EL PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN Y ALGUNAS APLICACIONES EN PROBABILIDAD

WILLIAM GONZALO ROJAS DURÁN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

EL PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN Y ALGUNAS APLICACIONES EN PROBABILIDAD

WILLIAM GONZALO ROJAS DURÁN

Monografía presentada para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
GERMÁN MORENO ARENAS, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

Agradecimientos

A LARC POR SU AMOR Y APOYO INCONDICIONAL.

A MI MADRE, HERMANAS Y SOBRINAS QUE LAS AMO CON TODO MI CORAZÓN.

A LOS PROFESORES JUAN ANDRÉS MONTOYA Y CAROLINA MEJÍA POR SU APOYO Y POR TODA SU ENSEÑANZA BRINDADA.

Y A TODOS LOS PROFESORES POR SUS ENSEÑANZAS.

RESUMEN

TÍTULO: EL PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN Y ALGUNAS APLICACIONES EN PROBABILIDAD[1]

AUTOR: WILLIAM GONZALO ROJAS DURÁN[2]

PALABRAS CLAVES: Principio de Inclusión-Exclusión, Combinatoria, Permutaciones y desarreglos, Cardinalidad de un Conjunto, Probabilidad.

DESCRIPCIÓN: Es importante notar que el principio de inclusión-exclusión tiene una historia interesante, a este resultado se le encuentra en distintos manuscritos con nombres como el método de la criba o el principio de clasificación cruzada. La versión de este principio desde el punto de vista de la teoría de conjuntos se encuentra en Doctrine of chances (1718), un texto de teoría de probabilidad de Abraham DeMoivre (1667-1754). Un poco antes, en (1708), Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) usó la idea subyacente al principio en su solución del problema que por lo general se conoce *le probléme des rencontres* o emparejamientos. Este trabajo prentende relacionar el principio de inclusión-exclusión, propio de la teoría de conjuntos, con la probabilidad; estudiando algunas aplicaciones en la resolución de problemas de esta rama de las matemáticas. El principio de Inclusión-Exclusión en su versión probabilística afirma que:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos (eventos), de un espacio muestral Ω, entonces la probabilidad de ocurrencia del evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\};\ |I|=k} P(A_I)$$

donde $k = 1, \ldots, n$ y

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$$

Este principio es esencial en el desarrollo de situaciones cotidianas de conteo y probabilidad que conciernen el cálculo de cardinalidades de ciertos conjuntos, que como se ha dicho permite resolver problemas de probabilidad.

[1]Dr. Germán Moreno Arenas, Director del Trabajo de Grado.

[2]Programa de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: THE PRINCIPLE OF INCLUSION-EXCLUSION AND SOME APPLICATIONS IN PROBABILITY*

AUTHOR: WILLIAM GONZALO ROJAS DURÁN**

KEYWORDS: Inclusion-Exclusion Principle, Combinatory, Permutations and derangements, Cardinality of a set, Probability.

DESCRIPTION: It is important to note that the principle of inclusion-exclusion is an interesting story, this result is found in various manuscripts with names such as the screening method or the principle of cross-classification. The version of this principle from the viewpoint of set theory is found in Doctrine of chances (1718), a text of probability theory DeMoivre Abraham (1667-1754). A little earlier, in (1708), Comte de Montmort (1678-1719) used the idea behind the principle in solving the problem that is usually called him probleme des rencontres or pairings. This work pretends to relate the inclusion-exclusion principle, characteristic of set theory, with probability, we study some applications in solving problems of this branch of mathematics. The principle of inclusion-exclusion probability version states:

If $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are subsets (events), of a sample space Ω, then the probability of occurrence of the event $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ is

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\};\ |I|=k} P(A_I)$$

where $k = 1, \ldots, n$ and

$$A_I = \bigcap_{i\in I} A_i$$

This principle is essential in everyday situations to develop counting and probability calculation concerning cardinalities of certain sets, which as mentioned can solve probability problems.

*Dr. Germán Moreno Arenas, Undergraduate Dissertation Director.

**Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

Tabla de Contenido

Introducción

Diferentes investigaciones han concluido que las ideas estadísticas son con frecuencia mal interpretadas por los estudiantes e incluso por muchos profesionales (DelMas y otros, 1999; Erickson, 2006; Rubín y otros, 2006; Batanero, 2000). Las causas de tal hecho van desde la complejidad misma de estas ideas, hasta el poco tiempo dedicado a los cursos de estadística. Al resolver un problema de probabilidad o estadística, el razonamiento que debe hacerse para esto es diferente de aquel que se hace cuando se ataca un problema de matemáticas. Sin embargo, el poder hacer uso de resultados matemáticos en la resolución de problemas de probabilidad le brinda a esta rama precisión y un carácter formal. Para ser concretos, el problema de contar es tan antiguo como el raciocinio del mismo. La necesidad de contar llevó al ser humano a inventar los números.

Ahora bien, actualmente el problema de contar va más allá de la escritura y se hace necesario un excelente conocimiento de la teoría de conjuntos como sustento para contar elementos de un conjunto cuando no resulta sencillo enumerarlo. La teoría de la probabilidad, la estadística y la computación del pasado siglo, forzaron a la comunidad matemática-estadística a desarrollar nuevas técnicas de conteo de gran generalidad. En tal sentido, la idea de esta monografía consiste en estudiar objetivamente el principio de inclusión-exclusión así como el uso de sus corolarios en situaciones probabilísticas. Es por ello que la teoría de conjuntos, las técnicas de conteo, el análisis combinatorio; entre otras teorías matemáticas, serán necesarias aquí para llevar a cabo el trabajo que me propongo realizar, por lo tanto es importante tener un excelente conocimiento de las proposiciones más relevantes que acerca de éstas se tiene.

Capítulo 1

Preliminares

Para comenzar abordaré algunos de los conceptos y definiciones concernientes a la teoría de conteo: Principio de la suma, principio del producto, permutaciones simples, combinaciones, permutaciones caóticas o desarreglos, el principio de Dirichlet y el principio de inclusión-exclusión; así como algunos ejemplos que ilustren el uso de dichos conceptos y teoremas.

1.1. Principios básicos de conteo

Cardinalidad de un conjunto.

Sea A un conjunto finito, se denota por $|A|$ al número de elementos o cardinalidad de A. Además, $|A| = 0$ si y solo si $A = \emptyset$.

Principio de Adición o regla de la suma.

El enunciado de este teorema puede ser el siguiente: *Si una primera tarea puede realizarse de m formas distintas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse $m + n$ formas distintas.* Matemáticamente el teorema afirma que:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos, disjuntos dos a dos, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre el número de conjuntos. En primer lugar veamos que la afirmación es cierta para dos conjuntos no vacíos disjuntos.

En efecto, sean A_1 y A_2 dos conjuntos finitos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; entonces, si

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

al ser disjuntos no tendrán elementos comunes, de aquí que

$$A_1 \cup A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

luego,

$$|A_1 \cup A_2| = m + n = |A_1| + |A_2|,$$

y por tanto el teorema es válido para $n = 2$.

Supongamos ahora que la proposición es cierta para k conjuntos finitos, disjuntos dos a dos, es decir, se cumple que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Veamos entonces que el teorema es cierto para $k + 1$ conjuntos finitos, disjuntos dos a dos.

En efecto,

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}.$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigcap A_{k+1} &= (A_1 \cup A_2 ... \cup A_k) \cap A_{k+1} \\
&= (A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1}) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup ... \cup \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que los conjuntos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \text{ y } A_{k+1}$$

son disjuntos, y por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + \left|A_{k+1}\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \left|A_{k+1}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i|.
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que;

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

y el teorema queda probado. $\square$

***Principio del producto o de la multiplicación*.**

Este principio permitirá resolver fácilmente situaciones que involucren procesos que consistan en acciones sucesivas.

Supongamos que una acción consiste en una sucesión de pasos. Por ejemplo lanzar un dado, luego otro y a continuación un tercero. Se dice que los pasos son independientes si el número de formas en que puede hacerse cada uno de ellos no depende del número de formas en que pueden realizarse cada uno de los demás.

Teorema 1.1. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre el número de conjuntos, que denotaremos con el símbolo n.

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos finitos no vacíos cualesquiera,

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

y sea $a_i \in A_1$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, un elemento cualquiera de A_1.
Entonces existen n parejas ordenadas de la forma (a_i, b), con $b \in A_2$, en el conjunto $A_1 \times A_2$. Ahora bien, como hay n elementos en el conjunto A_2, resultan en total n formas de escoger la segunda componente de la pareja ordenada (a_i, b); esto es, n maneras de obtener m parejas de la forma (a_i, b) en $A_1 \times A_2$, es decir; se obtienen en total $m \cdot n$ parejas ordenadas en el conjunto $A_1 \times A_2$. Lo anterior muestra que

$$|A_1 \times A_2| = m \cdot n = |A_1| \cdot |A_2|,$$

y el teorema es válido para $n = 2$.
Suponemos ahora que la afirmación es válida para k conjuntos, es decir, si $A_1, A_2, ..., A_k$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos; entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Veamos que la proposición es válida para $k + 1$ conjuntos finitos no vacíos.

En efecto,

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| &= |(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}| \\ &= |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| \cdot |A_{k+1}|. \end{aligned}$$

En uso de la hipótesis de inducción, la anterior igualdad implica que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k| \cdot |A_{k+1}|,$$

y por el *principio de inducción matemática*, el teorema es válido para todo entero positivo n. □

1.2. Permutaciones simples

Definición 1.1. *Una permutación simple de n objetos es cualquier agrupamiento ordenado de esos objetos.*

Como caso particular de la definición anterior podemos considerar la siguiente situación, tomemos el conjunto de números $\{1, 2, 3\}$, entonces las permutaciones posibles de este conjunto son

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Ahora bien, fijando cualquiera de estos tres números en primera posición, quedan dos elementos para ocupar la segunda posición, y dado que inicialmente el conjunto contaba con 3 elementos, resulta que en total se obtienen $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutaciones de estos elementos. Este hecho constituye un problema clásico de conteo que se abordará más adelante.

Una pregunta que surge naturalmente de esta definición es:

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, ..., a_n$, ¿de cuántos modos es posible ordenarlos?

Es fácil de observar que el número de posibilidades en que se puede elegir cualquiera de estos objetos para ocupar la primera posición del ordenamiento es n, y que una vez elegido este primer elemento quedan disponibles $n - 1$ objetos para ocupar la segunda posición, $n - 2$ objetos para la tercera y, por último, habrá una única opción para llenar la n-ésima posición. Se sigue, por el principio de multiplicación, que en total existen $1 \times 2 \times ...(n - 2) \times (n - 1) \times n$ modos distintos de ordenar estos n objetos. El producto que ha aparecido en la resolución del problema anterior tiene importancia especial y se hace referencia a él en la siguiente definición.

Definición 1.2. *Dado un un número natural n, se define el factorial de n como el producto de todos los números naturales menores o iguales que n y se denota por $n!$, es decir, $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1$. Además $1! = 0! \equiv 1$*

Ejemplo:

Si A es un conjunto con n elementos, ¿cuántas son las funciones biyectivas de $f : A \longrightarrow A$?

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, entonces la imagen de a_1, $f(a_1)$, puede ser escogida de n formas distintas en A. Ahora, la imagen de a_2, $f(a_2)$, puede escogerse de $n - 1$ formas distintas en A; puesto que f es biyectiva. Así entonces si a_n es el último elemento disponible en A, entonces su imagen puede escogerse de una única manera, y por tanto el número de funciones biyectivas que se pueden definir de A en A está dado por

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$$

1.3. Principio de Dirichlet o del palomar

Principio de las gavetas de Dirichlet

Si n objetos fuesen colocados en no más de $n-1$ gavetas, entonces al menos una de ellas contendrá como mínimo dos objetos

Demostración. Por reducción al absurdo. Si cada una de las gavetas contuviera a lo sumo un objeto, el número total de objetos contenidas en ellas sería a lo más, $n-1$, lo que es una contradicción. $\square$

Ejemplo:

En una gaveta hay 12 medias blancas y 12 medias negras. ¿Cuántas medias debemos retirar al azar para tener certeza de obtener un par de medias del mismo color?

Pensando en las medias como objetos y los dos colores como las dos gavetas, se observa que con 3 medias habrá dos medias con un mismo color. La respuesta es por tanto 3.

Principio del Palomar, de los Casilleros o de Dirichlet (versión general)

Si se tiene un conjunto de n objetos, repartidos en m casilleros y $n > km$, con k un número natural, entonces hay al menos un casillero donde hay $k+1$ o más objetos.

Demostración. Supongamos que tenemos n objetos repartidos en m casilleros con $n > km$, y supongamos por contradicción que el principio es falso, es decir, que no hay casilleros con $(k+1)$ o más objetos. Esto quiere decir que todos los casilleros tienen a lo más k objetos (k o menos objetos). Entonces el número de objetos que hay en los casilleros será igual a $\sum_{i=1}^{m} N_i$, siendo N_i el número de objetos del casillero i. Pero se sabe que en cada casillero hay k objetos o menos, luego se tiene que: $N_1 \leq k$, $N_2 \leq k$,...,$N_m \leq k$. Sumando ahora estas desigualdades se obtiene $\sum_{i=1}^{m} N_i \leq km$, esto es, el número total de objetos en los casilleros es menor o igual a km ($n \leq km$). Pero esto es una contradicción ya que $n > km$. Luego, nuestra suposición de que el principio era falso es incorrecta. Por lo tanto, el Principio del Palomar es cierto. $\square$

Ejemplo: En un estadio hay 10000 personas. Demostrar que hay al menos un grupo de 28 personas que está de cumpleaños el mismo día.

Bastaría considerar a las personas del estadio como nuestros objetos y a los días del año como nuestros casilleros (podemos clasificar a las personas según su día de cumpleaños).

Así, tenemos que el número de personas es $n = 10000$ y el número de días del año es $k = 366$ (consideramos el caso fortuito de que haya personas nacidas en días 29 de febrero). Podemos notar, además, que $366 \times 27 = 9882$, entonces $10000 > 27 \times 366$ (es decir, $k = 27$), luego, el Principio del Palomar nos asegura que en alguno de los días del año hay 28 o más personas de cumpleaños.

1.4. Combinatoria

De manera general se puede decir que el análisis combinatorio es la parte de la matemática que analiza estructuras y relaciones discretas.

Dos tipos de problemas que ocurren frecuentemente en el análisis combinatorio son:

1) Demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjuntos finito dado y que satisfacen ciertas condiciones.

2) Contar o clasificar los subconjuntos de un conjunto finito y que satisfacen ciertas condiciones.

¿De cuántos modos podemos escoger p objetos distintos de un conjunto de n objetos distintos?

Se define el coeficiente combinatorio C_n^p por la expresión

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!},\ 0 \leq p \leq n.$$

La expresión anterior da solución a la pregunta propuesta, es decir, C_n^p representa el número de modos en que se puede escoger p objetos distintos de entre n objetos distintos dados.

Ejemplo:

En un torneo en el cual cada participante enfrenta a todos los demás una única vez, son jugadas 780 partidas. ¿Cuántos son los participantes?

Sea n el número de participantes en el torneo, como cada participante se enfrenta una sola vez a los demás, resulta que el número de partidas que en total se disputan está dada por el número de parejas que se pueden obtener dentro del número total de participantes, es decir

$$\begin{aligned} C_n^2 = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{n(n-1)}{2} = 780,$$

de donde se deduce que $n = 40$.

Definición 1.3. *Sea A un conjunto finito no vacío. Una partición de A es una familia de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, todos no vacíos, tales que:*

1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$

O sea los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son disjuntos dos a dos, y su unión es el conjunto A. Diremos también que A fue particionado por los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

1.5. Principio de Inclusión-Exclusión y Generalización

Principio de Inclusión-Exclusión.

Teorema 1.2. *Sean A y B dos conjuntos, entonces:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración. Sean *m la cantidad de elementos del conjunto A que no pertenecen a B*; *n la cantidad de elementos del conjunto B que no pertenecen a A*; y *k la cantidad de elementos que pertenecen a los dos conjuntos*. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B| \\ &= m + n + k. \end{aligned}$$

De otro lado,

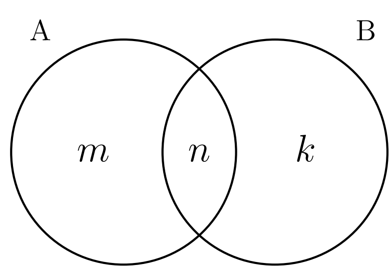
$$\begin{aligned} |A| + |B| - |A \cap B| &= (m + k) + (n + k) - k \\ &= m + n + k. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

como se afirmó. □

La gráfica a continuación ilustra la prueba anteriormente discutida.



Ejemplo:

Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } B = \{4, 5, 6, 7, 8\};$$

entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A \cap B = \{4\}.$$

Se sigue que $|A \cup B| = 8$, $|A \cap B| = 1$, por tanto $|A \cup B| = 8 = 4+5-1 = |A|+|B|-|A \cap B|$, lo que ratifica el teorema (1.2).

Lema 1.1. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

Demostración. Necesitamos mostrar que la suma alternada de los coeficientes combinatorios es igual a cero; para ello es necesario aplicar el teorema del Binomio de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

haciendo $a = -1$ y $b = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} ((-1)+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k \end{aligned}$$

es decir,

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 + \cdots + (-1)^n C_n^n$$

como se quería mostrar.

$\square$

Principio de inclusión-exclusión generalizado

Teorema 1.3. *Dados* n *subconjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de un conjunto* Ω*, se tiene que:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right),$$

donde $|I| = k$*.*

Este teorema será probado en el capítulo 3.

1.6. Permutaciones caóticas o desarreglos

Una permutación de los números $(1, 2, ..., n)$ se dice que es caótica (o un desarreglo) cuando ningún número está en su lugar primitivo. Así, las permutaciones 2143 y 3142 son caóticas, mas 1342 no es (1 está en su lugar primitivo). Para calcular el número D_n de permutaciones caóticas de $(1, 2, ..., n)$, se define A_i = conjunto de las permutaciones de $(1, 2, ..., n)$ en que el número i ocupa el i-ésimo lugar, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Se desea calcular el número de elementos del conjunto Ω de las permutaciones de $(1, 2, \ldots, n)$ que no pertenecen a ninguno de los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Si S_i representa el número de permutaciones de Ω que fijan i elementos (o más), entonces:

$$\begin{aligned}
S_0 &= |\Omega| = n!; \\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n(n-1)! = n! \\
S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = C_n^2 (n-2)! = \frac{n!}{2!}; \\
S_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = C_n^3 (n-3)! = \frac{n!}{3!} \\
&\vdots \\
S_n &= C_n^n (n-n)! = \frac{n!}{n!}
\end{aligned}$$

El número a_0 de elementos de Ω que no pertenecen a ninguno de los conjuntos

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

es

$$\begin{aligned}
a_0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k \\
&= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \\
&= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].
\end{aligned}$$

Luego, el número de permutaciones caóticas de $(1, 2, \ldots, n)$ es

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]. \tag{1.1}$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} D_7 &= 7!\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right] \\ &= 5040\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040}\right] \\ &= 1854 \end{aligned}$$

Es interesante observar que D_n es aproximadamente igual a $\dfrac{n!}{e}$, más aun, tenemos el siguiente

Teorema 1.4. *D_n es el entero más próximo a $\dfrac{n!}{e}$.*

Demostración. Con $n = 1$ se tiene que $D_n = 0$; mientras que

$$\frac{1!}{e} \approx 0,36.$$

De otro lado para $n = 2$, se tiene que $D_n = 1$ y $\dfrac{2!}{e} \approx 0,73$. Se observa que la afirmación es verdadera para $n = 1$ y para $n = 2$. Se probará para el caso $n > 2$. En efecto, por el desarrollo de la serie de Taylor se sabe que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

y por tanto con, $x = -1$ se tiene $e^{-1} = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} &\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| = \left|n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right) - n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots\right)\right| \\ &= n!\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots\right| \\ &\leq n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots \\ &\leq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{2},$$

si $n > 2$. Luego, para $n > 2$, D_n es un entero situado a una distancia menor que $\dfrac{1}{2}$ del número $\dfrac{n!}{e}$. Así, D_n es el entero más próximo de $\dfrac{n!}{e}$, si $n > 2$. $\square$

Ejemplo:

Dos médicos deben examinar, en una hora, 6 pacientes, empleando 10 minutos con cada paciente. Cada uno de los 6 pacientes debe ser examinado por los dos médicos. ¿De cuántos modos puede ser realizado un horario compatible?

El horario del primer médico puede ser realizado de $6! = 720$ formas, puesto que el primer lugar de consulta puede ser ocupado por cualquiera de las 6 personas, el segundo por cualquiera de las 5 restantes y así hasta que el sexto lugar en la consulta lo ocupe la única persona restante. Ahora bien, para el horario del segundo médico, que ya se encuentra definido por el horario del primero se tienen $D_6 = 265$ formas de elegir a cada paciente sin que esta elección esté ya en el horario del primer médico. Finalmente, por cada una de las 720 formas en que el primer médico puede formar su horario, el segundo médico tiene 265 formas de hacer el suyo, de forma compatible con el primer médico, por tanto existen $720 \cdot 265 = 190800$ modos de realizar un horario compatible.

Capítulo 2

Probabilidad

La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo género a un cierto número de casos igualmente posibles, o sea, tales que estemos igualmente inseguros sobre su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad es buscada. La razón de este número para el de todos los casos posibles es la medida de esa probabilidad, la cual es por tanto una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles.

Pierre Simon Laplace

Ensayo filosófico sobre las probabilidades.

2.1. Introducción

Algunas de las aplicaciones más importantes de la teoría del conteo ocurren en la teoría de las probabilidades.

Se dirá que un *evento* es *determinístico* si cuando se repite en condiciones semejantes conlleva a resultados iguales. De otro lado, los eventos que arrojan resultados generalmente distintos, cuando son repetidos en las mismas condiciones, se les llamará *experimentos aleatorios.* Tales fenómenos suceden constantemente en nuestras vidas. Por ejemplo, preguntas como: ¿lloverá mañana? ¿Cuál será la temperatura mínima el fin de semana? ¿Cuántas personas ganarán la lotería? ¿Cuántos habitantes tendrá nuestro país en el 2015? son muestras de esta aleatoriedad.

La teoría de las probabilidades es la rama de la matemática que crea, desarrolla y en general busca *modelos* que pueden ser utilizados para estudiar experimentos o fenómenos aleatorios.

Dependiendo de cada situación, el modelo matemático formulado para resolverla puede ser más complejo y distinto que el modelo de otro fenómeno. Sin embargo todos estos modelos comparten características comunes. Lo que nos proponemos realizar en este capítulo es aplicar la conceptualización precedente en la resolución de situaciones de probabilidad.

2.2. Espacio Muestral y Probabilidad de Laplace

La definición de probabilidad como cociente del número de *casos favorables sobre el número de casos posibles* fue la primera definición formal de probabilidad, y apareció por primera vez en forma clara en la obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerónimo Cardano (1501-1576).

Consideremos el siguiente experimento aleatorio: lance un dado y observe el número obtenido.

Nos preguntamos ahora por el conjunto que contiene todos los posibles resultados de este experimento. De otra forma: encontrar cual es el conjunto de los posibles resultados de este experimento y calcular el número de elementos contenidos en él. A este conjunto se le llama *Espacio Muestral*. En nuestro caso el espacio muestral Ω es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y } |\Omega| = 6.$$

Los elementos del espacio muestral son llamados *puntos* y los subconjuntos serán llamados eventos. Por ejemplo, el subconjunto

$$A = \{1, 3, 5\}$$

Es el evento que representa a los números impares obtenidos al lanzar el dado.

Se pretende ahora calcular la *probabilidad* de un evento cualquiera A. En nuestro caso es claro de forma intuitiva que al repetir un gran número de veces el experimento se obtendrá un número impar en aproximadamente la mitad de los casos, es decir, el evento A considerado ocurrirá mas o menos la mitad de las veces. Es fácil convencernos de que dos características de este experimento son:

a)Los puntos del espacio muestral son igualmente "probables";

b)La cardinalidad del conjunto A ($|A| = 3$) es exactamente la mitad de la cardinalidad del espacio muestral Ω.

Estas características y la definición de probabilidad de un evento implican que:

$$\text{probabilidad de A} = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Laplace se refería a los elementos de A como los *casos favorables*, y a los elementos del espacio muestral Ω como casos posibles. Definió entonces

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Se resumirán ahora las consideraciones hasta aquí hechas, las cuales permiten utilizar la anterior definición de probabilidad.

Supongamos que los experimentos aleatorios tienen las siguientes características:

a)Hay un número finito (n) de puntos y la unión de todos estos es el espacio muestral Ω.

b)Los puntos son igualmente probables.

c)Todo evento A es la unión de m puntos, donde $m \leq n$.

Definimos entonces

$$\text{probabilidad de A} = P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

Consecuencias inmediatas de esta definición son las siguientes propiedades:

1) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) $P(\emptyset) = 0$ (porque $|\emptyset| = 0$).

4) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo: Supongamos que de n objetos escogemos r al azar con sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún objeto sea escogido más de una vez?

Puesto que hay reposición, existen n posibilidades para escoger el primer objeto; n posibilidades para el segundo y en general existirán n posibilidades para escoger el objeto que ocupa la posición $r-$ ésima. Por el principio del producto se sigue que el número de casos posibles es n^r; es decir $|\Omega| = n^r$. De otro lado, existen n formas distintas de escoger cualquier objeto de Ω; $n-1$ formas para escoger el segundo objeto (dado que debe asegurarse que el primer objeto escogido no ocupe ninguna posición posterior a la primera); $n-2$ maneras para la tercera; y así sucesivamente hasta que queden $n-(r-1) = n-r+1$ posibilidades de escoger el objeto en la $r-$ ésima posición sin que alguno de ellos haya sido escogido más de una vez, entonces el número de casos favorables es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

La probabilidad es por tanto,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}$$

Una aplicación interesante de este resultado es la siguiente: Supongamos que el cumpleaños de una persona puede caer con igual probabilidad en cualquiera de los días del año. Si r personas son escogidas al azar, la probabilidad de que todas cumplan años en días diferentes esta dada por la fórmula anterior con $n = 365$. Así por ejemplo si $r = 40$, la probabilidad de que por lo menos dos personas cumplan años el mismo día del año es mayor que $0,88$.

2.3. Espacios de Probabilidad

Se introducirá ahora una noción general de *probabilidad* y se probarán algunas propiedades que son consecuencia inmediata de esta definición.

Definición 2.1. *Sea Ω un espacio muestral (conjunto). Una función P definida para todos los subconjuntos de Ω (llamados eventos) es llamada una función de probabilidad si:*

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset \Omega$;

2) $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$;

3) Si A y B son eventos disjuntos (también llamados mutuamente excluyentes), es decir si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De la definición anterior se pueden obtener muchas funciones que cumplan con los tres axiomas. Sea $\Omega \equiv \{0, 1\}$ y consideremos la función P definida como sigue:

$$\begin{aligned} P : \wp(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A \subseteq \Omega &\longmapsto \end{aligned}$$

$$P(A) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{si } A = \{0\} \\ \frac{1}{3}, & \text{si } A = \{1\} \\ 1, & \text{si } A = \Omega \\ 0, & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

Por simple inspección se puede observar que la función P anteriormente definida satisface los axiomas $1, 2, 3$; exigidos para que sea una función de probabilidad.

En general, sea Ω un conjunto con n elementos,

$$\Omega = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_n}\},$$

y sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n números no negativos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Definamos $P(\{w_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y, en general, para $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\}) = \sum_{w_i \in A} p_i$$

Una función P así obtenida es una probabilidad sobre Ω.

Sea $A \subseteq \Omega$, con $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}\}$, se tiene que

$$0 = \sum_{J=1}^{k} 0 \leq \sum_{J=1}^{k} p_{i_J} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ahora bien, claramente $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Finalmente, sean A y B dos subconjuntos disjuntos de Ω; es decir, $A \cap B = \emptyset$, veamos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Supongamos que

$$\begin{aligned} A &= \{w_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_q}\} \\ B &= \{w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_N}\}, \end{aligned}$$

entonces,

$$A \cup B = \{w_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_q}, w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_N}\};$$

luego,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \sum_{J=1}^{q} p_{i_J} + \sum_{l=1}^{N} p_{k_l} \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Puede probarse que si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ obtenemos la probabilidad de Laplace como caso particular.

Esto es así porque dado cualquier evento A de Ω ($A \subseteq \Omega$), tal que $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_q}\}$, con $q \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{J=1}^{q} P(\{w_{i_J}\}) = \sum_{J=1}^{q} p_{i_J} \\ &= \sum_{J=1}^{q} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{J=1}^{q} 1 \\ &= \frac{1}{n} \cdot q \\ &= \frac{q}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} \end{aligned}$$

que es la probabilidad de Laplace anteriormente definida.

Algunas consecuencias importantes que se desprenden de la definición de probabilidad son las siguientes:

Proposición 2.1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demostración. Es claro que:
1) $A \cap A^c = \emptyset$ y
2) $A \cup A^c = \Omega$
entonces

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c),$$

en virtud de los axiomas 2 y 3 respectivamente. De aquí se deduce que

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

□

Proposición 2.2. *Si* $A \subset B$*, entonces* $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demostración. Dado que $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$; entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B - A)) \\ &= P(A) + P(B - A) \end{aligned}$$

de aquí se sigue el resultado. □

Como corolario de este teorema se tiene el hecho de que como $P(B - A) \geq 0$, entonces $P(A) \leq P(B)$, cuando $A \subset B$.

Proposición 2.3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostración. En primer lugar veamos que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ y } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

Sea $a \in A$, entonces $a \in (A - B) \cup (A \cap B)$; de otro lado, si $x \in (A - B) \cup (A \cap B)$, entonces $x \in (A - B)$ o $x \in (A \cap B)$; en cualquier caso $x \in A$.

Ahora bien, supongamos que existe un elemento $z \in (A - B) \cap (A \cap B)$, entonces $z \in (A - B)$ y $z \in A \cap B$. De aquí se deduce que z está y no está en el conjunto B simultáneamente, lo cual es absurdo; y por tanto $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

De forma similar se puede probar que

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \text{ y } (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B - A) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

y sumando estas ecuaciones se obtiene

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) \tag{2.1}$$

Finalmente veamos que

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) &= A \cup B \\ (A - B) \cap (B - A) \cap (A \cap B) &= \emptyset \end{aligned}$$

Sea $x \in (A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$, entonces x será un elemento de A, de B o de A y B. En cualquier caso $x \in A\cup B$. Ahora, si $x \in A\cup B$, entonces $x \in (A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$.

De otro lado, supongamos que existe $a \in (A-B)\cap(B-A)$, entonces a estaría y no estaría simultáneamente en el conjunto A, lo cual es absurdo, así que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ y esto implica que $(A - B) \cap (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)) \\ &= P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

y sustituyendo en (2.1) se obtiene

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B),$$

de donde

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$\square$

Ejemplos.

1) Sea P una probabilidad sobre los eventos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω. Sean A y B eventos tales que $P(A) = \frac{2}{3}$ y $P(B) = \frac{4}{9}$.

Pruebe que:

$a)$ $P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$;

$b)$ $\frac{2}{9} \leq P(A \cap B^c) \leq \frac{5}{9}$;

$c)$ $\frac{1}{9} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{9}$.

Solución:

Antes que nada probemos las siguientes propiedades: Sean A y B conjuntos. Entonces

$$\begin{aligned} &i)\ A \cap B \subset A \text{ y } A \cap B \subset B \\ &ii)\ B - A \subset A^c. \end{aligned}$$

Demostración. De (i).

Dado $x \in A \cap B$, se tiene que $x \in A$ y $x \in B$. Esto implica la afirmación (i) y además, por el corolario de la proposición (2.2)

$$P(A \cap B) \leq P(A) \text{ y } P(A \cap B) \leq P(B)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} P(A) \leq P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A \cup B) \\ P(B) \leq P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A \cup B) \end{aligned}$$

De (ii).

Sea $x \in B - A$, entonces x está en B pero no en A. Como x no está en A, entonces $x \in A^c$.

De la contenencia anterior, y por (i), se deduce que

$$P(B - A) \leq P(A^c)$$

ahora bien, combinando la ecuación $P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$, probada dentro de la proposición (2.3), y la anterior desigualdad se deduce que

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A - B) \geq P(B) - P(A^c).$$

$\square$

La solución al ejercicio se presenta enseguida,

a) $P(A \cup B) \geq P(A) = \dfrac{2}{3}$, por (i)

b) $P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$, por (i). De otro lado,

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A - B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \geq P(A) - P(B) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

por (i) y (ii).

c) $P(A \cap B) \leq P(B) = \frac{4}{9}$, y también

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) - P(B - A) \geq P(B) - P(A^c) \\ &= P(B) + P(A) - 1 = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

2) Un número entre 1 y 300 es escogido aleatoriamente. Calcular la probabilidad de que él sea divisible por 3 o por 5.

Solución:

Sean

$$A = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 300 : 3|n\} \text{ y}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 300 : 5|n\}.$$

Entonces $|A| = 100$,$|B| = 60$ y $|A \cap B| = 20$; por tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{100}{300} = \frac{1}{3}, \\ P(B) &= \frac{60}{300} = \frac{1}{5}, \\ P(A \cap B) &= \frac{20}{300} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

3) Una lotería tiene N números y sólo un premio. Un jugador compra n billetes en una extracción. Otro compra sólo un billete en n extracciones diferentes. ¿Cuál de ellos tiene mayor probabilidad de ganar el premio?

Solución:

Si todo el dinero es jugado en una única vez la probabilidad de ganar es $\frac{n}{N}$. Para calcular la otra probabilidad se procede de la siguiente manera. Calculemos primero la probabilidad de no ganar. El número de casos posibles, es decir la cardinalidad del espacio muestral es igual a N^n. Los casos favorables, en este caso son los de no ganar, son $(N-1)^n$. Por tanto la probabilidad de no ganar es:

$$\frac{(N-1)^n}{N^n} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

y la de ganar

$$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Se tendrán que comparar entonces los números

$$\frac{n}{N} \text{ y } 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Se afirma que

$$\frac{n}{N} \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n,$$

o lo que es igual

$$1 - \frac{n}{N} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Para probar esta afirmación hacemos uso de la *desigualdad de Bernoulli*, la cual afirma que

$$\text{Si } x \geq -1, \text{ entonces } (1+x)^m \geq 1 + mx, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

La prueba de la desigualdad de Bernoulli se hace enseguida.

Demostración. Claramente, si $m = 1$, entonces se da la igualdad.
Supongamos que la desigualdad se cumple para $m = k$, es decir,

$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

y veamos que afirmación es válida para $m = k + 1$.
En efecto, como

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \text{ y } x + 1 \geq 0,$$

entonces

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + x + kx + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Por el principio de inducción matemática se sigue que la desigualdad es válida para todo natural m. $\square$

En virtud de la desigualdad de Bernoulli se probará la desigualdad

$$1 - \frac{n}{N} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Puesto que $N \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{N} \leq 1$, y por tanto $-1 \leq -\frac{1}{N}$. Haciendo $x = -\frac{1}{N}$ en la desigualdad de Bernoulli resulta que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m \geq 1 - \frac{m}{N}$$

y haciendo ahora $m = n$, se obtiene la desigualdad deseada

$$1 - \frac{n}{N} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Como conclusión de la anterior desigualdad es importante hacer notar el hecho de *jugar todo de una sola vez resulta mejor que ir jugando de a poco*. Puede probarse, aunque no se hará aquí, que esta conclusión es válida casi para todos los juegos de azar.

4) Una recepcionista recibió n sombreros totalmente desordenados, decidió entonces devolverlos a cada uno de sus dueños. Calcular la probabilidad de que ningún hombre reciba el suyo.

Solución:

El número de casos posibles es igual al de las permutaciones de n elementos, es decir, $n!$ De otro lado, como se requiere que ninguno de los n hombres reciba su sombrero, entonces el número de formas en que esto puede hacerse esta dado por el número de desarreglos con n elementos, es decir

$$n!\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Es claro que la anterior expresión corresponde al número de casos favorables, y por tanto la probabilidad requerida es el cociente de estos números, es decir,

$$\frac{n!\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]}{n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Según el enfoque frecuencial, si el número de repeticiones aumenta (en este caso si el número de sombreros es mayor) el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles se estabiliza entorno a un valor particular, dicho valor no es más sino la probabilidad de que ningún hombre reciba su propio sombrero, que en nuestro ejemplo se calcula así:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=e^{-1}\approx 0{,}37$$

en virtud de la serie de Taylor para e^x.

2.4. Probabilidad Condicional

Se lanza un dado cargado y se sabe que el resultado es un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que este número sea divisible por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que una criatura padezca de daltonismo, en el supuesto de que es un niño? Estas preguntas pueden formularse de la siguiente forma: Sean A y B sucesos de un espacio muestral Ω. Si ocurre B, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra A? esto no es lo mismo que preguntar cuál es la probabilidad del suceso $A \cap B$. En realidad cuando $A = B$ la pregunta es: Si A ocurre, ¿cuál es la probabilidad de que A ocurra?. La respuesta sería en este caso 1, y esta puede ser o no la probabilidad del suceso $A \cap B$. Para tratar tales problemas en general, volvamos al caso del dado. Cuando nos ocupamos de cuestiones de probabilidad relativas al lanzamiento de un dado, utilizamos ordinariamente como espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y asignamos la probabilidad $\frac{1}{6}$ a cada elemento de Ω. El suceso divisible entre 3 es el subconjunto $A = \{3, 6\}$ y el suceso par es el subconjunto $B = \{2, 4, 6\}$. Deseamos conocer la probabilidad de que un elemento este en A, sabiendo ya que está en B. Ya que estamos interesados en resultados en los que el número es par, prescindimos de los resultados $1, 3, 5$ y utilizamos, en lugar de Ω el conjunto $B = \{2, 4, 6\}$ como espacio muestral. El suceso que nos interesa es tan sólo el conjunto de un elemento $\{6\}$, que es el único resultado del nuevo espacio muestral divisible por 3. Si todos los resultados de B se consideran igualmente probables, hay que asignar a cada uno de ellos la probabilidad $\frac{1}{3}$, luego, la probabilidad de $\{6\}$ es también $\frac{1}{3}$. Obsérvese que se ha resuelto el problema anterior empleando una idea muy elemental. Simplemente hemos cambiado el espacio muestral Ω por B y se ha procedido a una nueva asignación de probabilidades. Esto nos sugiere la manera de generalizar el procedimiento. Sean A y B dos eventos de un espacio muestral Ω. Nos preguntamos entonces la siguiente cuestión: Si B acontece, ¿cuál es la probabilidad de que A ocurra? Como en el ejemplo anterior, podemos cambiar el espacio muestral Ω por el B y asignar nuevas probabilidades. Para el mismo B asignamos la probabilidad 1. Puesto que nos interesa los elementos de A que pertenecen al nuevo espacio muestral B, nuestro problema es calcular la probabilidad del suceso $A \cap B$ según las nuevas probabilidades asignadas. Esto es, si P' representa la función de probabilidad asociada al nuevo espacio muestral B, tenemos que calcular $P'(A \cap B)$. Es fácil comprobar que si se define

$$P'(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ con } P(B) > 0$$

Entonces P' constituye una función de probabilidad sobre B, como lo probaremos a continuación.

Sea $A \subseteq B$, entonces

$$P'(A) = P'(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1 \,\text{porque } P(A \cap B) \leq P(B),$$

y como $P(A\cap B)\geq 0$ y $P(B)>0$, se obtiene que $P'(A)\in[0,1]$. Con esto se satisface la condición 1 de la definición (2,1).

De otro lado,

$$P'(\emptyset)=P'(\emptyset\cap B)=\frac{P(\emptyset\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\emptyset)}{P(B)}=0,$$

y

$$P'(B)=P'(B\cap B)=\frac{P(B\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$

y así se satisface la condición 2 de la definición (2.1) .

Finalmente, sean A y C dos subconjuntos de B, tales que $A\cap C=\emptyset$, entonces

$$\begin{aligned}
P'(A\cup C) &= P'(B\cap(A\cup C))\\
&= \frac{P(B\cap(A\cup C))}{P(B)}\\
&= \frac{P((B\cap A)\cup(B\cap C))}{P(B)}\\
&= \frac{P(B\cap A)+P(B\cap C)-P(B\cap A\cap C)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B\cap A)+P(B\cap C)-P(B\cap\emptyset)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B\cap A)+P(B\cap C)-P(\emptyset)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B\cap A)+P(B\cap C)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B\cap A)}{P(B)}+\frac{P(B\cap C)}{P(B)}\\
&= P'(A\cap B)+P'(C\cap B)\\
&= P'(A)+P'(C).
\end{aligned}$$

Consideremos un experimento que consiste en lanzar un dado no cargado. Sea Ω el espacio muestral de este experimento, es decir,

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},$$

sean además

$$A=\{2,4,6\}\text{ y }B=\{1,2,4\}.$$

Entonces, según Laplace,

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=P(A).$$

Esta es la probabilidad en que puede ocurrir B *a priori*, es decir, antes de que el experimento sea realizado.

Supongamos ahora que una vez se ha realizado el experimento *se sabía* que el resultado del mismo era un número par, esto es, A ocurrió.

Definición 2.2. *Dados dos eventos A y B, la* probabilidad condicional de B dado A *es el número* $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. *Representaremos este número por el símbolo $P(B|A)$. Tenemos entonces*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Se observa que este número solamente está definido cuando $P(A) > 0$.

La ecuación anterior se escribe también como

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Si $P(B) > 0$ también se tiene que

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B),$$

y por tanto,

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)}.$$

Proposición 2.4. *Sea A tal que $P(A) > 0$. Entonces,*

$$\begin{aligned} &a)\ P(\emptyset|A) = 0,\ \ P(\Omega|A) = 1,\ \ 0 \leq P(B|A) \leq 1. \\ &b)\ P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A),\ \ si\ B \cap C = \emptyset. \end{aligned}$$

Demostración.

$$a) P(\emptyset|A) \equiv \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$

$$P(\Omega|A) \equiv \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

$$P(B|A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0 \text{ de otro lado, como } A \cap B, \text{ entonces } P(A \cap B) \leq P(A)$$

y por tanto,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$$

$$
\begin{aligned}
b) P((B \cup C)|A) &\equiv \frac{P(A \cap (B \cup C)}{P(A)} \\
&= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap (B \cap C))}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap \emptyset)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(\emptyset)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \\
&= P(B|A) + P(C|A).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposición 2.5. *Si* $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$*, entonces*

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \cdots \\
&\cdots \; P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}))
\end{aligned}
$$

Demostración. Claramente para dos conjuntos A_1 y A_2 se tiene que

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_1|A_2),$$

en virtud de la definición (2.2).

Veamos que la afirmación es válida para tres conjuntos A_1, A_2 y A_3. Es importante notar que el evento condicionado es, en este caso, A_3. Entonces,

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}.$$

De aquí se sigue que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2),$$

y recordando que

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_1|A_2),$$

se concluye el resultado

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_1|A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Supongamos ahora que el resultado es válido para k conjuntos, esto es,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\ldots\ P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}). \end{aligned}$$

Se probará que la afirmación también se cumple para $k+1$ conjuntos.

$$P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1})}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k)},$$

por tanto

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\ &\cdot\ P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k), \end{aligned}$$

y de la hipótesis de inducción se sigue

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\cdots\ P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &\cdot\ P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k), \end{aligned}$$

lo que demuestra la afirmación. □

Proposición 2.6 (Teorema de la probabilidad total). *Si B es un evento contenido en una unión de eventos disyuntos*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

y

$$P(A_1) > 0,\ P(A_2) > 0,\ \ldots,\ P(A_n) > 0,$$

entonces

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Demostración. Como $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, entonces

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

además, como la colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es disjunta, se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = \emptyset,$$

por tanto

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i) \right) \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.7 (Teorema de Bayes)**.** *Con las mismas condiciones que la proposición anterior, si $P(B) > 0$, entonces, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, se tiene que*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

Demostración. Por definición,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}.$$

Y en virtud de la proposición (2.5), se obtiene el resultado. $\square$

Ejemplo:

Durante el mes de agosto, la probabilidad de lluvia en un día determinado es de $\frac{2}{5}$. El atlético Bucaramanga gana un juego en un día lluvioso, con probabilidad $\frac{3}{5}$; y en un día sin lluvia con probabilidad de $\frac{2}{5}$. Si se sabe que el atlético Bucaramanga ganó un juego en aquel día de agosto, ¿Cuál es la probabilidad de que en ese día haya llovido?

Solución.

Sean L y G los siguientes eventos:

$L \equiv$ aquel día de agosto llovió y $G \equiv$ el atlético Bucaramanga ganó un juego aquel día.

Lo que se desea saber es la probabilidad $P(L|G)$, entonces

$$\begin{aligned} P(L|G) = \frac{P(L \cap G)}{P(G)} &= \frac{P(L) \cdot P(G|L)}{P(L) \cdot P(G|L) + P(L^c) \cdot P(G|L^c)} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

El principio de Inclusión-Exclusión en probabilidad

El principio de inclusión-exclusión tiene una historia interesante, al principio se le encuentra en distintos manuscritos con nombres como el método de la criba o el principio de clasificación cruzada. La versión de este principio desde el punto de vista de la teoría de conjuntos se encuentra en Doctrine of chances (1718), un texto de teoría de probabilidad de Abraham DeMoivre (1667-1754). Un poco antes, en (1708), Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) usó la idea subyacente al principio en su solución del problema que por lo general se conoce *le probléme des rencontres* o emparejamientos. (En este antiguo juego de cartas francés, las 52 cartas de una primera baraja se disponen hacia arriba en una fila, quizá sobre una mesa. Luego se reparten otras 52 cartas de una segunda baraja, y cada carta nueva se pone sobre cada una de las 52 cartas previamente colocadas sobre la mesa. La puntuación del juego se determina contando los emparejamientos resultantes: deben coincidir el valor de la carta hacia arriba y el de la repartida).

Una demostración elegante de este principio se debe al matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897). Este brillante matemático también hizo grandes contribuciones a la teoría de ecuaciones; la teoría de matrices y determinantes y a la teoría de invariantes que fundó junto a Arthur Cayley (1821-1895). La importancia de este teorema no fue apreciada en general, fue sólo después de la publicación de los trabajos de W. A. Whitworth que los matemáticos tuvieron más conciencia de su potencial y uso.

Se hace ahora una demostración del principio de inclusión-exclusión de la teoría de conjuntos en su versión general, la cual se extiende a este principio en forma probabilística.

Lema 3.1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $m < n$. Entonces*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!\ m!} + \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \\
&= \frac{(n-m)(n-1)! + m(n-1)!}{(n-m)!\ m!} \\
&= \frac{n(n-1)! - m(n-1)! + m(n-1)!}{(n-m)!\ m!} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!\ m!} = \binom{n}{m}
\end{aligned}$$

□

Si $p, j \in \mathbb{N}$ y $k = 0, 1, \ldots, j$; haciendo $n = p + j$ y $m = j - k$, se deduce que

$$\binom{p+j}{j-k} = \binom{p+j-1}{j-k} + \binom{p+j-1}{j-k-1},$$

de aquí se infiere que

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{p-j}{j-k} = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left[\binom{p+j-1}{j-k} + \binom{p+j-1}{j-k-1}\right]$$

Teorema 3.1. *Sea Ω un conjunto, sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de Ω y definase*

$$\begin{aligned}
S_0 &= |\Omega|; \\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} |A_i|; \\
S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|; \\
S_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Entonces:

a) *El número de elementos de Ω que pertenecen a exactamente p $(p \leq n)$ de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:*

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^k S_{p+k};$$

b) *El número de elementos de Ω que pertenecen a por lo menos p $(p \leq n)$ de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:*

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k-1}^k S_{p+k};$$

c) *El número de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es:*

$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Demostración. Sea Ω un conjunto.
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de Ω y sean

$$\begin{aligned}
S_0 &= |\Omega|; \\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} |A_i|; \\
S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|; \\
S_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

entonces:

a) El número de elementos de Ω que pertenecen a exactamente p $(p \leq n)$ de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k}{k} S_{p+k}.$$

Claramente si un elemento de Ω que pertenece a menos de p de los conjuntos

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

este no es contado en la suma a_p, lo que debemos probar es que si un elemento de Ω pertenece exactamente a p conjuntos de la colección $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces este es contado una vez en la suma a_p y que si un elemento pertenece a más de p de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces este no es contado en la suma a_p.

Ahora, la suma a_p es

$$\binom{p}{0}S_p - \binom{p+1}{1}S_{p+1} + \binom{p+2}{2}S_{p+2} - \cdots + (-1)^{n-p}\binom{n}{n-p}S_n.$$

Un elemento de Ω que pertenece exactamente a p de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es contado una vez en S_p y no es contado en $S_{p+1}, S_{p+2}, \ldots, S_n$. Luego, él es contado $\binom{p}{0} \cdot 1 = 1$ vez.

Un elemento de Ω que pertenece exactamente a $p+j$ $(j > 0, p+j \leq n)$ de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es contado en $\binom{p+j}{p}$ de las partes de S_p, en $\binom{p+j}{p+1}$ de las partes de S_{p+1} y así sucesivamente.

Luego, el número de veces que es contado en la suma a_p es:

$$\begin{aligned}
\binom{p}{0}\binom{p+j}{p} - \binom{p+1}{1}\binom{p+j}{p+1} + \cdots + (-1)^{n-p}\binom{n}{n-p}\binom{p+j}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{p+k}{k}\binom{p+j}{p+k} \\
&= \sum_{k=0}^{j}\frac{(p+k)!(p+j)!}{k!p!(p+k)!(j-k)!} \\
&= \frac{(p+j)!}{p!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{1}{k!(j-k)!} \\
&= \frac{(p+j)!}{p!j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} \\
&= \binom{p+j}{p}(1-1)^j = 0,
\end{aligned}$$

porque $\displaystyle\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} = 0$, en virtud del lema (1.1).

b) El número de elementos de Ω que pertenecen a por lo menos p $(p \leq n)$ de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\binom{p+k-1}{k}S_{p+k};$$

Como en este caso se cuentan los elementos de Ω que pertenecen a p o más conjuntos resulta que

$$b_p = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

y entonces

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k}{k} S_{p+k} + \sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \binom{p+1+k}{k} S_{p+1+k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-p-2} (-1)^k \binom{p+2+k}{k} S_{p+2+k}$$

$$+ \cdots + \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{n-1+k}{k} S_{n-1+k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{n+k}{k} S_{n+k}.$$

El coeficiente de S_{p+j} $(0 \leq j \leq n-p)$ en el segundo miembro es

$$(-1)^j \binom{p+j}{j} + (-1)^{j-1} \binom{p+j}{j-1} + (-1)^{j-2} \binom{p+j}{j-2}$$

$$+ \cdots + (-1)^1 \binom{p+j}{1} + (-1)^0 \binom{p+j}{0}$$

$$= (-1)^j \left[\binom{p+j-1}{j} + \binom{p+j-1}{j-1} \right]$$

$$+ (-1)^{j-1} \left[\binom{p+j-1}{j-1} + \binom{p+j-1}{j-2} \right]$$

$$+ (-1)^{j-2} \left[\binom{p+j-1}{j-2} + \binom{p+j-1}{j-3} \right]$$

$$+ \cdots + (-1)^1 \left[\binom{p+j-1}{1} + \binom{p+j-1}{0} \right]$$

$$+ (-1)^0 \binom{p+j-1}{0} = (-1)^j \binom{p+j-1}{j},$$

en virtud del lema (3.1)

Luego,

$$b_p = \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \binom{p+j-1}{j} S_{p+j} = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k S_{p+k}.$$

c) El número de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es

$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

$$\begin{aligned} b_1 &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{j}{j} \\ &= S_{j+1} S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n. \end{aligned}$$

Como caso particular cabe resaltar el hecho de que si $p = 0$, el caso a) se reduciría al conteo del número de permutaciones caóticas que, como se ha visto equivale a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k S_k \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \\ &= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

$\square$

De modo análogo, se prueba la versión probabilística del principio de Inclusión-Exclusión, teorema que veremos acontinuación.

Teorema 3.2. *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos y sean*

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1;\\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i);\\
S_2 &= \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j);\\
S_3 &= \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k);\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Entonces:

a) La probabilidad de ocurrencia de exactamente p de los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^{k} S_{p+k};$$

b) La probabilidad de ocurrencia de por lo menos p de los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es:

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k-1}^{k} S_{p+k};$$

c) La probabilidad de ocurrencia del evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es:

$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

que en general puede escribirse como

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j:\ i<j} P(A_i \cap A_j)\\
&+ \sum_{i,j,k:\ i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),
\end{aligned}$$

que puede escribirse de forma compacta como

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\};\ |I|=k} P(A_I)$$

Donde la última suma recorre los subconjuntos I de índices $1, 2, \ldots, n$ que contienen exactamente k elementos y

$$A_I = \bigcap_{i\in I} A_i$$

d) *La probabilidad de que ninguno de los eventos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ocurra es:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k S_k \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

3.1. Ejemplos y algunas aplicaciones

i) Se arroja un dado dos veces. Sean los eventos

$$A = \{\text{La suma de los resultados es par}\}$$

$$B = \{\text{La suma de los resultados es 8}\}$$

$$C = \{\text{Ambos resultados son distintos}\}$$

calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - C$.

Solución

Si Ω representa el espacio muestral de este experimento, entonces $|\Omega| = 36$, de hecho

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Ahora bien, como la suma de dos números pares o impares es par, se deduce que en cada fila de la matriz anterior habrá 3 parejas cuya suma sea par; y por tanto

$$|A| = 18.$$

Se aprecia también que en la primera fila de la matriz Ω no hay ninguna pareja de resultados cuya suma sea 8; y que en cada una de las filas restantes existe una única pareja con esta condición, así que

$$|B| = 5.$$

De igual forma se observa que las únicas parejas que tienen resultados iguales, es decir, aquéllas cuyas componentes tienen el mismo valor se encuentran ubicadas en la diagonal principal de la matriz, y dado que en esta diagonal hay 6 parejas de resultados, se obtiene

$$|C| = 30.$$

De otro lado se observa que hay solo una pareja de resultados que satisfaga la ecuación $a+b=8$ en cada fila de Ω con excepción de la primera, con la condición de que a y b tengan la misma paridad. Además, como la suma de los resultados de cualquier pareja de la diagonal principal siempre es par y las componentes de éstas parejas son iguales, habrá entonces sólo dos parejas de resultados cuya suma sea par y cuyos elementos sean distintos por cada fila de la matriz Ω. Se sigue que

$$|A \cap B| = 5.$$

y

$$|A \cap C| = 12.$$

Finalmente, por lo mencionado antes, se tiene que

$$|A - C| = 6$$

Con estos valores es posible determinar las probabilidades pedidas, así

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{36},$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{36} - \frac{5}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{5}{36},$$

$$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P(A - C) = \frac{|A - C|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

ii) Sea A un conjunto finito tal que $|A| = n$. ¿Cuántas son las funciones $f : A \longrightarrow A$ para las cuales la ecuación $f(x) = x$ no posee solución? ¿Cuántas son las funciones

$f : A \longrightarrow A$ biyectivas para las cuales la ecuación $f(x) = x$ no posee solución?

Solución

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Para responder la primera pregunta basta contar el número de formas en que puede ser enviado un elemento a_i del conjunto A en cualquier otro elemento de A distinto de a_i. Veamos que el número de formas en que puede hacerse esto está dado por $(n-1)^n$.

En efecto,

$$\begin{array}{ccc} f : A & \longrightarrow & A \\ a_1 & \longmapsto & \{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\} \\ a_2 & \longmapsto & \{a_1, a_3, a_4, \ldots, a_n\} \\ a_3 & \longmapsto & \{a_1, a_2, a_4, \ldots, a_n\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \longmapsto & \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\} \end{array}$$

En la tabla anterior se observa que cada elemento a_i de A puede ser enviado a cualquier elemento de A, distinto de a_i, de $n-1$ formas diferentes. En virtud del teorema (1.1) se tiene que el número de funciones que satisfacen la condición pedida es $(n-1)^n$, como se afirmó.

Para responder la segunda pregunta debe contarse el número de funciones *biyectivas* definidas de A en A. En este caso se considera que para cualesquiera $a_i, a_j \in A$, $a_i \neq a_j$, si y sólo si $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Como se exige biyectividad sobre la función, entonces debe tenerse que

$$f(A) = A,$$

y

$$\forall\ a_i, a_j \in A, \text{ con } i \neq j, f(a_i) \neq f(a_j).$$

La primera condición anterior equivale a

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\},$$

pero además debe tenerse que $f(a_i) \neq a_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y por tanto el conjunto $f(A)$ debe ser una permutación caótica del conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Como se vio en (1.1), el número de permutaciones caóticas de un conjunto con n elementos está dado por

$$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

La aplicación a la probabilidad de este ejercicio la brinda la siguiente situación.

En ocasión del día del amor y la amistad, un grupo de 9 personas resolvió planear el juego del amigo oculto (o secreto). Fue escrito el nombre de cada persona en un papelito y se procedió al sorteo para determinar quien le daría regalo a quien. Hecho el sorteo, luego apareció alguien que se sacó así mismo, yendo contra las reglas del juego que esto suceda y para preservar el sigilo, fue necesario hacer otro sorteo. En el segundo sorteo, el mismo fenómeno ocurrió, esta vez con otra persona. Uno de los jugadores presentes preguntó: ¿Eso va a acontecer toda la vida? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?

Es claro que dentro de un conjunto de 9 personas, el número de formas posibles en que una de ellas puede elegir a otra dentro de ese conjunto es 9!, sin importar que se elija a ella misma o no. Ahora bien, el número de formas en que una persona no se elige a sí misma es D_9, como se vio anteriormente; y por tanto la probabilidad de que una persona no se elija a sí misma es

$$\frac{D_9}{9!} = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k!} \approx 0,36788.$$

iii) Un número entre 1 y 1000 es escogido aleatoriamente. Calcular la probabilidad de que sea divisible exactamente por dos números del conjunto $\{2, 3, 7, 10\}$ y divisible entre por lo menos dos de tales números.

Solución

Sean

$$\Omega = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 1000\};$$

$$A = \{x \in \Omega : 2|x\};$$

$$B = \{x \in \Omega : 3|x\};$$

$$C = \{x \in \Omega : 7|x\};$$

$$D = \{x \in \Omega : 10|x\}.$$

Puesto que

$$
\begin{aligned}
S_0 &= |\Omega| = 1000;\\
S_1 &= |A| + |B| + |C| + |D|\\
&= \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{10}\right]\\
&= 500 + 333 + 142 + 100 = 1075;\\
S_2 &= |A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C| + |B\cap D| + |C\cap D|\\
&= \left[\frac{1000}{6}\right] + \left[\frac{1000}{14}\right] + \left[\frac{1000}{10}\right] + \left[\frac{1000}{21}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right]\\
&= 166 + 71 + 100 + 47 + 33 + 144 = 431;\\
S_3 &= |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D|\\
&= \left[\frac{1000}{42}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right] + \left[\frac{1000}{210}\right]\\
&= 23 + 33 + 14 + 4 = 74;\\
S_4 &= |A\cap B\cap C\cap D| = \left[\frac{1000}{210}\right] = 4.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, el número de elementos que pertenecen a exactamente dos de los conjutos A, B, C, D es:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k C_{2+k}^{k} S_{2+k}\\
&= (-1)^0 C_2^0 S_2 + (-1)^1 C_3^1 S_3 + (-1)^2 C_4^2 S_4\\
&= S_2 - 3S_3 - 6S_4\\
&= 431 - 3\cdot 74 + 6\cdot 4 = 233,
\end{aligned}
$$

Por tanto la probabilidad de que un número entre 1 y 1000 sea divisible exactamente por dos números del conjunto $\{2, 3, 7, 10\}$ es:

$$\frac{233}{1000}.$$

El número de elementos que pertenecen a por lo menos dos de los conjuntos A, B, C, D es:

$$\begin{aligned}
b_2 &= \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k C_{2+k-1}^{k} S_{2+k} \\
&= (-1)^0 C_1^0 S_2 + (-1)^1 C_2^1 S_3 + (-1)^2 C_3^2 S_4 \\
&= S_2 - 2S_3 + 3S_4 \\
&= 431 - 2 \cdot 74 + 3 \cdot 4 = 295,
\end{aligned}$$

Por tanto la probabilidad de que un número entre 1 y 1000 sea divisible entre por lo menos dos números del conjunto $\{2, 3, 7, 10\}$ es:

$$\frac{295}{1000} = \frac{59}{200}.$$

iv) Si $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ y $P(B \cap C) = 0$. Calcule:

1. $P(A \cup B \cup C)$
2. $P(A - (B \cup C))$
3. $P(A \cap (B \cup C))$
4. $P(C \cup (A \cap B))$

Solución

1) Como $A \cap B \cap C \subset B \cap C$ y $P(B \cap C) = 0$, entonces $P(A \cap B \cap C) = 0$, luego

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\
&+ P(A \cap B \cap C) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - 0 + 0 = \frac{43}{60}.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
P(A-(B\cup C)) &= P(A)-P(A\cap(B\cup C))\\
&= P(A)-P((A\cap B)\cup(A\cap C))\\
&= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P((A\cap B)\cap(A\cap C))\\
&= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+0=\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

3) Puesto que $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, se deduce entonces que

$$\begin{aligned}
P[(A\cap(B\cup C)] &= P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]\\
&= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P[(A\cap B)\cap(A\cap C)]\\
&= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\\
&= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}-0=\frac{11}{30}.
\end{aligned}$$

4) Dado que $P(B\cap C)=0$, entonces $B\cap C=\emptyset$, y por tanto $A\cap B\cap C=\emptyset$.
Luego es

$$P(C\cup(A\cap B))=P(C)+P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0=\frac{9}{20}.$$

v) Si $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{10}$ y $P(B\cap C)=\frac{1}{10}$, $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{12}$. Determine la probabilidad de ocurrencia de:

1. Exactamente uno de los eventos A,B,C;

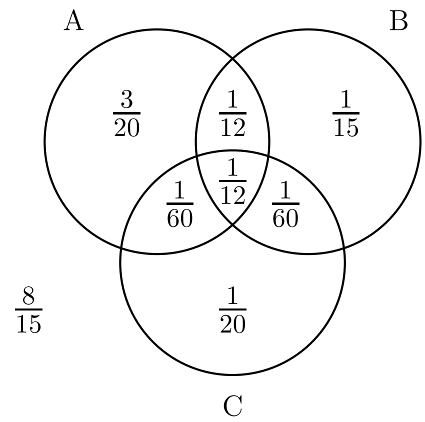
2. Exactamente dos de los eventos A,B,C;

3. Por lo menos dos de esos eventos;

4. A lo sumo dos de esos eventos;

5. A lo sumo uno de esos eventos.

solución



Se observa que la probabilidad de que ocurran *solamente* los eventos A, B o C está dada por $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{20}$, respectivamente, por lo tanto la pregunta 1 tiene por respuesta

$$\frac{3}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4}{15}.$$

De igual forma las probabilidades de que ocurran exactamente los eventos $A \cap B$, $A \cap C$ o $B \cap C$ están dadas por $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{60}$ y $\frac{1}{60}$, respectivamente; así que la probabilidad de que ocurran exactamente dos de estos eventos es

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60}.$$

Para responder a la tercera pregunta, debe sumársele al resultado anterior la probabilidad de que los tres eventos sucedan, por tanto la probabilidad de que ocurran por lo menos dos de esos eventos es

$$\frac{7}{60} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5}.$$

Si suceden a lo sumo dos de los eventos A, B o C, puede ocurrir entonces que ningún evento suceda, que exactamente uno de los eventos suceda o que exactamente dos de esos eventos ocurran, así que para la pregunta 4 tenemos

$$\frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{7}{60} = \frac{11}{12}.$$

Finalmente, si no sucede ninguno de los eventos A, B o C, o bien si solamente ocurre exactamente uno de tales eventos, se tendrá que a lo sumo ha ocurrido uno de tales eventos, así, para la pregunta 5 tenemos

$$\frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4}{5}.$$

$vi)$ Sean $p \in [0,1]$ y sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones de eventos de espacio muestral Ω tales que $P(A_n) \longrightarrow 1$ y $P(B_n) \longrightarrow p$. Demostrar que $P(A_n \cap B_n) \longrightarrow p$.

Solución.

Sea n un número natural, entonces se tiene que

$$P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n), \tag{3.1}$$

que no es más que el principio de inclusión-exclusión aplicado a los eventos A_n y B_n.

Ahora bien, si logramos mostrar que $P(A_n \cup B_n) \longrightarrow 1$, la afirmación quedará probada.

En efecto,

dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$A_n \subseteq A_n \cup B_n,$$

y en virtud de la proposición (2.2)

$$P(A_n) \leq P(A_n \cup B_n) \leq 1.$$

Como $P(A_n) \longrightarrow 1$, el teorema del emparedado para sucesiones garantiza que

$$P(A_n \cup B_n) \longrightarrow 1.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la ecuación (3.1) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} [P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n)],$$

esto es,

$$1 = 1 + p - \lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n),$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = 1 + p - 1,$$

es decir

$$P(A_n \cap B_n) \longrightarrow p,$$

como se pedía demostrar.

$vii)$ Sean (Ω, P) un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos en $A \subseteq \Omega$. Mostrar que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

donde A_i^c es el complemento del subconjunto A_i de A.

Solución.

Se sabe que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c. \tag{3.2}$$

Y por tanto, en virtud de la proposición (2.1) y (3.2), que

$$P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\right] = 1 - P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c\right] \tag{3.3}$$

Sean A_i y A_j dos subconjuntos cualesquiera de la colección $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se tiene entonces que

$$P(A_i^c \cup A_j^c) = P(A_i^c) + P(A_j^c) - P(A_i^c \cap A_j^c),$$

luego

$$P(A_i^c \cup A_j^c) \leq P(A_i^c) + P(A_j^c).$$

Puede probarse que esta desigualdad también es válida para cualesquiera tres subconjuntos A_i, A_j, y A_k de A, esto es,

$$P(A_i^c \cup A_j^c \cup A_k^c) \leq P(A_i^c) + P(A_j^c) + P(A_k^c).$$

De manera general, en uso del teorema (3.2) parte c, se cumple que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c),$$

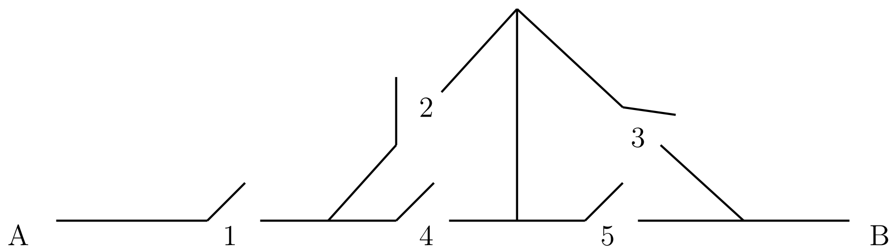
y entonces

$$1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) \leq 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right),$$

por lo tanto, en uso de (3.3), se obtiene el resultado

$$1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

viii) La probabilidad de que cada relé del circuito presentado en la figura esté cerrado es igual a p, $0 < p < 1$



Si todos los relés funcionan independientemente, ¿Cuál es la probabilidad de que haya corriente circulando entre los terminales A y B?

Solución:

Sea A_i el evento que ocurre si el relé está cerrado, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sea C el evento que ocurre si hay corriente entre los terminales A y B. Queremos calcular $P(C)$.

Tenemos entonces;

$$\begin{aligned}
P(C) &= P((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_4 \cap A_3)) \\
&= P((A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) + \\
&+ P(A_1 \cap A_4 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - \\
&- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - \\
&- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + \\
&+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + \\
&+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&= 4p^3 - p^5 - 4p^4 - p^5 + 4p^5 - p^5 \\
&= 4p^3 - 4p^4 + p^5.
\end{aligned}$$

En el cálculo se ha utilizado la fórmula para hallar probabilidad de la unión de 4 eventos no disyuntos y el hecho de que los eventos son independientes.

Se obtiene una solución mas simple para el problema si prestamos más atención a la estructura del circuito. Observe que para circular la corriente entre A y B es necesario que el relé 1 esté cerrado y que por lo menos uno de los relés entre 2 y 4 y por lo menos uno entre 3 y 5 también esté cerrado.

Así

$$C = A_1 \cap (A_2 \cup A_4) \cap (A_3 \cup A_5),$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(A_1)\cdot P(A_2\cup A_4)\cdot P(A_3\cup A_5)\\
&= P(A_1)\cdot (P(A_2)+P(A_4-P(A_2\cap A_4))\cdot (P(A_3)+P(A_5)-P(A_3\cap A_5))\\
&= p\cdot (p+p-p^2)\cdot (p+p-p^2)\\
&= 4p^3-4p^4+p^5.
\end{aligned}$$

ix) Se tienen N bolas numeradas $1,2,\ldots,N$ y N cajas numeradas. Se disponen al azar una bola en cada caja. Si coincide el número de la bola con el de la caja se dice que se produjo un apareamiento.

1. Hallar la probabilidad de que ocurra por lo menos un apareamiento.
2. Probar que el límite de dicha probabilidad cuando $N\longrightarrow\infty$ es $1-e^{-1}$.
3. n parejas casadas se han reunido a bailar. Si Cada caballero tienen la misma probabilidad de bailar con cualquier dama, ¿cuál es la probabildad de que ningún caballero baile con su propia mujer?

Solución.

a) Sea $A\subset\Omega$ el evento *ocurre por lo menos un apareamiento.* Es claro que el número de formas en que una de las N bolas puede ocupar una caja está dado por $N!$, es decir

$$S_0=|\Omega|=N!$$

Ahora bien, ocurrirá por lo menos un apareamiento en b_1 casos, siendo

$$b_1=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{1+k-1}{k}S_{1+k}=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kS_{1+k},$$

en virtud del teorema (3.1) parte b.

Por lo tanto la probabilidad de que ocurra por lo menos un apareamiento está dada por

$$p(A)=\frac{b_1}{S_0}=\frac{b_1}{N!} \tag{3.4}$$

De otro lado,

$$b_1+D_N=\left(\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kS_{1+k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^kS_k\right)=S_0=N!$$

luego

$$b_1=N!-D_N$$

y entonces (3.4) queda ahora

$$p(A) = \frac{b_1}{N!} = \frac{N! - D_N}{N!} = 1 - \frac{D_N}{N!} = 1 - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Esta es la probabilidad de que ocurra por lo menos un aparaeamiento.

b) $\lim\limits_{N\to\infty} p(A) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1}$, en virtud del teorema de Taylor.

c) Supongamos que la primera pareja recibe un distintivo con el número 1, la segunda con el 2 y así hasta la n-ésima pareja. Entonces existen $n!$ maneras de que un hombre de esta lista elija a una mujer, y por tanto

$$|\Omega| = n!$$

De otro lado, el número de casos en que ningún hombre escoge a su mujer equivale al hecho de que los bailarines no estén numerados con el mismo número, esto es, el número de formas en que ningún hombre baila con su mujer coincide con el número de permutaciones caóticas del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Así, el número de casos favorables en este experiemento vale

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Se sigue que la probabilidad de que ningún caballero baile con su propia mujer es

$$\frac{n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Conclusiones

Desde el comienzo de este trabajo de grado mi intención fue la de relacionar el principio de inclusión-exclusión, así como los resultados que de él se desprenden (por ejemplo el conteo de permutaciones caóticas de un conjunto finito), entre otras técnicas de conteo, con la resolución de problemas de probabilidad. En mi opinión creo que esto fue lo que anteriormente se hizo, razón por la cual se concluye que

1. Aplicamos el principio de inclusión-exclusión y sus resultados en situaciones de probabilidad donde se involucraba el conteo de subconjuntos de un conjunto universal finito que satisface propiedades determinadas.

2. Se dedujo el principio de inclusión-exclusión generalizado, el cual determina la cantidad de elementos de la unión finita de conjuntos finitos aplicados a problemas de probailidad.

3. Resolvimos situaciones de probabilidad usando las consecuencias del principio de inclusión-exclusión generalizado, así como otras técnicas de conteo.

Referencias Bibliográficas

[1] Morgado, Augusto C.O; Carvalho, João B.P. de; Carvalho Paulo C.P. de; Fernandez, Pedro, *Análise Combinatória e Probabilidade*. IMPA, 1991.

[2] José P. Carneiro. *O problema do amigo oculto*. RPM 28.

[3] Apostol, Tom M. Cálculo con funciones en varias variables y álgebra lineal con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Editorial Reverté, Barcelona, segunda edición, 1986.

[4] B. Del Mas, J. Garfield y B. Chance (1999). A Model of Classroom Research in Action: Developing Simulation Activities to Improve Students' Statistical Reasoning. Journal *of Statistics Education* v.7, n.3.

[5] T. Erickson. (2006). Using simulation to learn about inference. Brasil: International Conference on Teaching Statistics - ICOTS-7.

[6] A. Rubin, J.K. Hammerman, C. Konold. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. Brasil: International Conference on Teaching Statistics - ICOTS-7.

[7] C. Batanero (2001). *Retos para la formación estadística de los profesores*. Didáctica de la matemática, Universidad de Granada, España.