El semigrupo inverso simétrico, el teorema de Pettis y la continuidad automática.

Karen Daniela Arana Romero

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

Siempre voy a estar agradecida con mi director Carlos Enrique Uzcátegui por haberme dado la oportunidad de ser su estudiante desde que inicié este hermoso camino de las matemáticas. Él es un ejemplo a seguir como persona, como docente y como líder. Como es bien sabido, es un matemático talentoso y apasionado. Valoro la suerte de poder aprender de él.

También agradezco a mis padres, Janeth Romero y Heriberto Arana, por confiar en mí y por creer en mis capacidades. Por brindarme su apoyo y su amor incondicional. Vivo por ellos y espero seguir siendo su orgullo.

Agradezco a mi segunda familia: Karen Isidro, Daniel Ojeda, Alejandro Sánchez, Edwar Ramirez, Angélica Oliveros, Astrid Contreras, la familia Villamizar Silva, Sebastián Velandia y Cesar Castro. Ellos son mis amigos y hermanos elegidos. A ellos que siempre han estado apoyándome en los buenos y malos momentos.

Finalmente agradezco la existencia de Milu. Llegó a mi vida para enseñarme que el amar es cuidar.

Tabla de Contenido

Resumen

Título: EL SEMIGRUPO INVERSO SIMÉTRICO, EL TEOREMA DE PETTIS Y LA CONTINUIDAD AUTOMÁTICA. *

Autora: KAREN DANIELA ARANA ROMERO. **

Palabras Clave: SEMIGRUPO INVERSO SIMÉTRICO, SEMIGRUPO POLACO, TEOREMA DE PETTIS, PROPIEDAD DE PETTIS.

Descripción: En el primer capítulo se presentan los preliminares que precisarán y organizarán los elementos básicos de la investigación. En el segundo capítulo presentamos el concepto de semigrupo polaco mostrando y estudiando tres ejemplos: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, S_∞ y $I(\mathbb{N})$, donde el semigrupo inverso simétrico y su topología son el centro fundamental para este trabajo. Estudiamos también un teorema que caracteriza a los semigrupos topológicos T_0 que son topológicamente isomorfos a los subsemigrupos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ver Teorema 2.1.6). El tercer capítulo es el más importante del trabajo. Tiene como objetivo generalizar el teorema de Pettis para semigrupos polacos. Con esto en mente, recordamos la demostración del teorema de Pettis, resultado que se usa para demostrar la continuidad automática en grupos polacos. Finalmente hemos introducido una nueva propiedad para semigrupos polacos, la cual hemos llamado propiedad de Pettis (ver 3.3). Mostramos ejemplos de semigrupos que tienen la propiedad y otros que no. Más específicamente, mostramos que $I(\mathbb{N})$ no tiene la propiedad de Pettis, sin embargo contiene el siguiente semigrupo inverso polaco que si la tiene: Sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ disjuntos dos a dos. Entonces el conjunto $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_\infty(B_i)\cup\{1_\emptyset\}$ es un semigrupo inverso polaco que tiene la propiedad de Pettis. Al final del tercer capítulo enunciamos algunas preguntas que surgieron naturalmente durante el desarrollo del trabajo y que consideramos interesantes.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: THE SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUP, PETTIS THEOREM AND THE AUTOMATHIC CONTINUITY *

Author: KAREN DANIELA ARANA ROMERO **

Keywords: SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUP, POLISH SEMIGROUP, PETTIS THEOREM, PETTIS PROPIETY.

Description: The first chapter presents the preliminaries that will specify and organize the basic elements of the investigation. In the second chapter we present the concept of the Polish semigroup studying three examples: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, S_∞ y $I(\mathbb{N})$, where the symmetric inverse semigroup and its topology are the fundamental center for this work. We also study a theorem that characterizes the topological semigroups T_0 that are topologically isomorphic to subsemigroups of $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (see Theorem 2.1.6). The third chapter is the most important of the work. It aims to generalize Pettis's theorem for Polish semigroups. With this in mind, we recall the proof of Pettis's theorem, a result that is used to prove automatic continuity in Polish groups. Finally we have introduced a new property for Polish semigroups, which we have called the Pettis property (see 3.3). We show examples of semigroups that have the property and others that do not. More specifically, we show that $I(\mathbb{N})$ it does not have the Pettis property, however it contains the following Polish inverse semigroup that does: Let $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ be a set of infinite subsets of $\mathbb{N}$ where the intersection of any two sets is empty. Then the set $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_\infty(B_i)\cup\{1_\emptyset\}$ is a Polish inverse semigroup that has the Pettis property. At the end of the third chapter we enunciate some questions that arose naturally during the development of the work and that we consider interesting.

---

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director by: Dr. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

Introducción

El estudio de grupos topológicos donde la topología es polaca (esto es, metrizable por un métrica completa y separable) ha recibido considerable atención en los últimos años (ver por ejemplo (Gao, 2008)). Un hecho particularmente interesante es que algunos grupos admiten una única topología polaca compatible con la estructura de grupo. En ese caso la fusión entre la topología y la estructura algebraica es completa. Se podría decir que la estructura algebraica lleva implícita una estructura de espacio polaco. Un ejemplo de este tipo de grupos es el grupo simétrico S_∞ sobre $\mathbb{N}$ con la topología producto que hereda de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ demostrado por R. Kallman (ver Teorema 3.2.4). Estos resultados están conectados con otro fenómeno interesante: la continuidad automática. Si G y H son grupos polacos y $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos medible Baire, entonces φ es automáticamente continua. La prueba de esos resultados hacen uso del teorema de Pettis que es una versión abstracta de un conocido resultado del análisis que dice que si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no magro con la propiedad de Baire, entonces $\{x - y : x, y \in A\}$ contiene un intervalo abierto alrededor del cero.

Por otra parte, más recientemente, también se ha estudiado un fenómeno similar pero en semigrupos. El semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la operación de composición admite una única topología polaca de semigrupo topológico: precisamente la topología producto (ver (Mesyan et al., 2018)). Otro semigrupo que ha sido estudiado es el semigrupo inverso simétrico $I(\mathbb{N})$, que consiste de todas las biyecciones entre subconjuntos de $\mathbb{N}$. Se sabe que el semigrupo inverso simétrico admite una única topología polaca que lo hace semigrupo inverso topológico (ver (Elliott et al., 2019a; Pérez, 2019)).

El teorema clásico de Cayley afirma que todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo simétrico. En el caso particular del grupo simétrico sobre $\mathbb{N}$, se estudió exactamente cuáles grupos polacos son isomorfos a subgrupos cerrados de $S_\infty(\mathbb{N})$ (ver el teorema 3.1.5). Sin incluir condiciones topológicas, algo similar se conoce para los subsemigrupos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ver el teorema 2.1.6). Por otra parte, el semigrupo inverso simétrico $I(X)$ también tiene una propiedad universal para la clase de semigrupos inversos, en efecto, el teorema de Wagner-Preston 2.3.3 afirma que todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo de $I(X)$ para algún conjunto X.

En este trabajo se continua esa línea de investigación enfocándonos en tratar de extender los resultados anteriores a la clase de semigrupos inversos polacos. Estudiamos los resultados antes mencionados sobre unicidad de topologías polacas sobre grupos, sobre la continuidad automática y el teorema de Pettis.

1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es precisar y organizar los elementos básicos de la investigación. Lo haremos concretando los conocimientos existentes de cada área y estableciendo la notación básica la cual será usada a lo largo de la tesis.

Inicialmente, para poder entender el concepto de grupo polaco es necesario recordar conceptos previos, los cuales clasificaremos en dos: topológicos y algebraicos. Finalmente

1.1. Preliminares topológicos

En esta sección definiremos algunos conceptos y propiedades topológicas que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1.1. Topología de la convergencia puntual. Sean (A, τ_A) y (B, τ_B). Decimos que $\mathcal{F} \subseteq B^A$ tiene la topología de la convergencia puntual si posee la topología de subespacio inducida por la topología producto.

Lema 1.1.2. Sean (A, τ_A), (B, τ_B) y $\mathcal{F} \subseteq B^A$ con la topología de la convergencia puntual. Entonces la familia $\{\{f \in \mathcal{F} : f(a) \in U\} : a \in A, U \in \tau_B\}$ es una subbase para la topología sobre $\mathcal{F}$.

Definición 1.1.3. X es un espacio polaco si está dotado de una topología que es separable y completamente metrizable.

A continuación se presentan algunos conjuntos que son espacios polacos:

1. $\mathbb{N}$ es un espacio polaco con la topología discreta.

2. Los espacios compactos metrizables.

3. $\mathbb{R}^n$, Cantor $2^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ y el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ver Sección 2.1) son espacios polacos, pues el producto numerable de espacios polacos es polaco. Una demostración de esta afirmación se puede ver en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020), Teorema 1.26.

4. El espacio de funciones continuas $C(X)$ con la métrica uniforme $d_u(f,g) = sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}$, siendo X métrico compacto. Este resultado es muy conocido. Una prueba se puede ver en la tesis (Guerrero Mojica, 2021), Teorema 1.18.

5. El grupo simétrico S_∞ (ver Sección 2.2).

Dos consecuencias del siguiente teorema es que el espacio de Cantor y el espacio de Baire, con la topología producto, son espacios polacos.

Teorema 1.1.4. ((Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020), Teorema 1.26) El producto de una colección numerable de espacios polacos es polaco con la topología producto.

El siguiente teorema es una herramienta para probar cuando un subespacio de espacio polaco es polaco; en particular, permite mostrar que el conjunto de los irracionales (como subespacio de $\mathbb{R}$) es un espacio polaco. Adicionalmente, recordemos que un subconjunto de un espacio topológico es G_δ si es la intersección de una colección numerable de abiertos.

Proposición 1.1.5. En los espacios métricos, los cerrados son G_δ.

Demostración. Veamos que todo cerrado se puede ver como la intersección numerable de abiertos básicos. Sean X un espacio métrico y $F \subseteq X$ un cerrado. Considere los abiertos $B_n = \bigcup\limits_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$. Es claro que $F \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$, por tanto sea $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que $x_n \in F$ y $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Por tanto $x_n \to x$. Como F es cerrado, entonces $x \in F$.

Concluimos que $F = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$. □

Teorema 1.1.6. (Alexandrov) Todo subconjunto G_δ de un espacio polaco es polaco.

Una demostración se puede consultar en el teorema 1.27 del libro (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020).

A continuación se presentan algunas aplicaciones del teorema de Alexandrov:

1. El conjunto de los irracionales son G_δ del espacio polaco $\mathbb{R}$.

2. El espacio de homeomorfismos $H(X)$ con la métrica uniforme d_u es G_δ en el espacio polaco $C(X)$, con X métrico compacto. Una prueba se puede ver en la tesis (Guerrero Mojica, 2021), Teorema 1.24.

3. El grupo simétrico S_∞ es G_δ en el espacio polaco $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ver Sección 2.2).

La recíproca de este teorema también se cumple (ver Teorema 1.28 en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020).)

El teorema de Alexandrov permite concluir que en los espacios polacos todo cerrado es polaco también; sin embargo, mostramos otra prueba para la misma afirmación.

Proposición 1.1.7. Si X es un espacio polaco y $Y \subseteq X$ subespacio cerrado, entonces Y es un espacio polaco.

Demostración. Veamos que la separabilidad se preserva en subespacios. Como X es separable, entonces es 2-numerable. Por tanto, si se toma la colección

$$B_y = \{B \cap Y \mid B \in B_X\},$$

siendo B_X una base numerable de X, concluimos que Y también es 2-numerable. Esto implica que Y es separable como subespacio (ver Teorema 5.39 en (Camargo and Villamizar, 2019)).
Veamos ahora que si d es una métrica completa en X, entonces su restricción a Y es también una métrica completa.
Sea $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ una sucesión $d-$Cauchy. Como X es completo, entonces existe $x \in X$ tal que $y_n \to x$. Por hipótesis Y es cerrado, entonces $x \in Y$. □

Un subconjunto de un espacio topológico es *magro* (también se le llama de primera categoría) si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte (o nunca densos), es decir, conjuntos tales que el interior de su clausura es vacío; y comagro si su complemento es magro. El ejemplo más conocido de conjunto magro son los racionales.

Proposición 1.1.8. La colección de conjuntos magros de un espacio topológico es un $\sigma-$ideal. Es decir, cualquier subconjunto de un conjunto magro es magro, y la unión de numerable de magros es magro.

Definición 1.1.9. Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ tiene la *propiedad de Baire* si existe $B \subseteq X$ abierto tal que $A \triangle B$ es magro.

Si X es un espacio topológico, llamaremos $PB(X,\tau)$ (o simplemente PB cuando X y τ puedan sobreentenderse) a la colección de subconjuntos de X que tienen la propiedad de Baire. Por otro lado, note que los conjuntos densos en ninguna parte y magros tiene la propiedad de Baire. Las siguientes dos afirmaciones se usarán en el Capítulo 3.

Proposición 1.1.10. Sean X un espacio topológico, U un abierto y $A \subseteq U$. Si A es magro en X, entonces A es magro en U.

Demostración. Como A es magro en X, existe una colección $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos nunca densos en X que cumple que $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i$. Recordemos que $Cl_U(A) = U \cap Cl_X(A)$, y notando que una consecuencia de que U sea abierto es que $Int_U(A) \subseteq Int_X(A)$, entonces

$$Int_U(Cl_U(Y_i)) \subseteq Int_X(Cl_X(Y_i)) = \emptyset,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. De aquí se deduce que A es magro en U. □

Proposición 1.1.11. Sean X un espacio topológico, $U \subseteq X$ un abierto y $A \subseteq U$ un conjunto no magro con la propiedad de Baire en X. Entonces A tiene la propiedad de Baire en U.

Demostración. Como A tiene la propiedad de Baire en X, entonces existe $B \in \tau_X$ tal que $A \triangle B$ es magro en X. De aquí que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son conjuntos magros en X, y por tanto

$$A \triangle (B \cap U) \subseteq U = (A \setminus B) \cup (B \setminus A \cap U \setminus A)$$

es magro en X. Como $A \triangle (B \cap U) \subseteq U$ y por la proposición 1.1.10, $A \triangle (B \cap U)$ es magro en U. Como $B \cap U \in \tau_U$, entonces A tiene la propiedad de Baire en U. $\square$

Teorema 1.1.12. Sea X un espacio topológico. La colección de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad de Baire es una σ-álgebra. Es decir, contiene al vacío, es cerrada bajo complementos y uniones numerables (y así, bajo intersecciones numerables).

Para demostrar el Teorema 1.1.12 es necesario mostrar el siguiente lema. Recordemos que la frontera de A se denota por δA y se define como $\overline{A} \setminus A^{\circ}$.

Lema 1.1.13. Sea X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces

$i)$ $A \cup (X \setminus \overline{A})$ es denso.

$ii)$ Si A es cerrado, entonces δA es densa en ninguna parte.

Demostración. La primera parte se obtiene al notar que

$$X = \overline{A} \cup (X \setminus \overline{A}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{A \cup (X \setminus \overline{A})}.$$

Ahora, si A es un conjunto cerrado, entonces

$$\overline{X \setminus \delta A} = \overline{X \setminus (\overline{A} \setminus A^{\circ})} = \overline{X \setminus (A \cap (X \setminus A^{\circ})} = \overline{X \setminus (A \cap \overline{A^c})} = \overline{A^c \cup X \setminus \overline{A^c}} = X;$$

es decir, $\delta A^{\circ} = \emptyset$. De aquí concluimos que el conjunto cerrado δA es denso en ninguna parte.

$\square$

Veamos la demostración del Teorema 1.1.12.

Demostración. Debemos probar que PB contiene al vacío, es cerrada bajo complementos y uniones numerables. Por definición todo magro y todo conjunto denso en ninguna parte pertenecen a PB, y por el lema 1.1.13, entonces también todo cerrado A pertenece a PB, pues $A \triangle A^{\circ} = A \setminus A^{\circ}$ es magro. Ahora, sean $A \in PB$ y B conjunto abierto tal que $A \triangle B$ es magro. Entonces

$$(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A \triangle B;$$

es decir, $X \setminus A \in PB$.

Por último, sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia en PB. Considere la colección $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de abiertos en

X tales que $A_n \triangle B_m$ es magro, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \triangle (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m) &= [(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m)] \cup [(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)] \\
&= [\bigcap_{m\in\mathbb{N}} ([\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] \setminus B_m)] \cup [\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ([\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m] \setminus A_n)] \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_m) \cup (B_m \setminus A_n)) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_n \triangle B_m) \\
&\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \triangle B_n).
\end{aligned}
$$

Como la unión numerable de conjuntos magros es magra y además, todo subconjunto de un magro es magro, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in PB$. $\square$

Definición 1.1.14. La *clase de los borelianos* de X, que se denotará por $\mathcal{B}(X,\tau)$ (o simplemente por $\mathcal{B}$, cuando X y τ puedan sobreentenderse), es la menor colección de subconjuntos de X que contiene a los abiertos, es cerrada bajo uniones numerables y bajo complementos.

Proposición 1.1.15. Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces $\tau \subseteq \mathcal{B}(X,\tau) \subseteq PB(X,\tau)$.

Definición 1.1.16. Una función $f : X \to Y$ es *medible Borel* si la preimagen de todo boreliano en

Y es boreliano en X.

Para la próxima definición, debemos recordar que en general las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) La intersección numerable de conjuntos abiertos y densos es densa.

ii) Cada subconjunto abierto distinto de vacío no es magro.

iii) Cada subconjunto comagro es denso.

Un espacio topológico es *Baire* si satisface alguna (cualquiera) de las afirmaciones anteriores. Generalmente usamos el término espacio de Baire para referirnos a una amplia clase de espacios topológicos en los que la noción de conjunto magro no es trivial; en particular, el espacio completo no es magro. Según Carlos Ivorra Castillo, en su libro Topología (s.f.) https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf, el nombre se debe a que Baire demostró en 1889 que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire. El teorema de Categoría de Baire lo probó Hausdorff en 1914.

Teorema 1.1.17. (de Baire) Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Una demostración de este teorema tradicional se puede ver en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020), Teorema 6.20. Una consecuencia del teorema de Baire es la siguiente:

Corolario 1.1.18. Sea X un espacio métrico completo. Si $G, H \subseteq X$ son G_δ densos, entonces $G \cap H$ es G_δ denso.

Este es un resultado muy clásico, una demostración se puede ver por ejemplo en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020), Teorema 6.21. De aquí se concluye que,

Corolario 1.1.19. Sea X un espacio métrico completo. Si $A \subseteq X$ es G_δ denso, entonces no es magro.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que si es magro. Es decir, supongamos que existe una colección numerable de conjuntos cerrados nunca densos tal que $G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Por el teorema de Categoría de Baire 1.1.17, X es Baire. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus B_n)$ es denso; sin embargo, por el corolario 1.1.18,

$$\emptyset \neq G \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus B_n) \subseteq G \cap (X \setminus G).$$

□

Definición 1.1.20. Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que una función

$f : X \to Y$ es *medible Baire* si la preimagen de cualquier abierto en Y tiene la propiedad de Baire en X.

Observe que por la proposición 1.1.15, toda función medible Borel es medible Baire. El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no necesariamente es cierto:

Ejemplo 1.1.21. Sea $X = \{0,1,2\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Entonces $\mathcal{B}(X) = \tau \cup \{\{1,2\}\}$ y $PB(X) = \mathcal{P}(X)$. Note que la función $f : X \to X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 1, \\ 1, & si\ x = 0, \\ 2, & si\ x = 2, \end{cases}$$

es medible Baire, pero no es medible Borel pues $f^{-1}(\{0\}) = \{1\} \notin \mathcal{B}(X)$.

Proposición 1.1.22. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es medible Baire si, y sólo si, se cumple que para todo $x \in X$ la preimagen de cualquier abierto en Y que contiene a $f(x)$ tiene la propiedad de Baire en X.

Demostración. Basta con mostrar la recíproca. Sea V un abierto en Y. Si $V \cap Im(f) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(V) = \emptyset$. Si no, para cada $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$. Por hipótesis $f^{-1}(V)$ tiene la propiedad de Baire. □

Proposición 1.1.23. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es medible Baire sí, y sólo si, la preimagen de cualquier subbásico de Y tiene la propiedad de Baire en X.

Demostración. Es claro que si f es medible Baire, entonces la preimagen de cualquier subbásico en Y tiene la propiedad de Baire en X. Por tanto, sea U un abierto básico en Y. Entonces existen subbásicos $U_1, U_2, ..., U_n \subseteq Y$ tales que $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_n$. Como

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_n)$$

y por hipótesis cada $f^{-1}(U_n)$ tiene la propiedad de Baire en X, entonces $f^{-1}(U)$ la propiedad de Baire en X (ver Teorema 1.1.12.) □

Un resultado clásico de la teoría descriptiva de conjuntos es que la imagen continua de un conjunto boreliano no es necesariamente boreliano. En contraste, tenemos el siguiente hecho que afirma que si la función es inyectiva, entonces la imagen es boreliana.

Teorema 1.1.24. (Luzin-Suslin) Sean X, Y espacios polacos y $f : X \to Y$ una función inyectiva y medible Borel. Si A es boreliano en X, entonces $f(A)$ es boreliano en Y.

Para una demostración se puede consultar el Teorema 15.1 del libro (Kechris, 1995). El teorema de Luzin-Suslin juega un papel muy importante para mostrar que la topología producto en el grupo simétrico S_∞ es única (ver Teorema 3.2.4).

1.2. Preliminares algebraicos

En esta sección recordaremos algunos conceptos algebraicos sobre grupos y semigrupos que serán de utilidad para nuestro trabajo. Además, presentaremos algunos ejemplos importantes.

Definición 1.2.1. Un *grupo* es un conjunto G con una operación $\circ : G \times G \longrightarrow G$ que cumple:

- Para $x, y, z \in X$, $(xy)z = x(yz)$,
- Existe $e \in X$, tal que para todo $x \in X$, $xe = ex = x$,
- Para $x \in X$, existe $x^{-1} \in X$ tal que $xx^{-1} = xx^{-1} = e$.

A continuación se presentan algunos conjuntos que son grupos:

1. El espacio de homeomorfismos $H(X)$.
2. El grupo simétrico S_∞ (ver Sección 2.2).

Recordemos que, por el teorema de Cayley, todo grupo es isomorfo a algún grupo simétrico.

Ahora introducimos el concepto de semigrupo.

Definición 1.2.2. Sean S un conjunto y $\circ$ una operación que cumple:

- Para $x, y \in S$, $x \circ y \in S$,
- Para $x, y \in S$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Entonces al par $(S, \circ)$ lo llamaremos *semigrupo*. Si además el semigrupo S tiene elemento identidad 1_s, decimos que $(S, \circ)$ es un *monoide*.

El concepto general de semigrupos inversos fue introducido independientemente en (Vagner, 1952; Preston, 1954). Ambos autores obtuvieron dicho concepto mediante el estudio de transformaciones parciales inyectivas de un conjunto.

Teorema 1.2.3. Sean $(G, \cdot_G)$ y $(H, \cdot_H)$ semigrupos y $\phi : G \to H$ un homomorfismo de semigrupos, entonces $\phi(G)$ es un subsemigrupo de H.

Demostración. Como la asociatividad se hereda del semigrupo H, bastará probar que $\phi(G)$ es cerrado. Sean $h_1, h_2 \in \phi(G)$. Entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $h_1 = \phi(g_1)$ y $h_2 = \phi(g_2)$. Como ϕ es homomorfismo de semigrupos y G es cerrado, entonces

$$h_1 h_2 = \phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2).$$

De aquí se obtiene que $h_1 h_2 \in \phi(G)$. □

Proposición 1.2.4. Sean G, H semigrupos y $\phi : G \to H$ homomorfismo, entonces $\phi(G)$ es subsemigrupo de H.

Demostración. Sean $x_1, x_2, x_3 \in G$. Como ϕ es homomorfismo, entonces

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = \phi(x_1 x_2) \in \phi(G).$$

De igual manera, $\phi(G)$ es asociativo porque

$$\phi(x_1)(\phi(x_2)\phi(x_3)) = \phi(x_1)(\phi(x_2 x_3)) = \phi(x_1 x_2 x_3) = \phi(x_1 x_2)\phi(x_3).$$

$\square$

Definición 1.2.5. Sea S un semigrupo. Diremos que S es un *semigrupo regular* si para cada $x \in S$ existe $y \in S$ tal que $xyx = x$ y $yxy = y$; en este caso diremos que y es un inverso de x.

A continuación se presentan algunos ejemplos relacionados a semigrupos regulares:

1. $(\mathbb{N}, +)$ no es un semigrupo regular, pues $a + b + a \neq b$ para cualesquier $a, b \in \mathbb{N}$ diferentes de 0.

2. Sea X un conjunto. La colección de transformaciones sobre X es un semigrupo regular.

3. Si S es un monoide donde para todo $x \in S$ existe $y \in S$ tal que $xy = 1_s$, entonces S es semigrupo regular.

Definición 1.2.6. Sea S un semigrupo. Diremos que S es un *semigrupo inverso* si cumple las dos siguientes condiciones:

i) S es un semigrupo regular.

ii) Todo elemento de S tiene un único inverso;

en este caso, si $x \in S$ entonces su inverso se denotará como x^*; así mismo, si el semigrupo inverso tiene elemento identidad 1_s, diremos que es un *monoide inverso*.

A continuación se presentan algunos ejemplos relacionados a semigrupos inversos:

1. $(\mathbb{R}, \cdot)$ no es un semigrupo inverso.

2. Todo grupo es un semigrupo inverso. En particular, el grupo simétrico S_∞ (ver Sección 2.2).

3. Dado un conjunto X, entonces X^X no es un semigrupo inverso pues, aunque es regular, no necesariamente la inversa de todos los elementos de X^X es única. Consideraremos el axioma de elección para demostrarlo. Sea $f \in X^X$. Definimos tres funciones s, a y g apartir de f como sigue:

   - $a : Im(f) \to \mathcal{P}(X)$ tal que $a(y) = f^{-1}(y)$, para cada $y \in Im(f)$;
   - $s : Im(f) \to X$ tal que $s(y) \in a(y)$, para cada $y \in Im(f)$;
   - $g : X \to X$ tal que $y \mapsto \begin{cases} g(y) = s(y), & \textit{si } y \in Im(f), \\ g(y) = s(f(y)), & \textit{si no}. \end{cases}$.

   Observemos que el axioma de elección nos garantiza la existencia del selector s, el cual tiene como propiedad: $f(s(y)) = y$, si $y \in Im(f)$. Sea $y \in X$. Verificaremos que $g(f(g(y))) = g(y)$. Consideramos dos casos:

a) Si $y \in Im(f)$, $g(f(g(y))) = g(f(s(y))) = g(y)$.

b) Si no, $g(f(g(y))) = g(f(s(f(y)))) = g(f(y)) = s(f(y)) = g(y)$.

Por otro lado, $f(g(f(y))) = f(s(f(y))) = f(y)$. Concluimos así que el conjunto X^X es regular; sin embargo la existencia de la función g no es única puesto que siempre depende de la función selectora s, la cual es única siempre y cuando f sea inyectiva.

Observe que si $X = \mathbb{N}$, y aprovechando el PBO, la función $s : Im(f) \to X$ se puede definir como $s(n) = \text{mín}\, a(n)$.

4. Dado un conjunto X, entonces $I(X)$ con la operación composición parcial que se verá con mayor detalle en la Sección 2.3, es un semigrupo inverso. $I(X)$ es llamado semigrupo inverso simétrico.

Teorema 1.2.7. Sea S un semigrupo regular. Entonces, S es un semigrupo inverso si, y solo si, los elementos idempotentes de S conmutan.

Demostración. "$\Rightarrow$" Sean S un semigrupo inverso y $a, b \in S$ elementos idempotentes. Tome $x = (ab)^*$. Como $(bxa)^2 = b(xab)xa = bxa$, entonces bxa es idempotente. Además, bxa es inverso de ab porque $(ab)bxa(ab) = (abx)ab = ab$ y $(bxa)ab(bxa) = b(xab)xa = bxa$.

Por la unicidad de inversos, $x = bxa$. Por tanto x es idempotente y como cada idempotente es su propio inverso entonces ab es idempotente.

De manera similar obtenemos que ba es idempotente. De aquí obtenemos que, $ab(ba)ab = abab = ab$ y $ba(ab)ba = baba = ba$; es decir $ab = (ba)^*$ y $ba = (ab)^*$. Por unicidad de inversos concluimos que $ab = ba$.

"$\Leftarrow$" Sean S un semigrupo regular, $x \in S$ y dos elementos x^* y x° en S tales que son inversos de x. Por definición de inverso se tiene que los elementos $xx^\circ, x^\circ x, xx^*$y x^*x son idempotentes. Por tanto

$$xx^* = (xx^\circ x)x^* = (xx^\circ)(xx^*) = (xx^*)(xx^\circ) = (xx^*x)x^\circ = xx^\circ;$$

de la misma forma se tiene que $x^*x = x^\circ x$. De aquí concluimos que

$$x^\circ = x^\circ xx^\circ = x^\circ(xx^\circ) = x^\circ(xx^*) = (x^\circ x)x^* = (x^*x)x = x^*.$$

$\square$

1.3. Grupos polacos

Ahora introduciremos el concepto de grupo polaco, y algunos resultados importantes para nuestra investigación; por ejemplo, una caracterización de los subgrupos de un grupo polaco.

Definición 1.3.1. Sea G un conjunto dotado de una topología τ y dotado de una operación $\circ$ que lo hace grupo (no necesariamente abeliano). Decimos que $(G, \tau, \circ)$ es un *grupo topológico* si las siguientes funciones son continuas:

- $\circ : G \times G \to G$ que aplica $(x,y) \mapsto xy$.
- $i : G \to G$ que aplica $x \mapsto x^{-1}$.

Las últimas dos condiciones pueden ser sustituidas por la siguiente condición equivalente: la función $s : G \times G \to G$ que aplica $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua.

El siguiente teorema elemental será de importancia para los resultados que se presentarán en la Sección 3.

Teorema 1.3.2. Sea G un grupo topológico. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

$i)$ Sea $U \subseteq G$ abierto, si $xy \in U$, entonces existen abiertos V y W tales que $x \in V$, $y \in W$ y $VW \subseteq U$.

$ii)$ Sean $x \in G$ y U abierto tal que $x^{-1} \in U$. Entonces existe un abierto V con $x \in V$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

$iii)$ Dado $x \in G$, las siguientes funciones de G en G son homeomorfismos: $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ y $y \mapsto y^{-1}$.

$iv)$ Si U, S son subconjuntos de G con U abierto. Entonces US y SU son abiertos.

$v)$ Si $F \subseteq G$ es cerrado y $x \in G$, entonces xF, Fx y F^{-1} son cerrados.

Demostración. $i)$ Sean $U \subseteq G$ abierto y $x, y \in G$ tales que $xy \in U$. Por la continuidad de la multiplicación, existe un abierto Z en $G \times G$ tal que $(x, y) \in Z$ y $\{ab \mid (a, b) \in Z\} \subseteq U$. Por tanto existen abiertos V y W tales que $V \times W \subseteq Z$ donde $x \in V$, $y \in W$ y $VW \subseteq U$.

$ii)$ Sean $x \in G$ y U abierto tal que $x^{-1} \in U$. Por la continuidad de la función inversa i, existe un abierto V en G tal que $x \in V$ e $V^{-1} \subseteq U$.

$iii)$ Sean $x, y \in G$. Por $i)$, dado un $U \subseteq G$ abierto con $xy \in U$, entonces existen abiertos V y W tales que $x \in V$, $y \in W$ y $VW \subseteq U$. Esto demuestra que la función $l_x : G \to G$ dada por $y \mapsto$

xy es continua, pues $l_x(W) = xW \subseteq U$. Note que la inversa de l_x es $l_{x^{-1}}$; es decir, l_x es un homeomorfismo. Análogamente se demuestra para $r_x : G \to G$ dada por $y \mapsto yx$. Finalmente, como la inversa de i es ella misma, entonces concluimos que i es un homeomorfismo.

$iv)$ Sean $U, S \subseteq G$ con U abierto. Por $iii)$, las funciones l_x y r_x son abiertas, para cada $x \in G$. Entonces los conjuntos $US = \bigcup\limits_{x \in S} r_x(U)$ y $SU = \bigcup\limits_{x \in S} l_x(U)$ son abiertos.

$v)$ Sean $F \subseteq G$ un conjunto cerrado y $x \in G$. Como l_x, r_x e i son homeomorfismos (ver $iii)$), entonces son funciones cerradas. De aquí que xF, Fx y F^{-1} son conjuntos cerrados.

$\square$

La siguiente propiedad será muy útil porque servirá para complementar al teorema de la Continuidad Automática 3.1.4, el cual se presentará más adelante.

Sea (G, τ) un grupo topológico, decimos que G es *metrizable* si existe d una métrica compatible con la topología τ.

Decimos que una métrica d es *invariante por izquierda* si $d(gh, gk) = d(h, k)$ para todo $g, h, k \in G$ y que es *ultramétrica* si satisface una versión más fuerte de la desigualdad triangular: para $g, h, k \in G$, $d(g, h) \leq \text{máx}\{d(g, k), d(k, h)\}$.

Lema 1.3.3. Sean G, H grupos topológicos y $\phi : G \to H$ homomorfismo de grupos. Entonces ϕ es continua sí, y sólo si, ϕ es continua en 1_G.

Demostración. Basta con mostrar la recíproca. Sean $g \in G$ y U una vecindad abierta de $\phi(g)$. Como la función $l_{\phi(g)}$ es continua (ver el teorema 1.3.2, ítem iii), existe una vecindad abierta U_1

de 1_H tal que $\phi(g)U_1 \subseteq U$. Como ϕ es continua en 1_G, existe B_1 una vecindad abierta de 1_G tal que

$$1_H = \phi(1_G) \in \phi(B_1) \subseteq U_1.$$

Como la función l_g es una función abierta (ver el teorema 1.3.2, ítem iii), entonces gB_1 es una vecindad abierta de g. Note que

$$\phi(g) \in \phi(gB_1) = \phi(g)\phi(B_1) \subseteq \phi(g)U_1 \subseteq U;$$

es decir, ϕ es continua. □

Definición 1.3.4. Un grupo topológico (G, τ) es un *grupo polaco* si τ es polaca.

A continuación se presentan algunos conjuntos que son grupos polacos y dos proposiciones necesarias para probar una caracterización bien conocida de subgrupos polacos:

1. Los espacios compactos metrizables.

2. El espacio de homeomorfismos $H(X)$, con X métrico compacto y con la topología uniforme (ver el ejemplo 2.16 en (Guerrero Mojica, 2021)).

3. El grupo simétrico S_∞ (ver Sección 2.2).

Proposición 1.3.5. Si X grupo topológico metrizable y $Y \subseteq X$ subgrupo, entonces $\overline{Y} \subseteq X$ es un subgrupo.

Demostración. Sean $x, y \in \overline{Y}$, entonces existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Como X es grupo topológico, entonces $x_n y_n^{-1} \to xy^{-1}$. De aquí se obtiene que $xy^{-1} \in \overline{Y}$, concluyendo así que $\overline{Y}$ es un subgrupo. □

Proposición 1.3.6. Si X es un grupo polaco y $Y \subseteq X$ es un subgrupo G_δ, entonces Y es cerrado.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x \in \overline{H} \setminus H$. Por tanto $xH \neq H$ y $xH \cap H = \emptyset$. Como $\overline{H}$ es grupo topológico, entonces $l_x : \overline{H} \to \overline{H}$ dada por $y \mapsto xy$ es un homeomorfismo. Note que H es G_δ denso en $\overline{H}$, por tanto xH es también G_δ denso. Por el teorema de Categoría de Baire 1.1.17, $xH \cap H$ es G_δ denso en H, pero esto contradice que $xH \cap H$ es vacío. □

Teorema 1.3.7. Sean G un grupo polaco y H un subgrupo de G con la topología de subespacio. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) H es polaco.

ii) H es G_δ.

iii) H es cerrado.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ se obtiene por el teorema 1.28 en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020); $iii) \Rightarrow i)$ se obtiene por la Propiedad 1.1.7. Finalmente, $ii) \Rightarrow iii)$ se obtiene por la Propiedad 1.3.6. □

Sea G un grupo topológico con una métrica d compatible e invariante por izquierda. Se define la función D como:

$$D(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1}).$$

Verifiquemos que D es una métrica. Si $f = g$, y como G es grupo, entonces $f^{-1} = g^{-1}$. Como d es una métrica, entonces $d(f,g) + d(f^{-1}, g^{-1}) = 0$. Por otro lado, si $D(f,g) = 0$, y como d es una función positiva, entonces $d(f,g) = d(f^{-1}, g^{-1}) = 0$. Por tanto $f = g$.

Ya que d es simétrica, entonces D también lo es. Veamos que se cumple la desigualdad triangular para D. Sean $f, g, h \in G$. Entonces

$$\begin{aligned}
D(f,g) &= d(f,g) + d(f^{-1}, g^{-1}) \\
&\leq d(f,h) + d(h,g) + d(f^{-1}, h^{-1}) + d(h^{-1}, g^{-1}) \\
&= D(f,h) + D(h,g).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que la topología inducida por D coincide por la inducida por d. Sea una sucesión en G tal que $f_n \to f$ en τ_D. Veamos que también converge en τ_d.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
f_n \in B_D(f, \tfrac{1}{2^m}) &\Rightarrow f_n \in B_d(f, \tfrac{1}{2^m}), \\
&\Rightarrow f_n \to f \textit{ en } \tau_d.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la sucesión converge en τ_d a f. Por tanto f_n^{-1} converge en τ_d a f^{-1}. De aquí se obtiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces

$$D(f, f_n) = d(f, f_n) + d(f^{-1}, f_n^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos concluido que f_n converge en τ_D a f.

Es fácil ver que un espacio topológico metrizable es Hausdorff y primero numerable. El siguiente teorema clásico muestra que lo contrario también es cierto para los grupos topológicos. Una demostración se puede ver en (Gao, 2008), Teorema 2.1.1.

Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios métricos (X, d_1) y (Y, d_2) es una isometría si f es sobreyectiva y para todo $x, x' \in X$ se cumple que $d_1(x, x') = d_2(f(x), f(x'))$.

Diremos que (Y, ρ) es una completación de (X, d) si (Y, ρ) es completo y existe una función $f : X \to Y$ tal que f es una isometría entre X y $f[X]$, y además el rango de f es denso en Y.

Proposición 1.3.8. Sea G un grupo polaco con una métrica d compatible e invariante por izquierda. Entonces la métrica D, definida anteriormente, es una métrica completa compatible.

Demostración. Sea $(\hat{G}, \hat{D})$ la completación de (G, D). Por hipótesis (G, D) es un subgrupo polaco de $(\hat{G}, \hat{D})$. Por el teorema 1.3.7, (G, D) es cerrado; por lo tanto, $D = \hat{D}$. $\square$

Teorema 1.3.9. (Birkhoff-Kakutani) Sea G un grupo topológico. Entonces G es metrizable si, y sólo si, G es Hausdorff y es primero numerable. Además, si G es metrizable, entonces G admite una métrica compatible e invariante por izquierda.

2. Semigrupos polacos

El objetivo de este capítulo es introducir la definición de semigrupo topológico, el cual es una extensión del concepto de grupo topológico. Se presentan algunas de las propiedades básicas, teorema de representación y ejemplos que serán muy importantes en el desarrollo de este trabajo. Se estudian tres ejemplos de semigrupos polacos: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, S_∞ y $I(\mathbb{N})$. Nuestro trabajo estará principalmente dedicado a estudiar el semigrupo $I(\mathbb{N})$. Nos apoyaremos principalmente de (Elliott et al., 2019b; Mesyan et al., 2018; Pérez, 2019).

Definición 2.0.1. Un semigrupo $(S,\circ)$ es un *semigrupo topológico* si está dotado de una topología τ tal que la función $\circ$ es continua en τ.

Decimos que un semigrupo topológico es *polaco* si la topología es polaca. Decimos que un semigrupo inverso $(S,\circ)$ es un semigrupo inverso topológico si es un semigrupo topológico y la función inversa $i : S \to S$ dada por $x \mapsto x^*$ es continua.

2.1. El semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

En esta sección se introducirán algunos resultados sobre subsemigrupos cerrados de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con el objetivo de explorar unas preguntas del artículo (Mesyan et al., 2018). La siguiente propiedad será una herramienta importante en el Capítulo 2.2, donde se muestra que el grupo simétrico es un subgrupo polaco de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. El espacio de Baire se dotará de la topología de la convergencia puntual. Como $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta, entonces denotaremos a los subbásicos como

$$v(n,m) = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = m \right\},$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.1.1. El conjunto de las funciones inyectivas I_{ny} es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Veamos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus I_{ny}$ es abierto.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus I_{ny} &= \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists x, y \in \mathbb{N} \textit{ tal que } f(x) = f(y) \right\} \\
&= \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists x, y, z \in \mathbb{N} \textit{ tales que } x \neq y,\ f \in v(x,z) \cap v(y,z) \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{x,y,z \in \mathbb{N} \\ x \neq y}} v(x,z) \cap v(y,z).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus I_{ny}$ es la unión de abiertos, entonces I_{ny} es cerrado. $\square$

Otra forma de demostrar esta proposición es la siguiente: sea una sucesión de funciones inyectivas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que convergen a $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que f no es inyectiva, esto es, existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $f(x) = f(y)$. Por la convergencia puntual, $f_n(x) \to f(x)$ y $f_n(y) \to f(y)$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f_n(x) = f(x) = f(y) = f_n(y)$. Esto contradice que f_n sea inyectiva, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.2. ((Mesyan et al., 2018), Teorema 3.4) La topología producto es la única topología en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que lo hace un semigrupo polaco.

Ahora definiremos el concepto de congruencia y presentaremos unos resultados necesarios para la prueba del teorema 2.1.6 que caracteriza a cada semigrupo topológico T_0 que es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Definición 2.1.3. Sea S un semigrupo y $\mathcal{C}$ una relación de equivalencia sobre S. Decimos que $\mathcal{C}$ es una *congruencia por la izquierda*, si para todo $a,b,x \in S$ tales que $a\mathcal{C}b$ entonces $xa\mathcal{C}xb$. De manera análoga se define congruencia por la derecha.

Lema 2.1.4. Sean S un semigrupo y ρ_1, ρ_1 congruencias en S. Si $a,b \in S$ son tales que $[a]_{\rho_1} = [b]_{\rho_2}$, entonces $[b]_{\rho_1} = [b]_{\rho_2}$.

Demostración. Sean $a,b \in S$ tales que $[a]_{\rho_1} = [b]_{\rho_2}$, entonces $[a]_{\rho_2} = [b]_{\rho_2}$ y $[b]_{\rho_1} = [a]_{\rho_1}$. Por transitividad $[b]_{\rho_1} = [b]_{\rho_2}$. □

Proposición 2.1.5. Sean S un semigrupo topológico. Supongamos que existe una sucesión de congruencias $\{\rho_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que cada una tiene una cantidad numerable de clases; además, la colección $\{[m]_{\rho_i} \mid m \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una subbase de S. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$i)$ S es T_2;

$ii)$ S es T_1;

$iii)$ S es T_0;

$iv)$ $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \rho_i = \Delta$ (donde Δ es la diagonal de $S \times S$).

Demostración. Basta con mostrar que se cumplen las implicaciones $iii) \Rightarrow iv)$ y $iv) \Rightarrow i)$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Por definición de congruencia $\Delta \subseteq \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \rho_i$. Así que falta demostrar que $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \rho_i \subseteq \Delta$. Supongamos que no, sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales que $m \neq n$ y $(m,n) \in \rho_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como S es T_0, sin pérdida de generalidad existen $r \in \mathbb{N}$, $\{i_j\}_{j=1}^{r} \subseteq \mathbb{N}$ y $\{a_{i_j}\}_{j=1}^{r} \subseteq S$ tales que $n \in \bigcap\limits_{j=1}^{r} [a_{i_j}]_{\rho_{i_j}} \subseteq S \setminus \{m\}$.

Notemos que $[a_{i_j}]_{\rho_{i_j}} = [n]_{\rho_{i_j}}$, para todo $j \in \{1,2,...,r\}$; además, por hipótesis $m \in [n]_{\rho_{i_j}}$, para todo $j \in \{1,2,...,r\}$. De aquí se concluye que $m \in \bigcap\limits_{j=1}^{r} [n]_{\rho_{i_j}} \subseteq S \setminus \{m\}$, lo cual es absurdo. Por tanto $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \rho_i \subseteq \Delta$.

$iv) \Rightarrow i)$ Sean $m,n \in S$ tales que $m \neq n$. Como $(m,n) \notin \Delta$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(m,n) \notin \rho_{i_0}$. Esto es, $n \in [n]_{\rho_{i_0}} \subseteq S \setminus \{m\}$ y $m \in [m]_{\rho_{i_0}} \subseteq S \setminus \{n\}$, y por hipótesis las clases $[n]_{\rho_{i_0}}$ y $[m]_{\rho_{i_0}}$ son abiertos subbásicos en S y por ser distintas son disjuntas. $\square$

Teorema 2.1.6. ((Elliott et al., 2019b), Teorema 5.2) Sea S un monoide topológico T_0. Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) Existe una sucesión de congruencias por la izquierda $\{\rho_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ en S tal que cada una tiene una cantidad numerable de clases; además, la colección $\{[m]_{\rho_i} \mid m \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una subbase de S.

ii) S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. $ii) \Rightarrow i)$ Sin pérdida de generalidad, asumamos que S es un submonoide de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definimos la relación $\rho_i = \{(f,g) \in S \times S : f(i) = g(i)\}$ en S, para cada $i \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que ρ_i es de una relación de equivalencia. Veamos que cada ρ_i es una congruencia a izquierda en S, para cada $i \in \mathbb{N}$. Sean $i \in \mathbb{N}$, $f,g,h \in S$ tales que $(f,g) \in \rho_i$; es decir, $f(i) = g(i)$. Por tanto, $h(f(i)) = h(g(i))$. Esto es $(h \circ f, h \circ g) \in \rho_i$.

Ahora veamos que cada ρ_i tiene una cantidad numerable de clases. Defina $\lambda : S/\rho_i \to \mathbb{N}$ como $\lambda([f]_{\rho_i}) = f(i)$, para cada $f \in S$ e $i \in \mathbb{N}$ fijo. Veamos que λ está bien definida; es decir, que no depende del representante de la clase. Sean $f, g \in S$ tales que $(f, g) \in \rho_i$, entonces $\lambda([f]_{\rho_i}) = f(i) = g(i) = \lambda([g]_{\rho_i})$.

Por otro lado, afirmamos que λ es inyectiva. Sean $f, g \in S$ tales que $\lambda([f]_i) = \lambda([g]_i)$, entonces $f(i) = g(i)$. Por tanto, $(f, g) \in \rho_i$. De aquí que $S/\rho_i = \{[f]_{\rho_i} : f \in S\}$ es numerable.

$i) \Rightarrow ii)$ Sea $\{\rho_i : i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de congruencias a izquierda en S tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto $M_i \subseteq S$ numerable tal que $\{[y]_{\rho_i} : y \in S\} = \{[y]_{\rho_i} : y \in M_i\}$ y $\Omega = \{[y]_{\rho_i} \mid y \in M_i, i \in \mathbb{N}\}$ es una subbase numerable de S.

Mostraremos que el monoide topológico S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de Ω^Ω con la topología producto, y por tanto topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Sea $\phi : S \to \Omega^\Omega$ tal que para cada $y \in S$, $\phi(y) := f_y : \Omega \to \Omega$ donde $f_y([x]_{\rho_i}) = [yx]_{\rho_i}$, para cada $x \in S$ e $i \in \mathbb{N}$.

Para ver que ϕ está bien definida bastará con mostrar que dado $y \in S$, entonces f_y está bien definido. Sean $a, b \in S$ e $i \in \mathbb{N}$ tales que $(a, b) \in \rho_i$. Entonces usando el hecho de que ρ_i es una congruencia a izquierda: $f_y([a]_{\rho_i}) = [ya]_{\rho_i} = [yb]_{\rho_i} = f_y([b]_{\rho_i})$. Ahora mostraremos que ϕ es inyectiva. Sean $x, y \in S$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$. Esto es, $f_x = f_y$; en particular, $f_x([1]_{\rho_i}) = f_y([1]_{\rho_i})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por definición, $[x]_{\rho_i} = [y]_{\rho_i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De aquí obtenemos que $(x, y) \in \rho_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, y por tanto $(x, y) \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \rho_i$. Como S es T_2 y por el teorema 2.1.5, entonces $x = y$.

Para ver que ϕ es continua es suficiente mostrar que la imagen inversa con respecto a ϕ de cualquier subbásico en Ω^Ω es abierto en S.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega$ y $f \in v(\alpha,\beta) \cap \phi(S)$, entonces existen $z \in S$, $i, j \in \mathbb{N}$ y $x, y \in S$ tales que $\alpha = [x]_{\rho_i}$ y $\beta = [y]_{\rho_j}$ y $f = f_z : \Omega \to \Omega$ con $f_z([x]_{\rho_i}) = [y]_{\rho_j}$. Por tanto $[zx]_{\rho_i} = [y]_{\rho_j}$ y, por el lema 2.1.4, $[y]_{\rho_j} = [y]_{\rho_i}$.

De aquí obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(v(\alpha,\beta)) &= \{z \in S \mid (\phi(z))(\alpha) = \beta\} \\
&= \{z \in S \mid (\phi(z))([x]_{\rho_i}) = [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{z \in S \mid f_z([x]_{\rho_i}) = [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{z \in S \mid [zx]_{\rho_i} = [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{z \in S \mid zx \in [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{z \in S \mid r_x(z) \in [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{z \in S \mid z \in r_x^{-1}([y]_{\rho_i})\} \\
&= r_x^{-1}([y]_{\rho_i}).
\end{aligned}$$

Como r_x es una función continua por consecuencia de S ser un monoide topológico, entonces ϕ es continua.

Por último, para ver que ϕ es una función abierta, es suficiente mostrar que la imagen sobre

ϕ de cualquier subbásico en S es abierto en $\phi(S)$. Sean $y \in S$ e $i \in \mathbb{N}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}
\phi([y]_{\rho_i}) &= \{\phi(x) \mid x \in S, [x]_{\rho_i} = [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{\phi(x) \mid x \in S, \phi(x)([1]_{\rho_i}) = [y]_{\rho_i}\} \\
&= \{f \in \phi(S) \mid f \in v([1]_{\rho_i}, [y]_{\rho_i})\} \\
&= v([1]_{\rho_i}, [y]_{\rho_i}) \cap \phi(S).
\end{aligned}$$

De aquí concluimos que ϕ es abierta en $\phi(S)$. Por tanto, ϕ es un homeomorfismo.

Finalmente, veamos que ϕ es un homomorfismo. Sean $a, b \in S$. Veamos que $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$; es decir, veamos que $f_a f_b = f_{ab}$. Sean $y \in S$ e $i \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_a f_b([y]_{\rho_i}) &= f_a(f_b([y]_{\rho_i})) \\
&= f_a([by]_{\rho_i}) \\
&= [aby]_{\rho_i} \\
&= [(ab)y]_{\rho_i} \\
&= f_{ab}([y]_{\rho_i}).
\end{aligned}$$

Hemos concluido que S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

Una pregunta natural y aún no explorada es sobre cuales monoides topológicos T_0 son isomorfos a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ topológicamente cerrado.

2.2. El grupo simétrico S_∞

Sea X un conjunto distinto de vacío. Denotamos al conjunto de las funciones biyectivas de X en X como $S_\infty(X)$. $S_\infty(X)$ es conocido como el grupo simétrico de X. Además, si X es $\mathbb{N}$, denotamos a su grupo simétrico simplemente como S_∞.

Según Su Gao (2009) "Uno de los ejemplos más importantes de grupos polacos es el grupo simétrico S_∞. Muchos de los resultados en teoría descriptiva de conjuntos se obtuvieron primero para el grupo simétrico y luego se generalizaron a grupos polacos arbitrarios" (p. 54).

Teorema 2.2.1. El grupo simétrico S_∞ es un grupo topológico polaco con la topología producto. Es decir, es un subgrupo polaco del espacio de Baire $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Demostración. Veamos que S_∞ es G_δ en $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_\infty &= I_{ny} \cap \left\{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \mid f \text{ es sobreyectiva } \right\} \\ &= I_{ny} \cap \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(f(n) = m) \right\} \\ &= I_{ny} \cap \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} v(n,m) \right). \end{aligned}$$

Como el conjunto de las funciones inyectivas es un conjunto cerrado en el espacio métrico $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (ver la proposición 2.1.1), entonces por el teorema 1.3.7, S_∞ es G_δ. Finalmente, como los conjuntos $v(n,m)$ son abiertos básicos, concluimos que S_∞ es G_δ en el espacio polaco $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, y por el teorema de Alexandrov 1.1.6, es polaco.

El siguiente paso es ver que S_∞ es un grupo topológico. Para esto debemos mostrar que la función composición $c: S_\infty \times S_\infty \to S_\infty$ dada por $c(f,g) = f \circ g$ y que la función inversa $i: S_\infty \to S_\infty$ dada por $i(f) = f^{-1}$, son funciones continuas.

Basta notar que, dados $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} c^{-1}(v(n,m)) &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} v(k,m) \times v(n,k); \\ i^{-1}(v(n,m)) &= v(m,n). \end{aligned}$$

Por tanto c e i son continuas. $\square$

Proposición 2.2.2. La función $d: S_\infty \times S_\infty \to \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(f,g) = \begin{cases} 0, & \textit{si } f = g, \\ 2^{-n}, & \textit{si } f \neq g \textit{ y } n \textit{ es el menor natural tal que } f(n) \neq g(n), \end{cases}$$

es una ultramétrica compatible e invariante por izquierda para el grupo S_∞ con la topología producto.

Demostración. Por definición se tiene que $d(f,g) = 0$ sí, y sólo si, $f = g$; además, que d es una función simétrica. Sean $f, g, h \in S_\infty$ funciones diferentes. Luego existen $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \tfrac{1}{2^{n_1}}, \\ d(f,h) &= \tfrac{1}{2^{n_2}}, \\ d(h,g) &= \tfrac{1}{2^{n_3}}. \end{aligned}$$

Veamos que $d(f,g) \leq \text{máx}\{d(f,h), d(h,g)\}$. Primero notemos que si $n_1 < n_2$ y $n_1 < n_3$, entonces $f(n_1) = h(n_1)$ y $h(n_1) = g(n_1)$: es decir, $f(n_1) = g(n_1)$. Esto contradice que $d(f,g) = \frac{1}{2^{n_1}}$. Por tanto, consideraremos 2 casos:

1. Si $n_1 = n_2$, entonces $\frac{1}{2^{n_1}} = \frac{1}{2^{n_2}} \leq \text{máx}\{\frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}\}$. Análogamente si $n_1 = n_3$.
2. Si $n_1 \neq n_2$ y $n_2 \leq n_3$, entonces necesariamente $n_2 < n_1$. Por tanto $\frac{1}{2^{n_1}} \leq \frac{1}{2^{n_2}} = \text{máx}\{\frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}\}$.

   Análogamente si $n_3 \leq n_2$.

Hemos mostrado que d es una ultramétrica.

Afirmamos que d es una métrica invariante a izquierda. Es decir,

$$\begin{aligned} d(f,g) = \frac{1}{2^{n_0}} &\Leftrightarrow \textit{Para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } n < n_0, f(n) = g(n) \textit{ y } f(n_0) \neq g(n_0), \\ &\Leftrightarrow \textit{Para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ tal que } n < n_0 \textit{ y para toda } h \textit{ inyectiva} \\ &\quad\; h(f(n)) = h(g(n)) \textit{ y } h(f(n_0)) \neq h(g(n_0)), \\ &\Leftrightarrow \textit{Para toda } h \textit{ inyectiva, } d(h \circ f, h \circ g) = \frac{1}{2^{n_0}}. \end{aligned}$$

Finalmente, probaremos que d es compatible con la topología de S_∞ como subespacio de $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \tau_{prod})$; es decir, $\tau_d = \tau_{prod}$.

Es fácil ver que $\tau_d \subseteq \tau_{prod}$, pues dados $f \in S_\infty$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $g \in B_d(f, \frac{1}{2^{n_0}})$, entonces

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n_0} v(i, f(i)) \subseteq B_d(f, \frac{1}{2^{n_0}}).$$

Sean $n_1, m_1, ..., n_k, m_k \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 < n_2 < ... < n_k$ y $f \in \bigcap_{i=1}^{k} v(n_i, m_i)$. Considere la biyección $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$g(n) = \begin{cases} f(x), & \textit{si } x \leq n_k, \\ f(n_k+2), & \textit{si } x = n_k+1, \\ f(n_k+1), & \textit{si } x = n_k+2, \\ f(x), & \textit{si } n_k+3 \leq x, \end{cases}$$

entonces $f \in B_d(g, \frac{1}{2^{n_k}})$; además, $B_d(g, \frac{1}{2^{n_k}}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} v(n_i, m_i)$. Por tanto $\tau_{prod} \subseteq \tau_d$.

□

Observación 2.2.3. Es interesante observar que la métrica d no es completa. Para verificar esto, basta exponer una sucesión d-Cauchy en S_∞ que no converge en S_∞. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} x+1, & \textit{si } x < n, \\ 1, & \textit{si } x = n, \\ x, & \textit{si } n < x; \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,2,3,4,5,6,7,8,...), \\ f_2 &= (2,1,3,4,5,6,7,8,...), \\ f_3 &= (2,3,1,4,5,6,7,8,...), \\ f_4 &= (2,3,4,1,5,6,7,8,...),... \end{aligned}$$

Note que si $n \leq m$, entonces $d(f_n, f_m) = \frac{1}{2^n}$. Por esta razón la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es d-Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. De aquí sigue que si $n_0 \leq n, m$ y, sin pérdida de generalidad, $n \leq m$, entonces

$$d(f_n, f_m) = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Es fácil ver que f_n converge puntualmente a la función $f = (2,3,4,...)$, la cual es inyectiva pero no es sobreyectiva; es decir, d no es completa en S_∞.

Proposición 2.2.4. La clausura del grupo simétrico S_∞ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es I_{ny}.

Demostración. Veamos que S_∞ es denso en I_{ny}. Sea U un abierto en I_{ny}. Por tanto $U = \bigcap_{i=1}^{k} v(n_i, m_i) \cap I_{ny}$, para algunos $n_1, m_1, ..., n_k, m_k \in \mathbb{N}$. Como los conjuntos $\mathbb{N} \setminus \{n_i\}_{i=1}^k$ y $\mathbb{N} \setminus \{m_i\}_{i=1}^k$ son equipotentes, entonces existe $g : \mathbb{N} \setminus \{n_i\}_{i=1}^k \to \mathbb{N} \setminus \{m_i\}_{i=1}^k$ función biyectiva, la cual usaremos para definir a la función $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$f(n) = \begin{cases} m_i, & \textit{si } n = n_i, \\ g(n), & \textit{si } n \neq n_i, \end{cases}$$

pertenece a $S_\infty \cap U$, demostrando así que $\overline{S_\infty} = I_{ny}$. $\square$

Como los homeomorfismos preservan todas las propiedades topológicas, entonces dado el siguiente teorema será de gran utilidad para trabajar con todos los atributos del grupo polaco S_∞ en la sección 3.3.

Teorema 2.2.5. Sea A un conjunto infinito numerable. Entonces $S_\infty(A)$ y S_∞ son topológicamente isomorfos.

Demostración. Como A y $\mathbb{N}$ son equipotentes, existe una biyección $\lambda : A \to \mathbb{N}$. De aquí que A^A es isomorfo a $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, pues $\widetilde{\lambda} : A^A \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ dada por $\widetilde{\lambda}(f) = \lambda \circ f \circ \lambda^{-1}$ es una función biyectiva. Note que su inversa es naturalmente la función $\widetilde{\lambda}^{-1}(f) = \lambda^{-1} \circ f \circ \lambda$. Como la operación $\circ$ es continua en $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, entonces la función $\widetilde{\lambda}$ es continua. De igual modo $\widetilde{\lambda}^{-1}$ es una función continua. Veamos que $\widetilde{\lambda}$ es un homomorfismo en $S_\infty(A)$. Sean $f_1, f_2 \in S_\infty(A)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}(f_1 \circ f_2) &= \lambda \circ (f_1 \circ f_2) \circ \lambda^{-1} \\
&= \lambda \circ f_1 \circ f_2 \circ \lambda^{-1} \\
&= (\lambda \circ f_1 \circ \lambda^{-1}) \circ (\lambda \circ f_2 \circ \lambda^{-1}) \\
&= \widetilde{\lambda}(f_1) \circ \widetilde{\lambda}(f_2).
\end{aligned}$$

Demostramos así que $S_\infty(A)$ y S_∞ son espacios homeomorfos. $\square$

2.3. El semigrupo inverso simétrico $I(\mathbb{N})$

El concepto de semigrupos inversos lo empleó el matemático ruso Viktor Vladimirovich Wagner en 1952 (Vagner, 1952), refiriéndose a ellos como *grupos generalizados*. Este concepto fue introducido también de manera independiente por el matemático inglés Gordon Preston en 1954 (Preston, 1954). Ambos usaron la colección de funciones biyectivas parciales de un conjunto dado cuando estudiaron el problema de la caracterización abstracta de los semigrupos inversos. En este estudio concluyeron que la colección descrita anteriormente resultaba tener la propiedad de ser un semigrupo inverso, y también dedujeron una solución al problema de representación actualmente conocido como el teorema de Wagner-Preston 2.3.3, el cual caracteriza a los semigrupos inversos como subsemigrupos de funciones biyectivas parciales. Según Alan J. Cain, en (Cain, 2016), resultó válida la perspectiva que los matemáticos Clifford y Preston previeron (en 1961) acerca de lo fructífero que iba a ser el estudio de los semigrupos inversos. En este capítulo estudiaremos solo algunos aspectos de la teoría de semigrupos inversos guiándonos principalmente de (Elliott et al., 2019b; Lawson, 1998; Pérez, 2019; Perez and Uzcategui, 2020).

Queremos continuar el estudio del semigrupo inverso simétrico analizando sus subsemigrupos y la propiedad de Pettis. Para esto, en este capítulo se presenta una caracterización de los grupos de $I(\mathbb{N})$, los cuales son esencialmente grupo de permutaciones cerrados (ver proposiciones 2.3.11 y 2.3.13).

Sea X un conjunto. A la colección de todas las funciones biyectivas parciales de X se denota como

$$I(X) = \{f : A \to B \mid f \textit{ es biyectiva y } A, B \subseteq X\}.$$

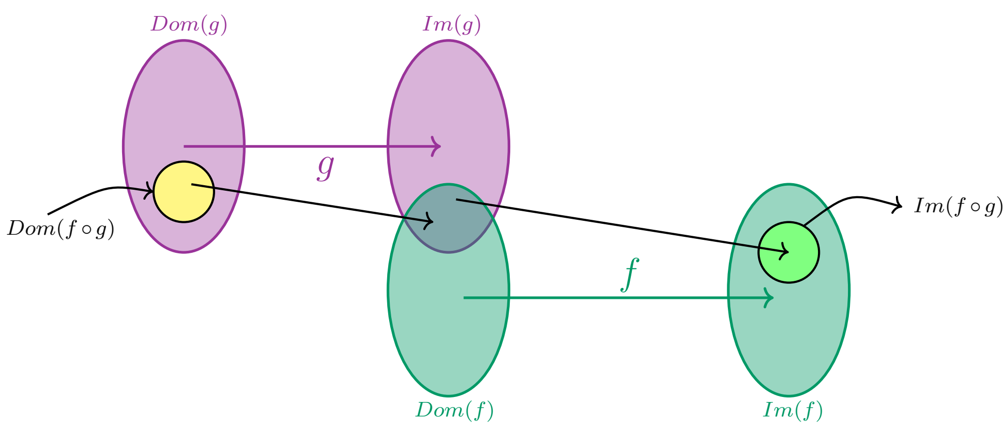
Como es usual, si $f \in I(X)$, entonces denotamos a A como $Dom(f)$ y a B como $Im(f)$. Por otro lado, denotaremos a la función identidad de un subconjunto A de X como 1_A. La operación que usaremos en $I(X)$ es la composición parcial.

Sean $f, g \in I(X)$. El dominio de la función composición se define como

$$Dom(f \circ g) = g^{-1}(Dom(f) \cap Im(g))$$

y, en consecuencia la imagen

$$Im(f \circ g) = f(Dom(f) \cap Im(g)).$$



Note que es posible que $Dom(f \circ g) = \emptyset$. Si así fuera el caso, entonces $f \circ g = 1_\emptyset$.

Ahora se introduce la topología que se usará para este conjunto. Dicha topología está generada por la subbase compuesta por los siguientes tres conjuntos. Sean $x, y \in X$:

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \{f \in I(X) \mid x \in \textit{dom}(f) \text{ y } f(x) = y\}, \\
w_1(x) &= \{f \in I(X) \mid x \notin \textit{dom}(f)\}, \\
w_2(y) &= \{f \in I(X) \mid y \notin \textit{Im}(f)\}.
\end{aligned}
$$

La topología generada por esta colección de conjuntos se llama la *topología producto parcial* en $I(X)$ y se denotará por τ_{pp} (ver (Pérez, 2019; Elliott et al., 2019b)).

Es importante mencionar la notación de algunas funciones particulares que usaremos más adelante:

- Dados $x, y \in X$, denotamos por $u_{x,y}$ la función en $I(X)$ tal que $Dom(u_{x,y}) = \{x\}$ y $Im(u_{x,y}) = \{y\}$.
- Dada $f \in I(X)$, denotamos por l_f y r_f las siguientes funciones:
    - $l_f : I(X) \to I(X)$ definida por $g \mapsto f \circ g$.
    - $r_f : I(X) \to I(X)$ definida por $g \mapsto g \circ f$.

Un primer resultado importante es que $I(X)$ con la operación anteriormente definida es un semigrupo inverso ya que esto será la base para lo que sigue del trabajo. Para ello veamos primero quienes son los elementos idempotentes en $I(X)$.

Proposición 2.3.1. Los elementos idempotentes de $I(X)$ son de la forma 1_A, con $A \subseteq X$; además, estos idempotentes conmutan entre si.

Demostración. Sea $f \in I(X)$ un idempotente. Veamos que $f = 1_{Dom(f)}$. Sea $x \in Dom(f)$, entonces $f(f(x)) = f(x)$. Por inyectividad $f(x) = x$. Por otro lado, si $A, B \subseteq X$, $1_A \circ 1_B = 1_{A \cap B} = 1_{B \cap A} = 1_B \circ 1_A$. □

Teorema 2.3.2. Sea X un conjunto, entonces $(I(X), \circ)$ es un semigrupo inverso.

Demostración. Dado $f \in I(X)$, entonces f^{-1} es un inverso de f. Por tanto $I(X)$ es un semigrupo regular y por el teorema 1.2.7 y la proposición 2.3.1, se concluye que $I(X)$ es un semigrupo inverso. □

El siguiente resultado es conocido como el teorema de Wagner-Preston. Una prueba se puede ver en el teorema 1.22 de (Cain, 2016) (o también en la Sección 1.5 de (Lawson, 1998)).

Teorema 2.3.3 (Wagner-Preston)**.** Todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo inverso de un monoide inverso simétrico.

Teorema 2.3.4. Sea X conjunto, entonces el semigrupo inverso $I(X)$ es Hausdorff con τ_{pp}.

Demostración. Sean $f, g \in I(X)$ tales que $f \neq g$, entonces podrían ocurrir dos casos:

- Si $Dom(f) = Dom(g)$, entonces existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Por tanto $f \in v(x, f(x))$ y $g \in v(x, g(x))$; además, $v(x, f(x)) \cap v(x, g(x)) = \emptyset$.
- Si $Dom(f) \neq Dom(g)$, entonces podemos suponer que existe $x \in Dom(f)$ tal que $x \notin Dom(g)$. Por tanto, $f \in v(x, f(x))$ y $g \in w_1(x)$; además, $v(x, f(x)) \cap w_1(x) = \emptyset$.

En ambos casos separamos a f y g mediante abiertos disjuntos. Por lo tanto, $I(X)$ es Hausdorff con la topología producto parcial. □

Teorema 2.3.5. $(I(X), \circ, \tau_{pp})$ es un semigrupo inverso topológico.

Demostración. Basta ver que la composición de funciones $c : I(X) \times I(X) \to I(X)$ dada por $c(f,g) = f \circ g$, es continua con la topología producto parcial.

Sean $x, y \in X$, entonces

$$
\begin{aligned}
c^{-1}(v(x,y)) &= \bigcup_{z \in X} (v(z,y) \times v(x,z)), \\
c^{-1}(w_1(y)) &= \bigcup_{z \in X} (w_1(z) \times v(x,z)) \cup (I(X) \times w_1(x)), \\
c^{-1}(w_2(y)) &= (w_2(y) \times I(X)) \cup \bigcup_{z \in X} (v(z,y) \times w_2(z)).
\end{aligned}
$$

Como las preimágenes de todos los subabiertos son abiertos en τ_{pp}, entonces $\circ$ es continua. Ahora veamos que la función inversión $i : I(X) \to I(X)$ dada por $i(f) = f^{-1}$ es continua con la topología producto parcial.

Sean $x, y \in X$, entonces es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
i^{-1}(v(x,y)) &= v(y,x), \\
i^{-1}(w_1(x)) &= w_2(x), \\
i^{-1}(w_2(x)) &= w_1(x),
\end{aligned}
$$

concluyendo así la continuidad.

Por definición, $I(X)$ es un semigrupo inverso topológico. $\square$

Cuando $X = \mathbb{N}$, el siguiente teorema muestra que existe una métrica compatible con la topología de $I(\mathbb{N})$.

Teorema 2.3.6. El semigrupo inverso topológico $(I(\mathbb{N}), \tau_{pp})$ es metrizable.

Demostración. Tenemos que $I(\mathbb{N})$ es Hausdorff, regular y segundo numerable, luego por el teorema de Urysohn $I(\mathbb{N})$ es metrizable. □

El teorema 2.3.6 solo nos garantiza la existencia de una métrica compatible para el semigrupo inverso simétrico. A continuación presentaremos la construcción de una métrica para $I(\mathbb{N})$. En primer lugar se definirán dos funciones que ayudan a definir a la métrica $d : I(\mathbb{N}) \times I(\mathbb{N}) \to [0, \infty)$. Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{(f,g)}(n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n \in (Dom(f) \cap Dom(g)) \cup ((Dom(f))^c \cap (Dom(g))^c), \\ 1, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$b_{(f,g)}(n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n \notin Dom(f) \cap Dom(g), \\ \textit{mín}\{1, |f(n) - g(n)|\}, & \textit{si } n \in Dom(f) \cap Dom(g). \end{cases}$$

De aquí, la función $d : I(\mathbb{N}) \times I(\mathbb{N}) \to [0, \infty)$ se define como

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{(f,g)}(n) + b_{(f,g)}(n)}{2^n}.$$

Veamos que d es una métrica en $I(\mathbb{N})$.

1. Por definición de d, dadas $f, g \in I(\mathbb{N})$, entonces $d(f,g) = 0$ si, y sólo si, $a_{(f,g)}(n) = b_{(f,g)}(n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ si, y sólo si $Dom(f) = Dom(g)$ y $f(n) = g(n)$, para cada $n \in Dom(f)$.

También por definición se tiene que $d(f,g) = d(g,f)$.

2. Veamos que d cumple la desigualdad triangular. Sean $f,g,h \in I(\mathbb{N})$. Para que

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$$

basta ver que se cumple la desigualdad

$$a_{(f,g)}(n) + b_{(f,g)}(n) \leq a_{(f,h)}(n) + b_{(f,h)}(n) + a_{(h,g)}(n) + b_{(h,g)}(n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean $f,g \in I(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Si $a_{(f,g)}(n) = b_{(f,g)}(n) = 0$, la desigualdad se tiene.
- Si $a_{(f,g)}(n) = 1$, entonces $n \notin (Dom(f) \cap Dom(g)) \cup ((Dom(f))^c \cap (Dom(g))^c)$. Sin pérdida de generalidad $n \in Dom(f)$ y $n \notin Dom(g)$. De aquí obtenemos que $b_{(f,g)}(n) = 0$ y por tanto $a_{(f,g)}(n) + b_{(f,g)}(n) = 1$.

  Supongamos que $a_{(f,h)}(n) = a_{(h,g)}(n) = 0$. Como $n \in Dom(f)$ y $a_{(f,h)}(n) = 0$, entonces $n \in Dom(h)$. Como $n \in Dom(h)$ y $a_{(h,g)}(n) = 0$, entonces $n \in Dom(g)$. Absurdo. Así concluimos que $a_{(f,h)}(n) = 1$ o $a_{(h,g)}(n) = 1$, obteniendo la desigualdad triangular.
- Si $b_{(f,g)}(n) = 1$, entonces $n \in Dom(f) \cap Dom(g)$ y $f(n) \neq g(n)$. De aquí concluimos que $a_{(f,g)}(n) = 0$ y por tanto $a_{(f,g)}(n) + b_{(f,g)}(n) = 1$.

- Si $n \notin Dom(h)$, entonces $a_{(f,h)}(n) = 1$, pues $n \in Dom(f)$, obteniendo la desigualdad triangular.
- Si $n \in Dom(h)$, entonces $a_{(f,h)}(n) = a_{(h,g)}(n) = 0$, pues $n \in Dom(f) \cap Dom(g)$. Supongamos que $b_{(f,h)}(n) = b_{(h,g)}(n) = 0$. Como $n \in Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h)$, entonces $f(n) = h(n)$ y $h(n) = g(n)$. Por transitividad, $f(n) = g(n)$. De aquí obtenemos que $b_{(f,g)}(n) = 0$, lo cual es absurdo.

  Así concluimos que $b_{(f,h)}(n) = 1$ o $b_{(h,g)}(n) = 1$, obteniendo la desigualdad triangular.

Sabemos que la topología generada por la métrica d es compatible con una topología menos fina que τ_{pp} (ver el teorema 3.35 de (Pérez, 2019)), la cual hace de $I(\mathbb{N})$ un semigrupo topológico polaco pero no un semigrupo inverso topológico; sin embargo, considere la siguiente métrica: $D : I(\mathbb{N}) \times I(\mathbb{N}) \to [0, \infty)$ dada por

$$D(f,g) = d(f,g) + d(f^{-1}, g^{-1}).$$

Teorema 2.3.7. D es una métrica completa compatible con τ_{pp}, y en consecuencia el conjunto $(I(\mathbb{N}), D)$ con la topología producto parcial es un semigrupo inverso topológico polaco.

Una demostración se puede ver en el teorema 4.4 de (Perez and Uzcategui, 2020). La topología producto parcial es la única que hace a $I(\mathbb{N})$ un semigrupo inverso topológico polaco.

Teorema 2.3.8. (Elliott et al., 2019) τ_{pp} es la única topología polaca que hace a $I(\mathbb{N})$ un semigrupo inverso polaco.

Consideramos el conjunto $D_x = \{f \in I(X) \mid x \in Dom(f)\}$, para cada $x \in X$, y también a las funciones:

$$Dom : I(X) \to 2^X \quad f \mapsto Dom(f)$$

$$Im : I(X) \to 2^X \quad f \mapsto Im(f)$$

$$ev_x : D_x \to X \quad f \mapsto f(x).$$

El siguiente resultado es una generalización del hecho de que la topología producto es la topología más pequeña que hace a todas las proyecciones continuas. Una prueba se puede ver en el teorema 3.8 del artículo (Perez and Uzcategui, 2020). Recordemos que 2^X se toma con la topología producto y X como espacio discreto.

Teorema 2.3.9. Sea X un conjunto. La τ_{pp} es la menor topología que hace a las funciones Dom, Im y ev_x continuas.

A continuación se enunciará una caracterización de la convergencia en la τ_{pp} que es de gran utilidad. Para una demostración se puede consultar el teorema 3.28 en (Pérez, 2019).

Teorema 2.3.10. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $I(\mathbb{N})$ y $f \in I(\mathbb{N})$. Entonces, $f_n \to f$ con la topología producto parcial si, y sólo si, dado $x \in X$ se cumple

1. Si $x \in Dom(f)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x \in Dom(f_n)$ y $f_n(x) = f(x)$.

2. Si $x \notin Dom(f)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x \notin Dom(f_n)$.

3. Si $x \notin Im(f)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x \notin Im(f_n)$.

Proposición 2.3.11. Cada grupo en $I(\mathbb{N})$ está contenido en algún grupo simétrico de $I(\mathbb{N})$.

Demostración. Sea G un grupo en $I(\mathbb{N})$. Como el único idempotente de todo grupo es el elemento identidad, y por la proposición 2.3.1, entonces concluimos que existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $e_G = 1_A$. Veamos que, en consecuencia, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que G coincide con el grupo simétrico $S_\infty(A)$. Sea $f \in G$. Observe que de $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_A$, obtenemos que $A = Dom(f) = Im(f)$. Por tanto, $f \in S_\infty(A)$, esto es, $G \subseteq S_\infty(A)$. □

Teorema 2.3.12. Los grupos simétricos forman una colección de grupos maximales en $I(\mathbb{N})$.

Demostración. Sean $A \subseteq \mathbb{N}$ y $G \subseteq I(\mathbb{N})$ un grupo tal que $S_\infty(A) \subseteq G$. Por la proposición 2.3.11, existe $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $G \subseteq S_\infty(B)$. Es decir, $S_\infty(A) \subseteq S_\infty(B)$ y por tanto $1_A \in S_\infty(B)$. Como 1_A es idempotente, entonces $1_A = 1_B$, es decir, $A = B$. Por tanto, $G = S_\infty(A)$. Hemos mostrado que cada grupo simétrico es un grupo maximal en $I(\mathbb{N})$. □

El siguiente hecho muestra que, aunque S_∞ no es cerrado en $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (ver ición 2.2.4), si es cerrado en $I(\mathbb{N})$. Este último hecho será usado en la Sección 3.3, donde se presenta la propiedad de Pettis.

Proposición 2.3.13. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Entonces $S_\infty(A)$ es cerrado en $I(\mathbb{N})$ con la τ_{pp}.

Demostración. Sean $f \in I(\mathbb{N})$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_\infty(A)$ tales que $f_n \to f$. Veamos que $f \in S_\infty(A)$. Para esto debemos ver que el dominio y la imagen de f es A. Sea $a \in A$, y supongamos que $a \notin Dom(f)$; es decir, supongamos que $f \in w_1(a)$. Como $f_n \to f$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $f_n \in w_1(a)$. Por tanto, si $n \geq n_0$, entonces $a \notin Dom(f_n)$, lo cual contradice que $Dom(f_n) = A$. Concluimos así que $A \subseteq Dom(f)$. Por otro lado, si $a \in Dom(f)$, entonces $f \in v(a, f(a))$. Como $f_n \to f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $f_n \in v(a, f(a))$. Es decir, si $n \geq n_0$ entonces $a \in Dom(f_n)$. Concluimos así que $a \in A$, y por tanto $Dom(f) \subseteq A$. Hemos mostrado que $Dom(f) = A$; de la misma forma se muestra que $Im(f) = A$. Por tanto $f \in S_\infty(A)$. $\square$

3. La propiedad de Pettis

El objetivo de este capítulo es introducir una generalización del teorema de Pettis al contexto de los semigrupos inversos polacos. Dicha generalización la hemos llamado propiedad de Pettis (ver Sección 3.3). Mostramos ejemplos de semigrupos que tienen la propiedad y otros que no. Más específicamente, mostramos que $I(\mathbb{N})$ no tiene la propiedad de Pettis, sin embargo contiene el siguiente semigrupo inverso polaco que si la tiene:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\infty}(B_i) \cup \{1_{\emptyset}\},$$

con $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ disjuntos dos a dos. Para mostrar que S tiene la propiedad de Pettis, le dedicamos la primera sección al teorema de Pettis, y también estudiamos un teorema que caracteriza los grupos polacos que son isomorfos a algún subgrupo cerrado de S_{∞}. En la segunda sección, y usando como herramienta la continuidad automática, mostramos la bien conocida prueba del Teorema de Kallman, el cual habla de la unicidad de topología polaca sobre el grupo simétrico S_{∞} y la topología producto.

3.1. Teorema de Pettis para grupos polacos

En esta sección se presenta el teorema de Pettis. Le dedicaremos atención a este teorema, ya que juega un papel importante en la demostración del teorema de la continuidad automática, el cual, como ya se mencionó anteriormente, se usa para garantizar la unicidad de topología polaca en el grupo de permutaciones S_{∞}.

Proposición 3.1.1. Sean G, H grupos topológicos y $\phi : G \to H$ homomorfismo de grupos. Si ϕ es medible Baire en 1_G, entonces ϕ es medible Baire.

Demostración. Sean $g \in G$ y U un abierto en H que contiene $\phi(g)$. Como H es un grupo topológico, entonces la función $l_{\phi(g)^{-1}} : H \to H$ dada por $h \mapsto \phi(g)^{-1}h$ es un homeomorfismo. De aquí concluimos que $l_{\phi(g)^{-1}}(U) = \phi(g)^{-1}U$ también es un abierto en H que además, contiene a la identidad. Por hipótesis $\phi^{-1}(\phi(g)^{-1}U) = g^{-1}\phi^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire en G. Como G es un grupo topológico, entonces la función $l_g^{'} : G \to G$ dada por $k \mapsto gk$ es un homeomorfirmo. Por tanto $l_g^{'}(g^{-1}\phi^{-1}(U)) = \phi^{-1}(U)$ también tiene la Propiedad de Baire en G. □

El siguiente lema servirá para probar el teorema de Pettis 3.1.3. Recuerde que un conjunto V es simétrico si $V^* = V$.

Lema 3.1.2. Sea G un grupo topológico y un abierto $U \subseteq G$ que contiene a la identidad. Entonces existe un abierto simétrico que también contiene a la identidad y además, $VV \subseteq U$.

Demostración. Como G es grupo topológico y $1_G = 1_G 1_G$, entonces existen abiertos $X, Y \subseteq G$ tales que $1_G \in XY \subseteq U$. Tomando el abierto $W = X \cap Y$, obtenemos que $1_G \in WW \subseteq U$. Entonces $V = W \cap W^*$ es un abierto que contiene a la identidad, es simétrico y $VV \subseteq U$. □

Teorema 3.1.3. (Pettis) Sea G un grupo topológico Baire. Si $A \subseteq G$ tiene la propiedad de Baire y no es magro, entonces el conjunto

$$A^{-1}A = \{x^{-1}y : x, y \in A\}$$

contiene una vecindad abierta de 1_G.

Demostración. Sea $A \subseteq G$ con la propiedad de Baire. Entonces existe $U \subseteq G$ abierto tal que $A\Delta U$ es magro. Sea $g \in U$. Observe que $g^{-1}U$ es un abierto que contiene a la identidad. Por el lema 3.1.2, existe un abierto V que contiene a la identidad y $V^{-1}V \subseteq g^{-1}U$.

Veamos que $V \subseteq A^{-1}A$.

Sea $h \in V$. Como $1_G \in V$ y $h^{-1} \in V^{-1}$, entonces $h^{-1} \in V^{-1}V \subseteq g^{-1}U$. Por tanto $g \in Uh$; es decir, $U \cap Uh \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $(A \cap Ah)\Delta(U \cap Uh) \subseteq (A\Delta U) \cup (Ah\Delta Uh)$.

Sea $x \in (A \cap Ah)\Delta(U \cap Uh)$. Se consideran 2 casos:

1. Si $x \in (A \cap Ah) \setminus (U \cap Uh)$, entonces $x \in (A \setminus U) \cup (Ah \setminus Uh)$.

2. Si $x \in (U \cap Uh) \setminus (A \cap Ah)$, entonces $x \in (U \setminus A) \cup (Uh \setminus Ah)$.

Por tanto $x \in (A\Delta U) \cup (Ah\Delta Uh)$. Note que $(A\Delta U) \cup (Ah\Delta Uh)$ es magro, entonces $(A \cap Ah)\Delta(U \cap Uh)$ es magro. Por otro lado, si $A \cap Ah = \emptyset$, entonces $U \cap Uh$ sería un abierto no vacío magro lo cual no puede pasar en un espacio de Baire. De acá que $A \cap Ah \neq \emptyset$.

Sea $a \in A \cap Ah$, entonces $a = bh \in A$ para algún $b \in A$. Por tanto $b^{-1}a = h$, con $b, a \in A$. Es decir, $h \in A^{-1}A$. Por tanto $V \subseteq A^{-1}A$.

$\square$

El teorema de Pettis es uno de los ingredientes claves para demostrar el siguiente resultado que se conoce como la propiedad de continuidad automática.

Teorema 3.1.4. (Continuidad automática) Sean G, H grupos polacos y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Si φ es medible Baire, entonces φ es continua.

Demostración. Demostraremos el teorema en un caso más general. Sea G espacio Baire y H separable. Por el lema 1.3.3, es suficiente demostrar que φ es continua en 1_G. Sea U una vecindad abierta de 1_H. Por el teorema 1.3.2, existe V una vecindad abierta de $1_H = 1_H \cdot 1_H$ tal que $V^{-1}V \subseteq U$. Como H es separable, existe un denso numerable $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H.

Veamos que $H = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_nV$. Sea $h \in H$, tenemos que V es abierto entonces por Teorema 1.3.2, V^{-1} es abierto y así hV^{-1} es un abierto que contiene a h. Como $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso, $hV^{-1} \cap \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$; por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $hv^{-1} = h_m$ donde $v \in V$. Luego $h = h_mv \in h_mV$. Por tanto $h \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_nV$, de donde $H = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_nV$. Por tanto

$$G = \varphi^{-1}(H) = \varphi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_nV) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(h_nV).$$

Como G es Baire, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(h_nV)$ no es magro. Sea $A = \varphi^{-1}(h_nV)$. Como φ es medible Baire y h_nV es abierto, A tiene la propiedad de Baire y no es magro. Ahora, por el teorema de Pettis 3.1.3, $A^{-1}A$ contiene una vecindad abierta B de 1_G. Además, tenemos que:

$$B \subseteq A^{-1}A \subseteq \varphi^{-1}(V^{-1}h_n^{-1}h_nV) = \varphi^{-1}(V^{-1}V) \subseteq \varphi^{-1}(U).$$

Como $1_H = \varphi(1_G) \in \varphi(B) \subseteq U$, entonces φ es continua en 1_G. Por el lema 1.3.3, se deduce que φ es continua. $\square$

El teorema de continuidad automática se usa para probar una caracterización de los grupos polacos que son isomorfos a subgrupos cerrados de S_∞. Del teorema 2.2.1 y la proposición 2.2.2 sabemos que S_∞ consta de todas las permutaciones (biyecciones) de $\mathbb{N}$ y es un subgrupo polaco del espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con la topología producto, que está dotado de una métrica compatible e invariante por izquierda.

Teorema 3.1.5. Sea G un grupo polaco. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) G es isomorfo a un subgrupo cerrado del grupo simétrico S_∞.

ii) G admite una ultramétrica compatible e invariante por izquierda.

iii) G admite una base de vecindades numerable de la unidad compuesta de subgrupos abiertos.

iv) G admite una base numerable $\mathcal{B}$ tal que, si $U \in \mathcal{B}$ y $g \in G$, entonces $gU \in \mathcal{B}$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Esta implicación se obtiene por la proposición 2.2.2, pues la métrica d también resulta ser ultramétrica compatible e invariante por izquierda en G.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea d_G una ultramétrica compatible e invariante por izquierda en G. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$U_n = \{x \in G : d_G(x, 1_G) < 2^{-n}\}.$$

Entonces $\{U_n\}$ es una base numerable de vecindades de 1_G. Como d_G una ultramétrica invariante por izquierda, para $x, y \in G$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_G(x^{-1}y, 1_G) &\leq \max\{d_G(x^{-1}y, y), d_G(y, 1_G)\} \\ &= \max\{d_G(x^{-1}, 1_G), d_G(y, 1_G)\} \\ &= \max\{d_G(1_G, x), d_G(y, 1_G)\}. \end{aligned}$$

De aquí concluimos que si $x, y \in U_n$, entonces $x^{-1}y \in U_n$. Es decir, U_n es un subgrupo que además es abierto, pues dado $x \in U_n$ y $y \in B_{d_G}(x, 2^{-n})$, entonces

$$\begin{aligned} d_G(y, 1_G) &\leq \max\{d_G(x, 1_G), d_G(y, x)\} \\ &< 2^{-n}; \end{aligned}$$

es decir, $x \in B_{d_G}(x, 2^{-n}) \subseteq U_n$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $\{U_n\}$ una base numerable de vecindades de 1_G tal que cada U_n es un subgrupo abierto. Como las clases laterales a izquierda $\{gU_n : g \in G\} = \{W_i : i \in I\}$ son disjuntas y abiertas; y por hipótesis G es Hausdorff, entonces $I \subseteq \mathbb{N}$. Es decir, cada U_n tiene una cantidad numerable de clases laterales a izquierda.

Sea $\mathcal{B}$ la familia numerable de todas las clases de U_n, para toda $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base de G.

Sea U un abierto en G y $g \in U$. Como $1_G \in g^{-1}U$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1_G \in U_n \subseteq g^{-1}U$. Esto es, $g \in gU_n \subseteq U$.

$iv) \Rightarrow i)$ Sea $\mathcal{B}$ una base numerable y cerrada bajo multiplicaciones a izquierda. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la enumeración U_0, U_1,... no admite repeticiones. Es decir, si $i \neq j$

entonces $U_i \neq U_j$. Definimos la función $\phi : G \to S_\infty$ tal que

$$\phi(g)(n) = m \Leftrightarrow gU_n = U_m.$$

Veamos que ϕ está bien definida. Note que si $gU_{n_1} = gU_{n_2}$, entonces $U_{n_1} = U_{n_2}$; es decir, se cumple la inyectividad. Sea $m \in \mathbb{N}$. Tomando $n = \phi(g^{-1})(m)$, se tiene que $U_n = g^{-1}U_m$, cumpliéndose así la sobreyectividad.

Veamos que ϕ es inyectiva. Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi(g_1)(n) = \phi(g_2)(n)$. Por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_1U_n = g_2U_n$; en particular, esto es cierto para toda vecindad de 1_G. Es decir, si $U_n \in V(1_G)$, entonces $g_1^{-1}g_2 \in U_n$. Como G es Hausdorff, $g_1^{-1}g_2 = 1_G$. En otras palabras, $g_1 = g_2$.

Ahora veamos que ϕ es abierta en $\phi(G)$. Sean U un abierto en G y $g \in U$. Como $g^2g^{-1} = g$ y por el teorema 1.3.2, existen $W_0, W_1 \subseteq G$ tales que $g^2 \in W_0$, $g \in W_1$ y $W_0W_1^{-1} \subseteq U$. Observe que $g \in g^{-1}W_0 \cap W_1$.

Sea $U_n \in B$ tal que $g \in U_n \subseteq g^{-1}W_0 \cap W_1$, y sean también $m \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(g)(n) = m$ y $V = v(n,m) \cap \phi(G)$. Veamos que $V \subseteq \phi(U)$.

Sea $f \in V$. Entonces existe $h \in G$ tal que $f = \phi(h)$ y $f(n) = \phi(h)(n) = m$. Por definición, $hU_n = U_m$. Luego

$$\begin{aligned} h \in U_mU_n^{-1} &= (gU_n)U_n^{-1}, \\ &\subseteq W_0W_1^{-1}, \\ &\subseteq U. \end{aligned}$$

Por tanto, $\phi(g) \in V \subseteq \phi(U)$, mostrando así que ϕ es una función abierta en $\phi(G)$.

Ahora veamos que ϕ es homomorfismo. Sean $g_1, g_2 \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\phi(g_1g_2)(n) = \phi(g_1)\phi(g_2)(n)$.

Definiendo $m_1 = \phi(g_2)(n)$ y $m_2 = \phi(g_1)(m_1)$, entonces

$$\phi(g_1)\phi(g_2)(n) = \phi(g_1)(\phi(g_2)(n)) = \phi(g_1)(m_1) = m_2.$$

Por definición, $g_1U_{m_1} = U_{m_2}$ y $g_2U_n = U_{m_1}$; es decir, $g_1g_2U_n = g_1U_{m_1} = U_{m_2}$. Nuevamente, por definición, $\phi(g_1g_2)(n) = m_2$.

Hemos mostrado que ϕ es un isomorfismo en su imagen. Para terminar la demostración basta con mostrar que G es homeomorfo a $\phi(G)$. Para esto, mostraremos que ϕ es una función continua usando el teorema de la continuidad automática 3.1.4.

Veamos que ϕ es medible Baire. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Es bien conocido que los conjuntos analíticos tienen la propiedad de Baire (ver, por ejemplo, el teorema 21.6 en (Kechris, 1995)), y en consecuencia los coanalíticos también la tienen. Afirmamos que $\phi^{-1}(v(n,m))$ es coanalítico, pues observando que

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(v(n,m)) &= \{g \in G \mid \phi(g)(n) = m\} \\
&= \{g \in G \mid gU_n = U_m\} \\
&= \{g \in G \mid (\forall x)(x \in U_n \Rightarrow gx \in U_m)\} \cap \\
&\quad\ \{g \in G \mid (\forall x)(x \in U_m \Rightarrow g^{-1}x \in U_n)\},
\end{aligned}$$

donde los conjuntos $C_{n,m} = \{g \in G \mid (\forall x)(x \in U_n \Rightarrow gx \in U_m\}$ y $C^{'}_{n,m} = \{g \in G \mid (\forall x)(x \in U_m \Rightarrow g^{-1}x \in U_n\}$ son coanalíticos, ya que para cada $n, m \in \mathbb{N}$, y denotando al boreliano $B_{n,m} = (U_n \times G) \cap (\mu^{-1}(G \setminus U_m))$, siendo μ la función multiplicación en G, se tiene que

$$\begin{aligned}
G \setminus C_{n,m} &= \{g \in G \mid (\exists x)(x \in U_n \wedge gx \notin U_m)\} \\
&= \{g \in G \mid (\exists x)((g,x) \in B_{n,m})\} \\
&= Proy_{_G} B_{n,m}.
\end{aligned}$$

Esto es, $G \setminus C_{n,m}$ es la proyección de un boreliano. Por el teorema 3.2 en (Di Prisco and Uzcátegui Aylwin, 2020), concluimos que $C_{n,m}$ es coanalítico y de manera análoga se demuestra que $C^{'}_{n,m}$ también lo es. De aquí que $\phi^{-1}(v(n,m))$ es coanalítico.

De aquí concluimos que ϕ es continua, obteniendo así que $\phi(G)$ es homeomorfo a G. Por tanto $\phi(G)$ también es un grupo polaco. Por la proposición 1.3.7 concluimos que $\phi(G)$ es cerrado en S_∞. $\square$

3.2. Teorema de Kallman

En esta sección mostramos la relación que guarda el fenómeno de la continuidad automática con la unicidad de la topología polaca sobre un grupo. Para esto presentaremos algunos resultados sobre el grupo simétrico S_∞ con la topología producto. Este resultado ha motivado preguntarse si un resultado similar vale para semigrupos polacos (ver (Elliott et al., 2019b,a; Mesyan et al., 2018)).

Proposición 3.2.1. Sean G un grupo, τ_1 y τ_2 topologías polacas en G que hacen a G grupo topológico. Si $B_{\tau_1}(X) = B_{\tau_2}(X)$, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración. Considere la función identidad $i : (G, \tau_1) \to (G, \tau_2)$. Por el lema 1.1.15, los conjuntos borelianos tienen la Propiedad de Baire. Entonces se tiene que la función i es Baire medible, luego por la continuidad automática (ver el teorema 3.1.4) se concluye que i es continua y por lo tanto, $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Siguiendo el mismo razonamiento, $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y por lo tanto, la igualdad. □

Proposición 3.2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$A_n = \{f \in S_\infty \mid f(k) = k, \textit{ para todo } k \leq n\}.$$

Entonces $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de la función identidad $1_\mathbb{N}$ con la topología producto.

Demostración. Sea U un abierto de S_∞ que contiene a $1_\mathbb{N}$. Entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, ..., n_k \in$

$\mathbb{N}$ tales que $1_{\mathbb{N}} \in v(n_1, n_2, ..., n_k) \subseteq U$. Por definición $1_{\mathbb{N}} \in A_{n_k} \subseteq v(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Veamos que $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau_{prod}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A_n = \bigcap_{i=1}^{n} v(i,i)$, demostrando así lo que queríamos. □

Proposición 3.2.3. Sea τ una topología T_2 sobre S_∞. Para cada $n \geq 2$, el conjunto A_n es cerrado respecto a τ.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $B_n = \{f \in S_\infty \mid f(k) = k, \forall k \geq n\}$. Veamos que $\star_n = \{f \in S_\infty \mid f \circ g = g \circ f, \textit{ para todo } g \in B_n\}$ es igual a A_n, para cada $n \geq 2$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ y comprobemos que $A_n \subseteq \star_n$.

Sean $f \in A_n$ y $g \in B_n$. Tomemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y consideremos los 2 casos posibles:

- Si $k \leq n$, entonces $f(k) = k$ y $g(k) \leq n$. Por lo tanto, $g(f(k)) = g(k)$ y $f(g(k)) = g(k)$.
- Si $k > n$, entonces $f(k) > n$ y $g(k) = k$. Por lo tanto, $g(f(k)) = f(k)$ y $f(g(k)) = f(k)$.

Por tanto $f \in \star_n$.

Finalmente, y manteniendo fijo $n \in \mathbb{N}$, sean $f \in \star_n$ y $k \leq n$. Veamos que $f \in A_n$.

Supongamos que $f(k) > n$. Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \neq k$ y $l \leq n$. Considere la función $g \in B_n$ definida de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} l & \textit{si } x = k, \\ k & \textit{si } x = l, \\ x & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por hipótesis $f \circ g = g \circ f$, entonces $f(k) = g(f(k)) = f(g(k)) = f(l)$. Esto contradice que f sea inyectiva. Por tanto $f(k) \leq n$.

- Ahora supongamos que $f(k) = l$ con $l \leq n$ y $l \neq k$. Tomemos $p \leq n$ tal que p es diferente de k y de l, y definamos la función $h \in B_n$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} p & \textit{si } x = k, \\ l & \textit{si } x = l, \\ k & \textit{si } x = p, \\ x & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por hipótesis $f \circ h = h \circ f$, entonces $f(k) = l = h(l) = h(f(k)) = f(h(k)) = f(p)$, contradiciendo que f es inyectiva. Así demostramos que $f \in A_n$.

Para terminar, veamos que A_n es cerrado en τ para $n \geq 2$. Sean $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ una sucesión en A_n y $f \in S_\infty$ tales que $f_i \to f$. Sea ahora $g \in B_n$. Por definición de A_n, $f_i \circ g = g \circ f_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $(S_\infty, \circ, \tau)$ es grupo topológico, entonces $f_i \circ g \to f \circ g$ y $g \circ f_i \to g \circ f$. Por unicidad de límite, $f \circ g = g \circ f$. □

Teorema 3.2.4 (Kallman)**.** La única topología que hace a S_∞ grupo polaco es la topología producto.

Demostración. Sea τ una topología que hace a S_∞ grupo polaco. Como τ hace a S_∞ T_2 y por la proposición 3.2.3 se concluye que para cada $n \geq 2$, el conjunto A_n es $\tau-$cerrado. Por la proposición

3.2.2, los conjuntos A_n forman una base de vecindades de la identidad de S_∞ con la topología producto. Necesitamos ver que $\tau_{prod} \subseteq B(\tau)$, y para esto bastará con demostrar que dado un $D = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ denso numerable de S_∞ en τ_{prod}, entonces la colección numerable $\{f_i \circ A_n \mid i, n \in N\}$ es base para S_∞ en τ_{prod}.

Sean U un τ_{prod}-abierto y $f \in U$. Note que $f^{-1} \circ U$ es τ_{prod}-abierto, puesto que $L_f^{-1}(U) = f^{-1} \circ U$. Como $I \in f^{-1} \circ U$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \in A_n \subseteq f^{-1} \circ U$, esto es, $f \in f \circ A_n \subseteq U$.

Para τ_{prod}-abierto $f \circ A_n$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i \in f \circ A_n$. Por tanto también existe $g \in A_n$ tal que $f_i = f \circ g$; es decir, $f_i \circ g^{-1} = f$. De aquí concluimos que $f \in f_i \circ A_n$.

Como

$$f_i \circ A_n \subseteq (f \circ A_n) \circ A_n = f \circ (A_n \circ A_n) \subseteq f \circ A_n \subseteq U,$$

entonces por transitividad $f \in f_i \circ A_n \subseteq U$. Esto es, $\{f_i \circ A_n \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ es una base para S_∞ en τ_{prod} donde $f_i \circ A_n \in B(\tau)$, para cada $i, n \in \mathbb{N}$, pues son conjuntos $\tau-$cerrados. Concluimos que $B(\tau_{prod}) \subseteq B(\tau)$.

Por tanto la función identidad $i : (S_\infty, \tau) \to (S_\infty, \tau_{prod})$ es Borel medible y por el teorema 1.1.24 se concluye que $B(\tau) \subseteq B(\tau_{prod})$. Esto es, $B(\tau) = B(\tau_{prod})$. Por la proposición 3.2.1, entonces $\tau = \tau_{prod}$. $\square$

Para los semigrupos también se ha estudiado unicidad de topología polaca, por ejemplo:

- La topología producto es la única topología en $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ que lo hace un semigrupo polaco (Teorema 3.4 en (Mesyan et al., 2018)).
- La τ_{pp} es la única topología polaca en $I(\mathbb{N})$ que lo hace semigrupo inverso polaco (ver (Elliott

et al., 2019a)).

3.3. Propiedad de Pettis para semigrupos polacos

En esta sección la propiedad de Pettis para semigrupos. Hasta donde conocemos esta propiedad no había sido estudiada antes. Esta definición surge con el objeto de generalizar el teorema de Pettis al contexto de semigrupos inversos polacos. Mostraremos que $I(\mathbb{N})$ no tiene la propiedad de Pettis, sin embargo veremos que contiene subsemigrupos que si la tienen.

Sea S un semigrupo inverso polaco. Diremos que S tiene la *Propiedad de Pettis*, si dado $A \subseteq S$ con la propiedad de Baire y no magro, el siguiente conjunto

$$A^*A = \{x^*y : x, y \in A\}$$

contiene una vecindad abierta no vacía.

Como ejemplo trivial todo grupo polaco tiene esta propiedad por el teorema de Pettis. Uno de los objetivos más importantes de este trabajo es determinar si existen ejemplos de monoides inversos polacos con la propiedad de Pettis. En este sentido, los ejemplos que analizaremos con mas cuidado son algunos subsemigrupos inversos polacos de $(I(\mathbb{N}), \tau_{pp})$. En la proposición 3.3.3 veremos que $I(\mathbb{N})$ no tiene la propiedad de Pettis; sin embargo, como mostraremos a continuación, $I(\mathbb{N})$ admite subsemigrupos polacos (que no son grupos) con esta propiedad.

Teorema 3.3.1. Sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ disjuntos dos a dos. Entonces el conjunto

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_\infty(B_i) \cup \{1_\emptyset\}$$

es un semigrupo inverso polaco con la τ_{pp}.

Demostración. Veamos que S es un semigrupo inverso topológico con la τ_{pp}. Como la asociatividad y la continuidad de las funciones composición e inversa se heredan del semigrupo inverso topológico $I(\mathbb{N})$, bastaría ver que S es cerrado bajo la operación composición, y que para toda $f \in S$, se garantice que $f^{-1} \in S$. Sean $f, g \in S$. Se consideran 3 casos:

1. Si $f = 1_\emptyset$ o $g = 1_\emptyset$, entonces $f \circ g = 1_\emptyset \in S$.

2. Si $f \in S_\infty(B_i)$ y $g \in S_\infty(B_j)$, con $i, j \in \mathbb{N}$ diferentes, entonces $f \circ g = 1_\emptyset \in S$, pues $B_i \cap B_j = \emptyset$.

3. Si $f, g \in S_\infty(B_i)$, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $f \circ g \in S_\infty(B_i) \in S$.

Como $S_\infty(B_i)$ es grupo, para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces para toda $f \in S$, se cumple que existe un único $f^{-1} \in S$. De aquí se concluye que S es semigrupo inverso topológico. Veamos que S es cerrado.

Sean $f \in I(\mathbb{N}) \setminus \{1_\emptyset\}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ tales que $f_n \to f$. Dado $b \in Dom(f)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $f_n \in v(b, f(b))$. Por tanto, si $n \geq n_0$, entonces $b \in Dom(f_n)$. Como la familia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es disjunta dos a dos, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \in B_{i_0} = Dom(f_n)$ para todo $n \geq n_0$. De aquí concluimos que $f_n \in S_\infty(B_{i_0})$, para todo $n \geq n_0$. Como el grupo simétrico es cerrado en $I(\mathbb{N})$ (ver la proposición 2.3.13), entonces $f \in S_\infty(B_{i_0})$, y por tanto $f \in S$.

Por la proposición 1.1.7 concluimos que S es un semigrupo inverso polaco. $\square$

Teorema 3.3.2. Sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ disjuntos dos a dos. Entonces el semigrupo inverso polaco

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_\infty(B_i)\cup\{1_\emptyset\}$$

tiene la propiedad de Pettis con la τ_{pp}.

Demostración. Sea $A\subseteq S$ con la propiedad de Baire y no magro. Como $A\cap\{1_\emptyset\}$ es magro y $A=(A\cap\{1_\emptyset\})\cup\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A\cap S_\infty(B_i))$, entonces existe un $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $A\cap S_\infty(B_{i_0})$ no es magro. Como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_0\}} S_\infty(B_i)\cup\{1_\emptyset\}$ es cerrado en $I(\mathbb{N})$ (ver la proposición 3.3.1), entonces es cerrado en S, y por tanto $S_\infty(B_{i_0})$ es abierto en S.

Por la proposición 1.1.11, $A\cap S_\infty(B_{i_0})$ tiene la propiedad de Baire en $S_\infty(B_{i_0})$. Por el teorema 2.2.5, $S_\infty(B_{i_0})$ es un grupo topológico Baire, entonces por el teorema de Pettis 3.1.3 aplicado al conjunto $A\cap S_\infty(B_{i_0})$, existe un abierto W en $S_\infty(B_{i_0})$ tal que $1_{B_{i_0}}\in W$ y

$$W\subseteq(A\cap S_\infty(B_{i_0}))^{-1}(A\cap S_\infty(B_{i_0}))\subseteq A^{-1}A.$$

Como $S_\infty(B_{i_0})$ es abierto en S, entonces W es abierto en S; es decir, S tiene la propiedad de Pettis. □

La siguiente propiedad demuestra que $I(\mathbb{N})$ no tiene la propiedad de Pettis.

Proposición 3.3.3. Sean $L = \{Y \subseteq \mathbb{N} \mid Y \textit{ es coinfinito}\}$ y

$$A = \{f \in I(\mathbb{N}) \mid Dom(f), Im(f) \in L\}.$$

Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

$i)$ A tiene la propiedad de Baire y no es magro;

$ii)$ A es simétrico y $AA = A$;

$iii)$ A tiene interior vacío.

Demostración. $i)$ Ya que $\mathcal{B}(I(\mathbb{N})) \subseteq PB(I(\mathbb{N}))$, entonces bastará con mostrar que A es G_δ y así concluir que A tiene la propiedad de Baire. Para esto, usaremos el hecho de que L se puede ver como $\{f \in 2^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}(0) \textit{ es infinito}\}$ y es G_δ, pues

$$L = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geq n}} v(m,0) \cap 2^{\mathbb{N}}.$$

Como las funciones Dom e Im son continuas, y $A = Dom^{-1}(L) \cap Im^{-1}(L)$, entonces A es G_δ.

El siguiente paso es mostrar que A no es magro. Veamos que A es denso. Sea U un abierto básico no vacío de $I(\mathbb{N})$,

$$U = \bigcap_{i=1}^{n_1} v(x_i, y_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n_2} w_1(v_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n_3} w_2(z_i).$$

Entonces la función $f:\bigcup_{i=1}^{n_1}\{x_i\}\to\bigcup_{i=1}^{n_1}\{y_i\}$ dada por $f(x_i)=y_i$, para cada $i\in\{1,2,...,n_1\}$, pertenece a $A\cap U$.

Por la Propiedad 1.1.19, concluimos que A no es magro.

$ii)$ Por definición del conjunto A, si $f\in A$, entonces $f^{-1}\in A$. Veamos que $AA=A$.

Sean $g,h\in A$. Por definición, $Dom(g\circ h)=h^{-1}(Dom(g)\cap Im(h))$ y como h es biyectiva, entonces $Dom(g)\cap Im(h)\in L$. Por tanto $AA\subseteq A$.

Por otro lado, note que si $f\in A$, entonces $f=f\circ 1_{Dom(f)}$. Concluimos que $A=AA$.

$iii)$ Supongamos que no. Sea $f\in A^{\circ}$. Entonces existe un abierto básico tal que

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n_1}v(x_i,y_i)\cap\bigcap_{i=1}^{n_2}w_1(v_i)\cap\bigcap_{i=1}^{n_3}w_2(z_i)\subseteq A.\ (\star)$$

Como los conjuntos $X=\mathbb{N}\setminus(\bigcup_{i=1}^{n_1}\{x_i\}\cup\bigcup_{i=1}^{n_2}\{v_i\})$ y $Y=\mathbb{N}\setminus(\bigcup_{i=1}^{n_1}\{y_i\}\cup\bigcup_{i=1}^{n_3}\{z_i\})$ son equipotentes, entonces existe una función $g:X\to Y$ biyectiva que permite definir a $h:\mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{n_2}\{v_i\}\to\mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{n_3}\{z_i\}$ como sigue:

$$h(n)=\begin{cases} y_i, & \textit{si } n\in\bigcup_{i=1}^{n_1}\{x_i\},\\ g(n), & \textit{si no.}\end{cases}$$

Por tanto $h\notin A$, pero esto contradice $(\star)$. □

Surgen entonces preguntas naturales y aún no exploradas, como por ejemplo:

1. ¿Se pueden caracterizar los semigrupos que tienen la propiedad de Pettis?

2. ¿Las uniones numerables de grupos simétricos (con las propiedades específicas en los domi-

nios) son el único tipo de subsemigrupos en $I(\mathbb{N})$ con la propiedad de Pettis?

3. ¿Se puede generalizar el teorema 3.3.1? Es decir, sea S un semigrupo polaco y $G, H \subseteq S$ grupos polacos. ¿El semigrupo generado por $G \cup H$ es polaco? Si así fuera, ¿tiene la propiedad de Pettis?

4. ¿Existe una relación entre los semigrupos que tienen la propiedad de Pettis con la continuidad automática para semigrupos? (Este último concepto fue introducido en (Elliott et al., 2019a).)

Referencias Bibliográficas

Cain, A. J. (2016). Nine chapters on the semigroup art.

Camargo, J. and Villamizar, E. (2019). *Topología general*. Publicaciones Universidad Industrial de Santander.

Di Prisco, C. A. and Uzcátegui Aylwin, C. (2020). *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*.

Elliott, L., Jonušas, J., Mesyan, Z., Mitchell, J., Morayne, M., and Péresse, Y. (2019a). Automatic continuity, unique polish topologies, and zariski topologies (part i, monoids). *arXiv e-prints*, pages arXiv–1912.

Elliott, L., Jonušas, J., Mitchell, J., Morayne, M., and Péresse, Y. (2019b). Automatic continuity and uniqueness of polish semigroup topologies. *arXiv preprint arXiv:1912.07029*.

Gao, S. (2008). *Invariant descriptive set theory*. CRC Press.

Guerrero Mojica, J. (2021). Espacios polacos universales. Master's thesis.

Kechris, A. (1995). Classical descriptive set theory, 1995. *Graduate Texts in Mathematics*.

Lawson, M. V. (1998). *Inverse semigroups, the theory of partial symmetries*. World Scientific.

Mesyan, Z., Mitchell, J. D., and Péresse, Y. (2018). Topological transformation monoids. *arXiv preprint arXiv:1809.04590*.

Perez, J. and Uzcategui, C. (2020). Topologies on the symmetric inverse semigroup. *arXiv preprint arXiv:2012.03041*.

Preston, G. B. (1954). Inverse semi-groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):396–403.

Pérez, J. (2019). Topologías sobre semigrupos inversos. Master's thesis.

Vagner, V. (1952). Generalized groups. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 84, pages 1119–1122.