0,3097	3,7821	3,4189	0,3033	1,3404	-1,0810
294,25	0,9560	0,3962	-0,0762	-1,7750	-0,2426	-3,8611	0,3894	2,9231	3,1351	1,2541	0,3191	-0,7254
304,25	1,1400	0,4344	0,0000	-0,1813	0,0891	-5,3333	1,0265	1,8718	2,2973	2,3607	-0,5426	0,0634
314,25	1,1720	0,4945	0,1372	2,0813	0,4455	-4,5000	1,1637	0,7179	0,9865	0,9016	-1,2287	0,6268
324,25	1,5080	0,5027	0,2652	2,1000	0,7228	-1,8611	0,7743	-0,2051	-0,5000	0,5902	-0,6543	0,8380
334,25	1,3200	0,3934	0,5091	1,4688	0,9505	1,1667	0,9381	-0,4744	-2,1351	-0,3607	-0,0372	0,4296
339,25	1,3200	0,3934	0,5366	1,4563	0,9505	1,1667	0,9381	-0,2564	-2,4324	-0,3607	0,4043	0,2289
344,25	1,3800	0,3142	0,6768	1,4125	1,0149	3,5000	0,5354	-0,1923	-2,2973	-0,9180	0,9202	-0,0845
354,25	1,4400	0,2350	0,8293	1,0938	1,0792	5,8333	0,1327	0,6795	-1,4054	-1,4754	1,2340	-0,6725
364,25	1,3400	0,3689	0,9970	0,8938	0,9901	8,7500	-0,3274	1,5641	0,0676	-1,4918	1,7394	-0,7746
374,25	1,2880	0,3962	1,0305	0,7625	0,8168	7,6389	-0,7434	2,7564	1,4054	-1,9508	0,6489	-0,6408
384,25	1,0680	0,3197	1,0305	1,0063	0,5050	9,6667	-0,9292	2,5641	2,1351	-1,3033	-0,1968	0,0845
394,25	0,8720	0,2814	0,9329	0,8938	0,2178	6,9444	-0,9867	2,1538	2,8108	-0,3770	-1,1223	0,6127
404,25	0,9120	0,1694	0,8628	0,9625	-0,1188	5,1111	-0,9204	1,5256	2,4595	0,5738	-1,1702	0,7324
414,25	0,6160	0,1694	0,6799	1,1813	-0,4059	1,8889	-0,7876	-0,1282	1,8649	1,8197	-1,2021	1,1444
424,25	0,5400	0,1421	0,5671	1,3625	-0,7030	-0,4722	-0,4381	-1,2308	2,4595	1,5000	-0,9149	1,4965
434,25	0,3200	0,0956	0,5152	1,2750	-1,0396	-2,5000	-0,0177	-2,8846	-2,2973	0,6721	-0,3830	0,4085
444,25	0,3040	0,0628	0,4390	1,1375	-1,2327	-4,7500	0,3584	-3,7564	-3,5270	0,4836	0,2128	0,0951
454,25	0,2480	0,0820	0,3963	1,3125	-1,2970	-8,2778	0,7522	-4,2436	-3,9324	-0,0328	0,8457	-0,1655
464,25	0,1680	0,0574	0,3049	1,5188	-1,4208	-7,6667	1,0531	-4,4359	-4,4459	-1,3279	0,7872	-0,4296
474,25	0,1120	0,0383	0,2195	1,5500	-1,4059	-11,1111	1,1593	-2,8846	-2,7297	-2,0820	1,1170	-0,3627
484,25	0,0680	0,0273	0,1341	1,7375	-1,1881	-7,0833	1,1504	-1,4872	-2,3649	-2,7951	0,4415	-0,2852
494,25	0,0360	0,0164	0,0671	1,7625	-0,8713	-5,5000	0,9646	0,2308	-0,6216	-2,8607	0,0798	-0,0106
504,25	0,0080	0,0031	0,0274	1,2875	-0,4950	-2,8889	0,3009	1,1026	0,3108	-1,6066	-0,1064	0,1303

*Nota:* \*Vectores modales del modelo experimental cuyos datos fueron

analizados con el software Artemis, adaptado de (Vargas, 2016)

**Tabla 7.**

*Vector modal de 10 modos de vibración experimental, Midas Civil.*

		MIDAS CIVIL									
Frecuencia Hz		0,566	0,600	0,723	0,813	0,979	1,007	1,097	1,340	1,714	1,808
Nodo	X(m)	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7	Modo 8	Modo 9	Modo 10
1	4,25	0,001	0,003	-0,119	-0,015	0,079	-2,000	1,033	-0,333	0,000	0,500
3	14,25	0,003	0,011	-0,436	-0,055	0,302	-8,000	3,920	-1,167	-1,000	1,750
5	24,25	0,011	0,025	-0,708	-0,089	0,546	-14,000	6,937	-1,667	-1,500	3,000
7	34,25	0,025	0,043	-0,812	-0,101	0,718	-18,000	8,873	-1,833	-2,000	3,500
9	44,25	0,043	0,062	-0,812	-0,101	0,833	-20,000	9,970	-1,667	-2,000	4,000
2	54,25	0,077	0,098	-0,711	-0,088	0,953	-21,000	10,799	-1,333	-1,500	4,000
4	64,25	0,121	0,142	-0,529	-0,064	1,038	-21,000	10,968	-1,000	-1,000	3,750
6	74,25	0,179	0,198	-0,286	-0,033	1,105	-21,000	10,685	-0,500	-0,500	3,500
8	84,25	0,242	0,259	-0,031	-0,001	1,161	-19,000	10,233	-0,167	0,000	3,000
10	94,25	0,331	0,346	0,260	0,051	1,248	-19,000	9,807	0,500	0,500	2,500
11	104,25	0,462	0,473	0,575	0,152	1,352	-17,000	9,084	1,000	1,000	1,750
13	114,25	0,569	0,576	0,776	0,257	1,404	-15,000	8,280	1,333	1,500	1,500
19	124,25	0,703	0,705	0,971	0,422	1,417	-12,000	6,904	1,500	1,500	1,000
17	134,25	0,823	0,822	1,082	0,610	1,358	-9,000	5,206	1,667	1,500	0,750
15	144,25	0,925	0,923	1,096	0,811	1,220	-4,000	3,197	1,500	1,500	0,750
Ref	154,25	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
21	159,25	1,020	1,023	0,931	1,065	0,891	3,000	0,105	0,667	1,000	1,000
23	164,25	1,038	1,048	0,799	1,143	0,707	7,000	-1,217	0,167	0,500	1,250
25	169,25	1,041	1,059	0,655	1,191	0,521	9,000	-2,375	-0,167	0,500	1,500
12	179,25	1,016	1,056	0,392	1,212	0,189	14,000	-4,074	-0,833	0,000	1,750
14	189,25	0,944	1,021	0,107	1,152	-0,197	17,000	-5,554	-1,500	-0,500	2,000
16	199,25	0,829	0,958	-0,125	1,020	-0,576	19,000	-6,502	-1,833	-0,500	2,250
18	209,25	0,675	0,874	-0,278	0,843	-0,925	20,000	-6,872	-1,833	-0,500	2,250
27	219,25	0,489	0,776	-0,343	0,645	-1,230	19,000	-6,681	-1,667	-0,500	2,500
20	229,25	0,286	0,679	-0,329	0,455	-1,472	17,000	-6,038	-1,333	-0,500	2,500
29	239,25	0,043	0,577	-0,239	0,256	-1,683	14,000	-4,931	-0,833	0,000	2,500
31	249,25	-0,209	0,492	-0,091	0,080	-1,845	11,000	-3,599	-0,333	0,000	2,500
33	259,25	-0,442	0,440	0,075	-0,064	-1,972	8,000	-2,356	0,333	0,000	2,500
35	269,25	-0,714	0,406	0,232	-0,233	-2,098	5,000	-0,972	0,667	0,000	2,250
22	279,25	-1,012	0,386	0,354	-0,433	-2,176	2,000	0,506	1,167	0,000	2,250
24	289,25	-1,354	0,377	0,427	-0,687	-2,153	-2,000	2,119	1,500	-0,500	2,000
26	299,25	-1,559	0,377	0,425	-0,855	-2,058	-4,000	3,022	1,667	-0,500	2,000
28	309,25	-1,803	0,380	0,358	-1,068	-1,825	-6,000	3,980	1,667	-0,500	1,750
37	319,25	-1,998	0,383	0,213	-1,243	-1,470	-8,000	4,573	1,333	-0,500	1,750
30	329,25	-2,131	0,384	0,003	-1,351	-1,008	-8,000	4,730	0,667	0,000	1,500
32	334,25	-2,184	0,381	-0,178	-1,372	-0,608	-8,000	4,544	0,167	0,000	1,500
39	339,25	-2,195	0,378	-0,277	-1,360	-0,381	-8,000	4,338	-0,167	0,500	1,500
41	349,25	-2,175	0,367	-0,484	-1,276	0,144	-7,000	3,625	-0,833	1,000	1,250
43	359,25	-2,084	0,347	-0,660	-1,108	0,721	-5,000	2,491	-1,500	1,000	1,000
45	369,25	-1,933	0,320	-0,755	-0,894	1,252	-3,000	1,108	-1,833	1,500	0,750
47	379,25	-1,733	0,288	-0,762	-0,670	1,705	-1,000	-0,398	-1,833	1,500	0,750
40	389,25	-1,504	0,251	-0,688	-0,461	2,061	1,000	-1,906	-1,667	1,000	0,750
38	399,25	-1,271	0,215	-0,556	-0,291	2,307	3,000	-3,263	-1,333	1,000	1,000
36	409,25	-1,020	0,175	-0,359	-0,144	2,477	5,000	-4,569	-0,833	0,500	1,500
34	419,25	-0,798	0,140	-0,127	-0,041	2,564	6,000	-5,621	-0,333	0,000	2,000
49	429,25	-0,640	0,115	0,097	0,019	2,616	7,000	-6,400	0,333	0,000	2,500
42	439,25	-0,504	0,094	0,313	0,070	2,655	8,000	-7,101	0,667	-0,500	2,750
44	449,25	-0,385	0,075	0,496	0,114	2,620	8,000	-7,506	1,167	-1,000	3,000
46	459,25	-0,295	0,060	0,613	0,142	2,494	8,000	-7,480	1,500	-1,500	3,000
48	469,25	-0,215	0,046	0,669	0,156	2,238	7,000	-6,964	1,667	-1,500	3,000
51	479,25	-0,134	0,030	0,618	0,145	1,737	6,000	-5,577	1,667	-1,500	2,500
52	489,25	-0,082	0,019	0,471	0,111	1,206	4,000	-3,935	1,333	-1,000	2,000
50	499,25	-0,048	0,011	0,306	0,072	0,750	3,000	-2,465	1,000	-0,500	1,250

## Apéndice B. Código Matlab para calcular el MAC

```
function mac=MAC(phi)
```

```
% This function is to compute and plot Modal Assurance Criterion (MAC) matrix between  
identified mode shapes
```

```
% rectangle around the peaks.
```

```
% Programmer: Mohammad Farshchin, Ph.D candidate at The UofM, Modificado para  
AutoMac.
```

```
% Email: Mohammad.Farshchin@gmail.com
```

```
% Last modified: 9/23/2015
```

```
% phi: matrix of the identified mode shapes
```

```
% mac: MAC matrix
```

```
% Example: load ModeShapes.mat;MAC_Matrix=MAC(phi)
```

```
load MATRIZANALITICA.mat; %CARGA phi
```

```
load MATRIZEXP.mat; % CARGA phiexp
```

```
for I=1:size(phi,2)
```

```
    for J=1:size(phiexp,2)
```

```
        mac(I,J)=Mac(phi(:,I),phiexp(:,J));
```

```
end
```

```
end
```

```
% plot mac matrix
```

```
figure
```

```
bar3(mac)
```

```
title('MAC')
```

```
end
```

```
function mAc=Mac(Phi1,Phi2)
```

```
% This function calculates mac between phi 1 and phi2
```

```
mAc= (abs(Phi1'*Phi2))^2/((Phi1'*Phi1)*(Phi2'*Phi2));
```

```
end
```