

Procesos de Argumentación y de Demostración de Estudiantes en un Curso de Precálculo

Edwin López Velandia

Trabajo de Grado para Optar el Título de Magíster en Educación Matemática

Director

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2017

...Claudia, Edwin y Dante...

...Mamá y papá...

...Tía Flor y Tío Manuel...

Agradecimientos

A mis padres y mis hermanos por ser la fuente de mi motivación.

A mis Profesores de la CDR del Valle de San José, a quienes llevo en el corazón.

A mi director del trabajo de grado, profesor Jorge Enrique Fiallo Leal, por el tiempo, la paciencia y su invaluable orientación en el proceso de esta investigación.

A las profesoras Leonor Camargo Uribe y Sandra Evely Parada Rico por sus valiosos aportes los cuales, sin duda, enriquecieron el reporte de la investigación.

A Claudia, quien me inspiró a comenzar y terminar esta maestría; gracias por tanto apoyo incondicional... *Gracias por estos años que he compartido junto a ti.*

Índice

Introducción	19
1. Problema, Preguntas y Objetivos de la Investigación	22
1.1 Problema de investigación	22
1.2 Preguntas de investigación.....	26
2. Objetivos.....	27
3. Antecedentes.....	27
3.1 La relación entre argumentación y demostración	29
3.2 Procesos de argumentación y de demostración	35
4. Marco Teórico	42
4.1 Modelo de Pedemonte.....	42
4.1.1 El Modelo de Toulmin:	43
4.1.2 Modelo cK¢ (conceptions, knowing, concept):	46
4.1.3 Modelo de Pedemonte:	48
4.2 Proceso de argumentación y proceso de demostración.....	49
4.2.1Proceso de argumentación:	49
4.2.2 Proceso de demostración:	53
4.3 Constructo de unidad cognitiva	59

5. Metodología.....	62
5.1 Contexto de la investigación y población de estudio.....	62
5.1.1 Curso de precálculo:	63
5.1.2 Talleres del curso:	64
5.1.3 Selección de casos de estudio:	77
5.2 Recolección de los datos	79
5.2.1 Rol del profesor:	79
5.2.2 Rol del investigador:	79
5.2.3 Toma de datos:	80
5.3 Análisis de los datos.....	80
5.3.1 Instrumentos de análisis:	80
6. Análisis de procesos de argumentación y de demostración	83
6.1 Procesos identificados en el taller “Números y Operaciones”	84
6.1.1 Problema 1.1	84
6.1.2 Problema 1.2	88
6.1.3 Problema 1.3	92
6.2 Procesos identificados en el taller “Matemática y Realidad”	97
6.2.1 Problema 2.1	97
6.2.2 Problema 2.2	107

6.2.3 Problema 2.3	111
6.2.4 Problema 2.4	115
6.2.5 Problema 2.5	121
6.3 Procesos identificados en el taller “Recipientes”	127
6.3.1 Problema 3.1	127
6.3.2 Problema 3.2	136
6.4 Procesos identificados en el taller “Área Máxima”	143
6.4.1 Problema 4.1	143
6.4.2 Problema 4.2	147
6.5 Proceso identificado en el taller “Caja sin tapa”	150
6.5.1 Problema 5.1	151
6.6 Resumen del análisis de datos.....	158
7. Conclusiones.....	167
Referencias bibliográficas.....	174

Lista de figuras

Figura 1. Tipos de pruebas según Balacheff	35
Figura 2: Esquemas de demostración de Harel y Sowder (1998)	36
Figura 3: Estructura básica de un argumento de Toulmin	44
Figura 4: Modelo de Toulmin.	46
Figura 5: Integración del modelo cK¢ con el modelo de Toulmin.	49
Figura 6: Esquema de un paso deductivo en el modelo de Toulmin.	50
Figura 7: Esquema de un paso inductiva por generalización sobre los enunciados	51
Figura 8: Esquema de un paso inductiva por generalización sobre los enunciados.	52
Figura 9: Esquema de un paso en el modelo de Toulmin abductiva.	52
Figura 10: Tipos de demostración.....	54
Figura 11: Esquema de empirismo ingenuo.....	55
Figura 12: Esquema de experimento crucial basado en ejemplo.....	55
Figura 13: Esquema de experimento crucial constructivo.....	56
Figura 14: Ejemplo genérico analítico (EGA).	56
Figura 15: Ejemplo genérico intelectual (EGI).....	57
Figura 16: Experimento mental transformativo.....	57
Figura 17: Experimento mental estructural (EME).	58

Figura 18: Esquema para el tipo deductiva formal transformativa (DFT).....	58
Figura 19: Esquema para el tipo deductiva formal estructural (DFE).	59
Figura 20: Problema seleccionado del taller “Números y operaciones”.....	66
Figura 21: Estructura del ejemplo: Experimento crucial constructivo.	66
Figura 22: Demostración Gráfica de la ubicación del punto más cercano a a.b	67
Figura 23: Problema seleccionado del taller “Números y operaciones”.....	68
Figura 24: Modelación en GeoGebra.....	68
Figura 25: Estructura del ejemplo: Empirismo ingenuo inductivo.	69
Figura 26: Problema seleccionado del taller “Matemática y realidad”.....	69
Figura 27: Estructura del ejemplo: Experimento crucial basado en ejemplos.....	70
Figura 28: Estructura del Ejemplo: Deductiva Formal Estructurante.....	71
Figura 29: Problema seleccionado del taller “Recipientes”.....	74
Figura 30: Ejemplo Demostración deductiva formal estructurante.	75
Figura 31: Problema seleccionado del taller “Área máxima”.....	75
Figura 32: Problema seleccionado del taller “Caja sin tapa”.....	76
Figura 33: Integración del modelo cK¢ con el modelo de Toulmin	81
Figura 34: Cuadro para el análisis de la continuidad del sistema de referencia	82
Figura 35: Cuadro para el análisis de la estructura.	83
Figura 36. Problema 1.1.....	84

Figura 37: Estructura de la argumentación del Problema 1.1 realizada por Carlos.....	85
Figura 38: Proceso del estudiante.	86
Figura 39: Cuadro Comparativo 1, continuidad del sistema de referencia (Problema 1.1).....	87
Figura 40: Cuadro Comparativo 2, continuidad estructural (Problema 1.1).....	87
Figura 41: Problema 1.2.....	88
Figura 42: Estructura de la argumentación del Problema 1.2 realizada por Carlos.....	89
Figura 43: Esquema de la demostración del Problema 1.2 realizada por Carlos.....	90
Figura 44: Cuadro Comparativo 3, continuidad del sistema de referencia (Problema 1.2).....	91
Figura 45: Cuadro Comparativo 4, continuidad estructural (Problema 1.2).....	91
Figura 46: Problema 1.3.....	92
Figura 47: Estructura de la argumentación del Problema 1.3 realizada por Carlos.....	93
Figura 48: Estructura de la demostración del Problema 1.3 realizado por Carlos.....	95
Figura 49: Cuadro Comparativo 5, ruptura del sistema de referencia (Problema 1.3).	96
Figura 50: Cuadro Comparativo 6, continuidad estructural (Problema 1.3).....	97
Figura 51: Problema 2.1.....	97
Figura 52: Hoja de trabajo de Sofía.	98
Figura 53: Esquema de la argumentación de Sofía y Nicol en el Problema 2.1.....	99
Figura 54: Hoja de trabajo de Nicol.....	100
Figura 55: Esquema de la argumentación del Problema 2.1 realizada por Nicol.	100

Figura 56: Esquema de la argumentación de Nicol.	101
Figura 57: Hoja de trabajo de Nicol.....	102
Figura 58: Esquema de la argumentación construida en equipo por de Nicol y Sofía.	103
Figura 59: Esquema de la demostración de Nicol y Sofía del Problema 2.1.....	105
Figura 60: Cuadro Comparativo 7, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.1).....	106
Figura 61: Cuadro Comparativo, continuidad estructural (Problema 2.1).....	106
Figura 62: Hoja de trabajo de Nicol.....	108
Figura 63: Esquema de la argumentación del Problema 2.2 de Nicol y Sofía.....	108
Figura 64: Esquema de la argumentación de Nicol.	109
Figura 65: Cuadro Comparativo 9, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.2).....	110
Figura 66: Cuadro Comparativo 10, continuidad estructural (Problema 2.2).....	110
Figura 67: Esquema de la argumentación del Problema 2.3 realizado por Nicol y Sofía.	111
Figura 68: Esquema de la argumentación del Problema 2.3 realizado por Nicol y Sofía.	113
Figura 69: Cuadro Comparativo 11, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.3).....	114
Figura 70: Cuadro Comparativo 12, continuidad estructural (Problema 2.3).....	114
Figura 71: Hoja de trabajo de Lia.	116
Figura 72: Esquema de la argumentación del Problema 2.4 realizado por Lia.	117
Figura 73: Esquema de la demostración del Problema 2.4 realizado por Lia.....	119
Figura 74: Cuadro Comparativo 13, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.4).....	120

Figura 75: Cuadro Comparativo 14, continuidad estructural (Problema 2.4).....	120
Figura 76: Hoja de trabajo de Lia.	122
Figura 77: Esquema de la argumentación del Problema 2.5 realizado por Lia.	122
Figura 78: Hoja de trabajo de Lia.	123
Figura 79: Esquema de la demostración del Problema 2.4 realizado por Lia.....	125
Figura 80: Cuadro Comparativo 15, ruptura del sistema de referencia (Problema 2.5).	126
Figura 81: Cuadro Comparativo 16, continuidad estructural (Problema 2.5).....	127
Figura 82: Hoja de trabajo de Diego.....	129
Figura 83: Hoja de trabajo de Carlos.	130
Figura 84: Hoja de trabajo de Carlos.	131
Figura 85: Esquema de la argumentación del Problema 3.1 realizado por Diego y Carlos.	131
Figura 86: Esquema de la demostración del Problema 3.1 realizado por Diego y Carlos.....	134
Figura 87: Cuadro Comparativo 17, ruptura del sistema de referencia (Problema 3.1).	135
Figura 88: Cuadro Comparativo 18, continuidad estructural (Problema 3.1).....	135
Figura 89: Esquema de la argumentación del Problema 3.2 realizado por Andrés.	136
Figura 90: Hoja de trabajo de Nicol.....	137
Figura 91: Esquema de la argumentación del Problema 3.2 realizado por Andrés y Nicol.	139
Figura 92: Cilindros contruidos por los estudiantes.....	140
Figura 93: Esquema de la demostración del Problema 3.2 realizado por Andrés y Nicol.	141

Figura 94: Cuadro Comparativo 19, continuidad del sistema de referencia (Problema 3.1).....	142
Figura 95: Cuadro Comparativo 20, continuidad estructural (Problema 3.1).....	142
Figura 96: Hoja de trabajo de Juan.	144
Figura 97: Esquema de la argumentación del Problema 4.1 realizada por Juan.....	144
Figura 98: Esquema de la demostración del Problema 4.1 realizada por Juan.....	145
Figura 99: Cuadro Comparativo 21, unidad del sistema de referencia (Problema 4.1).....	146
Figura 100: Cuadro Comparativo 22, continuidad estructural (Problema 4.1).....	146
Figura 101: Esquema de la argumentación del Problema 4.2 realizada por Carlos.	148
Figura 102: Esquema de la demostración del Problema 4.2 realizada por Carlos.....	149
Figura 103: Cuadro Comparativo 23, continuidad del sistema de referencia (Problema 4.2)....	150
Figura 104: Cuadro Comparativo 24, continuidad estructural (Problema 4.2).....	150
Figura 105: Hoja de trabajo de Carlos.	152
Figura 106: Hoja de trabajo de Carlos.	152
Figura 107: Nueva hoja de trabajo de Carlos.....	153
Figura 108: Trabajo de Carlos tomado del vídeo.....	154
Figura 109: Esquema de la argumentación del Problema 5.1 realizado por Carlos y Diego.	155
Figura 110: Hoja de trabajo de Carlos.	157
Figura 111: Estructura de la argumentación de Carlos.....	157
Figura 112: Cuadro Comparativo 26, continuidad estructural (Problema 5.1).....	158

Figura 113: Resumen del análisis.	160
Figura 114: Resumen del análisis.	161
Figura 115: Resumen del análisis.	164
Figura 116: Resumen del análisis.	165
Figura 117: Resumen del análisis.	166

Lista de Apéndice

Apéndice A: Test diagnóstico	180
Apéndice B: Taller 1	183
Apéndice C: Taller 2	186
Apéndice D: Taller 3.....	188
Apéndice E: Taller 4	191
Apéndice F: Taller 5	195
Apéndice G: Taller 6.....	201
Apéndice H: Taller 7.....	206
Apéndice I: Taller 8	210
Apéndice J: Taller 9	213
Apéndice K: Taller 10.....	216
Apéndice L: Taller 11	218
Apéndice M: Taller 12	220
Apéndice N: Taller 13.....	222
Apéndice O: Taller 14.....	226

RESUMEN

TÍTULO: PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES EN UN CURSO DE PRECÁLCULO**

AUTOR: EDWIN LÓPEZ VELANDIA

PALABRAS CLAVE: ARGUMENTACIÓN, DEMOSTRACIÓN, DIFICULTADES, MODELO DE TOULMIN, MODELO CKC, UNIDAD COGNITIVA.

Descripción:

Literatura referente a la demostración en educación matemática reporta que los estudiantes presentan dificultades cuando resuelven problemas de demostración y nuestra experiencia nos ha mostrado que muchos estudiantes que ingresan la Universidad Industrial de Santander no son ajenos a esta problemática. Por lo que pretendemos con esta investigación alcanzar los siguientes objetivos de investigación, 1) *Analizar la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de estudiantes de un curso de precálculo en la resolución de problemas de variación y cambio*, 2) *Identificar dificultades entre los procesos de argumentación y de demostración de estudiantes de un curso de precálculo en la resolución de problemas de variación y cambio*.

Para esto empleamos un marco teórico compuesto por el Modelo de Pedemonte, el constructo de unidad cognitiva, una caracterización de argumentación y una de demostración. Encontrando que los estudiantes realizan argumentaciones y construyen demostraciones a partir de procesos empíricos basados solo en ejemplos, mostrando unidad cognitiva empírica, que reportamos como una dificultad que presentan los estudiantes, ya que esto les impide realizar demostraciones con pasos deductivos que les permita dar solución adecuada a los problemas planteados. Además reportamos dificultades emergentes en el trabajo de los estudiantes y que se hacen aún más difícil su actividad matemática como son la inadecuada interpretación de los problemas y abordar problemas de variación y cambio como si fueran problemas invariantes.

* Trabajo de Maestría

* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de la Matemática.

SUMMARY

TITLE: ARGUMENTATION AND PROOF PROCESSES OF STUDENTS IN A PRE-CALCULUS COURSE**

AUTHOR: EDWIN LÓPEZ VELANDIA

KEYWORDS: ARGUMENT PROCESSES, PROOF PROCESSES, DIFFICULTIES, TOULMIN MODEL, CK ϕ MODEL, COGNITIVE UNIT.

Description:

Literature regarding the proof in mathematical education reports that students present difficulties when solving proof problems and our experience has shown us that many students entering the Universidad Industrial de Santander are no strangers to this problem. With this research, we aim to achieve the following research objectives: 1) Analyze the cognitive unit between the argumentation and proof processes of students of a pre-calculus course in solving problems of variation and change, 2) Identify difficulties between the argumentation and proof processes of students of a pre-calculus course in solving problems of variation and change.

For this we use a theoretical framework composed of the Pedemonte Model, the cognitive unit construct, an argumentation, and a proof characterization. Finding It was found that students make argumentations and construct proofs from empirical processes based only on examples, showing empirical cognitive unity, which we report as a difficulty presented by students because this prevents them from performing proofs with deductive steps that allow them to give adequate solutions to the problems posed. In addition, we report emerging difficulties in the students' work that make their mathematical activity even more difficult, such as inadequate interpretation of the problems and dealing with problems of variation and change as if they were invariant problems.

* Master's Thesis

* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de la Matemática.

Introducción

Diversos han sido los lineamientos que la comunidad de investigadores en educación matemática han dado sobre la argumentación y la demostración en matemáticas; por ejemplo, en los *Principios y estándares para la educación matemática* (NCTM, 2003) se plantea el desarrollo del proceso de razonamiento y la demostración como unos de los aspectos fundamentales de la matemática escolar, señalando que los estudiantes desde temprana edad deberían entender que siempre hay que razonar las afirmaciones que se hagan, hacer generalizaciones, crear conjeturas y demostrarlas.

Hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento (NCTM, 2003, p.60)... Junto con establecer e investigar conjeturas, los estudiantes deberían aprender a contestar la pregunta ¿por qué funciona esto?.. Para ayudar a desarrollar y justificar conjeturas más generales y, también, a refutar conjeturas, los profesores pueden preguntar: ¿funciona siempre?, ¿algunas veces?, ¿nunca?, ¿por qué? (ibíd., p.61).

Los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* del Ministerio de Educación de Colombia precisan que un estudiante es matemáticamente competente si es capaz de “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (MEN, 2006, p. 51). Por lo que se esperaría que los estudiantes, a lo largo de la secundaria, adquieran cierta destreza para realizar procesos de argumentación y demostración ya que con esto, más que adquirir un cúmulo de conocimientos, adquieren habilidades matemáticas básicas.

No obstante, suele ser común escuchar a los profesores señalar que los estudiantes no evidencian habilidades para realizar procesos demostrativos deductivos en los cursos de matemáticas básicas (Cálculo Diferencial, Álgebra Lineal o Geometría Euclidiana) que deben cursar en los primeros semestres de la universidad. Situación constatada en el curso de precálculo que ofrece la Universidad Industrial de Santander a estudiantes de carreras de ciencias e ingenierías, con el propósito de desarrollar pensamiento variacional desde un enfoque de resolución de problemas (Fiallo y Parada, 2014) donde, en un grupo de 26 integrantes, encontramos que ellos no realizaron procesos de argumentación ni demostración basados en pasos deductivos que evidenciara lo que está propuesto en los documentos nacionales.

Al indagar en la literatura, encontramos que los estudiantes de todos los niveles educativos tienen dificultades para producir demostraciones en el aula (Harel y Sowder, 1998; Moore 1994, citado por Alvarado y González, 2010; Fischbein, 1982; Senk, 1985 citado por Balacheff, 1988, Recio y Godino, 1996; Recio, 2000; Fiallo, 2011; y, Fiallo y Gutiérrez, 2017). Fenómeno que se convierte en la problemática de esta investigación, la cual no es nueva en el campo de la educación matemática.

Nuestro estudio tiene como propósito ayudar a comprender las dificultades presentadas por los estudiantes de primer semestre universitario en los procesos de argumentación y de demostración. Para cumplir con este objetivo usamos el constructo de unidad cognitiva (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la fase de argumentación y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006, citado en Fiallo, 2011). Además tenemos en cuenta la caracterización de los procesos de argumentación y de demostración propuesta por varios investigadores, entre ellos Pedemonte (2002 y 2005),

Miyakawa (2005), Fiallo (2011) y Fiallo y Gutiérrez (2017), quienes analizan el vínculo entre argumentos espontáneos planteados para el planteamiento de una conjetura o enunciado conclusión (*llamado proceso de argumentación*) y argumentos matemáticamente aceptables para la construcción de la demostración (*llamado proceso de demostración*) con una herramienta de análisis que integra el Modelo $ck\phi$ (Balacheff y Margolinas, 2005) al Modelo de Toulmin (Toulmin, 2007).

Resaltamos que la “argumentación” se refiere a todo el proceso que está relacionado con *el planteamiento* de la conjetura” y “demostración” se refiere al proceso final que valida la conjetura anunciada (Pedemonte, 2002, p. 83) y así es como lo consideramos en esta investigación.

Mediante una metodología de investigación cualitativa registramos y analizamos los procesos de argumentación y de demostración realizados por estudiantes durante algunos talleres del curso de precálculo citado anteriormente.

El documento está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo concretamos el problema, las preguntas y objetivos de la investigación. En el segundo capítulo presentamos la relación entre la argumentación y la demostración, además la caracterización de dichos procesos, esto a la luz de los antecedentes de la investigación. En el tercer capítulo, exponemos el marco teórico de nuestro estudio. En el cuarto capítulo, detallamos la metodología y la forma cómo usamos el marco teórico. En el quinto, presentamos los procesos de argumentación y demostración realizados por los estudiantes seleccionados, esto a partir de algunos talleres del curso de precálculo que facilitan los procesos que nos competen. En el capítulo sexto damos las conclusiones del estudio. Finalmente, presentamos las referencias bibliográficas y los anexos.

1. Problema, Preguntas y Objetivos de la Investigación

1.1 Problema de investigación

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen al *razonamiento* como uno de los cinco procesos de la actividad matemática que deben desarrollar los estudiantes. Al respecto, se declara que “el desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes” (p. 54), lo cual llama la atención sobre la superación de la memorización de reglas y algoritmos. Así mismo, para los grados superiores, los estándares señalan que el razonamiento se debe independizarse de lo físico para darle paso a cadenas argumentativas para validar o invalidar conclusiones a través de proposiciones y teorías (MEN, 2006).

En los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) se propone que, además de los contenidos, se deben desarrollar estándares de procesos a lo largo de la formación matemática de los estudiantes. Incluso que la experiencia en la escuela debería ayudar a los estudiantes a reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; a formular e investigar conjeturas matemáticas; a desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticas; y, a elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

Al indagar en la literatura, encontramos que desde hace más de 30 años ya se reportan dificultades cuando los estudiantes se enfrentan a problemas de demostración y aunque se le ha dado una gran importancia al desarrollo de los procesos matemáticos, vemos que en la actualidad la problemática sigue igual en lo referente al razonamiento y la demostración.

Fischbein (1982), por ejemplo, documenta que solo el 14,5% de 400 estudiantes de secundaria de Tel Aviv aceptaban una demostración desarrollada con un razonamiento lógico sin la necesidad de comprobaciones empíricas adicionales. Senk (1985 citado por Balacheff, 2000) reporta que el 85% de 2.699 graduandos de secundaria de los Estados Unidos no dominaba la formulación de una demostración.

Moore (1994, citado por Alvarado y González, 2010) documenta dificultades para realizar demostraciones formales en estudiantes universitarios, dada la falta de habilidad para formular postulados debido al poco entendimiento intuitivo de los conceptos involucrados en la demostración, las imágenes inadecuadas que poseían de los conceptos, y la ausencia de entrenamiento para generar y usar sus propios ejemplos.

Harel y Sowder (1998) señalan que para algunos estudiantes un texto matemático era una argumentación dada su apariencia, es decir, si el formato era de doble columna como el utilizado en geometría durante la secundaria, mientras que otros consideraron como demostraciones a muchas proposiciones matemáticas triviales al juzgarlas por su valor de verdad, en lugar de su valor lógico. Por ejemplo, estudiantes de último año de preparatoria tuvieron dificultad para concebir por qué se debía justificar la proposición "para cualquier cono doble, hay un plano que lo cruza en una elipse", ante esto los estudiantes en lugar de demostrar la proposición, verificaron si era cierta (Harel, 2006).

Recio y Godino (1996) y Recio (2000) reportan las dificultades para generar demostraciones formales, ya que el 32,9% de 429 estudiantes universitarios desarrollaron de manera formal dos demostraciones que les pedían.

Fiallo (2011) y Fiallo y Gutiérrez (2017) a partir del análisis de la unidad cognitiva propuesta por Pedemonte (2002), presentan cuatro ejemplos de unidad o ruptura cognitiva que surgen al estudiar la relación entre los procesos de argumentación para el planteamiento de una conjetura y la construcción de su demostración. En sus investigaciones, los autores resaltan posibles dificultades o fortalezas, en cada uno de los cuatro ejemplos, que pueden ser consideradas en las aulas de clase para garantizar que los estudiantes avancen en su camino hacia la construcción de demostraciones deductivas.

Además, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) sugiere a los profesores de matemáticas trabajar sobre la variación desde temprana edad diseñando estrategias significativas para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional teniendo en cuenta que “el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, p. 73).

Pero en el proyecto “Diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander” (UIS, 2011) se reporta que en el periodo 2002-2008 la materia con el más alto porcentaje de dificultad es Cálculo Diferencial (Botello, 2013). Fiallo y Parada (2014) plantean que las causas de la reprobación en la asignatura podrían ser de tipo: curricular, metodologías de enseñanza o procesos de aprendizaje. Con relación a los aspectos curriculares, los autores pensaron en una de

las causas podría ser que los estudiantes no traen los conocimientos necesarios de álgebra y de precálculo.

Por esta razón Fiallo y Parada crean e implementan un curso precálculo, dirigido a los estudiantes de nuevo ingreso a las facultades de ciencias e ingenierías, que se imparte desde el año 2013 en la Universidad Industrial de Santander como una alternativa preventiva para atender la problemática de repitencia y deserción referente a la materia Cálculo Diferencial.

El curso de precálculo se diseña bajo una metodología que supere el enfoque tradicional, es decir, no es un repaso de los conceptos, de procedimientos o algoritmos necesarios para un curso de Cálculo Diferencial (Fiallo y Parada, 2014), por el contrario se busca el desarrollar “pensamiento variacional”, usando GeoGebra y una metodología basada en la resolución de problemas, en el que se involucran los procesos matemáticos (MEN, 2014), esperando con esto aportar a la producción de aprendizajes significativos alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo Diferencial: la variación y el cambio (Fiallo y Parada, 2014).

En el segundo semestre de 2015, aplicamos una prueba diagnóstica con dos problemas de demostración a un grupo de 26 del curso de precálculo ofrecido por la UIS: el primero fue un problema geométrico que requería al estudiante escoger y justificar una de seis demostraciones (elaboradas según la caracterización de Fiallo (2011)), el segundo fue un problema aritmético que requería del planteamiento de una conjetura y la construcción de su respectiva demostración (véase Apéndice A). Con esta prueba diagnóstica notamos que en las respuestas de los estudiantes predominaban los casos particulares o ejemplos numéricos para apoyar los procesos de argumentación y de demostración solicitados.

A partir de la experiencia expuesta, y con el respaldo de las investigaciones mencionadas, esperamos que esta investigación aporte a: el conocimiento de las dificultades asociadas a los

procesos de argumentación y de demostración de los estudiantes de primer semestre universitario; comprender la naturaleza de esas dificultades y de las respectivas consecuencias en la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo y la resolución de problemas de variación y cambio. Esto nos permitirá brindar a los profesores de matemáticas e investigadores interesados en el tema, un diagnóstico de los procesos de argumentación y de demostración que realizan estudiantes de primer semestre de las carreras de ciencias e ingenierías de la UIS en un curso-laboratorio de precálculo que apunta a promover el desarrollo del “pensamiento variacional” a través del desarrollo de los procesos matemáticos: comunicación, representación, demostración y elaboración comparación y ejecución de procedimientos.

Por las razones anteriores, hemos planteado las siguientes preguntas de investigación.

1.2 Preguntas de investigación

1. ¿Cómo son los procesos de argumentación y de demostración realizados por estudiantes de un curso de precálculo cuando resuelven problemas de variación y cambio?
2. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de un curso de precálculo cuando resuelven problemas de variación y cambio que requieren procesos de argumentación y de demostración?

Para darle repuesta a estas preguntas de investigación, hemos planteado en los siguientes objetivos de investigación.

2. Objetivos

Analizar la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de estudiantes de un curso de precálculo en la resolución de problemas de variación y cambio.

Identificar dificultades entre los procesos de argumentación y de demostración de estudiantes de un curso de precálculo en la resolución de problemas de variación y cambio.

3. Antecedentes

La atención sobre la argumentación en matemáticas ha aumentado recientemente (Knipping, 2003; Pedemonte, 2007), por lo que se ha llamado la atención sobre su desarrollo en las aulas de clase en los niveles de educación básica primaria y secundaria; un ejemplo destacable de ello se halla en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares de los Estados Unidos:

El razonamiento y la demostración no son actividades especiales reservadas para horarios especiales o temas especiales en el plan de estudios, sino que deben ser una parte natural y continua de las discusiones en el aula, sin importar qué tema se esté estudiando (NCTM, 2003, p. 342).

Teniendo en cuenta la considerable capacidad de razonamiento con que los niños llegan a la escuela, los profesores podrían ayudarles a aprender lo que supone el razonamiento matemático para que, al final de su formación matemática escolar, ellos desarrollen y evalúen argumentos

matemáticos y demostraciones; elijan y utilicen varios tipos de razonamiento y métodos de demostración, como señala el NCTM.

Ante esos lineamientos, nos dimos a la búsqueda de trabajos que abordaran la argumentación y la demostración, por lo que encontramos investigaciones que:

1. Diseñan actividades matemáticas para favorecer el desarrollo de la argumentación o la demostración y analizan su impacto (Pedemonte, 2002; Molfino, 2006; Fiallo, 2011; Soler-Álvarez, Ávila y Luque, 2013).
2. Caracterizan los argumentos de los estudiantes en actividades matemáticas (Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1998; Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Manrique, 2011; Soler-Álvarez, 2013; Ortegón, 2013; Sen y Guler, 2015).
3. Reportan dificultades que tienen los estudiantes en torno a la argumentación deductiva (Balacheff, 1988; Herbst, 1999 y Weiss, Herbst y Chen, 2009 citados por Durango, 2017).

Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) reportan que la mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han realizado en el dominio de la geometría euclidiana (varias de ellas apoyadas en el uso de programas informáticos de geometría dinámica), otras en la línea de la teoría de números, el razonamiento probabilístico o el álgebra.

Durango (2017) señala que los estudios sobre la argumentación en educación matemática pueden categorizarse en las siguientes líneas: formación de profesores, cognición, currículo, epistemología y lógica (Mariotti, 2006; Harel y Fuller, 2009; Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013 citados por Durango, *ibíd.*). Los trabajos que diseñan actividades matemáticas para favorecer el desarrollo de la argumentación o que caracterizan los argumentos de los estudiantes en

actividades matemáticas mencionados anteriormente, han usado el modelo de Toulmin para analizar los argumentos de los estudiantes, modelo que se ha convertido en un instrumento útil en educación matemática para explicitar la estructura de la argumentación (esto se precisa en el marco teórico).

Estos hallazgos y, en particular, el trabajo de Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013), condujeron nuestra revisión bibliográfica, de una parte, hacia investigaciones que han estudiado la relación entre la argumentación y la demostración; y, de otra parte, hacia aquellas que han estudiado los procesos de argumentación y de demostración realizados por estudiantes, de donde emergen dificultades para elaborar estos procesos de forma deductiva. Cada grupo de estas investigaciones corresponde a una de cinco líneas de trabajo alrededor de la demostración, las cuales han sido propuestas por los autores arriba mencionados.

3.1 La relación entre argumentación y demostración

A continuación, exponemos las posturas de investigadores que han analizado la relación entre la argumentación y la demostración desde diferentes perspectivas. Veremos que, tal como lo asumimos en este trabajo, algunos de ellos consideran de gran importancia el desarrollo de una argumentación para el planteamiento de una conjetura que puede ayudar a la construcción de su posterior demostración.

Respecto a la demostración, Crespo (2005) señala que tanto Balacheff (1982) como Duval (1993) emplean el término demostración con significados similares: secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. La autora advierte que para Duval el objeto de una demostración es la verdad y, por lo tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios

de pertinencia. Es decir, su valor de verdad depende el contexto en el que se esté desarrollando la actividad matemática.

Lo anterior ayuda a entender por qué Balacheff (1988) considera que la interacción social tiene una importancia relevante con respecto a la diferencia entre la argumentación y la demostración, ya que mediante la interacción los estudiantes pueden plantear argumentos para convencerse unos a otros, por lo que Balacheff no considera a la argumentación como una vía hacia la demostración por considerar que tienen objetivos distintos: mientras que la demostración es un razonamiento válido, la argumentación no tiene esos vínculos de validez, sino de pertinencia. Es decir, la demostración, a través de la lógica, busca determinar el valor de verdad de una afirmación con respecto a un sistema lógico deductivo; la argumentación, utilizando una lógica coherente, busca la credibilidad y el convencimiento de otra persona o personas.

Duval (1995) y Duval (2007) se adhiere a esta postura y enfatiza que la diferencia radica entre el *nivel semántico*, donde el valor epistémico de un enunciado es fundamental, y el *nivel teórico* donde, en principio, solamente la validez del enunciado es lo que cuenta; el autor afirma que, a pesar de una proximidad discursiva entre argumentar y demostrar, existe una distancia cognitiva que las separa; afirma que la función y la estructura de un razonamiento deductivo es de un carácter diferente al de la argumentación espontáneamente aplicada en discusiones o en debates relativos a conflictos cognitivos.

La distancia epistemológica y cognitiva propuesta por Duval entre la argumentación y la demostración se da dentro de la matemática formal pero estos procesos en la matemática escolar tienen varios aspectos en común, como procesos y además como productos (Douek, 1998), lo

cual llama la atención, entre otras cosas, sobre los procesos de producir una argumentación y una demostración.

Los investigadores italianos (Boero, Garuti, Lemuti y Mariotti, 1996; Mariotti, 1997, 2005, 2006; Garutti et al., 2008; Douek, 2009) ponen de relieve el vínculo de relación entre la argumentación y la demostración al proponer que en una tarea matemática apropiada, es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración, conclusión respaldada por diversas investigaciones basadas en experimentos de enseñanza. Por ejemplo, a un grupo de estudiantes de grado octavo se les propuso resolver problemas que requerían elaborar conjeturas y demostrarlas de manera deductiva, los investigadores observaron que quienes mantenían una alta coherencia entre los elementos usados en el planteamiento del enunciado y la demostración deductiva construida para justificarlo resolvían con éxito los problemas, mientras que los estudiantes que mostraban diferencias importantes entre la argumentación de elaboración y verificación de la conjetura no lograban completar una demostración deductiva correcta (Boero, Garuti, Lemuti y Mariotti, 1996).

Lo anterior condujo a estos autores a proponer el constructo “unidad cognitiva de teoremas” para destacar la coherencia (o la falta de ella) entre ambas fases de resolución de los problemas que requerían de una conjetura y una demostración para concretar un teorema. La unidad cognitiva afirma que, durante la construcción de una conjetura, el estudiante puede producir una actividad argumentativa en la que justifique la plausibilidad de las opciones que toma. Durante la fase posterior, puede construir sobre este proceso, de manera consistente y organizando los argumentos ya producidos a lo largo de una cadena deductiva, el proceso para concretar la

demostración. Las investigaciones del grupo italiano señalan que existe un posible desfase entre la producción de una conjetura y la construcción de su demostración.

Definimos como la brecha entre la exploración de la afirmación y el proceso de demostración la distancia entre los argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida durante la exploración de la afirmación y los argumentos que pueden ser explotados durante el proceso de demostración (Garuti, Boero, Lemut, 1998).

La distancia cognitiva entre la argumentación y la demostración apoyada por Duval se basa en un *análisis funcional y estructural*, aportes que son considerados por Pedemonte (2002) quien le da importancia a la distancia estructural, pues para ella la distancia estructural es otro tipo de diferencia que puede existir entre la argumentación y la demostración ya que esta última, normalmente construida de acuerdo a una cadena deductiva, suele tener una estructura que está muy alejada de la primera.

Por otra parte, la unidad cognitiva sugerida por Boero, Garuti, Mariotti (1996) entre la argumentación y la demostración se analiza considerando aspectos conceptuales, las expresiones verbales, la heurística de la argumentación y la demostración, en definitiva, desde el "sistema de referencia". Pedemonte (2002) explica que cuanto mayor es la distancia referencial entre el proceso de argumentación y el proceso de demostración, mayor es la dificultad del estudiante para construir una demostración deductiva.

Pedemonte (2002) señala que las distancias referenciales y las estructurales pueden observarse a partir del análisis, de los procesos de argumentación y de demostración, realizado por el sujeto. Pero las dificultades que puede encontrar son observables en el comportamiento del sujeto al construir una demostración pues son las actividades, acciones, palabras, gestos, etc. del sujeto las que permiten identificar estas dificultades. Es decir, para precisar, si el sujeto logra

resolver el problema sin mostrar ninguna dificultad en la transición de la argumentación a la demostración, entonces no hay síntomas de ruptura en su actividad, la posible distancia entre los dos procesos es manejada por el sujeto. Pero, si en la actividad del sujeto se determina la presencia de síntomas como la interrupción del sistema de referencia, el bloqueo, los errores, el exceso de tiempo empleado en la argumentación, etc., entonces se puede asumir la presencia real de una ruptura cognitiva. De manera que, para Pedemonte, el análisis la continuidad entre la argumentación y la demostración es la forma de determinar la unidad cognitiva (referencial o estructural), y la distancia entre ambos puede causar ruptura cognitiva.

Haciendo más fino su análisis, para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación ligada a una conjetura y su demostración, desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte utiliza una herramienta basada en el modelo cK Φ (Balacheff (1995) el que fue integrado en el modelo de Toulmin (1958). Pedemonte considera al modelo cK Φ porque, aunque el modelo de Toulmin permite transformar el proceso de resolución de un problema en una concatenación de pasos de la argumentación, de la conjetura, y de la demostración, esto no es suficiente. Pedemonte resalta que se requiere de una herramienta que permita considerar el sistema de referencia de la argumentación y de la demostración y que permita considerar los aspectos relacionados con los conocimientos de los estudiantes que están en juego durante la resolución de un problema, refiriéndose con esto al sistema de referencia.

Fiallo (2011), apoyado de las ideas de Boero, Garuti, Lemut y Mariotti (1996), Pedemonte (2002), asume la relación de la argumentación y la demostración, analiza la existencia de la continuidad o ruptura cognitiva entre los dos procesos presente en el trabajo realizado por estudiantes que se enfrentan a problemas de demostración de Trigonometría.

Para ello Fiallo, (i) diseña una unidad de enseñanza que promueve las funciones de la demostración propuestas por De Villiers (1993 citado por Fiallo, 2011): de descubrimiento, de explicación, de verificación, de comunicación y de axiomatización; (ii) reinterpreta los tipos de demostración propuestos por Marrades y Gutiérrez (2000) y adapta el modelo de Toulmin para esquematizar los tipos de demostración emergentes de su propuesta; (iii) toma, lo que él llama, el “Modelo Pedemonte” (la integración del modelo cK ϵ en el modelo de Toulmin) para analizar la estructura y el sistema de referencia tanto de la argumentación como de la demostración; (iv) adapta el constructo de unidad o ruptura cognitiva para el análisis de dichos procesos de estudiante resuelve problemas de demostración relativos a la trigonometría.

A partir de los resultados obtenidos por Fiallo (2011), los autores Fiallo y Gutiérrez (2017) plantean cuatro categorías de unidad o ruptura cognitiva de las cuales, a continuación, damos una breve descripción, retomando parte de sus conclusiones. Las categorías son:

Unidad cognitiva empírica: unidades empíricas, estructurales y referenciales. El uso de ejemplos no favorece la ruptura estructural necesaria para pasar de los argumentos perceptivos sobre las conjeturas a las demostraciones deductivas.

Ruptura referencial y unidad estructural empírica: ruptura del sistema de referencia sin ruptura estructural. A veces los estudiantes tienen dificultades para construir demostraciones deductivas porque las generalizaciones hechas a partir de los datos observados no se convierten en conocimientos teóricos, lo que dificulta la ruptura estructural.

Unidad referencial y ruptura estructural: unidad de los sistemas de referencia debido al uso de analogía con problemas previos. Los estudiantes tienden a repetir afirmaciones o afirmaciones usadas previamente, las cuales conducen a la construcción de cadenas de afirmaciones que parecen demostraciones deductivas, pero son incorrectas.

Unidad cognitiva deductiva: unidades deductivas estructurales y referenciales. Las acciones empíricas de los estudiantes tienen la intención de verificar la exactitud de las conjeturas, pero los argumentos y demostraciones se basan en propiedades generales abstractas.

3.2 Procesos de argumentación y de demostración

En este apartado presentamos resultados de algunas investigaciones que dan cuenta de los hallazgos en las producciones matemáticas de los estudiantes relacionados con los procesos de argumentación y de demostración, las cuales ofrecen además elementos teóricos que permiten caracterizarlos.

Balacheff diferencia y analiza los procesos de validación utilizados por los estudiantes en cuatro tipos principales de prueba pragmáticas e intelectuales: *empirismo ingenuo*, *experimento crucial*, *ejemplo genérico*, *experimento mental* (Figura 1); la categorización de cada tipo de prueba está determinada por su nivel de exigencia de generalidad, y por su nivel de conceptualización de los conocimientos que exige.

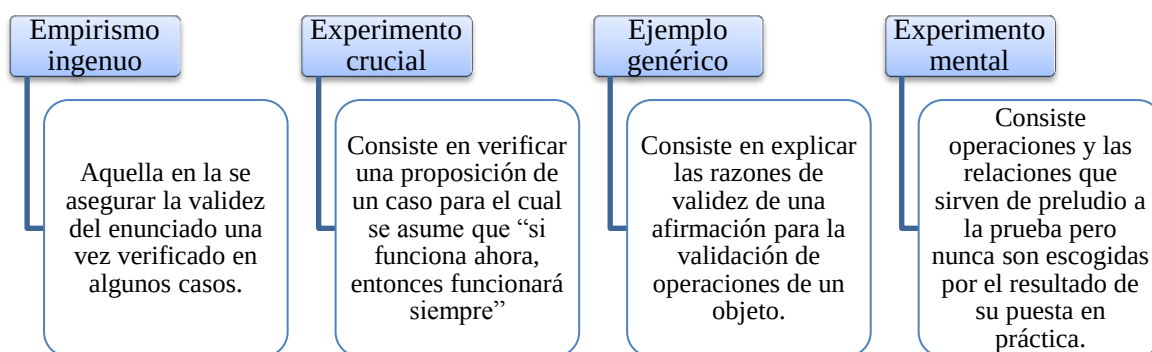


Figura 1. Tipos de pruebas según Balacheff
Fuente: Elaboración propia adaptado de Balacheff (1998)

Balacheff (1988) plantea una ruptura del empirismo ingenuo y el experimento crucial con el ejemplo genérico y el experimento mental. En los dos primeros se valida una proposición con la constatación de un hecho y en las dos segundas se valida una proposición fundada en la razón.

Además plantea el paso del empirismo ingenuo al experimento crucial corresponde a la toma de consciencia de la exigencia de asegurar la generalidad de la conjetura propuesta y plantea que el paso del ejemplo genérico al experimento mental se basa en una construcción de lenguaje que implica el reconocimiento y la diferenciación de los objetos y de las relaciones en juego en la resolución del problema, incluyendo que el ejemplo genérico constituye un estado transitorio en el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales.

De otra parte, Harel y Sowder (1998) atribuyen las respuestas de los estudiantes de las tareas matemáticas propuestas al funcionamiento de esquemas generales de la cognición, introduciendo la idea de demostración basada en la observación empírica de las actividades estudiantiles; contrario a Balacheff (1988), ellos no diferencian entre "demostración deductiva" y "demostración empírica", ya que cualquier proceso de justificación que observan lo consideran como un proceso de demostración.

De acuerdo con sus observaciones, Harel y Sowder (1998) proponen unos *esquemas de demostración* cuyo centro es el convencimiento propio y la persuasión del individuo cuando se enfrenta a una situación determinada; además, establecen tres categorías de esquema de demostración los cuales surgen a partir de experiencias con estudiantes preuniversitarios, como se puede apreciar en la Figura 2.

Esquemas de demostración externos (o convicción externa)	Esquemas de demostración empíricos	Esquemas de demostración Analíticos
Ritual Autoritaria Simbólica	Inductivo Perceptual	Transformacional Axiomático

Figura 2: Esquemas de demostración de Harel y Sowder (1998)

En los esquemas de demostración analíticos de tipo axiomático incluye a la demostración deductiva como una forma de demostración. Posteriores investigaciones han validado la

pertinencia y adecuación de estos esquemas para explicar las maneras en que los estudiantes elaboran demostraciones para convencerse y persuadir de la veracidad de una afirmación (Dalcín, 2004; Flores y Peñafiel, 2005; Harel, 2001; Harel y Sowder, 2005 citados por Molfino y Lezama, 2011). Molfino (2006) emplea este resultado para analizar los esquemas de demostración que presentan los estudiantes en la resolución de problemas de determinación del lugar geométrico, así como las funciones de la demostración que se explicitan en su abordaje pues la demostración aparece cumpliendo diferentes papeles en la actividad matemática: verificación, descubrimiento, explicación, sistematización y comunicación.

De Villiers (1993 y 2003) propone un análisis de las diferentes funciones de la demostración, con el propósito de utilizarlas en el aula para resignificar la actividad de demostrar. Distingue cinco funciones de la demostración en matemática: *verificación*, demostrar para validar resultados; *explicación*, herramienta que otorga entendimiento; *sistematización*, sistematiza diferentes resultados en una teoría matemática, vincula diferentes conceptos; *descubrimiento*, como un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva; y *comunicación*, constituye un espacio para interacción social y negociación de contenidos matemáticos al hacerlos explícitos en aras de una argumentación aceptable. (Molfino y Lezama, 2011, p. 45).

Molfino (2006) constata en las producciones de los estudiantes que los esquemas de demostración propuestos por Harel y Sowder (1998), los que mayor presencia tienen son los empíricos y los analíticos, al no encontrar indicios significativos de esquemas de demostración externos entre los estudiantes a partir de la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular de lugares geométricos y de construcción.

Ibáñez y Ortega (2001) amplían la clasificación de los esquemas considerando uno demás: *dependencia respecto de la tarea*. Esta nueva clasificación emerge del trabajo realizado con estudiantes españoles de primer año de bachillerato, al analizar las respuestas dadas a unas actividades denominadas “ciclos de investigación”. Además, plantean que reconocer los procesos matemáticos comprende tres facetas: *distinción, identificación y toma de consciencia de sus consecuencias*. También describen algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el reconocimiento de los procesos matemáticos, y, en particular, en el de las demostraciones, aludiendo a la relación entre distinguir una demostración y la evolución de sus esquemas de demostración. Dichas dificultades se reportan cuando se hace la identificación del proceso y del enunciado que expresa lo que se ha demostrado.

Continuando en la línea del estudio de las producciones de los estudiantes, Sen y Guler (2015) examinan las competencias de 250 estudiantes de séptimo grado (13 años en promedio) de secundaria en la elaboración de demostraciones, a la luz de los esquemas de demostración de Harel y Sowder (1998); concluyen que en el trabajo de los estudiantes predominan los esquemas de demostración de convicción externa y los esquemas de demostración empíricos.

Marrades y Gutiérrez (2000), a partir de los trabajos de Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para organizar y describir las producciones de los estudiantes referentes a la demostración. Ellos plantean que hay dos grandes grupos de tipos de demostración:

- a. Las demostraciones empíricas que depende de cómo los estudiantes manipulen los ejemplos con los que movilizan su actividad matemática. Estas se clasifican empirismo ingenuo (pueden ser inductivas y perceptivas), experimento crucial y ejemplos genéricos (pueden de ejemplificación, constructivas, analíticas e intelectuales).

- b. Las demostraciones deductivas, caracterizadas porque surgen de deducciones abstractas, se divide, por su parte, en: experimento mental (se ayuda de ejemplos aunque son deductivas y abstractas) y demostraciones formales (no hay ejemplos y son deducciones lógicas); a su vez ambas se dividen en transformativas y axiomáticas.

Fiallo (2011) hace una reinterpretación de los tipos de demostración planteadas por Marrades y Gutiérrez (2000), así:

- Descarta dos de los cuatro tipos de experimento crucial (experimento crucial analítico y experimento crucial intelectual) que, según el autor, utilizan un razonamiento general que se define mejor para el tipo de demostración ejemplo genérico.
- Descarta dos de los cuatro tipos de ejemplo genérico (ejemplo genérico basado en ejemplo y ejemplo genérico constructivo) ya que, según la definición del ejemplo genérico, al construir la demostración se está produciendo razonamiento abstracto que involucra propiedades matemáticas generales y no propiedades específicas del ejemplo.

En relación a la estructura de la argumentación, desde Pedemonte (2002), Fiallo usa dos tipos de argumentación: deductiva e inductiva, descartando la abductiva ya que esta no aparece en su investigación por las características de la propuesta de enseñanza y aprendizaje diseñada.

Fiallo (2011) adapta el modelo de Toulmin para esquematizar los tipos de demostración de la nueva estructura propuesta. El modelo de Toulmin (1985) establece las reglas que se precisan en cualquier disciplina o espacio abierto a la discusión para construir una argumentación, por lo que ha permitido analizar y documentar los progresos de los estudiantes al enfrentarse a problemas relacionados con la demostración matemática. “El análisis de la construcción y evaluación de

argumentos en matemáticas se ha convertido en una parte importante de la investigación en educación matemática a nivel universitarios” (Inglis y Mejía-Ramos 2005, p. 328).

Inglis y Mejía-Ramos (2005) señalan que Krummheuer (1995) fue el precursor en el uso del esquema de Toulmin para el análisis de argumentos matemáticos, aunque lo hizo empleando una versión reducida del modelo al omitir el uso de la refutación y el calificativo modal. Posteriormente, Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007 citados por Hernández, 2014) resaltan que, pese a esa tendencia, “una genuina categorización de los argumentos se logra con el uso completo del esquema de Toulmin ya que ignorar la diversidad de calificativos modales utilizados en la argumentación en matemáticas puede ocultar aspectos importantes de un argumento de un estudiante” (Hernández, 2014, p. 51).

Hernández (2014), considerando el trabajo de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007), usa el modelo de Toulmin para analizar argumentaciones presentes en una actividad escolar de tres grupos de estudiantes de distintos niveles universitarios. Además, a partir de De Gamboa, Planas y Edo (2010), Hernández define un argumento en la resolución de un problema matemático: “expresión verbal o escrita, generada por el estudiante para defender, explicar, sustentar ideas y opiniones, en torno a su actuar en la resolución del problema, la cual es apoyada en elementos de la situación o en elementos del conocimiento matemático” (2014, p. 109).

La investigación le permite formular una categorización para los argumentos que emergió de la identificación de regularidades presentes en el ambiente de argumentación diseñado:

- Argumento mal estructurado basado en elementos externos del problema
- Argumento estructurado basado en elementos externos referentes a la situación problema.
- Argumentos mal estructurados apoyados en procesos matemáticos sin coherencia.

- Argumentos estructurados en la situación dada.
- Argumentos estructurados en la matemática.
- Argumentos estructurados en la situación y en la matemática.

Desde la perspectiva de Toulmin, Hernández señala que las debilidades en los argumentos principalmente se hallan en la garantía y el soporte, ya que es común que los estudiantes empleen elementos de justificación fuera de la situación o bien sin un soporte de la matemática. Una conclusión valiosa a la que llega el autor, y que está relacionada con el contexto de nuestra investigación, es que un ambiente de resolución de problemas se puede generar un contexto de aprendizaje donde los argumentos contribuyen a formular ideas y repensar el problema.

Hasta aquí realizamos una sucinta presentación de distintos trabajos de la educación matemática que nos sirvieron de peldaño para avanzar en la investigación sobre la argumentación y la demostración. Intentamos esbozar la posición de algunos autores respecto a la relación (o no) de la argumentación y de la demostración, hasta precisar que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de esta última. Partimos de este hecho y por ello, de los resultados expuestos, retomamos de Fiallo (2011) la caracterización de demostración, de Pedemonte (2002) las ideas del Modelo de Pedemonte y los tipos de argumentación, y el constructo de unidad cognitiva del grupo de investigadores italianos como los elementos teóricos que se articulan para analizar la actividad argumentativa de los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad que resuelven problemas de variación y cambio.

Los trabajos señalados en cada línea de investigación aportan a nuestro estudio, el cual pretende estudiar los procesos de argumentación y de demostración que realizan los estudiantes, ya que sabemos, y la literatura nos respalda, que ellos no realizan razonamientos lógico

deductivos sino empíricos, de los cuales pretendemos tener más conocimiento; precisando con ello que este estudio no se enfoca en cómo se enseña ni aprende a resolver problemas que requieren adelantare procesos de argumentación y de demostración.

4. Marco Teórico

En este apartado presentamos los elementos que componen el marco teórico. Inicialmente, exponemos el modelo de Pedemonte (Pedemonte, 2002) que integra el modelo ck¢ (Balacheff y Margolinas, 2005) al modelo de Toulmin (Toulmin, 2007). Después, lo que entendemos por proceso de argumentación y demostración, junto a las formas de argumentación presentada por Pedemonte (2002) y la noción de demostración de Fiallo (2011). Finalmente, el constructo de unidad cognitiva (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), que es adaptado por Fiallo (2011) como un instrumento para analizar la ruptura o continuidad de la estructura o sistema de referencia de los procesos de argumentación y de demostración cuando los estudiantes resuelven problemas.

4.1 Modelo de Pedemonte

Pedemonte (2002) señala que tanto la argumentación como la demostración se presentan con una estructura básica compuesta por los *datos*, el *enunciado conclusión* y un *permiso de inferir*, terna que es analizada con el modelo de Toulmin (Toulmin, 1958), y que ampliamos en este apartado.

Pedemonte considera que en la actividad argumentativa del estudiante se observan los elementos que componen el *sistema de referencia* (lenguaje, marcos, conceptos, heurística, etc.) que usa cuando resuelve problemas abiertos que requieren un proceso de argumentación y un

proceso de demostración. El sistema de referencia es posible analizarlo utilizando el modelo cK Φ (Balacheff, 1995).

Estas consideraciones permiten a Pedemonte (2002) integrar al modelo de Toulmin, que sirve para analizar la estructura de la argumentación, el modelo ck Φ que se emplea para analizar el sistema de referencia. A esta integración Fiallo (2011) la llama “Modelo de Pedemonte”. A continuación, presentamos el modelo de Toulmin y el modelo ck Φ por separado para, finalmente, explicitar la forma cómo son relacionados por Pedemonte (2002).

4.1.1 El Modelo de Toulmin: Un argumento, en el modelo de Toulmin está compuesto por un esquema ternario formado por:

Un enunciado (E) o conclusión que el interlocutor pretende justificar,

Unos datos (D) que sirven al interlocutor para justificar el enunciado E,

Un permiso de inferir (Pi) que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre D y E.

El primer paso en la argumentación es la expresión de un punto de vista que conduce a la conclusión, la cual es el objetivo del argumento. La argumentación debe apoyar esa afirmación. Llamamos enunciado *E* a la conclusión de cada argumento.

Esta conclusión se basa en un cierto número de datos *D* que están o que se producen para apoyar el enunciado. Los datos pueden ser evidencias, hechos, informaciones o ejemplos. La argumentación que se hace para justificar el enunciado conclusión se apoya en esos datos.

Para pasar de los datos al enunciado conclusión es necesario un “permiso” que legitime ese paso, se trata de una regla o un principio general que autoriza lanzar un puente entre *D* y *E*. Ese permiso de inferir (*Pi*) establece la conexión lógica entre *D* y *E* en el argumento, además es la

razón de la aceptación o de la refutación de este. P_i puede ser refutado por el auditor (el profesor u otro estudiante), por lo que, si el argumento no es aceptado, lo que se critica es precisamente el permiso de inferir.

Por su naturaleza, los permisos de inferir son más generales y abstractos que el enunciado conclusión que está siendo argumentado. Cuando los permisos de inferir se vuelven explícitos y se convierten en el tema de discusión, su estado se altera porque P_i se transforma en una afirmación que requiere justificarse, comprometiendo a los estudiantes en un nivel más alto de razonamiento matemático (Weber y otros, 2008, p. 258, citado en Fiallo 2011).

En la Figura 2 presentamos el esquema ternario que representa los elementos de la argumentación y sus relaciones, de acuerdo con el modelo de Toulmin.

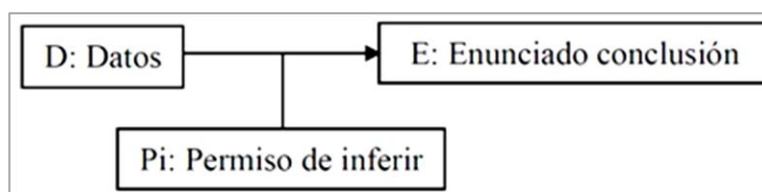


Figura 3: Estructura básica de un argumento de Toulmin

Cuando se realiza una argumentación, en ocasiones, los datos y los permisos de inferir que establecen la conexión con el enunciado conclusión dejan un grado de incertidumbre, por lo que se requiere de tres elementos auxiliares que complementan a la estructura básica de la argumentación; estos son:

- Un indicador de *fuerza* (F) del argumento,
- Una *refutación potencial* (R_p) del enunciado conclusión,
- Un *soporte* (S) del permiso de inferir.

El indicador de fuerza F muestra la firmeza de la conexión entre los datos y el permiso de inferir que conllevan al enunciado; F es un elemento que no es explícito, pero al que el auditor puede hacer referencia con juicios como “débil”, “fuerte”, “verdadero”, “probablemente verdadero”, “probable”, etc.

Al momento de realizar una argumentación es posible que ciertas circunstancias particulares impidan la aplicación del permiso de inferir a los datos, por lo que el esquema argumentativo prevé excepciones al enunciado. Si hay excepciones al enunciado, disminuye la fuerza del permiso de inferir. Las condiciones de las excepciones o refutaciones potenciales R_p se toman entonces en consideración. Esas refutaciones potenciales, o restricciones, aportan un comentario sobre la relación entre el permiso de inferir y la legitimidad del paso de los datos a la conclusión; señalan las circunstancias en las que será necesario anular la autoridad del permiso de inferir.

Las refutaciones pueden ayudar a los estudiantes a hacer explícitos los permisos de inferir que están usando, a transformar la clase en un escenario de debate y a decidir bajo qué condiciones los permisos de inferir son apropiados. A menudo, cuando un estudiante presenta un argumento matemático, no tiene claridad acerca de los permisos de inferir que está usando. Ese estudiante puede utilizar permisos de inferir implícitamente sin haber considerado si esos permisos de inferir son válidos. Las refutaciones en las discusiones con los compañeros de clase o con el profesor invitan al estudiante a hacer explícitos los permisos de inferir empleados (Weber y otros, 2008, citado por Fiallo, 2011).

El permiso de inferir puede ponerse en duda. Es necesario entonces respaldarlo, apoyarlo con algunos justificativos, que constituyen el soporte S . La existencia de un permiso de inferir entre datos y conclusión está justificada por la legitimidad de la pregunta *¿en qué condiciones hay una relación entre datos y enunciado conclusión?* Sin embargo, puede plantearse otra pregunta: *¿por*

qué existe una relación entre datos y enunciado conclusión? Por eso puede ser necesario un soporte en la esquematización del argumento. Si la autoridad del permiso de inferir no es aceptada, puede solicitarse un soporte al permiso. El soporte puede ayudar al auditor a comprender el permiso de inferir; sin el soporte puede que el permiso no sea aceptado (Pedemonte, 2005, p. 322 – 323). El esquema completo se presenta en la Figura 4.

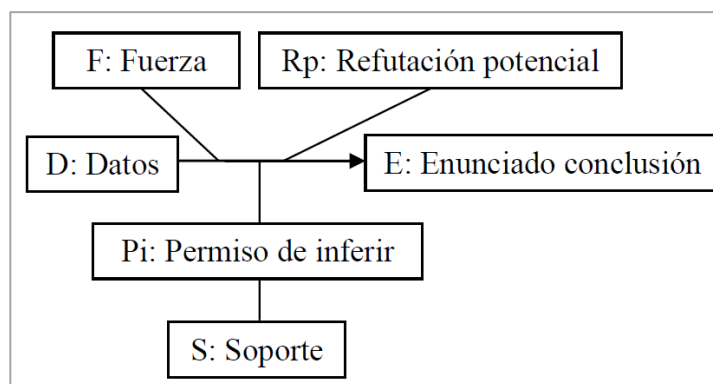


Figura 4: Modelo de Toulmin.

4.1.2 Modelo cKc (conceptions, knowing, concept): Cuando los estudiantes resuelven problemas que requieren adelantar procesos de argumentación y de demostración, las concepciones juegan un papel fundamental para llevar a cabo estas tareas, por esta razón consideramos que la concepción es "una estructura mental atribuida a un sujeto por un observador de su comportamiento, que debe ser consistente y eficaz en un ámbito de práctica" (Balacheff, 2005, p. 36). El ámbito de práctica se define como un conjunto de tareas o situaciones donde la concepción es operativa (Balacheff, 2001, citado por Pedemonte 2002).

Además, consideramos, al igual que Pedemonte y Balacheff, que:

En primer lugar, ... una concepción no es un tipo de propiedad o estado de conocimiento atribuido a un alumno, sino una propiedad o estado de los conocimientos de un alumno en una situación (Balacheff, 2013) ... En segundo lugar, afirmar que, para una determinada

pieza de conocimiento matemático, un estudiante no puede tener una concepción única, sino un conjunto de conceptos susceptibles de ser movilizados en función de la situación en la que él o ella esté involucrado (Pedemonte y Balacheff, 2016, p. 104).

Así que el modelo cK $\mathbb{C}$ (Balacheff y Margolinas, 2005) es una cuádrupla que caracteriza las concepciones de los estudiantes y nos permite identificarlas cuando actúan en la resolución de problemas, por lo que estos componentes, indisociables, se imponen cuando se quiere evidenciar una concepción y son suficientes para caracterizarla; ellos son:

1. Un conjunto de *situaciones-problema* (P) en el que se demuestra que la concepción es una herramienta eficaz para la construcción de una (Pedemonte y Balacheff, 2016, p. 104).
2. Un *operador* (R) es el que permite la manipulación de los elementos del sistema de representación, y por lo tanto la transformación de los problemas. Según Pedemonte (2005) los operadores, al igual que los permisos de inferir, legitiman el paso entre datos y el enunciado conclusión y se explicitan a menudo en la forma “si...entonces” (p. 327).
3. Un *sistema de representación* (L) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación.
4. Finalmente, una *estructura de control* (Σ), que es el conjunto de opciones que tiene los estudiantes para tomar decisiones y evaluar su producción (Pedemonte y Balacheff,

2016). Además, la estructura de control da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción. La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema.

Estos cuatro componentes constituyen el cuádrupla (P, R, L, Σ) mediante la cual se modela una concepción de un estudiante.

4.1.3 Modelo de Pedemonte: el modelo cK Φ en el modelo de Toulmin: Según Pedemonte (2002), la estructura de control asegura que la concepción no sea contradictoria y esta contiene las facultades para decidir sobre el uso de un operador o el estado de un problema; la estructura de control se puede ubicar en el soporte, este se puede reemplazar por la concepción, ya que el papel del soporte es garantizar la legitimidad del permiso de inferir y responde a las preguntas: ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado?

El permiso de inferir es una regla, un principio que, como hemos dicho, vincula los datos a la conclusión. Este permiso de inferencia puede expresarse en la forma "si... entonces". Creemos que podemos identificar en el permiso de inferir uno de los elementos del (R) conjunto de operadores de una concepción. Los operadores permiten la manipulación de los elementos L , y por lo tanto la transformación de los problemas "(Balacheff, 2001). Los operadores, al igual que el permiso de inferir, permiten la evolución de la argumentación: la concatenación de los argumentos viene determinada por el permiso de inferir de cada argumentación. De hecho, el permiso de inferir establece la conexión entre datos y conclusión y legitima este paso (Toulmin, 1958).

La estructura del modelo de Pedemonte queda de la siguiente manera (Figura 5) al integrar el modelo cK¢ en el modelo de Toulmin.

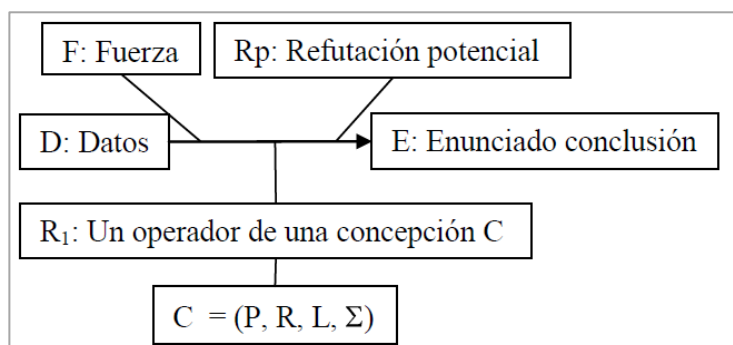


Figura 5: Integración del modelo cK¢ con el modelo de Toulmin.

4.2 Proceso de argumentación y proceso de demostración

En nuestra investigación llamamos *proceso de argumentación* a la actividad argumentativa del estudiante para *convencerse* del planteamiento de una conjetura; y llamamos *proceso de demostración* a la actividad argumentativa del estudiante para construir la demostración de la conjetura planteada previamente.

A continuación, la caracterización que hemos adoptado para clasificar las argumentaciones presentes en el *proceso de argumentación* (Pedemonte, 2002) y en el *proceso de demostración* (Fiallo, 2011).

4.2.1 Proceso de argumentación: En esta sección mostramos cómo está relacionada la argumentación con la conjetura y los diferentes tipos de argumentación.

4.2.1.1 Relación entre la conjetura y la argumentación: En el proceso de argumentación se pueden dar las siguientes posibilidades (Pedemonte, 2002):

1. No hay una argumentación ligada a la conjetura; se construye directamente su demostración.

2. La argumentación persigue la formulación de la conjetura y puede estar relacionada con la ella en dos formas: (a) contribuir a la construcción de una conjetura (*argumentación constructiva*); (b) justificar la conjetura dada como un hecho (*argumentación estructurante*).

4.2.1.2 Estructura de la argumentación: Pedemonte (2002) considera y describe tres tipos de argumentación: deductiva, abductiva e inductiva. La representación de un paso deductivo en el modelo de Toulmin se presenta en la Figura 6 en donde $A \rightarrow B$ es la regla (o el teorema); A es una proposición de entrada o dato; B es el enunciado conclusión.

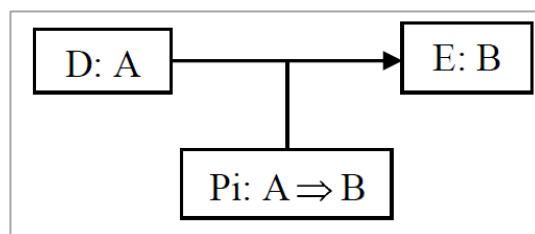


Figura 6: Esquema de un paso deductivo en el modelo de Toulmin.
Fuente: (Pedemonte, 2002, p. 87)

El enunciado conclusión se deduce a partir de los datos y el permiso de inferir que son determinados de antemano. La regla de inferencia “modus ponens” es coherente con el modelo.

En la *argumentación deductiva* puede que se utilice el lenguaje natural como sistema de representación en la construcción de un enunciado y no estar apoyada por una teoría matemática. Esta es la razón por la que una deducción en la argumentación puede ser semánticamente falsa.

La *argumentación inductiva* o empírica es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos a partir de la observación de casos particulares o hechos observados que se generalizan en un conjunto más extensos de casos o reglas. La inducción, no puede inferir con certeza una conclusión que es construida por una generalización de casos particulares.

Las herramientas de la inducción son la generalización, la particularización y la analogía, por lo que analizando cómo se producen estos procesos Pedemonte (2002) distingue y caracteriza los siguientes tres tipos de argumentos inductivos:

- a. Argumentación inductiva por generalización, es una inferencia práctica que procede analizando casos particulares hasta que se determina una ley general o propiedad. La generalización permite la abstracción de una propiedad o inferencia entre propiedades, en varios casos. Este proceso puede llevar a dos generalizaciones diferentes:

Una generalización de los enunciados extraídos a partir de un caso particular, que consiste en determinar enunciados de uno o varios casos trabajados, que no siguen necesariamente un orden particular (Figura 7).

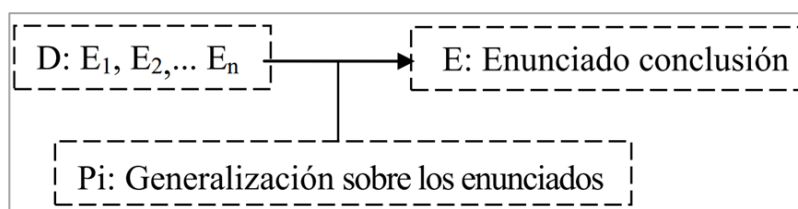


Figura 7: Esquema de un paso inductivo por generalización sobre los enunciados
Fuente: (Pedemonte, 2002, p. 89)

$E_1, E_2, \dots E_n$ son las conclusiones de los pasos anteriores o son los casos observados. Se convierten en los datos del último paso, el que lleva al caso general.

Una generalización sobre el proceso realizado, cuando el estudiante ve una regularidad a partir de una sucesión de procesos realizados con casos o conclusiones particulares que conduce al enunciado (Figura 8).

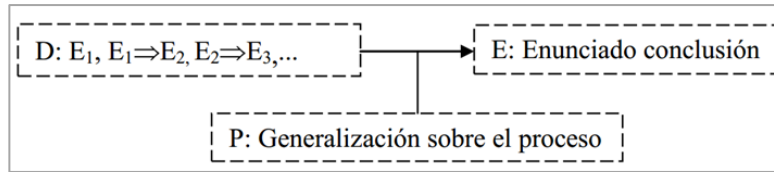


Figura 8: Esquema de un paso inductiva por generalización sobre los enunciados.

Fuente: (Pedemonte, 2002, p. 89)

Los datos $E, E_1, E_2, E_3, \dots$ representan los argumentos anteriores que conectan los enunciados. Se convierten en los datos del último paso, el que trae al caso general.

- b. Argumentos inductivos por recurrencia, los cuales se basan en una generalización a n . A partir de una propiedad verdadera en un caso $P(1)$ y el descubrimiento de una relación recurrente entre dos casos sucesivos, enlazamos $P(n)$ y $P(n+1)$. La conclusión del razonamiento es que la regla $P(n)$ es verdadera.
- c. Argumentos inductivos por “paso el límite”. El caso límite puede considerarse como el caso relacionado con todos los casos anteriores y no solo con el anterior. De hecho, el caso que precede inmediatamente al caso límite no es explicable. Por ello, la consideración del caso límite puede llevar a considerar una generalización del proceso, una especie de inducción por recurrencia "todavía en formación".

La *argumentación abductiva*, fue introducida por Peirce (1960) como modelo de inferencias en el que la búsqueda de una solución a un problema se construye a menudo sobre la base de la conclusión, es decir, de lo que se pide que se encuentre.

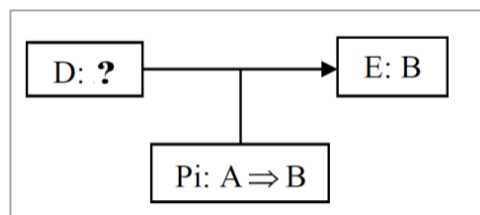


Figura 9: Esquema de un paso en el modelo de Toulmin abductiva.

Fuente: (Pedemonte, 2002, p. 88)

La abducción, es un razonamiento que parte de las conclusiones y se dirige a los datos. Se da la conclusión de la declaración y el permiso para inferir, pero los datos deben ser buscados. La Figura 9 anterior es la representación de un paso abductivo en el modelo de Toulmin; el signo de interrogación, en lugar de los datos, significa que la idea es buscar datos para conectar los permisos de inferir a la conclusión.

4.2.2 Proceso de demostración: Cuando se resuelven problemas de demostración y el estudiante realiza un proceso de argumentación para convencerse de la veracidad de la conjetura que ha planteado, lo que queda es construir la demostración que le permita validar esa conjetura.

Considerando que esa validación no siempre se realiza aludiendo a teoría matemática sino a concepciones de los estudiantes, en este estudio consideramos la caracterización de demostración como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para *explicar, verificar, justificar o validar* con miras a *convencerse* a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (Fiallo, 2011, p. 85).

La definición anterior permite deducir que cada estudiante emplea variados y diferentes elementos conceptuales y estructuras cognitivas que llevan a diferenciar una demostración de otra; aunque en general no existe un procedimiento único de demostración, sí existen diferentes tipos de demostraciones que han sido categorizados según su uso por parte de los estudiantes.

4.2.2.1 Tipos de demostración: Como se señaló en el apartado 2.2 de los antecedentes, Fiallo (2011) considera la caracterización de demostración realizada por Marrades y Gutiérrez (2000) para realizar unas modificaciones descartando dos de los cuatro tipos de experimento crucial, y dos de los cuatro tipos de ejemplo genérico. Fiallo (2011) modela los tipos de demostración utilizando el modelo de Toulmin (1958), diferenciando ilustrativamente las demostraciones

inductivas o empíricas de las deductivas: el esquema elaborado de las demostraciones empíricas va con líneas punteadas mientras que las demostraciones deductivas con líneas continuas.

Siguiendo la Figura 10 que ilustra los tipos de demostración considerados por Fiallo, a continuación, explicamos brevemente cada tipo:

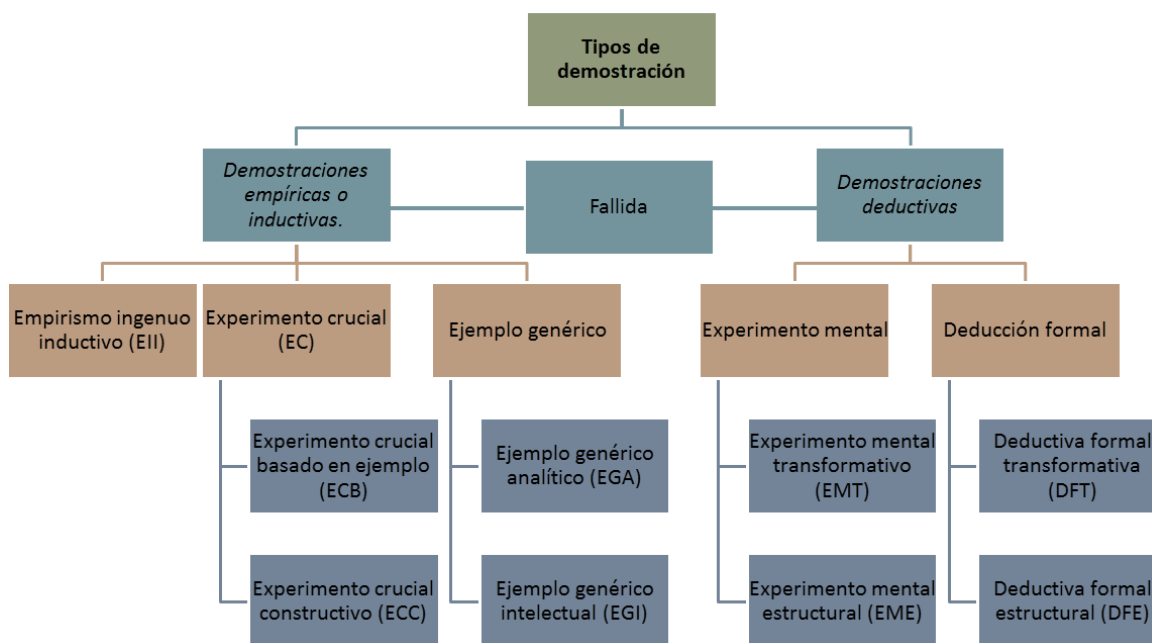


Figura 10: Tipos de demostración.

Fuente: elaboración propia.

a) *Demostraciones empíricas o inductivas*. Están caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Los estudiantes aceptan la veracidad de las conjeturas después de que han observado regularidades en uno o más ejemplos; ellos usan los propios ejemplos, o relaciones observadas en los ejemplos para justificar la validez de su conjetura (Fiallo, 2011). Las siguientes demostraciones son consideradas de tipo empíricas.

Empirismo ingenuo inductivo (EII): Cuando en la construcción de la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (perceptivo) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo

(inductivo). Se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados (datos). Usando el modelo de Toulmin, el esquema de la Figura 11 representa las demostraciones del tipo empirismo ingenuo; $D_1, D_2, \dots, D_n$ son datos escogidos al azar; en el caso de las actividades del curso de precálculo, podría ser una tabla en GeoGebra o las modelaciones proporcionadas.

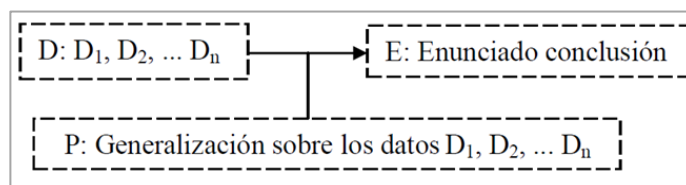


Figura 11: Esquema de empirismo ingenuo.

Experimento crucial (EC): Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo cuidadosamente seleccionado y se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se plantean dos tipos de demostración:

Experimento crucial basado en ejemplo (ECB): Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración. En este caso se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados (puede ser por paso al límite). Usando el modelo de Toulmin, el esquema de la Figura 12 representa este tipo de demostraciones, donde E_c es el ejemplo que se considera “crucial” y que conlleva a la generalización de los enunciados $E_1, E_2, \dots, E_n$ y al enunciado conclusión.

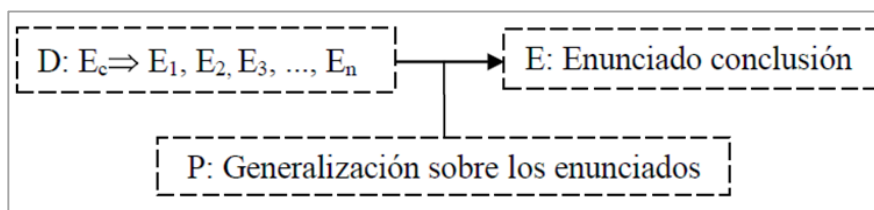


Figura 12: Esquema de experimento crucial basado en ejemplo.

Experimento crucial constructivo (ECC): Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo. Se trata de una generalización inductiva sobre el proceso que lleva a la construcción de un enunciado. La Figura 13 ilustra, este tipo de demostraciones.

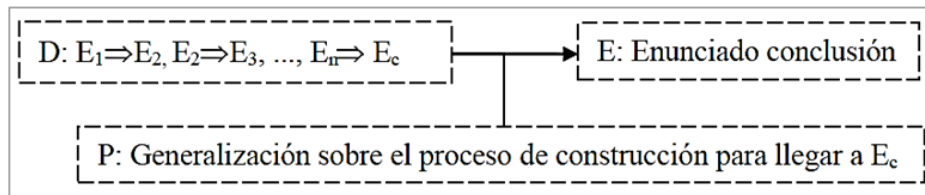


Figura 13: Esquema de experimento crucial constructivo.

Ejemplo genérico (EG): Cuando en la demostración se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Se plantean dos tipos de demostración:

Ejemplo genérico analítico (EGA): Cuando en la demostración se usa un ejemplo representante de una clase y las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo. Se trata de una generalización de las propiedades observadas en cada uno de los enunciados que conllevan al planteamiento de A. La Figura 14 ilustra este tipo de demostraciones.

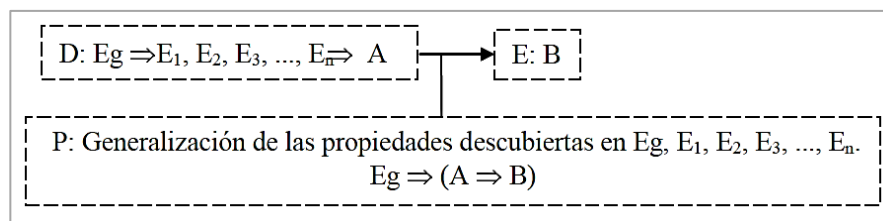


Figura 14: Ejemplo genérico analítico (EGA).

Ejemplo genérico intelectual (EGI): Cuando para la conjetura o demostración se usa un ejemplo representante de una clase y los argumentos están basados en propiedades matemáticas

aceptadas, pero no son resultado de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre él se recuerdan. Se trata de una generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso para llegar a A. La Figura 15 representa las demostraciones del tipo EGI.

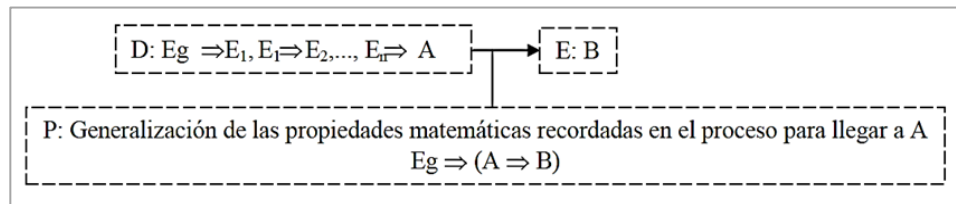


Figura 15: Ejemplo genérico intelectual (EGI).

b) *Demostraciones deductivas*. La deducción se ocupa de los argumentos que apoyan la necesidad de una conclusión sobre una o varias premisas: siendo verdaderas las premisas, la conclusión debe serlo también.

Experimento mental (EM): Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

Experimento mental transformativo (EMT): Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial (A) en otro equivalente (C). Los ejemplos ayudan a prever qué transformaciones (imágenes mentales espaciales, manipulaciones simbólicas o construcciones de objetos) son convenientes para la justificación. La Figura 16 ilustra un paso de una demostración tipo experimento mental transformativo.

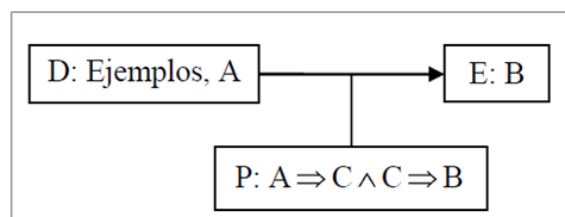


Figura 16: Experimento mental transformativo.

Experimento mental estructural (EME): Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones. Usando el modelo de Toulmin, el esquema de la Figura 17 representa las demostraciones formales estructurales.

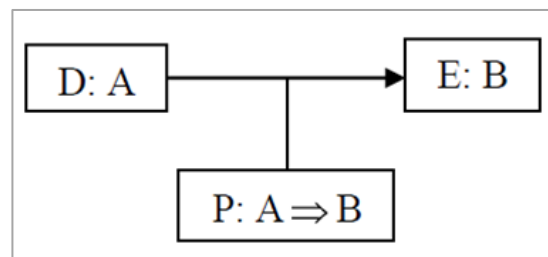


Figura 17: Experimento mental estructural (EME).

Deducción formal (DF): La demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. En una deducción formal solamente se mencionan aspectos genéricos del problema discutido. Es, por lo tanto, la clase de demostración formal matemática encontrada en el mundo de los investigadores de las matemáticas. Hay dos tipos de demostraciones formales:

Deductiva formal transformativa (DFT): demostraciones que se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial (A) en otro equivalente (C) (Figura 18).

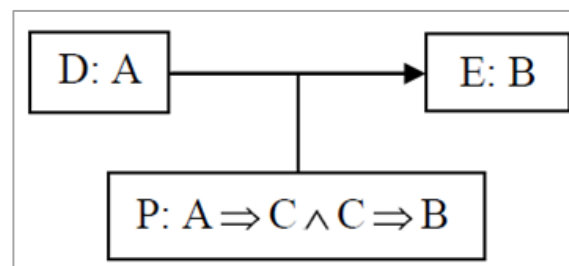


Figura 18: Esquema para el tipo deductiva formal transformativa (DFT).

Deductiva formal estructural (DFE): Demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados (Figura 19).

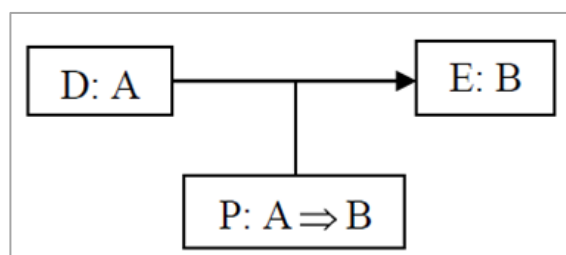


Figura 19: Esquema para el tipo deductiva formal estructural (DFE).

4.3 Constructo de unidad cognitiva

Para analizar la continuidad o ruptura cognitiva entre los procesos de argumentación y de demostración, se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de unidad cognitiva de un teorema (Boero y otros, 1996):

- durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones;
- durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones (“argumentos”) producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo a una cadena lógica. (Boero y otros, 1996, p.113).

Este constructo inicialmente fue utilizado para expresar una posible continuidad entre estas dos fases, posteriormente fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la fase de argumentación ligada a la conjetura y la subsiguiente

producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006, p. 184):

La principal fortaleza de este constructo es que proporciona una forma de evitar la rígida dicotomía que coloca a la argumentación contra la demostración: La posible distancia entre argumentación y demostración no es negada pero tampoco es definitivamente asumida como un obstáculo; desde esta perspectiva, la distinción irreparable entre argumentación y demostración es substituida prestando atención a las analogías, sin olvidar las diferencias.

Garuti y otros (1998) definieron la brecha entre argumentación y demostración como la distancia entre los argumentos producidos para valorar la plausibilidad de la conjetura y los argumentos utilizados durante la construcción de la demostración.

Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen al planteamiento de una conjetura y la construcción de su demostración. Desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, utilizamos el Modelo de Pedemonte (2002).

Según Pedemonte, se puede decir que hay continuidad referencial entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos, teoremas usados en la demostración han sido usadas en la argumentación dando soporte a la conjetura. Hay una continuidad estructural entre la argumentación y la demostración si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación están presentes también en la demostración. De lo contrario, hay una distancia estructural entre los dos si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva (Pedemonte, 2008).

De acuerdo al planteamiento inicial del constructo de unidad cognitiva (Boero y otros, 1996) y la hipótesis de Pedemonte (2002) de que la unidad cognitiva favorece la construcción de una demostración, Pedemonte concluye que esta unidad cognitiva es positiva si la argumentación es deductiva, puesto que la demostración va a ser deductiva.

Fiallo (2011) y Fiallo y Gutiérrez (2017) emplean el constructo de unidad cognitiva para analizar los procesos de argumentación y de demostración de los estudiantes, así estos no correspondan a procesos deductivos, y a partir los resultados obtenidos en sus investigaciones reportan cuatro categorías de unidad o ruptura cognitiva, *unidad cognitiva empírica*, *ruptura referencial* y *unidad estructural empírica*, *unidad referencial* y *ruptura estructural*, *unidad cognitiva deductiva*. En cada una de estas categorías Fiallo y Gutiérrez resaltan dificultades que pueden presentar los estudiantes mientras aprenden a demostrar y que les impide realizar demostraciones deductivas que les permitan solucionar los problemas planteados. Ellas son un punto de partida para nosotros identificar dificultades en los estudiantes del curso de precálculo cuando resuelven los problemas de variación y cambio.

Teniendo en cuenta que el Modelo de Pedemonte permite explicitar los elementos de la estructura y el sistema de referencia de los procesos de argumentación y de demostración que permiten analizar la unidad o ruptura cognitiva (Pedemonte lo usa para el caso de Geometría y Álgebra y Fiallo para Trigonometría), en esta investigación planteamos su uso para analizar los procesos de argumentación y de demostración de los estudiantes que resuelven problemas de variación y cambio, porque independientemente el área de las matemáticas en la que estemos trabajando, estos procesos se pueden analizar con los elementos de este marco teórico. Es decir, el uso del Modelo de Pedemonte en problemas de variación y cambio y el constructo de la unidad cognitiva es novedoso en las investigaciones en la línea de la demostración.

Además al utilizar el Modelo de Pedemonte nosotros tenemos la oportunidad de identificar el tipo de argumentación o de demostración realizada, ver dificultades emergentes en los procesos de los estudiantes que les impiden resolver los problemas como, por ejemplo, la falta de comprensión del problema que le impide extraer datos adecuados para abordar la situación, las concepciones de los estudiantes, la naturaleza de los operadores (teóricos o empíricos), la pertinencia del enunciado conclusión, etc.

5. Metodología

Para alcanzar los objetivos de esta investigación usamos una metodología cualitativa que permitió analizar los procesos de argumentación ligados al planteamiento de conjeturas y los procesos de demostraciones realizados por los estudiantes participantes en el curso de precálculo.

A continuación, presentamos el contexto y la población de la investigación; la selección de los casos de estudio y la descripción de los participantes; explicamos cómo fue documentada la actividad argumentativa de los estudiantes y, finalmente, exponemos cómo utilizamos, a la luz del marco teórico, los instrumentos que permitirán realizar el análisis de los datos.

5.1 Contexto de la investigación y población de estudio

El contexto en que se desarrolló la investigación es el curso de precálculo que ofrece la Universidad Industrial de Santander (UIS) a estudiantes de nuevo ingreso a las facultades de ciencias e ingenierías. A continuación, describimos las características del curso, de los talleres y de los estudiantes que participaron de la investigación.

5.1.1 Curso de precálculo: Debido a los altos índices de mortalidad y repitencia (Botello, 2013) en los cursos de Cálculo Diferencial que se ofrecen en la UIS, se imparte un curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2014) a estudiantes de nuevo ingreso a carreras de ciencias e ingenierías (300 por semestre), durante 15 días consecutivos antes de comenzar cada semestre. Este curso que es gratuito y se ha impartido desde el primer semestre de 2013, a la fecha de este reporte de investigación cuenta con 10 versiones (dos por año).

La selección de estudiantes se realiza tomando en cuenta sus bajos resultados de matemáticas en las pruebas SABER-11 o sus bajos resultados en una prueba de caracterización realizada por la universidad, a ellos se invitan al curso y, finalmente, lo toman de forma voluntaria.

La intención de curso no es hacer un repaso de los contenidos vistos durante la vida escolar de los estudiantes. Por el contrario, el curso de precálculo en mención, según lo reportan Fiallo y Parada (2014), sigue una metodología no tradicional que se basa en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y el uso de GeoGebra. Esta se orienta por el propósito de promover en el aula un trabajo activo de resolución de problemas que involucra los procesos de razonamiento y la demostración, la comunicación, el trabajo con diferentes sistemas de representación, el uso de conexiones y el uso de la tecnología para la producción de aprendizajes significativos alrededor de las dos ideas centrales de Cálculo: la variación y la acumulación (Ímaz y Moreno, 2010, citado por Fiallo y Parada, 2014). Además, el diseño del material del curso (los talleres) sigue una reinterpretación de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele: *fase de información y exploración libre, fase de socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior, fase de exploración dirigida, fase de explicitación y orientación libre.*

Las ideas del curso son sustentadas en autores como Hitt (2005, citado por Fiallo y Parada 2014) quien plantea que el Cálculo reúne una cantidad de conceptos que están íntimamente relacionados, pero el manejo pobre de algunos subconceptos impide el desarrollo profundo de temas de Cálculo como límites, continuidad derivada e integral. Otra postura que es tomada al respecto, es la de Moreno (2012) quien expresa que

lo que se debe desarrollar es una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de variación y cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Hay que partir de lo que el estudiante sabe y plantear tareas que involucren los conceptos e ideas fundamentales del Cálculo. Intentar resolver en un curso de precálculo lo que el estudiante no aprendió en la escuela es un método que generalmente fracasa (Moreno, 2012 citado por Fiallo y Parada 2014, p. 61).

El diseño curricular del curso cuenta con 14 talleres (Fiallo y Parada, *en prensa*) para ser abordados durante 15 días en los que se dispone de cuatro horas diarias para que los estudiantes se enfrenten a los problemas de variación y cambio, bajo la orientación de un profesor y un auxiliar, quienes siguen la metodología del curso, la cual propicia y promueve la participación activa de los estudiantes ya sea individual o colectivamente (esto depende de la fase del taller y de las habilidades sociales de ellos). Los estudiantes, orientados por el profesor, deben enriquecer la actividad con sus interpretaciones de los problemas, posibles soluciones y estrategias utilizadas; todo esto con miras a favorecer el desarrollo del pensamiento variacional.

5.1.2 Talleres del curso: El curso aborda temas de números reales, trigonometría, análisis de datos, funciones, noción de límite y optimización a lo largo de 14 talleres (Fiallo y Parada, *en prensa*) que conducen a los estudiantes a reflexionar de manera profunda acerca de las diversas representaciones y significados asociados con los conceptos matemáticos (los 14 talleres de la

versión del segundo semestre de 2016 están del Anexo 2 al Anexo 15). La secuencia de talleres es flexible ya que su articulación no obedece a un orden temático como sí se presenta en los cursos tradicionales de precálculo; a través de ellos se pretende desarrollar los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998).

Para esta investigación seleccionamos problemas de los siguientes talleres: “Números y operaciones”, “Matemática y realidad”, “Recipientes”, “Área máxima” y “Caja sin tapa”, con la intención de documentar procesos de argumentación y de demostración de los estudiantes que participaron del curso de precálculo en diferentes momentos del mismo, a lo largo de los 15 días (60 horas) que tiene de duración. Cabe señalar que, para la explicación de los problemas, hemos tomado fragmentos de las ideas expuestas en el libro “Estudio dinámico de la variación: curso de precálculo con GeoGebra”, escrito por Fiallo y Parada (en prensa).

5.1.2.1 Problemas seleccionados: A continuación, mostramos el objetivo de cada taller seleccionado para esta investigación, los problemas de nuestro interés y algunas ideas de lo que se espera que hagan los estudiantes del curso cuando los abordan. Estos talleres promueven procesos de planteamiento de conjeturas (con las preguntas que están elaboradas), y la construcción de su respectiva demostración (ya que siempre se les pide a los estudiantes explicar, justificar, argumentar, demostrar o se les pregunta por qué son verdaderas las conjeturas planteadas). Es decir, consideramos un problema de demostración como cualquier problema cuyo propósito sea “descubrir cierto objeto o incógnita del problema y mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente anunciada” (Polya, 2011, p. 161) y no necesariamente los problemas de demostración de los teoremas clásicos de un curso de Cálculo Diferencial.

Taller “Números y operaciones”: La actividad matemática central de este taller consiste en que a partir de una situación problemática (NCTM, 2003, p. 297) se *estime la posición de la ubicación de los números sobre la recta real a partir de las características de las operaciones básicas*. Uno de los propósitos del taller es que los estudiantes logren distinguir los efectos de operaciones como la multiplicación, la división y el cálculo de potencias y raíces sobre las magnitudes de cantidad que están en el intervalo $(-1, 1)$. Para el caso de nuestro análisis, seleccionamos el problema:

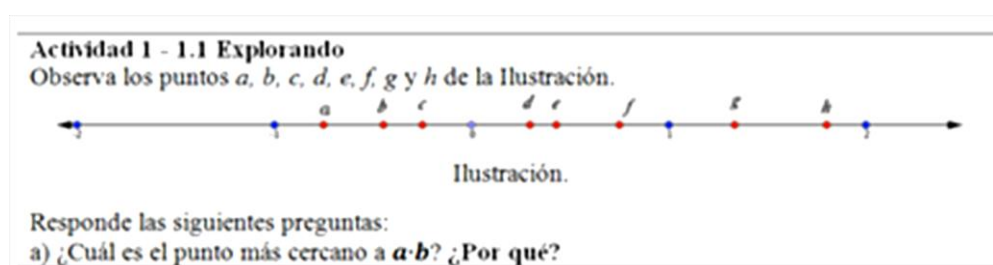


Figura 20: Problema seleccionado del taller “Números y operaciones”.

Consideramos a continuación posibles tipos de demostración, casos hipotéticos, que pueden hacer los estudiantes del curso de precálculo cuando se aborda este problema.

Experimento crucial constructivo

¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$? ¿Por qué?

El valor más cercano a $a \cdot b$ es el punto d , porque si $a = -0,75$ y $b = -0,5$ la multiplicación de dos números es $0,375$ y ahí se ve que ese es más o menos el valor del punto d . Entonces si escojo otro ejemplo va a dar cercano a d , por lo que esta es la respuesta.

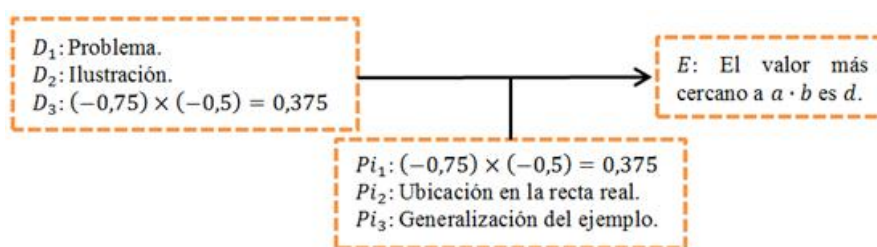


Figura 21: Estructura del ejemplo: Experimento crucial constructivo.

En este proceso de demostración se elabora un ejemplo particular (Pi_1) y a partir de él se hace una generalización (Pi_3) que se asume va a funcionar para otros ejemplos.

Ejemplo genérico analítico

¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$? ¿Por qué?

La respuesta puede ser b o e , porque b es aproximadamente $\frac{1}{2}$ y a aproximadamente $\frac{3}{4}$, por lo que b reduce a la mitad al número a , cuyo valor absoluto está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, por lo tanto, el valor absoluto del producto deber estar aproximadamente entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$.

Demostración deductiva formal estructurante

Una demostración geométrica deductiva del problema consiste en considerar los valores de a y b como segmentos de recta dados, en el cual se debe encontrar el producto de estos dos segmentos. Para ello se deben construir dos triángulos semejantes, tales que las razones entre sus lados correspondientes cumplan alguna de las siguientes proporciones $\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$, o, $\frac{b}{1} = \frac{x}{a}$, o, $\frac{a}{x} = \frac{1}{b}$ (obsérvese que en cualesquiera de ellas $x = a \cdot b$), en donde 1 es el segmento unidad y x es el segmento a encontrar (Fiallo y Parada, *en prensa*).

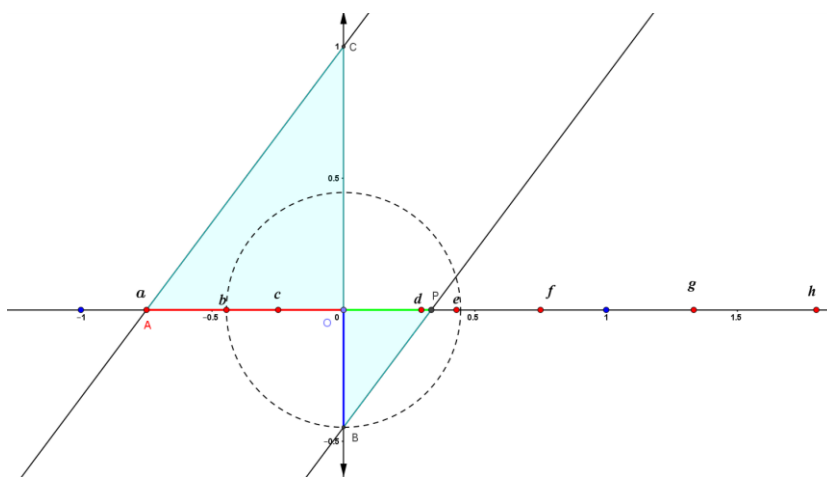


Figura 22: Demostración Gráfica de la ubicación del punto más cercano a $a \cdot b$

Otro problema que seleccionamos es el del Figura 23.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T1_Act-2.1.ggb** de GeoGebra y explora. Contesta:

¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.

Figura 23: Problema seleccionado del taller “Números y operaciones”.

En esta actividad se usa un archivo de GeoGebra con dos puntos *variables* a y b que representan dos números cualesquiera sobre la recta real (Figura 24), su producto y tres vectores a , b y $a \cdot b$, que indican la magnitud (valor absoluto), el sentido (signo) de los números y su producto.

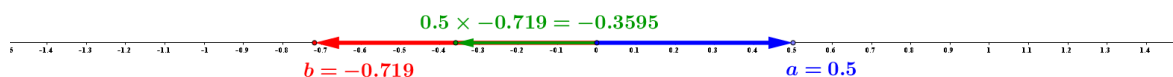


Figura 24: Modelación en GeoGebra.

El planteamiento de este problema cuenta con gran potencial para aprovechar la conexión entre las representaciones posibilitadas por GeoGebra: representaciones *geométricas* (recta real, vector), *métricas* (magnitud del vector) y *numéricas* (valor y signo) visualizadas en el archivo cuando a y b cambian, lo que ayuda a interpretarlos como variables.

En este caso se quiere que los estudiantes vean a a como operador reductor de la magnitud variable b , es decir, al multiplicar a por b , la magnitud (valor absoluto) del producto será siempre menor que la magnitud de b .

Se espera que los estudiantes lleguen a la siguiente conclusión:

Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1 \Rightarrow a \cdot b > 0, a \cdot b < a$ y $a \cdot b < b$ y planteen una demostración al respecto, que podrían ser parecidas a las del problema anterior, ya que esta pregunta es una

continuidad ese problema, pero ahora tiene una modelación en GeoGebra para explorar el problema antes de plantear la conjetura o incluso para la demostración.

Una demostración de tipo *empirismo ingenuo inductivo* que puede darse es la siguiente:

¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$? Escribe tus conjeturas y justifícalas

El valor es más pequeño que 1, porque si ubico a el 0,6 y b en 0,2 hay se ve que no pasa a 1.

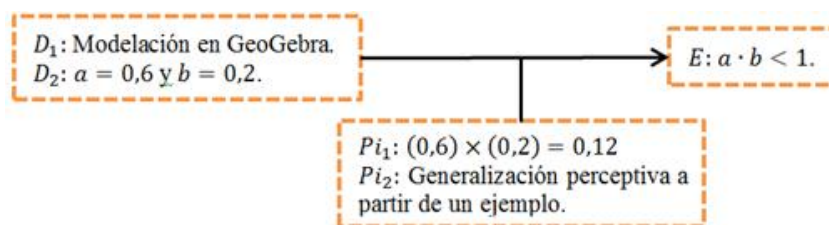


Figura 25: Estructura del ejemplo: Empirismo ingenuo inductivo.

Aunque el estudiante cuente con un archivo dinámico, puede llegar a construir una demostración observando un solo resultado y generalizando lo que ve.

b. Taller “Matemática y realidad”: Este taller se pretende que los estudiantes desarrollen modelos matemáticos de las situaciones planteadas, para lo cual se espera que seleccionen y usen estrategias de resolución de problemas no rutinarios, esto con el fin de traducir la realidad a estructuras matemáticas que permitan comunicar el modelo obtenido y su validez.

Situación 1: Filtración de Medicamento

Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas.

Según lo anterior, contesta:

- ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? Justifica tu respuesta.
 - ¿Y si la jugadora hubiera tomado la medicina durante un año? Justifica tu respuesta.
 - ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme
-

Figura 26: Problema seleccionado del taller “Matemática y realidad”.

Se espera que, a partir de las condiciones de la situación, los estudiantes logren encontrar los términos de una sucesión para generalizar un proceso iterativo determinando la expresión algebraica correspondiente.

Una demostración empírica de tipo *experimento crucial* que los estudiantes pueden hacer es:

La respuesta es 5280, porque si se toma una dosis de 440 miligramos cada 8 horas, en 10 días serían 30 dosis entonces,

$$\begin{array}{cc} 440mg & 1 \text{ dosis} \\ x & 30 \text{ dosis} \end{array}$$

Por lo que $x = 440 \times 30 = 13200$, y como se queda en el cuerpo el 40% entonces,

$$13200 \times 40\% = 5280$$

Por lo tanto en 10 días quedaría en el cuerpo 5280 y así para cualquier valor que yo necesite.

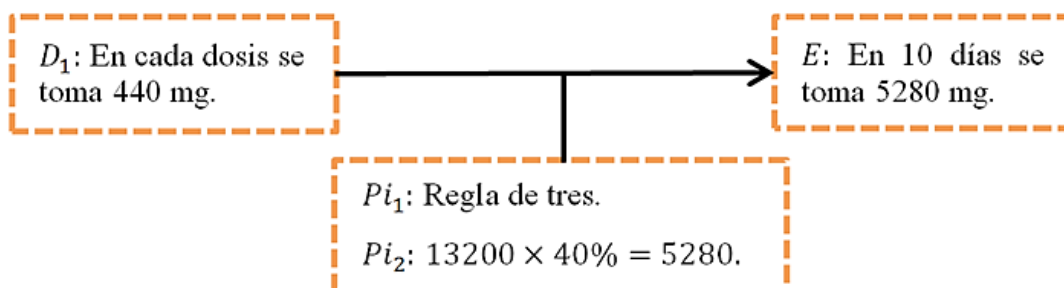


Figura 27: Estructura del ejemplo: Experimento crucial basado en ejemplos.

Todo este proceso es el *ejemplo crucial basado en ejemplo*, donde el estudiante emplea regla de tres para calcular la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo y después calculado el 40% de lo que le da, olvidando que para la dosis n el cuerpo tiene acumulado el 40% de la dosis $n-1$.

Demostración Deductiva Formal Estructurante

¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? Justifica tu respuesta.

Yo digo que se estabiliza en 733,33, porque el problema que nos presentan es un ejemplo de una serie geométrica y como el n -ésimo término de la serie geométrica se pueden representar mediante la siguiente expresión,

$$a_n = m \left[\frac{1-(r)^n}{1-(r)} \right], \text{ donde}$$

m es primer término de la sucesión $\rightarrow m = 440$

n es el n -ésimo termino $\rightarrow (n)$

r es la razón $\rightarrow r = 0,4$

Entonces al remplazar los datos del problema en la expresión obtenemos:

$$440 \left[\frac{1-(0,4)^n}{1-0,4} \right] = 440 \left[\frac{1-(0,4)^n}{(0,6)} \right].$$

Y analizando en la fórmula lo que pasa cuando pasa el tiempo (n crece), tenemos:

$$440 \left[\frac{1-(0,4)^n}{(0,6)} \right] \text{ tiende a } \frac{440}{0,6} = 733,33$$

ya que $(0,4)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, porque 0,4 es un número entre 0 y 1.

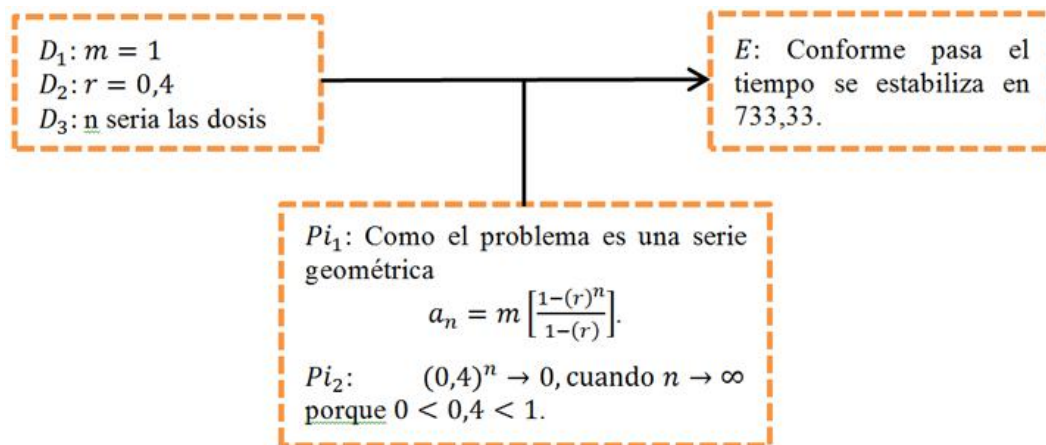


Figura 28: Estructura del Ejemplo: Deductiva Formal Estructurante.

Este sería un proceso deductivo que esperaríamos en el curso de precálculo, en este proceso no se utilizan ejemplos en su actividad matemática, sino que aplica una propiedad que conoce sobre las series geométricas y otra sobre los números reales, para construir la demostración y validar el enunciado conclusión.

Ejemplo crucial constructivo.

¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? Justifica tu respuesta.

La cantidad de medicamento se acerca a 733, porque si realizamos el siguiente vemos que:

$$a_1 = 440$$

$$a_2 = [440 \times 0,4] + 440 = 616$$

$$a_3 = [(440 \times 0,4) + 440] \times 0,4 + 440 = 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 686,4$$

$$a_4 = 440(0,4)^3 + 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 714,56$$

$$a_5 = 440(0,4)^4 + 440(0,4)^3 + 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 725,825$$

$$a_6 = 440(0,4)^5 + 440(0,4)^4 + 440(0,4)^3 + 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 730,32$$

$$a_7 = 440(0,4)^6 + 440(0,4)^5 + 440(0,4)^4 + 440(0,4)^3 + 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 732,13$$

$$a_8 = 440(0,4)^7 + 440(0,4)^6 + 440(0,4)^5 + 440(0,4)^4 + 440(0,4)^3 + 440(0,4)^2 + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 732,85$$

Si un estudiante hace hasta este valor y generaliza diciendo que a medida pasa el tiempo la cantidad de medicamento en el cuerpo se va acercando a 733, y esto se podría catalogar como una demostración de tipo *ejemplo crucial constructivo*.

Si sigue el proceso como se muestra a continuación podemos considerar otro tipo de demostración

Ejemplo genérico analítico

¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo?

Generalizamos este proceso para n días y lo expresamos como una sumatoria,

$$a_n = 440(0,4)^{n-1} + 440(0,4)^{n-2} + \dots + 440(0,4)^1 + 440(0,4)^0 = 440 \left[\sum_{i=0}^{n-1} (0,4)^i \right]$$

Entonces tenemos que la expresión que nos define el n ésimo término es

$$440 \left[\sum_{i=0}^{n-1} (0,4)^i \right] = 440 \left[\frac{1 - (0,4)^n}{1 - 0,4} \right]$$

Y analizando en la fórmula lo que pasa cuando pasa el tiempo (n crece), tenemos:

$$440 \left[\frac{1 - (0,4)^n}{(0,6)} \right] \text{ tiende a } \frac{440}{0,6} = 733,33$$

ya que $(0,4)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, porque $0,4$ es un número entre 0 y 1 .

Este es otro proceso de demostración deductivo que podría ser realizado por un estudiante para validar la conjetura previamente planteada usando la sumatoria y la fórmula para el n ésimo término de una serie geométrica.

c. Taller “Recipientes”: Este taller enfrenta a los estudiantes a tareas matemáticas asociadas a conceptos longitudes, áreas y volúmenes de objetos bidimensionales y tridimensionales, en particular exige claridad conceptual sobre las propiedades y los atributos de estos objetos, y sobre sus relaciones, especialmente sobre la congruencia y la semejanza para modelar la función que representa la interdependencia entre variables.

Actividad 1

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas.

- a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud, ¿cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección.
 - b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? Explica tu respuesta.
-

Figura 29: Problema seleccionado del taller “Recipientes”.

Un *proceso empírico* que el estudiante puede hacer como demostración es tomar las medidas de la hoja y realizar los cálculos correspondientes validar una conjetura previamente enunciada o incluso usando valores arbitrarios para los lados de la hoja y a partir de los resultados obtenidos generalizar sus hallazgos para dar una respuesta.

Se espera que los estudiantes planteen que, sin importar el tamaño de la hoja, el cilindro de mayor volumen es el que se forma usando el largo de la hoja para formar la base circular. Por lo que, al solicitar una demostración a este hecho, los estudiantes podrían plantear la siguiente:

Demostración deductiva formal estructurante

El cilindro formado a lo largo siempre tiene más volumen, porque si consideramos que a es el ancho tenemos que, si se forma la base circular con el lado de la hoja cuyo lado mide a , se tiene que, $r = \frac{a}{2\pi}$, despejando la fórmula del perímetro de una circunferencia y si utilizamos la fórmula del volumen de un cilindro,

$$V_1 = \pi \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 \times l = \frac{a^2 l}{4\pi}, \text{ con } l \text{ igual al largo de la hoja.}$$

Y si se forma la base circular con el largo de la hoja l se tiene que,

$$r = \frac{l}{2\pi}, \text{ entonces } V_2 = \pi \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \times a = \frac{al^2}{4\pi}.$$

Ahora teniendo en cuenta que $V_1 = \frac{a^2 l}{4\pi}$ y que $V_2 = \frac{al^2}{4\pi}$, podemos relacionarlos de la siguiente manera utilizando desigualdades, $a < l$

$$\frac{a}{4\pi} < \frac{l}{4\pi}, \text{ porque } 4\pi \text{ es positivo,}$$

Multiplico por a , $\frac{a^2 l}{4\pi} < \frac{a \cdot l}{4\pi}$, por a ser positivo,

Entonces multiplicando por l se tiene que, $\frac{a^2 l}{4\pi} < \frac{a \cdot l^2}{4\pi}$, entonces $V_1 < V_2$

Por lo tanto el volumen del cilindro formado a lo largo es más grande que a lo ancho.

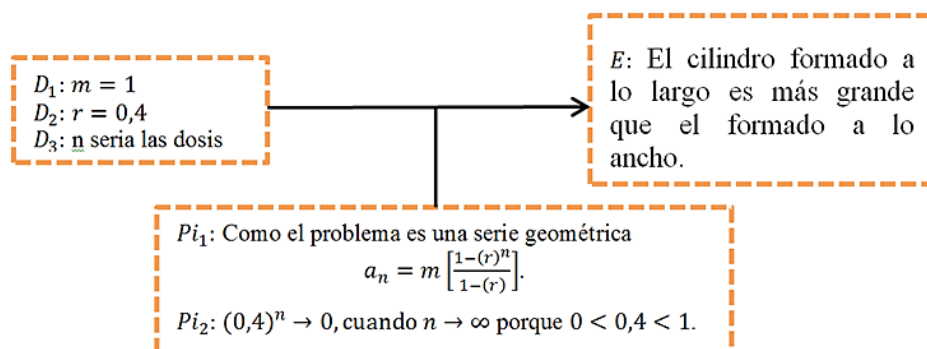


Figura 30: Ejemplo Demostración deductiva formal estructurante.

d. Taller “Área máxima”: El objetivo de este taller es aproximar a los estudiantes al concepto de derivada desde las ideas de cambio, variación, a partir de situaciones concretas.

Un proceso de demostración empírico que un estudiante puede realizar para el problema de la Figura 30Figura 30: Ejemplo Demostración deductiva formal estructurante. es realizar cálculos numéricos, y dar una respuesta aproximada a 3.5 m como el valor del lado del rectángulo. También se puede graficar y asumir este punto como el vértice de la parábola.

Actividad 1

- 1.2 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta en la hoja de trabajo.
-

Figura 31: Problema seleccionado del taller “Área máxima”.

Deductiva formal estructurante: El rectángulo con perímetro 14 y área máxima es el cuadrado de lado 3,5 y área 12,25. Porque si

$$f(x) = x(7 - x) = 7x - x^2$$

y como eso es una parábola, podemos hallar el vértice mediante la fórmula,

$$P\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right), \text{ hallar el valor máximo:}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{-2(1)} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\text{Luego,} \quad f(3,5) = 3,5(7 - 3,5) = 3,5(3,5) = 12,25.$$

Concluyendo que el punto del vértice está dado por $P(3,5, 12,25)$ de donde se tiene que el valor máximo del área es $12,25 \text{ m}^2$ cuando $x = 3,5$.

Otro proceso de demostración deductiva formal estructurante, puede ser usando técnica de derivación aplicada a la expresión: $f(x) = x(7 - x) = 7x - x^2$

$$f'(x) = 7 - 2x$$

$$7 - 2x = 0 \text{ entonces } x = 3,5$$

$$\text{Así,} \quad Y = 7(3,5) - (3,5)^2 = 12,25.$$

Por lo tanto, $x = 3,5$ es el lado del rectángulo que hace el área máxima.

e. Taller “Caja sin tapa”: El propósito de este taller es introducir, desde lo intuitivo, la construcción de la definición de variación. La actividad matemática central del taller es el problema de optimización conocido como *la caja sin tapa*, a través de él se aborda el concepto de derivada desde su interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente a una curva.

Actividad 1

A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? Explica tu procedimiento y tu respuesta.

Figura 32: Problema seleccionado del taller “Caja sin tapa”.

Un proceso de argumentación o demostración que los estudiantes pueden realizar al resolver el problema de este problema es asignar, de manera arbitraria, valores a las dimensiones de la caja plantear o validar así su enunciado conclusión. También pueden dar valores considerando las condiciones del problema y aproximarse al volumen máximo a ensayo y error, utilizando varios ejemplos o planteando una generalización de lo que estén realizando.

Una demostración *deductiva formal estructurante* que se pueden hacer es determinar la función del volumen de la caja respecto a la altura, derivar y encontrar el valor máximo mediante la técnica de optimización enseñada en cursos tradicionales, como mostramos a continuación:

$$y = x(4 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 20x^2 + 24x.$$

$$y' = 12x^2 - 40x + 24$$

$$12x^2 - 40x + 24 = 0$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{7}+5}{2} \text{ y } x_2 = \frac{\sqrt{7}+5}{2}.$$

$$\text{Como } x = \frac{\sqrt{7}+5}{2} > 2, \text{ entonces la solución es } x = \frac{-\sqrt{7}+5}{2} \approx 0,7847.$$

En un aula de clase se puede considerar esto como un demostración formal, ya que el estudiante utiliza los datos del problema y me

5.1.3 Selección de casos de estudio: La versión del curso de precálculo en la que desarrollamos nuestra investigación contó con la participación de 300 estudiantes de nuevo ingreso a la universidad que aceptaron participar en el curso de precálculo para el segundo semestre de 2016. Estos estudiantes están en su mayoría, entre los 16 y 20 años de edad y provienen de diferentes partes del país.

Las características del curso de precálculo nos permitieron adelantar la investigación en él ya que, por un lado, la población a la que atiende ha recibido como mínimo 11 años de formación en matemáticas (5 de primaria y 6 de secundaria) y, por otro, los talleres del curso están basados

en la resolución de problemas de variación y cambio; y en el desarrollo de los procesos matemáticos, entre ellos el de *razonamiento y demostración* (NCTM, 2000), que es donde se encuentran los procesos de nuestro interés: la argumentación ligada a la conjetura y la construcción de la demostración.

De los 300 estudiantes que participaron en el curso de precálculo para el segundo semestre de 2016, consideramos un grupo de 30 estudiantes en el que el profesor encargado estuvo dispuesto a ser video grabado o que video grabáramos las actividades realizadas por sus estudiantes cuando trabajaban de forma individual, en grupo o en los momentos de socialización.

La muestra de estudio se conformó con seis estudiantes de quienes se esperaba documentar los procesos de argumentación y de demostración mientras resolvían los problemas del curso de precálculo: *Diego, Carlos, Lia, Juan, Sofía y Nicol* (los anteriores son nombres ficticios). Al inicio del curso, Carlos trabajó solo, pero después interactuaba con Diego mientras resolvía los problemas; lo mismo sucedió con Sofía, quien se unió a Nicol. En la conformación de las parejas no se realiza intervención alguna pues estas se dieron dada la cercanía de los puestos. En general pudimos notar que la tendencia de todos estudiantes es a organizarse en grupos de dos o tres personas para compartir sus respuestas antes de las socializaciones, lo que también hicieron los estudiantes que conforman la muestra.

A continuación, precisamos algunas características de los estudiantes, presentándolos por parejas:

Carlos y Diego; Carlos era más participativo dada su personalidad y la confianza que exhibía en sus conocimientos; Diego, por el contrario, era más reservado y en ocasiones aportaba al trabajo de Carlos, sin ser el protagonista en los procesos de argumentación y de demostración presentados.

Sofía y Nicol, las dos estudiantes tenían la misma personalidad: un poco tímidas para expresarse, en ocasiones parecían inseguras de su trabajo en el aula. En los momentos que trabajaron juntas, ninguna fue protagonista ya que hubo una participación sobresaliente de parte de ambas. En una ocasión que Sofía faltó, por motivo de enfermedad, Nicol trabajó con *Andrés*, quien solo aparece una vez en este estudio.

Lia y Juan; Lia era muy segura de sí misma y fue la protagonista de esta pareja ya que su participación era destacable en comparación con la de su compañero; por ende, Juan fue más reservado y esperaba el trabajo de su compañera para adelantar el suyo o hacer algunos aportes.

5.2 Recolección de los datos

Antes de hablar de la recolección de los datos, vamos a aclarar el rol del docente del grupo y del investigador que estuvo grabando e interactuando durante todo el curso con los estudiantes que accedieron a participar de la investigación.

5.2.1 Rol del profesor: en el grupo elegido para desarrollar este estudio, el profesor fue el responsable de la enseñanza a la luz de la metodología del curso; él facilitó los espacios de participación promoviendo la discusión y el debate matemático entre los estudiantes, como señala la metodología del curso.

5.2.2 Rol del investigador: el investigador trabajó con el profesor del grupo seleccionado en la preparación de las clases antes y durante el desarrollo de la experimentación, además adoptó un papel de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento y orientación de los estudiantes que participaron de la investigación; interactuó constantemente con ellos, formulando preguntas, registrando sus respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas.

5.2.3 Toma de datos: para la recolección de los datos, el investigador filmó los 15 días del curso, durante cuatro horas diarias y recolectó las hojas de trabajo de los estudiantes participantes para tener evidencia escrita y poder corroborar o aclarar ideas expresadas en los videos, durante el desarrollo del taller. Esto con la intención de documentar sus procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, que ofrecieran evidencias que soportaran el objetivo de la investigación.

Asimismo, se acompañó de manera puntual el trabajo individual y grupal de los casos de estudio cuando resolvían los problemas planteados.

5.3 Análisis de los datos

Al ser esta investigación de tipo cualitativo, para la sistematización de los datos el investigador transcribió los videos y los complementó con apuntes de las hojas de trabajo recolectadas; así extrajo los procesos de argumentación y demostración de los problemas seleccionados y, posteriormente, los analizó la luz del marco teórico empleando de los instrumentos, esto sin perder de vista los objetivos de la investigación.

5.3.1 Instrumentos de análisis: A continuación, se retoman los elementos teóricos que fueron expuestos en el capítulo 2 y que sirven de instrumento de análisis de los datos recolectados:

5.3.1.1 Modelo de Pedemonte: Si en el momento seleccionado de la actividad matemática del estudiante se identifican los tres elementos principales (datos, enunciado conclusión y los operadores de la concepción (permiso de inferir)) de la estructura, con el modelo de Toulmin, ya tenemos un proceso de argumentación o de demostración. Consideramos en el análisis los tres elementos adicionales que completan la estructura (indicador de fuerza, refutación potencial y

soporte), en caso de lograrse identificarlos. Adicional a esto, identificamos los demás elementos que conforman el sistema de referencia (concepción) de los estudiantes considerados al abordar los problemas (sistema de representación $\langle L \rangle$ y estructura de control $\langle \Sigma \rangle$).

Identificados todos los elementos estructurales y referenciales, que se puedan, analizamos el trabajo de los estudiantes, resaltando siempre los elementos más importantes y los dos elementos del sistema de referencia que están implícitos en el esquema estructural (L, Σ) , ya que están ligados a la concepción que es el soporte en el Modelo de Pedemonte. Nosotros en lugar del incluir todos los elementos del sistema de referencia en el Modelo de Pedemonte, solo resaltamos el marco en el que está trabajando el estudiante.

Un *marco* está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus distintas formulaciones eventualmente e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes desempeñan un papel esencial en el funcionamiento como herramientas, de los objetos del marco. Dos marcos pueden implicar los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986 p.11).

La Figura 33 muestra la estructura del Modelo de Pedemonte al integrar el modelo cK Φ en el modelo de Toulmin; esta estructura es explicada en cada problema del análisis.

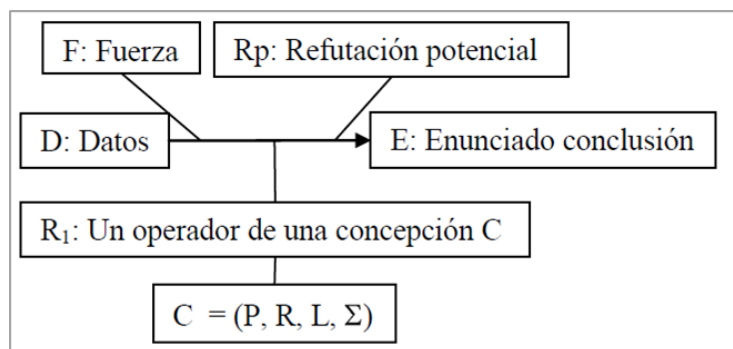


Figura 33: Integración del modelo cK Φ con el modelo de Toulmin

5.3.1.2 Constructo de unidad cognitiva: Posterior a la identificación de la estructura y el sistema de referencia de ambos procesos, analizamos la posible distancia o continuidad estructural y referencial entre la argumentación y la demostración. Así que, al igual que Fiallo (2011), utilizamos un cuadro comparativo para analizar los sistemas de referencia (cuádrupla del modelo cK Φ) y un cuadro comparativo para analizar la estructura de los procesos, a la luz del constructo de unidad cognitiva según la interpretación de Fiallo (2011) del trabajo de Boero, et. ali (1996) y Pedemonte (2002).

a) *Continuidad o ruptura del sistema de referencia:* A continuación observamos el cuadro comparativo (Figura 34), propuesto por Fiallo (2011):

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES	OPERADORES
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
ESTRUCTURA DE CONTROL	ESTRUCTURA DE CONTROL
CONTINUIDAD O RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 34: Cuadro para el análisis de la continuidad del sistema de referencia

Ese cuadro lo utilizamos para analizar la posible continuidad o ruptura del sistema de referencia al contrastar cada uno de los elementos correspondientes a cada proceso y dejar en evidencia si se repiten, están representados bajo el mismo sistema de referencia o comparten la estructura de control.

b) *Análisis de la estructura:* A continuación, el cuadro comparativo que contrasta las características de la estructura del proceso de argumentación y del proceso de demostración (Figura 35).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN
CONTINUIDAD O RUPTURA ESTRUCTURAL	

Figura 35: Cuadro para el análisis de la estructura.

Nosotros, al igual que Fiallo (2011), utilizamos este cuadro para identificar la posible continuidad o ruptura en la estructura de los procesos. Consideramos que la continuidad se presenta si entre la argumentación y la demostración los procesos involucrados son ambos empíricos o ambos deductivos.

Posterior a la implementación de estos instrumentos, analizamos la posible unidad o ruptura cognitiva, las posibles dificultades o fortalezas de los estudiantes.

A continuación, presentamos el análisis de los datos integrando los instrumentos expuestos en este apartado.

6. Análisis de procesos de argumentación y de demostración

En este capítulo mostramos el análisis de los procesos de argumentación y de demostración realizados por los estudiantes a la luz del marco teórico y siguiendo la metodología expuesta. En este estudio analizamos la actividad argumentativa de los estudiantes de algunos en algunos problemas planteados en cinco de los 14 talleres del curso: 1) Números y Operaciones, 2) Matemática y realidad, 3) Recipientes, 4) Caja sin tapa y 5) Área máxima.

Para dar orden al análisis, en cada caso presentamos el problema, posteriormente el proceso de argumentación de los estudiante, cuyos componentes se representan en el esquema del Modelo de Pedemonte para dar paso al análisis de la argumentación; seguidamente, presentamos el proceso de demostración, el esquema del Modelo de Pedemonte que evidencia sus elementos y el respectivo análisis; finalmente, analizamos la unidad cognitiva usando los cuadros comparativos que contrastan los elementos de la estructura del proceso de argumentación y del proceso de demostración.

Cabe precisar que cuando identificamos un operador para el Modelo de Pedemonte y para el cuadro comparativo del sistema de referencia (en el análisis de la unidad o ruptura cognitiva), este lo escribimos con símbolos matemáticos o de forma más concreta, si es posible; esto pese a que el estudiante lo haya representado en lenguaje natural. La intención de esto es aligerar de texto los instrumentos de análisis.

6.1 Procesos identificados en el taller “Números y Operaciones”

A continuación, presentamos el análisis de tres problemas de demostración del taller Números y Operaciones del curso de precálculo, los cuales fueron trabajados por Carlos de manera individual.

6.1.1 Problema 1.1

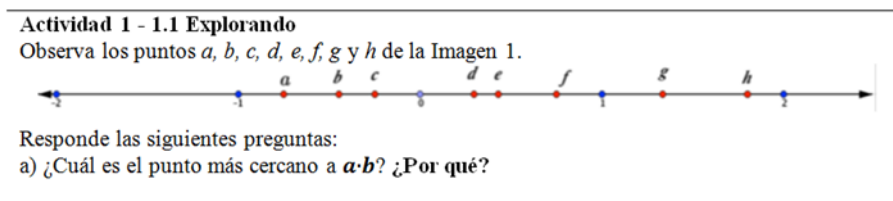


Figura 36. Problema 1.1

Proceso de Argumentación

[1] Inv: ¿Cuál es el punto más próximo $a \cdot b$?

[2] Carlos: [...] lo que hice fue darle valores. En este caso digamos que acá hay 100 [señala el intervalo $(0,-1)$], un ejemplo, entonces más o menos acá hay 25 y 25 [Intervalos $(-1,a)$ y $(c,0)$], acá hay como 30 [intervalo (a,b)] y aquí hay 15 [intervalo (b,c)], que es como la mitad de este [intervalo (a,b)], entonces 25 y 15... bueno puse 0,75 [valor de a] y 0,45 [valor de b] negativos ambos, los multipliqué y eso me da un número positivo que es 0,33 algo; y ese 0,33 algo sería más o menos por acá, entonces sería el punto d el más cercano.

[3] Inv: ¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$?

[4] Carlos: El d .

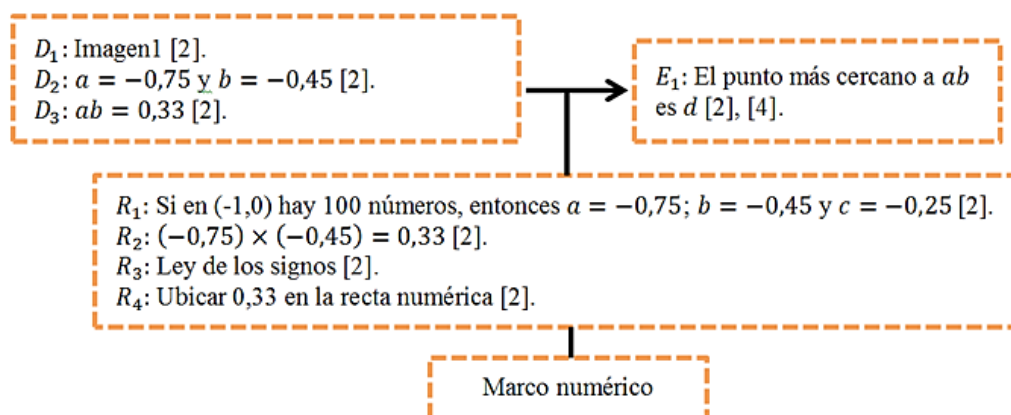


Figura 37: Estructura de la argumentación del Problema 1.1 realizada por Carlos.

Este proceso de argumentación es *constructivo* y posee una estructura *inductiva por generalización sobre el proceso* ya que, a partir de la ilustración suministrada, el estudiante obtuvo datos (D_2) para elaborar procedimientos aritméticos con ellos y transformarlos (R_2 y R_3); finalmente, encontró un resultado (D_3) que le dio información suficiente para plantear el enunciado conclusión (E_1).

La actividad argumentativa del estudiante se desarrolló bajo un sistema de representación numérico (L), acompañado de una estructura de control numérica-perceptiva (Σ_1) en la que él

encontró respaldo a la actividad argumentativa, al asociar el valor numérico del ejemplo particular a uno de los puntos (el punto d) de la recta numérica.

Proceso de demostración

[5] Inv: ¿Por qué d es el punto más cercano a $a \cdot b$?

[6] Carlos: Porque digamos más o menos poniendo valores, así como tanteados, daría la multiplicación 0,33 y es más o menos como la distancia que queda aquí [señala d], lo que le resta para llegar a 1.

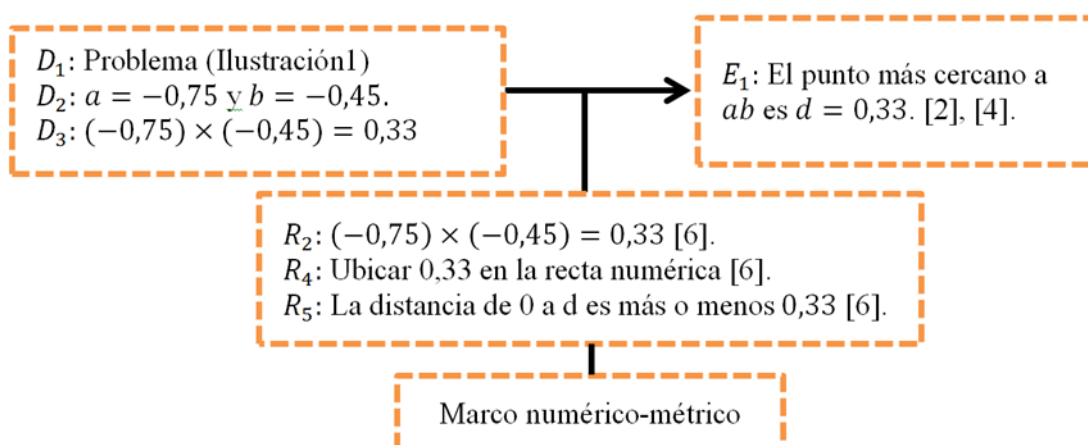


Figura 38: Proceso del estudiante.

En este proceso el estudiante utilizó un operador empleado en el proceso de argumentación como dato (D_3); sustentó la construcción de la demostración al resaltar la posición de 0,33 en la recta numérica, por lo tanto este tipo de demostración es un experimento crucial constructivo.

Carlos utilizó el lenguaje natural como única representación (L_2) y un control (Σ_2) métrico-perceptivo, al considerar que la distancia de 0 a 0,33 es más o menos la distancia de 0 a d .

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : El punto más cercano a ab es d	E_1 : El punto más cercano a ab es d
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Si en $(-1,0)$ hay 100 números, entonces $a = -0,75$; $b = -0,45$ y $c = -0,25$. R_2 : $(-0,75) \times (-0,45) = 0,33$. R_3 : Ley de los signos. R_4 : Ubicar 0,33 en la recta numérica.	OPERADORES R_2 : $(-0,75) \times (-0,45) = 0,33$. R_4 : Ubicar 0,33 en la recta numérica. R_5 : La distancia de 0 a d es más o menos 0,33.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 = Numérico L_2 = Lenguaje natural	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_2 = Lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 = Numérico-Perceptivo	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_2 = Métrico-Perceptivo
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico-métrico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 39: Cuadro Comparativo 1, continuidad del sistema de referencia (Problema 1.1)

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva o empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial constructivo
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 40: Cuadro Comparativo 2, continuidad estructural (Problema 1.1).

En este proceso de argumentación y de demostración encontramos unidad cognitiva empírica dado que existe continuidad referencial y estructural. Esta unidad cognitiva empírica la vemos como una dificultad que impide al estudiante convertir los operadores empíricos de la

argumentación en propiedades matemáticas para realizar una demostración deductiva ya que, en el proceso de argumentación con el que planteó la conjetura, él empleó algunos elementos que después retomó como experimento crucial para sustentar la construcción de la demostración.

Otra dificultad que emergió de la observación del grupo, es que los estudiantes abordaron este problema de variación y cambio como un problema numérico invariante lo que condujo a la mayoría a hacer solo unos ejemplos y, posteriormente, generalizar para dar una respuesta, este proceso provocó el tipo de argumentación y demostración que acabamos de analizar.

6.1.2 Problema 1.2

A continuación, presentamos la actividad argumentativa de Carlos cuando resolvió un problema planteado por el investigador mientras trabajaba en el taller “Números y operaciones”. Es importante señalar que el problema no está directamente relacionado con la Imagen de la recta numérica que aparece en el taller, pero el estudiante apoyó su respuesta en ella.

¿Cuándo multiplico dos números, el resultado de la multiplicación es mayor, menor o igual a cualquiera de los dos números? **¿Por qué?**

Figura 41: Problema 1.2

Proceso de argumentación

[1]Inv: ¿Cuándo multiplico dos números, el resultado de la multiplicación es mayor, menor o igual a cualquiera de los dos números?

[2]Carlos: Pues cuando son positivos siempre dará mayor, eso sí es de ahí, ya que se aumenta el valor *[señala la parte positiva de la recta numérica, Imagen 1]*. Cuando son... creo que negativos también porque... ¡Ah, no, no, no!, perdón. Cuando son dos negativos multiplicados evidentemente va a ser mayor porque se va a ir hacia el costado de allá *[señala la parte positiva de la recta numérica]* y cuando son dos signos diferentes (negativo-

positivo), tiene que ser menor que ambos, creo yo, porque el valor se retrocede [*duda y toma la calculadora*]. Creo que calculé mal... sí, calculé mal. Espere que caí en cuenta de algo: $-0,75$ por $0,3$ es igual a $-0,22$ [*toma los valores que le asignó a a y d en la recta real del problema, Imagen 1*]. No, no, en este caso sería el c , porque de todas formas recortó [*$ad \approx c < d$*] pero no, o sea, no fue menor este número como tal [*se queda en silencio*].

[3]Inv: Bueno y si multiplico dos números positivos, ¿su resultado siempre es mayor que cualquiera de esos dos números?

[4]Carlos: Pues sí; sí, claro.

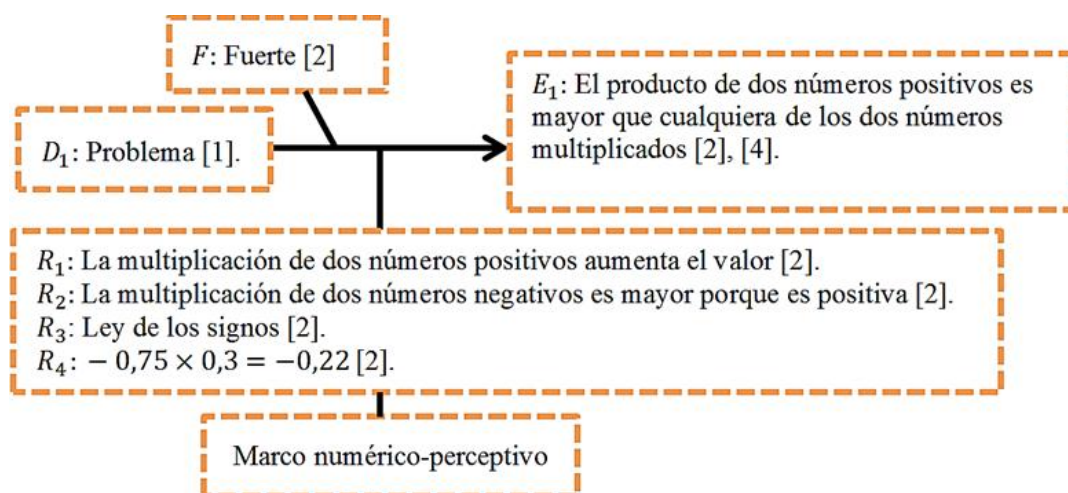


Figura 42: Estructura de la argumentación del Problema 1.2 realizada por Carlos.

Ante la pregunta del investigador, el estudiante planteó unas conjeturas iniciales apoyadas en operadores (R_1, R_2) que, al parecer, eran para él reglas asociadas a la multiplicación.

La transcripción evidencia que el estudiante quedó en silencio al no entender porque el resultado le dio la mitad de los dos números multiplicados cuando usó un número positivo y uno negativo. Esta situación le permitió al investigador centrar la atención del estudiante en una de estas conjeturas para, finalmente, él lograra concretar un enunciado conclusión (E_1), el cual sería demostrado por el estudiante.

El estudiante utilizó la recta numérica como primer control (Σ_1) y, posteriormente, la calculadora (Σ_2); además, en este proceso de *argumentación inductivo por generalización de los enunciados*, identificamos que el estudiante usó el lenguaje natural como principal medio de representación (L_1) y una representación numérica (L_2).

Proceso de demostración

[5]Inv: ¿Por qué?

[6]Carlos: Porque de por sí, por cualquier lado que se lo mire, por ejemplo 5×7 , va a estar 5 elevado [sumado] 7 veces o 7 elevado 5 veces, o sea va a ser la repetición como tal, entonces el número no se va a mantener ahí estático, 5 y 7 son menor que 35.

[7]Inv: Ah, bueno.

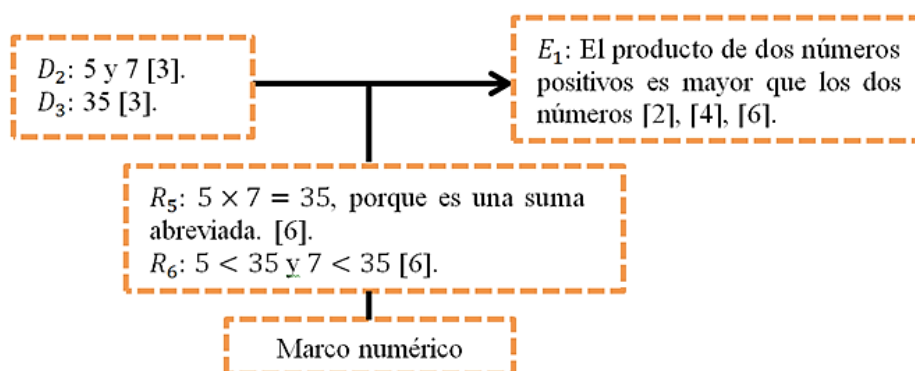


Figura 43: Esquema de la demostración del Problema 1.2 realizada por Carlos.

Vemos que en este proceso el estudiante construyó la demostración con un *ejemplo escogido sin ningún criterio*, consecuencia de la concepción “la multiplicación es una suma abreviada y, por ende, el resultado siempre es más grande que cualquiera de los números”.

El ejemplo numérico (L_2) utilizado por el estudiante hizo las veces del control (Σ_3). Consideramos que usar ejemplos con números enteros es una dificultad que impide encontrar

contradicción alguna en el proceso de demostración pues, en el caso que analizamos, el ejemplo corroboró la concepción del estudiante.

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : El punto más cercano a ab es d	E_1 : El punto más cercano a ab es d
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > a \wedge ab > b$. R_2 : Ubicación de los números reales en la recta numérica. R_3 : Ley de los signos. R_4 : $-0,75 \times 0,3 = -0,22$	OPERADORES R_5 : $5 \times 7 = 35$, porque es una suma abreviada. R_6 : $35 > 5$ y $35 > 7$
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
L_1 : Lenguaje natural. L_2 : Numérica	L_2 : Numérica
ESTRUCTURA DE CONTROL	ESTRUCTURA DE CONTROL
Σ_1 = Recta numérica. Σ_2 = Calculadora.	Σ_3 = Ejemplo numérico.
<i>Marco numérico-perceptivo</i>	<i>Marco numérico</i>

CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Figura 44: Cuadro Comparativo 3, continuidad del sistema de referencia (Problema 1.2).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Argumentación inductivo por generalización de los enunciados	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva o empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Empírica Ingenua
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 45: Cuadro Comparativo 4, continuidad estructural (Problema 1.2).

En estos procesos se presenta unidad cognitiva inductiva ya que el estudiante razonó bajo una concepción ligada a la idea de que la multiplicación siempre es un valor más grande por

concebirla como una suma abreviada. Por lo que podemos decir que esta unidad cognitiva empírica es una dificultad que le impidió considerar otras opciones de números positivos tanto en el proceso de argumentación como en el proceso de demostración, como por ejemplo: “si los dos números están entre cero y uno” o “alguno de ellos está entre cero y uno”.

Emplear ejemplos numéricos y comprobaciones perceptivas en el proceso de argumentación y en el de demostración es una dificultad que le impidió al estudiante realizar procesos deductivos y que, además, genera unidad cognitiva empírica.

6.1.3 Problema 1.3

Continuamos con los problemas de demostración del taller Números y Operaciones, con el problema que se muestra en Figura 46.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T1_Act-2.1.ggb** de GeoGebra y explora. Contesta:

¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$? Escribe tus conjeturas y justificalas.

Figura 46: Problema 1.3

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué pasa con el valor de ab si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$?

[2] Carlos: Si es un entero [si $b=1$] va a dar el mismo número, como vimos en ese caso [intervención 6], esto, si ya la cifra es inferior y son decimales inferiores a uno, obviamente lo resultado van a ser antes que cualquiera [$ab < a$ y $ab < b$].

[3] Inv: ¿Esto se cumple siempre?

[4] Carlos: Sí, se cumple; veo que el valor que me dio como tal [ab] es inferior a este [a] y también a este [b , interactúa con la modelación].

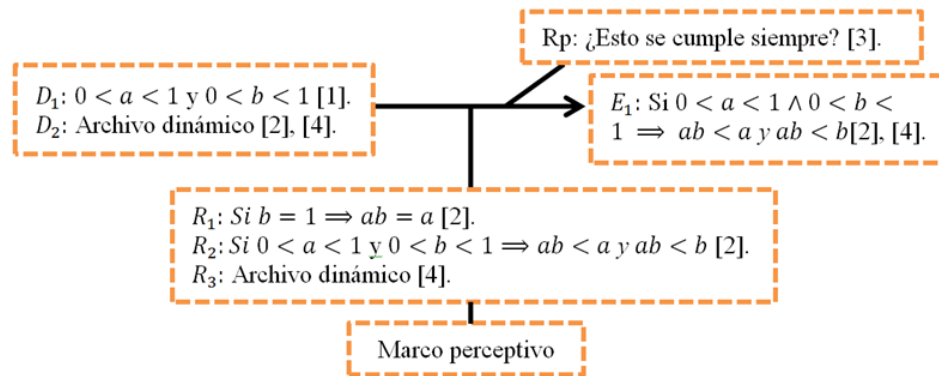


Figura 47: Estructura de la argumentación del Problema 1.3 realizada por Carlos.

Bajo un proceso inductivo por generalización, el estudiante planteó una conjetura basado en un análisis perceptivo que va más allá de solo considerar un caso particular. Podemos inferir que el estudiante no dudó de su enunciado conclusión (E_1) y esto se debe a que el control de sus acciones lo ejerció el archivo dinámico (Σ_1), que a su vez fue su parte de su sistema de representación (L_1).

Proceso de demostración

[5] Inv: ¿Por qué da esto? [que ab sea menor que a y que b , [4]].

[6] Carlos: No sé cómo justificarlo; estoy pensando en eso.

[7] Inv: Porque ahí parece que sí.

[8] Carlos: Sería lo que ya le dije sobre los fraccionarios.

[9] Inv: ¿Cómo así?

[10] Carlos: Pero entonces no sé cómo convertir esas cifras en fracciones. Voy a mirar unas cifras más razonables.

[11] Inv: Haga lo que considere necesario.

[12] Carlos: Trabajémoslo con el 50 exacto... ¡Ay, no! ¿Por qué no sale? Bueno, dejémoslo ahí.

Supongamos que este es 0,8 [*valor de b*] y este, digamos que, es 0,6 [*valor de a*] –para no pelear– entonces 0,6 me indicarían $\frac{3}{5}$, ¿sí? [*verifica en la calculadora que $3 \div 5 = 0,6$*], sí $\frac{3}{5}$.

Lo que uno podría realizar es lo siguiente $\frac{3}{5}$, o sea transformando 0,6; y 0,8 en $\frac{4}{5}$, estamos hablando de multiplicación, entonces $3 \times 4 = 12$ y 25, entonces empezamos a... [*escribe $\frac{12}{25}$, pero no es capaz de explicar ni de concluir su idea*].

¿A qué?! [*se cuestiona*]... Bueno, acá no se pueden reducir al punto como tal porque no se deja manejar, pero de todas formas trabajemos un poquito más coherente [*cambia el valor de a en su ejemplo*].

¿El 0,5 dónde está?.. Bueno, tomemos este; 0,5 sería $\frac{1}{2}$, estaríamos hablando $\frac{1}{2}$ [*valor de a_1*], las cifras obviamente van a cambiar [*antes había calculado $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$, ahora cambió a $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$*] y serían $\frac{4}{10}$, que al empezar a dividirlo tendríamos 2 y 5 [*simplifica*]; y $\frac{2}{5}$ sería 0,4 que es lo que está acá [*valor de ab en la pantalla*] y sería una forma de sustentar por qué los valores a veces son inferiores al valor de a y b .

[13] Inv: ¿ $\frac{2}{5}$ es más pequeño que $\frac{1}{2}$?

[14] Carlos: Sí, claro.

[15] Inv: ¿Por qué?

[16] Carlos: Porque en este caso estaremos hablando que una fracción dividida en 5 partes, donde cada una equivale a un 20%, entonces tomar dos porciones sería tomar en 40%, faltaría todavía la mitad de una porción para poder llegar a ser el 50% y llegar que es igual que el punto a o más porciones para que lo supere.

[17] Inv: ¿ $\frac{2}{5}$ es más pequeño que $\frac{4}{5}$?

[18] Carlos: Sí, claro.

[19] Inv: ¿Por qué?

[20] Carlos: Sigue siendo inferior porque $\frac{4}{5}$ supondría el 80% de cierta cantidad, en este caso sería 0,8.

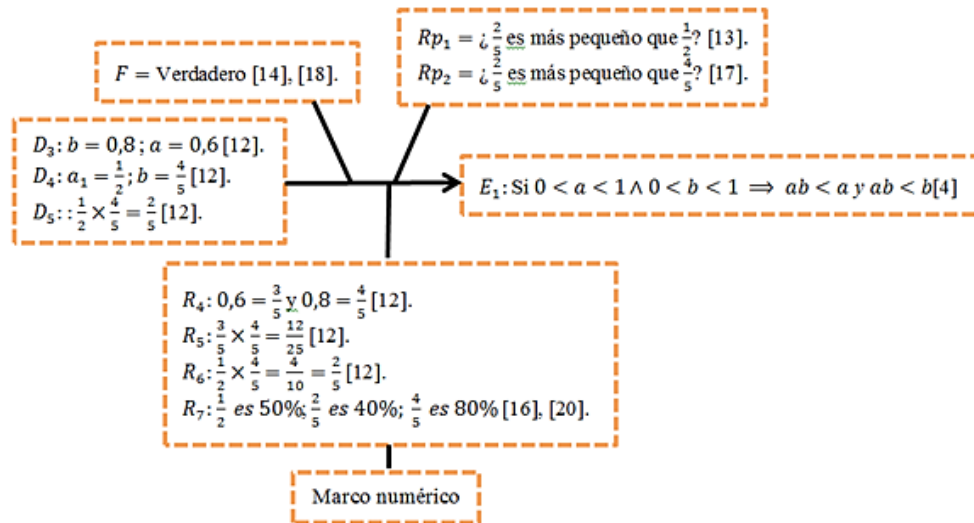


Figura 48: Estructura de la demostración del Problema 1.3 realizado por Carlos.

A través de un proceso inductivo el estudiante construyó su demostración manipulando algunos datos numéricos escogidos según las condiciones del problema y la facilidad para transformarlos y analizarlos en diferentes registros de numeración.

Cabe resaltar que en busca del ejemplo que le permitió justificar la construcción de la demostración, el estudiante descartó un ejemplo que involucraba un número fraccionario que no pudo comparar con los otros dos, evidenciando un proceso de demostración de tipo *experimento crucial constructivo*.

La representación que vemos es numérica (L_2) con diferentes sistemas de numeración. Se evidencia un control (Σ_1) que tiene que ver con la correspondencia de los resultados y los valores que aparecen en el archivo dinámico. Después de unas refutaciones potenciales del investigador, el

estudiante decidió transformar (R_6) las fracciones en porcentajes, aplicando un nuevo control (Σ_2) que le permitió relacionar las diferentes interpretaciones de la fracción mediante un tratamiento entre los diferentes registros numéricos (Duval, 1993).

Unidad o ruptura cognitiva

En este proceso se presentó continuidad empírica estructural, pero encontramos que hubo ruptura cognitiva, producto de un cambio del sistema de referencia perceptivo en el planteamiento de la conjetura, a uno numérico en la construcción de la demostración. Veamos los cuadros de comparación:

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : El punto más cercano a ab es d	E_1 : El punto más cercano a ab es d
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Si $b = 1 \Rightarrow ab = a$. R_2 : Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1 \Rightarrow ab < a$ y $ab < b$. R_3 : Archivo dinámico.	OPERADORES R_4 : $0,6 = \frac{3}{5}$ y $8 = \frac{4}{5}$. R_5 : $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$. R_6 : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. R_7 : $\frac{1}{2}$ es 50%; $\frac{2}{5}$ es 40%; $\frac{4}{5}$ es 80%.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Archivo dinámico L_2 : Lenguaje natural	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_2 : Lenguaje natural L_3 = Numérico
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 = Archivo dinámico	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 = Archivo dinámico Σ_2 = Numérico (distintas interpretaciones de la fracción: decimal, fracción, porcentaje).
<i>Marco perceptivo</i>	<i>Marco numérico</i>
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 49: Cuadro Comparativo 5, ruptura del sistema de referencia (Problema 1.3).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva perceptiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva o empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial constructivo
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 50: Cuadro Comparativo 6, continuidad estructural (Problema 1.3).

Teniendo en cuenta que la actividad argumentativa adelantada en estos procesos es una dificultad por el uso de la percepción o ejemplos como único medio de convicción, destacamos como una fortaleza el dejar de lado solo lo perceptivo en el proceso de argumentación y emplear otros elementos, en este caso fueron operadores numéricos y otro sistema de representación en el proceso de demostración.

6.2 Procesos identificados en el taller “Matemática y Realidad”

6.2.1 Problema 2.1

Este es uno de los cinco problemas que se analizaron de la actividad de argumentación de Sofía y Nicol en la situación de filtración de medicamento que se presenta en la Figura 51.

Situación 1: Filtración de Medicamento

Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas. Según lo anterior, contesta:

a) ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.

Figura 51: Problema 2.1

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué hacen? Cuénteme. ¿Están trabajando juntas?

[2] Sofía: Pues sí.

[3] Nicol: Sí.

[4] Sofía: Pues sacando conclusiones.

[5] Inv: Bueno, cuénteme.

[6] Sofía: Pues si cada 8 horas se debe tomar 2 tabletas de 220 mg entonces diarias se tiene tomar 6 tabletas... y durante 10 días serían 60.

[7] Nicol: No le entiendo.

[8] Sofía: Pues que si se tienen que tomar dos tabletas cada 8 horas, o sea diarias se tienen que tomar 6 tabletas [...]; a los 10 días serían 60 tabletas y entonces... me preguntan qué cantidad se queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días *[señala su hoja de trabajo, Figura 52]*.

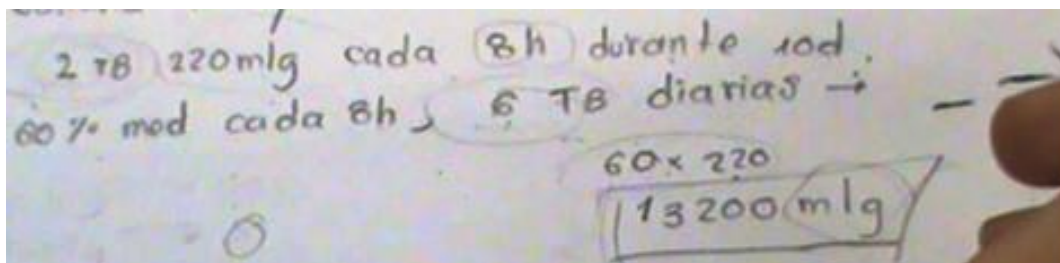


Figura 52: Hoja de trabajo de Sofía.

[9] Nicol: Por eso, ¿qué cantidad de medicamento queda el sistema circulatorio al cabo de 10 días?

[10] Sofía: Por eso se toma 60 tabletas en los 10 días y como cada tableta tienen 220 mg... *[señala 13200]*.

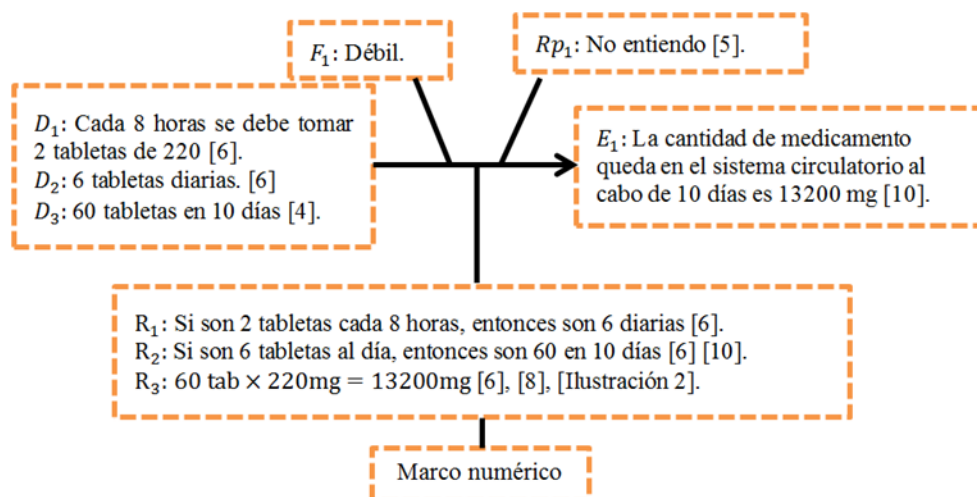


Figura 53: Esquema de la argumentación de Sofía y Nicol en el Problema 2.1.

[11] Nicol: Pero pues es que no...o sea, entonces sería multiplicar las 6 tabletas por 220 ¿no?, porque si se toma 6 tabletas al día, pues cada tableta de eso [220 mg]...

[12] Sofía: Por eso sería multiplicar 60 que son de los 10 días.

[13] Inv: Hágalo cada una como lo ha pensado a ver cuánto les da.

[14] Sofía, Nicol: [silencio].

[15] Nicol: Pues yo creo que es así.

[16] Inv: ¿Cuénteme?

[17] Nicol: Bueno, ella se tendría que tomar diariamente 6 tabletas.

[18] Inv: ¿Por qué 6 tabletas?

[19] Nicol: Sí, porque cada 8 horas son dos, entonces sería 3 veces al día, ¿no? Y entonces sería 6, entonces pues yo creo que sería multiplicar... bueno 6 por el... o sea porque cada uno es de 220 mg y eso daría 1320 y a eso se le saca el 60% que era lo que filtraban sus riñones, entonces se estaría tomando 792 mg.

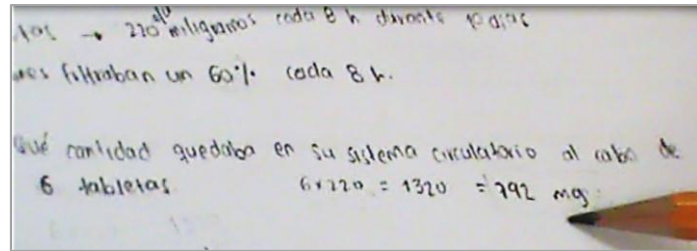


Figura 54: Hoja de trabajo de Nicol.

[20] Inv: Entonces, ¿qué cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días?

[21] Nicol: Es que no sé, pues sería como....

[22] Inv: ¿Cuál es la respuesta?

[23] Nicol: Esta *[señala con el lápiz 792]*.

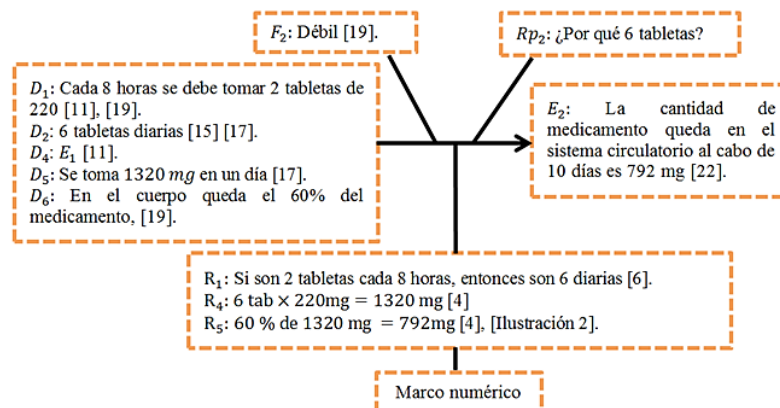


Figura 55: Esquema de la argumentación del Problema 2.1 realizada por Nicol.

[24] Inv: 792, ¿por qué sería esa la respuesta?

[25] Nicol: Pero es que, o sea creo que me falta como multiplicarlo por los 10 días, entonces sería como 60 por 220, ¿no?, pues no sé, porque sería como los días por la cantidad de mg de cada tableta, entonces no estaríamos multiplicando como cada tableta, o sea, en si lo que tienen cada tableta, ¿si me entiende?, entonces no sé.

[26] Inv: ¿Esos 792 son lo que se queda en el cuerpo por día?

- [27] Nicol: No, o sea, son 6 tabletas y cada tableta tiene 220 mg entonces se multiplica y da esto [señala 1320] y a eso se le saca el 60% que es lo que filtraba el riñón y daría esto [señala 792], pero entonces sería... tendríamos que multiplicar esto entonces [señala 792] por lo días y eso es lo que queda durante los 10 días.
- [28] Inv: ¿Entonces cuánto queda durante los 10 días?
- [29] Nicol: Uuuh, 7.920, pero eso ya sería mucho.
- [30] Inv: ¿Por qué cree que mucho?
- [31] Nicol: No sé, sería como también... [se queda en silencio]
- [32] Inv: ¿Por qué dice que mucho? No entiendo eso.
- [33] Nicol: No sé, o también tocaría, sería como decir o tocaría como multiplicarlo por esto [señala 1.320], no mentiras no sé... o sea, es que tengo como otra idea pero no sé cómo explicarla.
- [34] Inv: ¿Cómo así, o sea que eso que tiene ahí no está correcto?
- [35] Nicol: O sea, tengo otra idea cómo para hallar los días exactos, pero no sé cómo explicarla.
- [36] Inv: Bueno, intente hacer algo.

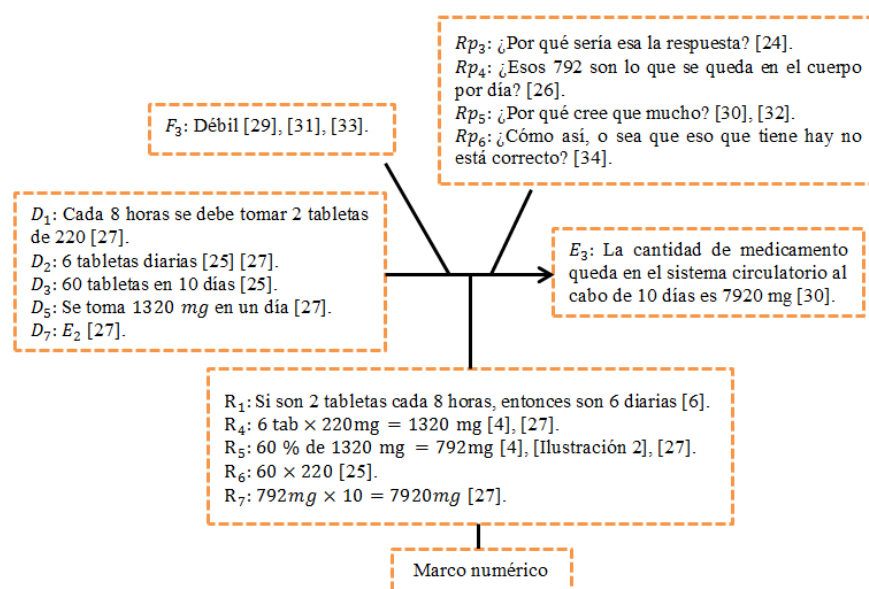


Figura 56: Esquema de la argumentación de Nicol.

La transcripción anterior evidencia que las estudiantes compartieron la actividad matemática que cada una realizó de forma individual sin advertir que sus procesos eran parecidos, solo que las operaciones están en un orden diferente y que Sofía en un principio consideró sacar el 60% al valor encontrado.

No presentamos la intervención [37] a [90] pues no aporta elementos nuevos al análisis, aunque resaltamos que ahí Nicol opinó sobre el trabajo de Sofía lo cual las condujo a trabajar en equipo para percatarse que no es el 60% lo que quedaba en el cuerpo sino el 40%.

[90] Nicol: Por fin.

[91] Inv: ¿Qué hicieron?

[92] Sofía: Todo lo que estábamos haciendo no nos sirvió para nada.

[93] Inv: *Todo lo que hicieron no sirvió para nada, ¿por qué?*

[94] Sofía: Pues porque debíamos enfatizarnos más en lo que quedaba en el organismo y con eso entonces hallamos el 40% de la concentración que nos dan, o sea de 440...

[95] Nicol: O sea como de cada tableta, cada 8 horas, o sea por decir...

[96] Sofía: De cada 8 horas, ¿cuántos miligramos se queda en el cuerpo? –le ayuda Sofía–.

[97] Nicol: Sí; por ejemplo, las primeras 8 horas me va a quedar esto, 176 mg, entonces lo multiplicamos por tres porque son tres veces al día y quedaría esto, 528 mg, y 528 se multiplica por los 10 días y daría 5280.

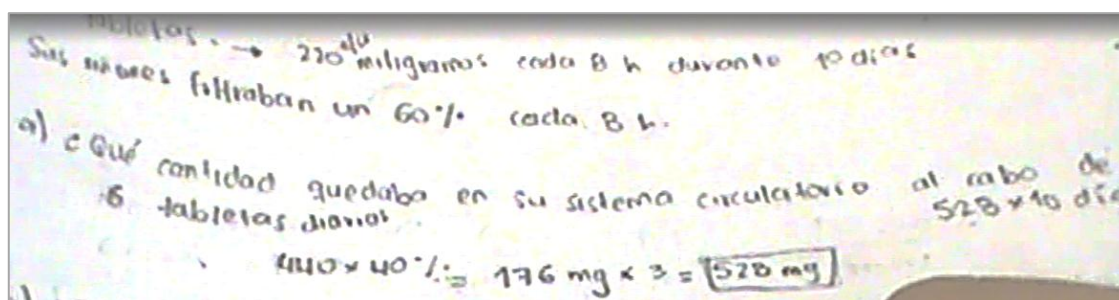


Figura 57: Hoja de trabajo de Nicol.

[98] Sofía: Y esa sería la cantidad de concentración que queda en 10 días.

[99] Inv: ¿En los 10 días?

[100] Sofía, Nicol: Sí.

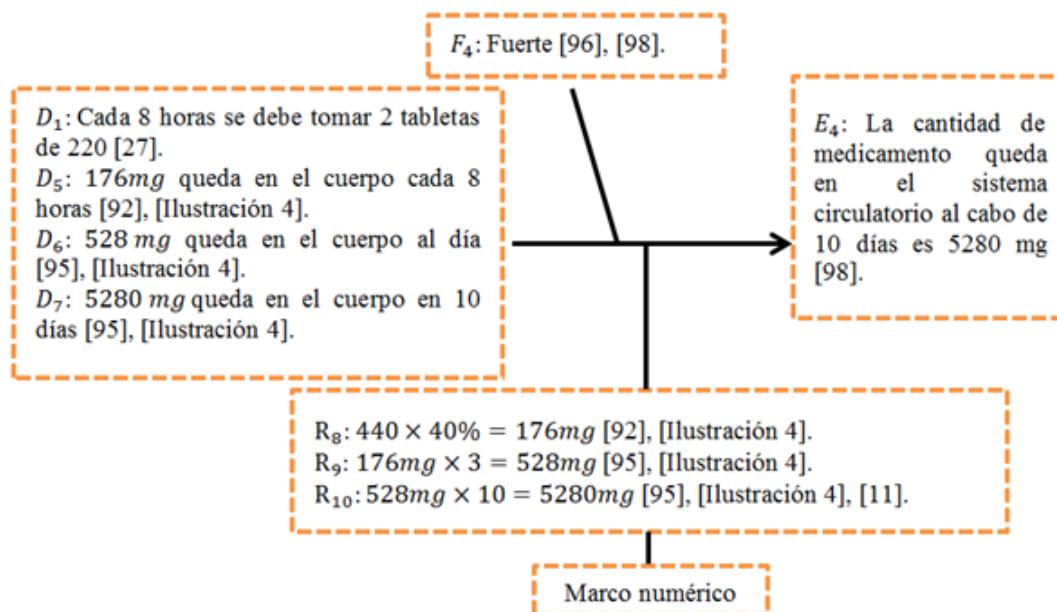


Figura 58: Esquema de la argumentación construida en equipo por de Nicol y Sofía.

Las estudiantes mediante un proceso de argumentación constructivo y una generalización de un proceso inductivo, en el que manipularon los datos del problema para encontrar otros nuevos, finalmente llegaron a un enunciado conclusión (E_4).

El orden en que las estudiantes usaron y encontraron nuevos datos fue diferente [propiedad conmutativa en la multiplicación de los reales] y al momento de la intervención cada una lo hizo desde lo que realizado en su hoja de trabajo, además se evidencia una dificultad para reconocer y aplicar las propiedades de los números reales.

Después de plantear varias veces un enunciado conclusión y descartarlo a medida que avanzaban el proceso, finalmente concretaron una conjetura trabajando en conjunto,

convirtiéndose esto en el control que determinó la veracidad de este enunciado ya que la coherencia entre procesos no dio lugar a contradicción alguna (Σ_1).

En este proceso de argumentación vemos un uso implícito de la regla de tres simple (Σ_2) utilizada para encontrar los nuevos datos mediante una representación numérica (L_1). Esto se dio bajo el supuesto de un crecimiento constante de las magnitudes, lo que fue evidente por los operadores utilizados por las dos estudiantes y los enunciados conclusión (E_1, E_2, E_3) que surgían a lo largo del proceso y que, finalmente, mediante un trabajo conjunto, contribuyó para plantear una conjetura (E_4).

Proceso de demostración

[101] Inv: ¿Por qué es esa concentración y no otra diferente?

[102] Nicol: ¿Cómo así?

[103] Sofía: [...] por todo lo que hicimos, por toda la relación que tiene, o sea, si 176 mg...

[señala el proceso realizado en su hoja de trabajo].

[104] Nicol: Es cada, o sea, son todas las primeras 8 horas.

[105] Sofía: Sí exacto.

[106] Nicol: Entonces se multiplica por 3, por que se toma 3 veces al día.

[107] Sofía: Y eso nos daría la concentración al día y lo multiplicamos por los 10 días *[señala la operación que ya está en la hoja de trabajo]*.

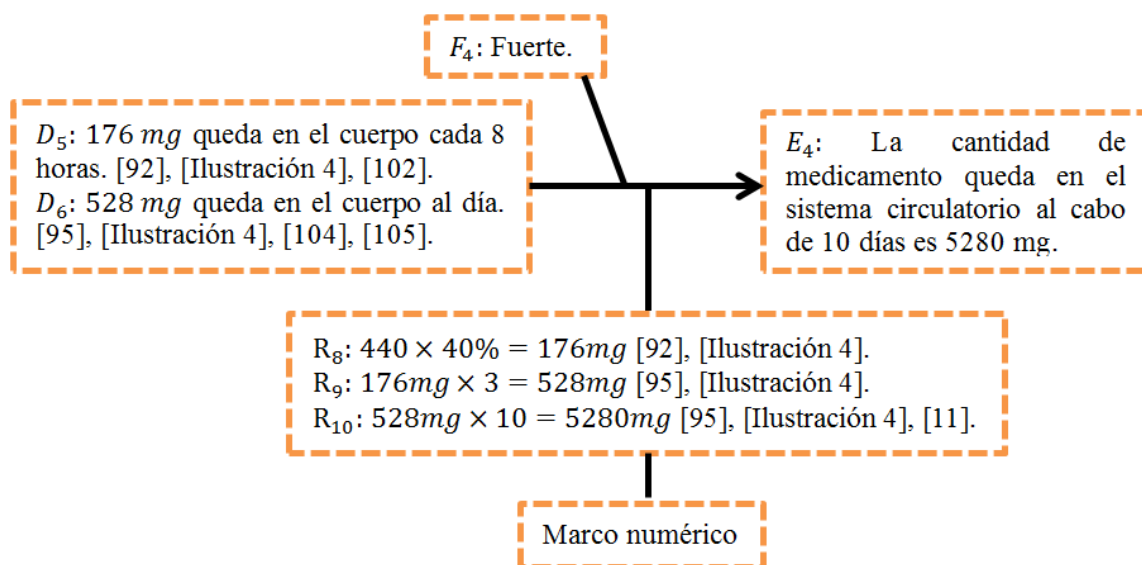


Figura 59: Esquema de la demostración de Nicol y Sofía del Problema 2.1.

Las estudiantes sustentaron la construcción de la demostración mediante el proceso de tipo *empirismo ingenuo inductivo* en el que repitieron el procedimiento realizado en el planteamiento de la conjetura. Además, la idea de que el procedimiento era correcto hizo las veces de control (Σ_1) de sus acciones y siguieron con un sistema de representación numérico (L_1), pero en esta oportunidad no lo escribieron de nuevo, bastándoles con repetir y señalar las operaciones y los resultados obtenidos previamente (L_2).

Unidad o ruptura cognitiva

En estos procesos se presentó continuidad referencial y estructural por la forma de concebir la variación de las magnitudes involucradas en el problema y el uso de la regla de tres en todo momento por parte de ambas estudiantes (véanse la Figura 60 y Figura 61), por lo que se evidenció unidad cognitiva empírica.

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : La cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días es 13200 mg. E_2 : La cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días es 792 mg E_3 : La cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días es 7920 mg E_4 : La cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días es 5280 mg.	E_4 : La cantidad de medicamento queda en el sistema circulatorio al cabo de 10 días es 5280 mg.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Si son 2 tabletas cada 8 horas, entonces son 6 diarias. R_2 : Si son 6 tabletas al día, entonces son 6 diarias. R_3 : $60 \text{ tab} \times 220\text{mg} = 13200\text{mg}$. R_4 : $6 \text{ tab} \times 220\text{mg} = 1320 \text{ mg}$. R_5 : $60 \% \text{ de } 1320 \text{ mg} = 792\text{mg}$. R_6 : 60×220 . R_7 : $792\text{mg} \times 10 = 7920\text{mg}$ R_8 : $440 \times 40\% = 176\text{mg}$. R_9 : $176\text{mg} \times 3 = 528\text{mg}$. R_{10} : $528\text{mg} \times 10 = 5280\text{mg}$.	OPERADORES R_8 : $440 \times 40\% = 176\text{mg}$. R_9 : $176\text{mg} \times 3 = 528\text{mg}$. R_{10} : $528\text{mg} \times 10 = 5280\text{mg}$.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico L_2 : Lenguaje natural	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico L_2 : Lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Coherencia del enunciado conclusión. Σ_2 : Regla de tres.	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Coherencia del enunciado conclusión. Σ_2 : Regla de tres.
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 60: Cuadro Comparativo 7, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.1).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Empirismo ingenuo inductivo.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 61: Cuadro Comparativo, continuidad estructural (Problema 2.1).

La unidad cognitiva empírica impidió que se presentaran contradicciones en la actividad matemática y, por ende, que logran plantear una conjetura adecuada como solución a la

situación y la respectiva demostración. Otra dificultad encontrada en el trabajo en equipo de Sofía y Nicol fue la coincidencia que finalmente hubo entre sus procesos, la cual les dio confianza para adelantar su actividad argumentativa creyendo que lo realizado era correcto.

6.2.2 Problema 2.2

“una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas”..

¿Qué cantidad queda en el sistema circulatorio al cabo de n días?

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué cantidad queda en el sistema circulatorio al cabo de n días?

[2] Nicol: Pues nosotras hicimos como una fórmula...

[3] Sofía: Como una ecuación...

[4] Nicol: Sí, bueno hicimos como multiplicar la cantidad diaria... [Figura 62]

[5] Sofía: De concentración diaria....

[6] Nicol: Que serían 528 mg por el número de días, entonces eso daría la cantidad total tomada, o sea al día [Figura 62].

[7] Sofía: Entonces sería n por 528.

[8] Nicol: Sí, por n días, entonces eso sería: se multiplicaría por el primer día, por el segundo día, por el tercer día, por el cuarto día, por el quinto día, así sucesivamente [Figura 62].

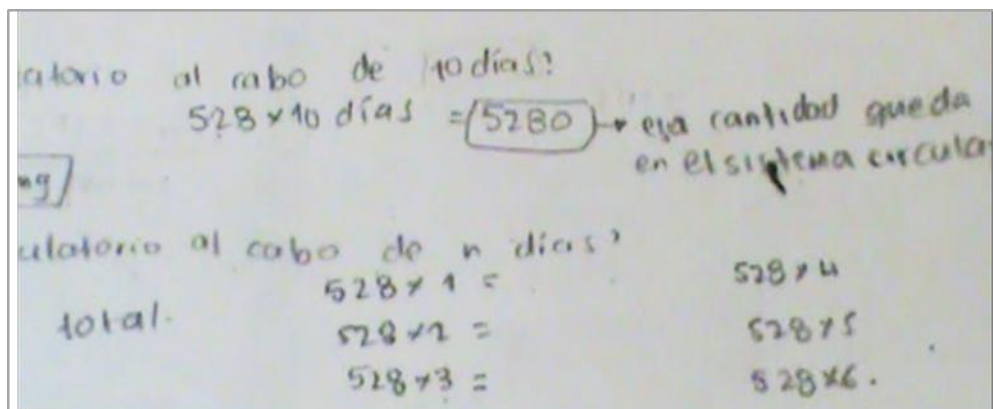


Figura 62: Hoja de trabajo de Nicol.

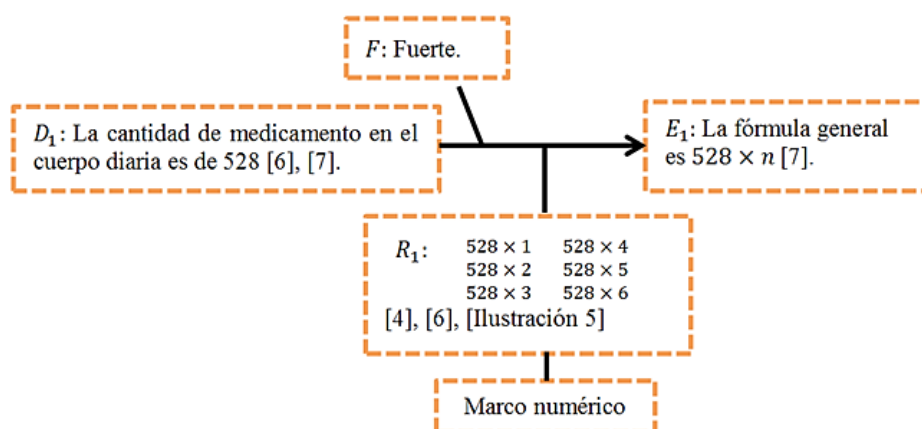


Figura 63: Esquema de la argumentación del Problema 2.2 de Nicol y Sofía.

El proceso de argumentación se adelantó a partir de un trabajo preliminar en el que las estudiantes hicieron una *generalización de un proceso inductivo* para proponer una expresión algebraica con la que encontraron la cantidad de medicamento en el sistema circulatorio para cualquier día.

La representación utilizada en el proceso para la planteamiento de la conjetura comenzó con una representación numérica (L_1) y, posteriormente, cambió a una algebraica (L_2), pues las estudiantes cambiaron la variable de ejemplo por n . El control (Σ_1) lo ejerció la forma como fue elaborado el operador R_1 , que permitió el tratamiento cuantitativo del [número de días] que podía ser reemplazado por una variable.

Proceso de demostración

[9] Inv: ¿Por qué esta expresión funciona? $[528n]$

[10] Nicol: Funciona porque tendríamos que tener la cantidad diaria para poderla multiplicar por el número de días *[señala los diferentes productos que tiene en la hoja de trabajo, Figura 62]*, o sea por decir, cuánto se toma ella diario como para decir cuánto me tomo de aquí a 10 días, entonces yo diría que me estoy tomando esto *[señala 528, Figura 62]*, lo multiplico por el número de días que me lo estoy tomando y en total me estoy tomando esto *[señala 5280 Figura 62, entonces sería como por eso.*

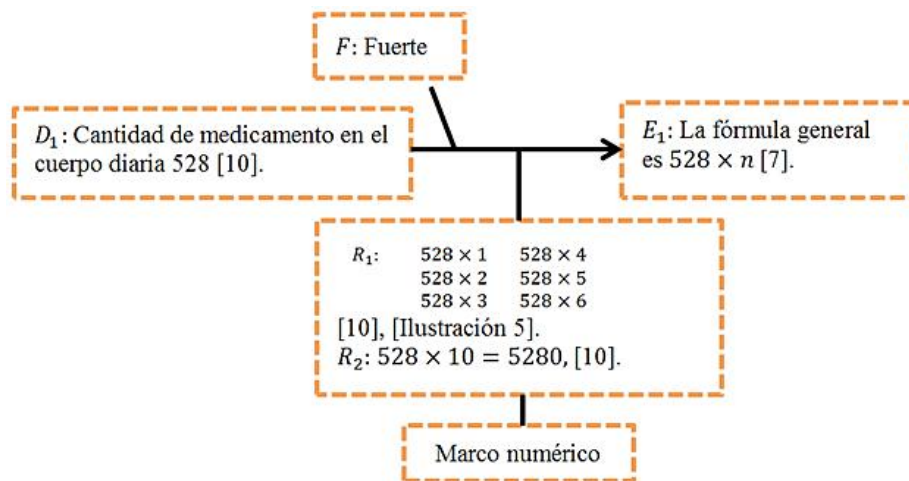


Figura 64: Esquema de la argumentación de Nicol.

En este proceso las estudiantes repitieron los argumentos con los que plantearon la conjetura en la construcción de la demostración, ya que validaron (Σ_1) la conjetura con un ejemplo numérico (enunciado conclusión del Problema 2.1) tomándolo como un *experimento crucial basado en un ejemplo*. Aunque trabajaron con un sistema de representación numérico (L_1), vemos un indicador de fuerza fuerte que acompañó el trabajo en equipo y les dio seguridad a las estudiantes sobre la veracidad del procedimiento realizado para la construcción de la demostración.

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : La fórmula general es $528 \times n$	E_1 : La fórmula general es $528 \times n$
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : 528×1 528×4 528×2 528×5 528×3 528×6	OPERADORES R_1 : 528×1 528×4 528×2 528×5 528×3 528×6 R_2 : $528 \times 10 = 5280$.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : numérico L_2 : algebraica L_3 : Lenguaje natural	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : numérico L_2 : Lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico
<i>Marco numérico-algebraico</i>	<i>Marco numérico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 65: Cuadro Comparativo 9, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.2).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial basado en un ejemplo
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 66: Cuadro Comparativo 10, continuidad estructural (Problema 2.2).

En estos procesos hubo continuidad referencial y estructural, debido a la escogencia de ejemplos numéricos como único medio para realizar el proceso de argumentación ligado al planteamiento de la conjetura y para la construcción de la demostración, por lo que se presentó unidad cognitiva empírica, que es una dificultad para hacer demostraciones deductivas.

Otra dificultad que detectamos es la interpretación errónea del problema, lo que tuvo consecuencias en el proceso argumentativo ya que formularon ejemplos y generalizaciones con

un valor epistémico verdadero para ellas pero que realmente eran falsas, que impidió darle solución correcta al problema.

6.2.3 Problema 2.3

A continuación, analizamos la pregunta c de la situación del medicamento:

c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo?

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo?

[2] Sofía: Es que se supone que siempre...

[3] Nicol: Va a aumentar.

[4] Sofía: O sea al día, pues sí va a aumentar cada día que pase *[señala su hoja de trabajo]*.

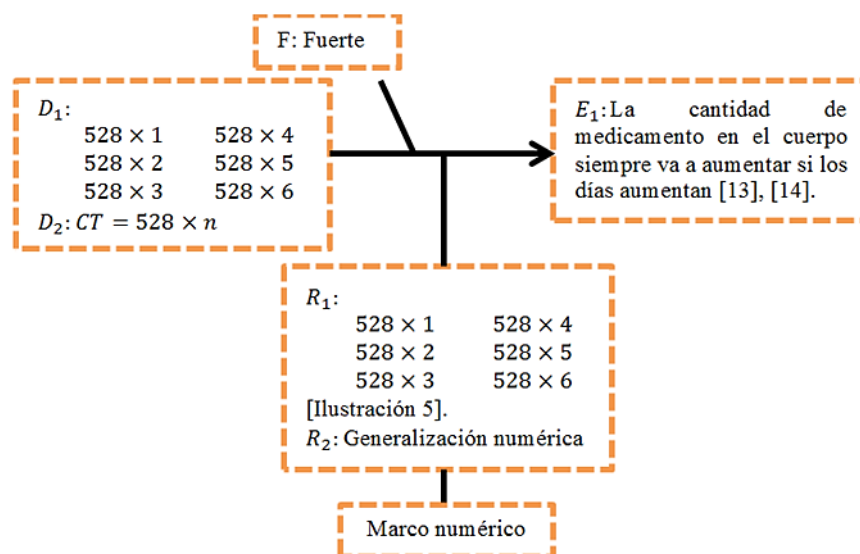


Figura 67: Esquema de la argumentación del Problema 2.3 realizado por Nicol y Sofía.

En este proceso de argumentación las estudiantes retomaron unos ejemplos del problema anterior como dato (D_1), que al ser analizado les permitió plantear una *generalización inductiva* que sustentó el proceso.

También observamos que el planteamiento de la conjetura se hizo mediante un proceso con una representación verbal (L_1) y que el control fue numérico-perceptivo (Σ_1), pues mientras hablaban, revisaban los ejemplos elaborados en la hoja de trabajo con la intención de corroborar lo que decían.

Proceso de demostración

[5] Inv: ¿Por qué?

[6] Nicol: Pues por lo que hicimos en el punto anterior [*se refiere a $528 \times n$*], se supone que 528 es lo diario, entonces yo voy a calcular el... o sea se calcula dependiendo el número de días], por ejemplo, si yo lo calculo por los 10 días me va a dar 5280, pero si yo lo multiplico por más días o por menos días... bueno si lo multiplico por menos días pues me va a dar menor y si lo multiplico por más días pues me va dar mayor, entonces va a ir aumentando dependiendo del tiempo [*señalando lo que está escrito en su hoja de trabajo*].

[7] Inv: Ustedes dicen que aumenta, ¿será que eso que aumenta, en algún momento llega a un límite, llega a un valor máximo?

[8] Nicol: Sí, puede ser; dependiendo del tiempo que se lo recomienden.

[9] Inv: Si pensamos por ejemplo que ella tome medicamento de por vida, ¿qué pasaría por la cantidad de medicamento en el cuerpo?

[10] Nicol: También aumentaría, ¿No?, yo creo que aumentaría.

[11] Inv: ¿Habrá algún límite?

[12] Nicol: No sé, depende, hasta que se muera, ahí si se miraría cuanto tiempo tomó el medicamento, por decir: bueno 5 años...

[13] Sofía: La concentración iría aumentando entonces, ¿no?

[14] Nicol: Pues no tendría como si un límite.

[15] Inv: Ustedes se basan en lo que hicieron, aquí dice 528 por 1, por 2, por 3...

[16] Nicol, Sofía: Sí, en la fórmula.

[17] Inv: ¿Y los resultados de eso dónde están?

[18] Nicol: Ya voy [*tiene escrito en la hoja las operaciones pero no los resultados*].

[19] Sofía: Pero igual, o sea, si sabemos que se va a multiplicar pues obviamente va ir dando mayores valores.

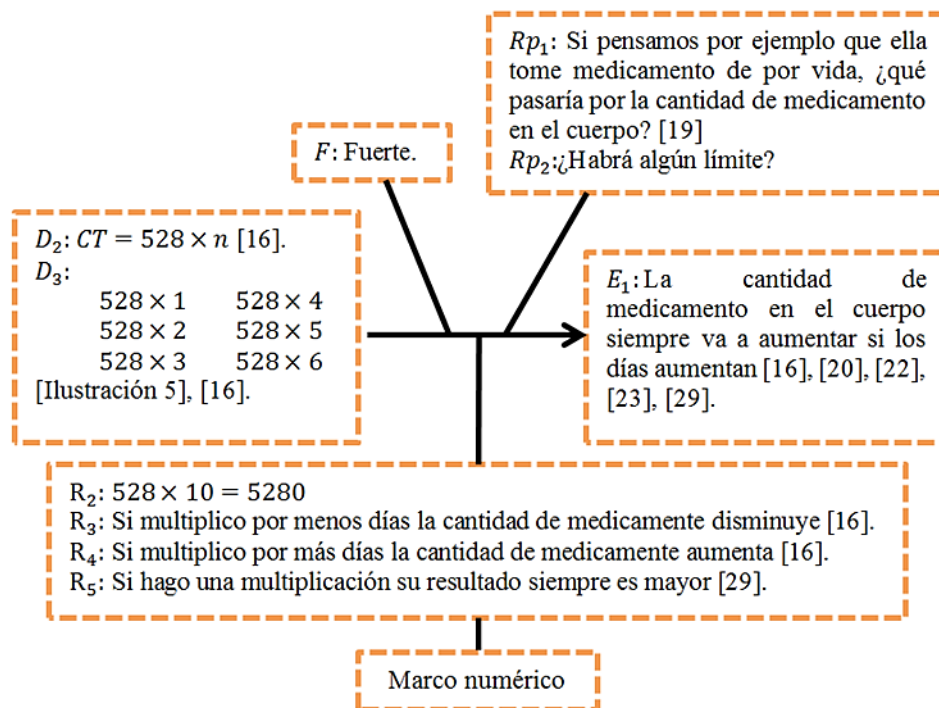


Figura 68: Esquema de la argumentación del Problema 2.3 realizado por Nicol y Sofía.

Con un proceso de tipo *experimento crucial constructivo* las estudiantes sustentaron la construcción de su demostración con generalizaciones realizadas previamente (D_1) y aunque aparece un caso particular (R_2), este solo se toma como referencia para expresar el

comportamiento que ha observado la estudiante de la variación del medicamento en el cuerpo al paso de los días (D_2, D_3).

La representación con la que se dio el argumento para la construcción de la demostración fue verbal (L_1), al igual que el planteamiento de la conjetura, aunque el control de numérico-perceptivo (Σ_2). Existen refutaciones potenciales, estas no lograron que las estudiantes cuestionaran sus operadores y, por el contrario, construyeron más argumentos empíricos para apoyar su trabajo.

Análisis de la unidad cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : La cantidad de medicamento en el cuerpo siempre va a aumentar si los días aumentan.	E_1 : La cantidad de medicamento en el cuerpo siempre va a aumentar si los días aumentan.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : 528×1 528×4 528×2 528×5 528×3 528×6 [Ilustración 5].	OPERADORES $R_2: 528 \times 10 = 5280$ R_3 : Si multiplico por menos días la cantidad de medicamento disminuye. R_4 : Si multiplico por más días la cantidad de medicamento aumenta. R_5 : Si hago una multiplicación su resultado siempre es mayor.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : lenguaje natural	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : numérico-perceptivo	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : numérico-perceptivo
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 69: Cuadro Comparativo 11, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.3).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial constructivo
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 70: Cuadro Comparativo 12, continuidad estructural (Problema 2.3).

En el trabajo realizado por las estudiantes predominó lo perceptivo y las generalizaciones de datos mediante el uso de operadores numéricos para justificar ambos procesos, por lo que existió una unidad cognitiva empírica que impidió detectar contradicciones en la actividad matemática desarrollada.

Además, hubo elementos del proceso de argumentación empleados en el planteamiento de la conjetura que apoyaron la conclusión de la unidad cognitiva empírica y que estaban implícitos, que en la construcción de la demostración se explicitaron (R_3, R_4, R_5).

6.2.4 Problema 2.4

A continuación, el proceso de argumentación y de demostración de Lia quien abordó el mismo problema de otra manera. Rotulamos nuevamente el enunciado de la situación y el problema planteado en la pregunta del literal *a* del mismo para diferenciar los resultados de este problema de los del Problema 2.1:

Situación 1

Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas. Según lo anterior, contesta:

a. ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué está haciendo, Lia?

[2] Lia: Le estaba explicando de dónde saqué esto, porque...

- [3] Inv: Déjeme ver algo, aquí dice: ¿qué cantidad quedaba el sistema circulatorio al cabo de 10 días?
- [4] Juan: Sí, pero nosotros no estamos haciendo ese, si no estamos haciendo el b.
- [5] Lia: Ya estamos haciendo el b.
- [6] Juan: Porque es que si hallamos el b primero [refiriéndose a la pregunta b], ya es más fácil hallar el a [refiriéndose a la pregunta a].
- [7] Lia: Pues no, yo ya hice el a, es que yo ya hice el a y de ahí hallé el b.
- [8] Inv: Bueno, ¿cuánto le da en los 10 días?
- [9] Lia: Un promedio de 732.
- [10] Inv: ¿Por qué...? mejor dicho ¿cómo hizo eso?
- [11] Lia: Primero hay que leer bien, es que uno se confunde, la primera vez que lo leí creí que desde el primer día [dosis] pues absorbía el 60% los riñones, pero no, después del segundo día [dosis] es que... él primero se toma la dosis y después que se toma la dosis, 8 horas después los riñones absorben el 60% y queda en el cuerpo el 40% en el sistema circulatorio, después en ese mismo momento él se toma la otra dosis, entonces sería el 40% que se toma en la primera dosis más la segunda dosis lo que queda en el sistema circulatorio y así sucesivamente [Figura 71].

Actividad #1			
(1.1) DATOS:			
2 tablet $\rightarrow$ 220 mg = 440 mg		Sus riñones filtran un 60% del medicamento 8 horas después de tomarlo.	
440 mg / 8 horas			
(a) cantidad restante = $0,4 (X_{iv}) + 440$		Dosis	cantidad med SC
CR = $0,4(440) + 440$		1	440,76
CR = 616		2	616,76
CR = $0,4(616) + 440$		3	686,4
CR = 686,4		4	714,56
CR = $0,4(616) + 440$		5	725,824
CR = 686,4		6	730,3296
		7	732,13
		8	732,3
		10 días $\rightarrow$ 240 horas	
		1 día $\rightarrow$ 3 dosis	

Figura 71: Hoja de trabajo de Lia.

[12] Inv: ¿Así encontró la cantidad el de 10 días?, ¿dónde está eso?

[13] Lia: [...] lo hice por dosis, acá hice una tabla por dosis (Figura 71), pero ya que vi que lo único que estaba creciendo eran sus decimales entonces la gráfica iba a ser exponencial, [...] este [señalando la parte decimal del número 732,8] nunca va a pasar de 732, porque como son tan infinitos él sigue creciendo pero exponencialmente solamente siguen creciendo sus decimales y así, así sucesivamente.

[14] Inv: ¿Entonces cuál es respuesta?

[15] Lia: Aproximadamente 732; [...] yo lo que hice fue: la cantidad restante por el 0,4 y sumarle 440.

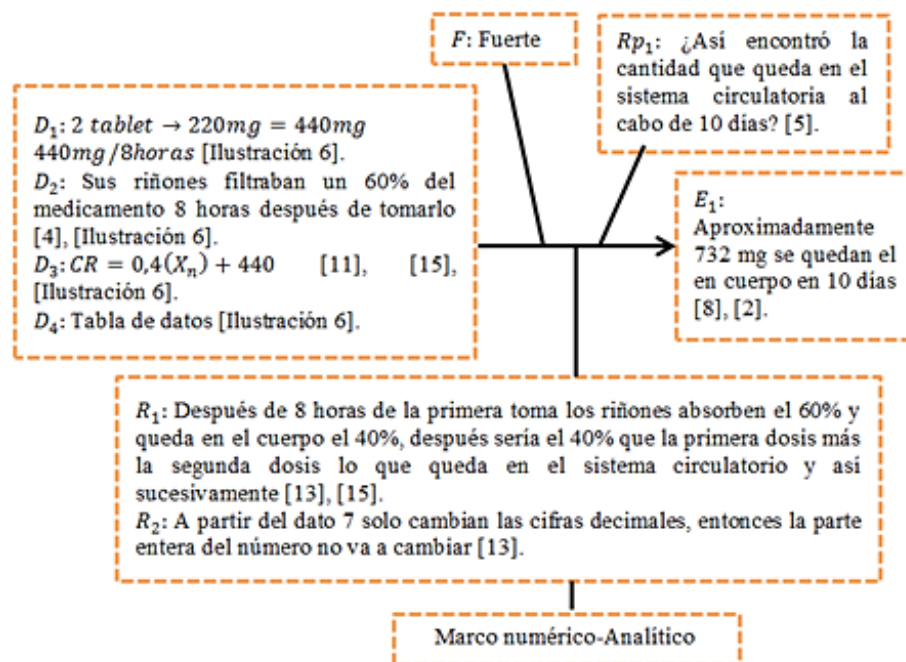


Figura 72: Esquema de la argumentación del Problema 2.4 realizado por Lia.

Lia interpretó de forma adecuada la información del problema y mediante el lenguaje natural (L_1) realizó un proceso de argumentación con el planteó una forma de encontrar la cantidad de medicamento en el sistema circulatorio conforme aumentaba el número de dosis, concretando

una expresión algebraica recursiva (D_3) que, finalmente, le sirvió para encontrar nuevos datos que acomodó en una tabla de valores (L_3).

Así que mediante un proceso constructivo la estudiante planteó un enunciado conclusión, producto de una *generalización del proceso inductivo* que surgió del análisis de los datos (D_4). Además la estructura de control (Σ_1) la ejerció la misma tabla que es en la que ella observó el comportamiento de la cantidad de medicamento en el cuerpo conforme aumentaba el número de dosis.

Proceso de demostración

[16] Inv: ¿Por qué aproximadamente 732?

[17] Lia: Porque a medida que aumenta no va a cambiar, esta parte entera no va a cambiar, va a cambiar o van a moverse sus decimales pero no va a cambiar.

[18] Inv: ¿Por qué no va a cambiar?

[19] Lia: Porque es exponencial, porque así lo sigo haciendo, digamos, yo hice hasta el 8 pero si lo seguía haciendo me iba a seguir dando 732 y lo único que van a agregarse son decimales.

[20] Inv: ¿Qué tal en algún momento cambie es 732? Porque usted solo lo hizo hasta el 8.

[21] Lia: Pues lo hice hasta el 8 y ya uno puede ver que se mantiene.

[22] Juan: Ahí son apenas 2 días y medio.

[23] Inv: ¿Cómo?

[24] Juan: Ahí serían apenas 2 días y medio, porque cada dosis es cada 8 horas, son tres dosis por día.

[25] Lia: Sí, son 3 dosis por día, acá ya van dos días.

[26] Juan: Dos días y medio.

[27] Lia: No, en 6 da dos días, mire [señala con el dedo la tabla de valores], un día, dos días...

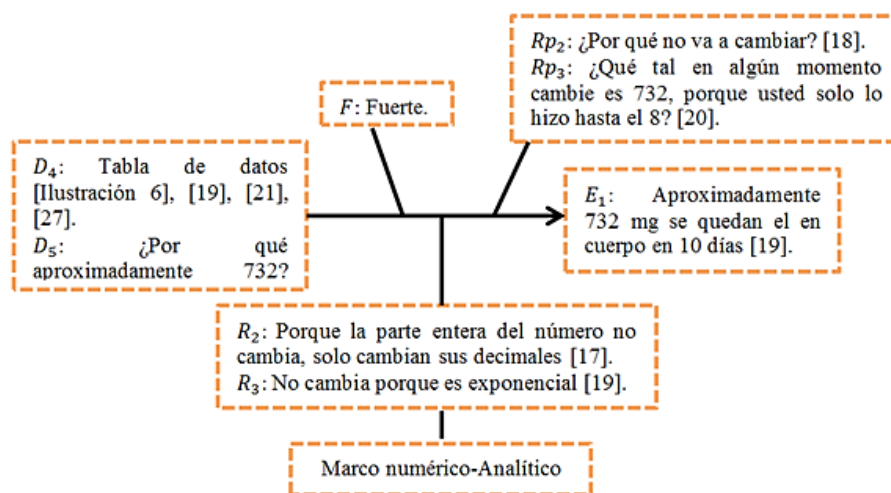


Figura 73: Esquema de la demostración del Problema 2.4 realizado por Lia.

La construcción de esta demostración se basó en un análisis que llevó a una generalización del comportamiento de sucesión representada en la tabla (D_4), por esta razón la demostración empírica es de tipo *experimento crucial constructivo*.

El sistema de representación utilizado es combinado entre lenguaje natural (L_1) y numérico (L_1). Al igual que en el planteamiento de la conjetura, el control lo ejerció la tabla (D_4) que evidenció una tendencia de los datos numéricos. Hubo unas refutaciones potenciales que cuestionaron los operadores numéricos de la estudiante, pero la seguridad de Lia en lo realizado no le hizo cambiar nada del trabajo realizado (F).

Unidad o ruptura cognitiva

Tanto en el proceso de argumentación, como en el de demostración, observamos que la estudiante analizó los valores numéricos y realizó generalizaciones como sustento de su actividad matemática a partir de resultados que puso en una tabla, por lo que existe continuidad referencial y estructural (véase la).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : Aproximadamente 732 mg se quedan el en cuerpo en 10 días.	E_1 : Aproximadamente 732 mg se quedan el en cuerpo en 10 días.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Después de 8 horas de la primera toma los riñones absorben el 60% y queda en el cuerpo el 40%, después sería el 40% que la primera dosis más la segunda dosis lo que queda en el sistema circulatorio y así sucesivamente. R_2 : A partir del dato 7 solo cambian las cifras decimales, entonces la parte entera del número no va a cambiar.	OPERADORES R_2 : Porque la parte entera del número no cambia, solo cambian sus decimales. R_3 : No cambia porque es exponencial.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
L_1 : Lenguaje natural L_2 : Algebraico L_3 : Numérico	L_1 : Lenguaje natural L_3 : Numérico
ESTRUCTURA DE CONTROL	ESTRUCTURA DE CONTROL
Σ_1 : Numérico	Σ_1 : Numérico
<i>Marco numérico-analítico</i>	<i>Marco numérico-analítico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 74: Cuadro Comparativo 13, continuidad del sistema de referencia (Problema 2.4).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial constructivo.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 75: Cuadro Comparativo 14, continuidad estructural (Problema 2.4).

En esta unidad cognitiva empírica las estudiantes analizaron el producto final de una operación sin considerar el proceso realizado para obtenerlo, lo que les impidió descubrir y trabajar las sumatorias involucradas en el problema que, junto a una noción de límites, pudieron dar otro rumbo al análisis y a las generalizaciones conducentes a una solución correcta.

6.2.5 Problema 2.5

Veamos cómo fueron los procesos de argumentación y demostración de Lia en la pregunta b del problema del medicamento:

Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas. Según lo anterior, contesta:

b) ¿Qué cantidad queda en el sistema circulatorio al cabo de n días?

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué cantidad en n días?

[2] Lia: Bueno, como ya había hecho la primera, yo me acordé, en el colegio me enseñaron una fórmula cuando nos daban porcentajes, entonces pues yo me la sé y aquí... *[tiene escrito en su hoja de trabajo $a_n = I \left(1 \pm \frac{\%}{100}\right)^n$].* No, esa no era; perdón. ¿Cómo era? *[se pregunta así misma]*. La razón al cuadrado sobre la razón *[borra y escribe $a_n = I \left(\frac{r^2}{r}\right)^n$]*. ¿Si era así? No, no, bueno no me acuerdo bien cómo era. El caso es que lo que hice fue mirar en cuánto estaban cambiando cada uno, hallar la razón de cada cuánto estaba aumentando o disminuyendo, entonces le resté al 616 el 440 y me dio 176; y a este *[686,4]* le resté este *[616]* y me dio 70,4; entonces yo mirando más o menos qué es lo que había pasado me he dado cuenta que 176 por 0,4 daba 70,4 que era había aumentado y así sucesivamente iría aumentando, la razón por el 0,4 daba lo que aumentaba el siguiente día *[Figura 76]*.

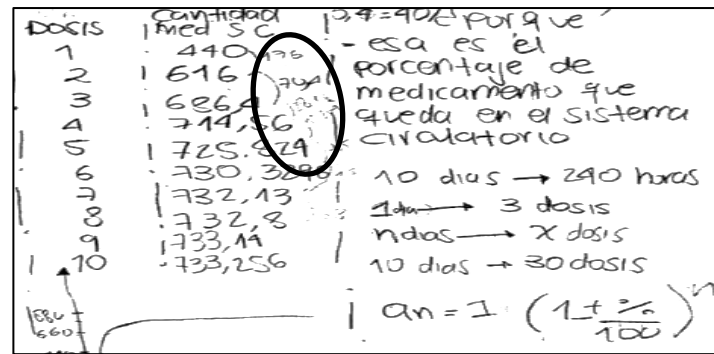


Figura 76: Hoja de trabajo de Lia.

[3] Inv: Veo. ¿Si yo quiero saber qué cantidad quedaba en el sistema circulatorio al cabo n días?

[4] Lia: Entonces yo hice la fórmula, que creo que... no... sí, sí era la del porcentaje [borra y

escribe $a_n = I \left(1 + \frac{\%}{100} \right)^n$], más o menos en n días. Entonces lo que hice fue que la primera vez cambió 176, entonces la primera razón fue 176; ah, bueno aquí ya está. Ahora como va aumentando no va disminuyendo, entonces es más, entonces sumé, 1 más el porcentaje que es 40% que es lo mismo que 0,4 ¿sí? [escribe en su hoja de trabajo].

Pero esto sería el valor que aumentó en ese tiempo, ¿sí?, más la dosis que recibía, entonces le sumé 440 [escribe $a_n = 176(1,4)^n + 440$].

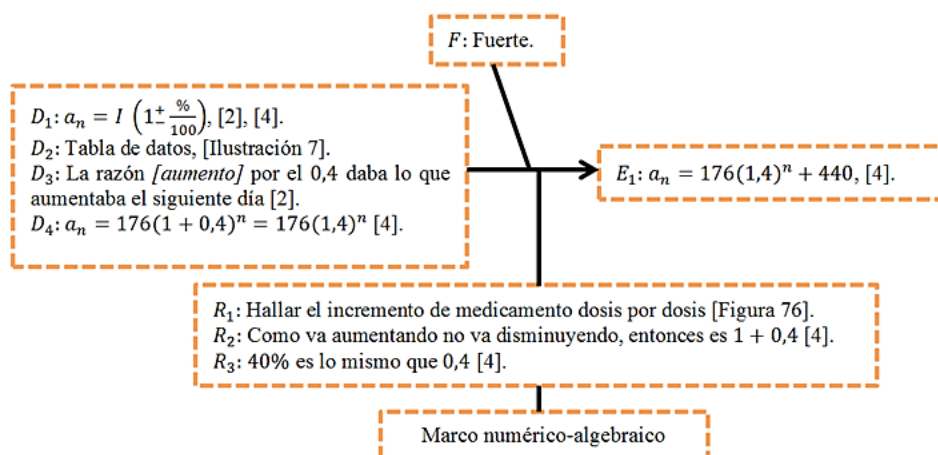


Figura 77: Esquema de la argumentación del Problema 2.5 realizado por Lia.

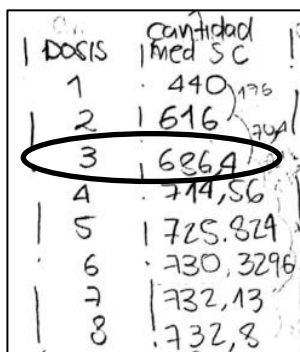
En este proceso el estudiante evocó un algoritmo y, mediante una *generalización* de propiedades descubiertas en los datos que ha estado analizando, *construyó* un enunciado conclusión.

El sistema de representación predominante fue algebraico (L_1), pero la estudiante se apoyó de operadores expresados en lenguaje natural (L_2) o representaciones numéricas (L_3). La estructura de control la ejercieron los datos numéricos del problema y los que ella ha encontró (Σ_1), ya que esos datos se ajustaron a las incógnitas presentes en el algoritmo evocado.

Proceso de demostración

[5] Inv: ¿Por qué esta es la fórmula para encontrar la cantidad de medicamento en cualquier momento?

[6] Lia: Yo lo comprobé y, más o menos, sí da. O sea, digamos, yo dije que un día eran tres dosis entonces si le pongo aquí tres, o sea si pongo aquí un día, tiene que darme este valor [señala 686,4, Figura 78], entonces 1,4 por 1 [elevado a la 1, quiso decir], sería 1,4 por 176 me da 246, más 440 me da 686,4 que es lo que tenía en su cuerpo el primer día, [escribe: $176(1,4)^1 + 440$].



Dosis	Cantidad Med SC
1	440,176
2	616
3	686,4
4	744,56
5	785,824
6	830,3296
7	872,13
8	912,8

Figura 78: Hoja de trabajo de Lia.

[7] Inv: O sea, ese n que usted tiene en la expresión, ¿son días?

[8] Lia: Es días, porque aquí me dice que en función de los días; si fuera en función de las dosis sería diferente pero no la he sacado todavía porque pues me piden es por días.

[9] Inv: Por ejemplo, ¿al cabo de tres días?

[10] Lia: Entonces remplazaríamos en $n \dots$ o sea a_n significa el número... n significa el número de días y pues a significaría la cantidad de medicamento que tiene en el cuerpo a esos días, entonces reemplazaríamos 1,4...

[11] Inv: En dos días, vamos a verlo.

[12] Lia: ¿En dos días?

[13] Inv: Sí.

[14] Lia: Entonces sería *[habla y va escribiendo en la calculadora]*:

$$(1,4)^2 \times 176 = 344,96$$

$$344,96 + 440 = 784,96$$

[15] Lia: Ah, no da.

[16] Inv: ¿Qué pasó?

[17] Lia: De dos días, sería acá *[observa la cantidad que tenía calculada para el segunda día para corroborar que no da]*.

[18] Juan: Lia, ¿no sería en vez del 440... no sería 440 multiplicado por el 0,6%?

[19] Lia: ¿Cuál 0,6?

[20] Inv: ¿Qué pasó?

[21] Lia: Ya no me da.

[22] Inv: ¿Por qué dio ese valor en la calculadora?

[23] Lia: No sé.

[24] Inv: ¿No le dio?

[25] Lia: No, pues la primera me dio y ahora no me dio.

[26] Inv: ¿Esa fórmula es de qué?

[27] Lia: Es que ya no me acuerdo cómo era.

[28] Inv: ¿Ese $176 \times (1,4)^n$ qué era?

[29] Lia: ¿Dónde, acá?.. El número de días [*dice después*]

[30] Inv: No. Toda la expresión, ¿qué es para usted?

[31] Lia: Ah, eso es la razón de cambio, o sea, cuánto aumentaba.

[32] Inv: ¿Día a día?

[33] Lia: Día a día [*reflexiona*]. Ah no, acá sería como...

[34] Inv: ¿Usted acá tiene dosis?

[35] Lia: Dosis.

[36] Inv: Pero n acá es días.

[37] Lia: Ajá [*silencio*].

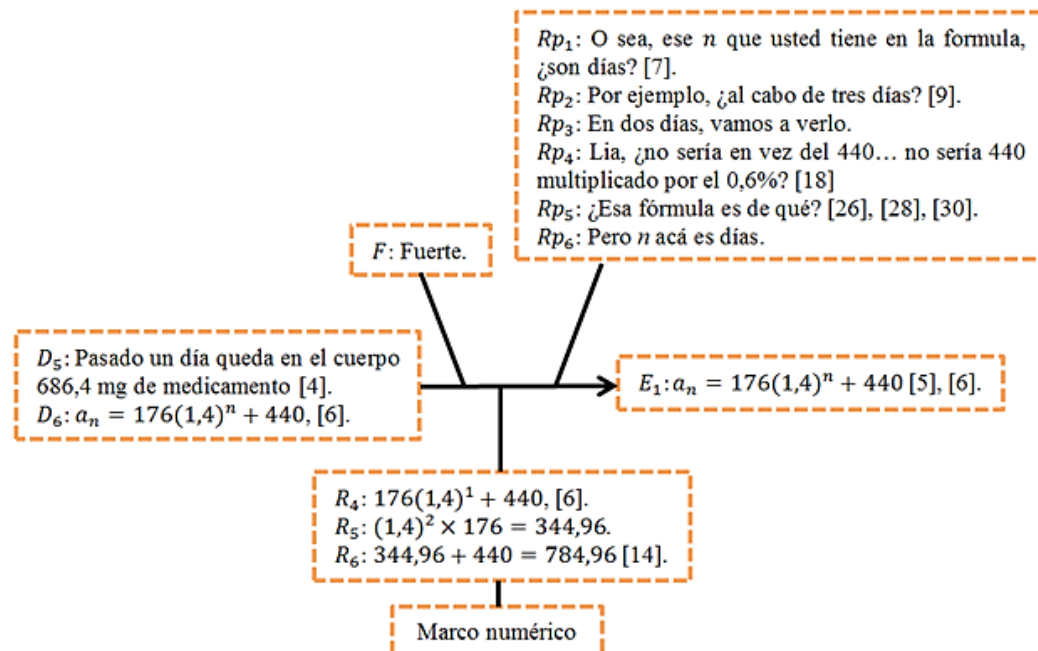


Figura 79: Esquema de la demostración del Problema 2.4 realizado por Lia.

A través de un proceso inductivo de tipo *experimento crucial*, la estudiante construyó su demostración mediante una generalización realizada sobre un ejemplo particular, comprobando que el enunciado conclusión se cumplía para un valor y suponiendo que se cumpliría para cualquier otro.

El sistema de representación cambió de numérico (L_3) a lenguaje natural (L_2) a lo largo del proceso, en un intento de la estudiante por afrontar las refutaciones potenciales del investigador. El control (Σ_1) fue ejercido por la estudiante al corroborar que el resultado de reemplazar n por 1 en la expresión algebraica, era el mismo resultado encontrado para la tercera dosis [6].

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
$E_1: a_n = 176(1,4)^n + 440.$	$E_1: a_n = 176(1,4)^n + 440.$
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Hallar el incremento de medicamento dosis por dosis. R_2 : Como va aumentando no va disminuyendo, entonces es $1 + 0,4$. R_3 : 40% es lo mismo que 0,4.	OPERADORES R_4 : $176(1,4)^1 + 440.$ R_5 : $(1,4)^2 \times 176 = 344,96$ R_6 : $344,96 + 440 = 784,96.$
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Algebraico L_2 : Lenguaje natural. L_3 : Numérico	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN (L_3) : Numérico
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico
<i>Marco algebraico</i>	<i>Marco numérico</i>
RUPTURA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 80: Cuadro Comparativo 15, ruptura del sistema de referencia (Problema 2.5).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial basado en ejemplos
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 81: Cuadro Comparativo 16, continuidad estructural (Problema 2.5).

En este proceso encontramos una ruptura cognitiva que se dio por la ruptura del sistema de referencia y que evidenció una dificultad en la estudiante para realizar una demostración deductiva, porque ella consideró que al comprobar la veracidad del enunciado conclusión en un caso particular era suficiente como argumento para la construcción de la demostración.

La ruptura en el sistema de referencia se presentó porque el estudiante hizo un razonamiento basado en datos evocados y propiedades descubiertas en la fase del planteamiento de la conjetura, pero en la fase de la construcción de la demostración le bastó un experimento crucial como argumento. La continuidad estructural es consecuencia del razonamiento empírico que llevó a la estudiante a realizar argumentos basados en ejemplos numéricos que fueron parte del primer proceso pero que se repitieron como únicos argumentos en la construcción de la demostración.

6.3 Procesos identificados en el taller “Recipientes”

6.3.1 Problema 3.1

A continuación, el proceso de argumentación y demostración que Diego y Carlos realizaron al resolver el problema presentado en el Actividad 1

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas

- a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud ¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? **Justifica tu elección.**
- b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? Explica tu respuesta.

Actividad 1

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas

- a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud ¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? **Justifica tu elección.**
- b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? Explica tu respuesta.

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Cómo considera que se forma el cilindro de mayor volumen?

[2] Diego: Es que lo primero que tenemos que hallar es el radio *[señala la fórmula escrita en la hoja de Carlos: $V = \pi r^2 h$]*, ya tenemos las circunferencias *[longitud de los lados de la hoja tamaño carta]*.

[3] Inv: ¿Ya tiene una respuesta a esa pregunta?

[4] Diego: No, lo único que tenemos es el ancho y el largo de la hoja *[señala ancho=21,59 y largo=27,94]*, pero necesitamos hallar el radio, es lo único que necesitamos... necesitamos despejar dos por dos algo, que sería la medida de la circunferencia, que sería igual a la circunferencia y *reemplazamos acá [señala la fórmula del volumen del cilindro]*.

[5] Inv: *[El estudiante intenta recordar una fórmula para hallar el radio, considerando que tiene la circunferencia pero finalmente la busca en Internet (Figura 82)]*. ¿Qué es c Diego?

[6] Diego: Es la medida de la circunferencia.

[7] Inv: ¿Para qué es ese $\frac{c}{2\pi}$?

[8] Carlos: Para sacar el radio...

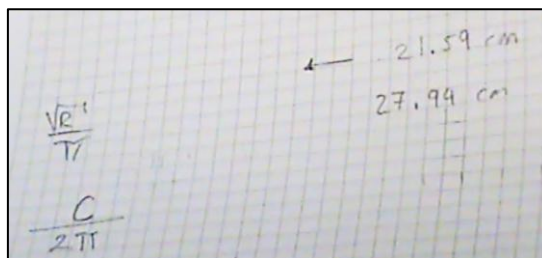


Figura 82: Hoja de trabajo de Diego.

Los dos estudiantes se quedan trabajando en su idea, toman la fórmula que han encontrado [7], reemplazan c por el valor del largo o ancho de la hoja para hallar el radio respectivo y así calcular el volumen de los cilindros.

[9] Inv: ¿Cómo se obtiene el cilindro con mayor volumen?

[10] Carlos: Cuando se forma a lo largo de la hoja.

[11] Diego: A lo largo de la hoja, cuando el ancho queda de altura.

[12] Inv: ¿Cómo se dieron cuenta de esto?

[13] Carlos: Porque hicimos varios procesos.

[14] Inv: Muéstrenme.

[15] Carlos: Aquí están [Figura 83], primero, el que pedía el ejercicio como tal, el ejemplo era este, nos dio los resultados en Pi y los transformamos en centímetros, entonces esta hoja, tamaño carta a lo ancho mide 21,59 y a lo largo 27,94; hayamos los radios por medios del despeje [reemplazar] de fórmulas nos dio estos dos radios [señala 3,43 y 4,44 (Figura 83)]... este para cuando es tomado a lo largo [señala $r_1 = 3,43$].

[16] Diego: A lo largo... no a lo ancho.

[17] Carlos: ¿A lo ancho fue?, a sí cierto, a lo ancho de la hoja

[18] Diego: A lo ancho y el otro a lo largo.

[19] Carlos: Si claro, obviamente a lo largo tiene que dar más radio, después lo hicimos [reemplazamos] en la respectiva fórmula del volumen y nos dio este resultado, con este en comparación [volumen V_1 y V_2 , Figura 83], entonces...

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 necesitamos hallar el radio
 $C = \text{ancho} = 21.59 \text{ cm}$
 $C = \text{largo} = 27.94 \text{ cm}$
 $r = \frac{C}{2\pi}$ donde $C = 21.59$ o 27.94 según la forma el diámetro
 $\frac{21.59 \text{ cm}}{2 \cdot 3.1416} \rightarrow r_1 = 3.43 \text{ cm}$ a lo ancho
 $\frac{27.94 \text{ cm}}{2 \cdot 3.1416} \rightarrow r_2 = 4.44 \text{ cm}$ a lo largo
 $\pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V = 3.1416 \cdot (3.43)^2 \cdot 27.94 \text{ cm} \rightarrow V_1 = 1037.67 \text{ cm}^3$
 $\pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V = 3.1416 \cdot (4.44)^2 \cdot 21.59 \text{ cm} \rightarrow V_2 = 1337.11 \text{ cm}^3$

Figura 83: Hoja de trabajo de Carlos.

[20] Diego: La diferencia es algo considerable.

[21] Carlos: Es más o menos como un 30% sobre el otro volumen calculado, entonces esos nos va deducir que cuando se toma a lo largo de la hoja el volumen es más largo [el volumen es mayor]. Segundo, a nosotros nos quedaron dudas también porque, bueno y si la hoja es más corta o no sé, entonces el ejemplo b decía...

[22] Inv: ¿Si es con cualquier hoja?

[23] Carlos: Sí, decía... decía ¿qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular?, entonces para eso tomamos dos cilindros más que creamos que son estos [hojas rectangulares].

[24] Diego: V_1 y V_2 ... [señala los nuevos ejemplos que han realizado (Figura 83)]

[25] Carlos: Que llamamos volumen 1, 2, 3 y 4

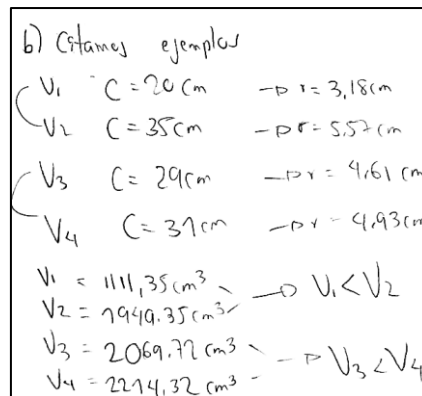


Figura 84: Hoja de trabajo de Carlos.

[26] Diego: Donde el largo, del volumen 1, sería 35 y el ancho sería 20... [hace referencia a una hoja con medidas 20 de ancho y 35 de largo].

[27] Carlos: Y en la otra recortamos las diferencias, ya que eran muy parejas a ver si cambiaba el sentido y en ambos nos dio que siempre a lo ancho es más amplio que a lo largo... perdón a lo largo es más ancho que a lo amplio [a lo largo tiene más volumen que a lo ancho], entonces con estos ejemplos encontramos, obviamente, que el cilindro no va a variar como tal, siempre a lo largo de la hoja va a ser mayor el volumen.

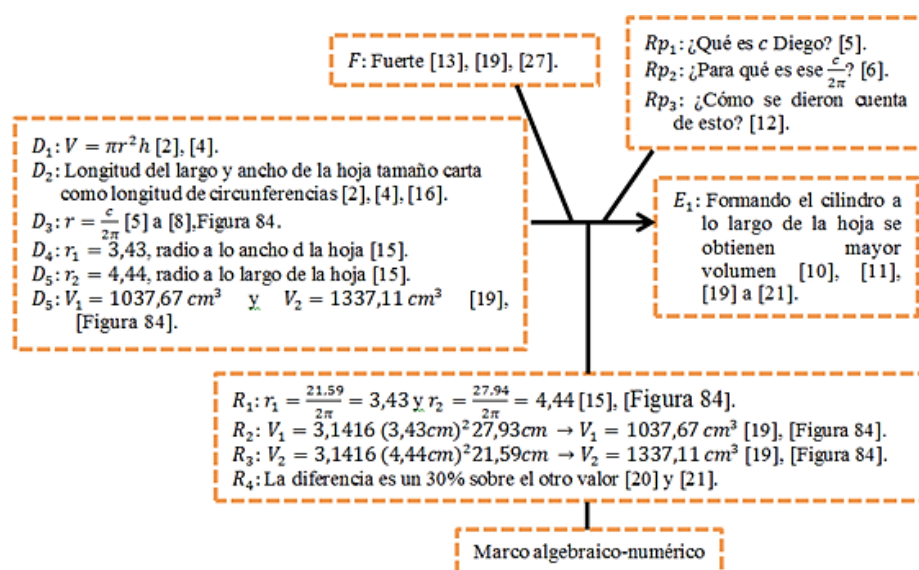


Figura 85: Esquema de la argumentación del Problema 3.1 realizado por Diego y Carlos.

En este proceso los estudiantes utilizaron elementos teóricos (que recordaron o buscaron en Internet) y datos implícitos del problema o que calcularon, para plantear una conjetura. Por lo tanto este proceso de argumentación es constructivo con una estructura inductiva producto de una generalización sobre el proceso.

El sistema de representación usado en este proceso posee representaciones algebraicas (L_1) y numéricas (L_2), presentes en los diferentes datos y operadores utilizados. El control (Σ_1) en este proceso lo ejercieron los otros ejemplos realizados, permitiéndoles además reforzar la veracidad de la conjetura.

Proceso de demostración

[28] Inv: ¿Por qué?

[29] Carlos: Porque opera que la... bueno yo diría tal vez que en este caso opera la altura, perdón el radio, el radio es que influye es ese caso porque el radio es el que se está elevando al cuadrado, entonces entre más radio... entre mayor sea el número que esta elevado al cuadrado pues es más inmenso; no es lo mismo en este caso el radio 3,18 al compararlo con 5,57, es una diferencia amplia [Figura 84], entonces obviamente este radio [5,57] al multiplicarlo [elevantarlo] al cuadrado va a dar un número mayor y como la altura no difiere mucho como tal entonces se hace que cuando el cilindro es más largo, tomado a lo largo, pues hace que sea más volumen que cuando estemos a lo ancho.

[30] Inv: ¿Por qué el radio es el que hace que exista más o menos volumen?

[31] Carlos: Porque se eleva al mismo exponente como tal.

[32] Inv: ¿Por qué si el radio está elevado al cuadrado hace que sea mayor volumen? ¿Por qué eso hace que la altura no tenga ninguna incidencia, como dice usted?

[33] Carlos: La altura incide pero no va a ser superior al radio [*al radio elevado al cuadrado*], entonces pero...

[34] Diego: Pero el radio también está multiplicado por π y va elevado a la dos, sería por eso.

[35] Carlos: El radio va elevado al cuadrado, ya después va multiplicado por π y por lo otro.

[36] Diego: Pero al ser mayor el radio, al elevarlo...

[37] Carlos: No, la pregunta que él dice es: ¿por qué cuando se toma a lo largo se presenta mayor volumen?

[38] Diego: Porque hay mayor distancia y al multiplicarlo por π ... esto por el... al elevarlo al cuadrado daría más que cuando lo tomamos a lo ancho.

[39] Carlos: Yo diría que la medida que causa la diferencia entre más o menos es el radio, porque es el que va al cuadrado y el radio se determina de acuerdo a cómo se tome la hoja, entonces el lado largo es que va a dar más radio, por lo tanto va a ser una medida mayor para elevarlo a su mismo exponente [*multiplicarla por ella misma*] y eso implicaría... por ahora no tengo más que decir.

[40] Inv: Bueno, ya sabemos que se forma un cilindro de una u otra manera y que la altura es mayor o es menor, ¿que la altura haga ese cambio no afecta en nada? porque... ¿qué pasa cuando el radio es mayor?

[41] Carlos: Sí afecta pero igual, esto...

[42] Inv: ¿Qué pasa con la altura cuando el radio es más grande?

[43] Carlos: Cuando el radio es más grande, la altura se disminuye.

[44] Inv: Se disminuye, ¿qué pasa cuando el radio es más pequeño?

[45] Carlos: Pues aumenta la altura.

[46] Inv: ¿Y eso no afecta el volumen?

[47] Carlos: Pues sí.

[48] Inv: ¿Sera que se cumple siempre su conjetura para todos los rectángulos?

[49] Carlos: Yo por eso estaba tomando esas medidas como tal a ver, distancias más largas [próximas] todavía.

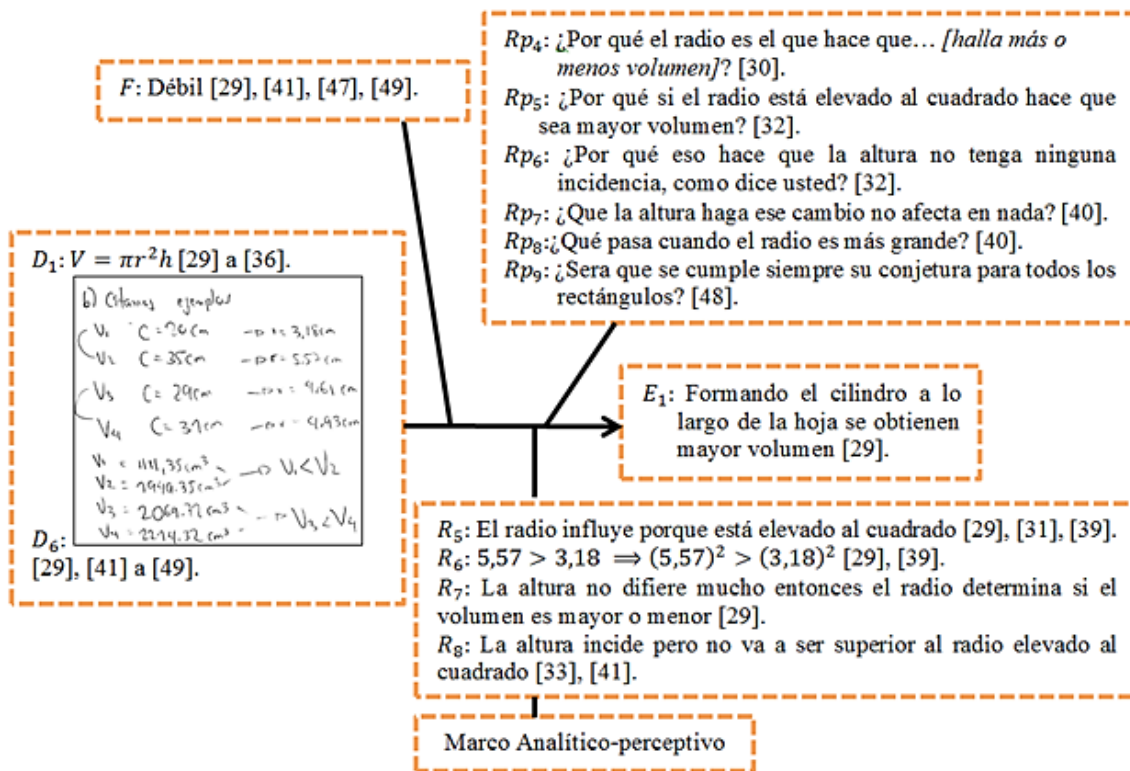


Figura 86: Esquema de la demostración del Problema 3.1 realizado por Diego y Carlos.

En este proceso tipo ejemplo genérico analítico el estudiante encontró una propiedad entre el radio y el volumen del cilindro, observando os ejemplos realizados en el planteamiento de la conjetura (D_6) y aplicó esta propiedad para respaldar la construcción de la demostración.

La representación utilizada fue el lenguaje natural (L_1) y el control (Σ_2) de su proceso fue perceptivo ya que solo bastó con verificar o generalizar que las propiedades descubiertas en la fórmula del volumen de un cilindro se cumplían en algunos de los ejemplos elaborados (Figura 84).

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : Formando el cilindro a lo largo de la hoja se obtienen mayor volumen	E_1 : Formando el cilindro a lo largo de la hoja se obtienen mayor volumen
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES $R_1: r_1 = \frac{21,59}{2\pi} = 3,43$ y $r_2 = \frac{27,94}{2\pi} = 4,44$ [15], [Figura 84]. $R_2: V_1 = 3,1416 (3,43cm)^2 27,93cm \rightarrow V_1 = 1037,67 cm^3$ [19], [Figura 84]. $R_3: V_2 = 3,1416 (4,44cm)^2 21,59cm \rightarrow V_2 = 1337,11 cm^3$ [19], [Figura 84]. R_4 : La diferencia es un 30% sobre el otro valor [20] y [21].	OPERADORES R_5 : El radio influye porque está elevado al cuadrado [29], [31], [39]. $R_6: 5,57 > 3,18 \Rightarrow (5,57)^2 > (3,18)^2$ [29], [39]. R_7 : La altura no difiere mucho entonces el radio determina si el volumen es mayor o menor [29]. R_8 : La altura incide pero no va a ser superior al radio elevado al cuadrado [33], [41].
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Algebraico L_2 : Numérico	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_3 : Lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Fórmulas <i>Marco numérico-algebraico</i>	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Fórmulas <i>Marco numérico</i>
RUPTURA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 87: Cuadro Comparativo 17, ruptura del sistema de referencia (Problema 3.1).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva por generalización de una propiedad
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Ejemplo genérico analítico
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 88: Cuadro Comparativo 18, continuidad estructural (Problema 3.1).

La ruptura cognitiva empírica se presentó al evidenciarse continuidad empírica estructural, pero una ruptura referencial que se presentó por el uso de ejemplos, como datos u operadores numéricos, para el planteamiento de la conjetura para extraer propiedades en la construcción de la demostración.

Vemos como una fortaleza que el estudiante pasara de una generalización de un proceso empírico para el planteamiento de la conjetura a una demostración de tipo ejemplo genérico

analítico, ya que dejó los ejemplos como medio de validación y utilizó una propiedad descubierta.

6.3.2 Problema 3.2

A continuación, la intervención de dos estudiantes: Nicol intentó refutarle a su compañero Andrés, la postura inicial que había tomado frente a los problemas planteados en los literales a y b.

Actividad 1

Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas.

- a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud, ¿cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección.
- b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? Explica tu respuesta.

Proceso de argumentación

[1] Inv: Andrés, usted dice que los dos volúmenes son iguales, ¿por qué?

[2] Andrés: Los dos cilindros tienen igual volumen y la razón es que como es la misma hoja, pues lo que el cilindro que es más alto tiene de alto, el otro lo tiene de ancho y esto hace que se compense de alguna manera el volumen de esos dos.

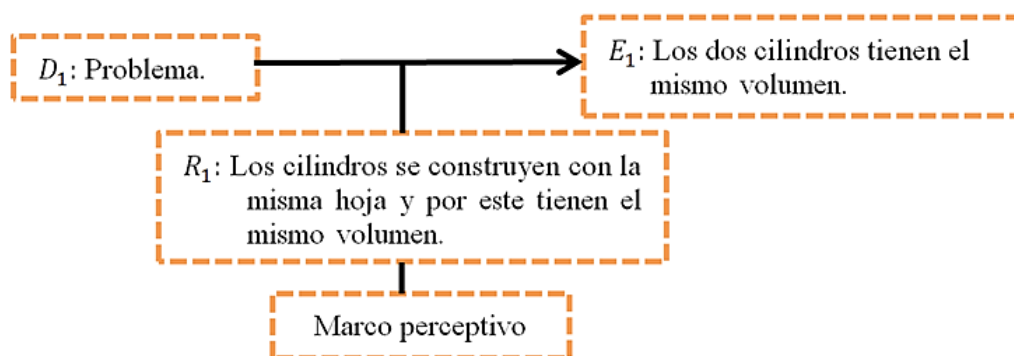


Figura 89: Esquema de la argumentación del Problema 3.2 realizado por Andrés.

- [3] Nicol: Pero no, el ancho tiene más volumen.
- [4] Inv: Nicol, ¿por qué es que dice que el ancho tiene mayor volumen?
- [5] Nicol: Por el radio.
- [6] Inv: ¿Qué pasa con el radio?
- [7] Nicol: Que aquí es más, o sea, suponiendo, o sea, aquí estoy haciendo como con valores, entonces, bueno no sé.
- [8] Inv: ¿Cómo así que lo está haciendo con valores?
- [9] Nicol: Suponiendo, o sea como para reemplazar a ver cuál da más o si dan lo mismo o así, entonces yo no sé, ¿a este cuánto le ponemos de altura?
- [10] Andrés: Pues...
- [11] Inv: ¿No sabe qué?
- [12] Nicol: ¿Cuánto ponerle de altura?
- [13] Andrés: No sé, 20.
- [14] Nicol: 15, este 20 y este 15, 15 o 16, cuánto me dijo ¿20?, ¿tiene calculadora? *[reemplaza en la fórmula del volumen el valor de altura y radio, Figura 90]*.

Actividad 1. Largo $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 16$ $V = 3,14 \cdot 25 \cdot 16$ $V = 1256$	Ancho $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 20$ $V = 3,14 \cdot 9 \cdot 20$ $V = 565,2$
--	--

Figura 90: Hoja de trabajo de Nicol.

- [15] Inv: Cuénteme, ¿qué encontró?

[16] Nicol: Que el volumen es mayor en este [*cilindro formado a lo largo*] que es este [*cilindro formado a lo ancho*].

[17] Inv: ¿Cuál era el radio del primero? [*del cilindro formado a lo largo*].

[18] Nicol: Bueno a este le pusimos 5.

[19] Inv: ¿5 de qué?

[20] Nicol: 5 de radio, y al otro le pusimos 3.

[21] Inv: 3 de radio.

[22] Nicol: A este le pusimos 16 de altura y a este 20, entonces da mayor volumen en el que tiene mayor radio.

[23] Inv: ¿Por qué este 5 y por qué este 3?

[24] Nicol: O sea, pues suponiendo que este, el radio de este [*señala el cilindro más alto*] es más grande que el de este [*señala el cilindro de menos altura*], entonces suponiendo... dándole valores.

[25] Inv: Me señala que el radio es... ¿Me está señalando que el radio es esto? [*señalo el diámetro*]

[26] Nicol: Sí, pues es el mismo...

[27] Andrés: No, el radio es la medida de un punto al centro.

[28] Inv: ¿Cómo se obtiene mayor volumen, formando a lo largo o a lo ancho?

[29] Nicol: A lo largo.

[30] Andrés: No, a lo ancho, ¿no?.. Porque queda este mayor.

[31] Nicol: No, pero este es el largo de la hoja.

[32] Andrés: ¿Cómo así?

[33] Nicol: O sea, este es el largo.

[34] Andrés: Aaah, ya.

[35] Nicol: Y este es el ancho de la hoja *[forma lo cilindros de las dos maneras posibles]*.

[36] Inv: ¿Entonces a lo qué?

[37] Nicol: A lo largo.

[38] Inv: O sea, eso quiere decir que lo que la hoja tiene de ancho es la altura del cilindro.

[39] Nicol: ¿Cómo?

[40] Inv: O sea, cuando dices a la largo, es porque lo que tiene de ancho es la altura del cilindro.

[41] Nicol: Sí.

[42] Inv: ¿Qué se puede decir de cualquier hoja rectangular, cómo se obtienen el cilindro de mayor volumen?

[43] Andrés: Cuando se toma a lo largo.

[44] Inv: ¿A lo largo?

[45] Andrés, Nicol: Sí, *[cuando se]* doble a lo largo.

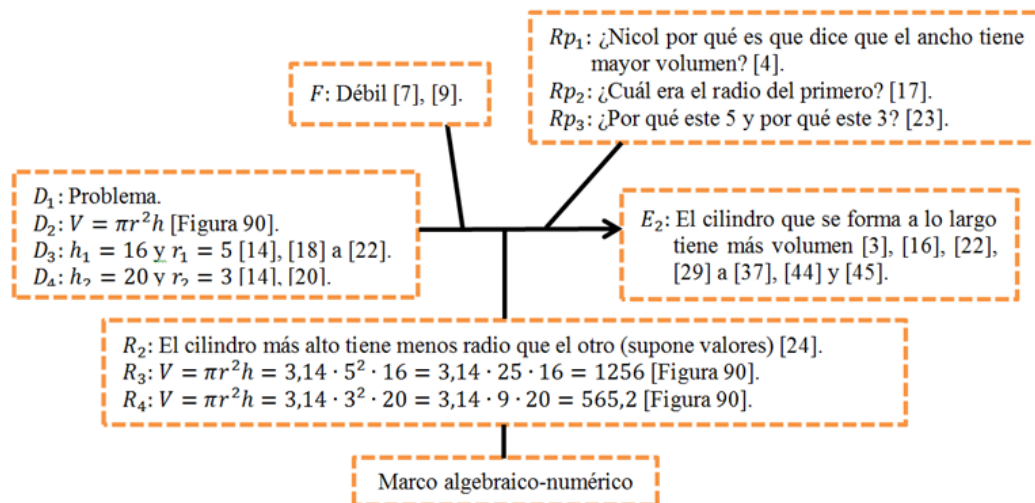


Figura 91: Esquema de la argumentación del Problema 3.2 realizado por Andrés y Nicol.

En este proceso se realizó una generalización inductiva a partir de un proceso de argumentación, se justificó una conjetura propuesta Nicol quien intentó persuadir a Andrés de la

veracidad de una conjetura que él había realizado. En el sistema de representación utilizado apareció una representación numérica (L_1) cuando la estudiante evocó la fórmula del volumen de un cilindro y se designó valores de h y r para obtener el volumen de los cilindros que verificaron su conjetura. El control (Σ_1) de sus acciones lo ejerció la coherencia de sus suposiciones con los resultados encontrados por Nicol.

Proceso de demostración

[46] Inv: ¿Por qué?

[47] Andrés: Es que... pues porque...

[48] Inv: ¿Será que siempre el que tiene mayor volumen es el que se forma a lo largo?

[49] Nicol: No sé, yo creo que sí.

[50] Inv: ¿Por qué? Cuéntame.

[51] Nicol: Porque... es que, pues en sí tendría que...

[52] Inv: ¿Cómo?

[53] Nicol: Por decir, si, no sé... porque siempre va a ser como mayor el radio en una hoja que se va a doblar a lo largo, que en una que se va a doblar a lo ancho, [Figura 92].



Figura 92: Cilindros contruidos por los estudiantes.

[54] Inv: O sea, ¿si es mayor el radio es mayor el volumen?

[55] Nicol: Sí, exacto.

[56] Inv: ¿Usted qué opina?

[57] Andrés: Sí, también.

[58] Inv: Acoge lo que ella dice.

[59] Andrés: Pues sí es que, aquí habría que tomar valores como más exactos *[señala el ejemplo realizado]*, o sea a la simple vista pues no, para ver pues, si realmente tiene tanta diferencia uno con el otro, pero pues hay se ve que este tiene mayor volumen que el otro.

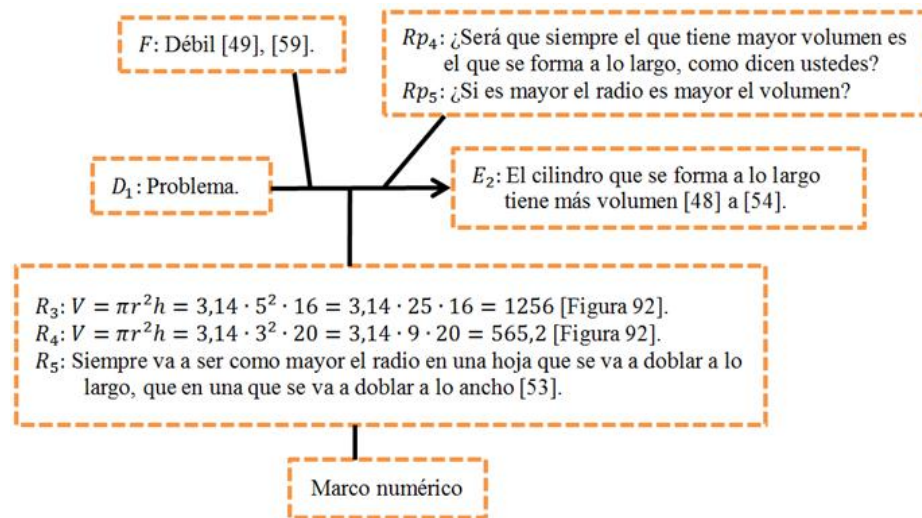


Figura 93: Esquema de la demostración del Problema 3.2 realizado por Andrés y Nicol.

En este proceso de demostración empírico de tipo *experimento crucial* vemos que los estudiantes generalizaron $[R_4]$ ejemplos empleados en el proceso de argumentación y solo se basaron en esta generalización para la construcción de la demostración.

El sistema de representación fue el lenguaje natural (L_2) y una estructura de control fue perceptiva (Σ_2) ya que fue suficiente observar los ejemplos (R_3, R_4) y comparar los cilindros contruidos (R_5) para verificar que su razonamiento no era errado.

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : Los dos cilindros tienen el mismo volumen. E_2 : El cilindro que se forma a lo largo tiene más volumen.	E_2 : El cilindro que se forma a lo largo tiene más volumen.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Los cilindros se construyen con la misma hoja y por este tienen el mismo volumen. R_2 : El cilindro más alto tiene menos radio que el otro (supone valores). $R_3: V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 16 = 3,14 \cdot 25 \cdot 16 = 1256$. $R_4: V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 20 = 3,14 \cdot 9 \cdot 20 = 565,2$.	OPERADORES $R_3: V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 16 = 3,14 \cdot 25 \cdot 16 = 1256$. $R_4: V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 20 = 3,14 \cdot 9 \cdot 20 = 565,2$. R_5 : Siempre va a ser como mayor el radio en una hoja que se va a doblar a lo largo, que en una que se va a doblar a lo ancho.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN
L_1 : Numérico	L_2 : Lenguaje natural
ESTRUCTURA DE CONTROL	ESTRUCTURA DE CONTROL
Σ_1 : Coherencia suposiciones-ejemplos	Σ_2 : Perceptivo
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico-perceptivo</i>
CONTINUIDAD EN EL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 94: Cuadro Comparativo 19, continuidad del sistema de referencia (Problema 3.1).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización de un ejemplo	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva por generalización de una propiedad
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial basado en ejemplos
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 95: Cuadro Comparativo 20, continuidad estructural (Problema 3.1).

Con este análisis identificamos unidad cognitiva debido a la continuidad estructural inductiva y a la continuidad referencial ya que los estudiantes manipularon los datos para hacer ejemplos y generalizarlos en el proceso de argumentación y, posteriormente, fueron retomaron esos ejemplos como datos para analizarlos y extraer propiedades con las que se justificó la construcción de la demostración.

Una dificultad que se presentó con esta unidad cognitiva es que al utilizar algunos datos o ejemplos numéricos durante ambas partes del proceso, ya sea con diferente intención, se impidió al estudiante encontrar algún error o contradicción en la aplicación de operadores.

6.4 Procesos identificados en el taller “Área Máxima”

En este apartado se presentan dos procesos de argumentación y demostración de la Actividad 1 del taller, los cuales dejan ver una dificultad que hemos observado en las distintas versiones del curso de precálculo.

6.4.1 Problema 4.1

A continuación, el proceso de argumentación y demostración realizado por Juan en el siguiente problema.

Actividad 1

El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta en la hoja de trabajo.

Proceso de argumentación

- [1] Juan: Como no piden un cuadrado sino un rectángulo, entonces la base va a ser más grande que la altura o la altura más grande que la base, ¿sí?
- [2] Inv: ¿Cómo así?
- [3] Juan: Sí, tenemos que es... un rectángulo [*dibuja un “rectángulo” en la hoja de trabajo, Figura 96*] o sea no es un cuadrado, por lo tanto, [...] la base tiene que ser más grande que la altura y esto significa que es un rectángulo, porque es que me preguntan en qué momento su área es mayor, entonces va a ser cuando sea 3,49 de base y de altura 3,51, ahí sigue siendo rectángulo y esa va a ser como la mayor área que es 12 coma algo...



Figura 96: Hoja de trabajo de Juan.

[4] Inv: ¿Cómo se dio cuenta que eran esos valores?

[5] Juan: Pues lo que yo estaba mirando era, por ejemplo, si hacemos como seis más seis doce y uno más uno dos, 14, seis por uno seis, el área va a ser seis. Pero, por ejemplo, si nos acercamos más, que sean las medidas más parecidas me va a dar [mayor], por eso cuando tenemos un rectángulo de 3,5 por 3,5, me va a dar como 12,9, creo... con calculadora 12,25 y esa va a ser el área máxima.

[6] Inv: ¿Cuándo tiene 3,5 de lado?

[7] Juan: Sí, pero entonces ya estamos hablando de un cuadrado.

[8] Inv: Y entonces ¿cuál es el rectángulo con área máxima y con perímetro 14 m?

[9] Juan: El de 3,49 por 3,51.

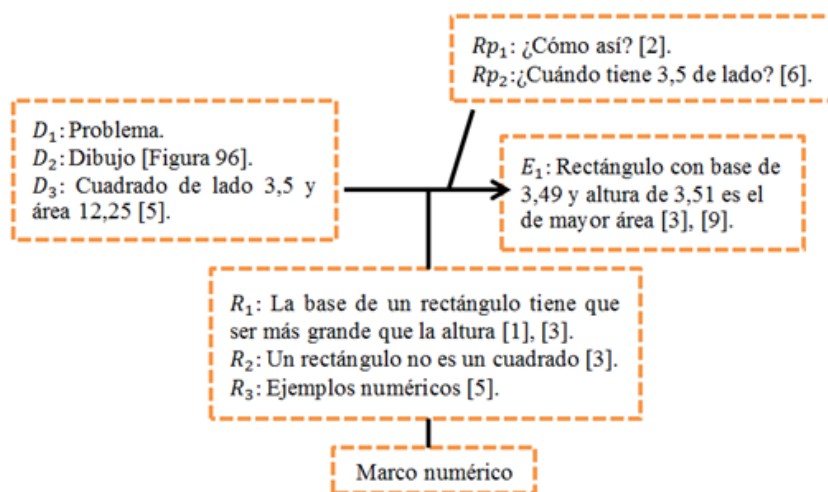


Figura 97: Esquema de la argumentación del Problema 4.1 realizada por Juan.

En este proceso se hicieron ejemplos numéricos escogidos de acuerdo a las condiciones del problema y mediante un proceso de *generalización inductivo* Juan planteó que el cuadrado de lado 3,5 m era el de mayor área comparado con el rectángulo de lados 6 y 1 metros; ya que para él un cuadrado no podía ser un rectángulo, además pensaba que dos cifras decimales eran suficientes para realizar cálculos de aproximación, concluyendo como enunciado conclusión del problema (E_1) que el “rectángulo con base de 3,49 y altura de 3,51 es el de mayor área”.

El estudiante empleó un sistema de representación numérico (L_1) y una estructura de control numérico-teórico (Σ_1).

Proceso de demostración

[10] Inv: ¿Por qué sería este rectángulo?

[11] Juan: Porque entre más homogéneo sean los lados, o sea, entre más parecido sean, va a ser mejor *[el área]*, por ejemplo, de los perímetros más bajos serían... del área más baja sería seis, o sea, como ya hallé un valor extremo *[12,25 en la intervención [5]]* y entre más cerca, más... más área *[señala la Figura 96]*.

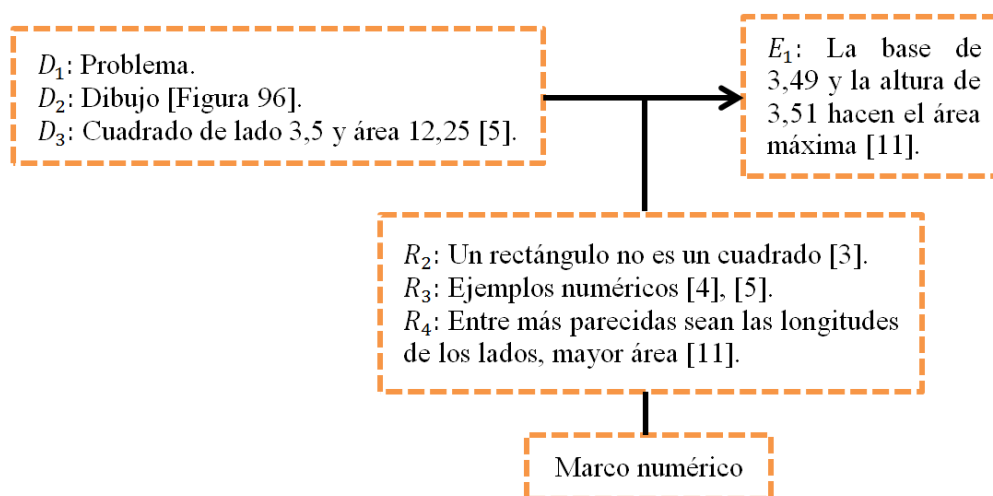


Figura 98: Esquema de la demostración del Problema 4.1 realizada por Juan.

Este es un proceso de demostración empírico de tipo *experimento crucial constructivo*, el estudiante planteó una propiedad que debían cumplir los lados del rectángulo para que su área fuera mayor, y como el enunciado conclusión cumplía con ella, eso le bastó para validarlo. Dicha propiedad surgió de los ejemplos realizados para el planteamiento de la conjetura.

El estudiante tomó operadores (R_3) del planteamiento de la conjetura representados (L_1) y planteó una regla (R_4) con una representación en lenguaje natural (L_2). La estructura de control la ejerció la propiedad utilizado (Σ_2).

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : La base de 3,49 y la altura de 3,51 hacen el área máxima.	E_1 : La base de 3,49 y la altura de 3,51 hacen el área máxima.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : La base de un rectángulo es más grande que la altura. R_2 : Un rectángulo no es un cuadrado. R_3 : Ejemplos numéricos	OPERADORES R_2 : Un rectángulo no es un cuadrado. R_3 : Ejemplos numéricos. R_4 : Entre más parecida sea la longitud de los lados, más área.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico L_2 : Lenguaje natural.	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico. L_2 : Lenguaje natural.
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico-teórico. <i>Marco numérico</i>	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Propiedad numérica. <i>Marco numérico</i>
UNIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 99: Cuadro Comparativo 21, unidad del sistema de referencia (Problema 4.1).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN Experimento crucial constructivo.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 100: Cuadro Comparativo 22, continuidad estructural (Problema 4.1).

En este proceso se presenta unidad cognitiva empírica ya que hubo continuidad estructural, y unidad referencial. Esto se debe a que en la fase del planteamiento de la conjetura y en la en la construcción de la demostración se utilizaron los ejemplos que cumplían con las condiciones del problema. A pesar de haber una nueva generalización sobre las condiciones que debían cumplir los lados del rectángulo para tener área máxima, los procesos siguieron siendo empíricos.

Una dificultad que se presentó en este proceso, y que impidió la solución adecuada del problema, es que el estudiante no consideró un cuadrado como un rectángulo, aspecto que lo llevó a plantear una propiedad errónea; además solo utilizó números enteros, con uno o dos decimales, lo cual impidió que considerara los procesos infinitos involucrados, aspectos que están relacionados con el pensamiento variacional.

6.4.2 Problema 4.2

A continuación, el proceso de argumentación y demostración realizado por Carlos para el mismo problema que, por ser resuelto por un estudiante diferente, lo codificamos como “Problema 4.2”.

Actividad 1

El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. **Explica y justifica** tu respuesta en la hoja de trabajo.

Antes de la intervención del investigador, Carlos trabajó de forma individual y en silencio; él estimó el área con la calculadora asignando valores a las magnitudes de la base y la altura del rectángulo; cuando Carlos planteó una conjetura se realizó la intervención.

Proceso de argumentación

[1]Inv: ¿Cómo va Carlos?

[2]Carlos: Pues haciendo ensayos [*ejemplos*] encontré que [...] la forma que el área de más, que da un número mayor, estaríamos hablando que cuando todas las caras miden igual, en este caso 3,5 [*señala su hoja de trabajo*], que fue donde alcanzó el valor de 12,25, luego aquí el perímetro sería obviamente la suma de todos los lados y este me daría 14, el área me daría 12.25 como tal. Hice la operación con otros números cercanos o lejanos y este fue el valor más alto que pude hallar [*estos ejemplos los hizo antes de la entrevista con la calculadora sin escribir nada en su hoja de trabajo*].

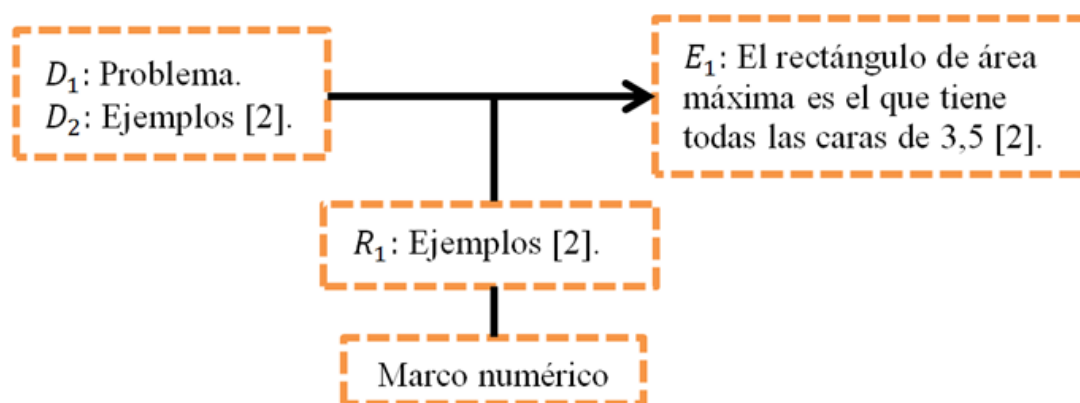


Figura 101: Esquema de la argumentación del Problema 4.2 realizada por Carlos.

Este es un proceso empírico en el que el estudiante realizó varios ejemplos para plantear un enunciado conclusión mediante una *generalización inductiva* al no encontrar un contraejemplo que mostrara valores del largo y ancho del rectángulo que hicieran un área mayor a 12,25 unidades cuadradas. El sistema de representación del proceso fue numérico (L_1) y el control lo ejercieron los diferentes ejemplos que hizo al intentar encontrar un área mayor a 12,25 (Σ_1).

Proceso de demostración

[3]Inv: ¿Por qué ese es el rectángulo de área máxima?

[4]Carlos: No sé, tal vez al multiplicarlo por el mismo número es como si estuviera elevando al cuadrado, prácticamente. Encontré otros valores que uno podría decir “bueno y por qué no toma dos y cinco”, simplemente porque, usted dice, bueno un número al cuadrado, pero, pero el 2 cinco veces va a dar 10 y no supera el cuadrado... no supera el cuadrado de un 3,5, igual con otros ejemplos. No encontré así como más razón lógica.

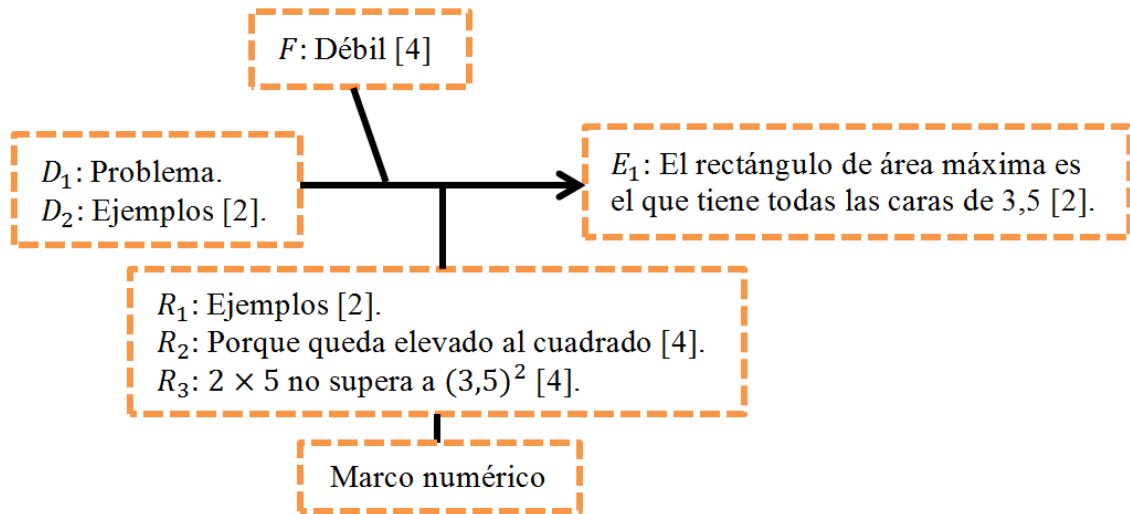


Figura 102: Esquema de la demostración del Problema 4.2 realizada por Carlos.

Esta demostración es de tipo *experimento crucial constructivo* ya que para la construcción de la demostración, pese a que el estudiante resaltó una cualidad o propiedad de su enunciado conclusión, validó la conjetura recurriendo a un ejemplo (R_3) que no cumplía con esta propiedad y dio como resultado un área menor que la propuesta.

El sistema de representación fue numérico (L_1) y la estructura de control la ejercieron los ejemplos realizados durante ambos procesos pues no dieron un área mayor a 12,25 (Σ_1).

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : El rectángulo de área máxima es el que tiene todas las caras de 3,5.	E_1 : El rectángulo de área máxima es el que tiene todas las caras de 3,5.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Ejemplos.	OPERADORES R_1 : Ejemplos. R_2 : Porque queda elevado al cuadrado. R_3 : 2×5 <u>no</u> supera a $(3,5)^2$.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérica	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérica
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Numérico
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 103: Cuadro Comparativo 23, continuidad del sistema de referencia (Problema 4.2).

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE LA ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Empírica
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN <i>Experimento crucial constructivo</i>
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Figura 104: Cuadro Comparativo 24, continuidad estructural (Problema 4.2).

La unidad cognitiva empírica de este proceso se debió al uso de ejemplos como únicos medios de convicción y a la continuidad estructural empírica tanto en el proceso de argumentación como en el de demostración.

Una dificultad para realizar el proceso de demostración con éxito resultó porque que el estudiante utilizó ejemplos como único medio de convicción en ambos procesos, lo cual impidió tratar el problema con operadores teóricos o pasos deductivos.

6.5 Proceso identificado en el taller “Caja sin tapa”

6.5.1 Problema 5.1

A continuación, el proceso de argumentación y demostración realizado por Carlos y Diego, aunque la actividad matemática que predominó fue la de Carlos.

Actividad 1

A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? Explica tu procedimiento y tu respuesta.

Carlos antes de comenzar a doblar el pliego de papel decidió averiguar cuál podría ser la caja con mayor volumen.

Proceso de argumentación

[1] Inv: ¿Qué hace Carlos?

[2] Carlos: Antes de doblar el pliego de cartulina, [...] primero hago unos ensayos *[ejemplos]* acá sobre cómo sería el volumen que obviamente sería largo por ancho por alto. En este caso está mal aquí *[Figura 105]* es 2 porque si tomamos el pliego por este costado y lo dividimos en dos, como tiene seis decímetros dividido en dos, dos y dos, quedarían estas tres caras... *[se queda reflexionando]*.

[3] Inv: ¿Cómo dice Carlos?

[4] Carlos: Daría... ¡Uy, no! Eso queda midiendo uno *[el estudiante tacha en la hoja la medida del largo de la caja dibujada en su hoja de trabajo]*, eso queda midiendo uno para que... ¿La caja no debe tener esto...? ¿Falta solamente una tapa?

[5] Diego: La tapa de encima.

[6] Carlos: Entonces esto está mal, $2 \times 2 \times 1$, me va dar simplemente 4 el volumen de esto [Figura 105]. Eh... largo es dos, ancho es uno y largo es dos, porque si tiene cuatro decímetros había quedado... no ni siquiera da eso, no me da la caja [para el segundo ejemplo que hace, Carlos también asigna números sin criterios, pero al analizar se da cuenta que con esos valores no puede hacer una caja; Figura 105].

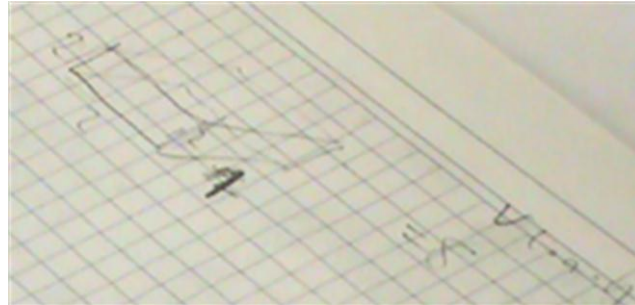


Figura 105: Hoja de trabajo de Carlos.

No, está mal.

Puede ser de pronto tomar así, que este sea uno, uno, cuatro y este sería dos, claro, porque tiene que estar este aquí uno para esta tapa y uno para esta, lo que implicaría que largo, por ancho por alto. Está es una buena opción, me está dando un volumen siempre alto, 8 centímetros cúbicos [Figura 106].

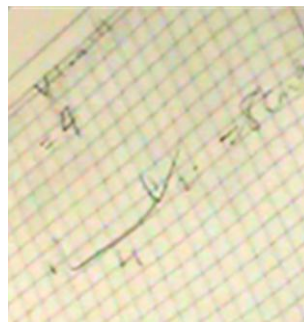


Figura 106: Hoja de trabajo de Carlos.

[7] Inv: ¿Por qué este lado es cuatro? [Por petición del investigador el estudiante cambia de hoja de trabajo, de una hoja cuadriculada a una hoja blanca]

[8] Carlos: Porque lo tomaría de la siguiente manera, decir así, aquí quedaría una hoja, como dibujando, como el pliego mide seis y mide cuatro [6 dm de largo y 4 dm de ancho], sería más conveniente tomar esta cara [toma el pliego de papel y me muestra el lado más largo] para hacer la parte de división larga y yo podría decir que esto es así, cuatro, uno y uno [retoma el ejemplo de la [6]], estamos hablando de esto, esta cara vale 6 decímetros, o sea 6 y decir que en esta parte de atrás estos cuatro van a ser estos dibujos así [Figura 107], dos acá y uno para cubrir estas caras –acuérdesse que hay que doblarlo– entonces el volumen es largo por ancho por alto, porque estamos hablando que este es el largo, este es el ancho y este el alto, daría ocho [señala el dibujo que está realizando, Figura 107]...

[9] Diego: Daría ocho...

[10] Carlos: Es una buena opción, este volumen da ocho.

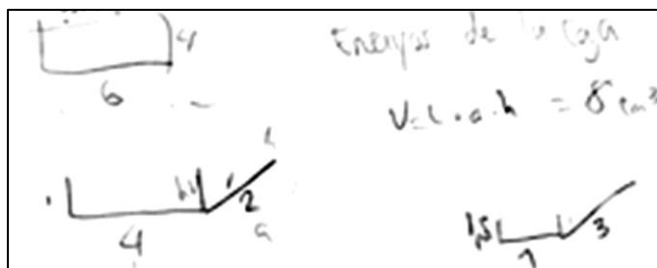


Figura 107: Nueva hoja de trabajo de Carlos.

[11] Diego: ¿Puede ser que también tomemos el 0,5?

[12] Carlos: Pero entonces va a ser diferente porque se va a multiplicar por un número menor de uno y sería dividiendo... también tenga en cuenta eso, si yo digo 0,5...

[13] Inv: Hágalo aparte, ahí abajo.

[14] Carlos: Ok. 0,5, esto valdría cinco y esto valdría obviamente tres, largo por ancho por alto, entonces diríamos que $5 \times 3 = 15$, $15 \times 0,5 = 7,5$; estamos reduciendo, entonces dio menos [Figura 108]. Otra forma podría ser...

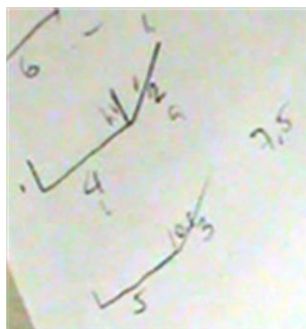


Figura 108: Trabajo de Carlos tomado del vídeo.

[15] Diego: ¿1,5 daría mucho? *[Diego le está dando opciones para la altura de la caja]*

[16] Carlos: Si esto midiera 3; suponiendo que esto midiera 3 y esto 1,5... No, no, entonces se puede, porque si esto mide tres, no alcanza a dar prácticamente aquí nada.

[17] Inv: ¿Cómo así?

[18] Carlos: Si esto mide 3, esto va a medir 1,5 y este va a medir únicamente uno, porque va a tener que doblarle 1,5 y 1,5 a cada cara, se reduce a uno *[uno de los lados de la caja, el de 4 dm]* y entonces uno por tres por 1,5, no supera evidentemente el valor como tal *[refiriéndose al volumen de 8 cm^3 calculado antes [6]]*, daría 4,5, entonces no estamos haciendo nada.

¿Qué otras dimensiones se le pueden dar? Lo más común, lo más lógico, sería multiplicar la dimensión igual, como lo hicimos cuando era perímetro *[se refiere al taller de hallar el área máxima de un rectángulo con un perímetro fijo, presentado el día anterior]*, lado por lado que midiera igual o tratar de aproximarse a eso, de valores grandes, ojalá que no hubiera ningún uno [...] Si dijéramos, por ejemplo, acá que esto mide dos y esto mide dos y dos, estaríamos hablando... a esto carece de tamaño, porque se van los cuatro decímetros en las dos caras, entonces quedaría así *[dobla una hoja, mostrando que no habría ancho de la caja]*, entonces no se puede, no puede llegar a medir dos la altura.

[19] Inv: ¿Por qué no puede medir dos?

- [20] Carlos: Porque la altura si mide dos decímetros y este ancho tiene cuatro, ahí se iría la altura en esas dos caras, entonces no estaríamos haciendo nada de nuevo, no dejaría lugar para...
- [21] Inv: ¿Qué valores puede tomar la altura?
- [22] Carlos: Inferiores a dos, entre cero a 1,9.
- [23] Diego: De cero a dos, sin tomar dos.
- [24] Carlos: Sin tomar dos, exactamente.
- [25] Inv: ¿Cuáles son las magnitudes que darán el mayor volumen?
- [26] Carlos: Yo creería que la primera.
- [27] Inv: ¿La primera que usted hizo?
- [28] Carlos: La que me dio cuatro y mide un decímetro y un decímetro, más fácil y esa cara *[se refiere a doblar caras de 1 dm de alto, [6]]* le da un buen valor a todas las dimensiones que necesitamos para hallar el volumen.

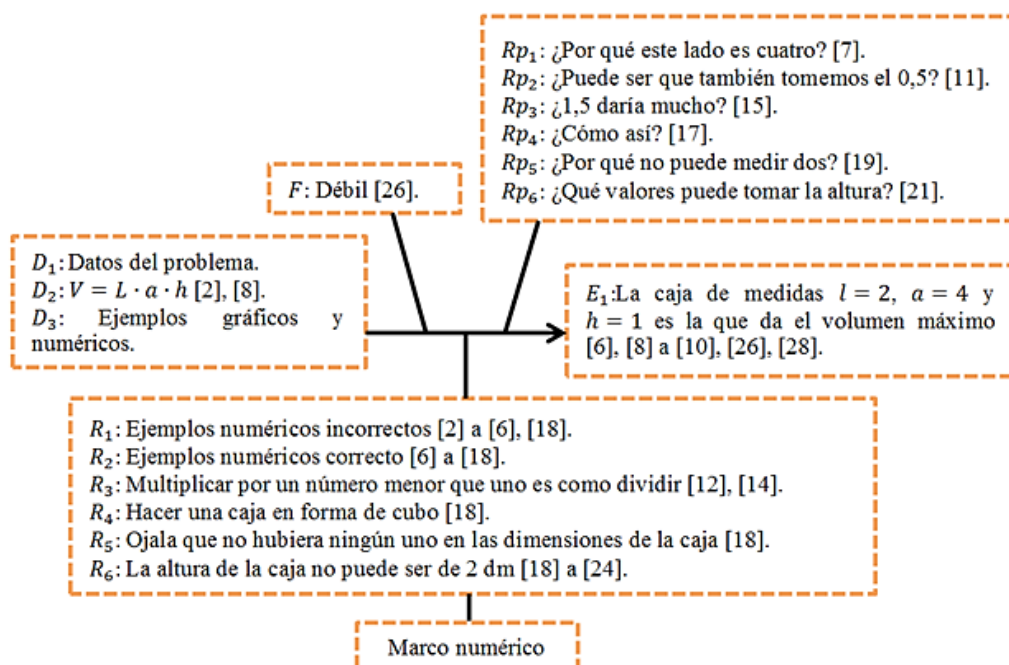


Figura 109: Esquema de la argumentación del Problema 5.1 realizado por Carlos y Diego.

En este proceso se planteó una conjetura mediante una *generalización inductiva* en la que el estudiante, después de realizar varios ejemplos erróneos y correctos en los que aplicó diferentes operadores, tomó como enunciado conclusión el ejemplo con el que encontró más volumen.

El sistema de representación que utilizó el estudiante fue numérico [L_1], pero cada ejemplo también iba soportado con un dibujo de una “caja” [L_2]. Durante este proceso el estudiante propuso valores para dimensiones de la caja, pero las condiciones del problema y las refutaciones potenciales de su compañero le hicieron ver sus errores, por lo que el control lo ejerció el cálculo numérico del volumen y la verificación de las condiciones del problema (Σ_1), (Σ_2).

Proceso de demostración

[29] Inv: ¿Y por qué sería esa?

[30] Carlos: Pues porque, lo uno mantendría el ancho con una buena cifra, el largo también y la altura no estaría siendo inferior a uno, si alguno de los tres números es inferior a uno, nos va a dar un número más pequeño como tal, es decir que multiplicar decimales, números inferiores a uno, siempre va a ser dividir realmente... ¿Y si la planteamos al revés?, si tomamos cuatro, uno... así vea dos, uno y uno y como este mide seis va a quedar cuatro...

[31] Diego: Cuatro, va a dar igual...

[32] Carlos: Tiene exactamente las mismas caras, cuatro por dos ocho por una, sí. ¿Y si esto mide uno y este 1,5?

[33] Diego: No, da igual.

[34] Carlos: Este es el que mide seis, acuérdesse que esta cara es la que mide seis, entonces es la que va a dar tres acá [*dibuja una caja con el ancho de frente y*

asigna valores a los lados, Figura 110], uno por tres, tres... no va a dar igual, efectivamente esta es la cara, esta es la cara.

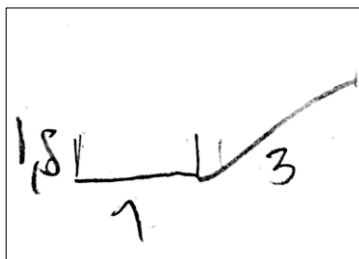


Figura 110: Hoja de trabajo de Carlos.

[35] Diego: ¿1,5 tampoco?

[36] Carlos: Ya sabemos que las caras son cuatro, uno y dos, ya, con eso concluimos.

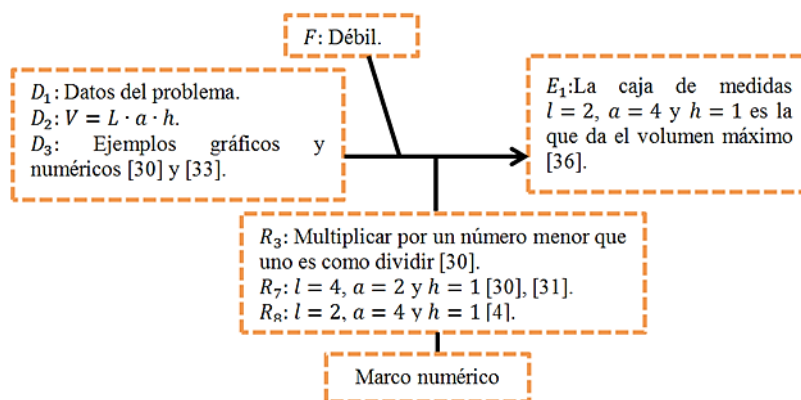


Figura 111: Estructura de la argumentación de Carlos.

Este proceso es de tipo *experimento crucial* ya que el estudiante, al no encontrar un contraejemplo que le permitiera rechazar el enunciado conclusión, lo asumió como cierto. Además, aunque hay una regla que se generó de los ejemplos realizados, esta se usó para encontrar más ejemplos y no para validar directamente el enunciado conclusión.

Al igual que en planteamiento de la conjetura, el sistema de representación se compuso por casos numérico $[L_1]$ y geométricos $[L_2]$. El control, las condiciones del problema (Σ_1) y los nuevos ejemplos (Σ_2) .

Unidad o ruptura cognitiva

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
E_1 : La caja de medidas $l = 1$, $a = 4$ y $h = 2$ es la que da el volumen máximo.	E_1 : La caja de medidas $l = 1$, $a = 4$ y $h = 2$ es la que da el volumen máximo.
CONCEPCIÓN	CONCEPCIÓN
OPERADORES R_1 : Ejemplos numéricos incorrectos. R_2 : Ejemplos numéricos correctos. R_3 : Multiplicar por un número menor que uno es como dividir. R_4 : Hacer una caja en forma de cubo. R_5 : Ojala que no hubiera ningún uno en las dimensiones de la caja. R_6 : La altura de la caja no puede ser de 2 dm.	OPERADORES R_3 : Multiplicar por un número menor que uno es como dividir [30]. R_7 : $l = 4$, $a = 2$ y $h = 1$. R_8 : $l =$, $a = 4$ y $h = 1$.
SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN L_1 : Numérico
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Condiciones del Problema. Σ_2 : Ejemplos.	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1 : Condiciones del Problema. Σ_2 : Ejemplos.
<i>Marco numérico</i>	<i>Marco numérico</i>
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Figura 112: Cuadro Comparativo 26, continuidad estructural (Problema 5.1).

La unidad cognitiva empírica es consecuencia de la continuidad estructural, producto de una continuidad en el sistema de referencia en la que predominó el uso de ejemplos como único medio de convicción. No salirse de un marco numérico es una dificultad para validar las argumentaciones, lo cual impide tratar el problema con operadores teóricos o pasos deductivos.

6.6 Resumen del análisis de datos

En siguiente tabla sintetizamos los procesos de argumentación y demostración analizados a lo largo de este capítulo; en esa tabla resaltamos el tipo de argumentación considerando la caracterización de Pedemonte (2002), el tipo de demostración considerando la caracterización de la existencia de unidad o ruptura referencia y estructural, dificultades o fortalezas de la unidad o ruptura cognitiva Fiallo (2011), y dificultades o fortalezas emergentes en los estudiantes que impidieron el tratamiento de los problemas de forma adecuada.

Los resultados compilados en la tabla son la base de las conclusiones de este estudio.

Problema	Tipo de argumentación y demostración	Constructo de unidad o ruptura cognitiva	Dificultades o fortalezas de la unidad o ruptura cognitiva	Otras dificultades o fortalezas
1.1 ¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$? ¿Por qué?  (Carlos)	Inductiva por generalización sobre el proceso (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica en la que predomina la utilización de ejemplos y la percepción como único medio de convicción.	Dificultad: Abordar el problema de variación y cambio como un problema numérico invariante.
	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural		
1.2 ¿Cuándo multiplico dos números, el resultado de la multiplicación es mayor, menor o igual a cualquiera de los dos números? (Carlos)	Inductiva por generalización de los enunciados (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica en la que predomina la utilización de ejemplos con números enteros es una dificultad que le impide ver contradicciones.	Dificultad: Abordar el problema de variación y cambio como un problema numérico invariante.
	Empirismo ingenuo inductivo	Continuidad estructural		

Figura 113: Resumen del análisis.

1.3 Abre el archivo T1_Act-2.1.ggb de GeoGebra y explora. ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$? Escribe tus conjeturas y justificalas. (Carlos)	Inductivo por generalización del proceso (constructiva)	Ruptura del sistema de referencia	Fortaleza: La ruptura cognitiva es positiva ya que el estudiante planteó la argumentación desde lo perceptivo, pero construyó la demostración con un experimento crucial.	Dificultad: Trabajar en contextos dinámicos como si fueran estáticos.
	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural		
2.1 ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? Justifica tu respuesta. (Sofía y Nicol)	Inductiva por generalización sobre el proceso (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La continuidad referencial es una dificultad que se debe al uso de regla de tres, como consecuencia de una interpretación errónea del problema o de la relación entre las magnitudes involucradas.	Dificultad: Coherencia entre el equipo de trabajo de un proceso inadecuado pero para ellos correcto.
	Empirismo ingenuo inductivo	Continuidad estructural		

Figura 114: Resumen del análisis.

2.2 ¿Qué cantidad queda en el sistema circulatorio al cabo de n días? (Sofía y Nicol)	Inductiva por generalización sobre el proceso (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica en la que predomina la utilización de ejemplos para hacer generalizaciones.	Dificultad: Interpretación errónea del problema o de las variables involucradas.
	Experimento crucial basado en un ejemplo	Continuidad estructural		
2.3 ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? (Sofía y Nicol)	Inductiva por generalización sobre el proceso (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica es una dificultad, ya que el estudiante solo se basa en la percepción y en ejemplos numéricos particulares para adelantar su actividad argumentativa.	Dificultad: Interpretación errónea del problema o de la relación entre las magnitudes involucradas.
	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural		
2.4 ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de	Generalización del proceso inductivo (constructiva)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica es una dificultad, que se	Dificultad: Analizar el producto de los ejemplos que ha

los 10 días? Justifica tu respuesta. (Lia y Juan)	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural	da por la generalización perceptiva de los operadores numéricos utilizados.	realizado o no el proceso que ha pasado a un segundo plano por el uso de la calculadora. Fortaleza: Adecuada interpretación del problema.
2.5 ¿Qué cantidad queda en el sistema circulatorio al cabo de n días? (Lia y Juan)	Inductivo por generalización de los datos (constructiva)	Ruptura en el sistema de referencia	Dificultad: Utilizar argumentos teóricos en el planteamiento de la conjetura y construir la demostración con un ejemplo particular, generando ruptura referencial.	Dificultad: Utilizar una expresión algebraica que recuerda y utilizarla en el problema sin estar segura que se ajusta a la situación.
	Experimento crucial basado en ejemplos	Continuidad estructural		
3.1 Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un	Inductivo por generalización sobre el proceso (constructiva)	Ruptura del sistema de referencia	Fortaleza: Usar los datos u operadores numéricos de la	Dificultad: Recurrir a ejemplos particulares para corroborar las

cilindro sin tapas a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud ¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección. (Carlos y Diego)	Ejemplo genérico analítico	Continuidad estructural	argumentación para extraer propiedades en la construcción de la demostración, generando ruptura referencial.	propiedades propuestas.
3.2 a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud ¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? Justifica tu elección. (Nicol y Andrés)	Inductivo por generalización de un ejemplo (estructurante)	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva es una dificultad debido a la presencia de ejemplos en los procesos como único medio de convicción.	Dificultad: Deducir una propiedad al generalizar un solo ejemplo y utilizarlas como único elemento de convicción.
	Experimento crucial basado en ejemplos	Continuidad estructural		

Figura 115: Resumen del análisis.

4.1 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta en la hoja de trabajo. (Juan)	Inductiva por generalización sobre el proceso	Unidad del sistema de referencia	Dificultad: Considera las figuras geométricas desde su forma y no desde sus propiedades, generando concepciones erróneas.	Dificultad: El pensamiento numérico no va más allá del uso de números con solo dos decimales, lo que impide identificar los procesos infinitos involucrados.
	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural		
4.2 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta en la hoja de trabajo. (Carlos y Diego)	Inductiva por generalización sobre el proceso	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica que utiliza ejemplos como único medio de convicción, le impide tratar el problema con operadores teóricos o pasos deductivos.	Dificultad: Generalizaciones a partir de ejemplos numéricos.
	Experimento crucial constructivo	Continuidad estructural		

Figura 116: Resumen del análisis.

5.1 ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? Explica tu procedimiento y tu respuesta. (Carlos y Diego)	Inductiva por generalización sobre el proceso	Continuidad del sistema de referencia	Dificultad: La unidad cognitiva empírica que utiliza ejemplos como único medio de convicción, le impide tratar el problema con operadores teóricos o pasos deductivos. Dificultad: Propiedades falsas o incompletas de los números reales.	Dificultad: El pensamiento numérico no va más allá del uso de los números enteros o el uso de una o dos cifras decimales como valores numéricos estáticos, que le impiden la consideración de los números como magnitudes variables y los procesos infinitos involucrados.
	Experimento crucial basado en ejemplos	Continuidad estructural		

Figura 117: Resumen del análisis.

7. Conclusiones

Teniendo en cuenta la fundamentación teórica, la metodológica y el análisis de los datos obtenidos con los estudios de caso, presentamos aquí las conclusiones que responde a las preguntas de investigaciones:

1. ¿Cómo son los procesos de argumentación y de demostración realizados por estudiantes de un curso de precálculo cuando resuelven problemas de variación y cambio?
2. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de un curso de precálculo cuando resuelven problemas de variación y cambio que requieren procesos de argumentación y de demostración?

A continuación presentamos las conclusiones en cuatro apartados:

- *Proceso de argumentación:* resaltamos los tipos de argumentación (Pedemonte, 2002) realizados por los estudiantes caso de estudio y las dificultades asociadas a este proceso.
- *Proceso de demostración:* mostramos los tipos de demostración (Fiallo, 2011) que realizados por los estudiantes caso de estudio y las dificultades asociadas a este proceso.
- *Dificultades o fortalezas ligadas a la unidad o ruptura cognitiva:* reportamos las dificultades o fortalezas encontradas al analizar la relación entre el proceso de argumentación y de demostración.
- *Otros resultados:* resaltamos conclusiones o apreciaciones fundamentadas en las observaciones del investigador, que no se relacionan directamente con los objetivos de la investigación, pero que son importantes para entender la escogencia de curso de precálculo como contexto de investigación.

Proceso de argumentación

El análisis de los datos nos muestra la dificultad de los estudiantes que participaron de la investigación para realizar procesos de argumentación deductivos necesarios previos al planteamiento de una conjetura, y es que todos los procesos analizados se desarrollaron con una estructura de la argumentación empírica, donde los estudiantes, recurriendo a la generalización de observaciones, de ejemplos, de datos o de procesos numéricos para el planteamiento de conjeturas.

La etapa de la argumentación previa al planteamiento de la conjetura, por ser la primera en la que se evidencia en el trabajo del estudiante en la solución de cualquier problema, nos permitió observar que una dificultad que presentan es abordar los problemas de variación y cambio como si fueran problemas invariantes, esto se debe a que en la actividad argumentativa de los estudiantes predomina el uso de los números enteros, números con uno o dos decimales, como valores estáticos, que impiden la consideración de los números como magnitudes variables, mostrando un bajo desarrollo del pensamiento numérico.

A pesar de las 15 sesiones del curso por las que debe pasar un estudiante, resolviendo como mínimo un problema diario, evidenciamos deficiencias en la apropiación de los conceptos de variación y aproximación y tendencia, enseñados en los primeros talleres, para abordar de otra manera los talleres finales del curso. Por ejemplos los problemas 1.1, 1.2, 1.3 que pretenden mostrar al estudiante y poner en práctica las operaciones básicas con números entre -1 y 1, no son usados para buscar una mejor aproximación en el problema de la caja (4.1) o son malinterpretados para general reglas o condiciones (5.1).

Proceso de demostración

En los problemas analizados en esta investigación encontramos solo estructuras de demostración empíricas: dos de tipo *empírico ingenuo inductivo* (1.2; 2.1), cuatro de tipo *experimento crucial basado en un ejemplo* (2.2; 2.5; 3.2; 5.1) y seis de tipo *experimento crucial constructivo* (1.1; 1.3; 2.3; 2.4; 4.1; 4.2), uno de tipo ejemplo genérico analítico (3.1).

Esto evidencia la falta de formalismo al realizar problemas de demostración enfocados al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes que están a punto de ingresar a la universidad y que por lo menos han cursado 11 años de escolaridad, regidos bajo los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998 y 2006).

Una dificultad para hacer demostraciones deductivas es que los estudiantes construyen generalizaciones incorrectas, plantean propiedades de ejemplos numéricos o se basan en los mismos ejemplos del proceso de argumentación para la construcción de la demostración, como veremos a continuación.

Dificultades o fortalezas ligadas a la unidad o ruptura cognitiva

Fiallo (2011) plantea cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva agrupando, en ellas diferentes logros o dificultades detectados, pero los procesos de esta investigación solo se enmarcan en dos de estas categorías:

Unidad cognitiva empírica: El análisis de los procesos de argumentación y de demostración nos permitió ver con detalle la forma cómo estos estudiantes utilizaron los ejemplos como único medio de convicción, debido al planteamiento de las conjeturas por medio de generalizaciones de

procesos empíricos o generalizaciones de ejemplos. Este resultado es una evidencia más a los resultados de Fiallo (2011) quien lo reportó como una dificultad que, en contextos de enseñanza, impide la aparición de procesos deductivos a menos de que se logre generar una ruptura referencial y estructural.

Acá es donde toma importancia el papel del docente dentro de un aula de clase, ya que identificar esta unidad cognitiva le permitiría realizar las refutaciones potenciales (preguntas adecuadas) que logren que los estudiantes superen dichas dificultades y puedan convertir los elementos empíricos utilizados en el planteamiento de la conjetura en propiedades, axiomas, teoremas matemáticos adecuados para construir la demostración deductiva que le valide el enunciado conclusión (Pedemonte, 2002; Fiallo, 2011).

Ruptura referencial – continuidad estructural inductiva: En el problema 2.5 encontramos que hay ruptura cognitiva que se debe a una ruptura en el sistema de referencia y a una continuidad estructural empírica. Para Fiallo (2011) la continuidad estructural representa una dificultad que impide realizar demostraciones deductivas. Pero nosotros queremos agregar otra dificultad que se puede sumar a este tipo de unidad o ruptura cognitiva que consiste en una ruptura referencial que no se da al convertir las generalizaciones en axiomas, definiciones o teoremas si no que se presenta por pasar de las generalizaciones de la argumentación a un caso particular o ejemplo en la construcción de la demostración.

En el problema 1.3, reportamos una ruptura cognitiva dentro de esta categoría que puede ser una fortaleza, pues en el planteamiento de la conjetura se realizó una generalización a partir de las observaciones realizadas por el estudiante en GeoGebra, la que permitió el planteamiento de un enunciado conclusión, pero en la construcción de la demostración el estudiante elaboró un experimento crucial constructivo que permitió este paso. Esta ruptura es una fortaleza que se

puede aprovechar, aunque se siga en lo empírico, ya que se evidencia una necesidad por parte del estudiante de utilizar operadores más sólidos para la construcción de la demostración.

Otros resultados

El haber estado durante todo el desarrollo del curso –vale señalar que el investigador ha participado en él desde el 2014, inicialmente, como auxiliar y después como profesor– permiten resaltar algunos aspectos del curso de precálculo:

- ✓ Destaca que el diseño de los talleres favorece la inclusión de actividades que promuevan los procesos de argumentación y de demostración pidiendo al estudiante que justifique, explique, argumente, conjeture o demuestre, actividades matemáticas que se encuentran en **negrita** para resaltar su importancia. Estas actividades van modificando las expectativas de los estudiantes pues, poco a poco, van comprendiendo que no se trata de encontrar la respuesta correcta. Valoran que son importantes las soluciones, pero también que se pueda explicar y analizar la manera en que se abordó.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, durante los talleres se insiste en la socialización como estrategia importante de la clase. Sin embargo, se llama la atención sobre el modo en que el profesor construye este espacio, en particular, las preguntas que formula para ayudar a los estudiantes a realizar conexiones entre los conceptos claves del taller y del curso mismo pues en ocasiones se convierte en un espacio de mostrar lo hecho y hablarlo a los demás sin un sentido matemático que oriente.

- ✓ Las actividades propuestas pueden ser vistas como una oportunidad para que los estudiantes ahonden en la comprensión del cambio y la variación, dos ejes conceptuales fundamentales para el futuro aprendizaje en Cálculo Diferencial (Ímaz y Moreno, 2010).

Esto se evidenció en el taller de Números y Operaciones, cuyos aprendizajes aportan significativamente al desarrollo de los demás talleres, como se evidenció en el proceso de argumentación del Problema 5.1.

- ✓ La metodología de resolución de problemas exige que el profesor dé un nuevo significado a su labor en el aula, lo cual incluye el reconocimiento de los esfuerzos de los estudiantes como oportunidades para aprender. Esto fue evidente en el análisis de los últimos talleres donde el estudiante se esforzaba por utilizar más que solo ejemplos para la validación de sus conjeturas, oportunidad que puede ser aprovechada por el profesor. Esto se evidenció en el Problema 3.1.
- ✓ De los Problemas 4.1 y 4.2 del taller “Área Máxima”, se puede concluir que algunos estudiantes tienen un razonamiento geométrico perceptivo, basado solamente en el estudio de las formas de las figuras y no en sus propiedades y que, a pesar de haber trabajado actividades de los números reales en los primeros talleres, en donde el número de cifras decimales es importante para realizar mejores aproximaciones y estudiar fenómenos de tendencia, los estudiantes siguen teniendo un pensamiento numérico pobre que les impide comprender los números reales.
- ✓ Una recomendación que surge para el curso de precálculo, en relación a favorecer la comprensión de los profesores respecto a los elementos utilizados por un estudiante mientras resuelve un problema de demostración, es capacitar a los profesores para comprender el Modelo de Pedemonte. Esto les daría herramientas claras sobre cómo realizar sus intervenciones al indagar sobre la actividad argumentativa de los estudiantes; en particular aportaría elementos para construir las refutaciones necesarias

para que el estudiante se dé cuenta de sus falencias y aprenda a utilizar elementos más deductivos en la resolución de problemas.

- ✓ Este trabajo nos permitió aportar características a la unidad cognitiva empírica que fortalecen los hallazgos de Fiallo (2011) y especificar la manera cómo son abordados los problemas de variación y cambio que requieren de la elaboración de procesos de argumentación y de demostración de estudiantes que están por emprender una carrera profesional.

Referencias bibliográficas

- Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 2009, 28(1), 73–84.
- Balacheff, N. (1988). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* Hodder & Stoughton (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.). *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). cK Φ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding of the 20th PME International Conference*, 113-120.
- Botello, (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. (Trabajo de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. Premisa. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 7 (23), 23-29.

- De Gamboa, G., Planas, N. y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Revista Suma*, 64, pp. 35-44.
- De Villiers, M. (2003). *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*, Emeryville, CA, Key Curriculum Press.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* (26), 15 - 29.
- Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *Proceeding of the 1th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1, 125 - 139.
- Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Los Países Bajos.
- Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Universitat de València, España.
- Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017): Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145-167.

- Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, (20).
- Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013): Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas, *Revista Integración*, 31(2), 181-205.
- Fiallo, J. y Parada, S. (en prensa). *Estudio dinámico del cambio y la variación*.
- Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998) : Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof Proceedings of the International. *Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 3 45-35 2.
- Harel, G. (2006). Mathematics education research, its nature, and its purpose: a discussion of Lester's paper. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(1), pp. 58-62.
- Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III (Vol. 7, pp. 234 - 283)*. Providence, EEUU: American Mathematical Society.
- Hernández, J. (2013). *Análisis del discurso de argumentación de estudiantes en la solución de una actividad matemática* (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.
- Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, pp. 3-21.
- Inglis, M. y Mejia-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática*, 10, 327-352.

- Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo: Las trampas del rigor*. México: Editorial Trillas.
- Ibañez, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *Uno*, 28, pp. 39-59.
- Knipping, C. (2008). A Method for Revealing Structures of Argumentations in Classroom Proving Processes. *ZDM International Journal of Mathematics Education*, 40(3) 427-441, doi: 10.1007/s11858-008-0095-y.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Mariotti, M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173 - 204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Marrades, R., Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87 - 125.
- Manrique, V. (2011). *Caracterización y clasificación de las formas de razonar usadas por un grupo de profesores en formación al resolver una actividad sobre ruletas cícloides*.(Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Molfino V. y Lezama, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Educación matemática*, 23(1), 37-61.

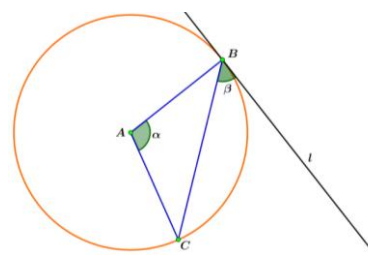
- Molfino, V. (2006), *Lugares geométricos: ¿cuál es su papel en la enseñanza de la demostración en geometría?*, Tesis de maestría inédita, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.
- Miyakawa, T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale*, (Tesis doctoral), Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.
- Ortegon, (2013). *Actividades de exploración y argumentación realizadas por estudiantes de la institución educativa Santa Ana del municipio de Soacha surgidas del estudio de las secciones cónicas a partir del concepto de excentricidad y con la mediación de herramientas tecnológicas* (Tesis de especialización), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Polya, G. (2011). *Cómo plantear y resolver problemas*. México DF, México, Trillas. México.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans le apprentissage des mathématiques*. (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(3), 313-348.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 40. 385-400.

- Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the $\text{ck}\Phi$ -enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.
- Recio, A. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Almería, pp. 27-44.
- Recio, A. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Córdoba.
- Sen, C. y Guler, G. (2015). *Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes*. Bozok University, Turkey
- Soler-Álvarez, N. (2013). *Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Toulmin, S.E., (1958). *The use of argument*, Cambridge University Press.

Apéndice A: Test diagnóstico

Nombre: _____ Cód: _____ Fecha: _____

1. En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son radios de la circunferencia, α es el valor del ángulo central, $\overline{BC}$ es una cuerda y l es una recta tangente a la circunferencia que pasa por **B**. Se conjetura que *el ángulo α es el doble del ángulo β que se forma entre la cuerda y la recta tangente.*



A continuación se presentan seis razonamientos que dieron algunos estudiantes para argumentar la conjetura. ¿Con cuál de ellos te identificas más? ¿Por qué?

Estudiante 1 Al medir α y β se tiene que $\alpha = 104^\circ$ y $\beta = 52^\circ$. Por lo tanto el ángulo α mide el doble del ángulo β.	Estudiante 2 Dejando fijo el punto B y al mover el punto C sobre la circunferencia hasta que la cuerda sea un diámetro se tiene que $\alpha = 180^\circ$; por lo que tendríamos $\beta = 90^\circ$, porque l es perpendicular a $\overline{AB}$. Entonces α mide el doble de β.
Estudiante 3 El triángulo ABC es Isosceles, por lo que el complemento del ángulo β es $\frac{180-\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, por ser l la tangente que pasa por el punto B. Entonces, $\beta = 90 - \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = 90 - 90 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2\beta = \alpha$. Por lo tanto α es el doble de β.	Estudiante 4 Siempre que se mueva el punto C sobre la circunferencia el valor del ángulo α cambia y de la misma forma cambia el ángulo β. Por lo tanto el valor de α es el doble del valor de β.

Estudiante 5 Cuando $\alpha = 90^\circ$, $\overline{AC}$ es paralelo a l y perpendicular a $\overline{AB}$. Al trazar una recta m perpendicular a $\overline{AC}$ por el punto C y hallar el punto D de intersección entre las dos rectas m y l se forma el cuadrado ACDB, donde $\overline{BC}$ es la diagonal del cuadrado, por lo que el ángulo β mide 45°. Por lo tanto α es el doble de β.	Estudiante 6 Al medir α y β se tiene que $\alpha = 104^\circ$ y $\beta = 52^\circ$, entonces $m\angle CBA = 90^\circ - \beta = 38^\circ$. Al trazar la recta p que pasa por A y B y hallar el punto D de intersección de p con la circunferencia se tiene que $m\angle CAD = 76^\circ$, que es el suplemento de α y ángulo central del ángulo CBA. Entonces, $m\angle CAD = 180^\circ - \alpha = 2m\angle CBA$. $\angle CAD = 180^\circ - \alpha = 2(90^\circ - \beta) \Rightarrow$ $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow$ $-\alpha = -2\beta \Rightarrow$ $\alpha = 2\beta.$ Por lo tanto α es el doble de β.
---	--

2. ¿A qué es igual la suma de los n primeros números impares? Plantea una conjetura y demuéstala.

Apéndice B: Taller 1



Curso de Precálculo
Escuela de Matemáticas

NÚMEROS Y OPERACIONES

Actividad 1

1.1 Explorando

Observa los puntos a, b, c, d, e, f, g y h de la siguiente figura.



Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot b$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el punto más cercano a $a \cdot d$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el punto más cercano a $\frac{a}{b}$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el punto más cercano a $\sqrt{e}$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el punto más cercano a $\frac{1}{f}$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el punto más cercano a $\sqrt{h}$? ¿Por qué?

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T1_Act-2.1.ggb** de GeoGebra y explora.

- ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b$?, ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.
- ¿Qué pasa con el valor de $a \cdot b$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$?, ¿si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.





Actividad 3

3.1 Abre el archivo **T1_Act-3.1.ggb** de GeoGebra. Mueve el punto x . Resuelve las siguientes preguntas:

- ¿Qué valores toma $\frac{1}{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué valores toma $\frac{1}{x}$, cuando x varía entre -1 y 0? ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 0 por la izquierda? ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a -1 por la derecha? **Justifica** tus respuestas.
- ¿Qué valores toma $\frac{1}{x}$ cuando x varía entre 0 y 1? ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 0 por la derecha? ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda? **Justifica** tus respuestas.
- ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 0? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a $-\infty$? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a ∞ ? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué relación existe entre x y $\frac{1}{x}$? **Justifica** tu respuesta.

3.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 4

4.1 Abre el archivo **T1_Act-4.1.ggb** y explora. Mueve el punto x y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre -20 y 20? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué valores toma $\sqrt{x}$ cuando x varía entre 0 y 1? ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima a 0 por la derecha? ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda? **Justifica** tus respuestas.
- En el intervalo $[0, 1)$, ¿es mayor $\sqrt{x}$ o x ? **Justifica** tu respuesta.
- En el intervalo $(1, \infty)$, ¿es mayor $\sqrt{x}$ o x ? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x tiende a ∞ ? **Justifica** tus respuestas.

4.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

**Actividad 5**

Abre el archivo **T1_Act-5.ggb** y explora. Mueve los puntos a y b . Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa con el valor de $\frac{a}{b}$, si $0 < a < 1$ y $0 < b$?, ¿si $-1 < a < 0$ y $0 < b$? En los dos casos anteriores, ¿cuándo $\frac{a}{b}$ es mayor? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.
- ¿Qué pasa con el valor de $\frac{a}{b}$, si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$?, ¿si $-1 < a < 0$ y $-1 < b < 0$? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.
- ¿Qué pasa con el valor de $\frac{a}{b}$, si $0 < a < 1$ y $-1 < b < 0$? **Escribe** tus conjeturas y **justificalas**.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Actividad 1

1.1 En un triángulo rectángulo un cateto mide 6 cm y el ángulo adyacente a este cateto mide 32° .

- ¿Cuál es la medida del otro cateto y de la hipotenusa? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 32° y medidas de sus catetos e hipotenusa diferentes? **Justifica** tu respuesta.

1.2 En un triángulo rectángulo ABC la medida de la hipotenusa es el doble de la medida de uno de sus catetos.

- ¿Cuáles son las medidas de los catetos y de la hipotenusa? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de la hipotenusa y los catetos y con iguales medidas de ángulos que cumplan la condición inicial? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de la hipotenusa y los catetos y diferentes medidas de ángulos que cumplan la condición? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué tienen en común todos los triángulos que cumplen la condición? **Justifica** tu respuesta.

1.3 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T2_Act-2.ggb** y halla las razones entre los lados del triángulo ABC (Usa la herramienta razón ubicada en el lado derecho del menú y señala los vértices de cada lado del triángulo para ir obteniendo las respectivas razones).

- ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo α entre 0° y 90° ? **Justifica** tu respuesta.



- b) ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando **no** varía el ángulo α ? **Justifica** tu respuesta.
- c) ¿Qué valores toma cada una de las razones a medida que varía el ángulo α entre 0° y 90° ?
- d) **Plantea** una conjetura respecto a la variación de los valores que toma cada razón. Explica **por qué** son verdaderas tus conjeturas.

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3

3.1 Abre el archivo **T2_Act-2.ggb** y muestra el ángulo β .

- a) Calcula las razones trigonométricas del ángulo β .
- b) Nombra cada razón con su respectivo nombre ($\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$, $\text{tan } \beta$, $\text{cot } \beta$, $\text{sec } \beta$, $\text{csc } \beta$).
- c) ¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos α y β ? **Plantea** una conjetura al respecto. Explica **por qué** es verdadera la conjetura.
- d) ¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo α y el ángulo β ? **Plantea** conjeturas al respecto. Explica **por qué** son verdaderas las conjeturas.
- e) ¿Es verdad que $\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(90^\circ - \alpha)$? Si tu respuesta es afirmativa **demuéstrala**, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).
- f) ¿Es verdad que $\text{cos}(\alpha) = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$? Si tu respuesta es afirmativa **demuéstrala**, en caso contrario da un contraejemplo.

3.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 4

- a) ¿Qué significa que $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$? **Justifica** tu respuesta.
- b) ¿Es posible que el coseno de un ángulo sea $\frac{3}{2}$? **Justifica** tu respuesta.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO

Actividad 1

1.1 Responde las siguientes preguntas:

- ¿Es verdad que $\cos(\alpha) = \sin(\alpha - 90)$ para todo ángulo α entre 0° y 360° ? si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa).
- ¿Es verdad que $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - 90)$ para todo ángulo α entre 0° y 360° ? si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa).

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T3_Act-2.1.ggb**, mueve el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia y ten en cuenta la siguiente información.

Observa que el ángulo α está determinado por el eje positivo de las x , que llamaremos *lado inicial del ángulo*, y la semirrecta OP , que llamaremos *lado final del ángulo*. Estos ángulos los llamaremos **ángulos en posición normal**. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado final del ángulo α gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que el ángulo es *positivo* y si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, decimos que es *negativo*.

Si α es un ángulo en posición normal, $P(x, y)$ es cualquier punto sobre su lado final, diferente de $(0, 0)$, y $r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces las razones trigonométricas para el ángulo α se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{y}{r}; & \cos(\alpha) &= \frac{x}{r}; & \tan(\alpha) &= \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ \csc(\alpha) &= \frac{r}{y}, y \neq 0; & \sec(\alpha) &= \frac{r}{x}, x \neq 0; & \cot(\alpha) &= \frac{x}{y}, y \neq 0 \end{aligned}$$



Curso de Precálculo Escuela de Matemáticas

- Analiza los signos de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ y $\sec(\alpha)$ en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Plantea una **conjetura** al respecto y **explica por qué** es verdadera.
- ¿Qué valores toma cada una de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ y $\sec(\alpha)$ a medida que varía el ángulo α ? Escribe en tu hoja de trabajo una **conjetura** de lo encontrado y **explica por qué** es verdadera.
- ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ y $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ? **Explica** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.
- ¿A qué tienden cada una de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ y $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α tiende a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ? **Explica** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3

3.1 Abre el archivo **T3_Act 3.1.ggb** y mueve el punto P en sentido positivo.

- ¿Qué relación existe entre $\sen(\alpha)$ y $\sen(-\alpha)$? **Escribe** una conjetura de la relación encontrada. **Explica** por qué es verdadera.
- ¿Qué relación existe entre $\cos(\alpha)$ y $\cos(-\alpha)$? **Escribe** una conjetura de la relación encontrada. **Explica** por qué es verdadera.

3.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo

Actividad 4

4.1 Abre el archivo **T3_Act 4.1.ggb** y mueve P en sentido positivo.

- Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos α , $\alpha - 90^\circ$, $90^\circ - \alpha$. **Demuéstralas** utilizando propiedades matemáticas.
- ¿Qué relación existe entre $\cos(\alpha)$ y $\sen(\alpha - 90^\circ)$? **Escribe** en la hoja de trabajo una conjetura de la relación encontrada. **Explica por qué** es verdadera.
- ¿Qué relación existe entre $\sen(\alpha)$ y $\cos(\alpha - 90^\circ)$? **Escribe** en la hoja de trabajo una conjetura de la relación encontrada. **Explica por qué** es verdadera.

4.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

**Actividad 5**

- a) Sin usar la calculadora o GeoGebra de un valor aproximado de $\sin(10^\circ)$.
- b) Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas si se sabe que $\cos(\alpha) = \frac{-4}{5}$ y $\tan(\alpha)$ es positiva. ¿Cuál es el valor del ángulo α ? **Justifica** tus respuestas.
- c) Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas si se sabe que $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor del ángulo α ? **Justifica** tus respuestas.
- d) ¿Qué significa que $\cos(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?
- e) Si $P(x, y)$ es un punto del plano cartesiano en donde $x > 0$, $y < 0$, ¿cuáles son los posibles valores que toman α y $\tan(\alpha)$? **Justifica** tu respuesta.



Apéndice E: Taller 4



MATEMÁTICAS Y REALIDAD

FILTRACIÓN DE MEDICAMENTO

Actividad 1

1.1 Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

- a) ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.
- b) ¿Y si hubiera tomado la medicina durante un año? **Justifica** tu respuesta.
- c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? **Justifica** tu respuesta.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo de GeoGebra **T4_Act-2.1.ggb**. Mueve el deslizador n con la flecha derecha del teclado hasta llegar a 50.

- a) ¿Qué representa el punto P? **Explica** tu respuesta.
- b) Utiliza la gráfica para **explicar** lo que sucede en el nivel de medicamento.
- c) Encuentra una fórmula que modele algebraicamente el problema. **Explica** cómo la hallaste.
- d) ¿A qué valor tiende la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? **¿Por qué?**

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo

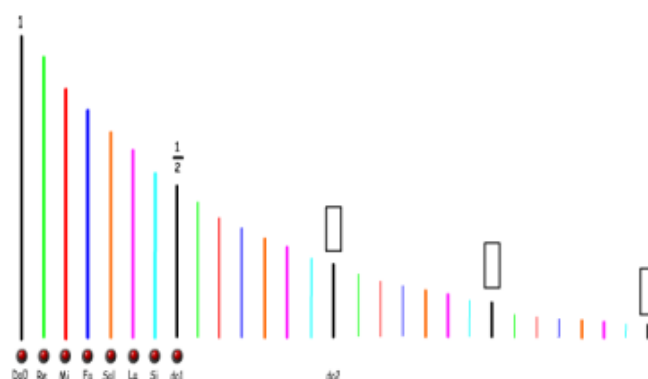


CUERDAS VIBRANTES: Problema de Octavas

Actividad 3

Antes del problema, explora el archivo *Flash Player* “Cuerdas Vibrantes” y entérate por qué Pitágoras tenía tanto de músico como de matemático.

3.1 Si un piano tiene 7 octavas o frecuencias equivalentes, entonces, ¿cuáles serían las fracciones de la cuerda correspondientes a cada octava? Completa las octavas para saberlo.



- a) ¿Qué pasa si continuamos fraccionando a la mitad la longitud de la cuerda original?
Explica tu respuesta.
- b) Teniendo en cuenta la simulación, la relación entre la longitud de la cuerda y su frecuencia sería de:
- a) Menor longitud-menor frecuencia
 - b) Menor longitud-mayor frecuencia
 - c) Mayor longitud-mayor frecuencia
 - d) Mayor longitud-menor frecuencia
- c) ¿Cuál sería la “última” fracción de la cuerda que podríamos hallar? Para dar respuesta a esta pregunta completa la tabla.

Número de fraccionamientos de la cuerda	0	1	2	3	4									
Fracción	1	1/2	1/4											

3.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo



 **3.3** Con el apoyo de GeoGebra, sigue los pasos que se indican:

- En la hoja de cálculo realiza una tabla ampliando el número de fraccionamientos (mínimo 50 datos) para responder las preguntas (utiliza 15 cifras decimales de redondeo y una escala adecuada para visualizar los datos en la *Vista Gráfica*):
 - ¿Cuál sería la “última” fracción de la cuerda que podríamos hallar?
 - ¿Has encontrado una “última” fracción? **Justifica**.
- Utiliza la herramienta de *Crear lista de puntos* de la Hoja de Cálculo para ubicar los datos de la tabla en el plano cartesiano de la Vista Gráfica.
- ¿A qué valor tiende la fracción cuando el número de fraccionamientos tiende a infinito? **Explica** tu respuesta.
- ¿Encuentra una expresión algebraica que modele el fenómeno de fraccionamientos de la cuerda? **Explica** tu respuesta.

3.4 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo

Actividad 4

Responde las siguientes preguntas:

- ¿A qué valor tiende la suma de todas las longitudes de los fraccionamientos de la cuerda? Es decir, $1L + \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L + \frac{1}{8}L + \dots$ **Explica** tu respuesta.



- ¿Terminaríamos el proceso de adicionar los fraccionamientos de la cuerda? ¿Por qué?

Apéndice F: Taller 5



INTERDEPENDENCIA ENTRE VARIABLES



Actividad 1

1.1 Abre el archivo **T5_Act-1.1.ggb**. Mueve el punto A en el intervalo $[-10, 10]$ y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa el punto P? **Justifica** tu respuesta.
- Traza el Rastro del punto P [clic derecho sobre el punto P y escoge la opción *Rastro*] ¿Qué representa el rastro del punto P? **Justifica** tu respuesta.
- Halla el Lugar Geométrico del punto P cuando varía el punto A [Abre el Menú del cuarto botón, escoge la opción *Lugar Geométrico*, haz clic en el punto P y luego en el punto A] ¿Qué representa el lugar geométrico del punto P cuando varía el punto A? **Justifica** tu respuesta.
- ¿En qué se diferencian el *Rastro* del *Lugar Geométrico*? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué relación hay entre la ordenada (y) y la abscisa (x) del punto P? **¿Por qué?**
- Representa algebraicamente la interdependencia entre la ordenada y la abscisa del punto P. ¿Cómo se llama esa relación de interdependencia? **¿Por qué?**
- Introduce en la barra de entrada de GeoGebra la expresión algebraica que hallaste. ¿Cuál es su gráfica? ¿Qué representa esta gráfica? **¿Por qué?**
- En el menú *Vista* escoge *Vista Algebraica* y *Hoja de Cálculo*. Registra los valores de P cuando varía A [clic derecho en el punto P, escoge la opción *Registro en Hoja de Cálculo* y anima el punto A]. ¿Qué representa la tabla en la Hoja de Cálculo? **Explica.**
- ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica, la gráfica, el rastro, el lugar geométrico y la tabla? **¿Qué representan? Justifica** tus respuestas.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T5_Act-2.1.ggb**. Mueve el punto A sobre toda la pantalla con las flechas derecha e izquierda del teclado y responde las siguientes preguntas:

- En la función visualizada, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? **¿Por qué?**





Curso de Precálculo Escuela de Matemáticas

- b) ¿Qué valores toma la variable independiente? ¿Qué valores toma la variable dependiente? **¿Por qué?**
- c) ¿Qué pasa cuando $x = 0$? **Justifica** tu respuesta.
- d) ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 0? **Justifica** tu respuesta.
- e) ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a $-\infty$? **Justifica** tu respuesta.
- f) ¿A qué tiende $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a ∞ ? **Justifica** tu respuesta.
- g) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.
- h) ¿Qué representan los ejes x e y para la función $f(x) = \frac{1}{x}$? **Justifica** tu respuesta.

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3

3.1 Abre el archivo **T5_Act-3.1.ggb**. Mueve el punto A en el intervalo $[-10, 10]$ y responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué representa el punto P? **Justifica** tu respuesta.
- b) Traza el Rastro del punto P ¿Qué representa? **Justifica** tu respuesta.
- c) Halla el Lugar Geométrico del punto P cuando varía el punto A ¿Qué representa? **Justifica** tu respuesta.
- d) ¿En qué se diferencian el rastro del lugar geométrico? **Justifica** tu respuesta.
- e) ¿Qué relación hay entre la ordenada (y) y la abscisa (x) del punto P? **¿Por qué?**
- f) Representa algebraicamente la interdependencia entre la ordenada y la abscisa del punto P. ¿Cómo se llama esa relación de interdependencia? **¿Por qué?**
- g) Introduce en la barra de entrada de GeoGebra la expresión algebraica que hallaste. ¿Cuál es su gráfica? ¿Qué representa esta gráfica? **¿Por qué?**
- h) En el menú *Vista* escoge *Vista Algebraica* y *Hoja de Cálculo*. Registra los valores de P cuando varía A. ¿Qué representa la tabla en la Hoja de Cálculo? **Explica**.
- i) ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica, la gráfica, el rastro, el lugar geométrico y la tabla? **¿Qué representan? Justifica** tus respuestas.

3.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.





Actividad 4

4.1 Abre el archivo **T5_Act-4.1.ggb**. Mueve el punto A sobre toda la pantalla con las flechas derecha e izquierda del teclado. Responde las siguientes preguntas:

- En la función visualizada, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente? **¿Por qué?**
- ¿Qué valores toma la variable independiente? ¿Qué valores toma la variable dependiente? **¿Por qué?**
- ¿Qué pasa cuando $x < 0$? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x se aproxima a 0? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende $\sqrt{x}$ cuando x tiende a ∞ ? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

4.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

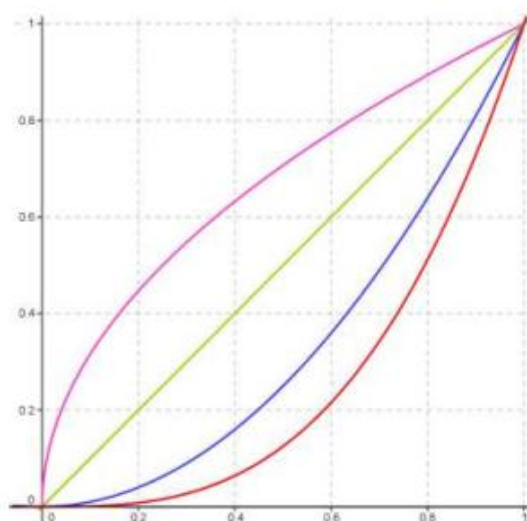


Actividad 5

5.1 En la Figura de abajo se muestran las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad b(x) = x.$$

Relaciona la función que corresponde a cada gráfica y **justifica**.



$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^3$$

$$h(x) = x^2$$

$$b(x) = x$$



**5.2** Responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las funciones anteriores crece más rápido cuando $x \rightarrow \infty$? **Explica.**
- b) Halla el dominio y el recorrido de cada función. **Justifica** tus respuestas.
- c) ¿Se puede afirmar que $g(x) < h(x) < b(x) < f(x)$ para todo su dominio? **Justifica** tus respuestas.





TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Actividad 1

1.1 En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4$.

Explica tu procedimiento.

1.2 **Discute** con tus compañeros y el profesor tu trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T6_Act.2.1**, introduce la función $f(x) = \sin(x)$ y continúa con las siguientes indicaciones:

a) En la opción **representación de $f(x) + k$ a partir de $f(x)$** .

- i. Selecciona $k > 0$, ¿qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- ii. Desmarca la selección anterior (para obtener un solo deslizador y una sola representación gráfica en la pantalla debe elegir *una opción solamente*), ahora marca $k < 0$. ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- iii. Introduce otras funciones (al menos dos) y analiza los anteriores procedimientos.
- iv. Elabora y **escribe** una conjetura de lo que le sucede a la representación de la función $f(x) + k$, cuando $k \in \mathbb{R}$ a partir de la gráfica de $f(x)$. **¿Por qué** es verdadera la conjetura?

b) En la opción **representación de $f(x + k)$ a partir de $f(x)$** .

- i. Reproduce las opciones i-iii del inciso anterior. No olvides desmarcar la selección después de terminar con cada opción.
- ii. Elabora y **escribe** una conjetura de lo que le sucede a la representación de la función $f(x + k)$, cuando $k \in \mathbb{R}$ a partir de la gráfica de $f(x)$. **¿Por qué** es verdadera la conjetura?

c) En la opción **representación de $f(kx)$ a partir de $f(x)$** .

- i. Selecciona $k > 1$, ¿qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador? **¿Por qué?**

- ii. Desmarca la selección anterior (para obtener un solo deslizador y una sola representación gráfica en la pantalla debe elegir *una opción solamente*), ahora marca $k < -1$. ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
 - iii. Sigue con las otras opciones $k = -1$, $-1 < k < 1$, siempre desmarcando la selección anterior. **Describe** lo que le sucede a la representación gráfica de la función al manipular el deslizador en cada caso. **Justifica** tus respuestas.
 - iv. Introduce otras funciones (al menos dos) y analiza los anteriores procedimientos.
 - v. Elabora y escribe una conjetura de lo que le sucede a la representación de la función $f(kx)$, cuando $k \in \mathbb{R}$ a partir de la gráfica de $f(x)$. **¿Por qué** es verdadera la conjetura?
- d) Realiza el mismo procedimiento elaborado en el inciso a) con las opciones de **representación de $k * f(x)$ a partir de $f(x)$:**
- i. Reproduce las opciones i-iv del inciso a). No olvides desmarcar la selección después de terminar con cada opción.
 - ii. Escribe una conjetura de lo que le sucede a la representación de la función $kf(x)$, cuando $k \in \mathbb{R}$ a partir de la gráfica de $f(x)$. **¿Por qué** es verdadera la conjetura?

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3

3.1 Abre el archivo **T6_Act-3.1.ggb** introduce la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Explora las ocho opciones de transformaciones que existen con sus respectivos deslizadores y contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **extensión horizontal** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- b) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges hacer una **contracción horizontal** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- c) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **traslación horizontal** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- d) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando usas la opción **reflexión a través del eje x**? **¿Por qué?**
- e) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **extensión vertical** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**



- f) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **contracción vertical** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- g) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **traslación vertical** y manipulas el deslizador? **¿Por qué?**
- h) ¿Qué ocurre con la representación gráfica de la función cuando eliges la opción **reflexión a través del eje y?** **¿Por qué?**

3.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 4

4.1 En el archivo **T6_Act.2.1** escribe la función $f(x) = x^2$. En la barra de entrada de *Vista Gráfica* escribe $(-3,4)$ (aparecerá el punto en el plano cartesiano).

- a) Aplica la(s) transformación(es) pertinente(s) para que la representación gráfica de la función pase por el punto $(-3,4)$.
- b) **Escribe** la(s) expresión(es) algebraicas que representan la función con la respectiva transformación.
- c) **Comprueba** si con la expresión algebraica obtenida en el inciso anterior puedes obtener el punto dado.

4.2 Representa la gráfica de la función $f(x) = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{4-x}$ en tu hoja de trabajo.

Apéndice H: Taller 7



Curso de Precálculo
Escuela de Matemáticas

ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

Actividad 1

1.1 La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.



Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo.

- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.
- Realiza un gráfico con la información suministrada en la tabla anterior.
- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T7_Act-2.1.ggb** y realiza las siguientes actividades.

- En la *Vista Gráfica* de GeoGebra, representa la gráfica considerada en la Actividad 1.
- Con los datos de la Hoja de Cálculo, realiza el *Análisis de Regresión de dos Variables*.
- Compara la recta que construiste en la Actividad 1 con la función de ajuste que escogiste. ¿Cuál función permite hacer una mejor estimación para responder a las preguntas a) y b) de la actividad anterior? **¿Por qué?**
- A partir de los resultados anteriores, responde nuevamente las preguntas a) y b) de la Actividad 1. **Compara** tus respuestas con las obtenidas inicialmente.

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3

3.1 En un laboratorio de física, se realizó un experimento que consistió en lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba. En la siguiente tabla se muestran las alturas registradas en diferentes momentos.

Tiempo (seg)	Altura (cm)
1	48,3
2	79,5
3	107,4
4	120,8
5	127,7
6	124,9
7	113,5
8	84,5
9	55,5
10	10,7



3.2 Abre el archivo T7_Act.3.1.ggb

- Grafica los datos presentados en la Hoja de Cálculo correspondientes a la tabla anterior (escoge una escala adecuada para visualizar los datos en la *Vista Gráfica*).
- Explora con cada una de las opciones de regresión y escoge el modelo que mejor se ajusta para representar la situación. **Justifica** tu elección.
- ¿Cuál fue el alcance máximo del proyectil? **¿Por qué?**
- ¿Cuánto tiempo demoró el proyectil en el aire? **¿Por qué?**

3.3 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 4

4.1 En la Tabla se presentan datos de la cantidad de población mundial existente en algunos años del siglo XX y XXI.

No. DATO	AÑO	POBLACIÓN
1	1900	1650
2	1910	1750
3	1920	1860
4	1930	2070
5	1940	2300
6	1950	2518
7	1955	2755
8	1960	2982
9	1965	3334
10	1970	3692
11	1975	4068
12	1980	4434
13	1985	4830
14	1990	5263
15	1995	5674
16	2000	6070
17	2005	6453
18	2008	6709
19	2010	6854
20	2011	7000

4.2 Abre el archivo **T7_Act-4.1.ggb**

- Grafica los datos presentados en la Hoja de Cálculo correspondientes a la tabla anterior (escoge una escala adecuada para visualizar los datos en la *Vista Gráfica*).
- Explora con cada una de las opciones de regresión y escoge el modelo que mejor se ajusta para representar la situación. **Justifica** tu elección.
- ¿Cuál será la población en el año 2017? **¿Por qué?**
- ¿Cuál será la población en el año 2050? **¿Por qué?**



FUNCIONES Y REALIDAD

Actividad 1

1.1 En Bucaramanga, en un *minutero* de telefonía celular se cobra \$100 por minuto o fracción.

- ¿Cuánto cuesta una llamada de 1:01 *min*, 2:99 *min*, 4:00 *min*, 5:36 *min*, 9:5 *min*, 23:485 *min*, 1 h15min32seg?
- Halla la función que representa la interdependencia entre el costo de la llamada y el tiempo.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



1.3 Abre el archivo **T8_Act-1.3.ggb**. Mueve con la tecla derecha el punto T y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa el rastro del punto P? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Qué representa el lugar geométrico del punto P cuando varía el punto T? **Justifica** tu respuesta.
- Representa algebraicamente la interdependencia entre el tiempo transcurrido y el costo de la llamada. **Escribe** la fórmula en la barra de entrada. ¿Coinciden la representación gráfica de la función con el rastro y el lugar geométrico? **¿Por qué?**
- ¿A qué tiende la función cuando t se aproxima a cada entero? **Justifica** tu respuesta.
- ¿A qué tiende la función cuando t tiende a ∞ ? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

1.4 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2



2.1 Abre el archivo **T8_Act-2.1.ggb** que simula el costo de una carrera de taxi en función de los kilómetros recorridos. Anima o mueve el punto T.



- a) ¿Qué representa el punto C?
- b) ¿Qué representa la gráfica de la Vista Gráfica?
- c) ¿Qué representa la tabla de la Hoja de Cálculo?

2.2 Busca información de la distancia entre los lugares indicados y determina el costo de la carrera según los datos de la simulación. Para cada caso **explica** tu respuesta.

- a) De la UIS a Piedecuesta.
- b) De la UIS al Aeropuerto de Palonegro.
- c) De la UIS a tu casa.

2.3 Representa algebraicamente la interdependencia entre los kilómetros recorridos y el costo de la carrera de taxi. **Escribe** la fórmula en la barra de entrada. ¿Coinciden la representación gráfica con los datos suministrados por la simulación? **¿Por qué?**

2.4 A qué tiende la función cuando el número de kilómetros recorridos:

- a) Se aproxima a 3,6. **Justifica** tu respuesta.
- b) Se aproxima a 4. **Justifica** tu respuesta.
- c) Se aproxima a cada entero. **Justifica** tu respuesta.

2.5 ¿A qué tiende la función cuando k tiende a ∞ ? **Justifica** tu respuesta.

2.6 ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

2.7 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3

En una empresa de mensajería, el costo por enviar un paquete es de \$7.900 por el primer kilo, y \$2.100 adicionales por cada kilo o fracción de éste.

- a) ¿Cuánto cuesta enviar un paquete de 1.2 kilos? ¿5.9 kilos? ¿7 kilos? ¿10.5 kilos? **Explica** tu respuesta.
- b) Halla la expresión algebraica que representa el costo del envío de un paquete en función del peso. **Explica** tu respuesta.



FUNCIONES Y REALIDAD

Actividad 1

1.1 Según datos suministrados por el DANE, en 2014 la población colombiana fue de 47'661.790. Se estima que el promedio de crecimiento sea del 1% aproximadamente.

- ¿Cuántos colombianos habrán finalizando este año? ¿En 2020? ¿En 2050? **Explica** tus respuestas.
- Halla la función que representa la interdependencia entre el año y la población colombiana. **Explica** tu procedimiento.
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Explica** tu respuesta.
- ¿Cuántos colombianos habrán finalizando junio de este año? ¿Cuántos a mediados de octubre de este año? **Explica** tus respuestas.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 2

2.1 Los *100 metros planos* es una prueba de atletismo que consiste en una carrera en la que se tiene que recorrer cien metros planos libres de todo obstáculo con la mayor rapidez posible. Se considera, en general, como la competición de carreras de velocidad más importante. A continuación se muestran los mejores tiempos obtenidos por los hombres en las últimas Olimpiadas.

Atenas 1896	 Tom Burke (12.0)
París 1900	 Frank Jarvis (11.0)
Saint Louis 1904	 Archie Hahn (11.0)
Londres 1908	 Reggie Walker (10.8)
Estocolmo 1912	 Ralph Craig (10.8)
Amberes 1920	 Charlie Paddock (10.6)
París 1924	 Harold Abrahams (10.6)
Ámsterdam 1928	 Percy Williams (10.8)
Los Angeles 1932	 Eddie Tolan (10.3)
Berlín 1936	 Jesse Owens (10.3)

Londres 1948	 Harrison Dillard (10.3)
Helsinki 1952	 Lindy Remigino (10.4)
Melbourne 1956	 Bobby Joe Morrow (10.5)
Roma 1960	 Armin Hary (10.2)
Tokio 1964	 Bob Hayes (10.0)
México 1968	 Jim Hines (9.95)
Munich 1972	 Valeri Borzov (10.14)
Montreal 1976	 Hasely Crawford (10.06)
Moscú 1980	 Allan Wells (10.25)
Los Ángeles 1984	 Carl Lewis (9.99)
Seúl 1988	 Carl Lewis (9.92)
Barcelona 1992	 Linford Christie (9.96)
Atlanta 1996	 Donovan Bailey (9.84)
Sídney 2000	 Maurice Greene (9.87)
Atenas 2004	 Justin Gatlin (9.85)
Beijing 2008	 Usain Bolt (9.69)
Londres 2012	 Usain Bolt (9.63)
Río de Janeiro 2016	 Usain Bolt (9.81)

- De acuerdo a los datos de la tabla, halla un modelo que represente la marca en función del año. **Explica** tu procedimiento.
- Según el modelo obtenido, ¿cuál será la marca en los próximos Olímpicos? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Cuál será la marca en el 2048? **Justifica** tu respuesta.
- ¿Existe algún límite para el récord? **Justifica** tu respuesta.

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 3

Una población de bacterias comienza con 1000 bacterias y se triplica cada dos horas. Halla la función que representa el número de bacterias en función del tiempo.



VIAJE EN EL VENTILADOR

Actividad 1

1.1 Imagina una mosca que reposa en el extremo de un aspa de un ventilador el cual gira en sentido antihorario. Suponga que se trazan una recta horizontal y una vertical por el centro del ventilador y la mosca se ubica exactamente a 2 dm a la derecha del centro, antes de que éste empiece a girar.



- a) **Describe** cómo varía la distancia vertical de la mosca respecto a la recta horizontal, cuando el ventilador empieza su recorrido.
- b) **Crea** una gráfica que muestre cómo varía la distancia vertical de la mosca a medida que la mosca viaja en el ventilador.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Realiza las siguientes actividades:

- a) Según los datos obtenidos, ¿cuál es la distancia vertical máxima y mínima que alcanza la mosca?, ¿cuál es el recorrido máximo que realiza la mosca en un viaje por el ventilador?
- b) Elabora una tabla de valores para una vuelta completa. **Explica** tus procedimientos.
- c) Crea la lista de puntos en la *Vista Gráfica* de GeoGebra. ¿La distribución del conjunto de puntos se parece a la gráfica creada en la Actividad 1.1? **Explica** las similitudes y diferencias.
- d) Utiliza el *Análisis de Regresión* para modelar una función que mejor se ajuste a los datos estimados. ¿Cuál es la función que mejor se ajusta? **¿Por qué?**
- e) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3



3.1 Abre el archivo **T10_Act-3.1.ggb**. Realiza las siguientes actividades:

- Desliza el punto P en sentido positivo y observa el rastro que deja la mosca respecto a la distancia vertical en su viaje en el ventilador.
- Introduce la función que encontraste en 2.1.d y compárala con la actual; ¿coinciden las dos gráficas?, ¿observas diferencias? **Explica** tus respuestas.
- ¿Qué pasa con la función si la mosca da una vuelta y media? ¿Qué sucede si da dos vueltas? ¿Y cinco? ¿Podrás predecir el comportamiento de la función si el ventilador no deja de dar vueltas? **Explica** tus respuestas.
- ¿Qué pasa si el movimiento es en sentido horario? **Explica** tu respuesta.
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

3.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 4

4.1 Abre el archivo **T10_Act-4.1.ggb** y desliza el punto P en sentido positivo.

- ¿Qué función representa? **¿Por qué?**
- ¿Qué pasa si el movimiento es en sentido negativo? **Explica** ampliamente.
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? **Justifica** tu respuesta.

4.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados obtenidos. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad 5

Una persona pasea en una rueda de la fortuna que tiene 3 metros de radio y que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la perspectiva de un observador. El punto más bajo de la rueda está a un metro del suelo.

Expresa la altura h a la que se encuentra la persona con respecto al suelo en función del ángulo θ que forma la línea que va del centro de la rueda a la posición de la persona con respecto a la horizontal.



Apéndice L: Taller 11



Curso de Precálculo
Escuela de Matemáticas

RECIPIENTES

Actividad 1

1.1. Toma una hoja de tamaño carta y sin recortar forma un cilindro sin tapas

- a) Considerando el largo como el lado de mayor longitud ¿Cómo se obtiene el mayor volumen: formándolo a lo largo o a lo ancho de la hoja? **Justifica** tu elección.
- b) ¿Qué se puede conjeturar de cualquier hoja rectangular? **Explica** tu respuesta.
- c) ¿Qué se puede conjeturar de una hoja cuadrada? **Explica** tu respuesta.
- d) **Compara** tus resultados con un compañero y **demuéstrale** que tus conjeturas son verdaderas.

1.3 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo **T11_Act-2.1** que simula el llenado de un cono con agua.

- a) ¿Qué magnitudes varían a medida que va llenándose el cono? **¿Por qué?**
- b) ¿Qué valores toman las magnitudes variables? **Justifica** tu respuesta.
- c) ¿Qué relación existe entre el radio y el nivel del agua? **Justifica** tu respuesta.
- d) Halla la función que representa la interdependencia entre el nivel del agua y el volumen. **Explica** tu procedimiento.

2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3

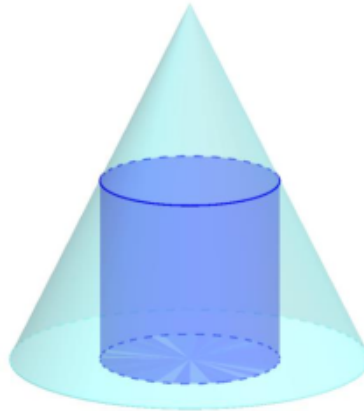
3.1 Con una lámina metálica de $3dm$ de ancho por $8dm$ de largo se va a construir un canal para el agua de lluvia, doblando el ancho hacia arriba una tercera parte de la lámina y formando ángulos iguales θ con la horizontal (Archivo **T11_Act-3.1**). ¿Cuál es el valor del ángulo θ para que el canal conduzca la mayor cantidad de agua? **Justifica matemáticamente** tu respuesta.

3.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.

**Actividad 4**

- 4.1** Encuentra las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de $8cm$ de radio $12cm$ de altura (ver figura). **Justifica matemáticamente** tu respuesta.





ÁREA MÁXIMA

Actividad 1

1.1 El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. **Explica y justifica** tu respuesta en la hoja de trabajo.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor la solución del problema y **escribe** una conclusión al respecto.



Actividad 2

2.1 Abre el archivo de GeoGebra **T12_Act-2.ggb** y mueve el punto B.

- ¿Cuáles magnitudes varían? ¿Cuáles magnitudes no varían? **Explica** tu respuesta.
- ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? **¿Por qué?**
- ¿Qué valores puede tomar la base? **¿Por qué?**
- ¿Qué valores puede tomar la altura? **¿Por qué?**
- ¿Qué valores puede tomar el área? **¿Por qué?**
- ¿Qué relación hay entre la base y la altura? **¿Por qué?**
- Expresa la altura en función de la base. **Explica** tu respuesta.
- Expresa el área en función de la base. **Explica** tu respuesta.
- ¿Cuáles son las dimensiones de la base y de la altura del rectángulo de mayor área? **¿Por qué?**

2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



2.3 Abre el archivo de GeoGebra **T12_Act-2.ggb**.

- En la *Vista Algebraica* muestra el punto P y anima el punto B. ¿Qué representa el punto P? ¿Qué representa el rastro del punto P? ¿Qué representa el lugar geométrico del punto P con respecto al punto B?
- Escribe en la barra de entrada la fórmula que representa el área en función de la base.
- ¿Cuál es la dimensión de la base que genera la mayor área? ¿Este valor es único? Verifica en GeoGebra. **Justifica** tu respuesta.
- Aumenta a 5 lugares decimales el redondeo de los números y cambia el incremento del punto B a 0,001 (doble clic en B, selecciona *Propiedades*, abre la pestaña *Álgebra* y cambia el incremento a 0,001).



- Mueve el punto B alrededor del valor de la base que genera la mayor área. ¿El valor dado para la base en el literal c genera la mayor área? Si no es así, ¿qué valor es? ¿Dicho valor es único? **Explica** tu respuesta.
- Registra en la hoja de cálculo 20 valores del punto P cuando te aproximas al valor de la base que genera la mayor área (utiliza las teclas de las flechas a la derecha y a la izquierda del punto B). ¿Qué ocurre con las imágenes de los valores de la base cuando te aproximas al valor de la base que genera la mayor área? Escribe una conclusión y **justifica** tu respuesta.
- ¿Qué ocurre con las diferencias entre dos valores consecutivos de la base cuando te aproximas al valor de la base que genera la mayor área? Escribe una conclusión y **justifica** tu respuesta.
- ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área? **¿Por qué?**

2.4 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



Actividad 3

Abre el archivo **T12_Act 3.ggb** en el cual el deslizador p representa el perímetro del rectángulo.

- Con el deslizador p fijo en 256, mueve el punto C hasta lograr aproximadamente el área máxima del rectángulo, luego registra el valor de x obtenido.
- Repite el paso anterior fijando el deslizador p en 5 valores diferentes, para completar la siguiente tabla.

Perímetro (p)	x que hace el área máxima
256	

- Según la información de la tabla anterior, **plantea** una conjetura que relacione el valor de x (para el cual se obtiene el área máxima) y el perímetro p (si es necesario agrega más datos a la tabla). **Demuestra** que tu conjetura es válida.
- Cambia la escala del eje y de modo que se aprecien en la pantalla valores del eje entre 0 y 6000 (aparecerá un punto azul en la pantalla).
- Mueve nuevamente el punto C. **Comprueba** tu conjetura planteada en el literal c y concluye (fija p en diferentes valores).

Apéndice N: Taller 13



CAJA SIN TAPA

Actividad 1

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

1.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



1.3 Abre el archivo de GeoGebra **T13_Act-1.3.ggb** y anima el punto P.

- ¿Qué representa el punto P en el problema?
- ¿Cuáles magnitudes varían? ¿Cuáles magnitudes no varían? **Explica** tu respuesta.
- ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? ¿Por qué?
- ¿Qué valores puede tomar la altura? ¿Por qué?
- ¿Qué valores puede tomar la anchura? ¿Por qué?
- ¿Qué valores puede tomar la profundidad? ¿Por qué?
- ¿Qué valores puede tomar el volumen? ¿Por qué?
- ¿Qué relación hay entre la anchura y la altura? ¿Por qué?
- ¿Qué relación hay entre la profundidad y la altura? ¿Por qué?
- Representa algebraicamente el volumen en función de la altura.
- ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué?

1.4 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. **Escribe** tus conclusiones en la hoja de trabajo.



1.5 Abre el archivo de GeoGebra **T13_Act-1.5.ggb**. Anima el punto P.

- ¿Qué representa el punto V? ¿Por qué?
- Escribe en la barra de entrada la fórmula que representa el volumen en función de la altura.
- Traza la recta tangente por el punto V a la gráfica que representa el volumen en función de la altura (en la barra de entrada escribe $Tangente[V, h]$, si la función del volumen tiene otro nombre escríbelo en lugar de h). Halla la pendiente de esta recta (escoge la opción *pendiente*, da clic en el punto V y en la recta). ¿Qué representa la pendiente? **Explica** tu respuesta.



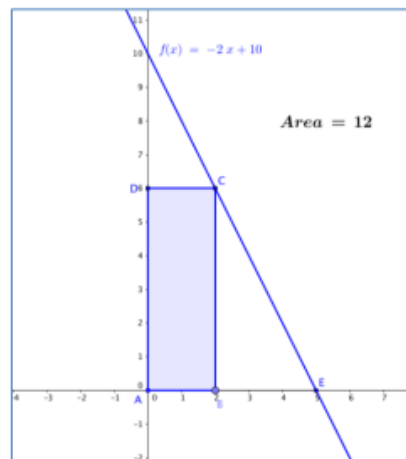
- d) ¿Cómo es el comportamiento de la *recta tangente* y de su *pendiente* antes y después del valor de la altura que genera el mayor volumen? ¿Qué significa este comportamiento en la función que representa el volumen en función de la altura? **Justifica** tu respuesta.
- e) Registra en la Hoja de Cálculo 30 valores de la pendiente (m) por la derecha y por la izquierda del valor de la altura que genera el mayor volumen.
- f) ¿A qué valor tiende la pendiente de la recta tangente cuando te aproximas al valor de la altura que genera el mayor volumen? Escribe una **conjetura** al respecto y **demuéstrala**.
- g) ¿Cuál es el volumen máximo? **¿Por qué?**

1.6 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados.

Actividad 2

- 2.1 Demuestra** que el rectángulo de mayor área inscrito entre los ejes x e y , y la recta $f(x) = -2x + 10$ (ver figura), tiene de base 2.5 y de altura 5 (Archivo **T13_Act-2.1gggb**).



2.2 Comunicando y compartiendo resultados

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados.

Actividad 3

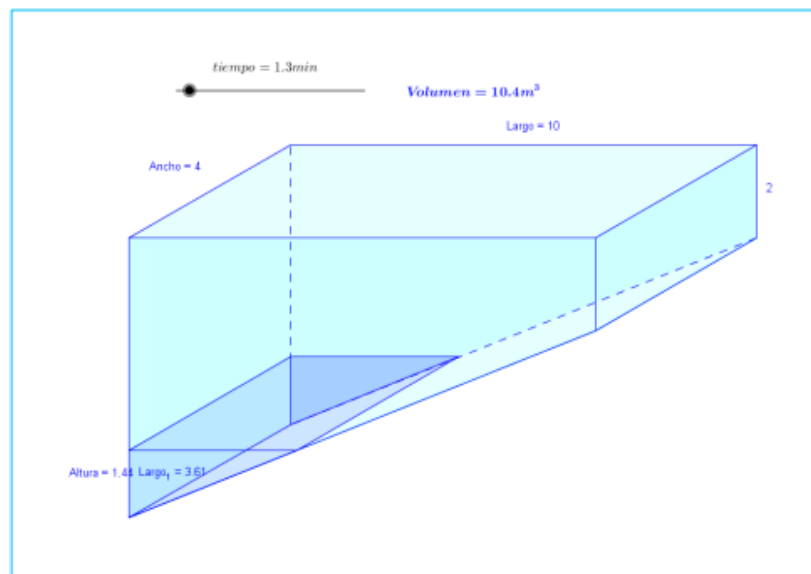
- ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de menor perímetro con área igual a $4m^2$? (Archivo **T13_Act-3gggb**). **Justifica matemáticamente tus resultados**.

Apéndice O: Taller 14

RAZONES DE CAMBIO

Actividad 1

Un tanque de 10 metros de largo, 4 metros de ancho, 6 metros de alto en un extremo y 2 metros en el otro, se está llenando de agua como se ilustra en la siguiente figura.



1.1 Abre el archivo T14_Act-1.ggb.

- Anima el tiempo t (minutos) hasta un valor de 20, empezando en 0. ¿Cuáles son las magnitudes variables en el problema? ¿Estas magnitudes siempre varían hasta llenarse el tanque? **Explica** tus respuestas.
- Representa algebraicamente el volumen (v) en función del tiempo (t) para $0 \leq a \leq 6$, en donde a representa la altura ¿Con qué rapidez (razón de cambio instantánea del volumen con respecto al tiempo) se está llenando el tanque? **Justifica** tu respuesta.

1.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor la solución del problema. **Escribe** una conclusión al respecto.



Actividad 2

- a) Analiza la *variación* de la altura con respecto al tiempo y **describe** lo que observas.
b) Realiza los siguientes cálculos para los intervalos de tiempo dados:

Intervalo de tiempo Δt	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta a = a_2 - a_1$	$\frac{\Delta a}{\Delta t}$
(4.95 , 5)			
(4.96 , 5)			
(4.97 , 5)			
(4.98 , 5)			
(4.99 , 5)			
(5 , 5.05)			
(5 , 5.04)			
(5 , 5.03)			
(5 , 5.02)			
(5 , 5.01)			

- c) ¿Aproximadamente con qué *rapidez* sube el nivel del agua alrededor de 5 minutos?
Justifica tu respuesta.
- d) Para ser más exactos, tomemos más datos alrededor de $t = 5$ de la siguiente manera:
- Abre el archivo **T14_Act-2.ggb**, en donde se muestra en la Hoja de Cálculo los valores del *tiempo* (t) en la columna A, la *altura* (a) en la columna B y la *razón de cambio de la altura con respecto al tiempo* $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1}$ en la columna C.
 - Registra en la Hoja de Cálculo los valores de las magnitudes variables *tiempo* y *altura* en el intervalo $4.99 \leq t \leq 5.01$ (utiliza las flechas del teclado para registrar los datos).
- e) ¿Aproximadamente con qué *rapidez* sube el nivel del agua alrededor de 5 minutos?
Justifica tu respuesta.
- f) ¿Qué pasa cuando Δt tiende a 0? **Escribe** una expresión que represente la situación planteada. **Justifica** tu respuesta.
- g) ¿Aproximadamente con qué *rapidez* sube el nivel del agua alrededor de 7 minutos?
Justifica tu respuesta.
- h) ¿Qué relación tiene lo realizado en esta actividad, con la *pendiente* de la recta tangente en un punto de la curva que representa la altura en función del tiempo? **Justifica** tu respuesta.



2.2 Comunicando y compartiendo

Discute con tus compañeros y el profesor la solución del problema y **escribe** una conclusión al respecto.

Actividad 3

- a) En el problema del tanque, ¿Aproximadamente con qué *rapidez* sube el nivel del agua alrededor de 12 minutos? ¿18 minutos? **Justifica** tu respuesta.
- b) La siguiente tabla proporciona las distancias recorridas por un coche, con una aceleración constante de 0 a 214.9 metros en sólo 9 segundos:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distancia (m)	0	4.3	14.4	30.1	50.7	76	105.5	138.7	175.4	214.9

Halla la velocidad instantánea en 3, 6 y 9 segundos. **Justifica matemáticamente** tu procedimiento.

- c) La ecuación que representa la altura de una pelota que se lanza al aire verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12m/s , está dada por $y = 12t - 4.9t^2$. **Demuestra** que la ecuación que representa la *velocidad instantánea* de la pelota en cualquier momento está dada por $y' = 12 - 9.8t$.