

Estudio de las aberraciones primarias a partir de la teoría del estigmatismo riguroso

Alberto Luis Silva Lora

Trabajo de Grado para optar al título de Doctor en Ciencias Naturales Física

Director

Rafael Ángel Torres Amarís

Doctorado en Ciencias Naturales-Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mi padre y a mi madre.

Agradecimientos

A mi director por su apoyo constante y acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo.

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia por la ayuda financiera. A la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander.

A mis padres y mis hermanos por su apoyo incondicional, siempre lo han hecho. A las personas cercanas que de alguna u otra manera estaban al pendiente del desarrollo de mis actividades académicas y fueron un gran apoyo moral durante este proceso.

Tabla de Contenido

Introducción	19
1. Objetivos	27
1.1. Objetivo general	27
1.2. Objetivos específicos	27
2. Estigmatismo riguroso	29
2.1. Introducción	29
2.2. Superficies cartesianas	30
2.2.1. Parámetros de forma de las superficies cartesianas	33
2.2.1.1. Expresión paramétrica para las superficies cartesianas	36
2.2.1.2. Casos particulares de las superficies cartesianas	38
2.2.2. Lentes singletes ovoides estigmáticas compuestas por dos superficies cartesianas	41
2.2.3. Lentes ovoides estigmáticas compuestas por un conjunto de superficies cartesianas	51
3. Trazado de rayos en sistemas conformados por superficies cartesianas	54
3.1. Introducción	54
3.2. Método para el trazado de rayos en sistemas compuestos por superficies cartesianas	54
3.2.1. Punto de intersección entre un segmento de rayo y una superficie cartesiana	56

ABERRACIONES PRIMARIAS A PARTIR DEL ESTIGMATISMO RIGUROSO	5
3.2.2. Aplicación de la ley de Snell-Descartes en superficies cartesianas	60
3.3. Simulación computacional	63
4. Aplanetismo en sistemas conformados por superficies cartesianas	67
4.1. Introducción	67
4.2. Condición de aplanetismo para una superficie cartesiana	69
4.3. Condición de aplanetismo para un conjunto de superficies cartesianas	72
4.3.1. Aplanetismo dentro de un regimen paraxial	75
4.3.2. Invariante generalizado	76
4.3.3. Magnificación	77
4.3.4. Aplanetismo para un conjunto de superficies cartesianas	79
4.3.5. Media cuadrática de la condición de aplanetismo	81
4.3.6. Aplanetismo para superficies esféricas	82
4.3.7. Simulación computacional	82
4.4. Sistemas aplanéticos en todo rigor	88
4.4.1. Tipo-0	91
4.4.2. Tipo-1	95
4.4.3. Tipo-2	102
4.4.4. Tipo-3	106
5. Aberraciones primarias en sistemas conformados por superficies cartesianas	112
5.1. Introducción	112

5.2. Aberraciones primarias en superficies cartesianas	114
5.2.1. Aberración para puntos sobre el eje óptico	117
5.2.1.1. Dependencia de la aberración esférica con la posición de la pupila de salida	124
5.2.2. Aberraciones primarias para puntos fuera de eje	126
5.3. Aberraciones primarias sobre el plano gaussiano	134
6. Acromatismo en sistemas rigurosamente estigmáticos	139
6.1. Introducción	139
6.2. Acromatismo estricto en superficies cartesianas	140
6.2.1. Aplicación al diseño de sistemas rigurosamente acromáticos	143
6.2.2. Estigmatismo acromático para una superficie cartesiana	144
6.2.3. Estigmatismo acromático para un sistema conformado por dos superficies cartesianas	146
6.3. Acromatismo aproximado en superficies cartesianas	148
6.3.1. Par acromático	150
6.3.2. Aplicación de un par acromático al diseño de un singlete	152
7. Conclusiones	154
Referencias Bibliográficas	157
Apéndices	171

Lista de Figuras

Figura 1.	Representacion gráfica de un ovoide de Descartes.	31
Figura 2.	Conjunto de tres superficies cartesianas, Σ_0 , Σ_1 , y Σ_2 , con vértices localizados en diferentes posiciones sobre un eje común.	38
Figura 3.	Esquema gráfico de una LSOE generada por la intersección de dos superficies cartesianas.	42
Figura 4.	Gráfica del comportamiento de O_0 y O_1 con respecto a variaciones de d_1 , para una LSOE dada por los parámetros $\zeta_0 = 60$, $\zeta_1 = 80$, $d_0 = 0$, $d_2 = 150$, $n_0 = 1.0$, $n_1 = 1.7$, y $n_2 = 1.0$.	46
Figura 5.	Cambio de forma de las LSOE con respecto al valor de σ , para valores de $\zeta_0 = 60$, $\zeta_1 = 80$, $d_0 = 0$, $d_2 = 150$, $n_0 = n_2 = 1$, $n_1 = 1.7$.	49
Figura 6.	Diferentes formas de LSOE de acuerdo a su factor de forma σ obtenino a partir de variaciones de d_1 y valores fijos del resto de los parámetros del sistema.	50
Figura 7.	Sistema estigmático conformado por cuatro superficies cartesianas, que permite colimar los rayos procedentes de un objeto puntual real ubicado a 5 unidades métricas medidos desde la primera superficie.	52
Figura 8.	Comportamiento de un rayo viajando desde el punto A al punto B .	55
Figura 9.	Linea paralela al eje óptico que interseca las superficies Σ_k y Σ_{k+1} en los puntos I_k e I_{k+1} , respectivamente.	59

Figura 10.	Comportamiento de un conjunto de rayo viajando a través de distintas lentes estigmáticas.	62
Figura 11.	Visualización 3D de una LSOE.	64
Figura 12.	Visualización 2D de una LSOE.	65
Figura 13.	Aberraciones de rayo para una LSOE.	66
Figura 14.	Formación de imágenes puntuales perfectas a partir de objetos puntuales.	70
Figura 15.	Lente rigurosamente estigmático compuesta por un conjunto de superficies cartesianas.	71
Figura 16.	Variación del valor de $(\mathcal{M} - 1)_{RMS}$ con respecto al factor de forma σ .	84
Figura 17.	LSOE con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $45mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie.	86
Figura 18.	Aberraciones de rayo para una LSOE con factor de forma $\sigma = 0.093069$.	87
Figura 19.	Diagrama de puntos para dos LSOEs con diferente factor de forma.	88
Figura 20.	Coeficientes de las aberraciones primarias para una LSOE.	89
Figura 21.	Lente rigurosamente aplanética tipo-0 con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $43.333323mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual).	94
Figura 22.	Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-0.	96

- Figura 23. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-0. 97
- Figura 24. Lente rigurosamente aplanética tipo-1 con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen real). 99
- Figura 25. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-1. 100
- Figura 26. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-1. 101
- Figura 27. Lente rigurosamente aplanética tipo-2 con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $65.555546mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual). 105
- Figura 28. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-2. 106
- Figura 29. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-2. 107
- Figura 30. Lente rigurosamente aplanética tipo-3 con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $92.4mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual). 109
- Figura 31. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-3. 110

Figura 32.	Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplánica tipo-3.	111
Figura 33.	(a) Sistema estigmático, enfoca los rayos procedentes de A en A' de manera perfecta. (b) Si el objeto no coincide con los puntos estigmáticos se deja de formar una imagen. (c) Para el caso en (b) se puede recuperar el estigmatismo de forma aproximada mediante el uso de una pupila que limite los rayos que acceden al sistema.	115
Figura 34.	Superficie cartesiana refractiva que muestra un rayo que parte desde un objeto puntual A , y que luego es refractado en el punto I_0 , para finalmente intersectar con el eje óptico en el punto A' .	118
Figura 35.	Puntos objeto fuera de eje para el caso de superficie cartesiana refractiva.	126
Figura 36.	Proyección de la pupila de salida en la superficie refractante cartesiana.	130
Figura 37.	Transferencia del campo de un objeto sobre una superficie esférica a través de una superficie esférica refractiva.	135
Figura 38.	Curvas de dispersión para el material J-LAF7 y el material IDEAL-MAT dentro del rango del espectro en B .	144
Figura 39.	Superficie cartesiana libre de aberración cromática.	146
Figura 40.	Singlete libre de aberración cromática conformado por superficies cartesianas.	148
Figura 41.	Curvas de dispersión para la comparación entre el material real N-SF2 y el material hipotético IDEAL-MAT dentro del espectro B' .	149
Figura 42.	Superficie cartesiana con un mínimo de aberración cromática.	151

Figura 43.	Singlete aplanético y con un desempeño lo mas cercano posible al del sistema ideal.	153
Figura 44.	Trazado de rayos a través de una superficie óptica refractiva.	174
Figura 45.	Formación de una imagen a través de una superficie cartesiana refractiva a partir de un objeto puntual ubicado sobre el eje óptico.	176
Figura 46.	Formación de una imagen a través de una superficies esférica refractiva para un objeto puntual fuera de eje.	184
Figura 47.	Plano sobre la pupila de salida.	184
Figura 48.	Superficie de Petzval sobre la cual se forma la imagen del campo proveniente de un objeto plano cuando este atraviesa una superficie esférica.	188

Lista de Tablas

Tabla 1.	Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para tres superficies cartesianas obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k .	38
Tabla 2.	Casos particulares de las las superficies cartesianas tanto para superficies ópticas refractivas como reflectivas.	40
Tabla 3.	Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para un sistema estigmático conformado por cuatro superficies cartesianas, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k .	52
Tabla 4.	Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para una LSOE, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k del sistema.	64
Tabla 5.	Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para una LSOE, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k del sistema.	85
Tabla 6.	Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-0, conformada por superficies esféricas.	93
Tabla 7.	Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-1, conformada por superficies cónicas.	99
Tabla 8.	Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-2, conformada por superficies cartesianas.	105

Tabla 9.	Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-3, conformada por superficies cartesianas.	108
Tabla 10.	Aberraciones primarias para una superficie cartesiana refractiva.	132
Tabla 11.	Parámetros de una superficie cartesiana libre de aberración cromática.	145
Tabla 12.	Parámetros de un singlete libre de aberración cromática, conformado por superficies cartesianas.	147
Tabla 13.	Aberraciones primarias para una superficie esférica refractiva.	186

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Constante para la condición de aplanetismo en sistemas conformados por superficies cartesianas	171
Apéndice B. Relación entre $\overline{V_k C_k}$ y los parámetros de forma de las superficies cartesianas	172
Apéndice C. Geometría de rayos al atravesar una superficie óptica refractiva	174
Apéndice D. Aberraciones primarias para una superficie esférica refractiva	176

Glosario

Aberraciones en óptica las aberraciones son defectos que se producen por diferentes motivos asociados determinado sistema óptico y cuyo efecto es el de degradar la imagen que este produce.

Acromatismo es la condición bajo la cual un sistema óptico produce la misma imagen para un campo luminoso de más de dos longitudes de onda.

Aplanetismo es la condición bajo la cual un sistema formador de imagen es capaz de formar imágenes extendidas a partir de objetos extendidos.

Estigmatismo es la condición bajo la cual un sistema óptico forma una imagen puntual perfecta a partir de un objeto puntual.

Resumen

Título: Estudio de las aberraciones primarias a partir de la teoría del estigmatismo riguroso *

Autor: Alberto Luis Silva Lora **

Palabras Clave: Aberraciones, Acromatismo, Aplanetismo, Estigmatismo, Ovoides de Descartes.

Descripción: La teoría de las aberraciones ópticas estudia las desviaciones de los sistemas ópticos para formar imágenes puntuales perfectas. Estas desviaciones, conocidas como aberraciones, se pueden clasificar de diferentes maneras, dentro de cuya clasificación se encuentran las aberraciones geométricas o aberraciones monocromáticas, y las aberraciones cromáticas. Las primeras fueron formulados inicialmente por Philipp Ludwig von Seidel, quien obtuvo expresiones para las cinco aberraciones primarias, aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión. Por otro lado, las aberraciones cromáticas, asociadas al fenómeno de la dispersión, se producen por la falta que tienen los sistemas ópticos para enfoquen todos los colores del espectro electromagnético en un foco común. El primero en solucionar este problema del color fue Chester Moore Hall, con la invención de la lente acromática, que consiste en dos piezas de vidrio capaces de concentrar la luz asociada a dos colores en un foco común. Por lo tanto, el estudio de las aberraciones ópticas dio como resultado la capacidad de construir sistemas más complejos y menos aberrados. La mayoría de los sistemas ópticos se fabrican utilizando lentes y espejos con geometrías como las cónicas, entre las que se encuentra la esfera. No obstante, estos sistemas también pueden utilizar lentes o espejos con superficies esféricas, que se formulan de forma estándar a través de una base cónica y una serie de potencias. Las superficies esféricas han sido las más utilizadas debido a su fácil fabricación, pero con la aparición de nuevas técnicas de pulido óptico, las superficies esféricas han tomado un papel importante en la fabricación de sistemas ópticos. Las principales características de las superficies esféricas son la compensación del campo aberrado, lo que resulta en sistemas con menos defectos, y la capacidad de reemplazar un conjunto de superficies esféricas, lo que resulta en sistemas más livianos que operan en espacios reducidos. A medida que estas superficies son introducidas en el diseño de nuevos dispositivos ópticos, son formuladas expresiones que permiten caracterizar sus aberraciones. Tradicionalmente, los sistemas ópticos se diseñan con aberraciones ópticas que luego, empleando herramientas computacionales, se minimizan. Por lo tanto, esta tesis introduce un enfoque novedoso al diseño de sistemas ópticos, que parte del estudio de las aberraciones desde la teoría del estigmatismo riguroso, mediante el uso de una subfamilia de superficies esféricas que poseen la propiedad de estigmatismo riguroso, los ovoides de Descartes. Se muestra dentro de este trabajo, que estas superficies se pueden formular de manera exacta y explícita, facilitando la caracterización de sistemas estigmáticos compuestos por un conjunto de ellas. Mediante el uso de esta formulación es derivada una expresión explícita que permite discriminar dentro del conjunto de sistemas rigurosamente estigmáticos cuales cumplen además con una condición de aplanetismo, dando como resultado lentes singletes libres de aberración esférica y coma. Dentro de este conjunto de lentes aplanéticas, son discriminados, mediante la expresión de aplanetismo, cuales sistemas cumplen de manera estricta con dicha condición. Adicionalmente, la formulación de los ovoides de Descartes, nos permitió formular las aberraciones de Seidel para estas superficies, logrando así un completo estudio de las aberraciones geométricas desde la teoría del estigmatismo riguroso. Adicionalmente, también se estudiaron las condiciones bajo las cuales estos

* Tesis doctoral

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amarís, Doctorado en Ciencias Naturales-Física.

sistemas también cumplen con una condición de acromatismo. Esta condición es estudiada de manera estricta, y son mostrados algunos resultados.

Abstract

Title: Study of primary aberrations from the rigorous stigmatism theory *

Author: Alberto Luis Silva Lora **

Keywords: Aberrations, Achromatism, Aplanatism, Descartes Ovoids, Stigmatism.

Description: The theory of optical aberrations studies the deviations of optical systems from forming perfect point images. These deviations, known as aberrations, can be classified in various ways, including geometric aberrations or monochromatic aberrations, and chromatic aberrations. The former were initially formulated by Philipp Ludwig von Seidel, who derived expressions for the five primary aberrations: spherical aberration, coma, astigmatism, field curvature, and distortion. On the other hand, chromatic aberrations, associated with the phenomenon of dispersion, occur because optical systems fail to focus all colors of the electromagnetic spectrum at a common focus. The first to solve this color problem was Chester Moore Hall, with the invention of the achromatic lens, which consists of two pieces of glass capable of focusing light associated with two colors at a common focus. Therefore, the study of optical aberrations resulted in the ability to build more complex and less aberrated systems. Most optical systems are manufactured using lenses and mirrors with geometries such as conics, including the sphere. However, these systems can also use lenses or mirrors with aspheric surfaces, which are typically formulated with a conic base and a series of powers. Spherical surfaces have been the most used due to their ease of manufacture, but with the advent of new optical polishing techniques, aspheric surfaces have taken on an important role in the fabrication of optical systems. The main characteristics of aspheric surfaces are the compensation of aberrated fields, resulting in systems with fewer defects, and the ability to replace a set of spherical surfaces, leading to lighter systems that operate in reduced spaces. As these surfaces are introduced into the design of new optical devices, expressions are formulated to characterize their aberrations. Traditionally, optical systems are designed with optical aberrations that are then minimized using computational tools. Therefore, this thesis introduces a novel approach to the design of optical systems, starting from the study of aberrations from the theory of rigorous stigmatism, using a subfamily of aspheric surfaces that possess the property of rigorous stigmatism, the Descartes ovoids. This work shows that these surfaces can be formulated in an exact and explicit manner, facilitating the characterization of stigmatic systems composed of a set of them. Using this formulation, an explicit expression is derived that allows discrimination within the set of rigorously stigmatic systems which also meet an aplanatism condition, resulting in singlet lenses free from spherical aberration and coma. Within this set of aplanatic lenses, the expression of aplanatism discriminates which systems strictly meet this condition. Additionally, the formulation of Descartes ovoids allowed us to formulate Seidel's aberrations for these surfaces, thus achieving a complete study of geometric aberrations from the theory of rigorous stigmatism. Furthermore, the conditions under which these systems also meet an achromatism condition were strictly studied, and some results are shown.

* Doctoral Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amarís, Doctorado en Ciencias Naturales-Física.

Introducción

Los sistemas ópticos son instrumentos que por lo general se encuentran conformados por una serie de superficies ópticas, como lentes y espejos, entre las que se destacan las superficies esféricas, las asféricas (Schulz, 1988) y las de forma libre (Garrard et al., 2005; Thompson and Rolland, 2012; Rolland et al., 2021; Falaggis et al., 2022). Tanto las superficies asféricas y las de forma libre difieren de las superficies esféricas, pero se diferencian por el hecho de que las primeras poseen simetría rotacional mientras que las otras no. En la literatura se pueden encontrar cierto tipo de superficies ópticas que surgen del problema de buscar cual es la superficie capaz de formar una imagen puntual perfecta a partir de un objeto puntual, desde el punto de vista geométrico. A partir de lo cual se origina la teoría del estigmatismo riguroso, teoría de la óptica geométrica que estudia los sistemas ópticos capaces de formar una imagen puntual perfecta a partir de un objeto puntual. A los puntos objeto e imagen de tales sistemas se les conoce como *puntos rigurosamente estigmáticos* (Southall, 1922), y a los sistemas más sencillos con tal característica, sistemas conformados por una sola superficie óptica, se les conoce como *ovoides de Descartes* o *superficies cartesianas*. Estas superficies fueron propuestas y formuladas de manera implícita por Descartes (1637), y luego fueron estudiadas por Huygens (1920), quien encontró una aplicación práctica en las superficies esféricas, un caso particular de superficie cartesiana, las cuales también poseen puntos rigurosamente estigmáticos conocidos como puntos de Young-Weierstrass (Young, 1807; Balland, 2007). Desde el punto de vista geométrico, las superficies esféricas únicamente pueden formar una imágenes virtual perfecta a partir de objetos reales, e imágenes reales perfectas

a partir de objetos virtuales, lo que obliga a Huygens a abandonar el estigmatismo riguroso y a estudiar la formación de imágenes en estos sistemas adoptando un estigmatismo aproximado para el caso de formación de imagen real a partir de un objeto real. De allí, surge una teoría de la óptica en torno al uso de superficies esféricas y considerando aproximaciones de primer orden, óptica paraxial, a partir de lo cual se pudieron estudiar diferentes tipos de diseños de sistemas ópticos tales como telescopios, microscopios (Mansfield and Kino, 1990; Kino and Mansfield, 1991; Wang et al., 2010), lentes oftálmicas, lentes fotográficas (Rudolph, 1903), entre otros. La teoría del estigmatismo riguroso es exacta en todo el rigor matemático, por lo que en este trabajo nos referiremos a ella simplemente haciendo uso de la palabra estigmatismo.

A medida que la óptica avanzaba, se comenzaron a identificar los defectos generados por los sistemas ópticos diseñados, conocidos como aberraciones ópticas. Estas aberraciones se definen como las desviaciones de los sistemas ópticos para formar una imagen ideal. (Welford, 2017). Existen diferentes clasificaciones de las aberraciones asociadas a diferentes factores, la primera clasificación que se identificó fueron las aberraciones geométricas, asociadas a factores geométricos de los sistemas ópticos. Estas aberraciones fueron expresadas primeramente por Seidel (1856), quien dedujo de manera matemática los coeficientes de las cinco aberraciones primarias, la aberración esférica, la coma, la curvatura de campo y la distorsión. Hoy en día existen otras herramientas matemáticas que permiten expresar los coeficientes de todas las aberraciones geométricas, tanto primarias como de alto orden, como son el caso de los polinomios de Zernike (von F, 1934), las funciones de Bessel, y los polinomios de Chebyshev (Trevino et al., 2013; Rodrigues et al., 2019). Por otro lado, existe otro tipo de aberraciones bastante importantes, asociados al fenómeno

de la dispersión de la luz, conocida como la aberración cromática (Willach, 1996). Este tipo de aberraciones tiene una importancia bastante alta en el diseño de sistemas formadores de imágenes, y su tratamiento simultáneo junto con las aberraciones geométricas es un problema complejo en el diseño óptico, en donde se busca que cierto número de longitudes de onda puedan enfocar en un foco común (Herzberger and McClure, 1968; Mercado and Ryzhikov, 1998; Hariharan, 1999; Mikš and Novák, 2013; Sasian et al., 2017). Estos sistemas, que permiten minimizar o eliminar la aberración cromática, por lo general son contruidos mediante la combinación de varios tipos de vidrios ópticos con propiedades dispersivas especiales (Dreyfus et al., 1960). Se conoce como sistema acromático el que presenta corrección a dos colores del espectro, este tipo de sistemas fue inventado por Chester Moore Hall (Daumas, 1972; Sorrenson, 2001), y patentado posteriormente por John Dollond (Watson, 2005), quien luego diseñó un sistema corregido a tres colores (Watson, 2005), al que llamó apocromático. Una mejor corrección fue obtenida por Maximilian Herzberger, quien desarrolló la lente super-acromática para Kodak (Herzberger and McClure, 1963), la cual es capaz de enfocar hasta cuatro colores en un mismo punto. Entre mayor sea la corrección buscada en un sistema, mayor será el número de superficies necesarias para su fabricación y mayor el número de material ópticos necesarios, lo que impone límites a las dimensiones físicas de estos instrumentos y, por lo tanto, a su aplicación.

Actualmente, el tamaño de los nuevos dispositivos de uso común, tales como los teléfonos celulares, han obligado a que los nuevos sistemas ópticos sean cada vez más pequeños, imponiendo la necesidad de diseñar sistemas totalmente esféricos (Ko and Lin, 2023; Kubota et al., 2023; Peng, 2023). Otros dispositivos con la misma necesidad de incorporar sistemas cada vez más compactos

son los nanosatélites, cuya estructura se basa en cubos de 10cm de lado con un peso no mayor a 1.33Kg, en donde se requiere el diseño de sistemas formadores de imágenes con componente hiperspectral que puedan encajar dentro de dos o tres cubos junto con otros elementos como la parte electrónica y estructuras mecánicas de soporte (Lee et al., 2009). Dentro del diseño de este tipo de sistemas son usadas las superficies de forma libre (Lee et al., 2009; Liu et al., 2021) o secciones de superficies esféricas (Marchi et al., 2019), en donde las superficies esféricas son formuladas a partir de una base cónica más una serie de potencias pares acompañadas de coeficientes llamados coeficientes de asfericidad. Esta formulación de esféricas se ha adoptado como un estándar (ISO 10110-12:2019), tanto en el diseño como en su fabricación. Las superficies esféricas son superficies que poseen cierto grado de complejidad dentro del área del diseño óptico, y aquellos sistemas que contienen al menos una de estas superficies son calculados mediante métodos de optimización, por medio de los cuales son obtenidos los coeficientes de asfericidad necesarios para que el sistema sea considerado de buena calidad. Por lo tanto, algunos autores han desarrollado sus propios métodos de diseño óptico que buscan minimizar o eliminar las aberraciones mediante el uso de este tipo de superficies (Valencia-Estrada and Bedoya-Calle, 2012; Valencia-Estrada et al., 2017b,a; Kano et al., 2004; Sutter and Alianelli, 2017; Michaelis et al., 2011; McCloskey and Donegan, 2013). En estos sistemas, la corrección de las aberraciones va a depender del número de coeficientes de asfericidad que se considere, los cuales van en aumento en la medida en que sean necesarias más superficies esféricas dentro del sistema, haciendo el proceso de corrección cada vez más costoso computacionalmente, y los algoritmos implementados cada vez más complejos.

Las superficies cartesianas son un caso especial de superficies esféricas, las cuales se derivan

a partir de principios físicos, el principio de Fermat y de la ley de Snell-Descartes. De aquí surge su principal característica, posee puntos conjugados que coinciden con sus puntos estigmaticos, lo que significa que la aberración esférica es nula en todo el rigor matemático. Esta característica ha sido aprovechada para realizar varios estudios en torno a estas superficies (Silberstein, 1935; Jurek, 1952; Güther, 2008; Michaelis et al., 2011; Hsueh et al., 2011; Valencia-Estrada and Bedoya-Calle, 2012; McCloskey and Donegan, 2013; Valencia-Estrada et al., 2017b; Sutter and Alianelli, 2019; González-Acuña and Chaparro-Romo, 2020), y en algunos casos se han llevado a la práctica dentro del diseño de algunos sistemas ópticos en áreas como la microscopia (Lieb and Meixner, 2001), la astronomía (Lynden-Bell, 2002), y visión de maquinas (Cabral et al., 2004), en donde a menudo son implementadas superficies tales como las cónicas, que así como la esfera, permiten la formación de una imagen puntual sobre sus puntos estigmaticos (Luneburg and Herzberger, 1964; Bruhat et al., 1959). Por ende, los sistemas ópticos pueden tener puntos estigmáticos, donde la aberración esférica sea nula, pero existen otros tipos de aberraciones que afectan el desempeño de tales sistemas, por lo que en la práctica se exige que estos sistemas trabajen en condiciones diferentes a las del estigmatismo riguroso, en donde se tienen diferentes tipos de aberraciones que se requieren corregir. Por consiguiente, las aberraciones geométricas son una consecuencia del rompimiento de la condición del estigmatismo riguroso, por lo que pueden ser estudiadas tomando como punto de partida el estudio de los ovoides cartesianos, a partir de los cuales se podrían obtener sistemas aplanéticos en todo el rigor matemático como las lentes de inmersión usadas en microscopía, cuyas superficies sean distintas a las superficies esféricas.

Existen dos enfoques en la literatura que abordan el tema de la corrección de las aberraciones

geométricas, uno es el enfoque clásico, en donde se prima el uso de superficies esféricas y cuyos sistemas resultantes son corregidos mediante la adición de superficies asféricas o mediante el remplazo de algunas superficies esféricas por una asférica, compensando así las aberraciones que posee el sistema (Huygens, 1920; Wassermann and Wolf, 1949; Head, 1959; Gross et al., 2007). El uso de las superficies asféricas dentro de los sistemas formadores de imágenes tuvo su origen con el problema de Wassermann and Wolf (1949), quien expone el problema de la corrección de las aberraciones para la obtención de una lente aplanética, pero dentro de este trabajo no se proporciona una solución analítica, y es a partir de aquí que otros autores han propuesto diferentes metodologías para resolverlo (Yamada, 2022). Estas otras metodologías han tomado fuerza, dentro de las cuales es retomado el estigmatismo mediante el uso del principio de Fermat para la formulación de superficies capaces de corregir aberraciones geométricas como la aberración esférica y la coma (Mashaal et al., 2015, 2016; González-Acuña and Gutiérrez-Vega, 2019; González-Acuña et al., 2020a,b), e incluso las aberraciones cromáticas (González-Acuña and Gutiérrez-Vega, 2020; González-Acuña and Gutiérrez-Vega Sr, 2020). En algunos casos, como es mostrado por González-Acuña and Gutiérrez-Vega (2019), son obtenidas expresiones analíticas que permiten encontrar las formas de las superficies de las lentes capaces de eliminar la aberración esférica, pero para el caso de la corrección de aberraciones adicionales, como la coma, es requerido el uso de métodos numéricos para el diseño de sistemas corregidos (González-Acuña et al., 2020a,b).

Actualmente los software de diseño óptico, como Zemax y OSLO, son capaces de llevar a cabo el proceso de trazado de rayos, la minimización de las aberraciones y el análisis de estas en sistemas bastante complejos mediante el uso de ciertos algoritmos y herramientas matemáticas.

Para el caso de las superficies esféricas, la metodología para hallar la intersección de los rayos con las superficies es un problema bastante complejo para cuando se tienen en cuenta los términos de la expresión mayores del cuarto orden (Arasa and Alda, 2004; Zhdanov et al., 2022). Pero, para un nuevo enfoque en donde el diseño óptico se lleve a cabo mediante expresiones exactas para las superficies cartesianas, se podría pensar en la propuesta de metodologías exactas para llevar a cabo el trazado de rayos en sistemas conformados por este tipo de superficies. Adicionalmente, la herramienta más usada para la caracterización de las aberraciones en los softwares comerciales son los polinomios de Zernike (von F, 1934), por medio de cuya caracterización se obtiene una medida del rendimiento del sistema. Esta medida de las aberraciones es usada para la creación de funciones de mérito, por medio de las cuales se busca cual es el sistema menos aberrado con determinadas características. Mediante el uso de superficies estigmáticas, como las superficies cartesianas, el diseño de los sistemas ópticos tendría implícita, por lo menos, la corrección de la aberración esférica. A partir de aquí surge la siguiente pregunta: ¿Cómo se podrían caracterizar las aberraciones primarias en sistemas conformados por superficies cartesianas, de tal manera que se pueda tener el control de los defectos que surgen cuando el sistema se encuentra fuera de una condición de estigmatismo? Esto nos lleva a considerar que, mediante el estudio y la aplicación de superficies cartesianas es factible adquirir un conjunto de herramientas que incluyen una formulación precisa, un método exacto para trazar rayos, y expresiones para caracterizar diversos tipos de aberraciones, tanto geométricas como cromáticas. Estas herramientas nos capacitan para desarrollar sistemas ópticos con características específicas y de alta calidad.

Dentro del presente trabajo se logró obtener una formulación de los ovoides de Descartes

que simplifica la integración de este tipo de superficies en el diseño óptico. Esta formulación está basada en cuatro parámetros de forma, que permiten el manejo de características tales como el aplanetismo y las aberraciones cromáticas, incluso al considerar múltiples superficies ovoides de Descartes. Debido a la propiedad de estigmatismo que pose este tipo de superficies, los sistemas resultantes son sistemas libres de aberración esférica. Como parte de los resultados de este trabajo, hemos encontrado las condiciones bajo las cuales este tipo de sistemas son considerados libre de aberración esférica y coma, indicando que puede formar imágenes de alta calidad a partir de objetos extendidos. Con esto, añadimos una propiedad adicional a los sistemas conformados por superficies ovoides de Descartes, la propiedad de aplanetismo. La expresión resultante de este hallazgo, permitió discriminar los sistemas que son en todo rigor aplanéticos, como es el caso de la superficie esférica, de aquellos que no lo son. Aunque la aberración esférica y la coma son las aberraciones que más afectan los sistemas formadores de imágenes, no son las únicas que tienen un efecto negativo en la formación de imágenes, por lo cual hemos encontrado dentro de este trabajo las expresiones para las aberraciones primarias presentes en las superficies ovoides de Descartes, escritas en función de sus parámetros de forma. Adicionalmente, se trataron las aberraciones cromáticas, encontrando las condiciones mediante las cuales los sistemas ópticos son estrictamente libres de este tipo de aberraciones. Finalmente, a partir de dicha formulación se desarrolló un software para el análisis de sistemas ópticos compuestos por ovoides de Descartes. Este software es capaz de analizar incluso sistemas conformados por superficies esféricas, ya que estas son un caso particular de los ovoides de Descartes.

1. Objetivos

1.1. Objetivo general

- Desarrollar un estudio de las aberraciones primarias y el acromatismo a partir de la teoría del estigmatismo riguroso, en sistemas conformados por superficies ovoides de Descartes.

1.2. Objetivos específicos

- Considerando que una superficie ovoide de Descartes es capaz de formar una imagen puntual perfecta en sus puntos rigurosamente estigmáticos, se buscará por medio de procesos algebraicos y geométricos una expresión matemática que facilite su uso dentro del diseño óptico.
- Por medio del uso de la condición seno de Abbe, se buscará determinar mediante una expresión analítica las condiciones bajo las cuales los sistemas conformados por superficies ovoides de Descartes cumplen, adicionalmente, con una condición de aplanetismo, es decir que son libres de coma.
- Mediante el uso de la formulación de los ovoides de Descartes, se buscará expresar las cinco aberraciones primarias para una superficie ovoide de Descartes. Como resultado se obtendrá una expresión que contenga como casos particulares las expresiones de las cinco aberraciones primarias para el caso de las superficies cónicas, y por ende las expresiones para el caso de las superficies esféricas.
- Teniendo en cuenta el fenómeno de dispersión de la luz, se buscará la relación entre los

parámetros que definen las superficies ovoides de Descartes y el índice de refracción para posteriormente definir las condiciones bajo las cuales los sistemas conformados por dichas superficies son libres de aberración cromática, tanto longitudinal como transversal.

- Se desarrollará una herramienta computacional que permita considerar múltiples superficies ovoides de Descartes para el diseño de sistemas ópticos. Esta herramienta debe poder visualizar las superficies que conforman el sistema, llevar a cabo el trazado de rayos considerando múltiples objetos puntuales sobre el campo objeto, converger a sistemas aplanéticos y acromáticos, y visualizar las aberraciones geométricas por superficie. El fin de esta herramienta es poder realizar un análisis de los sistemas que resultan de esta formulación.

2. Estigmatismo riguroso

2.1. Introducción

La teoría del estigmatismo riguroso, que aquí nos referimos como simplemente estigmatismo, estudia aquellas superficies ópticas que poseen *puntos estigmáticos* (Southall, 1922), que permiten la formación perfecta de una imagen a partir de un objeto puntual. Estas superficies fueron formuladas por Descartes (1637) y luego estudiadas por Huygens (1920), a partir de donde se les conoce como ovoides de Descartes o superficies cartesianas. Estas superficies incluyen las cónicas de revolución, que tienen aplicaciones en áreas como la microscopía (Lieb and Meixner, 2001), la astronomía (Lynden-Bell, 2002) y la visión de máquinas (Cabral et al., 2004).

Los sistemas formadores de imagen generalmente se construyen a partir de superficies esféricas que son casos particulares de las superficies cartesianas. Un sistema conformado por una superficie esférica puede formar una imagen libre de aberración esférica si la posición del objeto y la imagen coincide con los puntos estigmáticos (Young, 1807; Mahajan, 1998; Sharma, 2006; Malacara-Hernandez and Thompson, 2017).

Existen distintos métodos para corregir las aberraciones, que incluyen el uso de superficies con características especiales. En la literatura existen diversos tipos de superficies usadas para este propósito (Greynolds, 2002; Kano et al., 2004; Michaelis et al., 2011; McCloskey and Donegan, 2013; Valencia-Estrada and Bedoya-Calle, 2012; Cho, 2016; Valencia-Estrada et al., 2017b,a; Sutter and Alianelli, 2017; González-Acuña et al., 2019), pero para el caso de una sola superficie, la única manera de formar una imagen puntual es mediante el uso de las superficies cartesianas.

Las superficies cartesianas, generalmente, se expresan de forma implícita. Sin embargo, en óptica, una formulación explícita es de mayor interés (Born and Wolf, 2013), ya que ofrece ventajas en el diseño y fabricación de superficies ópticas. Existen diversos métodos para expresar explícitamente este tipo de superficies, tanto en formulaciones exactas (Shmakov, 2011; Hsueh et al., 2011; Valencia-Estrada et al., 2013; Sutter and Alianelli, 2019) como en expresiones aproximadas (Valencia-Estrada et al., 2013, 2017b).

Aunque actualmente las expresiones para las superficies cartesianas son complejas, y sea necesario incurrir al uso de métodos aproximados ofrecidos por software comercial para su representación, en este capítulo se mostrará el desarrollo de una expresión analítica y paramétrica, de fácil manipulación. Adicionalmente, mediante el uso de esta nueva formulación, se mostrará el desarrollo de un método exacto para el trazado de rayos analítico y exacto, con el cual será posible simular el comportamiento de los rayos al atravesar sistemas conformados por un conjunto de este tipo de superficies.

2.2. Superficies cartesianas

Las superficies que se utilizan en óptica son expresadas de manera matemática haciendo uso de diferentes tipos de expresiones entre las que se encuentran las expresiones explícitas, implícitas, y paramétrica. Nuestro enfoque parte de la definición de las superficies aquí usadas para la construcción de los sistemas formadores de imágenes, superficies cartesianas (Descartes, 1637; Southall, 1922). En la Fig. 1 se muestra una superficie cartesiana cuyo vértice se encuentra ubicado a una distancia ζ_k medida desde el origen de coordenadas, O . Estas superficies tienen simetría axial, por lo que aquí son expresadas con un parámetro, dado por la distancia entre el vértice de

la superficie y un punto sobre esta, definido como $\rho = \sqrt{r^2 + (z - \zeta_k)^2}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la coordenada transversal y z la coordenada axial medida desde el origen.

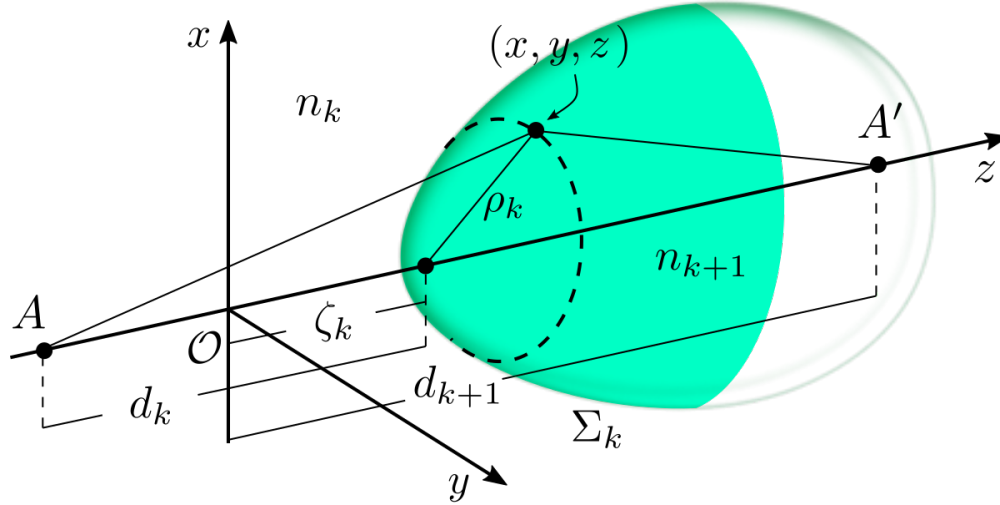


Figura 1. Representación gráfica de un ovoide de Descartes.

Las superficies cartesianas son capaces de producir una imagen puntual perfecta a partir de un objeto puntual. La superficie Σ_k , que se muestra en la Fig. 1, y que separa los medios con índices de refracción n_k y n_{k+1} , forma una imagen puntual a una distancia d_{k+1} a partir de un objeto puntual ubicado a una distancia d_k . Todos los rayos que van desde el objeto puntual y llegan a la imagen puntual, recorren la misma longitud de camino óptico (LCO), esto es

$$n_k \sqrt{r^2 + (z - d_k)^2} + n_{k+1} \sqrt{r^2 + (z - d_{k+1})^2} = \kappa, \quad (1)$$

siendo κ un valor constante. Si se considera el rayo que va desde A a A' por todo el eje de simetría,

se tiene entonces que $r = 0$ y $z = \zeta_k$, los cuales si se reemplazan en (1) se obtiene que

$$n_k \sqrt{(\zeta_k - d_k)^2} + n_{k+1} \sqrt{(\zeta_k - d_{k+1})^2} = \kappa, \quad (2)$$

donde, si se considera que $d_k - \zeta_k < 0$, se obtiene que

$$\kappa = n_{k+1}(d_{k+1} - \zeta_k) - n_k(d_k - \zeta_k). \quad (3)$$

Si ambos lados de la expresión (1) se elevan al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} n_k^2 [r^2 + (z - d_k)^2] + 2n_k n_{k+1} \sqrt{r^2 + (z - d_k)^2} \sqrt{r^2 + (z - d_{k+1})^2} \\ + n_{k+1}^2 [r^2 + (z - d_{k+1})^2] = [n_{k+1}(d_{k+1} - \zeta_k) - n_k(d_k - \zeta_k)]^2, \end{aligned} \quad (4)$$

donde se observa una cantidad que aún se encuentra dentro de un radical. Ordenando los radicales a un lado de la expresión anterior, y elevando nuevamente al cuadrado se llega a

$$\begin{aligned} \left([n_{k+1}(d_{k+1} - \zeta_k) - n_k(d_k - \zeta_k)]^2 - n_k^2 [r^2 + (z - d_k)^2] - n_{k+1}^2 [r^2 + (z - d_{k+1})^2] \right)^2 \\ - 4n_k^2 n_{k+1}^2 [r^2 + (z - d_k)^2] [r^2 + (z - d_{k+1})^2] = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

lo cual se puede escribir también como un polinomio con variable indeterminada dada por $(z - \zeta_k)$,

esto es

$$\begin{aligned}
& 4 \left[n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k^2 (d_k - \zeta_k) \right]^2 (z - \zeta_k)^2 \\
& - 2 \left[4n_k n_{k+1} (d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) (n_{k+1} - n_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)] \right. \\
& + 2 (n_{k+1} - n_k) (n_k + n_{k+1}) \left[n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k^2 (d_k - \zeta_k) \right] \rho^2 \left. \right] (z - \zeta_k) \\
& + \left(4n_k n_{k+1} [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)] [n_{k+1} (d_k - \zeta_k) - n_k (d_{k+1} - \zeta_k)] \right. \\
& \left. + (n_{k+1} - n_k)^2 (n_{k+1} + n_k)^2 \rho^2 \right) \rho^2 = 0, \tag{6}
\end{aligned}$$

la cual es una expresión implícita de las superficies cartesianas, dadas en función de z y ρ .

2.2.1. Parámetros de forma de las superficies cartesianas. Retomando la expresión (6), expresión implícita de las superficies cartesianas, se tiene que si se divide toda la expresión por la cantidad

$$4n_k n_{k+1} (d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) (n_{k+1} - n_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)] , \tag{7}$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
& \frac{[n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k^2 (d_k - \zeta_k)]^2}{n_k n_{k+1} (d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) (n_{k+1} - n_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)]} (z - \zeta_k)^2 \\
& - 2 \left[1 + \frac{(n_k + n_{k+1}) [n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k^2 (d_k - \zeta_k)] \rho^2}{2 n_k n_{k+1} (d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)]} \right] (z - \zeta_k) \\
& + \left(\frac{[n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)] [n_{k+1} (d_k - \zeta_k) - n_k (d_{k+1} - \zeta_k)]}{(d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) (n_{k+1} - n_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)]} \right. \\
& \left. + \frac{(n_{k+1} - n_k) (n_{k+1} + n_k)^2 \rho^2}{4 n_k n_{k+1} (d_k - \zeta_k) (d_{k+1} - \zeta_k) [n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k) - n_k (d_k - \zeta_k)]} \right) \rho^2 = 0, \tag{8}
\end{aligned}$$

una expresión difícil de manipular. Como es mostrado por Cho (2016), las superficies cartesianas son un caso particular de las superficies supercónicas que pueden ser expresadas a partir de unos parámetros que aquí llamamos *parámetros de forma*. Si expresamos la ecuación (8) como

$$O_k G_k (z - \zeta_k)^2 - 2(1 + S_k \rho^2)(z - \zeta_k) + (O_k + T_k \rho^2) \rho^2 = 0, \tag{9}$$

se pueden definir los parámetros de forma de las superficies cartesianas (Silva-Lora and Torres, 2020b,c), dados por G_k , O_k , T_k , y S_k , como

$$G_k = \frac{\left(\frac{n_{k+1}^2}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k^2}{d_{k+1} - \zeta_k} \right)^2}{n_k n_{k+1} \left(\frac{n_{k+1}}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_k - \zeta_k} \right) \left(\frac{n_{k+1}}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_{k+1} - \zeta_k} \right)}, \quad (10)$$

$$O_k = \frac{\frac{n_{k+1}}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_k - \zeta_k}}{n_{k+1} - n_k}, \quad (11)$$

$$T_k = \frac{\left(\frac{n_{k+1} + n_k}{(d_{k+1} - \zeta_k)(d_k - \zeta_k)} \right)^2 (n_{k+1} - n_k)}{4n_k n_{k+1} \left(\frac{n_{k+1}}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_{k+1} - \zeta_k} \right)}, \quad (12)$$

$$S_k = \frac{\frac{(n_{k+1} + n_k)}{(d_{k+1} - \zeta_k)(d_k - \zeta_k)} \left(\frac{n_{k+1}^2}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k^2}{d_{k+1} - \zeta_k} \right)}{2n_k n_{k+1} \left(\frac{n_{k+1}}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_{k+1} - \zeta_k} \right)}, \quad (13)$$

los cuales están escritos en función de n_k , n_{k+1} , ζ_k , d_k y d_{k+1} . Cada uno de estos parámetros de forma se pueden interpretar de la siguiente manera:

- G_k : Es la generalización de la constante de Schwarzschild, un parámetro adimensional que permite seleccionar las curvas dentro de una familia de ovoides.
- O_k : Es un parámetro con unidades de longitud inversa, que representa la curvatura paraxial, también conocida como curvatura axial, de estas superficies, esto es, la curvatura en el vértice.
- T_k : Es un parámetro que caracteriza las diferentes familias de ovoides, por ejemplo para $T_k = 0$ se tiene la familia de cónicas como se mostrará más adelante.
- $S_k^2 = G_k O_k T_k$: Es un parámetro que ofrece una restricción para los primeros tres parámetros de forma.

El manejo de estos parámetros es lo que permite el diseño de superficies ópticas con características especiales, y su selección determina las propiedades ópticas de estas superficies. Las expresiones implícitas son de mucha ayuda dentro del diseño óptico, pero una expresión explícita e incluso una expresión paramétrica facilita el manejo de estas superficies dentro de los softwares usados para hacer diseño óptico, por lo que a continuación se muestra el desarrollo de una expresión paramétrica para la geometría de las superficies cartesianas.

2.2.1.1. Expresión paramétrica para las superficies cartesianas. A partir de la expresión (9), expresión cuadrática en z , se pueden obtener dos soluciones exactas para z en función de ρ , dadas por

$$z(\rho) = \zeta_k + \frac{1 + S_k \rho^2 \pm \sqrt{1 + (2S_k - O_k^2 G_k) \rho^2 + (S_k^2 - G_k O_k T_k) \rho^4}}{G_k O_k}, \quad (14)$$

donde la solución que tiene un significado óptico, es aquella cuyo vértice pasa por ζ_k en el eje z para un valor de ρ que tiende a cero. La solución que cumple con esta condición es la identificada con el signo negativo y es la que se tendrá en cuenta de aquí en adelante (Silva-Lora and Torres, 2020c). Adicionalmente, debido a que los parámetros de forma cumplen con la restricción $S_K^2 = G_k O_k T_k$, desaparece el termino cuártico en ρ que se encuentra dentro del radical, quedando nuestra expresión exacta de z en función de ρ , como

$$z(\rho) = \zeta_k + \frac{1 + S_k \rho^2 - \sqrt{1 + (2S_k - O_k^2 G_k) \rho^2}}{G_k O_k}, \quad (15)$$

en la cual se puede observar únicamente la dependencia de tres parámetros de forma, G_k , O_k , y S_k . Es así que, mediante la racionalización de la expresión (15), se puede formular de manera paramétrica las superficies cartesianas, expresadas como

$$z(\rho) = \zeta_k + \frac{(O_k + T_k \rho^2) \rho^2}{1 + S_k \rho^2 + \sqrt{1 + (2S_k - O_k^2 G_k) \rho^2}}, \quad (16)$$

$$r(\rho) = \pm \sqrt{\rho^2 - (z(\rho) - \zeta_k)^2}, \quad (17)$$

siendo z la coordenada axial y r la coordenada transversal, ambas formuladas usando el parámetro ρ . Esta formulación se puede extender fácilmente a sistemas ópticos conformados por un conjunto de superficies cartesianas (Silva-Lora and Torres, 2020c), donde se considera que k es el índice que identifica cada superficie dentro del sistema. Como ejemplo se tienen los parámetros geométricos para tres superficies cartesianas mostrados en Tab. 1, donde los parámetros ζ_k , d_k , y n_k , son las posiciones de los vértices de las superficies, los puntos estigmáticos, y los índices de refracción, respectivamente. Los valores de estos parámetros son usados en las expresiones (11)-(13) para calcular los parámetros de forma, G_k , O_k , T_k , y S_k , también mostrados en la Tab. 1. Como resultado, en la Fig. 2 se pueden ver las tres superficies cartesianas que resultan de estos parámetros de forma obtenidos.

Las superficies cartesianas son superficies de cuarto grado, pero estas contienen otras familias de superficies de ordenes inferiores, como es el caso de las cónicas. A este tipo de familias de superficies que se deriva de las superficies cartesianas se les conoce como casos particulares,

Tabla 1

Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para tres superficies cartesianas obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k .

k	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	60	0	160	1	1.7	-1.542136	0.048095	-5.437979539641945e-07	-0.000201
1	80	160	150	1.7	1.6	-4.602396	-0.016071	7.447314e-07	0.000235
2	100	150	140	1.6	1	8.642857	0.011667	7.921875e-06	0.000894

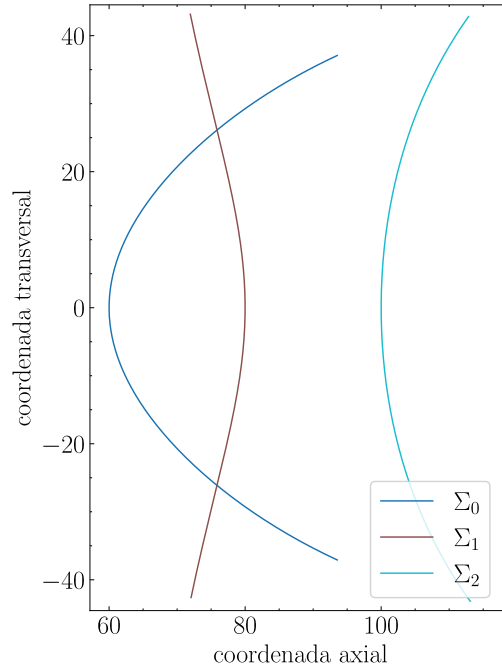


Figura 2. Conjunto de tres superficies cartesianas, Σ_0 , Σ_1 , y Σ_2 , con vértices localizados en diferentes posiciones sobre un eje común.

los cuales serán estudiados a continuación.

2.2.1.2. Casos particulares de las superficies cartesianas. Los casos particulares

son obtenidos escogiendo los valores correctos para los índices de refracción n_k y n_{k+1} y las distancias objeto e imagen d_k y d_{k+1} tal que $T_k = S_k = 0$, lo que permite que la Ec. (16) se reduzca

a

$$z(\rho) = \zeta_k + \frac{O_k \rho^2}{1 + \sqrt{1 - G_k O_k^2 \rho^2}}, \quad (18)$$

cuya fórmula puede representar de manera matemática todas las superficies cónicas, y puede ser escrita en función de r haciendo la sustitución $\rho^2 = r^2 + (z - \zeta_k)^2$. Al reemplazar $\rho^2 = r^2 + (z - \zeta_k)^2$ en (18) son obtenidas dos soluciones pero una de ellas es la de interés óptico, aquella que pasa por $z = \zeta_k$, escrita de la siguiente manera

$$z(r) = \zeta_k + \frac{O_k r^2}{1 + \sqrt{1 - (G_k + 1) O_k^2 r^2}}, \quad (19)$$

donde G_k , dada por la expresión (10), se reduce a la constante cónica o constante de Schwarzschild. La ecuación resultante, Ec. (19), es conocida como la ecuación de Schwarzschild (1905) para las superficies cónicas. Por consiguiente, la ecuación (16) establece una ecuación de Schwarzschild generalizada para las superficies cartesianas, superficies de cuarto grado, definida mediante los parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k . En la tabla 2 son mostradas todos los casos de superficies cónicas correspondientes a los casos particulares de las superficies cartesianas, para tanto superficies ópticas refractivas como para reflectivas, considerando diferentes valores de los índices de refracción y de los puntos conjugados correspondientes a las posiciones del objetos y la imagen puntual.

Para obtener las superficies cónicas a partir de las superficies cartesianas es necesario que

Tabla 2

Casos particulares de las las superficies cartesianas tanto para superficies ópticas refractivas como reflectivas, de acuerdo a los valores de los índices de refracción, n_k , y las posiciones de los puntos estigmáticos, d_k . Para cada combinación de estos parámetros son obtenidos los valores de los parámetros de forma para las superficies cónicas.

Superficie	n_{k+1}	d_k	d_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
Elipsoide refractiva	$n_{k+1} > n_k$	∞	d_{k+1}	$-\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2$	$\frac{n_{k+1}}{(d_{k+1}-\zeta_k)(n_{k+1}-n_k)}$	0	0
Hiperboloide refractiva	$n_{k+1} < n_k$	∞	d_{k+1}	$-\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2$	$-\frac{n_k}{(d_k-\zeta_k)(n_{k+1}-n_k)}$	0	0
Hiperboloide refractiva	$n_{k+1} > n_k$	d_k	∞	$-\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^2$	$-\frac{n_k}{(d_k-\zeta_k)(n_{k+1}-n_k)}$	0	0
Elipsoide refractiva	$n_{k+1} < n_k$	d_k	∞	$-\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^2$	$-\frac{n_k}{(d_k-\zeta_k)(n_{k+1}-n_k)}$	0	0
Esférica re- fractiva	$n_{k+1} \neq n_k$	d_k	d_k	$\frac{(n_{k+1}+n_k)^2}{n_k n_{k+1}}$	$\frac{1}{d_k-\zeta_k}$	$\frac{(n_{k+1}+n_k)^2}{4n_k n_{k+1} (d_k-\zeta_k)^3}$	$\frac{(n_k+n_{k+1})^2}{2n_k n_{k+1} (d_k-\zeta_k)^2}$
Elipsoide reflectiva	$-n_k$	$d_k > 0$	$d_{k+1} > 0$	$-\left(\frac{d_{k+1}-d_k}{d_{k+1}+d_k-2\zeta_k}\right)^2$	$\frac{d_{k+1}+d_k-2\zeta_k}{2(d_{k+1}-\zeta_k)(d_k-\zeta_k)}$	0	0
Elipsoide reflectiva		$d_k < 0$	$d_{k+1} < 0$				
Hiperboloide reflectiva		$d_k > 0$	$d_{k+1} < 0$				
Hiperboloide reflectiva		$d_k < 0$	$d_{k+1} > 0$				
Paraboloide reflectiva		∞	d_{k+1}	-1	$\frac{1}{2(d_{k+1}-\zeta_k)}$	0	0
Paraboloide reflectiva		d_k	∞		$\frac{1}{2(d_k-\zeta_k)}$	0	0

$T_k = S_k = 0$, pero como se observa en Tab. 2 existen condiciones adicionales para obtener como resultado una superficies esférica. De las expresiones (16) y (17), junto con las Eqs. (10)-(13), permite describir superficies ópticas con la geometría de las interfaces siendo las superficies cartesianas. Por ende, mediante la formulación obtenida, es posible diseñar sistemas ópticos que cumplen con la propiedad de estigmatismo, compuestos por un conjunto de superficies cartesianas. A continuación, se mostrará como esta formulación es usada para diseñar sistemas ópticos compuestos por dos superficies, a los cuales aquí se llaman lentes singletes ovoides estigmáticas.

2.2.2. Lentes singletes ovoides estigmáticas compuestas por dos superficies cartesianas. Las *lentes singletes ovoides estigmáticas* (LSOE) son lentes compuestas por dos superficies cartesianas (Valencia-Estrada and Bedoya-Calle, 2012), lo cual resulta en que la lente es estigmática para un par de puntos. Como es mostrado en la Fig. 14, y considerando que todas las distancias definidas son medidas desde el origen de coordenadas O , los parámetros que describen las LSOE son los siguientes:

- $d_0 = \overline{OP_0}$ es la distancia del punto objeto.
- $d_2 = \overline{OP_2}$ es la distancia del punto imagen.
- $d_1 = \overline{OP_1}$ es la distancia del punto intermedio que coincide tanto con la posición de la imagen que produce la primera superficie como con la posición del objeto de la segunda superficie.
- n_0 es el índice de refracción del espacio objeto.
- n_1 es el índice de refracción de la lente.

- n_2 es el índice de refracción del espacio imagen.
- $\overline{OV_0} = \zeta_0$ es la posición axial de la primera superficie.
- $\overline{OV_1} = \zeta_1$ es la posición axial de la segunda superficie.

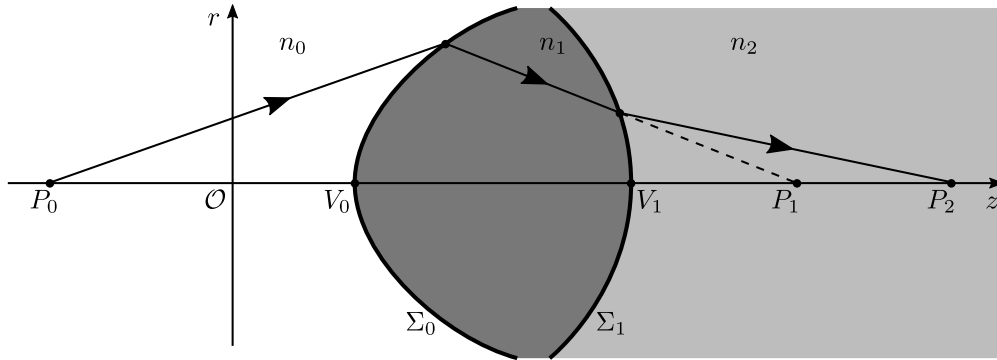


Figura 3. Esquema gráfico de una LSOE generada por la intersección de dos superficies cartesianas. La superficie cartesiana Σ_0 es la superficie capaz de formar una imagen puntual perfecta en P_1 a partir de un objeto puntual ubicado en P_0 . La superficie Σ_1 es la superficie capaz de formar una imagen puntual perfecta en P_2 a partir de un objeto puntual en P_1 .

Bajo esta formulación de lentes conformadas por superficies cartesianas, se considera que la primera superficie, cuyo vértice pasa por el punto V_0 , tiene como puntos estigmáticos a $\overline{V_0P_0} = d_0 - \zeta_0$ y $\overline{V_0P_1} = d_1 - \zeta_0$, y la segunda superficie, cuyo vértice pasa por el punto V_1 , tiene como puntos estigmáticos a $\overline{V_1P_1} = d_1 - \zeta_1$ y $\overline{V_1P_2} = d_2 - \zeta_1$. De aquí, las superficies que componen la lente están ubicadas de tal manera que el estigmatismo es preservado.

A partir de las expresiones (16) y (17) se definen las coordenadas de ambas superficies. Para

la primera superficie (Σ_0) las coordenadas están dadas por

$$z_0(\rho_0) = \zeta_0 + \frac{(O_0 + T_0\rho_0^2)\rho_0^2}{1 + S_0\rho_0^2 + \sqrt{1 + (2S_0 - O_0^2G_0)\rho_0^2}}, \quad (20)$$

$$r_0(\rho_0) = \pm\sqrt{\rho_0^2 - (z_0(\rho_0) - \zeta_0)^2}, \quad (21)$$

donde $\rho_0^2 = x^2 + y^2 + (z_0 - \zeta_0)^2$ y donde

$$G_0 = \frac{\left(\frac{n_1^2}{d_0 - \zeta_0} - \frac{n_0^2}{d_1 - \zeta_0}\right)^2}{n_0 n_1 \left(\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0}\right) \left(\frac{n_1}{d_0 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_1 - \zeta_0}\right)}, \quad (22)$$

$$O_0 = \frac{\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0}}{n_1 - n_0}, \quad (23)$$

$$T_0 = \frac{\left(\frac{n_1 + n_0}{(d_1 - \zeta_0)(d_0 - \zeta_0)}\right)^2 (n_1 - n_0)}{4n_0 n_1 \left(\frac{n_1}{d_0 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_1 - \zeta_0}\right)}, \quad (24)$$

$$S_0 = \frac{\frac{(n_1 + n_0)}{(d_1 - \zeta_0)(d_0 - \zeta_0)} \left(\frac{n_1^2}{(d_0 - \zeta_0)} - \frac{n_0^2}{(d_1 - \zeta_0)}\right)}{2n_0 n_1 \left(\frac{n_1}{d_0 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_1 - \zeta_0}\right)}. \quad (25)$$

Y para la segunda superficie (Σ_1), las coordenadas están definidas por

$$z_1(\rho_1) = \zeta_1 + \frac{(O_1 + T_1\rho_1^2)\rho_1^2}{1 + S_1\rho_1^2 + \sqrt{1 + (2S_1 - O_1^2G_1)\rho_1^2}}, \quad (26)$$

$$r_1(\rho_1) = \pm\sqrt{\rho_1^2 - (z_1(\rho_1) - \zeta_1)^2}, \quad (27)$$

donde $\rho_1^2 = x^2 + y^2 + (z_1 - \zeta_1)^2$ y donde

$$G_1 = \frac{\left(\frac{n_2^2}{d_1 - \zeta_1} - \frac{n_1^2}{d_2 - \zeta_1} \right)^2}{n_1 n_2 \left(\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1} \right) \left(\frac{n_2}{d_1 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_2 - \zeta_1} \right)}, \quad (28)$$

$$O_1 = \frac{\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1}}{n_2 - n_1}, \quad (29)$$

$$T_1 = \frac{\left(\frac{n_2 + n_1}{(d_2 - \zeta_1)(d_1 - \zeta_1)} \right)^2 (n_2 - n_1)}{4n_1 n_2 \left(\frac{n_2}{d_1 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_2 - \zeta_1} \right)}, \quad (30)$$

$$S_1 = \frac{\frac{(n_2 + n_1)}{(d_2 - \zeta_1)(d_1 - \zeta_1)} \left(\frac{n_2^2}{d_1 - \zeta_1} - \frac{n_1^2}{d_2 - \zeta_1} \right)}{2n_1 n_2 \left(\frac{n_2}{d_1 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_2 - \zeta_1} \right)}. \quad (31)$$

Las superficies cartesianas han generado un nuevo interés asociado a su papel en aplicaciones modernas, y a su fabricación mediante las herramientas actuales de pulido (Valencia-Estrada et al., 2017b; Silva-Lora and Torres, 2023), por lo que a continuación se mostrarán algunos diseños de LSOE. Adicionalmente, se analizará cómo la variación en todo el rango de valores de punto intermedio, d_1 , y espesor axial, $\zeta_1 - \zeta_0$, modifican los valores de los parámetros de forma, Eqs. (10)-(13), obteniendo así diferentes formas para las LSOE resultantes.

Volvamos a la Eqs. (23) y (29), fórmulas para la curvatura axial de las superficies que componen la LSOE. Como se puede observar, ambas expresiones para la curvatura axial tienen una dependencia común con d_1 . Si se mantienen fijos los valores de los índices de refracción, n_0 , n_1 , y n_2 , la distancia al objeto d_0 , la distancia a la imagen d_2 , y las posiciones de los vértices de las superficies, ζ_0 , y ζ_1 , se pueden caracterizar las variaciones de las curvaturas axiales O_0 y O_1 . En la Fig. 4, se muestra el comportamiento de estas curvaturas que componen una LSOE,

donde las curvaturas paraxiales de la primera superficie, $O_0(d_1)$, y la curvatura paraxial de la segunda superficie, $O_1(d_1)$, se identifican mediante curvas recíprocas de líneas continuas y a trazos, respectivamente. Como se puede ver, se pueden observar asintotas verticales, asociadas con las posiciones de los vértices de las superficies, ζ_0 y ζ_1 ; y asintotas horizontales, asociadas con los casos para cuando $d_1 \rightarrow \infty$, las cuales se pueden formular como

$$\lim_{d_1 \rightarrow \infty} O_0 = -\frac{n_0}{(d_0 - \zeta_0)(n_1 - n_0)}, \quad (32)$$

$$\lim_{d_1 \rightarrow \infty} O_1 = -\frac{n_2}{(d_2 - \zeta_1)(n_1 - n_2)}. \quad (33)$$

Adicionalmente, se pueden identificar casos en los que una de las dos superficies tiene curvatura axial igual a cero. Estos casos se pueden expresar de la siguiente manera,

$$d_1 \Big|_{O_0=0} = \zeta_0 + \frac{n_1}{n_0}(d_0 - \zeta_0), \quad (34)$$

$$d_2 \Big|_{O_1=0} = \zeta_1 + \frac{n_1}{n_2}(d_2 - \zeta_1), \quad (35)$$

donde el primer valor de d_1 permite el diseño de lentes quasi-plano-convexas y lentes quasi-plano-cóncavas. A partir de esto, se puede deducir las formas de las lentes LSOE considerando cierto rango de valores para el punto de imagen intermedia, d_1 .

Otra manera de caracterizar estas lentes por su forma es mediante el *factor de forma de las LSOE*, el cual se formula a partir de las curvaturas axiales de las superficies que conforma la lente,

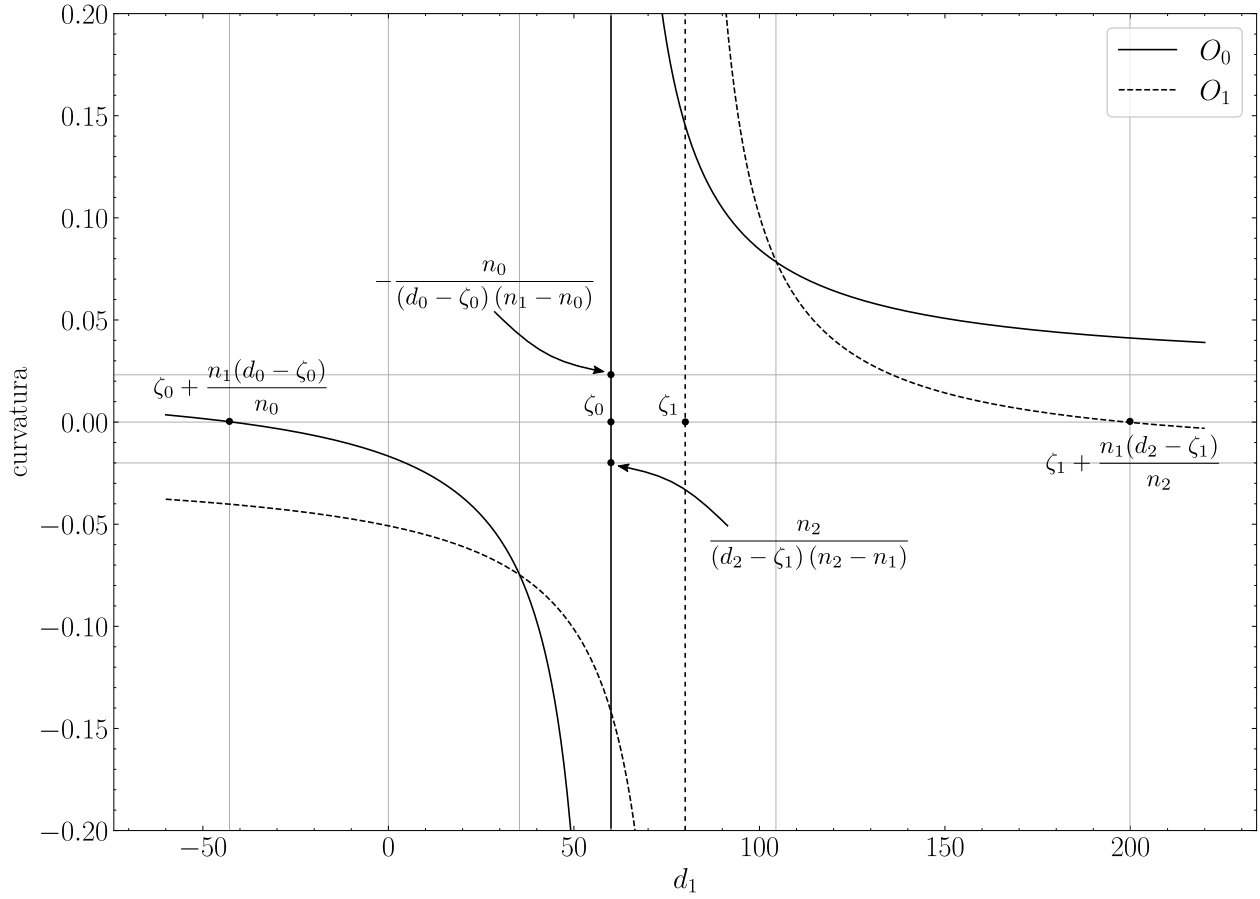


Figura 4. Gráfica del comportamiento de O_0 y O_1 con respecto a variaciones de d_1 , para una LSOE dada por los parámetros $\zeta_0 = 60$, $\zeta_1 = 80$, $d_0 = 0$, $d_2 = 150$, $n_0 = 1.0$, $n_1 = 1.7$, y $n_2 = 1.0$.

esto es

$$\sigma = \frac{O_0 + O_1}{O_0 - O_1} = \frac{(n_2 - n_1) \left(\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0} \right) + (n_1 - n_0) \left(\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1} \right)}{(n_2 - n_1) \left(\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0} \right) - (n_1 - n_0) \left(\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1} \right)}. \quad (36)$$

Debido a que no existe una manera de obtener a partir de un valor de σ dado, los valores de los parámetros de forma de una LSOE, Eqs. (22)-(25) y Eqs- (28)-(31), es necesario derivar una expresión para obtener el valor de d_1 a partir de un valor de σ . Usando la expresión del factor

de forma, Ec. (36), es posible derivar esta relación. Si reordenamos la expresión (36), llevando el denominador de la parte derecha a multiplicar a la izquierda de la expresión, y llevando lo que queda a la derecha a restar a la parte izquierda, se obtiene que

$$\begin{aligned} & \sigma \left[(n_2 - n_1) \left(\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0} \right) - (n_1 - n_0) \left(\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1} \right) \right] \\ & - (n_2 - n_1) \left(\frac{n_1}{d_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{d_0 - \zeta_0} \right) + (n_1 - n_0) \left(\frac{n_2}{d_2 - \zeta_1} - \frac{n_1}{d_1 - \zeta_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

cuya expresión se puede llevar a la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \sigma(n_2 - n_1)(d_1 - \zeta_1)(d_2 - \zeta_1) [n_1(d_0 - \zeta_0) - n_0(d_1 - \zeta_0)] \\ & - \sigma(n_1 - n_0)(d_0 - \zeta_0)(d_1 - \zeta_0) [n_2(d_1 - \zeta_1) - n_1(d_2 - \zeta_1)] \\ & - (n_2 - n_1)(d_1 - \zeta_1)(d_2 - \zeta_1) [n_1(d_0 - \zeta_0) - n_0(d_1 - \zeta_0)] \\ & + (n_1 - n_0)(d_0 - \zeta_0)(d_1 - \zeta_0) [n_2(d_1 - \zeta_1) - n_1(d_2 - \zeta_1)] = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

a partir de donde se puede obtener una ecuación cuadrática, expresada como

$$C_2 d_1^2 + C_1 d_1 + C_0 = 0, \quad (39)$$

siendo

$$C_2 = n_2(d_0 - \zeta_0)(n_0 - n_1)(\sigma + 1) + n_0(d_2 - \zeta_1)(n_1 - n_2)(\sigma - 1), \quad (40)$$

$$C_1 = n_1(d_0 - \zeta_0)(d_2 - \zeta_1)[n_2(\sigma - 1) - n_0(\sigma + 1) + 2n_1] \\ + (\zeta_0 + \zeta_1)[n_2(n_1 - n_0)(\sigma + 1)(d_0 - \zeta_0) + n_0(n_2 - n_1)(\sigma - 1)(d_2 - \zeta_1)], \quad (41)$$

$$C_0 = n_1(d_0 - \zeta_0)(d_2 - \zeta_1)[\zeta_0(n_0 - n_1)(\sigma + 1) + \zeta_1(n_1 - n_2)(\sigma - 1)] \\ + \zeta_0\zeta_1[n_2(d_0 - \zeta_0)(\sigma + 1)(n_0 - n_1) + n_0(d_2 - \zeta_1)(\sigma - 1)(n_1 - n_2)]. \quad (42)$$

De aquí, a partir de la Ec. (39) se puede obtener una expresión para obtener el valor de d_1 a partir de un factor de forma dado, cuya expresión es

$$d_1 = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_2C_0}}{2C_2}, \quad (43)$$

donde los resultados obtenidos con el signo negativo de la expresión son para el caso en que $\zeta_0 < d_1 < \zeta_1$, y el caso contrario para el resto de valores de d_1 , $d_1 < \zeta_0 \wedge d_1 > \zeta_1$.

Como ejemplo, en la Fig. 5 se muestran cinco formas de LSOE para diferentes valores del factor de forma, σ . Se observa que las lentes mostradas van desde un valor $\sigma = -1$ hasta $\sigma = 1$, pasando de una lente que parece ser plano-convexa a una lente que parece ser convexa-plana, con lentes intermedias de tipo biconvexa. Entre las lentes intermedias se puede ver que para el caso en que $\sigma = 0$ se obtiene como resultado una LSOE simétrica.

Existen infinitudes de formas para las lentes conformadas por dos superficies que no se

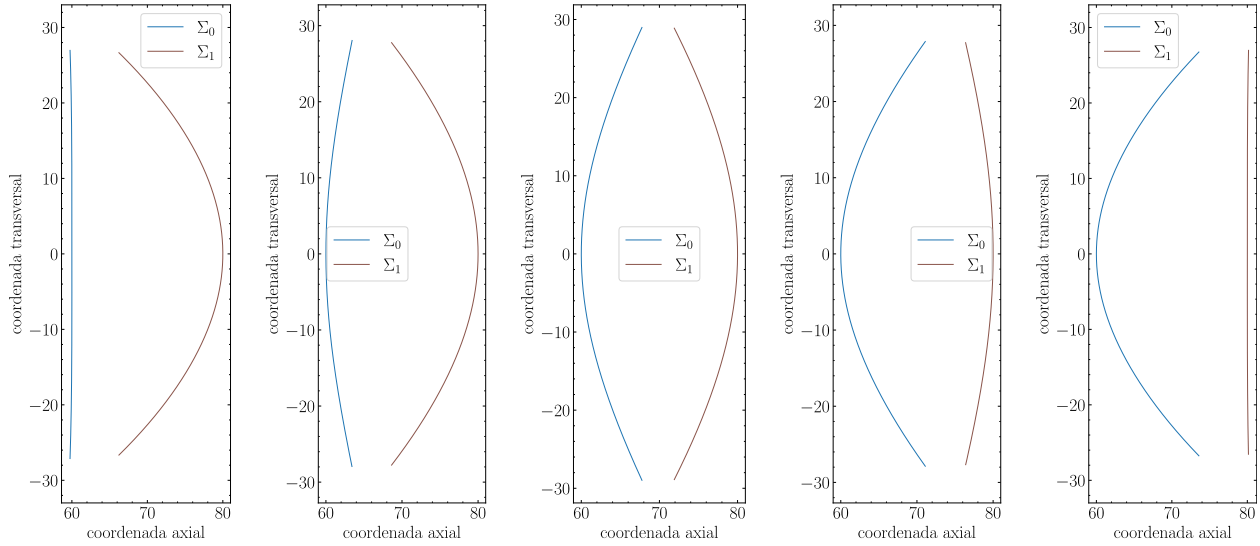


Figura 5. Cambio de forma de las LSOE con respecto al valor de σ , para valores de $\zeta_0 = 60$, $\zeta_1 = 80$, $d_0 = 0$, $d_2 = 150$, $n_0 = n_2 = 1$, $n_1 = 1.7$. De izquierda a derecha se tienen lentes con valores de $\sigma = -1$ ($d_1 = -42$), $\sigma = -0.5$ ($d_1 = -125.773555$), $\sigma = 0$ ($d_1 = -1358.070024$), $\sigma = 0.5$ ($d_1 = 334.914229$), y $\sigma = 1.0$ ($d_1 = 199$).

muestran en la Fig. 5, por lo que en la Fig. 6 son incluidas otras formas de LSOE obtenidas a partir de diferentes valores del factor de forma σ y para diferentes configuraciones del objeto puntual y su imagen. En la primera fila encontramos, a la izquierda, lentes que forman imágenes reales a partir de objetos reales, y a la derecha, lentes que forman imágenes virtuales a partir de objetos virtuales. En la segunda fila, ambos conjuntos de lentes forman imágenes virtuales a partir de objetos reales, de izquierda a derecha se tienen los casos en que $|d_2 - \zeta_1| < 0$ y $|d_2 - \zeta_1| > 0$, respectivamente. En la última fila se muestran los casos para cuando la imagen es real y formada a partir de un objeto virtual, donde de izquierda a deracha se considera que $|d_2 - \zeta_1| < 0$ y $|d_2 - \zeta_1| > 0$, respectivamente. Todos estas formas de LSOE fueron derivadas considerando que $n_1 > n_0 = n_2$.

Debido a que la lente es estigmática para un par de puntos, para objetos puntuales fuera de los puntos estigmáticos se forma una imagen con aberraciones, por lo que es necesario considerar limitar

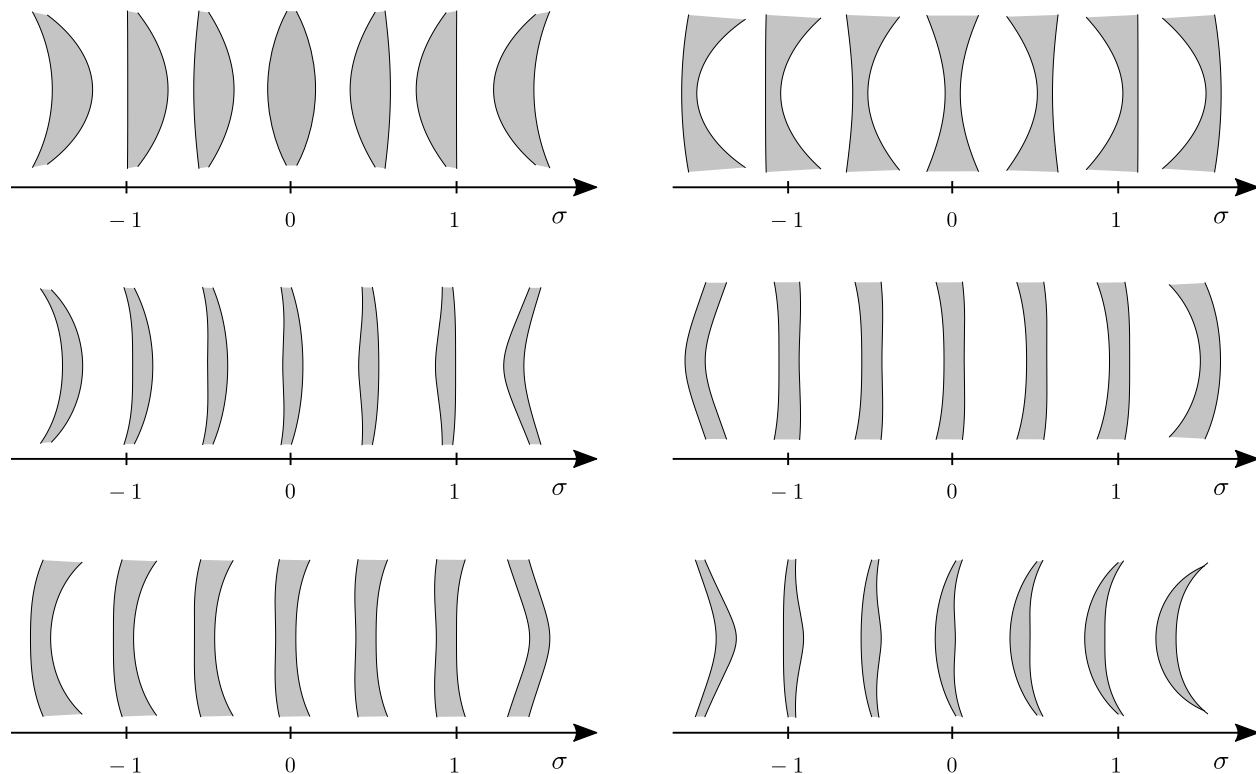


Figura 6. Diferentes formas de LSOE de acuerdo a su factor de forma σ obtenino a partir de variaciones de d_1 y valores fijos del resto de los parámetros del sistema.

los rayos que acceden al sistema a un régimen paraxial, consiguiendo una imagen aproximadamente estigmática.

Una superficie cartesiana refractiva es estigmática para un solo par de puntos objeto e imagen, y para valores fijos de los índices de refracción. Por el contrario, Una LSOE tiene un número infinito de formas para valores fijos de las posiciones del objeto y la imagen, y para valores fijos de los índices de refracción. Esto es posible gracias al grado de libertad que ofrece la posición de la imagen intermedia, dada por $z = d_1$, o el factor de forma σ . Este grado de libertad permite buscar entre ese número infinito de posibilidades una lente con cierta característica adicional a la propiedad de estigmatismo. Para dos superficies existe un grado de libertad dado por la imagen

intermedia de la lente, pero para el caso en que el sistema esté conformado por un número N de superficies, existiran $N - 1$ grados de libertad. Estos grados de libertad adicionales permitirán encontrar lentes que cumplan con características adicionales, tales como valores específicos del aumento, de la longitud focal, la corrección de la coma, entre otras.

2.2.3. Lentes ovoides estigmáticas compuestas por un conjunto de superficies

cartesianas. La formulación de este tipo de sistemas estigmáticos para el caso de N superficies cartesianas es directa, ya que las ecuaciones (16)-(17) proporcionan, por medio del índice $\{k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq N - 1\}$, las coordenadas de las N superficies. Para obtener las coordenadas de todas las superficies que componen el sistema, es necesario primero definir todos los valores de d_k ($N + 1$ valores), n_k ($N + 1$ valores) y ζ_k (N valores) para luego ser reemplazados en las expresiones (10)-(13) por medio de las cuales se obtienen los parámetros de forma de cada una de esas superficies, y luego estos parámetros son usados para encontrar las coordenadas z y r , de la misma manera como se hizo para las expresiones de las coordenadas para el caso de una LSOE.

Un ejemplo de un sistema de múltiples superficies cartesianas puede ser un sistema conformado por cuatro superficies, cuyas características son las mostrada en la Tab. 3. Este sistema tiene como característica que a partir de un objeto real ubicado a 5 unidades métricas de la primera superficie, es posible formar una imagen puntual real en el infinito, esto quiere decir que los rayos que provienen del objeto puntual serán colimados por el sistema, de tal manera que los rayos que emergen del sistema saldrán paralelos al eje óptico. Las formas de las superficies que conforman el sistema son mostradas en la Fig. 7

Hasta el momento se ha deducido, por medio de la teoría del estigmatismo, el comporta-

Tabla 3

Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para un sistema estigmático conformado por cuatro superficies cartesianas, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k .

k	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	5	0	-5	1	1.7	-18.666993	0.042857	-0.001251	0.031632
1	18	-5	-10	1.7	1	3.188139	-0.054569	-0.000105	0.004273
2	20	-10	-100	1	1.8	-5.826067	0.022916	-1.300942e-06	0.000417
3	35	-100	∞	1.8	1	-0.308642	-0.016667	0.0	0.0

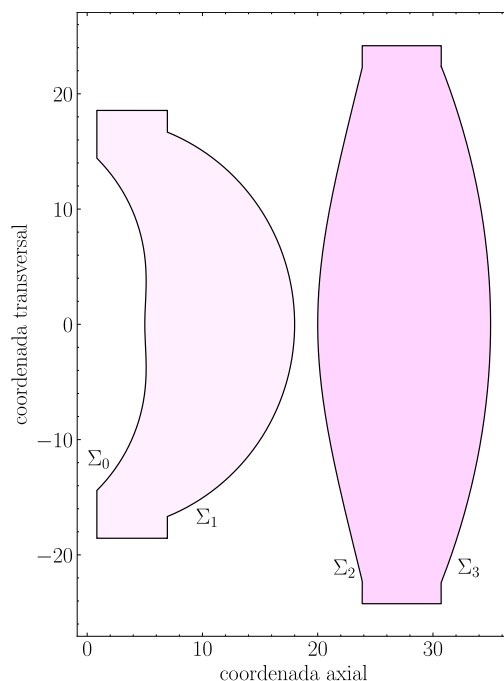


Figura 7. Sistema estigmático conformado por cuatro superficies cartesianas, que permite colimar los rayos procedentes de un objeto puntual real ubicado a 5 unidades métricas medidos desde la primera superficie.

miento y las características de las lentes que se pueden derivar a partir de la teoría desarrollada en esta tesis. Por este motivo, es requerido un método para llevar a cabo el trazado de rayos a través de estos sistemas conformados por superficies cartesianas, y por medio de este poder analizar el comportamiento de los rayos, estudiar otro tipo de características como la formación de imágenes puntuales fuera de eje, y analizar las aberraciones geométricas y cromáticas. En el siguiente ca-

pítulo se mostrará un método para llevar a cabo el trazado de rayos, de manera exacta, en lentes conformadas por superficies cartesianas.

3. Trazado de rayos en sistemas conformados por superficies cartesianas

3.1. Introducción

En este capítulo, se elaborará una formulación analítica para el trazado de rayos en sistemas que están formados por superficies cartesianas. Esta formulación es esencial para visualizar el comportamiento de un grupo de rayos al atravesar el sistema, lo que nos permitirá caracterizar las aberraciones de rayo bajo diversas condiciones, incluyendo la condición de estigmatismo. Es importante destacar que, el desarrollo que se presentará a continuación es analítico y exacto, y se basa en tres pasos fundamentales:

1. La búsqueda de la intersección entre una línea recta y una superficie cartesiana.
2. La obtención de la normal en la superficie en el punto de intersección.
3. La aplicación de la ley de Snell-Descartes.

3.2. Método para el trazado de rayos en sistemas compuestos por superficies cartesianas

La formulación de un método para el trazado de rayos exacto, mediante la cual sea posible verificar la trayectoria de un cono de rayos cuando atraviesan un sistema óptico, es fundamental en el área del diseño óptico. Este método, combinada con procesos de optimización, es utilizado para encontrar la mejor configuración de un conjunto de superficies ópticas capaces de funcionar como un sistema óptico de alta calidad.

En la Fig. 8 se muestra la trayectoria $\overline{AI_kB}$ que sigue un rayo que es refractado por la k -ésima superficie (Σ_k) dentro de un sistema óptico conformado por superficies cartesianas. Esta superficie

se encuentra ubicada a una distancia $\zeta_k = \overline{OV_k}$ (medida desde el origen de coordenadas O), y separa los medios con índices de refracción n_k , y n_{k+1} . El rayo bajo consideración es refractado en el punto I_k sobre las superficies Σ_k , para luego pasar por al punto B . Para desarrollar un método de trazado de rayos para sistemas conformados por superficies cartesianas, es indispensable obtener primeramente las coordenadas del punto I_k . Estas coordenadas se pueden obtener a partir de las condiciones iniciales, las coordenadas de partida del rayo incidente y el vector unitario que define su dirección de propagación. A partir de estos elementos se expresan el vector unitario incidente y el vector unitario normal a la superficie, claves para llevar a cabo el cálculo del vector unitario refractado, mediante la aplicación de la ley de Snell-Descartes. Este mismo proceso se repite para el cálculo del punto de intersección entre el rayo refractado y la superficie Σ_{k+1} , donde ahora el vector refractado de la superficie Σ_k pasa a ser el vector incidente sobre la superficie Σ_{k+1} .

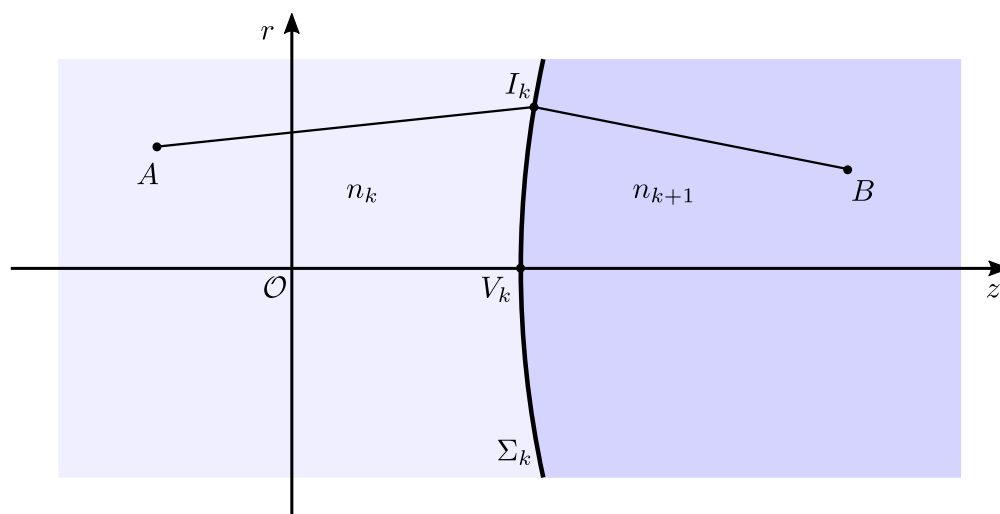


Figura 8. Comportamiento de un rayo viajando desde el punto A al punto B . El rayo mostrado interseca la superficie Σ_k en el punto I_k , y cuyo trayecto, trayecto $\overline{AI_kB}$, es el predicho por la ley de Snell-Descartes de acuerdo a los valores de los índices de refracción n_k , y n_{k+1}

3.2.1. Punto de intersección entre un segmento de rayo y una superficie cartesiana.

na. El punto clave dentro de este método de trazado de rayos es el cálculo del punto de intersección de un segmento de la trayectoria del rayo, segmento $\overline{AI_k}$, con una superficie cartesiana, superficie Σ_k (ver la Fig. 8). Considerando que el sistema de coordenadas es un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) , con $r^2 = x^2 + y^2$, dentro del cual se definen el punto fuente, A , con coordenadas (x_o, y_o, z_o) , y el punto de intersección I_k , sobre la superficie Σ_k , con coordenadas (x_k, y_k, z_k) . Si $\hat{u}_k = [(u_x)_k, (u_y)_k, (u_z)_k]$ es el vector unitario que indica la dirección de A a I_k , se define el segmento $\overline{AI_k}$ mediante las siguientes expresiones paramétricas

$$x' = \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_x, \quad (44)$$

$$y' = \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_y, \quad (45)$$

$$z' = \tau_k, \quad (46)$$

siendo

$$b_x = -\frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} (z_o - \zeta_k) + x_o, \quad (47)$$

$$b_y = -\frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} (z_o - \zeta_k) + y_o, \quad (48)$$

donde $\tau_k = z - \zeta_k$ es el parámetro de la expresión, y $\rho'^2 = x'^2 + y'^2 + \tau_k^2$ es la distancia medida desde el vértice de la superficie en cuestión y un punto sobre el segmento $\overline{AI_k}$. Si se reemplazan

las expresiones (44)-(46) en ρ'^2 se obtiene que

$$\rho'^2 = \left[\frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_x \right]^2 + \left[\frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_y \right]^2 + \tau_k^2. \quad (49)$$

Volviendo a la expresión (9) del capítulo anterior, expresión implícita que caracteriza las superficies cartesianas, y considerando que $\rho' = \rho$ en el punto de intersección, podemos reemplazar en (9) el valor obtenido de (49), a partir de lo cual se llega a

$$\begin{aligned} & O_k G_k \tau_k^2 - 2\tau_k - 2S_k \left(\left[\frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_x \right]^2 + \left[\frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_y \right]^2 + \tau_k^2 \right) \tau_k \\ & + O_k \left(\left[\frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_x \right]^2 + \left[\frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_y \right]^2 + \tau_k^2 \right) \\ & + T_k \left(\left[\frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_x \right]^2 + \left[\frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \tau_k + b_y \right]^2 + \tau_k^2 \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

de donde, reordenando los términos de τ_k , se obtiene un polinomio de cuarto orden escrito como (Silva-Lora and Torres, 2020c)

$$Q_4 \tau_k^4 + Q_3 \tau_k^3 + Q_2 \tau_k^2 + Q_1 \tau_k + Q_0 = 0, \quad (51)$$

con sus coeficientes dados por

$$Q_4 = \frac{T_k}{(u_z)_k^4}, \quad (52)$$

$$Q_3 = \frac{-2S_k + 4T_k \left(b_x \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} + b_y \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \right)}{(u_z)_k^2}, \quad (53)$$

$$Q_2 = G_k O_k + \frac{O_k}{(u_z)_k^2} - 4S_k \left(b_x \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} + b_y \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \right) + 4T_k \left(b_x \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} + b_y \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \right)^2 + \frac{2T_k (b_x^2 + b_y^2)}{(u_z)_k^2}, \quad (54)$$

$$Q_1 = 2O_k \left(b_x \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} + b_y \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \right) + 4T_k \left(b_x \frac{(u_x)_k}{(u_z)_k} + b_y \frac{(u_y)_k}{(u_z)_k} \right) (b_x^2 + b_y^2) - 2S_k (b_x^2 + b_y^2) - 2, \quad (55)$$

$$Q_0 = \left[O_k + T_k (b_x^2 + b_y^2) \right] (b_x^2 + b_y^2). \quad (56)$$

La expresión (51) puede ser resuelta mediante el uso de un método analítico, como por ejemplo el método de Ferrari (Turnbull, 1957; Shmakov, 2011), lo que da como resultado las raíces de esta expresión polinomial, que consta de cuatro valores de $\tau_k = z - \zeta_k$, a partir de donde se obtiene el valor asociado de la coordenada z donde la representación del rayo se cruza con la superficie cartesiana Σ_k . Reemplazando z en las Eqs. (44)-(46), se obtienen los valores de las coordenadas (x, y, z) del punto I_k , necesarias para definir el vector unitario normal a la superficie Σ_k en ese punto.

Una característica importante de las lentes es su espesor a cualquier posición transversal, la cual puede ser abordada a partir del resultado anterior. Consideremos que el rayo que incide sobre

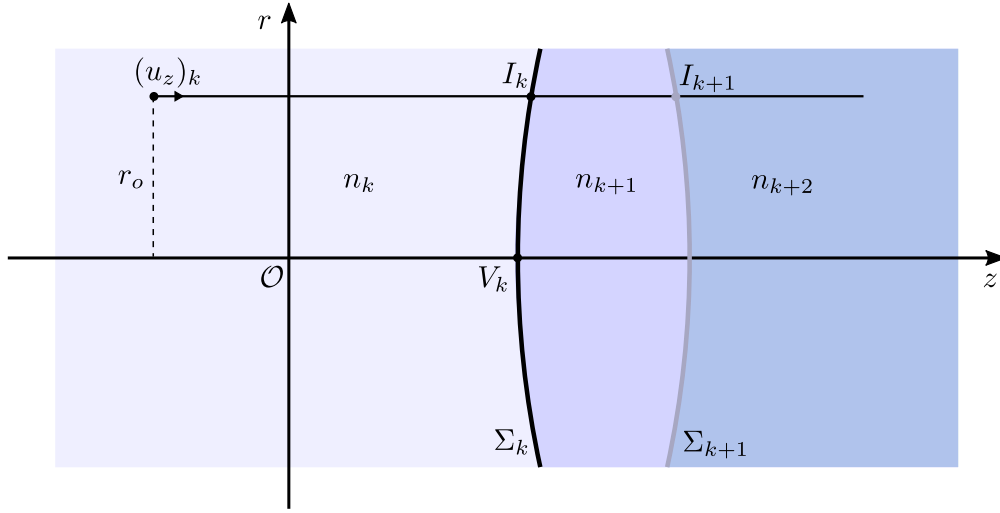


Figura 9. Línea paralela al eje óptico que interseca las superficies Σ_k y Σ_{k+1} en los puntos I_k e I_{k+1} , respectivamente.

la k -ésima superficie lo hace de manera paralela al eje óptico, como se muestra en la Fig. 9, lo que nos lleva a que $(u_x)_k = (u_y)_k = 0$, $(u_z)_k = 1$, $b_x = x_o$, y $b_y = y_o$. De aquí, se obtienen los siguientes coeficientes para la Ec. (51):

$$Q_4 = T_k, \quad (57)$$

$$Q_3 = -2S_k + 4T_k, \quad (58)$$

$$Q_2 = O_k(G_k + 1) + 2T_k r_o^2, \quad (59)$$

$$Q_1 = -2(S_k r_o^2 + 1), \quad (60)$$

$$Q_0 = (O_k + T_k r_o^2) r_o^2, \quad (61)$$

con $r_o^2 = x_o^2 + y_o^2$. Estos coeficientes pueden ser usados para obtener los valores de z de cada superficie a una distancia r_o medida desde el eje óptico, donde la resta de estos valores de z de

dos superficies consecutivas (p. ej. las superficies Σ_k y Σ_{k+1}) es el espesor que tiene la lente a una distancia transversal dada por $r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$.

3.2.2. Aplicación de la ley de Snell-Descartes en superficies cartesianas. La ley de Snell-Descartes rige los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. Esta ley se usa para calcular la trayectoria de un rayo cuando atraviesa una interfaz que separa dos medios de distinto índice de refracción, y aquí es usada para llevar a cabo este proceso en sistemas compuestos por un conjunto de superficies cartesianas. Las componente clave para aplicar esta ley es el vector unitario normal a la superficie, calculado según el punto de intersección del trayecto de un rayo y dicha superficie, y el vector incidente. Para calcular el vector unitario normal a la superficie, se hace uso de la expresión implícita de superficies cartesianas, Ec. (9),

$$f(x, y, z) = O_k G_k \tau_k^2 - 2(1 + S_k \rho^2) \tau_k + (O_k + T_k \rho^2) \rho^2, \quad (62)$$

siendo $\tau = z - \zeta_k$ y $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, por medio de cuya expresión se pueden calcular sus derivadas con respecto a x , y y z , dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \left(O_k x_k - 2S_k \tau_k x_k + 2T_k \rho^2 x_k \right), \quad (63)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \left(O_k y_k - 2S_k \tau_k y_k + 2T_k \rho^2 y_k \right), \quad (64)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \left(G_k O_k \tau_k + O_k \tau_k - S_k \left(2\tau_k^2 + \rho^2 \right) + 2T_k \tau_k \rho^2 - 1 \right), \quad (65)$$

a partir de las cuales se puede expresar el vector normal a una superficie cartesiana como,

$$\hat{N} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \quad (66)$$

Usando la expresión (66), y considerando que

$$\hat{u} = \frac{(x - x_o)\hat{i} + (y - y_o)\hat{j} + (z - z_o)\hat{k}}{\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}}, \quad (67)$$

es el vector unitario incidente, se puede expresar el vector unitario refractado por medio de la ley de Snell-Descartes como,

$$\hat{u}' = \frac{n_k}{n_{k+1}}\hat{u} - \left[\frac{n_k}{n_{k+1}} (\hat{N} \cdot \hat{u}) + \sqrt{1 - \left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2 (1 - (\hat{N} \cdot \hat{u})^2)} \right] \hat{N}. \quad (68)$$

La Ec. (68), junto con el vector normal, Ec. (66), y el vector unitario incidente, Ec. (67), permite el cálculo de la trayectoria de un rayo a través de un conjunto de superficies cartesianas. El proceso que se lleva a cabo para conseguir tal fin es un proceso iterativo, que considera que el vector incidente posterior es igual al valor del vector refractado que se está evaluando.

Mediante la metodología descrita, se pueden construir herramientas computacionales que permitan observar el comportamiento de un conjunto de rayos al atravesar cierto sistema compuesto por superficies cartesianas. En la Fig. 10 se encuentra algunos ejemplos que muestran el comportamiento de un conjunto de rayos al viajar a través de sistemas compuestos por dos superficies

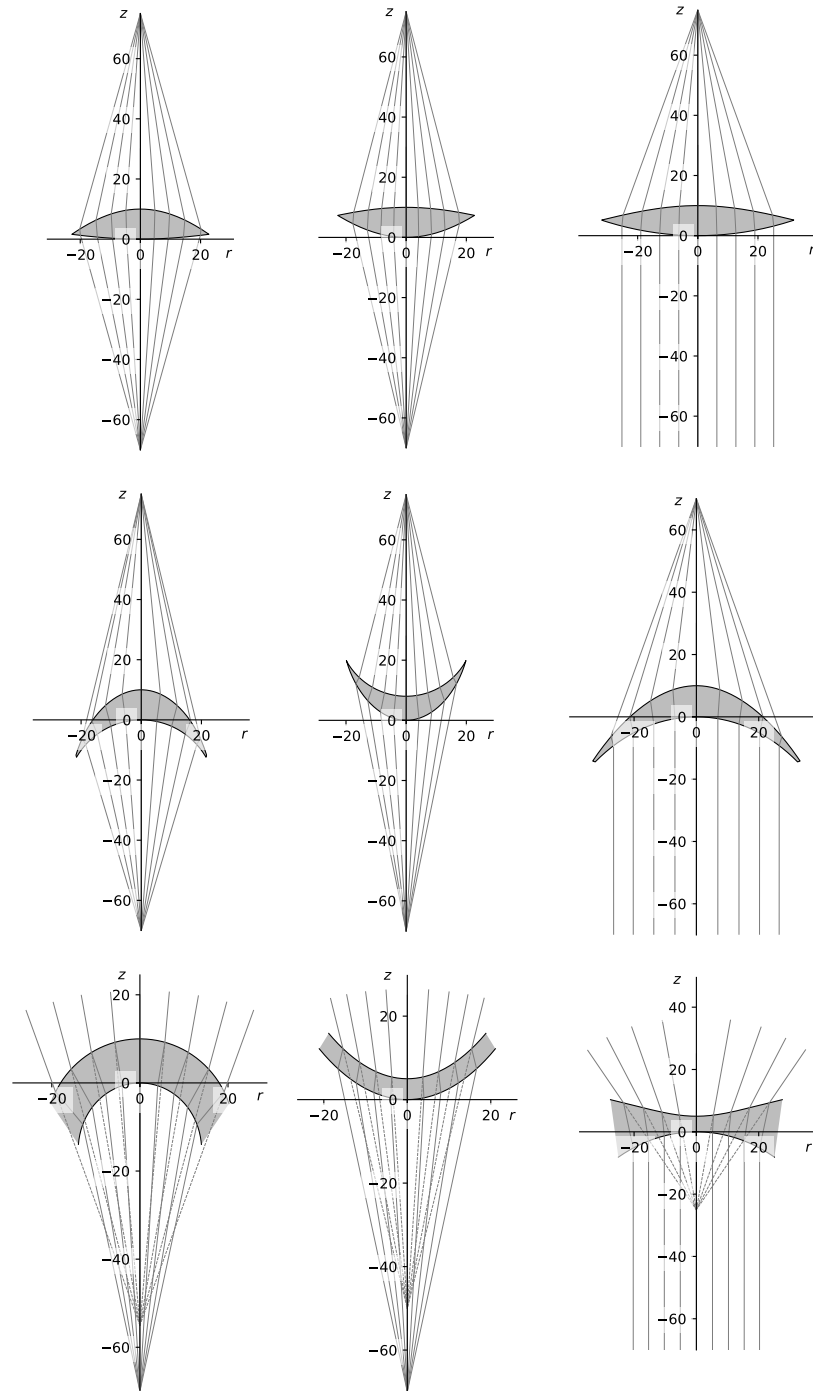


Figura 10. Comportamiento de un conjunto de rayo viajando a través de distintas lentes estigmáticas.

cartesianas. En la fila superior se pueden observar tres lentes bi-convexas que forman imágenes reales a partir de objetos reales, dos de ellas forman imágenes finitas y la otra forma la imagen en el infinito. En la fila de en medio, se muestran lentes con una de sus superficies cóncava y la otra convexa, formando también imágenes reales a partir de objetos reales. En la fila inferior, se muestran tres lentes que forman imágenes virtuales a partir de objetos reales. Como se puede observar en cada una de las lentes, los rayos parten de un objeto puntual para luego interactuar con las superficies refractivas, y finalmente coincidir en un foco común en donde se forma la imagen estigmática.

3.3. Simulación computacional

Dentro de este trabajo se desarrolló una herramienta computacional mediante el uso del lenguaje de programación de Python que permite visualizar algunas características de los sistemas conformados por superficies cartesianas. Esta herramienta facilita un punto de partida para el diseño de sistemas ópticos complejos, pero creemos que se pueden agregar algunos métodos de optimización en torno al uso de superficies cartesianas y obtener como resultados el diseño de sistemas ópticos comparables con sistemas comerciales.

Consideremos un sistema conformado por 2 superficies cartesianas, una LSOE, y consideremos algunos elementos esenciales como el plano objeto, el plano imagen, y una pupila física que limita los rayos que ingresan al sistema. La configuración de estos elementos es la mostrada en Tab. 4, donde los tipo OBJ son superficies objeto, AST son aperturas físicas, SRF son superficies refractivas e IMG son superficies imagen.

Como resultado de la lente descrita en Tab. 4, se muestra en la Fig. 11 un esquema en 3D

Tabla 4

Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para una LSOE, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k del sistema.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	SRF	80	0	400	1	1.6	-1.905429	0.0291667	-4.181733e-8	-4.820787e-5
2	SRF	90	400	200	1.6	1	-5.646665	-0.006549	4.814778e-8	4.219721e-5
1	AST	95	-	-	1	1	0	0	0	0
3	IMG	200	-	-	1	-	0	0	0	0

de la forma de dicho sistema, y en la Fig. 12 un esquema 2D donde se aprecia con más claridad la geometría de las superficies y el comportamiento de los rayos al atravesarla. Los rayos son simulados a partir de puntos objetos ubicados a distancias entre 0 y H , donde H representa el campo completo del objeto, la distancia máxima medida desde el eje óptico y un punto fuera de eje. En este ejemplo consideraremos puntos objetos con valores entre 0 y $H = 15mm$. Adicionalmente, mediante el uso de la herramienta desarrollada, es posible obtener la medida de las aberraciones primarias que afectan el sistema para cada punto objeto definido, como se puede observar en la Fig. 13.

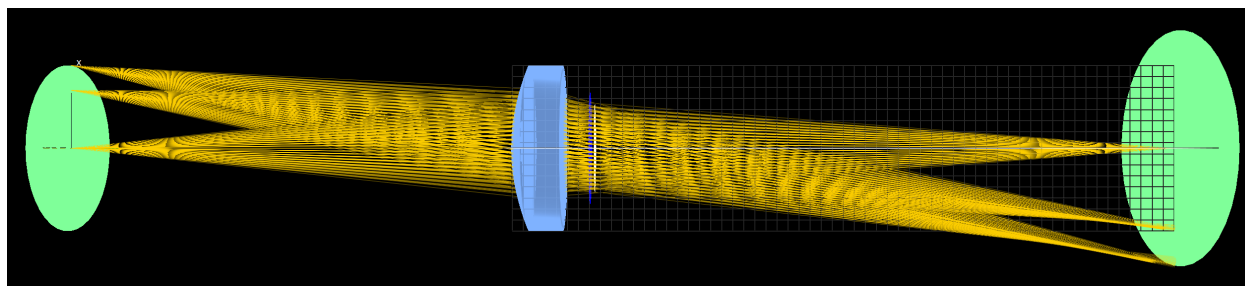


Figura 11. Visualización 3D de una LSOE. Los rayos viajan de izquierda a derecha formando una imagen para cada punto objeto definido.

En la Fig. 13, en la primera línea de arriba hacia abajo se observa el diagrama de puntos,

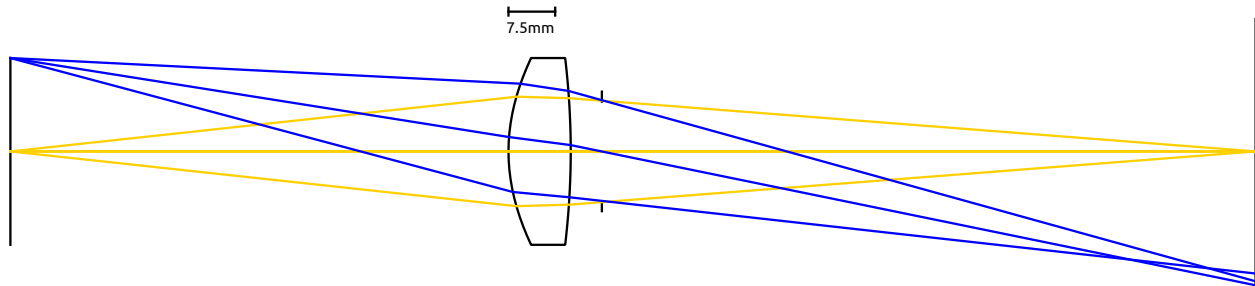


Figura 12. Visualización 2D de una LSOE. En la parte central se observa la LSOE, a la izquierda de esta se encuentra el plano objeto y a su derecha el plano imagen, y entre la segunda superficie y el plano imagen se puede ver la apertura física. En el plano objeto se encuentra a una distancia de 80mm medida desde el vértice de la primera superficie, y el plano imagen a una distancia de 110mm medida desde el vértice de la segunda superficie. Se muestra el trazado de rayos para dos puntos ubicados sobre el plano objeto, uno ubicado sobre el eje óptico y otro a una distancia de $H = 15\text{mm}$ medida desde el eje óptico.

que indica que tan puntual es la imagen que se obtiene. Se puede apreciar que para el caso de objeto sobre el eje ($0H$), su imagen es un punto en todo el rigor, esto sucede debido a que el sistema en cuestión es estigmático. Además, se puede apreciar que para puntos fuera de eje ($0.7H$ y H) los puntos no coinciden en una imagen puntual sino que forman un patrón de puntos, cuyo tamaño aumenta en la medida en que aumenta la distancia del objeto puntual con respecto al eje óptico del sistema. En la segunda y tercera línea, se observan las aberraciones de rayo sobre los planos meridional y sagital, respectivamente. Las aberraciones de rayo son nula para el caso de objeto sobre el eje óptico ($0H$) y tienen cierto valor en la medida en que el objeto es sacado del eje óptico, lo que indica que el sistema corrige la aberración esférica pero sufre de otro tipo de aberraciones como la coma.

Todos los sistemas que se han considerado hasta el momento son estigmáticos, incluido este último ejemplo de una LSOE, pero existen otras propiedades importantes dentro del área de diseño óptico que permiten corregir afecciones adicionales. Por lo tanto, en el próximo capítulo se

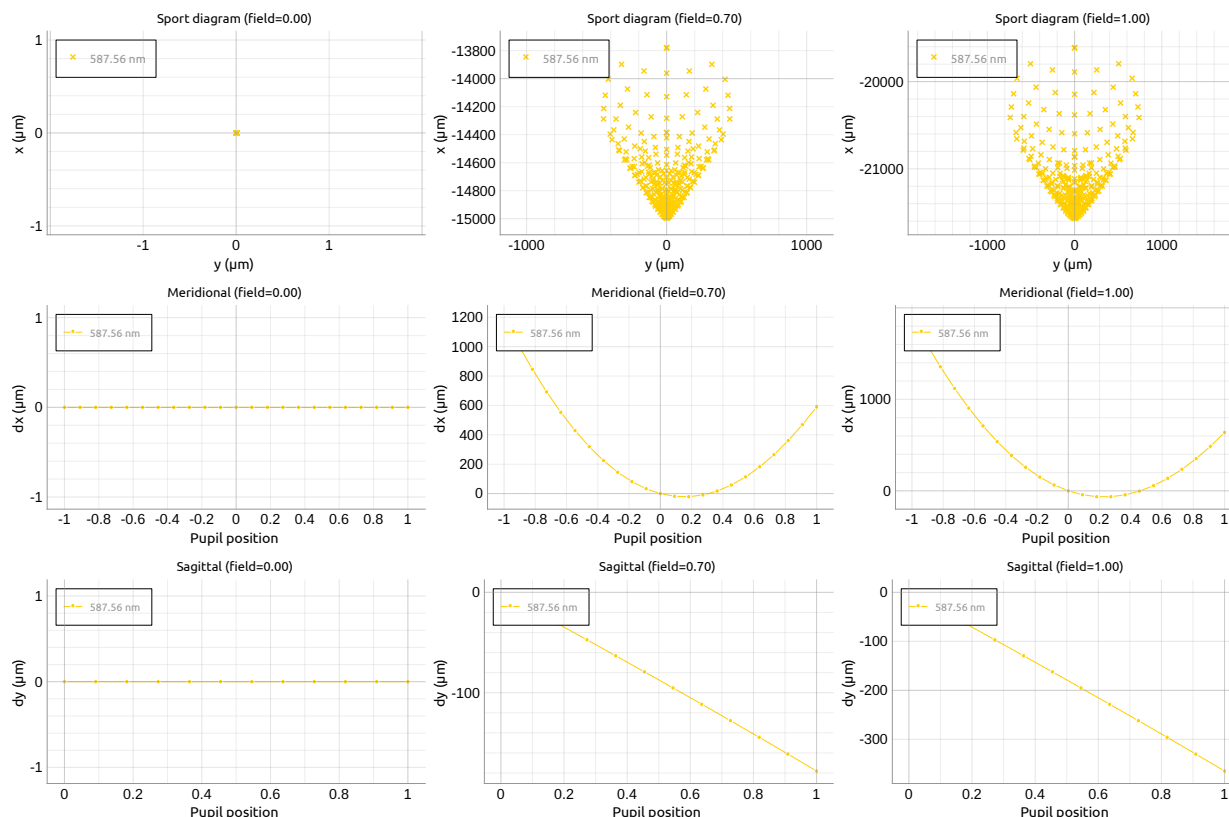


Figura 13. Aberraciones de rayo para una LSOE. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

abordará una nueva formulación de la condición de aplanetismo en sistemas ópticos conformados por superficies cartesianas.

4. Aplanetismo en sistemas conformados por superficies cartesianas

4.1. Introducción

Principalmente, por la facilidad con que son pulidas las superficies esféricas, los sistemas formadores de imágenes están compuestos, en su mayoría, por este tipo de superficies (Fischer et al., 2008). En los puntos de Young (Güther, 2008), estas superficies son tanto estigmáticas como aplanéticas, dado que satisfacen la condición seno de Abbe (Abbe, 1873), pero fuera de estos puntos presentan aberraciones que son intrínsecas a la geometría esférica. La presencia de estas aberraciones pueden ser controlada mediante el uso de una pupila que limita la cantidad de rayos que acceden al sistema (Sasián, 2013). Esto permite la caracterización de estos sistemas dentro de un régimen paraxial, mediante el uso de los puntos cardinales. Sin embargo bajo estas condiciones el estigmatismo es aproximado, es decir, el sistema sufre de aberración esférica. Esto hace más compleja la tarea de corrección para la obtención de un sistema con un mínimo de aberración esférica y que compla con la condición seno de Abbe o condición de aplanetismo.

La estrategia estándar, para corregir o minimizar las aberraciones geométricas en estos sistema, es por medio de la introducción de superficies asféricas (Born and Wolf, 2013), formuladas a través de una base cónica, a la que se le agregan unos términos llamados de asfericidad (Gross, 2005; Valencia-Estrada et al., 2017b; Vaskas, 1957). La combinación de las superficies asféricas con las esféricas permite la producción de sistemas ópticos formadores de imagen de alta calidad (Reshidko, 2016; Gross et al., 2007). Esta estrategia tiene su fundamento en lo que se conoce como el problema de Wasserman-Wolf (Wassermann and Wolf, 1949; Vaskas, 1957), donde se propone la introducción

de dos superficies esféricas, dentro de un sistema óptico, con el propósito de corregir la coma y la aberración esférica (Head, 1959; Krautter, 1986; Welford, 1976; Jurek, 1959). A medida que se le impone al sistema trabajar con una mayor apertura angular, este enfoque exige el empleo de un número cada vez mayor de estas superficies (Schulz, 1988; Valencia-Estrada et al., 2017b), principalmente porque entre mayor angular más se aleja de las condiciones paraxiales de las lentes esféricas involucradas, aumentando la presencia de las aberraciones.

Entre las superficies esféricas se encuentran las superficies Cartesianas (Descartes, 1637; Sutter and Alianelli, 2019; Silva-Lora and Torres, 2020b), las cuales son estigmáticas para un par de puntos objeto e imagen. Mediante una correcta ubicación de dos de estas superficies, es posible el diseño de lentes estigmáticas (Huygens, 1920; Valencia-Estrada and Bedoya-Calle, 2012; Silva-Lora and Torres, 2020c), es decir, una lente que en óptica geométrica forma una imagen puntual ideal a partir de un objeto puntual, sin ninguna restricción para los rayos que pasan a través del sistema. Estas lentes cumplen con la condición de estigmatismo, pero si se determinan las condiciones de estos sistemas para cumplir con la propiedad de aplanetismo, se tendrían como resultado sistemas ópticos capaces de formar imágenes extendidas de buena calidad. A partir de aquí surge la siguiente pregunta: ¿Cómo pueden los sistemas conformados por superficies cartesianas presentar al mismo tiempo estigmatismo y aplanetismo? Por lo cual se hace necesario desarrollar un marco teórico general que incluya estas superficies, para así formular las condiciones que deben obedecer estos sistemas para adaptar la condición seno de Abbe.

Es así que en este trabajo, damos respuesta a esta pregunta, mediante el uso de una formulación de lentes estigmáticas (Silva-Lora and Torres, 2020c), aquí llamadas *lentes single ovoides*

estigmáticas (LSOE), desarrollada por nuestro grupo, y encontramos una condición para que un sistema compuesto por superficies cartesianas sea aplanético. Como característica importante de esta teoría del aplanetismo, se tiene que los puntos estigmáticos de dichos sistemas constituyen sus puntos cardinales, de tal manera que estos sistemas son caracterizados usando las posiciones de estos puntos y los índices de refracción de los medios que separan las superficies que lo componen. Por lo tanto, con los resultados aquí encontrados consideramos que se abre un nuevo paradigma en el diseño de sistemas ópticos formadores de imagen.

4.2. Condición de aplanetismo para una superficie cartesiana

Para la formación de imágenes de objetos extendidos no es suficiente con que el sistema óptico sea estigmático, sino que se exige una condición mucho más restringida, dado que estos sistemas deben ser capaces de producir la imagen de un conjunto de puntos sobre un objeto extendido, conservando el estigmatismo en cada caso. Dentro de este trabajo abordamos el aplanetismo a partir de la condición seno de Abbe (Abbe, 1873) y la formulación de estigmatismo riguroso que se desarrolla dentro de este trabajo. La combinación de estos dos elementos da como resultado una expresión para determinar las condiciones bajo las cuales los sistemas rigurosamente estigmáticos, se consideran libre de aberración esférica y coma. En la Fig. 14 se ilustra un sistema rigurosamente estigmático para un par de puntos objeto e imagen, P_0 y P_1 respectivamente, y se busca bajo que condiciones, este sistema, es también rigurosamente estigmático para otro par de puntos P_0' y P_1' , es decir, que el sistema sea aplanético (Comastri et al., 1999; Elazhary et al., 2015).

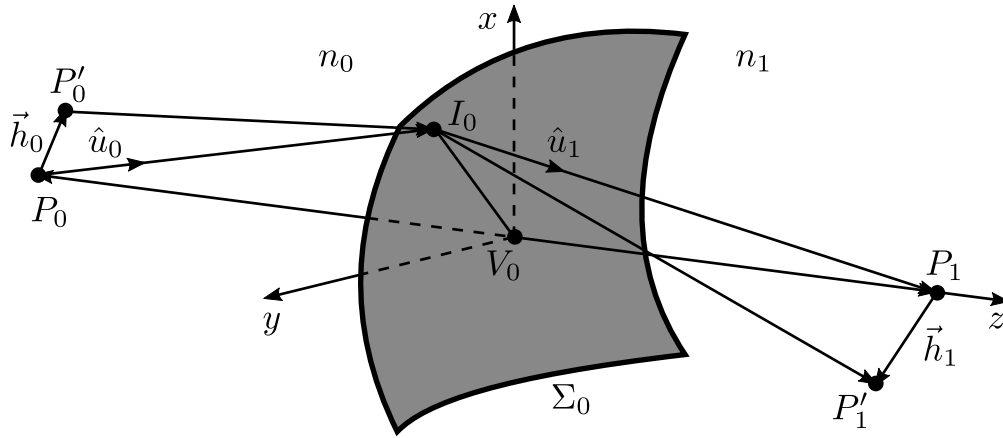


Figura 14. Formación de imágenes puntuales perfectas a partir de objetos puntuales. Si la superficie Σ_0 es capaz de formar una imagen puntual P_1 a partir del objeto puntual P_0 , se dice que el sistema es estigmático. Si además, es capaz de formar una imagen puntual P'_1 a partir del objeto puntual P'_0 , se dice que el sistema es aplanético.

De acuerdo a la figura 14, la condición de aplanetismo se expresa como

$$\frac{\sin(\hat{u}_0, \hat{z})}{\sin(\hat{u}_1, \hat{z})} = \frac{n_1}{n_0} M, \quad (69)$$

donde M es la magnificación que produce Σ_0 , la cual se define como la razón entre el tamaño de la imagen $|\vec{h}_1| = \overline{P_1 P'_1}$ y el tamaño del objeto $|\vec{h}_0| = \overline{P_0 P'_0}$, dada por

$$M = \frac{|\vec{h}_1|}{|\vec{h}_0|}. \quad (70)$$

Por lo tanto, un sistema es aplanético y conserva el estigmatismo en una región del espacio, si la relación de los senos en la expresión (69) se mantiene constante, lo que hace que se cumpla la condición seno de Abbe.

En la Fig. 15 se muestra una superficie Σ_k que separa dos medios con índices de refracción

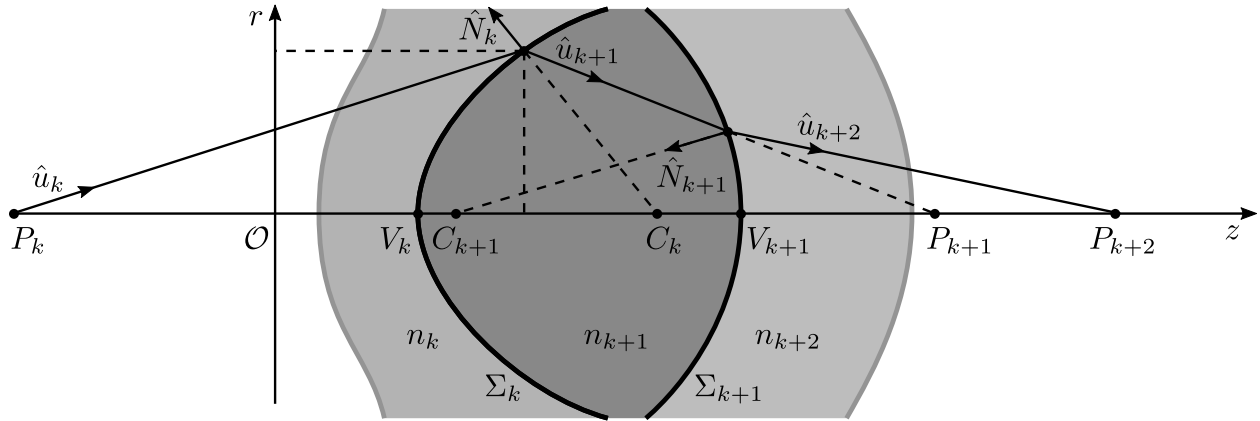


Figura 15. Lente rigurosamente estigmática compuesta por un conjunto de superficies cartesianas. Se muestran las superficies adyacentes, Σ_k y Σ_{k+1} , pertenecientes a un sistema óptico rigurosamente estigmático.

n_k y n_{k+1} , donde \hat{N}_k es un vector unitario normal a Σ_k . Para que esta superficie óptica sea aplanética, es decir que compla con la condición seno de Abbe, se requiere que la cantidad $\sin(\hat{u}_k, \hat{z})/\sin(\hat{u}_{k+1}, \hat{z})$ sea una constante. Considerando que la superficie Σ_k tiene simetría de revolución al rededor del eje z , se tendrá en cuenta, para los cálculos posteriores, un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , en donde $r^2 = x^2 + y^2$ es la coordenada transversal, y $\rho = \overline{V_k I_k} = \sqrt{r^2 + (z - \zeta_k)^2}$ es la distancia vértice-superficie. Además se tiene, para cada punto I_k sobre la superficie Σ_k , el punto C_k como el punto de corte entre la recta $\overline{C_k I_k}$, normal a la superficie, con el eje z , que será un parámetro clave dentro del siguiente desarrollo.

Para encontrar una expresión para la condición seno de Abbe, es necesario derivar algunas expresiones a partir de la geometría mostrada en la Fig. 15. De aquí, se puede ver que aplicando la

ley del seno en el triángulo $P_k I_k C_k$ se cumple que

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_k)}{\overline{C_k I_k}} = \frac{\sin(\hat{u}_k, \hat{N}_k)}{\overline{V_k C_k - V_k P_k}}, \quad (71)$$

y de igual manera, mediante la aplicación de la ley del seno en el triángulo $P_{k+1} I_k C_k$, se tiene que

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_{k+1})}{\overline{C_k I_k}} = -\frac{\sin(\hat{u}_{k+1}, \hat{N}_k)}{\overline{V_k C_k - V_k P_{k+1}}}, \quad (72)$$

donde $\overline{V_k P_k} = d_k - \zeta_k$ y $\overline{V_k P_{k+1}} = d_{k+1} - \zeta_k$.

Una superficie óptica refractiva que cumple con la condición de aplanetismo es la superficie esférica, y además, un sistema conformado por múltiples superficies puede también cumplir con esta condición bajo ciertas circunstancias. El objetivo principal, dentro de este trabajo, es obtener una formulación generalizada de la condición de aplanetismo para sistemas conformados por superficies cartesianas, por lo cual consideraremos que los sistemas están compuesto por cierto número de superficies, para las cuales se deben cumplir las expresiones (71) y (72). Por lo tanto, a partir de esas expresiones se pueden formular una expresión que permita determinar las condiciones bajo las cuales un sistema óptico compuesto por N superficies cartesianas es considerado aplanético, como se mostrará a continuación.

4.3. Condición de aplanetismo para un conjunto de superficies cartesianas

Para encontrar una condición de aplanetismo para un sistema conformado por un conjunto de superficies cartesianas, partimos del cociente entre la expresión (71) y la expresión (72), de

donde se obtiene

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_k)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_{k+1})} = -\frac{\sin(\hat{u}_k, \hat{N}_k) \left(\overline{V_k C_k} - (d_{k+1} - \zeta_k) \right)}{\sin(\hat{u}_{k+1}, \hat{N}_k) \left(\overline{V_k C_k} - (d_k - \zeta_k) \right)}, \quad (73)$$

donde los senos de los ángulos de la parte derecha de la expresión están relacionados por medio de la ley de Snell-Descartes, es decir

$$\frac{\sin(\hat{u}_k, \hat{N}_k)}{\sin(\hat{u}_{k+1}, \hat{N}_k)} = \frac{n_{k+1}}{n_k}. \quad (74)$$

Esta relación permite escribir la expresión (73) como

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_k)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_{k+1})} = -\frac{n_{k+1}}{n_k} \frac{(d_{k+1} - \zeta_k)}{(d_k - \zeta_k)} \frac{\left(\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right)}{\left(\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right)}, \quad (75)$$

lo cual es válido para cada una de las superficies que componen el sistema. Para un sistema estigmático, la expresión (75) es la contribución para la k -ésima superficie, por lo tanto, para las N superficies que componen el sistema, esta ley se expresa como la productoria de los términos correspondientes a cada superficie,

$$\prod_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_k)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_{k+1})} = \prod_{k=0}^{N-1} -\frac{n_{k+1}}{n_k} \frac{(d_{k+1} - \zeta_k)}{(d_k - \zeta_k)} \frac{\left(\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right)}{\left(\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right)}, \quad (76)$$

cuya expresión resulta en

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_0)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_N)} = \left(\prod_{k=0}^{N-1} -\frac{d_{k+1} - \zeta_k}{d_k - \zeta_k} \right) \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \left(\frac{\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}}}{\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}}} \right), \quad (77)$$

la cual es una formulación explícita de la condición seno de Abbe, Ec. (69), en función de la cantidad $\overline{V_k C_k}$. Cabe resaltar que para valores fijos de n_k , n_{k+1} , ζ_k , d_k y d_{k+1} , la primera productoria de (77) es constante, pero la segunda productoria que depende de $\overline{V_k C_k}$ no lo es, ya que este valor depende de ρ_k , la distancia vértice-superficie para la k -ésima superficie, como se mostrará más adelante.

Remark 1 (Radio paraxial) Las cantidades $\overline{V_k C_k} = R_k(\rho_k)$ son función de ρ_k , y para el caso particular de una superficie esférica $R_k(\rho_k) = R_{k0} = cte$, es el radio de curvatura. Por lo tanto, si se limitan los rayos a un régimen paraxial, estas superficies cuárticas pueden ser aproximadas a una esfera de tal forma que $\overline{V_k C_k}$ se aproxima a una constante que definimos como radio paraxial del ovoide, R_k .

Como la segunda productoria de la expresión (77) depende de ρ_k , ésta es la que determina si la relación de los senos es constante para los rayos que accede al sistema, por lo tanto, proponemos la siguiente condición de aplanetismo:

Definition 1 (Condición de aplanetismo generalizado) Un sistema óptico compuesto por superficies cartesianas es aplanético si la cantidad

$$\mathcal{M}(N, \rho_k) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \left(\frac{\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}}}{\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}}} \right), \quad (78)$$

es una constante, donde el conjunto ρ_k caracteriza la trayectoria que sigue un rayo, respetando la ley de Snell-Descartes.

Nótese que esta condición de aplanetismo es general, donde el valor de $\overline{V_k C_k}$ depende de la geometría de las superficies, y el cumplimiento de esta condición corresponde a encontrar el conjunto de valores d_k que garantizan que todos los $\overline{V_k C_k}$ permanecen constante para todo valor de ρ_k correspondientes a cada una de las superficies que conforman el sistema óptico. Se puede observar que el sistema conformado por una única superficie refractiva que cumple con esta característica es la superficie esférica refractiva, ya que la cantidad $\overline{V_k C_k}$ es constante debido a que su radio también lo es.

4.3.1. Aplanetismo dentro de un regimen paraxial. Dado que la definición 1 se debe cumplir para todos los rayos que acceden al sistema, los rayos paraxiales permiten determinar el valor de esta constante. Para valores muy pequeños de ρ_k el sistema se encuentra dentro de un régimen paraxial, y para el rayo que atraviesa el sistema por el eje óptico se tiene que $\rho_k = 0$, de donde resulta que $(\overline{V_k C_k})^{-1} = O_k = R_k^{-1} = cte$, donde O_k se define como curvatura paraxial para superficies cartesianas (Silva-Lora and Torres, 2020c). El hecho de que en un régimen paraxial, resulte en un valor constante para $(\overline{V_k C_k})^{-1}$, garantiza el aplanetismo en un régimen paraxial para los sistemas compuestos por superficies cartesianas, así

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(0) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \left(\frac{\frac{1}{d_{k+1}-\zeta_k} - \frac{1}{R_k}}{\frac{1}{d_k-\zeta_k} - \frac{1}{R_k}} \right). \quad (79)$$

Si se reemplaza (11) en (79), como es mostrado en el Apéndice A, se obtiene que

$$\mathcal{M}_0 = 1, \quad (80)$$

lo cual es coherente con el invariante de Abbe, donde se cumple que

$$n_k \left(\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{R_k} \right) = n_{k+1} \left(\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{R_k} \right), \quad (81)$$

lo que significa que si ρ_k está restringido al régimen paraxial, la expresión (78) se reduce a la formula de conjugación (81), la cual es la formula de conjugación para los sistemas conformados por superficies cartesianas, dentro del régimen paraxial.

Por lo tanto, para un sistema ópticos compuesto por superficies estigmáticas la condición de aplanetismo generalizada, expresada en la condición 1, se escribe como

$$\mathcal{M}(\rho_k) = 1. \quad (82)$$

4.3.2. Invariante generalizado. La ecuación (82) nos permite introducir un nuevo invariante generalizado, es decir, un invariante no paraxial para un sistema óptico aplanético compuesto por superficies estigmáticas:

Definition 2 (Invariante aplanético) *Un sistema óptico compuesto por superficies cartesianas es*

aplanético, si la cantidad

$$\mathcal{T}_k = n_k \left(\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right), \quad (83)$$

es un invariante.

Por lo cual es posible escribir

$$n_k \left(\frac{1}{d_k - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right) = n_{k+1} \left(\frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{1}{\overline{V_k C_k}} \right), \quad (84)$$

cuya expresión constituye una relación de conjugación para los sistemas conformados por superficies estigmáticas, cuando $\overline{V_k C_k}$ es constante para todos los rayos que acceden al sistema, es decir cuando hay aplanetismo.

Remark 2 *Es importante aquí resaltar la relación íntima que existe entre el aplanetismo y los invariantes. Dicha relación expone que un sistema es aplanético si cumple con la conservación de sus invariantes. En particular, dicho sistema es aplanético en el régimen paraxial si conserva el invariante de Abbe, y es aplanético en una teoría estigmática si se conserva el invariante aplanético generalizado.*

4.3.3. Magnificación. Como se puede observar de los resultados previos, para que un sistema sea aplanético se debe cumplir con que $\mathcal{M} = 1$, para todos los rayos que acceden al

sistema. Por lo tanto, la expresión (77) se puede reescribir en la forma

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_0)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_N)} = \left(\prod_{k=0}^{N-1} -\frac{d_{k+1} - \zeta_k}{d_k - \zeta_k} \right), \quad (85)$$

y la productoria de dicha expresión, se puede expresar como

$$\prod_{k=0}^{N-1} -\frac{d_{k+1} - \zeta_k}{d_k - \zeta_k} = \frac{n_N}{n_0} \prod_{k=0}^{N-1} -\frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{d_{k+1} - \zeta_k}{d_k - \zeta_k}, \quad (86)$$

así (77) se escribe

$$\frac{\sin(\hat{z}, \hat{u}_0)}{\sin(\hat{z}, \hat{u}_N)} = \frac{n_N}{n_0} \prod_{k=0}^{N-1} g_k, \quad (87)$$

donde g_k se define como la magnificación de la k -ésima superficie, y está dada por

$$g_k = -\frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{d_{k+1} - \zeta_k}{d_k - \zeta_k}. \quad (88)$$

Lo que permite definir el aumento para sistemas ópticos estigmáticos y aplanéticos:

Definition 3 (Aumento para sistemas aplanéticos) *El aumento de un sistema óptico estigmático y aplanético, compuesto por un conjunto de N superficies cartesianas, se define como el producto de los aumentos producidos por cada superficie que compone el sistema, lo que se puede escribir*

como

$$M = \prod_{k=0}^{N-1} g_k . \quad (89)$$

Esta cantidad es de gran importancia dentro del área de diseño óptico, y es a partir de ella que se pueden diseñar sistemas aplanéticos caracterizados por determinado aumento.

4.3.4. Aplanetismo para un conjunto de superficies cartesianas. La condición 1 determina si un sistema óptico estigmático es aplanético, para lo cual se debe cumplir que la expresión (78) sea constante para todos los valores $\overline{V_k C_k}$. En esta formulación no está explícito cuáles son las características que deben cumplir cada superficie de manera particular, por lo que aquí formulamos esta condición en término de los parámetros de forma de las superficies cartesianas, y es por medio de esta formulación que podemos determinar el diseño de un sistema con tales propiedades.

Considerando que el punto I_k sobre cada superficie, tienen coordenadas (r_k, z_k) , donde z_k es medido con respecto al origen de coordenadas O , se obtiene a partir de la Fig. 15, la relación

$$\tan(\hat{N}_k, \hat{z}) = \frac{r_k}{(z_k - \zeta_k) - \overline{V_k C_k}} = \frac{(N_k)_r}{(N_k)_z} , \quad (90)$$

siendo $(N_k)_z$ y $(N_k)_r$ las componentes de las coordenadas del vector normal a la superficie, \hat{N}_k . A

partir de la expresión (90) se deriva la expresión

$$\frac{1}{\overline{V_k C_k}} = -\frac{(N_k)_r}{(N_k)_z} \left(\frac{1}{r_k - (z_k - \zeta_k) \frac{(N_k)_r}{(N_k)_z}} \right), \quad (91)$$

y de acuerdo al Apéndice B, esta expresión para superficies cartesianas, se escribe como

$$\frac{1}{\overline{V_k C_k}} = \frac{-\left(\frac{2S_k}{G_k} - O_k^2\right) + \frac{2S_k}{G_k} \sqrt{1 + \left(2S_k - G_k O_k^2\right) \rho_k^2}}{O_k \sqrt{1 + \left(2S_k - G_k O_k^2\right) \rho_k^2}}. \quad (92)$$

Esta expresión, permite encontrar cual es el inverso de la distancia entre el punto de corte con el eje axial, de una línea normal a un punto particular sobre la superficie, medida desde el vértice. Reemplazando la expresión (92) en la expresión (78), se obtiene la condición explícita de aplanetismo para un sistema conformado por N superficies cartesianas, expresada en función de los parámetros de forma del sistema, escrita como

$$\mathcal{M}(N, \rho_k) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \left(\frac{\frac{2S_k}{G_k} - O_k^2 - \left(\frac{2S_k}{G_k} - \frac{O_k}{d_{k+1}-\zeta_k}\right) \sqrt{1 + \left(2S_k - G_k O_k^2\right) \rho_k^2}}{\frac{2S_k}{G_k} - O_k^2 - \left(\frac{2S_k}{G_k} - \frac{O_k}{d_k-\zeta_k}\right) \sqrt{1 + \left(2S_k - G_k O_k^2\right) \rho_k^2}} \right). \quad (93)$$

La expresión (93) constituye uno de los resultados más importantes de este trabajo porque a partir de esta expresión se pueden establecer metodologías para el diseño de sistemas ópticos aplanéticos, conformados por un conjunto de superficies cartesianas. Esta formulación escrita en función de los parámetros de forma de las superficies que conforman el sistema, constituye una

simplificación importante en la búsqueda de instrumentos aplanéticos de forma rigurosa.

Como se estableció en (82), para que el sistema conformado por superficies cartesianas sea aplanético, la expresión (93) debe tener un valor igual a 1, para todos los rayos que acceden al sistema. Teniendo que la expresión (93) depende de las expresiones (11)-(13), las cuales a su vez dependen de los parámetros n_k , n_{k+1} , ζ_k , d_k y d_{k+1} , se debe buscar una metodología para saber cual es el conjunto de estos parámetros que permite que el sistema sea aplanético. Una metodología que permite encontrar cuales es este conjunto de parámetros, tal que la expresión (93) cumpla con la definición 1, es mediante procesos de optimización de los parámetros $d_k \forall k \in \mathbb{N}$, $0 < k < N$, mientras se mantienen fijos el resto de parámetros.

4.3.5. Media cuadrática de la condición de aplanetismo. El valor que se obtiene a partir de la Ec. (93) es considerado para un valor de ρ_k . Si se tiene un conjunto de rayos que acceden al sistema es necesario definir un función error que permita medir que tanto de cumple esta condición para cada uno de esos rayos. Por lo tanto, dentro de este trabajo tomaremos como criterio de medición, de la condición de aplanetismo, la función error definida a partir del valor RSM (*Root Mean Square*) de la diferencia entre el valor de \mathcal{M} y el valor $\mathcal{M}_0 = 1$, dada por

$$(\mathcal{M} - 1)_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i |(\mathcal{M} - 1)_i|^2}, \quad (94)$$

donde i es el índice que identifica cada uno de los rayo que acceden al sistema. El conjunto de parámetros del sistema que arroje un valor para la Ec. (94) más cercano a cero, serán aquellos que definan con mayor precisión un sistema aplanético, y será más preciso en la medida en que el

número de rayos sea mayor.

4.3.6. Aplanetismo para superficies esféricas. Esta formulación para superficies cartesianas tiene como caso particular las superficies esféricas, para cuando los valores d_k coinciden con los puntos de Young-Weierstrass (Young, 1807; Silva-Lora and Torres, 2020b). Para este caso particular, los puntos conjugado de la k -ésima superficie esférica de radio R_k , toman los valores dados por

$$d_k = \zeta_k + \frac{R_k (n_k + n_{k+1})}{n_k}, \quad (95)$$

$$d_{k+1} = \zeta_k + \frac{R_k (n_k + n_{k+1})}{n_{k+1}}, \quad (96)$$

para los cuales se tiene que $\overline{V_k C_k} = R_k$ (ver apéndice B), lo que cumple con la condición de aplanetismo establecida en la definición 1.

4.3.7. Simulación computacional. En el siguiente resultado computacional es evaluada la condición de aplanetismo para un caso particular de una LSOE. Las LSOEs, conformadas por dos superficies cartesianas, son lentes libres de aberración esférica para un par de puntos estigmáticos. Como hemos visto dentro de esta sección, se ha demostrado que existe una condición adicional para este tipo de lentes, expresión (93), que permite encontrar las condiciones bajo las cuales una lente conformada por superficies es considerada aplanética, es decir libre de coma. Los parámetros que definen una LSOE son el índice de refracción del espacio objeto n_0 , el índice de refracción de la lente n_1 , el índice de refracción del espacio imagen n_2 , las posiciones de la primera y segunda superficie, ζ_0 y ζ_1 respectivamente, las posiciones del objeto y de su imagen estigmática,

d_0 y d_2 respectivamente, y la posición de la imagen que produce la primera superficie de la lente, d_1 (también estigmática). La metodología usada en este desarrollo, consiste en considerar fijos todos los parámetros anteriormente mencionados excepto d_1 , ya que este es el único parámetro que al variar modifica la forma de todas las superficies que constituyen el sistema, dejando fijas las posiciones de los vértices de las superficies y las posiciones de el objeto y la imagen.

Como ejemplo se pretende encontrar cual es la LSOE que permite una correcta formación de una imagen extendida ubicada en $d_2 = 120mm$, la cual es formada a partir de un objeto extendido ubicado en $d_0 = 0mm$. La LSOE tiene un índice de refracción $n_1 = 1.8$, inmersa en un medio con índice de refracción $n_0 = n_2 = 1$, y sus superficies se encuentra ubicadas en $\zeta_0 = 0$ y $\zeta_1 = 10mm$, primera y segunda superficie respectivamente, por lo que el espesor axial de la lente es $t_0 = \zeta_1 - \zeta_0 = 10mm$. Adicionalmente se tiene en cuenta que los rayos son limitados por una pupila física circular ubicada en $z = 75mm$, con una apertura de $8mm$ de radio.

Para que una LSOE cumpla con la condición de aplanetismo es necesario que, para todos los rayos que acceden al sistema, la expresión (94), con $N = 2$, tenga un valor de 1 o lo más cercano a 1. Como se mencionó anteriormente, tomaremos como grado de libertad del sistema a d_1 . Definido el grado de libertad, es establecido el rango de valores dentro del cual se busca el valor óptimo. Para cada valor dentro de este rango de valores de d_1 se calcula, para un conjunto de rayos que acceden al sistema, los valores ρ_0 y ρ_1 , usando el método de trazado de rayos desarrollado (Silva-Lora and Torres, 2020c). A cada valor de d_1 le corresponderá un conjunto de valores fijos para los parámetros que definen la LSOE, por medio de los cuales (junto con los valores de ρ_0 y ρ_1) son obtenidos los valores de $(\mathcal{M} - 1)_{RMS}$ usando las expresiones (93) y (94).

Mediante los valores obtenidos de la expresión (94), tantos valores como los valores de d_1 tomados, se construye una curva de los valores $(\mathcal{M} - 1)_{RMS}$ en función del factor de forma $\sigma(d_1)$, ecuación (36). Este resultado es mostrado en la Fig. 16, a partir de donde se obtiene que el valor óptimo para σ es $\sigma = 0.093069$, que corresponde a un valor de $(\mathcal{M} - 1)_{RMS} = 2.013865e - 08$ y a un valor de $d_1 = 599.172082mm$.

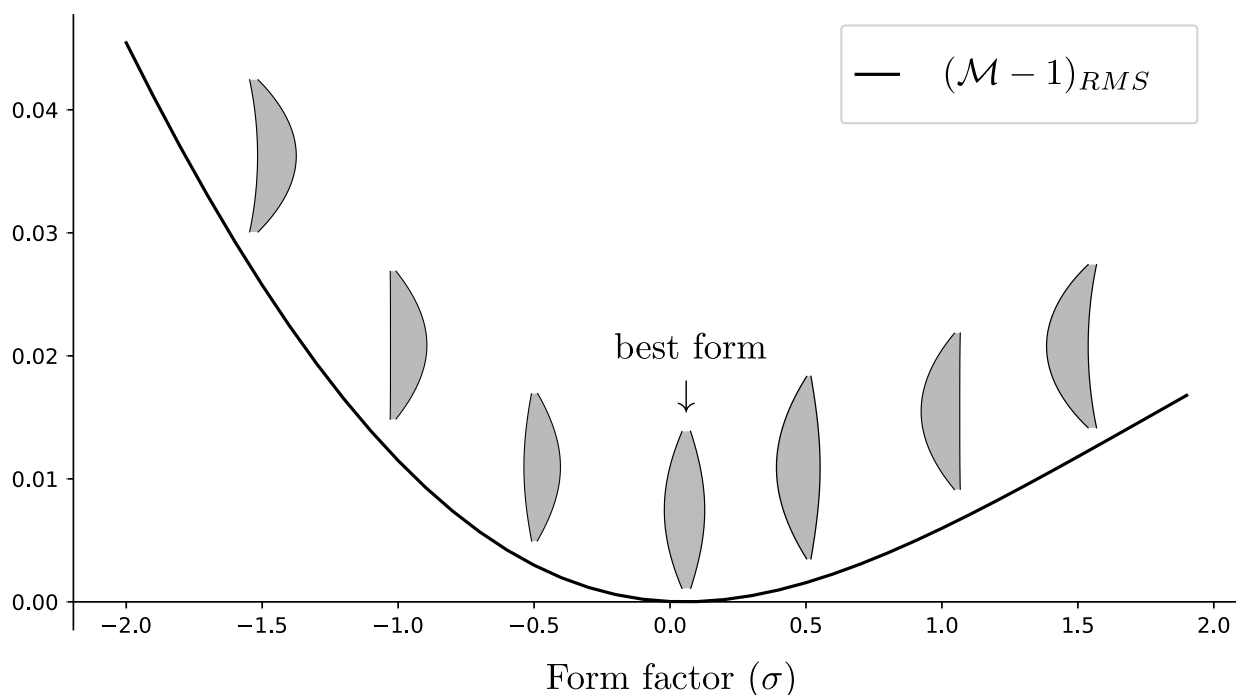


Figura 16. Variación del valor de $(\mathcal{M} - 1)_{RMS}$ con respecto al factor de forma σ . La posición del objeto está determinada por $d_0 = -60mm$, la de la imagen por $d_N = 60mm$, el índice de refracción de la lente es $n_1 = 1.8$, los índices de refracción tanto del espacio objeto como del espacio imagen son $n_2 = n_0 = 1$, y las posiciones de las superficies están dadas por $\zeta_0 = 0$ y $\zeta_1 = 10mm$. El valor óptimo Dentro de este rango de valores del factor de forma, está dado por el valor mínimo de $(\mathcal{M} - 1)_{RMS}$, cuyo valor es $\sigma = 0.093069$.

Los parámetros del sistema aplanético resultante son mostrados en Tab. 5 junto con los parámetros de forma de las superficies que lo conforman. De aquí, en la Fig. 17 se puede observar

una visualización 2D de tres LSOEs y el comportamiento de algunos rayos que las atraviesan. En la parte superior se tiene una lente con $\sigma = -0.2$, la cual es atravesada por un conjunto de rayos que en ningún punto de su recorrido coinciden en un punto común. De igual manera, se tiene la LSOE de la parte inferior, cuyo factor de forma es $\sigma = 0.3$, que tampoco forma una imagen puntual, visualmente hablando desde el punto de vista de la escala de la gráfica. Por el contrario, para la lente en la parte central, se observa que existe una zona en la que la imagen puntual es formada. Esta formación de una imagen visualmente puntual ocurre debido a que este sistema es el obtenido para un factor de forma $\sigma = 0.093069$, que da como resultado una LSOE que cumple con la condición de aplanetismo, dada por las expresiones (93) y (94).

Tabla 5

Parámetros de forma G_k , O_k , T_k , y S_k para una LSOE, obtenidos a partir de los valores de ζ_k , d_k , y n_k del sistema.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	SRF	60	0	599.172082	1	1.8	-2.719770	0.025006	-2.613020e-8	-4.215636e-5
2	SRF	70	599.172082	200	1.8	1	-3.883449	-0.020748	3.647999e-8	5.421570e-5
3	AST	75	-	-	1	1	0	0	0	0
4	IMG	200	-	-	1	-	0	0	0	0

En la Fig. 18 son mostradas las aberraciones de rayo y el diagrama de punto para la LSOE aplanética, $\sigma = 0.093069$. El diagrama de puntos que resulta de este sistema tiene una forma ovalada, que indica que la coma tiene una baja influencia en las aberraciones que posee el sistema. Nuevamente, esto es consecuencia de la escogencia de un sistema que cumple con una condición de aplanetismo. Las LSOEs que no cumplen con esta condición resultarán en la formación de imágenes puntuales con un patrón parecido a un cometa, como se puede observar en los diagramas

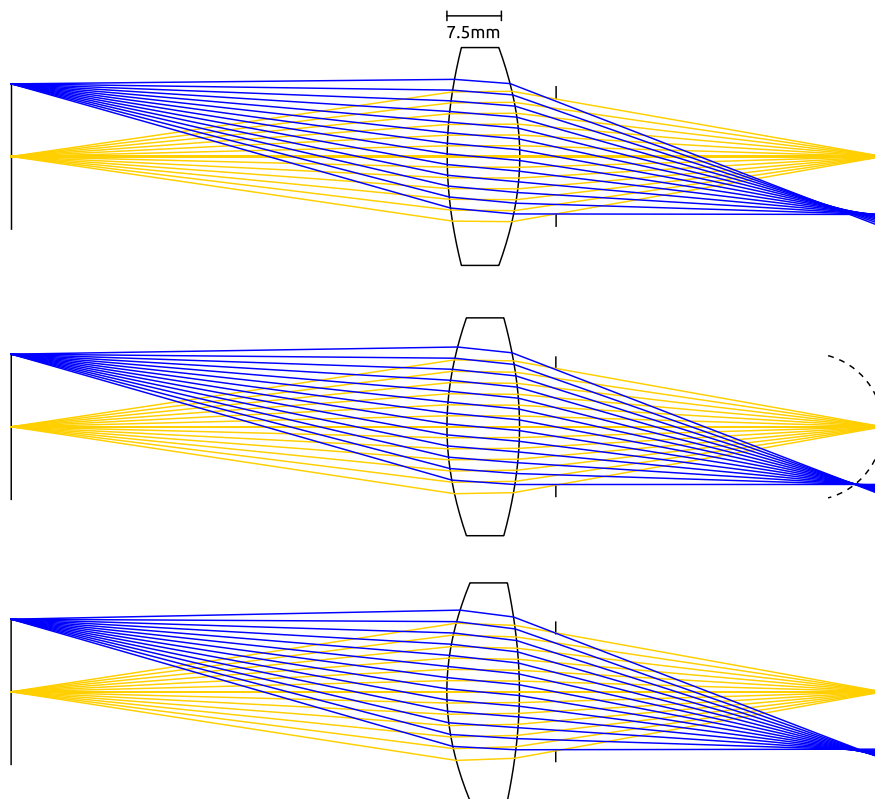


Figura 17. LSOEs con plano objeto ubicado a una distancia de 60mm , medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de 45mm , medida desde el vértice de la segunda superficie. Es mostrado el trazado de rayos para dos puntos sobre el plano objeto, ubicados en $H = 0$ y $H = 10\text{mm}$. (superior) LSOE con $\sigma = -0.2$ con distorsiones considerables en la imagen para puntos fuera del eje óptico. (media) LSOE con $\sigma = 0.093069$, con una mínima cantidad de distorsiones, cuya imagen se forma sobre una superficie curva (línea punteada). (inferior) LSOE con $\sigma = 0.3$, con distorsiones considerables en la imagen.

de puntos para los casos en que las LSOEs tienen factores de forma $\sigma = -0.2$ y $\sigma = 0.3$ (ver la Fig. 19).

Adicionalmente, mediante expresiones para el cálculo de las aberraciones se puede observar lo que realmente sucede cuando se diseña una lente aplanética. En la Fig. 20 se observan las aberraciones primarias, aberración esférica (SA), coma (CMA), astigmatismo (AST), curvatura de campo (PTZ), y distorsión (DIS), para diferentes campos objeto 0 , $0.7H$ y H , en donde se puede

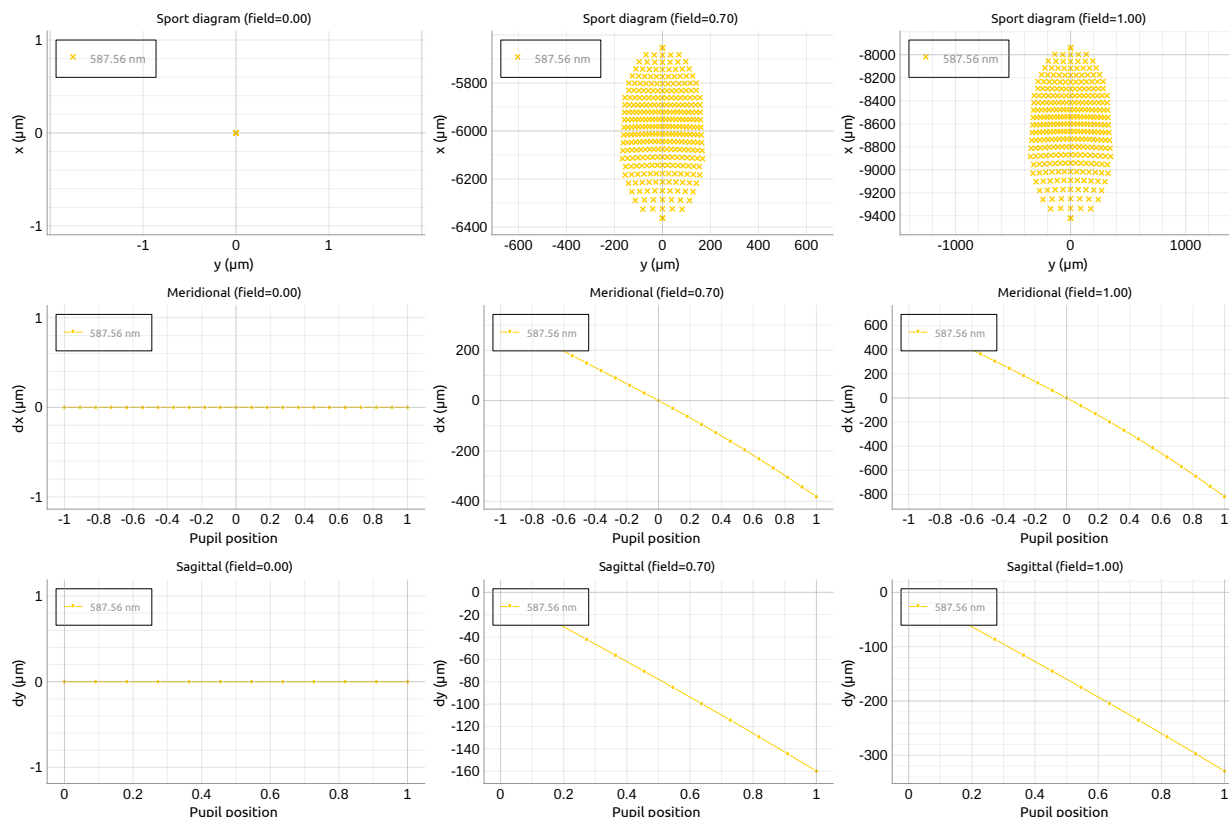


Figura 18. Aberraciones de rayo para una LSOE con factor de forma $\sigma = 0.093069$. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

observar que aumentan en la medida en que el objeto es sacado del eje óptico. Hemos introducido aquí la medida de las aberraciones para mostrar cual es su comportamiento en las LSOEs aplanéticas, pero más adelante hay un capítulo dedicado a esta temática. Mediante el análisis gráfico de las aberraciones, se puede apreciar como la coma de la primera superficie es compensada con la coma de la segunda superficie, las cuales tienen casi que el mismo valor pero con signo opuesto. Por ende, podemos concluir que la condición de aplanetismo busca la configuración del sistema bajo la

cual las superficies que lo componen compense la coma. A partir de aquí nos hacemos la siguiente pregunta, ¿Existen una configuración de parámetros para un sistema óptico arroje como resultado un sistema libre de coma en todo rigor? A lo que respondemos de manera afirmativa en la siguiente sección, en donde abordaremos los sistemas que cumplen en todo rigor con la expresión (93).

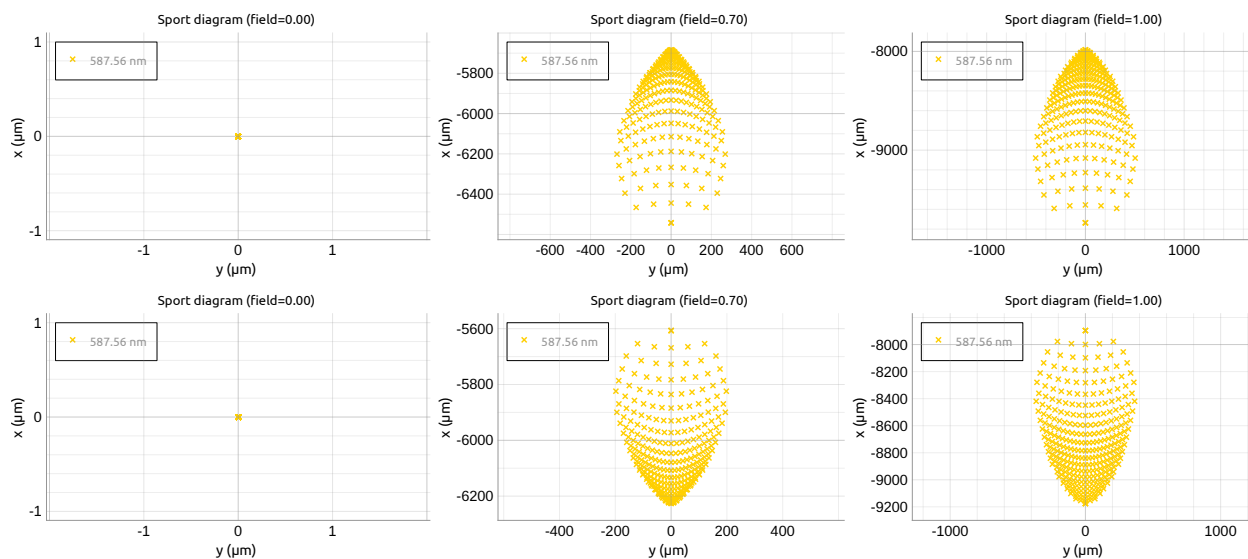


Figura 19. Diagrama de puntos para dos LSOEs con diferente factor de forma. (superior) Factor de forma $\sigma = -0.2$. (inferior) Factor de forma $\sigma = 0.3$. De izquierda a derecha se muestran los diagramas de puntos para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico.

4.4. Sistemas aplanéticos en todo rigor

En la sección anterior se ha aplicado la condición seno de Abbe como criterio para la escogencia de sistemas formadores de imágenes. Este método, junto con algoritmos de optimización, permite encontrar la mejor configuración de parámetros del sistema que cumplan de manera aproximada con una condición aplanetismo. En la literatura se pueden encontrar algunos trabajos relacionados con este tema, aplicado a sistemas ópticos estigmáticos (González-Acuña and Chaparro-Romo, 2020), que queremos resaltar. En 1952, Jurek (1952) hizo un hallazgo parcial

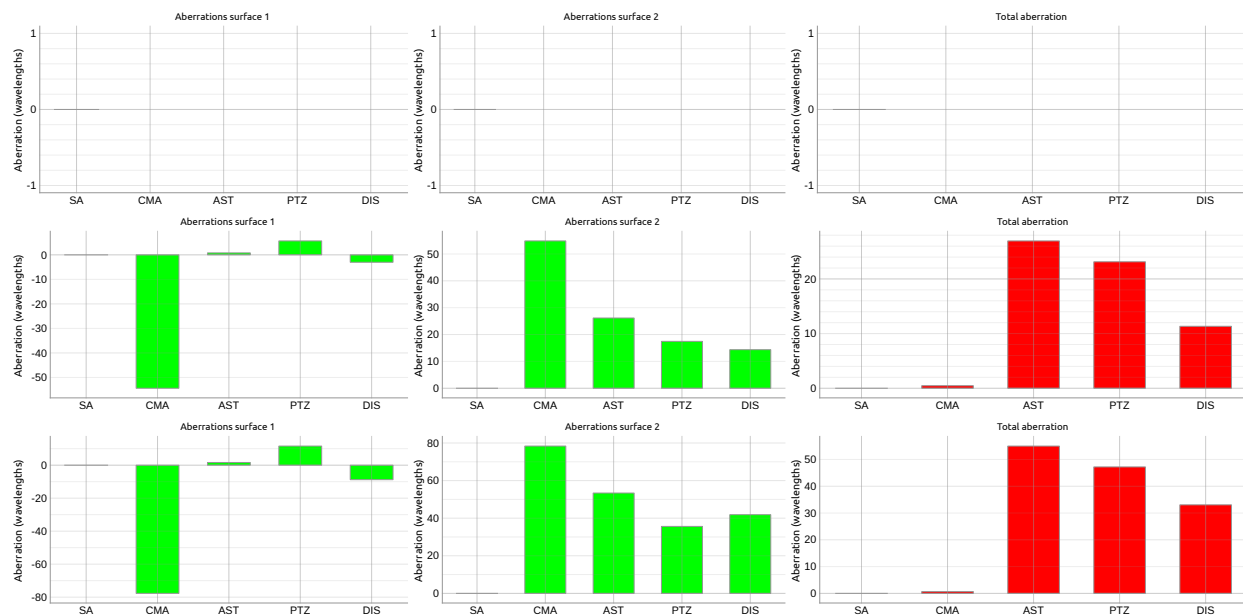


Figura 20. Coeficientes de las aberraciones primarias para una LSOE. De arriba hacia abajo se muestran los valores de las aberraciones primarias para puntos objeto ubicados a $0H$, $0.7H$ y H . De izquierda a derecha se muestran las aberraciones para la primera superficie, la segunda superficie, y la suma de las aberraciones de cada superficie, respectivamente.

en el que encontró que no sólo las superficies refractantes esféricas son estrictamente aplanéticas, sino que las superficies cartesianas también poseen esta propiedad. En este manuscrito, el autor desarrolló un enfoque teórico donde se muestran dos casos de LSOEs estrictamente aplanéticas, uno de ellos donde la lente está compuesta por dos superficies cónicas y el otro, un caso particular, donde la lente está compuesta por dos superficies cartesianas. En el trabajo de Mashaal et al. (2016) se desarrolla una expresión exacta para la condición de aplanetismo en sistemas estigmáticos, cuya expresión involucra ecuaciones diferenciales, por lo que se requiere el uso de métodos numéricos para resolverla y encontrar las formas de las superficies que componen el sistema. Recientemente se publicó un trabajo donde los autores afirman haber encontrado una formulación para el diseño de lentes aplanéticas conformadas por dos superficies (González-Acuña et al., 2020b), cuyos diseños

son obtenidos mediante la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, lo que también requiere de la aplicación de métodos numéricos para obtener una solución. Otro enfoque es el desarrollado en la sección anterior, que hace uso de las superficies cartesianas (Silva-Lora and Torres, 2020c), a partir del cual se derivó una expresión que permite caracterizar los sistemas estigmáticos que cumplen con una condición de aplanetismo (Silva-Lora and Torres, 2020a). Todos estos resultados son de gran interés en aplicaciones como el diseño de sistemas ópticos concentradores de luz (Gordon et al., 2006), el diseño de cámaras de alta resolución para dispositivos móviles (Chen et al., 2016) y el diseño de sistemas ópticos de proyección (Omura, 2005).

En la mayoría de los trabajos sobre este tema, ha sido crucial el uso de métodos numéricos para diseñar sistemas ópticos aproximadamente aplanéticos. Si bien en todos los casos para el diseño de sistemas ópticos aplanéticos se hace uso de métodos numéricos, logrando sistemas ópticos de calidad aceptable, ¿Existe una manera de obtener el diseño de sistemas ópticos que satisfagan de manera estricta la condición del seno de Abbe? Dentro de esta sección se tiene una respuesta afirmativa a esta pregunta, y la clave para encontrar dicha respuesta son las superficies cartesianas.

En este trabajo, además de la superficie esférica refractiva, se encuentran sistemas compuestos por un conjunto de superficies cartesianas que son estrictamente aplanéticas. Todos estos sistemas cumplen, exactamente, la condición dada por la expresión (93). Jurek (1952) ha encontrado algunos resultados parciales, que están relacionados también con el uso de superficies cartesianas, y aquí son explorados con más detalle.

El caso más significativo de aplanetismo exacto es la superficie esférica refractiva, un caso particular de superficies cartesianas. Pero como hemos comentado, otros casos también cumplen

de manera estricta con esta condición, y en este apartado nos centraremos en ellos, mostrando cómo se obtienen a partir de nuestra formulación. A continuación se muestran cada uno de los casos en que un conjunto de superficies cartesianas es considerado estrictamente aplanético, cuyo hallazgo se basó en encontrar las condiciones para que la expresión (93) tuviese un valor de 1.

4.4.1. Tipo-0. Si se considera en Ec. (93) que $2S_k - G_k O_k^2 = 0$, es obtenido un valor constante de \mathcal{M} . De aquí resulta que $2S_k = G_k O_k^2$, que se puede escribir también como

$$\frac{G_k O_k^2}{2S_k} - 1 = 0. \quad (97)$$

Reemplazando las expresiones (10)-(13) en Ec. (97), es obtenido

$$(d_k - d_{k+1}) [n_k (d_k - \zeta_k) - n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k)] = 0. \quad (98)$$

Una solución para esta expresión es $d_{k+1} = d_k$, lo que resulta en la superficie esférica con sus puntos aplanéticos ubicados en el centro de la esfera, y otra solución es

$$n_k (d_k - \zeta_k) = n_{k+1} (d_{k+1} - \zeta_k). \quad (99)$$

Si se modifica Ec. (16) multiplicando ambos, el numerador y el denominador, por la cantidad $(2S_k)^{-1}$ se obtiene la expresión

$$z_k(\rho_k) = \zeta_k + \frac{\frac{1}{2S_k} (O_k + T_k \rho_k^2) \rho_k^2}{\frac{1}{2S_k} + \frac{\rho_k^2}{2} + \sqrt{\frac{1}{4S_k^2} + \frac{1}{2S_k} \left(1 - \frac{G_k O_k^2}{2S_k}\right) \rho_k^2}}, \quad (100)$$

y aplicando la expresión (97), se obtiene

$$z_k(\rho_k) = \zeta_k + \frac{\frac{1}{2S_k} (O_k + T_k \rho_k^2) \rho_k^2}{\frac{1}{S_k} + \frac{\rho_k^2}{2}}. \quad (101)$$

Reemplazando Ec. (99) en las expresiones (10)-(13) resulta en que $G_k = \infty$, $O_k S_k^{-1} = 0$, y $2T_k S_k^{-1} = O_k$. De aquí, es obtenida la expresión de la coordenada axial de las superficies involucradas en este caso, cuya expresión está dada por

$$z_k(\rho_k) = \zeta_k + \frac{O_k}{2} \rho_k^2, \quad (102)$$

la cual es la expresión para una esfera. Reemplazando $\rho_k^2 = r_k^2 + (z_k - \zeta_k)^2$ se obtiene la expresión

$$r_k^2 + \left(z_k - \zeta_k - \frac{1}{O_k}\right)^2 = \frac{1}{O_k^2} \quad (103)$$

la ecuación de una esfera escrita en coordenadas cartesianas. Adicionalmente, de Ec. (99) son obtenidos otros puntos estigmáticos para la superficie esférica refractiva, expresados como

$$d_k - \zeta_k = \frac{R_k (n_{k+1} + n_k)}{n_k}, \quad d_{k+1} - \zeta_k = \frac{R_k (n_{k+1} + n_k)}{n_{k+1}},$$

los cuales son conocidos como los puntos de Young (Young, 1807), donde $R_k = 1/O_k$ es el radio de la esfera. Así, la Ec. (93) se reduce a

$$\mathcal{M}(\{\rho_k\}) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \frac{\frac{1}{R_k} - \frac{1}{d_{k+1} - \zeta_k}}{\frac{1}{R_k} - \frac{1}{d_k - \zeta_k}} = 1, \quad (104)$$

lo cual impone que el aplanetismo ocurre si el invariante de Abbe es preservado a lo largo de cada superficie esférica refractiva que compone el sistema.

Como ejemplo se tiene una lente menisco negativa con parámetros de forma mostrados en Tab. 6, cuya principal característica es que es aplanética en todo rigor. Esta lente está conformada por dos superficies esféricas, en donde la primera superficie tiene un radio de $21.428418mm$ y la segunda un radio de $27.857481mm$.

Tabla 6

Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-0, conformada por superficies esféricas.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	AST	55	-	-	1	1	0	0	0	0
2	SRF	60	0	26.666677	1	1.8	∞	-0.046667	∞	∞
3	SRF	70	26.666677	-8	1.8	1	∞	-0.035897	∞	∞
4	IMG	-8	-	-	1	-	0	0	0	0

El sistema que se obtiene de los parámetros de forma descritos en Tab. 6 se muestra en la Fig. 21. Dentro de un sistema de coordenadas cartesiana, donde todas las distancias axiales se encuentran medidas a partir del origen de coordenadas, se tiene que para este sistema, el vértice de la primera superficie de la lente se encuentra ubicado en a $60mm$ y el de la segunda superficie a $70mm$. Los puntos aplanéticos se encuentran ubicado a $0mm$ y a $-8mm$, objeto e imagen respectivamente, y los rayos que acceden al sistema son limitados por una pupila física ubicada a $55mm$, cuyo radio de la apertura es $10mm$.

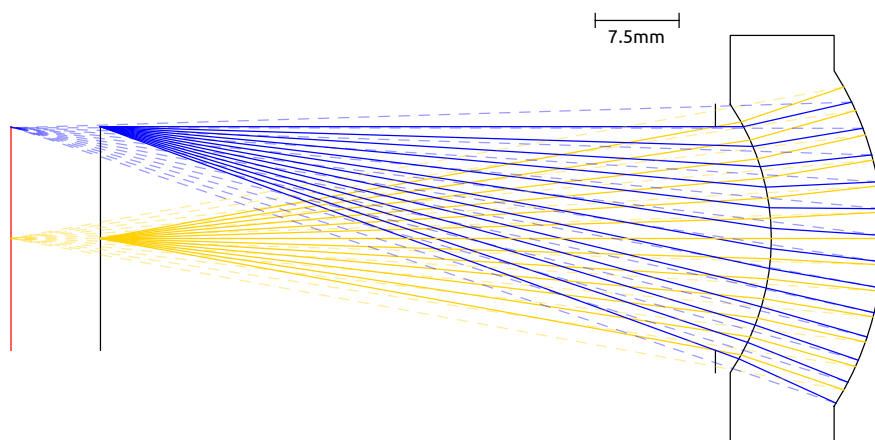


Figura 21. Lente rigurosamente aplanética tipo-0 con plano objeto ubicado a una distancia de $60mm$, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de $43.333323mm$, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual). Es mostrado el trazado de rayos para dos puntos sobre el plano objeto, ubicados en $H = 0$ y $H = 10mm$.

Como resultado del análisis de las aberraciones del sistema en la Fig. 21 se muestran los diagramas de puntos y las aberraciones de rayo para tres objetos puntuales ubicados a diferentes distancias transversales entre $0mm$ y $H = 10mm$. Uno de los objetos puntuales se encuentra sobre en eje ($0H$) y dos de ellos fuera de eje ($0.7H$ y H). Se puede observar, tanto de los diagramas de puntos como de las aberraciones de rayos, que los desplazamientos de las intersecciones de los

rayos con el plano imagen se encuentran dentro de una región de $60\mu\text{m}$ de radio para el punto objeto más alejado del eje óptico. Adicionalmente, se muestran los coeficientes de las aberraciones en la Fig. 23, donde se observa que este tipo de lentes no solamente son libres de aberración esférica y coma, sino que también son libres de astigmatismo. Las lentes que carecen de estos tres tipos de aberraciones se conocen como lentes *anastigmáticas*, y esta característica es conservada de superficie a superficie en las lentes rigurosamente aplanéticas tipo-0, donde tanto para la primera superficie como para la segunda se puede considerar libres de estos tres tipos de aberraciones.

4.4.2. Tipo-1. Para una LSOE, tomando $N = 2$ en Ec. (93), se obtiene la expresión

$$\mathcal{M}(\{\rho_k\}) = \left[\frac{n_1}{n_0} \frac{A_0 - \left(2S_0 - \frac{G_0 O_0}{d_1 - \zeta_0}\right) \sqrt{1 + A_0 \rho_0^2}}{A_0 - \left(2S_0 - \frac{G_0 O_0}{d_0 - \zeta_0}\right) \sqrt{1 + A_0 \rho_0^2}} \right] \left[\frac{n_2}{n_1} \frac{A_1 - \left(2S_1 - \frac{G_1 O_1}{d_2 - \zeta_1}\right) \sqrt{1 + A_1 \rho_1^2}}{A_1 - \left(2S_1 - \frac{G_1 O_1}{d_1 - \zeta_1}\right) \sqrt{1 + A_1 \rho_1^2}} \right], \quad (105)$$

con $A_k = 2S_k - G_k O_k^2$, con $k = \{0, 1\}$. Si se hace $d_1 \rightarrow \infty$ se tiene como resultado una lente cuyos rayos internos, provenientes de un objeto puntual sobre el eje óptico, se orientan de manera paralela al eje óptico. Si este valor de d_1 es reemplazado en las expresiones (10)-(13), se obtiene como resultado que $S_1 = S_0 = 0$, $G_0 = -n_1^2 n_0^{-2}$, $G_1 = -n_1^2 n_2^{-2}$, $O_0 = -n_0[(d_0 - \zeta_0)(n_1 - n_0)]^{-1}$, y $O_1 = -n_2[(d_2 - \zeta_1)(n_1 - n_2)]^{-1}$ (Silva-Lora and Torres, 2020c), de donde se deduce que ambas superficies son cónicas, llevando a la Ec. (93) a que se reduzca a

$$\lim_{d_1 \rightarrow \infty} \mathcal{M} = \frac{\left(-1 - \frac{(n_1 - n_2)}{n_2} \sqrt{1 + \frac{n_1^2 \rho_1^2}{(d_2 - \zeta_1)^2 (n_1 - n_2)^2}} \right)}{\left(-1 - \frac{(n_1 - n_0)}{n_0} \sqrt{1 + \frac{n_1^2 \rho_0^2}{(d_0 - \zeta_0)^2 (n_1 - n_0)^2}} \right)}. \quad (106)$$

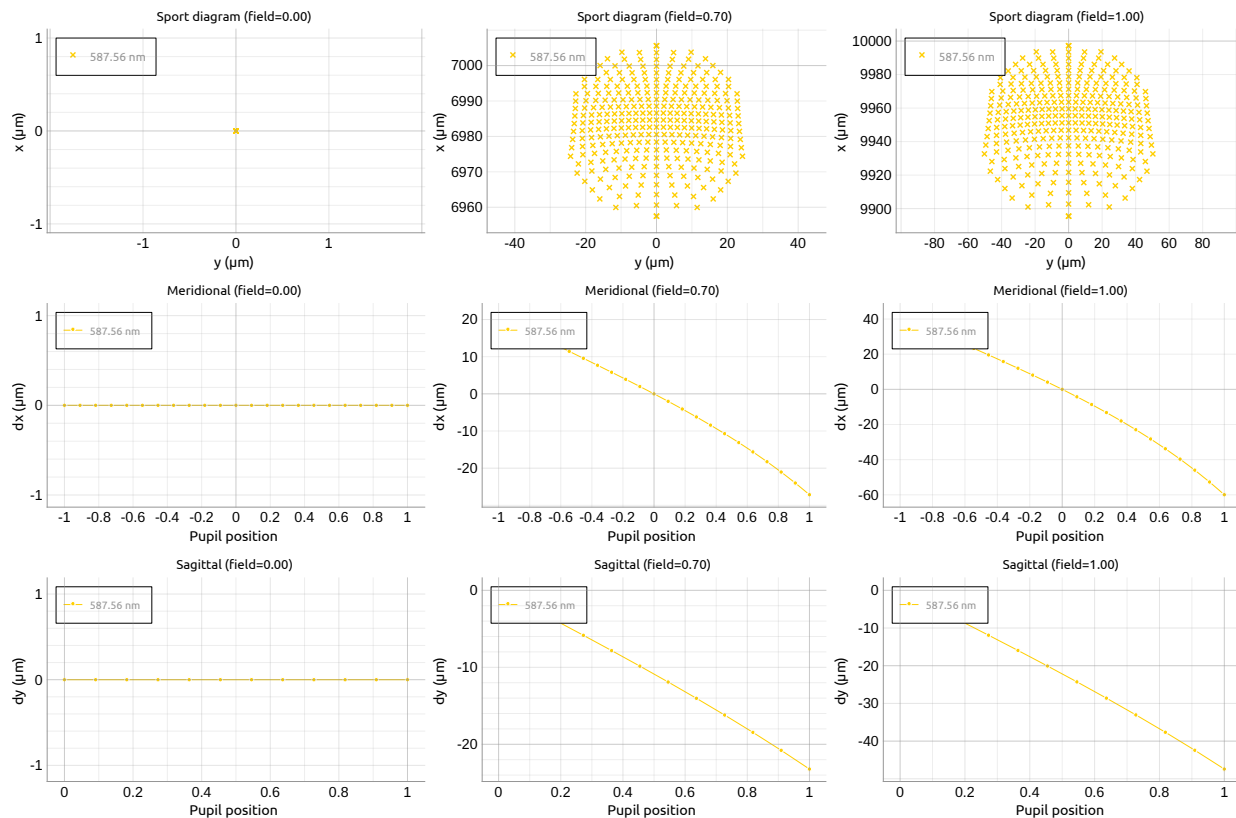


Figura 22. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-0. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

Para $M(\rho_0, \rho_1) = 1$, el numerador debe ser igual a su denominador, y las siguientes tres condiciones se deben satisfacer:

1. Los índices de refracción de los espacios objeto e imagen deben ser los mismos, $n_2 = n_0$.
2. La distancia que hay entre el objeto y el vértice de la primera superficie debe ser igual a la distancia que hay entre la imagen y el vértice de la segunda superficie, esto es el cumplimiento

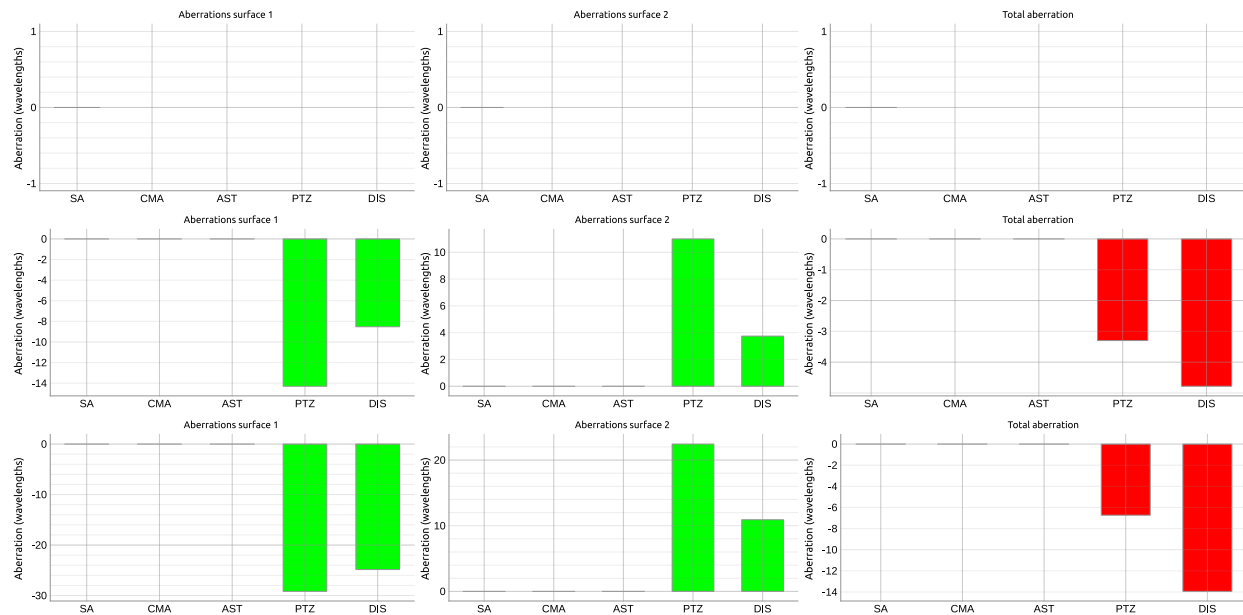


Figura 23. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-0. De arriba hacia abajo se muestran los valores de las aberraciones primarias para puntos objeto ubicados a $0H$, $0.7H$ y H . De izquierda a derecha se muestran las aberraciones para la primera superficie, la segunda superficie, y la suma de las aberraciones de cada superficie, respectivamente.

de la relación

$$d_2 - \zeta_1 = \pm(d_0 - \zeta_0), \quad (107)$$

3. Ambas superficies tienen la misma forma, por lo tanto $\rho_0 = \rho_1$.

Como consecuencia ambas superficies tienen la misma forma, de donde resulta que $\rho_0 = \rho_1$ para el par estigmático. Si se considera el signo negativo de la Ec. (107), las superficies resultantes abrirán hacia el interior de la lente dando como resultado una lente bi-convexa, formando una imagen real aplanética a partir de un objeto real. Si se considera el signo positivo, las superficies abrirán hacia

la misma dirección dando como resultado una lente tipo menisco, formando una imagen virtual aplanética a partir de un objeto real. Como es mostrado en el trabajo de Silva-Lora and Torres (2020c), dos tipos de superficies se pueden obtener dependiendo de la relación que exista entre los índices de refracción de la lente y del medio que la rodea. Considerando que n_1 es el índice de refracción de la LSOE y que n_0 es el índice de refracción del medio que la rodea, si $n_1 > n_0$, ambas superficies resultan en hiperboloides, de lo contrario son elipsoides.

Las superficies que componen estas lentes bi-cónicas pueden ser obtenidas haciendo $S_k = T_k = 0$ en la Ec. (16), lo cual nos lleva a que la expresión (16) se reduce a

$$z_k = \zeta_k + \frac{O_k \rho_k^2}{1 + \sqrt{1 - O_k^2 G_k \rho_k^2}} \quad (108)$$

$$= \zeta_k + \frac{O_k r_k^2}{1 + \sqrt{1 - (G_k + 1) O_k^2 r_k^2}}, \quad (109)$$

dada como función de ρ_k o como función de la coordenada transversal r_k .

Para este caso, se tiene como resultado lentes bi-convexas conformada por superficies cónicas, y en Tab. 7 se muestran los parámetros geométricos de una de ellas. Esta lente está conformada por dos superficies, la primera que colima los rayos que provienen de un objeto puntual ubicado en el punto estigmático, y la segunda que toma esos rayos y los enfoca en un foco común. La pupila física está ubicada entre el objeto y el vértice de la primera superficie, exactamente a $55mm$ de distancia del objeto y a $5mm$ del vértice de la primera superficie, y posee una apertura de radio $10mm$. En la Fig. 7 se puede observar el sistema en cuestión y el comportamiento de los

rayos que lo atraviesan. Se puede ver el comportamiento de los rayos provenientes de un objeto puntual que se encuentra sobre el eje óptico y de un objeto puntual ubicado a una distancia máxima del campo de $H = 10mm$.

Tabla 7

Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-1, conformada por superficies cónicas.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	AST	55	-	-	1	1	0	0	0	0
2	SRF	60	0	∞	1	1.8	-3.24	0.020833	0	0
3	SRF	70	∞	130	1.8	1	-3.24	-0.020833	0	0
4	IMG	130	-	-	1	-	0	0	0	0

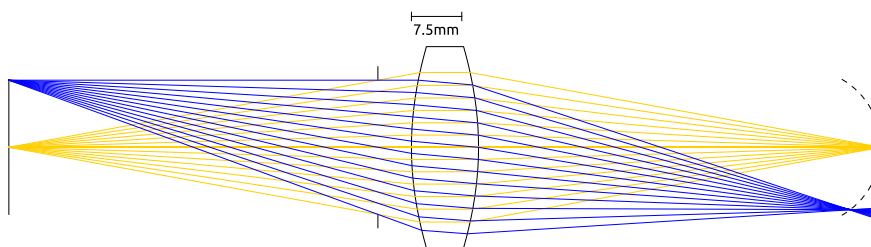


Figura 24. Lente rigurosamente aplanética tipo-1 con plano objeto ubicado a una distancia de 60mm, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de 60mm, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen real). Es mostrado el trazado de rayos para dos puntos sobre el plano objeto, ubicados en $H = 0$ y $H = 10mm$.

En la Fig. 25 se tiene el resultado de las aberraciones que afectan el sistema, en donde se observa en la fila superior que el diagrama de puntos tiene un patrón parecido a una elipse, lo que indica que el sistema posee una gran cantidad de astigmatismo. En la medida en que el objeto se encuentra más retirado del eje óptico se aumentan las aberraciones pero se mantiene el mismo patrón del diagrama de puntos. Se observan además las aberraciones de rayos, meridional y sagital, cuyo desplazamiento máximo se encuentra alrededor de $1000\mu m$ para el punto más retirado del eje

óptico.

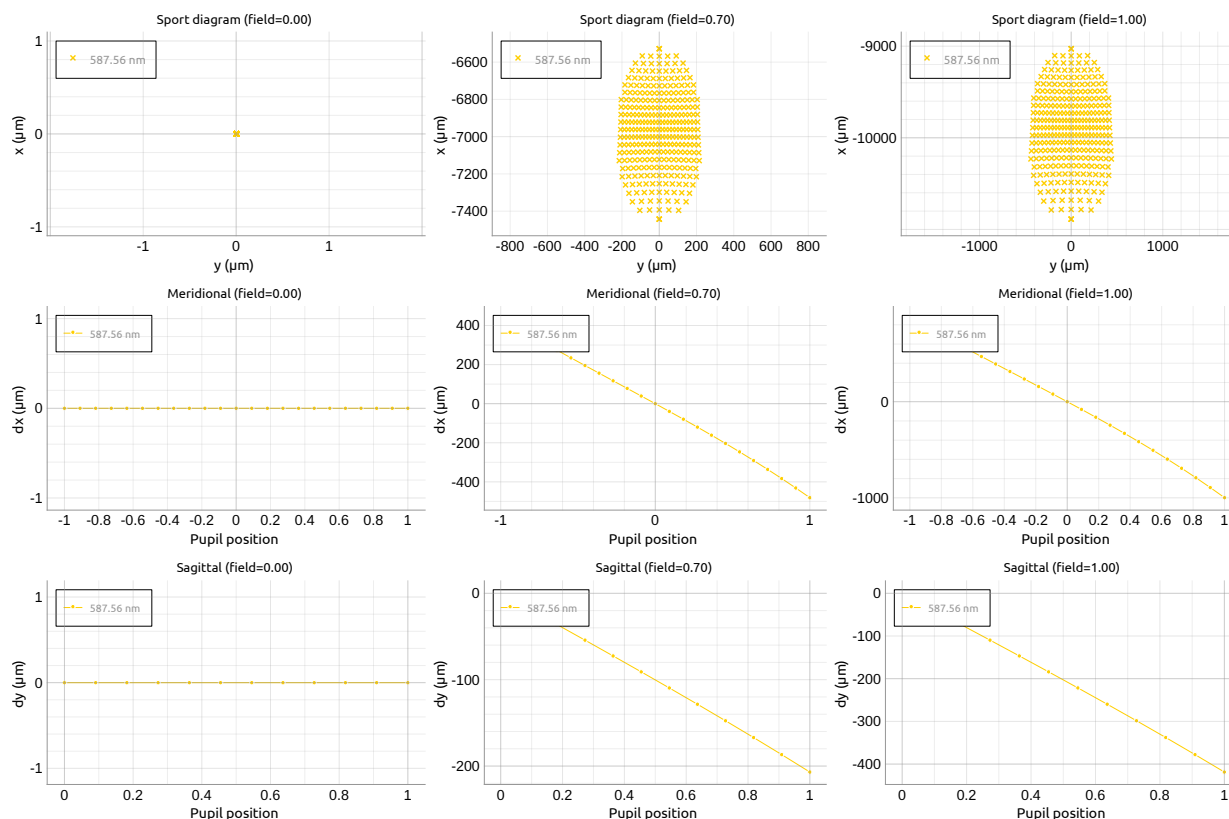


Figura 25. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-1. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

Como cumplimiento de la condición de aplanetismo riguroso, estos sistemas carecen de aberración esférica y de coma de manera simultánea. Para corroborar esto, se obtiene el valor de las aberraciones primarias como es mostrado en la Fig. 26. En la figura se observa que tanto la aberración esférica como la coma son nulas, pero las otras aberraciones tienen valores bastante altos que no permiten una buena formación de la imagen para objetos extendidos, por lo menos no

sobre el plano imagen. Como se puede apreciar, en el plano meridional existe un foco casi común para los rayos al atravesar el sistema, este foco común no se encuentra sobre el plano imagen sino sobre una superficie curva. Lo mismo ocurre en el plano sagital, en donde los rayos coinciden en otro foco casi común que se encuentra ubicado sobre otra superficie curva. En realidad no son focos casi comunes sino que sobre la superficie imagen se van a formar líneas en vez de puntos, las cuales son perpendiculares entre si. Si se desea obtener una imagen lo más nítida posible lo mejor es registrar la imagen sobre una superficie curva cuya curvatura este entre la curvatura de la superficie para el caso de los rayos meridionales y la curvatura para el caso de los rayos sagitales, sobre la cual se encuentre el *círculo de menor confusión*.

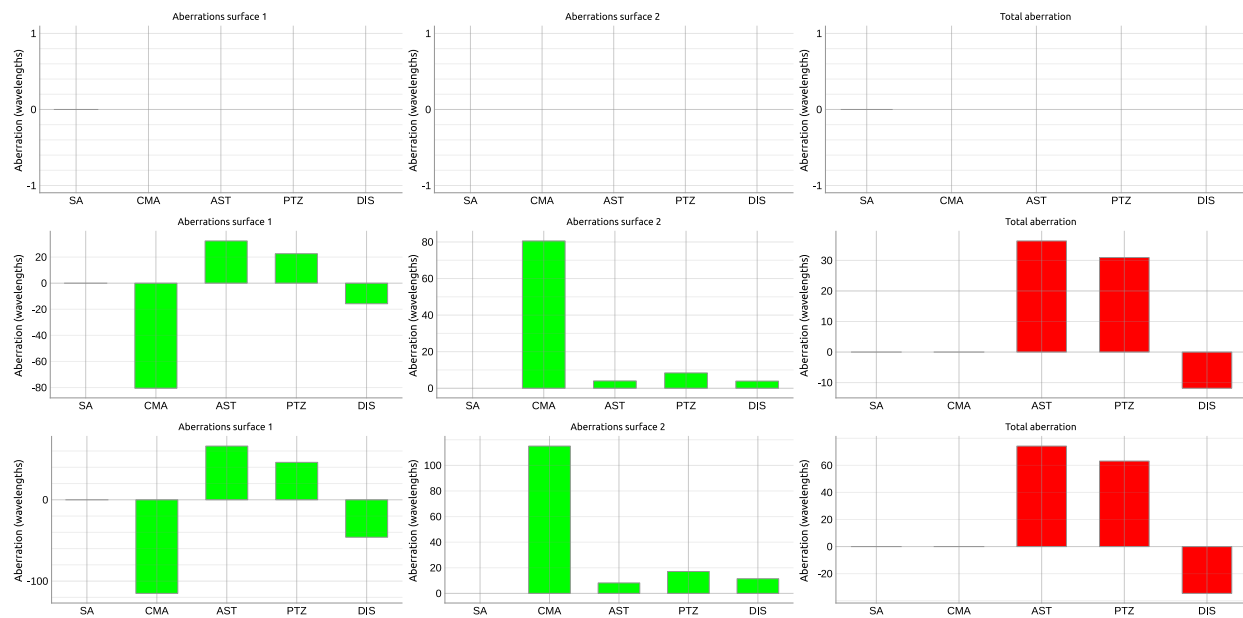


Figura 26. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-1. De arriba hacia abajo se muestran los valores de las aberraciones primarias para puntos objeto ubicados a $0H$, $0.7H$ y H . De izquierda a derecha se muestran las aberraciones para la primera superficie, la segunda superficie, y la suma de las aberraciones de cada superficie, respectivamente.

4.4.3. Tipo-2. Otra condición para obtener un valor constante de la Ec. (93) es haciendo $O_k = 0$. A partir de la Ec. (11), se puede escribir esta condición como

$$O_k = \frac{\frac{n_{k+1}}{(d_{k+1}-\zeta_k)} - \frac{n_k}{(d_k-\zeta_k)}}{(n_{k+1} - n_k)} = 0, \quad (110)$$

de donde se deriva la condición

$$\frac{d_{k+1} - \zeta_k}{n_{k+1}} = \frac{d_k - \zeta_k}{n_k}, \quad (111)$$

la cual permite reducir la expresión (93) a

$$\mathcal{M}(\{\rho_k\}) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{n_N}{n_0}. \quad (112)$$

Por consiguiente, los sistemas que cumplen con la condición (111) satisfacen la condición de aplanetismo si los índices de refracción del espacio objeto y del espacio imagen son iguales, es decir $n_N = n_0$. La expresión para la geometría de las superficies que componen los sistemas tipo-2 se puede obtener haciendo $O_k = 0$ en Ec. (16), lo que resulta en

$$z_k(\rho_k) = \zeta_k + \frac{T_k \rho_k^4}{1 + S_k \rho_k^2 + \sqrt{1 + 2S_k \rho_k^2}}. \quad (113)$$

dada en función de ρ_k .

Algo notable de este caso es que $O_k = 0$ corresponde a superficies ovoides con un radio de

curvatura paraxial infinito, lo que significa que son aproximadamente planos alrededor del vértice. De la Ec. (111) se puede ver claramente que tanto el objeto como la imagen se ubican en un mismo sentido con respecto al vértice de las superficies, lo que nos permite saber que tales lentes producen imágenes virtuales a partir de objetos reales e imágenes reales a partir de objetos virtuales.

Una manera apropiada para caracterizar estos sistemas es en términos de la diferencia que hay entre sus puntos aplanéticos. A partir de Ec. (111) se puede obtener una expresión para determinar esta diferencia, la cual se puede aplicar a lentes singletes, dobletes, tripletes, etc. Para un triplete ($N = 3$), usando $k = \{0, 1, 2\}$ en Ec. (111), son obtenidas tres ecuaciones, una para d_1 , otra para d_2 y otra para d_3 , escritas como

$$d_1 = \zeta_0 + \frac{n_1}{n_0} (d_0 - \zeta_0) , \quad (114)$$

$$d_2 = \zeta_1 + \frac{n_2}{n_1} (d_1 - \zeta_1) , \quad (115)$$

$$d_3 = \zeta_2 + \frac{n_3}{n_2} (d_2 - \zeta_2) , \quad (116)$$

donde reemplazando la Ec. (114) en (115), y la Ec. (115) en (116), y haciendo $n_3 = n_0$, se puede

obtener

$$d_3 - d_0 = \frac{n_2 - n_0}{n_2} (\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{n_1 - n_0}{n_1} (\zeta_1 - \zeta_0) . \quad (117)$$

Este resultado puede ser generalizado a N superficies, esto es

$$d_N - d_0 = \sum_{k=0}^{N-2} (\zeta_{k+1} - \zeta_k) \left(\frac{n_{k+1} - n_0}{n_{k+1}} \right) , \quad (118)$$

donde n_0 es el índice de refracción del espacio objeto e imagen, $\zeta_{k+1} - \zeta_k$ es el espesor axial entre dos superficies adyacentes, d_0 es la posición del objeto, y d_N es la posición de la imagen. Si $N = 2$, la ecuación resultante para la diferencia entre d_2 y d_0 resuelve un sistema aproximadamente estigmático conocido como las placas paralelas (Bruhat and Maréchal, 1961), donde el resultado de Ec. (118) es aplicado como una aproximación dentro de un régimen paraxial. Aquí, hemos probado que este resultado es válido dentro de una condición de estigmatismo, y aun más en condiciones de aplanetismo.

Como ejemplo se tiene una lente conformada por dos superficies, cuyos parámetros del sistema se muestran en Tab. 8. Esta lente es capaz de formar una imagen virtual a partir de un objeto real como se muestra en la Fig. 27, en donde además es mostrado el comportamiento de los rayos procedentes de dos objetos puntuales al atravesar el sistema. Se puede apreciar en la Fig. 28 que los objetos puntuales son bastante pequeños, cuyo radio máximo del diagrama de puntos para el objeto más alejado del eje es de aproximadamente $30\mu m$.

Tabla 8

Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-2, conformada por superficies cartesianas.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	AST	55	-	-	1	1	0	0	0	0
2	SRF	60	0	∞	1	1.8	∞	0	$-1.000228e-6$	0.000259
3	SRF	70	∞	4.444454	1.8	1	∞	0	$-7.668749e-7$	0.000217
4	IMG	4.444454	-	-	1	-	0	0	0	0

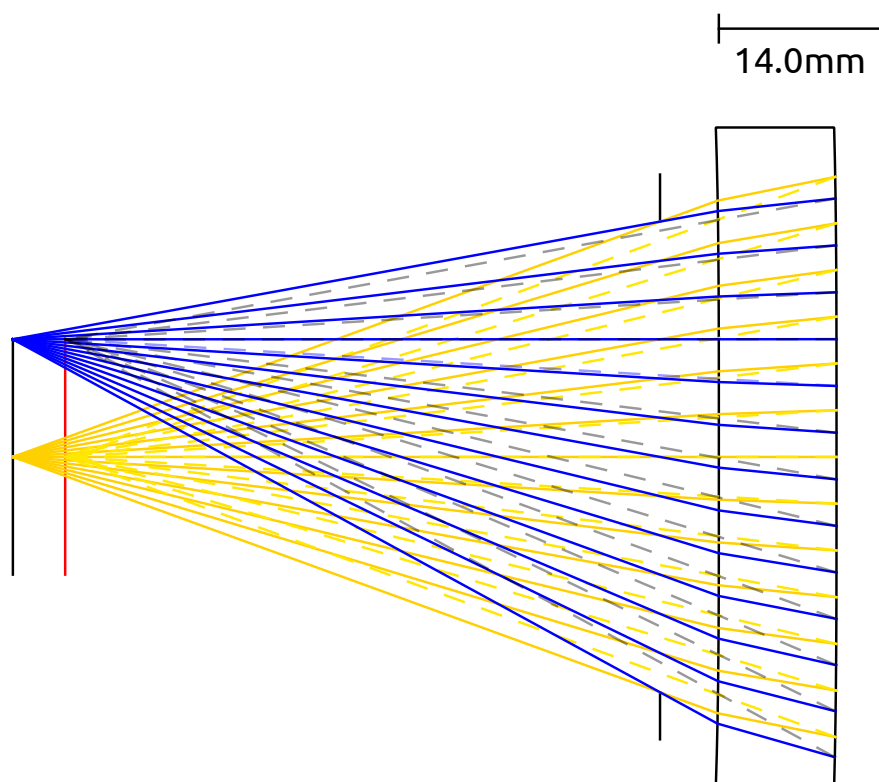


Figura 27. Lente rigurosamente aplanética tipo-2 con plano objeto ubicado a una distancia de 60mm, medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de 65.555546mm, medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual). Es mostrado el trazado de rayos para dos puntos sobre el plano objeto, ubicados en $H = 0$ y $H = 10$ mm.

Para este ejemplo también se observa que la aberración esférica y la coma son nulas, como se puede ver en la Fig. 29. Este tipo de lentes se puede aplicar en el diseño de lentes oftálmicas

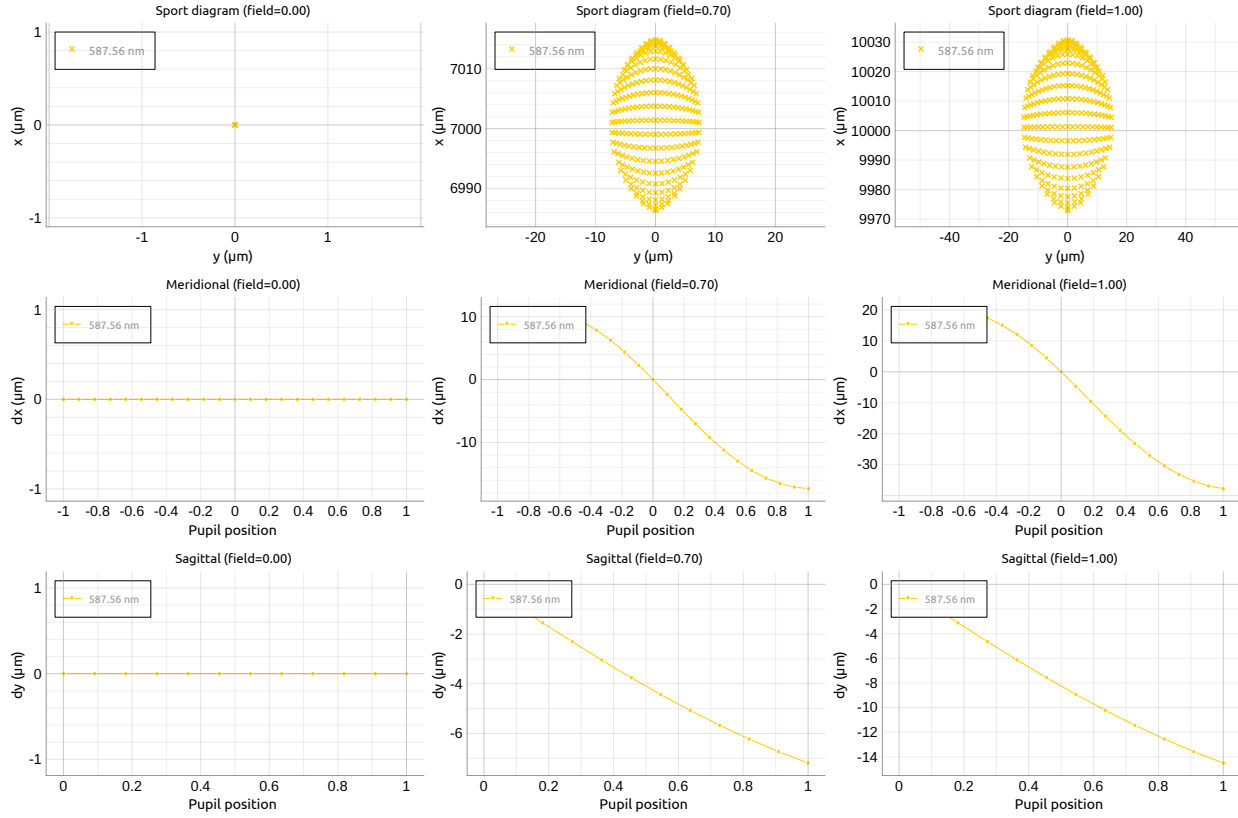


Figura 28. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-2. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

para la corrección de la hipermetropía.

4.4.4. Tipo-3. Una última condición, que hace que la Ec. (93) tome un valor constante, es obtenida haciendo $G_k = 0$. De la Ec. (10) se obtiene que

$$\frac{\left(\frac{n_{k+1}^2}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k^2}{d_{k+1} - \zeta_k}\right)^2}{n_k n_{k+1} \left(\frac{n_{k+1}}{d_{k+1} - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_k - \zeta_k}\right) \left(\frac{n_{k+1}}{d_k - \zeta_k} - \frac{n_k}{d_{k+1} - \zeta_k}\right)} = 0, \quad (119)$$

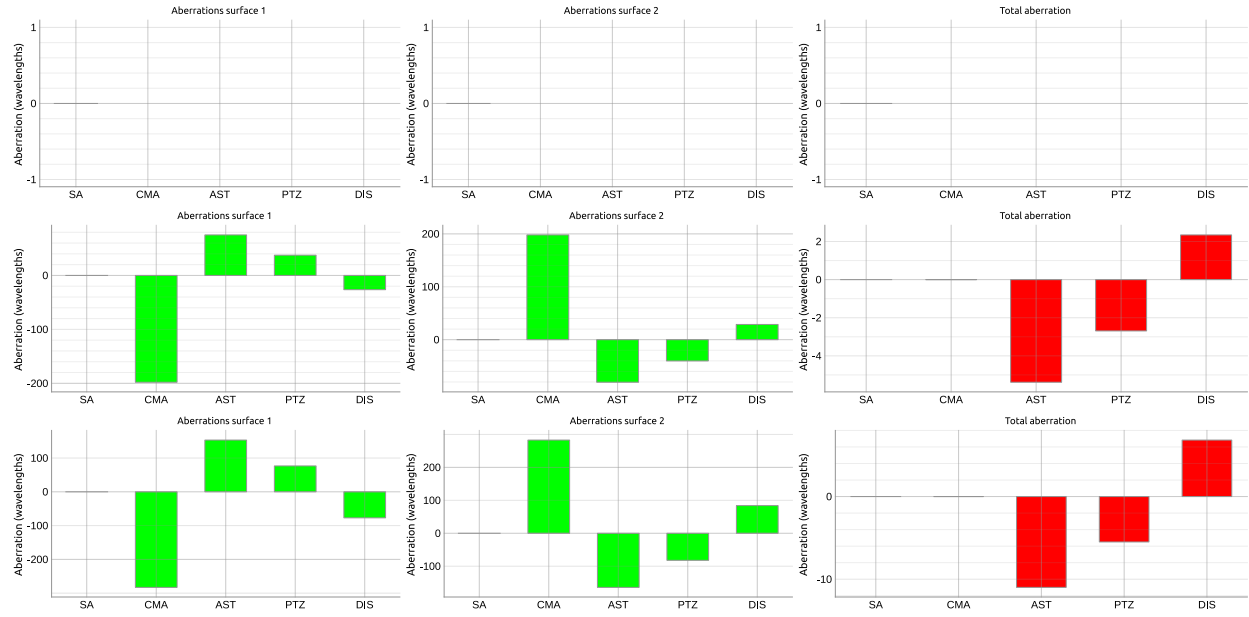


Figura 29. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-2. De arriba hacia abajo se muestran los valores de las aberraciones primarias para puntos objeto ubicados a $0H$, $0.7H$ y H . De izquierda a derecha se muestran las aberraciones para la primera superficie, la segunda superficie, y la suma de las aberraciones de cada superficie, respectivamente.

de donde resulta que

$$(d_k - d_{k+1}) [n_k^2 (d_k - \zeta_k) - n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k)] = 0, \quad (120)$$

expresión válida en el caso en que

$$n_k^2 (d_k - \zeta_k) = n_{k+1}^2 (d_{k+1} - \zeta_k). \quad (121)$$

Si esta expresión es tomada en cuenta en la expresión (93), se obtiene como resultado la Ec. (112),

de donde se tiene que, si se desea que $\mathcal{M} = 1$, los índices de refracción del espacio imagen y

del espacio objeto deben ser iguales. Las superficies que componen los sistemas tipo-3 pueden ser calculados mediante el uso de la Ec. (16). Reemplazando $G_k = 0$ en esta expresión, se obtiene una única expresión que caracteriza estas superficies, escrita como

$$z_k(\rho_k) = \zeta_k + \frac{(O_k + T_k \rho_k^2) \rho_k^2}{1 + S_k \rho_k^2 + \sqrt{1 + 2S_k \rho_k^2}}. \quad (122)$$

En la Fig. 9 se muestran los parámetros de forma de las superficies que componen un sistema rigurosamente aplanético tipo-3. Este ejemplo es de una lente menisco positiva, capaz de formar una imagen virtual a partir de un objeto puntual real, cuya geometría es mostrada en la Fig. 30. Esta lente, al igual que las otras lentes rigurosamente aplanéticas, no tienen aberración esférica ni coma pero si poseen los otros tipos de aberraciones. En la Fig. 31 se puede observar el efecto de estas aberraciones residuales en la formación de una imagen puntual sobre el plano imagen para tres puntos objetos ubicados en diferentes posiciones sobre el plano objeto. Aquí se puede ver el patrón de los diagramas de puntos, los cuales también tienen forma elíptica para los puntos objetos fuera de eje.

Tabla 9

Parámetros G_k , O_k , T_k , y S_k para una lente aplanética tipo-3, conformada por superficies cartesianas.

k	tipo	ζ_k	d_k	d_{k+1}	n_k	n_{k+1}	G_k	O_k	T_k	S_k
0	OBJ	0	-	-	1	1	0	0	0	0
1	AST	55	-	-	1	1	0	0	0	0
2	SRF	60	0	41.481481	1	1.8	0	-0.100667	2.94e-5	3.278627e-19
3	SRF	70	41.481481	-22.4	1.8	1	0	-0.065368	8.049801e-6	-5.256738e-19
4	IMG	-22.4	-	-	1	-	0	0	0	0

En la Fig. 32, se pueden observar los coeficientes de las aberraciones primarias para este

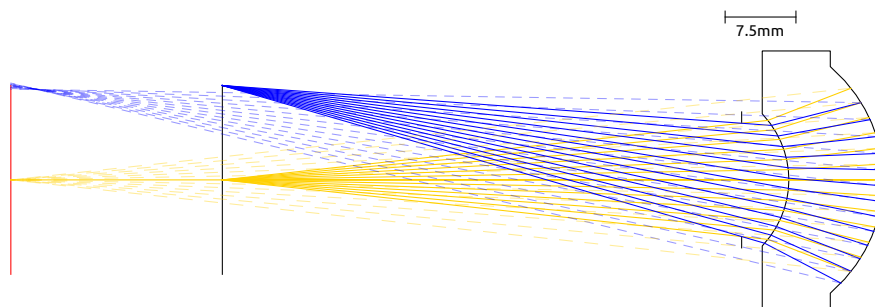


Figura 30. Lente rigurosamente aplanética tipo-3 con plano objeto ubicado a una distancia de 60mm , medida desde el vértice de la primera superficie, y un plano imagen ubicado a una distancia de 92.4mm , medida desde el vértice de la segunda superficie (imagen virtual). Es mostrado el trazado de rayos para dos puntos sobre el plano objeto, ubicados en $H = 0$ y $H = 10\text{mm}$.

sistema. Para todos estos casos de lentes rigurosamente aplanéticas se observa que la coma que inducen la primera superficie y la segunda son de igual cantidad pero de signo contrario, compensándose y haciendo nula esta aberración en el sistema completo. Por lo tanto, pueda que exista alguna condición que permita mezclar dos lentes singletes con igual valor de astigmatismo pero con signos opuestos que haga que el astigmatismo del sistema completo sea nulo.

Por el momento se han mostrado gráficas del valor de los coeficientes de las aberraciones primarias para cada sistema ejemplo, pero no se ha mostrado a partir de que formulación son obtenidos estos valores. Por tal motivo, en el siguiente capítulo se mostrará un estudio de las aberraciones primarias en sistemas conformados por superficies cartesianas.

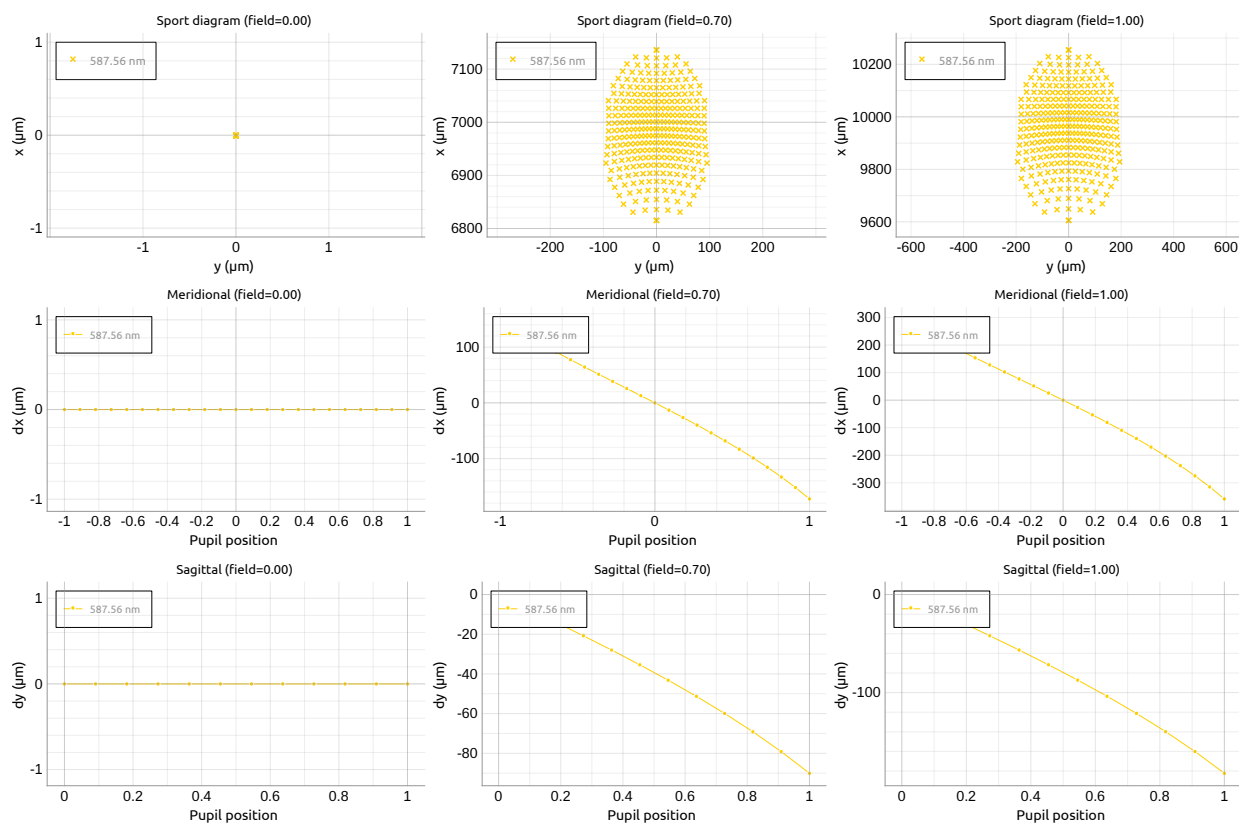


Figura 31. Aberraciones de rayo para una lente rigurosamente aplanética tipo-3. De izquierda a derecha se muestran distintos tipos de gráficas para el campo cuando el objeto se encuentra a distancias $0H$, $0.7H$, y H , medidas desde el eje óptico. En la fila superior se encuentran los diagramas de puntos, en la segunda fila de arriba hacia abajo las aberraciones de rayo sobre el plano meridional, y en la tercera fila las aberraciones de rayo sobre el plano sagital.

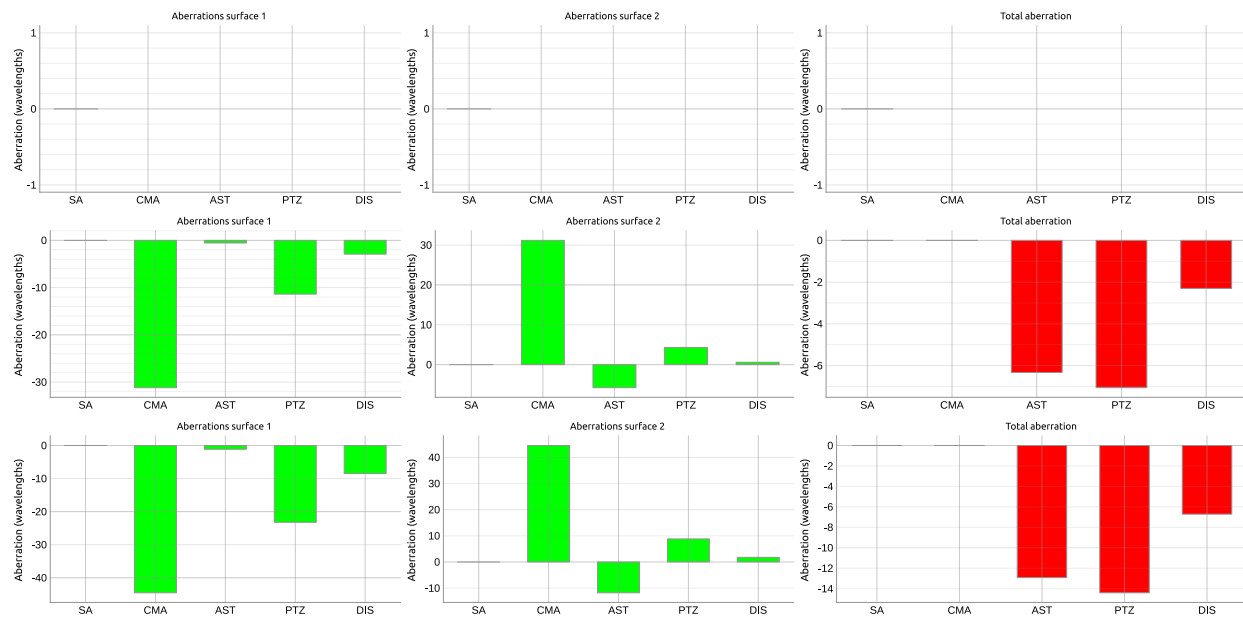


Figura 32. Coeficientes de las aberraciones primarias para una lente rigurosamente aplanética tipo-3. De arriba hacia abajo se muestran los valores de las aberraciones primarias para puntos objeto ubicados a $0H$, $0.7H$ y H . De izquierda a derecha se muestran las aberraciones para la primera superficie, la segunda superficie, y la suma de las aberraciones de cada superficie, respectivamente.

5. Aberraciones primarias en sistemas conformados por superficies cartesianas

5.1. Introducción

Como se vio anteriormente, las superficies ópticas capaces de formar imágenes estigmáticas son las superficies cartesianas (Descartes, 1637). Según Walther (1989), un sistema de imágenes solo puede estar libre de aberraciones geométricas para un solo par de planos conjugados, y para los sistemas conformados por superficies cartesianas este par de planos se ubican en los puntos estigmáticos. Huygens (Dijksterhuis, 2004) continuó con el estudio de las superficies cartesianas, a partir de lo cual pudo comprender el funcionamiento del telescopio e incursionó en el desarrollo de superficies refractivas esféricas. Sin embargo, el diseño óptico con superficies refractivas esféricas enfrenta algunos problemas, ya que en la práctica no siempre se tiene que el objeto se encuentra sobre los puntos de estigmáticos, lo que obliga a abandonar el estigmatismo y aceptar la presencia de aberraciones geométricas.

Las aberraciones son defectos que están relacionados con la calidad de los sistemas ópticos, por lo que el estudio de ellas despertó un gran interés para muchos investigadores como Airy (1827), Coddington (1829), y Seidel (1856), cuyas investigaciones se sintetizaron más adelante por Taylor (1906). Pero fueron los trabajos de Hopkins (1952) y Conrady (1957) los que marcaron la madurez de la teoría de las aberraciones, incluyendo el estudio de ellas en las superficies esféricas.

Para caracterizar estas aberraciones, se implementaron varias herramientas, como los polinomios Zernike (von F, 1934), que se utilizan para formular las aberraciones de onda en la pupila de salida, y a través de medidas de la intensidad en la región focal (Nijboer, 1947). Existen además

otras estrategias que se derivan del teorema de Aldis (Cox, 1964), las aberraciones primarias de Seidel (1856), y de los coeficientes de aberraciones desarrollados por Buchdahl (1962).

En la literatura, se adoptan dos principales enfoques para reducir las aberraciones ópticas, uno basado en la configuración correcta de una secuencia de superficies esféricas y el otro en el uso de superficies asféricas correctoras (Wassermann and Wolf, 1949). Sin embargo, el primer enfoque tiene limitaciones y el segundo enfoque utiliza superficies asféricas correctoras, logrando un sistema menos aberrado pero con un mayor grado de dificultad de diseño y fabricación (Ruppel and Ruppel, 2019; Xuan and Zhang, 2021).

En general, las superficies asféricas se representan matemáticamente por medio de expresiones de series de potencias utilizando coeficientes de asfericidad (Schulz, 1988; Lerner and Sasian, 2000; Shannon, 2012; Schuhmann, 2019), los cuales son utilizados para la formulación de las aberraciones en sistemas conformados por este tipo de superficies. Por consiguiente, se impone la necesidad de truncar a cierto orden de aproximación estas expresiones para obtener los coeficientes de aberraciones (Taylor, 1906; Lerner and Sasian, 2000; Mahajan, 1998). El hecho de que las superficies cartesianas sean formuladas mediante el uso de expresiones exactas, escritas en función de tres parámetros de formas, nos permite derivar expresiones explícitas de los coeficientes de aberraciones en función de esos tres parámetros de forma.

Debido a que existen varios factores por los cuales pueden ocurrir aberraciones en sistemas compuestos superficies cartesianas, se hace útil la caracterización de los coeficientes de las aberraciones en este tipo de sistemas. Por lo tanto, dentro de este capítulo, se estudian las aberraciones presentes en los sistemas conformados por superficies cartesianas, y se deriva de dicho estudio

la expresión de la función de aberración considerando el efecto de la posición de la pupila física del sistema. Finalmente, se muestra cómo esta expresión es una generalización de la función de aberraciones para los casos de sistemas conformados por superficies cónicas y por consiguiente superficies esféricas.

5.2. Aberraciones primarias en superficies cartesianas

Por lo general, los sistemas ópticos están contruidos usando superficies esféricas, secciones cónicas de revolución y superficies asféricas (Liao, 2007; Kingslake and Johnson, 2009). Las superficies de secciones cónicas de revolución, al igual que las superficies esféricas en los puntos de Young, poseen puntos estigmáticos donde el sistema es libre de aberraciones (Born and Wolf, 2013). Si un sistema muestra aberraciones residuales, estas podrían mitigarse utilizando superficies asféricas diseñadas para compensar este defecto y obtener como resultados sistemas aproximadamente estigmáticos. Los sistemas estigmáticos son libres de aberración esférica, pero poseen otro tipo de aberraciones como la coma que evita que se obtengan imágenes de buena calidad para objetos extendidos. Como se mostró en el capítulo anterior, estos sistemas pueden satisfacer una condición de aplanetismo y eliminar la coma, pero en algunos casos aun sigue siendo un sistema aberrado con una calidad aceptable. Estos sistemas son afectados con mayor fuerza por el astigmatismo, el cual puede ser reducido mediante estrategias como la compensación con las otras aberraciones, lo que requiere que el sistema sea sacado del estigmatismo. Por lo tanto, la caracterización y la búsqueda del origen de las aberraciones se convierte en un asunto de mayor importancia para establecer estrategias para la mitigación de las aberraciones en los sistemas conformados por superficies cartesianas.

La metodología directa y quizás la más consistentemente implementada para lograr un estigmatismo aproximado es mediante el uso de una apertura física que limite el acceso del campo luminoso al sistema. En la Fig. 33(a), se muestra una superficie estigmática, que enfoca los rayos provenientes de A en A' (puntos estigmáticos). En la Fig. 33(b), tenemos las mismas superficies, pero el objeto puntual se ha movido al punto B interrumpiendo la formación de una imagen puntual, lo cual está vinculado a la aberración esférica. En la Fig. 33(c), se tiene la misma configuración que en la Fig. 33(b), pero en este caso, el campo luminoso se limita mediante el uso de una apertura física, que permite de manera aproximada, la recuperación de la condición de estigmatismo y la formación de casi una imagen puntual, teniendo como caso límite el régimen paraxial donde el sistema está libre de aberraciones geométricas (Rutherford, 1891). Otras estrategias están relacionadas con la caracterización precisa de las aberraciones ópticas en función de los parámetros de las superficies ópticas como radios, constantes cónicas y coeficientes de asfericidad (Conrady, 1957), cuyos coeficientes de aberraciones pueden utilizarse para establecer condiciones para minimizarlos.

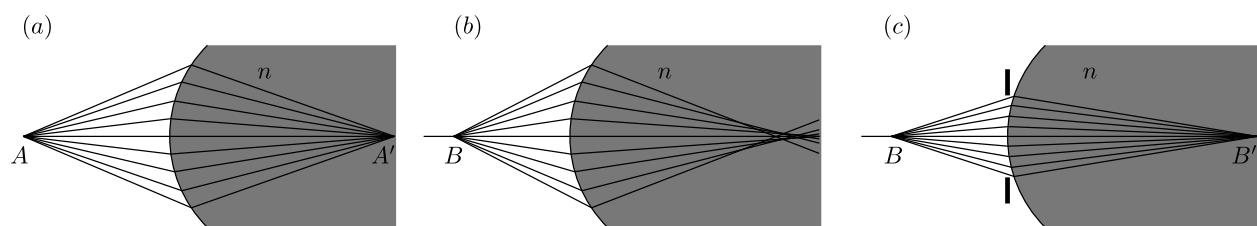


Figura 33. (a) Sistema estigmático, enfoca los rayos procedentes de A en A' de manera perfecta. (b) Si el objeto no coincide con los puntos estigmáticos se deja de formar una imagen. (c) Para el caso en (b) se puede recuperar el estigmatismo de forma aproximada mediante el uso de una pupila que limite los rayos que acceden al sistema.

Partiendo de lo anterior, tenemos que para las superficies cartesianas, la aberración esférica surge debido a que los puntos del objeto y la imagen difieren de los puntos estigmáticos. Esta

aberración es la que más afecta la calidad de los sistemas ópticos, por lo que se busca minimizarla mediante la utilización de un diafragma de apertura física, logrando que el sistema produzca imágenes de buena calidad en un rango de trabajo determinado (Rutherford, 1891). Las aberraciones ópticas se definen como la desviación del comportamiento de los rayos de luz de lo que predice la óptica paraxial o la óptica de Gauss (Gauss, 1966), y es de primordial importancia caracterizar el impacto que éstas tienen en la formación de la imagen. Las aberraciones geométricas están fuertemente vinculadas a la calidad, por lo que para determinar una expresión que permita estimar la influencia de estas aberraciones en el rendimiento de un sistema óptico, es útil formular una función de aberración. Una estrategia estándar son las aberraciones primarias de Seidel (Seidel, 1856), que permiten caracterizar la función de las aberraciones para un determinado sistema óptico en función de los parámetros del sistema. En este capítulo se tiene como objetivo expresar los coeficientes de las aberraciones primarias para las superficies cartesianas, manteniendo las aberraciones para la sección cónica de revolución y las superficies esféricas como casos particulares.

Como muestra Mahajan (1998), las aberraciones primarias de Seidel se pueden caracterizar para objetos sobre el eje óptico mediante expresiones explícitas para diferentes tipos de superficies, tales como las superficies esféricas refractantes, sección cónica de revolución y superficies asféricas con simetría axial. Las superficies cartesianas son una clase especial de superficies asféricas, que a pesar de tener propiedades ópticas importantes, como el estigmatismo y el aplanatismo (Silva-Lora and Torres, 2020a, 2021), no existe una teoría de aberraciones en relación a ellas. La formulación de las superficies cartesianas da como casos particulares las superficies esféricas y la sección cónica de revolución (Silva-Lora and Torres, 2020c), por lo tanto, el desarrollo de una expresión

para las aberraciones primarias de las superficies cartesianas debe incluir como caso límite aquellas correspondientes a este tipo de superficies.

5.2.1. Aberración para puntos sobre el eje óptico. Según la Fig. 34 y tomando en cuenta que desde el punto A se emanan rayos en todas direcciones, podemos seleccionar uno de estos rayos como referencia para medir la diferencia de fase entre este rayo y cualquier otro. Usando como referencia el rayo principal, el cual no se desvía y sigue la trayectoria geométrica $\overline{AV_0A'}$, podemos determinar la diferencia de fase entre este rayo y cualquier otro rayo arbitrario que sigue la trayectoria geométrica $\overline{AI_0A'}$. Cuando los puntos A y A' coinciden con los puntos estigmáticos de la superficie, esta no produce aberración esférica. Sin embargo, no siempre los puntos objeto e imagen coinciden exactamente con los puntos estigmáticos, de modo que se necesita medir que tan aberrado es un sistema óptico. Por lo tanto, se puede expresar la función de aberración para objetos sobre el eje óptico como la diferencia entre el camino óptico del rayo $\overline{AI_0A'}$ y el camino óptico del rayo $\overline{AV_0A'}$, es decir,

$$W_0 = [\overline{AI_0A'}] - [\overline{AV_0A'}] = n_0\overline{AI_0} + n_1\overline{I_0A'} - n_0\overline{AV_0} - n_1\overline{V_0A'}, \quad (123)$$

donde los corchetes cuadrados indican que se trata de la *longitud de camino óptico* (LCO).

Las funciones de aberración generalmente se expresan como una función de la coordenada transversal $r_0 = \overline{EI_0}$, pero en este trabajo, las expresaremos como una función de la distancia vértice-superficie $\rho = \overline{V_0I_0}$ (ver la Fig. 34), lo que facilita la escritura de las aberraciones como

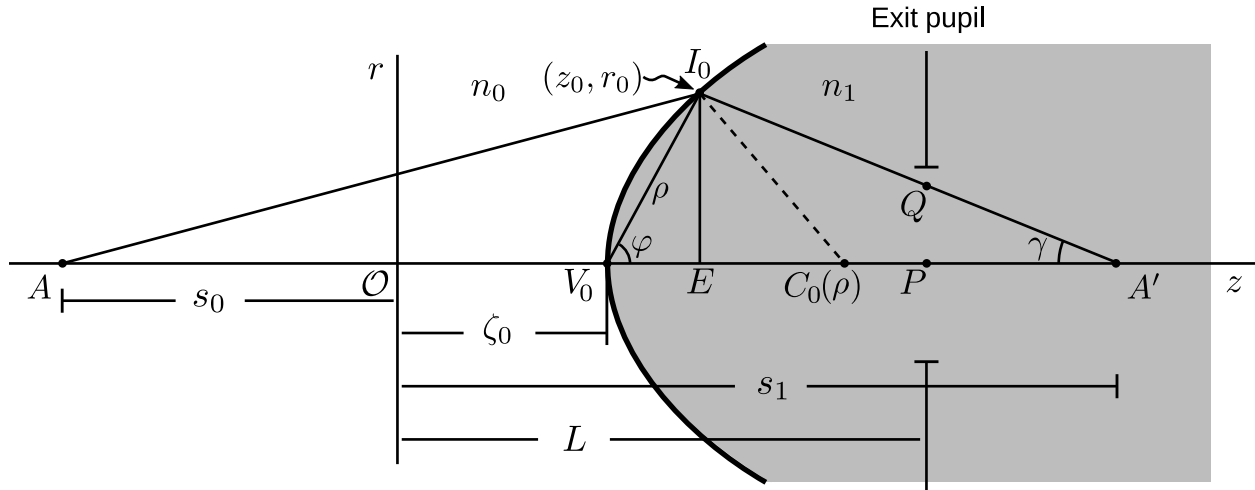


Figura 34. Superficie cartesiana refractiva que muestra un rayo que parte desde un objeto puntual \$A\$, y que luego es refractado en el punto \$I_0\$, para finalmente intersectar con el eje óptico en el punto \$A'\$.

una función de la posición de la pupila de salida \$L\$ y la coordenada transversal de la pupila \$r = \overline{PQ}\$.

Los valores de \$\overline{AI_0}\$ y \$\overline{I_0A'}\$ se obtienen por medio de las expresiones (195) y (196) del Apéndice C, expresados como

$$\overline{AI_0} = -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_0 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z - \zeta_0)}{s_0 - \zeta_0} \right]^{1/2}, \quad (124)$$

$$\overline{I_0A'} = (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_1 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z - \zeta_0)}{s_1 - \zeta_0} \right]^{1/2}. \quad (125)$$

donde \$s_0\$ es la ubicación del objeto puntual, \$s_1\$ es la imagen de \$s_0\$, \$\zeta_0\$ es la posición del vértice de la superficie, \$\rho = \sqrt{(z - \zeta_0)^2 + r^2}\$ es la distancia vértice-superficie, \$z\$ la coordenada axial, y \$r\$ la coordenada transversal. Es así, que con la expresión (123) y las expresiones (124)-(125) se puede escribir la función de la aberración esférica, en donde la función \$W\$ puede ser escrita en función de \$\rho\$ mediante la definición de \$z\$ en función de \$\rho\$ para las superficies cartesianas, como se mostrará a

continuación.

Como es mostrado por Mahajan (1998), existen expresiones para representar los coeficientes para la aberración de cuarto orden, para objetos sobre el eje óptico, para los casos de superficies refractivas de tipo esféricas, cónicas y asféricas con simetría axial, definidas de acuerdo a la formulación estándar ISO 10110-12:2019. Las superficies cartesianas son un tipo de superficies asféricas, pero a pesar de que poseen importantes propiedades ópticas como el estigmatismo y aplanetismo (Silva-Lora and Torres, 2020a, 2021), no se evidencia que exista una teoría de las aberraciones en torno a ellas. La formulación de las superficies cartesianas muestra que tanto las superficies esféricas como las cónicas son casos particulares de este tipo de superficies (Silva-Lora and Torres, 2020c), por lo tanto, de una expresión para el coeficiente de la aberración esférica en superficies cartesianas se puede derivar la expresión del coeficiente de la aberración esférica para una superficies cónicas refractivas y por ende para las superficies esféricas.

En el esquema mostrado en la Fig. 34 se muestra una superficie cartesiana refractiva con parámetros de forma G_0 , O_0 , T_0 y S_0 . Esta superficie separa dos medios de distinto índice de refracción n_0 y n_1 , y se pueden expresar de manera implícita a través de la expresión (9), a partir de donde se obtiene la expresión de la coordenada axial de las superficies cartesianas, dada por la Ec. (16). De la expresión para la coordenada axial de las superficies cartesianas se puede escribir

$$z - \zeta_0 = \frac{1}{O_0 G_0} \left(1 + S_0 \rho^2 - \sqrt{1 + (2S_0 - O_0^2 G_0) \rho^2} \right), \quad (126)$$

la cual se puede escribir como una serie de potencias mediante el uso de las series de Taylor,

obteniéndose

$$z_0 - \zeta_0 = \frac{O}{2}\rho^2 + \frac{(2S - O^2G)^2}{8GO}\rho^4 + O(\rho^5), \quad (127)$$

a partir de la cual se toman los términos hasta un cuarto orden de aproximación. Reemplazando la Ec. (127) en las expresiones (124) y (125), se obtienen los trayectos de los rayos que atraviesan la superficie cartesiana, dados por

$$\overline{AI_0} \approx -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{s_0 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 - \frac{(2S - O^2G)^2}{4GO(s_0 - \zeta_0)} \rho^4 \right]^{1/2}, \quad (128)$$

$$\overline{I_0A'} \approx (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{s_1 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 - \frac{(2S - O^2G)^2}{4GO(s_1 - \zeta_0)} \rho^4 \right]^{1/2}. \quad (129)$$

Expandiendo las expresiones anteriores se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} \overline{AI_0} \approx & -(s_0 - \zeta_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 \\ & + \left[\frac{1}{8(s_0 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 + \frac{(2S - O^2G)^2}{8GO} \right] \rho^4, \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \overline{I_0A'} \approx & (s_1 - \zeta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 \\ & - \left[\frac{1}{8(s_1 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 + \frac{(2S - O^2G)^2}{8GO} \right] \rho^4. \end{aligned} \quad (131)$$

Reemplazando las expresiones (130) y (131) en (123), se obtiene la expresión para la aberración

de cuarto orden para las superficies cartesianas, escrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 W_0 = & \frac{1}{2} \left[n_1 \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) - n_0 \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) \right] \rho^2 \\
 & - \frac{1}{8} \left[\frac{n_1}{s_1 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 - \frac{n_0}{s_0 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 \right] \rho^4 \\
 & - \frac{(n_1 - n_0)(2S - O^2G)^2}{8GO} \rho^4.
 \end{aligned} \tag{132}$$

Dado que la función de aberración geométrica corresponde a las diferencias de camino óptico (DCO) con respecto a las predicciones de la óptica paraxial (Born and Wolf, 2013), se tiene que

$$n_1 \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) - n_0 \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) = 0, \tag{133}$$

lo que representa el invariante de Abbe para ovoides de Descartes en un régimen paraxial (Silva-Lora and Torres, 2020a). De esta manera, la expresión de la función de aberración de las superficies cartesianas para un objeto puntual sobre el eje óptico, Ec. (132), se escribe como

$$W_0(\rho) = a_q \rho^4, \tag{134}$$

donde

$$a_q = -\frac{1}{8} \left[\frac{n_1}{s_1 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 - \frac{n_0}{s_0 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 + \frac{(n_1 - n_0)(2S - O^2 G)^2}{GO} \right], \quad (135)$$

es el coeficiente que mide la contribución de la aberración esférica en este tipo de superficies. De la expresión (133) se puede expresar (135) en función de solamente parámetros del espacio imagen, mediante el uso de la expresión

$$\frac{1}{s_0 - \zeta_0} = O + \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right). \quad (136)$$

La Ecuación (135) puede expresarse como la suma de dos contribuciones, el coeficiente de aberración esférica para una superficie esférica refractiva de curvatura $O = \frac{1}{R}$, mostrado en la Ec. (209) del Apéndice D, más la contribución dada por la DCO calculada entre el valor de la coordenada axial para la superficie cartesiana y el valor de la coordenada axial para la superficie esférica. Por lo tanto, el coeficiente a_q se puede escribir como

$$a_q = a_s + \alpha_0, \quad (137)$$

donde a_s es el coeficiente de la aberración esférica para superficies refractantes esféricas (Taylor,

1906; Mahajan, 1998), proporcionado por la Ec. (209) del Apéndice D, escrito como

$$a_s = -\frac{n_1^2}{8} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 \left[\frac{1}{n_1(s_1 - \zeta_0)} - \frac{1}{n_0(s_0 - \zeta_0)} \right], \quad (138)$$

y

$$\alpha_0 = -\frac{(n_1 - n_0)(2S - O^2G)^2}{8GO}, \quad (139)$$

donde el valor de α_0 son las contribuciones a la aberración por la diferencia que existen entre las superficies esféricas y las superficies cartesianas. Si este valor es cero $a_q = a_s$, que como se muestra en Mahajan (1998) esta es la expresión para la aberración esférica para un superficie esférica refractiva.

Debe recordarse que las distancias s_0 y s_1 son las distancias del objeto y la imagen, respectivamente, las cuales pueden no corresponden a las distancias de los puntos estigmáticos de la superficie cartesiana, d_0 y d_1 , para las cuales la aberración esférica es cero. Sustituyendo las expresiones (10)-(13) en las ecuaciones. (209) y (139), se obtiene

$$a_s = -\frac{n_1 \left(n_0 \frac{1}{(s_1 - \zeta_0)} - n_1 \frac{1}{(s_0 - \zeta_0)} \right) \left(n_0 \frac{(d_0 - s_1)}{(d_0 - \zeta_0)} - n_1 \frac{(d_1 - s_1)}{(d_1 - \zeta_0)} \right)^2}{8n_0 (n_0 - n_1)^2 (s_1 - \zeta_0)^2}, \quad (140)$$

$$\alpha_0 = \frac{n_0 n_1 (d_0 - d_1)^2 \left(n_0 \frac{1}{(d_1 - \zeta_0)} - n_1 \frac{1}{(d_0 - \zeta_0)} \right)}{8 (n_0 - n_1)^2 (d_0 - \zeta_0)^2 (d_1 - \zeta_0)^2}. \quad (141)$$

Desde aquí, se puede ver que si un objeto puntual, y por tanto su imagen, se encuentra en los puntos

estigmáticos, es decir, si $s_0 = d_0$ y $s_1 = d_1$, la expresión (140) se reduce a

$$a_s = -\frac{n_0 n_1 (d_0 - d_1)^2 \left(n_0 \frac{1}{(d_1 - \zeta_0)} - n_1 \frac{1}{(d_0 - \zeta_0)} \right)}{8 (n_0 - n_1)^2 (d_0 - \zeta_0)^2 (d_1 - \zeta_0)^2}, \quad (142)$$

resultando en $a_s = -\alpha_0$, y por lo tanto $a_q = a_s + \alpha_0 = 0$. Esto indica que el coeficiente de aberración esférica, expresión (135), es estrictamente cero, lo que indica que, bajo estas condiciones, las superficies cartesianas no presentan aberración esférica.

5.2.1.1. Dependencia de la aberración esférica con la posición de la pupila de

salida. Considerando L como la posición de la pupila de salida, la Ecuación. (134) describe la aberración esférica cuando L coincide con el vértice de la superficie refractante cartesiana, $L = \zeta_0$. Para un valor arbitrario de la posición de la pupila de salida (ver Fig. 34), procedemos de la siguiente manera. Como se asume en el Apéndice D, las aberturas son moderadas y debido a que la superficie esférica es un caso particular de las superficies cartesianas, el parámetro ρ sigue siendo linealmente dependiente de \overline{PQ} (la coordenada transversal en la pupila de salida), como se muestra en la expresión (220) del Apéndice D. Por lo tanto, para valores de \overline{PQ} limitados por la pupila, podemos asumir una relación lineal entre ρ y \overline{PQ} escrita como

$$\rho \approx \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) \overline{PQ}. \quad (143)$$

Con esto, podemos escribir la Ec. (134) en la forma

$$W_0 = a_q \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4 \overline{PQ}^4 = \left(a_{ss} + \alpha_0 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4 \right) r^4, \quad (144)$$

donde $r = \overline{PQ}$, y el coeficiente a_{ss} , dado por la Ec. (222) del Apéndice D, es expresado como

$$a_{ss} = a_s \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4. \quad (145)$$

con a_s dado por la Ec. (209). La Ec. (144) es la ecuación que representa la aberración esférica en superficies cartesianas, en función de la posición y el tamaño de la pupila de salida.

Como se puede ver, la dependencia de la función de aberraciones en los parámetros de forma, G , O y S , responsables de la característica asférica de las superficies cartesianas, se proporciona a través del coeficiente α_0 , Ec. (139). Por lo tanto, de la expresión (144), podemos derivar la expresión para la función de aberración esférica para los casos particulares de superficies cónicas de revolución estudiadas por Mahajan (1998). Las superficies de secciones cónicas de revolución se pueden obtener de la Ec. (126), al establecer $S = T = 0$ (Silva-Lora and Torres, 2020c), de lo cual resulta que

$$\sigma_0 \equiv \alpha_0(S = 0) = -\frac{1}{8}(n_1 - n_0)O^3G. \quad (146)$$

Si adicionalmente $G = 0$, entonces $\alpha_0 = 0$, y el coeficiente de aberración esférica para superficies cartesianas, Ec. (137), se convierte en el coeficiente de aberración esférica para superficies esféricas,

5.2.2. Aberraciones primarias para puntos fuera de eje.

zación de las aberraciones en el eje es importante, para evaluar el rendimiento de un sistema formador de imágenes considerando objetos extendidos, es necesario caracterizar las aberraciones para puntos fuera del eje. Por lo tanto, en el caso de objetos puntuales fuera del eje, primero necesitamos calcular la diferencia entre el valor de la coordenada axial para una superficie esférica y la coordenada axial para una superficie asférica, para luego obtener la fase adicional introducida en la función de aberraciones. En este caso, la superficie asférica es una superficie cartesiana cuya geometría está bien caracterizada por la Ecuación (126).

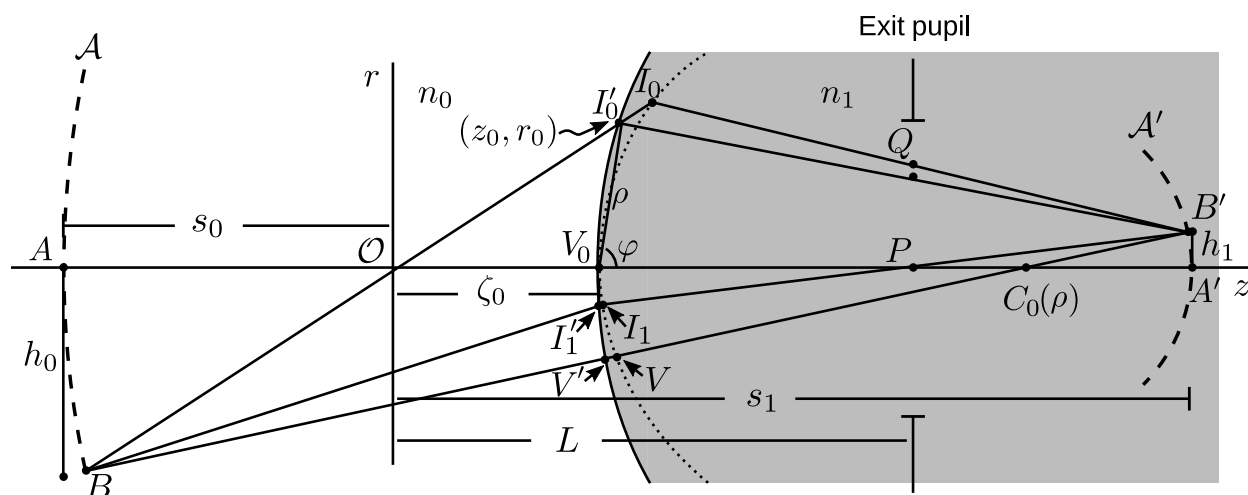


Figura 35. Puntos objeto fuera de eje para el caso de superficie cartesiana refractiva. La superficie representada con la línea punteada pertenece a una superficie esférica con centro en C_0 . La superficie representada por la línea continua es una superficie cartesiana, cuya curvatura axial corresponde a la curvatura de la superficie esférica.

La Fig. 35 muestra el comportamiento de tres rayos que parten de un objeto puntual fuera de eje, refractados por una superficie cartesiana refractiva. El objeto puntual B se coloca a una distancia h_0 del eje óptico, y está en la superficie esférica \mathcal{A} cuyo centro de curvatura se encuentra en C_0 , y su imagen B' se forma a una distancia h_1 , medida desde el eje óptico, sobre otra superficie esférica \mathcal{A}' cuyo centro de curvatura también se encuentra ubicado en C_0 . Considerando que L es la posición de la pupila de salida, y que la línea punteada es una superficie esférica con radio dado por $1/O$, y la línea sólida es una superficie cartesiana con curvatura axial dada por O , podemos identificar dentro de la figura tres rayos necesarios para definir la función de aberraciones. El primero es el rayo que no se desvía, el rayo $\overline{BV'VB'}$, El segundo es el rayo principal, dado por el camino $\overline{BI'_1I_1B'}$. Y el tercero es el rayo marginal, representado por el camino $\overline{BI'_0I_0B'}$. Para la superficie cartesiana refractiva, el proceso para formular la función de aberraciones comienza desde el efecto adicional producido por la diferencia de fase que existen en las trayectorias $\overline{I_0I'_0}$ y $\overline{I_1I'_1}$, comparadas con los recorridos de los mismos rayos cuando la superficie es una superficie esférica, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta W_q &= -n_0\overline{I_0I'_0} + n_1\overline{I_0I'_0} + n_0\overline{I_1I'_1} - n_1\overline{I_1I'_1}, \\ &= (n_1 - n_0) \left(\overline{I_0I'_0} - \overline{I_1I'_1} \right) .\end{aligned}\tag{147}$$

De aquí, los valores de $\overline{I_0I'_0}$ y $\overline{I_1I'_1}$ son obtenidos substrayendo la Ec.(200) del Apéndice D, ecuación de la coordenada axial para una superficie esférica, de la expresión hasta un cuarto orden de aproximación de la Ec. (127), ecuación para el valor de la coordenada axial para una superficie

cartesiana, entonces

$$\overline{I_0 I'_0} = \frac{O}{2} \overline{V_0 I'_0}^2 - \left[\frac{O}{2} \overline{V_0 I'_0}^2 + \frac{(2S - O^2 G)^2}{8GO} \overline{V_0 I'_0}^4 \right], \quad (148)$$

y

$$\overline{I_1 I'_1} = \frac{O}{2} \overline{V_0 I'_1}^2 - \left[\frac{O}{2} \overline{V_0 I'_1}^2 - \frac{(2S - O^2 G)^2}{8GO} \overline{V_0 I'_1}^4 \right], \quad (149)$$

obteniendo la siguiente expresión

$$\Delta W_q = -\frac{(n_1 - n_0)(2S - O^2 G)^2}{8GO} \left(\overline{V_0 I'_0}^4 - \overline{V_0 I'_1}^4 \right). \quad (150)$$

El Apéndice D muestra cómo se obtiene la función de aberraciones primarias para el caso de una superficie esférica refractiva, escrita utilizando la notación utilizada en este trabajo. Para la expresión (150) es necesario establecer expresiones para las cantidades $\overline{V_0 I'_0}$ y $\overline{V_0 I'_1}$. Por un lado, si consideramos la proyección de la pupila de salida en la superficie refractante cartesiana, como se muestra en la Fig. 36, el valor de $\overline{V_0 I'_0}$ se puede derivar aplicando la ley de los cosenos, es decir

$$\overline{V_0 I'_0}^2 = \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 r^2 + \overline{V_0 I'_1}^2 - 2 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) r \overline{V_0 I'_1} \cos \theta. \quad (151)$$

Por otro lado, el valor de $\overline{V_0 I'_1}$ se puede obtener considerando, a partir de la Fig. 35, los triángulos

$\Delta V_0 I'_1 P$ y $\Delta B' A' P$, de los cuales se tiene la relación

$$\frac{\overline{V_0 I'_1}}{L - \zeta_0} \approx \frac{h_1}{s_1 - L}, \quad (152)$$

de donde se obtiene

$$\overline{V_0 I'_1} \approx g_0 h_1, \quad (153)$$

siendo

$$g_0 = \frac{L - \zeta_0}{s_1 - L}. \quad (154)$$

Substituyendo (153) en (151), y luego su resultado en (150), y considerando que α_0 está dado por Ec. (139), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \Delta W_q = \alpha_0 & \left(\left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4 r^4 + 2 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 g_0^2 h_1^2 r^2 \right. \\ & - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^3 g_0 h_1 r^3 \cos \theta - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) g_0^3 h_1^3 r \cos \theta \\ & \left. + 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 g_0^2 h_1^2 r^2 \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (155)$$

La expresión (155) es la contribución adicional de las aberraciones, dada por la diferencia de camino óptico entre una superficie esférica y una superficie cartesiana. Por lo tanto, si a las aberraciones

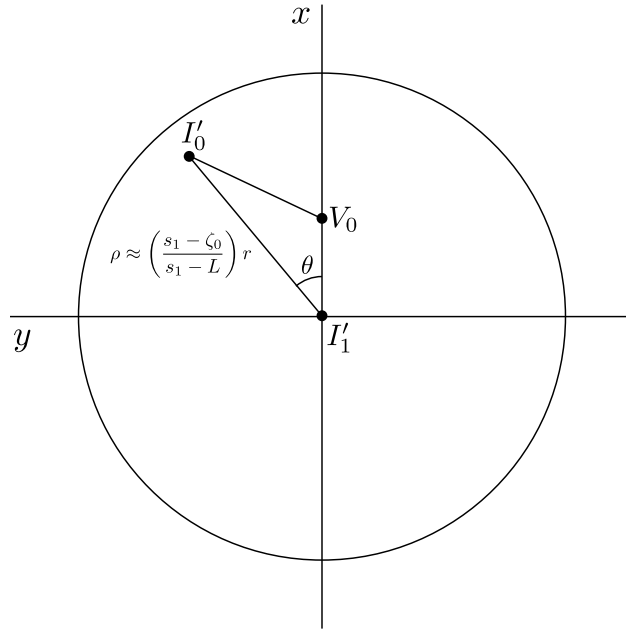


Figura 36. Proyección de la pupila de salida en la superficie refractante cartesiana. El rayo principal es el rayo $\overline{BI'B'}$, por lo tanto, el punto I' es el punto central en el que el valor de la función de aberración es cero.

producidas por una superficie esférica, expresada como la Ec. (231) del Apéndice D, se añade esta contribución, obtendremos las aberraciones para las superficies cartesianas refractivas. Es decir, si sumamos las expresiones (155) y (231), obtenemos una expresión para las aberraciones fuera del eje para superficies cartesianas refractivas, dada por

$$\begin{aligned}
 W &= W_s + \Delta W_q, \\
 &= \left(a_{ss} + \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4 \alpha_0 \right) r^4 + \left(a_{cs} - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^3 \alpha_0 g_0 \right) h_1 r^3 \cos \theta \\
 &+ \left(a_{as} + 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 \alpha_0 g_0^2 \right) h_1^2 r^2 \cos^2 \theta + \left(a_{ds} + 2 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 \alpha_0 g_0^2 \right) h_1^2 r^2 \\
 &+ \left(a_{ts} - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) \alpha_0 g_0^3 \right) h_1^3 r \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{156}$$

donde el primer término es la aberración esférica, el segundo término es la coma, el tercer término es el astigmatismo, el cuarto término es la curvatura de campo, y el quinto término es la distorsión.

La Ec. (156) se puede escribir como

$$W = a_{sq}r^4 + a_{cq}h_1r^3 \cos \theta + a_{aq}h_1^2r^2 \cos^2 \theta + a_{dq}h_1^2r^2 + a_{tq}h_1^3r \cos \theta, \quad (157)$$

con

$$a_{sq} = a_{ss} + \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4 \alpha_0, \quad (158)$$

$$a_{cq} = a_{cs} - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^3 \alpha_0 g_0, \quad (159)$$

$$a_{aq} = a_{as} + 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^2 \alpha_0 g_0^2, \quad (160)$$

$$a_{dq} = \frac{1}{2} a_{aq}, \quad (161)$$

$$a_{tq} = a_{ts} - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) \alpha_0 g_0^3, \quad (162)$$

donde los coeficientes a_{ss} , a_{cs} , a_{as} , a_{ds} y a_{ts} , están dados por la Ec. (222), junto con las expresiones

(232)-(235). Además, del Apéndice D, se tiene que estos coeficientes se pueden expresar como

$$a_{cs} = 4a_{ss}b_0, \quad (163)$$

$$a_{as} = 4a_{ss}b_0^2, \quad (164)$$

$$a_{ds} = \frac{1}{2}a_{as}, \quad (165)$$

$$a_{ts} = 4a_{ss}b_0^3, \quad (166)$$

siendo b_0

$$b_0 = \frac{\zeta_0 + R - L}{s_1 - \zeta_0 - R}, \quad (167)$$

con $R = O^{-1}$. Estas expresiones resultantes son las aberraciones primarias para el caso de una superficie cartesiana refractiva, las cuales son resumidas en Tab. 10.

Tabla 10

Aberraciones primarias para una superficie cartesiana refractiva.

Aberración	Expresión
Aberración esférica	$a_{sq}r^4$
Coma	$a_{cq}h_1r^3 \cos \theta$
Astigmatismo	$a_{aq}h_1^2r^2 \cos^2 \theta$
Curvatura de campo	$a_{dq}h_1^2r^2$
Distorsión	$a_{tq}h_1^3r \cos \theta$

La expresión (157) es el resultado más importante en este trabajo, y tiene dos contribuciones principales. La primera está asociada con el hecho de que no existe una formulación de aberraciones

que permita medir la contribución de las aberraciones en la degradación de la imagen para sistemas ópticos compuestos de superficies cartesianas, cuya formulación utiliza los mismos parámetros de forma utilizados para expresar, exactamente, las geometrías de estas superficies estigmáticas. La segunda contribución está relacionada con la compensación de las aberraciones, debido a que las expresiones de los coeficientes de aberración, dadas por las Ecs. (158)-(162), están implícitamente relacionadas con los parámetros de forma de las superficies cartesianas, G , O , y S , y se pueden utilizar para equilibrar las aberraciones, minimizando los valores de los coeficientes de aberración. Esta última característica se puede observar para el caso de las lentes rigurosamente aplanéticas mostradas en el capítulo anterior, para las cuales la coma es nula.

La función de aberración para las superficies cartesianas refractivas, descrita por la Ec. (157), se calcula considerando que el objeto y su imagen se encuentran en superficies esféricas representadas por \mathcal{A} y \mathcal{A}' , respectivamente, como se muestra en la Fig. 35. El radio de curvatura de \mathcal{A} es $R - s_0 + \zeta_0$, y el de \mathcal{A}' es $R - s_1 + \zeta_0$, donde $R = 1/O$ es el radio de curvatura axial. Sin embargo, existe un interés en determinar esta función de aberración con respecto al plano Gaussiano porque la mayoría de los sensores comerciales son planos, y por lo tanto, es en una superficie plana en la que se calculan estas aberraciones para medir la calidad de los sistemas ópticos. El diseño de un sistema óptico con una superficie imagen plana se requiere una mayor cantidad de superficies ópticas. Por lo tanto, los sensores curvos proporcionan ventajas dentro del campo del diseño óptico, ya que el uso de sensores curvos ahorra espacio y, por lo tanto, peso en el sistema resultante sin pérdida de calidad. Actualmente, algunas empresas emergentes con tecnologías de vanguardia están detrás del diseño y la fabricación de sensores curvos, permitiendo a los diseñadores ópticos lograr

dispositivos ópticos más compactos y livianos.

5.3. Aberraciones primarias sobre el plano gaussiano

Para estudiar las aberraciones primarias en el plano Gaussiano, utilizamos la óptica metaxial de Bonnet (Bonnet, 1978; Pellat-Finet, 2009), una teoría que considera aproximaciones de segundo orden en los parámetros de apertura y ángulo. La óptica metaxial se centra en la transferencia del campo luminoso entre emisores y receptores esféricos. Así, esta teoría nos permite adaptar fácilmente las curvaturas de los campos del objeto y la imagen, razón por la cual se busca utilizar esta teoría para estudiar la formación de imágenes y la determinación de la relación entre los radios de curvatura de un emisor (superficie del objeto) y un receptor (superficie de la imagen).

Como se mencionó anteriormente, la Ecuación (157) caracteriza las aberraciones primarias en \mathcal{A}' , producidas por la refracción de los rayos en una superficie cartesiana refractiva, cuyo punto objeto se encuentra en \mathcal{A} . Si se quiere medir la influencia de las aberraciones en el plano gaussiano, es necesario considerar la geometría de las superficies entre las cuales se transfiere el campo luminoso.

En el Apéndice D, la expresión (236) se utiliza para determinar el radio de curvatura \mathcal{A}' cuando el radio de \mathcal{A} es infinito, lo que significa que el objeto se encuentra en una superficie plana. Sin embargo, en este trabajo, utilizando la teoría metaxial de Bonnet. Partimos de la regla de doble conjugación para una superficie esférica refractiva, cuya regla establece que el campo sobre una superficie esférica \mathcal{A}' es la imagen coherente a través de la superficie esférica refractiva del campo del objeto sobre la esfera \mathcal{A} si, y solo si, el vértice y el centro de la esfera \mathcal{A}' son las imágenes paraxiales del vértice y el centro de la esfera \mathcal{A} , respectivamente (Pellat-Finet, 2009) (ver Fig. 37).

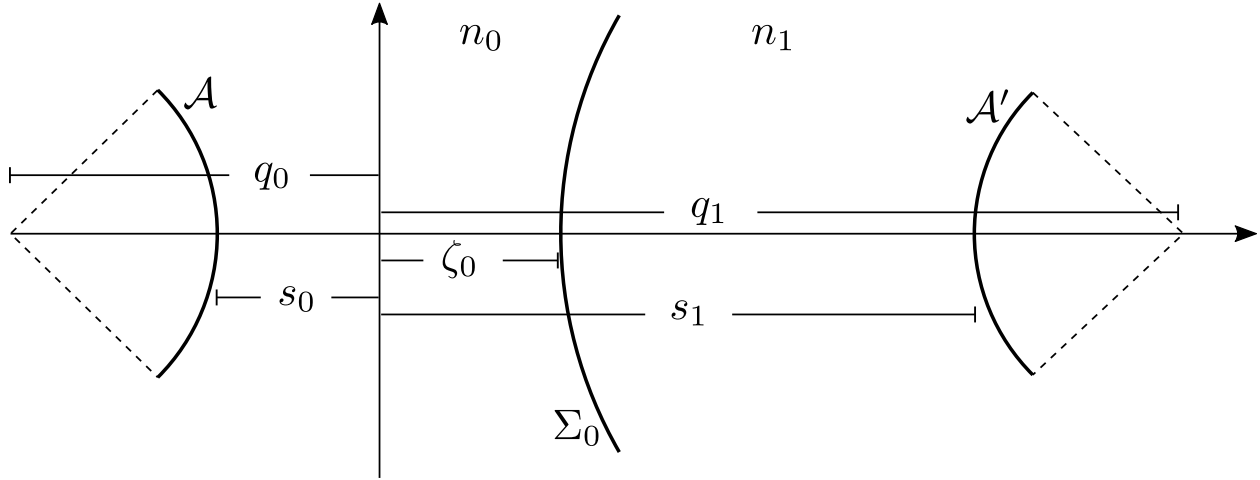


Figura 37. Transferencia del campo de un objeto sobre una superficie esférica a través de una superficie esférica refractiva.

De lo anterior, y usando la Ec. (133), podemos escribir

$$\frac{n_1}{s_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{s_0 - \zeta_0} = \frac{n_1}{q_1 - \zeta_0} - \frac{n_0}{q_0 - \zeta_0} \equiv \frac{n_1 - n_0}{R_0}, \quad (168)$$

y

$$\frac{s_1 - \zeta_0}{n_1} \left(1 + \frac{s_1 - \zeta_0}{R_{\mathcal{A}'}} \right) = \frac{s_0 - \zeta_0}{n_0} \left(1 + \frac{s_0 - \zeta_0}{R_{\mathcal{A}}} \right), \quad (169)$$

donde $R_{\mathcal{A}} = q_0 - s_0$ y $R_{\mathcal{A}'} = q_1 - s_1$ son los radios de curvatura de las superficies objeto e imagen, respectivamente. La Ec. (169) puede ser reescrita usando la Ec. (168), de donde se tiene que

$$\frac{1}{(s_1 - \zeta_0)(s_0 - \zeta_0)} \left[\frac{(s_0 - \zeta_0)^2}{n_0 R_{\mathcal{A}}} - \frac{(s_1 - \zeta_0)^2}{n_1 R_{\mathcal{A}'}} \right] = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} \right) O. \quad (170)$$

De la Ec. (170), se puede calcular el radio de curvatura de la imagen cuando el objeto está sobre

una superficie plana, lo cual es para cuando $R_{\mathcal{A}} \rightarrow \infty$. Así, usando la Ec. (170), la curvatura de la superficie imagen es

$$\frac{1}{R_{\mathcal{A}'}} = - \left(\frac{s_0 - \zeta_0}{s_1 - \zeta_0} \right) \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 R_0} \right). \quad (171)$$

Este resultado difiere por un factor de $-(s_0 - \zeta_0)/(s_1 - \zeta_0)$ de la ecuación de la curvatura de la superficie imagen dada en el Apéndice D, expresión (236). Al usar la Ec. (171) se modifican las expresiones para los coeficientes de las aberraciones curvatura de campo y distorsión, esto es, se cambian las expresiones (239) y (245) por las expresiones

$$\Delta W_d \approx \frac{n_1(n_1 - n_0)}{4n_0 R_0 (s_1 - L)^2} \left(\frac{s_0 - \zeta_0}{s_1 - \zeta_0} \right) h_1^2 r^2, \quad (172)$$

$$\Delta W_t \approx \frac{n_1(n_1 - n_0)b_0}{2n_0 R_0 (s_1 - L)^2} \left(\frac{s_0 - \zeta_0}{s_1 - \zeta_0} \right) h_1^3 r \cos \theta. \quad (173)$$

Es importante notar que las expresiones son dependientes de las posiciones del objeto y la imagen.

Por lo tanto, usando estas nuevas expresiones, Ecs. (172) y (173), las aberraciones primarias para una superficie esférica refractiva, data por la Ec. (157), puede ser reescrita. De aquí, se obtiene que los coeficientes (161) y (162) son dados ahora por las expresiones

$$a_{dq} = \frac{1}{2} a_{aq} + \frac{n_1(n_1 - n_0)}{4n_0 R_0 (s_1 - L)^2} \left(\frac{s_0 - \zeta_0}{s_1 - \zeta_0} \right), \quad (174)$$

$$a_{tq} = a_{ts} - 4 \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) \alpha_0 g_0^3 + \frac{n_1(n_1 - n_0)b_0}{2n_0 R_0 (s_1 - L)^2} \left(\frac{s_0 - \zeta_0}{s_1 - \zeta_0} \right). \quad (175)$$

Esto implica una contribución a las aberraciones debido a la curvatura de la imagen, la cual depende de la posición del objeto.

Finalmente, dentro de este trabajo, hemos derivado una expresión para las aberraciones primarias para superficies cartesianas refractivas. El hallazgo principal es la expresión (157) junto con los coeficientes de aberración dados por las Ecs. (158)-(160), (174), y (175). Por lo tanto, la Ec. (157) constituye un elemento crucial que puede ser utilizado para evaluar la calidad de sistemas ópticos compuestos por superficies cartesianas. De este modo, mediante el uso de los coeficientes de aberración, se pueden estudiar estrategias para el diseño de sistemas libres de aberraciones, tales como sistemas libres de astigmatismo o de curvatura de campo.

A partir de la Ec. (157), es posible obtener la expresión de la función de aberración para sistemas compuestos por superficies cónicas, estableciendo el parámetro S igual a cero. Para este caso, el coeficiente α_0 se transforma en el coeficiente σ_0 dado por la Ec. (146). Además, se observa que si además $G = 0$ (caso para la superficie esférica), la expresión (139) se hace cero y, por lo tanto ΔW_q , expresión (155), también. A partir de lo cual se llega a que $W = W_s$, descrito por la Ec. (231) del Apéndice D.

Así como las condiciones conocidas para que la superficie esférica refractiva esté libre de aberraciones, podrían existir otras condiciones para eliminar las aberraciones en sistemas compuestos por superficies cartesianas refractivas, pero con la ventaja que conlleva el uso de superficies asféricas en la construcción de sistemas formadores de imágenes. El procedimiento para minimizar aberraciones en estos sistemas no se desarrolla aquí porque es un tema para otra investigación. Por lo tanto, aquí limitamos esta investigación a caracterizar las aberraciones primarias, llegando a la

función de aberraciones para las superficies cartesianas refractivas.

6. Acromatismo en sistemas rigurosamente estigmáticos

6.1. Introducción

Por lo general, los sistemas formadores de imagen sufren de aberraciones de diferente naturaleza, las cuales se clasifican principalmente en aberraciones geométricas y aberraciones cromáticas. La aberración cromática es un defecto asociado a la naturaleza dispersiva de la luz y surge debido a que la luz es dispersada de manera distinta por los materiales dispersivos que componen un sistema óptico, resultando en un efecto arco iris sobre la imagen. Corregir la aberración cromática es un problema complejo en el diseño óptico, ya que debe asegurarse que el tratamiento de esta aberración no afecte las aberraciones geométricas. Actualmente, esta afección puede ser corregida mediante el uso de varios tipos de materiales ópticos con ciertas propiedades dispersivas, que teniendo en cuenta determinado rango del espectro electromagnético, permite que los sistemas resultantes puedan enfocar la luz de diferentes longitudes de onda en un foco común. A esto se le conoce como corrección del color, y dependiendo del número de colores que se puedan corregir son clasificados los sistemas ópticos en acromáticos, apocromáticos y superacromáticos (Herzberger and Mcclure, 1968; Mercado and Ryzhikov, 1998; Hariharan, 1999; Mikš and Novák, 2013; Sasian et al., 2017).

Como es bien sabido, los ovoides de Descartes o superficies cartesianas tienen la propiedad de formar una imagen puntual perfecta, en óptica geométrica, a partir de un objeto puntual, para un par de puntos conocidos como par estigmático (Descartes, 1637; Silva-Lora and Torres, 2020b). Sin embargo, esta condición se satisface para una longitud de onda tal que el índice de refracción

correspondiente garantiza esta propiedad, de manera que para otra longitud de onda pueda que este par estigmático no exista. Así, surge el problema de establecer las condiciones bajo las cuales un ovoide de Descartes puede enfocar, perfectamente, una fuente puntual compuesta por más de una longitud de onda (Silva-Lora and Torres, 2022), y a partir del resultado que se tenga se pueda evaluar si esta propiedad se mantiene para objetos extendidos.

En este capítulo, estudiaremos los sistemas formadores de imagen compuestos por superficies cartesianas, que, además de ser estigmáticos, cumplen con la condición de aplanetismo establecida en capítulos anteriores. Hasta la fecha, no se había reportado en la literatura ninguna metodología para tratar el cromatismo en sistemas compuestos por superficies cartesianas, lo que limitaba la aplicación de estos a solo soluciones con luz monocromática. Por lo tanto, aquí nos enfocamos en una metodología para el diseño de sistemas ópticos acromáticos, libres tanto de aberración cromática longitudinal como de aberración cromática lateral, compuestos por superficies cartesianas.

6.2. Acromatismo estricto en superficies cartesianas

Para un objeto representado por una fuente puntual de longitud de onda λ , un ovoide de Descartes puede formar una imagen puntual siempre y cuando el objeto esté ubicado en uno de los puntos estigmáticos. En la Fig. 1, de acuerdo a la ecuación (16), para un objeto puntual A en la posición d_k , el ovoide de Descartes Σ_k , con vértice en la posición ζ_k , formará una imagen puntual A' en la posición d_{k+1} , para el par de índices de refracción $n_k(\lambda)$ y $n_{k+1}(\lambda)$. Dado estos índices de refracción y la posición del vértice, la forma de la superficie Σ_k es única, por lo tanto, si en la misma posición d_k se ubica un objeto puntual con otra longitud de onda λ' , la superficie Σ_k puede no

satisfacer la condición de estigmatismo, dado que los índices de refracción se modifican a valores $n_k(\lambda')$ y $n_{k+1}(\lambda')$. En este caso, sería el valor de λ' , el que determinaría la forma de una nueva superficie estigmática Σ'_k a través de nuevos parámetros de forma dados por las Ecs. (10)-(13).

Debido a la dependencia de los parámetros de forma de las superficies cartesianas con los índices de refracción de los medios, éstos se pueden expresar también en función de λ . De aquí, se pueden reescribir las Ecs. (10)-(13) como

$$G_k(\lambda) = \frac{(1 - \eta_k(\lambda)^2 \xi)^2}{\eta_k(\lambda) (\xi_k - \eta_k(\lambda)) (1 - \eta_k(\lambda) \xi_k)}, \quad (176)$$

$$O_k(\lambda) = \frac{\xi_k - \eta_k(\lambda)}{(d_k - \zeta_k) (1 - \eta_k(\lambda))}, \quad (177)$$

$$T_k(\lambda) = \frac{(1 + \eta_k(\lambda))^2 (1 - \eta_k(\lambda))}{4(d_k - \zeta_k)(d_{k+1} - \zeta_k)^2 \eta_k(\lambda) (1 - \xi_k)}, \quad (178)$$

$$S_k(\lambda) = \frac{(1 + \eta_k(\lambda)) (1 - \eta_k(\lambda)^2 \xi_k)}{2(d_k - \zeta_k)(d_{k+1} - \zeta_k) \eta_k(\lambda) (1 - \eta_k(\lambda) \xi_k)}, \quad (179)$$

donde $\eta_k(\lambda) = n_k(\lambda)n_{k+1}^{-1}(\lambda)$ y $\xi_k = (d_k - \zeta_k)(d_{k+1} - \zeta_k)^{-1}$. Así, para cada longitud de onda se tienen diferentes parámetros de forma, G_k , O_k , T_k , y S_k . Por lo tanto, desde el punto de vista óptico, la superficie $\Sigma_k(\lambda)$ tendrá un comportamiento distinto para cada longitud de onda, presentando estigmatismo solo para una longitud de onda λ , lo que da lugar a la presencia de la aberración cromática.

Se observa que todos estos parámetros dependen de η_k , por lo que se puede deducir que si η_k se mantiene constante a lo largo de cierta banda del espectro electromagnético, $B = [\lambda_i, \lambda_f]$, entonces los parámetros de forma permanecen invariantes, y así la superficie estigmática es la

misma independientemente del valor que tome $\lambda \in B$. Por lo tanto, bajo esta condición la superficie formaría una imagen estigmática y acromática.

Remark 3 (Principio de acromatismo) *Basado en estos resultados se tiene que, si en una banda del espectro electromagnético $\lambda \in B$ se cumple que*

$$n_k(\lambda) = \gamma_k n_{k+1}(\lambda), \quad (180)$$

siendo $\eta_k = \gamma_k$ un valor constante. Entonces los parámetros de forma dados por las Ecs. (176)-(179), serán cantidades independientes de λ , resultando en ovoides de Descartes o superficies cartesianas que pueden formar una imagen estigmática acromática para $\lambda \in B$.

Esta relación entre los índices de refracción permite escribir la ley vectorial de Snell-Descartes, para un rayo de luz policromática dirigido en la dirección de \hat{u}_k , en la forma

$$n_{k+1}(\lambda)\hat{u}_{k+1}(\lambda) - n_k(\lambda)\hat{u}_k = k(\lambda)\hat{N}, \quad (181)$$

donde, en general, para cada longitud de onda el rayo será refractado según la dirección $\hat{u}_{k+1}(\lambda)$.

Si las curvas de dispersión satisfacen la condición (180), se tiene

$$\hat{u}_{k+1}(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{n_{k+1}(\lambda)}\hat{N} + \gamma_k \hat{u}_k. \quad (182)$$

Por lo tanto, la función $k(\lambda) = \alpha_k n_{k+1}(\lambda)$, de la ley de Snell-Descartes, toma la forma de la curva

de dispersión de los materiales, y así una superficie cartesiana que satisface esta condición presenta un *estigmatismo acromático*.

El principio de acromatismo se puede aplicar a una sucesión de superficies refractivas, siempre y cuando, dentro de una misma banda espectral las curvas de dispersión para los medios sucesivos satisfagan la condición dada por la Ec. (180). Cabe mencionar que este principio es independiente de la forma geométrica de las superficies, y aquí es aplicado a las superficies cartesianas por las propiedades adicionales que estas poseen.

6.2.1. Aplicación al diseño de sistemas rigurosamente acromáticos. Dado que el principio de acromatismo permite que la ley de Snell-Descartes se presente de forma acromática, y que todas la longitudes de onda en un rayo policromático son refractados de forma idéntica, se encuentra que el acromatismo para los sistemas conformados por superficies cartesianas se puede dar de manera estricta, incluso para sistemas conformados por una sola superficie. No obstante, puede ser que los materiales derivados a partir de este desarrollo no se encuentren aún disponibles en la industria. Por ende, una propuesta que se deriva a partir de la anterior declaración es la búsqueda de estrategias para fabricación de nuevos materiales que cumplan con estos requerimientos, lo que conllevaría al diseño de instrumentos óptico de alto desempeño.

Primeramente, para ilustrar estos resultados, se propone un material ideal, que aquí es llamado IDEAL-MAT, que presenta una curva de dispersión igual a la del material J-LAF7 pero trasladada en los valores del índice de refracción, ver Fig. 38, dentro de la banda $B = [0.4, 1.0]\mu m$. Es así que los sistemas ópticos compuestos por una sucesión de superficies cartesianas para los medios J-LAF7 y IDEAL-MAT, serán estrictamente estigmáticos acromáticos, libres tanto de

aberración cromática longitudinal como lateral. Para poner en evidencia el interés práctico de estos resultados, vamos a estudiar dos casos que no pueden ser tratados mediante los métodos propuestos hasta hoy en día, una sistema compuesto por una superficie y un sistema compuesto por dos superficies.

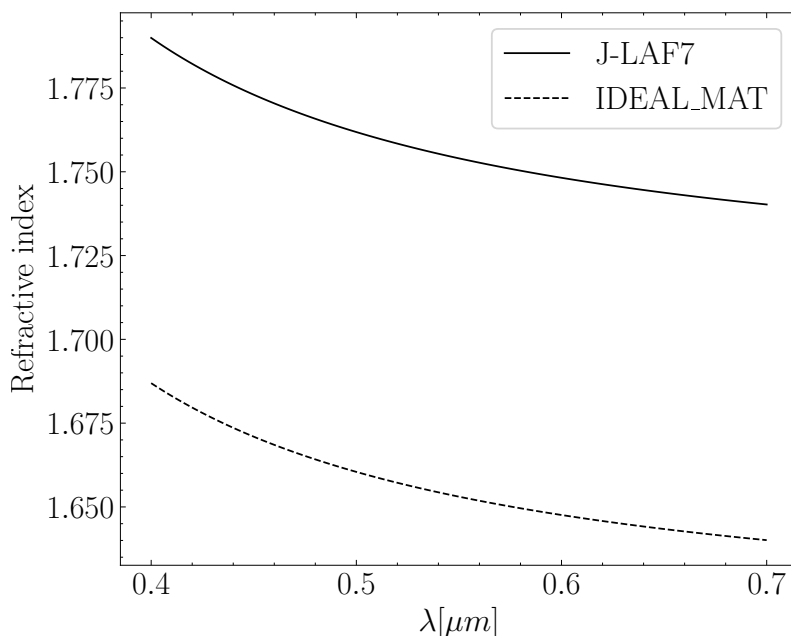


Figura 38. Curvas de dispersión para el material J-LAF7 y el material IDEAL-MAT dentro del rango del espectro en *B*.

6.2.2. Estigmatismo acromático para una superficie cartesiana. El sistema óptico más simple está compuesto por una única superficie cartesiana, y si se satisface el principio de acromatismo, presenta un estigmatismo acromático, y en teoría formaría una imagen geométrica puntual perfecta en luz policromática.

Por lo tanto, se propone un ovoide de Descarte para los medios IDEAL-MAT y J-LAF7,

Tabla 11

Parámetros de una superficie cartesiana libre de aberración cromática.

k	ζ_k	G_k	O_k	T_k	S_k	material (n_k)	material (n_{k+1})
0	0 -	-0.890441	0.716056	-4.284508e-10	-1.652824e-5	IDEAL-MAT	J-LAF7

de tal modo que si n_0 es el índice de refracción para el material IDEAL-MAT y n_1 es el índice de refracción para el material J-LAF7. La relación que existen entre las curvas de dispersión, viene dada por $n_0(\lambda) = 0.94245n_1(\lambda)$, lo que satisface el principio de acromatismo, Eq. (180). Los puntos estigmáticos están ubicados en $-2400mm$, posición del objeto, y $24.5mm$, posición de la imagen. Los parámetros de forma y la posición del vértice para la superficie, son mostrados en Tab. 11.

Este sistema conformado por una sola superficie ovoide de Descartes, posee una apertura física ubicada en el origen de coordenadas, cuyo radio es de $3mm$. El desempeño de este sistema se muestra en la Fig. 39, para una fuente puntual, ubicada en $d_0 = -2400mm$, con contenido espectral $B = [0.4, 1.0]\mu m$, el sistema forma una imagen puntual perfecta, en $d_1 = 24.5mm$, donde se observa que no posee aberración cromática longitudinal, es decir, que el estigmatismo es acromático. Sin embargo, para objetos fuera de eje, se evidencia la presencia de aberraciones geométricas, pero lo destacable aquí es que las aberraciones geométricas para toda la banda espectral son idénticas, de modo que todas las longitudes de onda presentan las mismas aberraciones geométricas y están superpuestas, lo que significa que tampoco hay aberración cromática lateral. Por lo tanto, si además estos sistemas son diseñados para formar imágenes de buena calidad para puntos fuera de eje, la corrección de las aberraciones geométricas se dará para toda la banda espectral.

Por lo tanto, todos los sistemas conformados por superficies ovoides de Descartes, combinados con una selección de materiales que satisfaga el principio de acromatismo aquí propuesto, dará

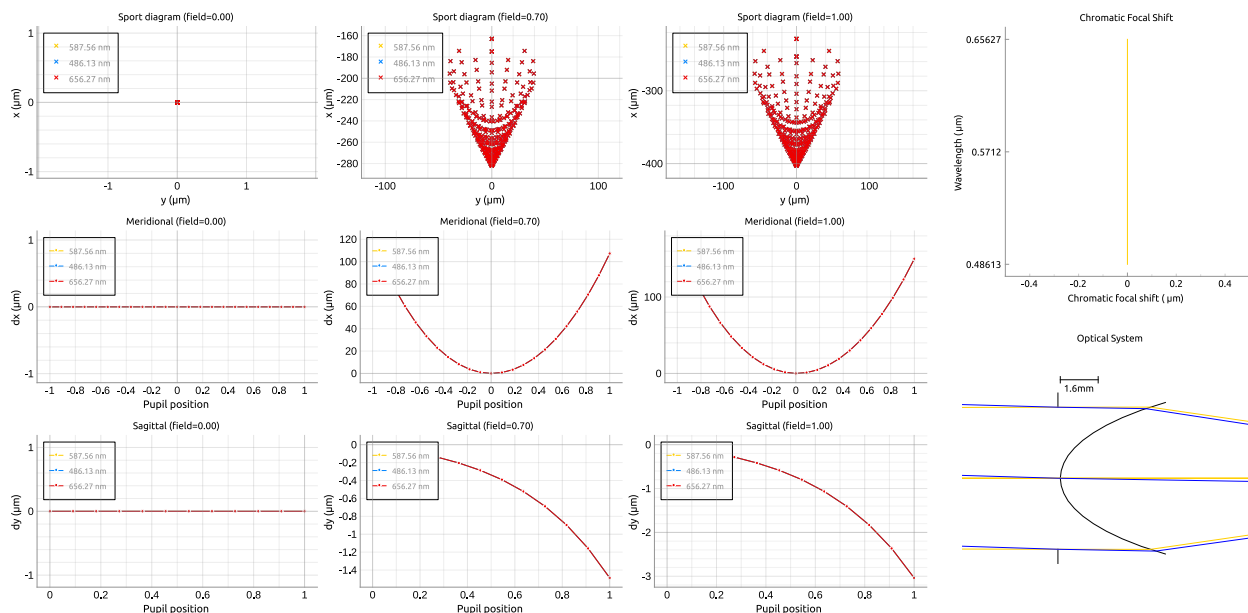


Figura 39. Superficie cartesiana libre de aberración cromática. El sistema resultante no presenta aberración cromática de ningún tipo y los diagramas de punto para tres objetos puntuales no superan las $200\mu\text{m}$ de diámetro, presentando considerables aberraciones fuera de eje. Tanto el diagrama de puntos y las aberraciones de rayo para cada longitud de onda no presentan corrimiento para diferentes valores de la longitud de onda en B .

lugar al diseño de sistemas ópticos libres de aberración cromática tanto longitudinal como lateral.

6.2.3. Estigmatismo acromático para un sistema conformado por dos superficies cartesianas. Aunque la posibilidad de obtener acromatismo mediante el uso de una única superficie refractiva es interesante, es fundamental que este enfoque sea aplicado al diseño de sistemas conformados por un número arbitrario de superficies. Es por esto que para ilustrar los resultados principales de este trabajo, se estudia el diseño de singletes (sistemas conformados por dos superficies) acromáticos. Con este estudio, junto con resultados de trabajos previos (Silva-Lora and Torres, 2020c,a), se pueden lograr diseños de sistemas libres de aberraciones cromáticas que a su vez posean características importantes como el aplanetismo, logrando así un buen desempeño

Tabla 12

Parámetros de un singlete libre de aberración cromática, conformado por superficies cartesianas.

k	ζ_k	G_k	O_k	T_k	S_k	material (n_k)	material (n_{k+1})
0	0 -	-0.890441	0.716056	-4.284508e-10	-1.652824e-5	IDEAL-MAT	J-LAF7
1	5.0	-1.381034	-0.851061	2.953133e-5	0.005891	J-LAF7	IDEAL-MAT

para la formación de imágenes para puntos fuera de eje.

El siguiente es un ejemplo de una lente singlete diseñada usando el material J-LAF7, inmersa en un medio de material ideal IDEAL-MAT, la cual presenta cero aberración cromática en la banda $B = [0.4, 1.0]\mu m$. Para este ejemplo se ha tomado el índice de refracción del espacio imagen igual al índice de refracción del espacio objeto, esto es $n_2(\lambda) = n_0(\lambda)$, sin embargo, también se puede utilizar un tercer material, tal que se satisfaga la relación (180), es decir, $n_0(\lambda) = \gamma_1 n_1(\lambda) = \gamma_2 n_2(\lambda)$.

El singlete presenta la configuración mostrada en Tab. 12, y es rigurosamente estigmático para los puntos $d_0 = -2400mm$ (posición del objeto) y $d_2 = 14.4mm$ (posición de la imagen). La apertura física del sistema se encuentra ubicada en el origen de coordenadas y tiene un radio de $2.3mm$. A partir de esta configuración se obtienen los resultados presentados en Fig. 40, y para ilustrar las aberraciones de rayo y los diagramas de puntos se usaron las longitudes de onda $\lambda_1 = 0.48613\mu m$, $\lambda_2 = 0.58756\mu m$ y $\lambda_3 = 0.65627\mu m$. Se muestra que para las tres longitudes de onda los puntos y las curvas de las gráficas están una sobre la otra, indicando que el sistema es libre de aberración cromática. Esto es corroborado mediante una gráfica de la posición de la imagen estigmática para cada longitud de onda, mostrando todas las imágenes en la misma posición, la cual indica que no hay aberración cromática longitudinal.

Estos resultados motivan a proponer la búsqueda de nuevos materiales que cumplan con

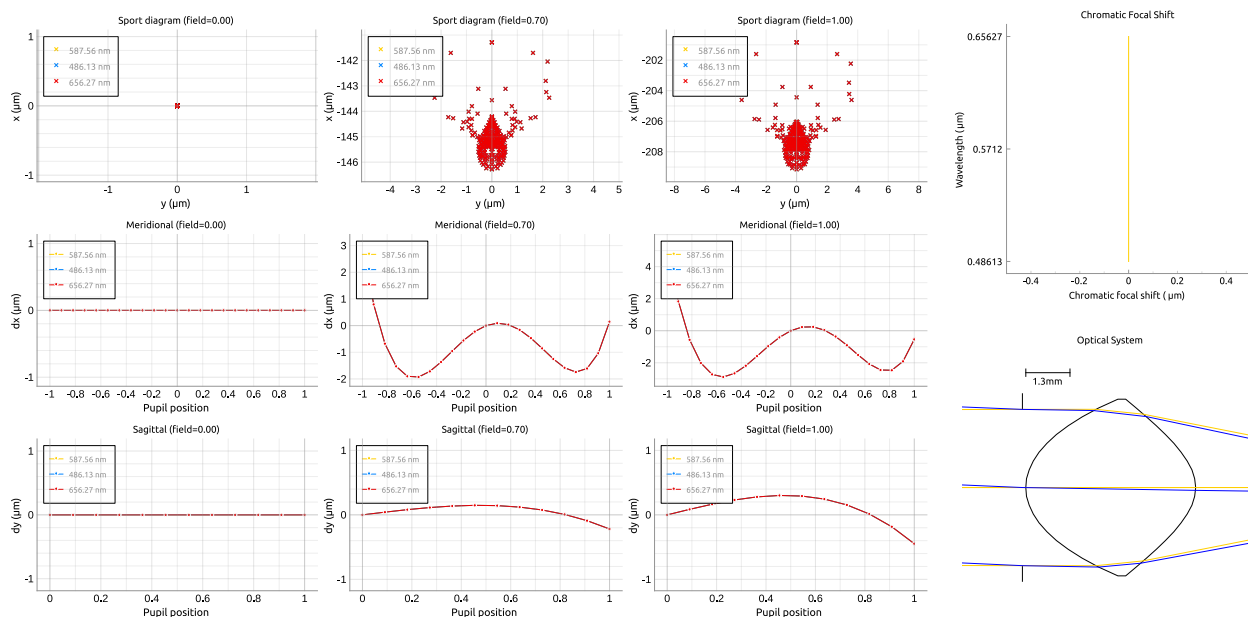


Figura 40. Singlete libre de aberración cromática conformado por superficies cartesianas. El sistema resultante no presenta aberración cromática de ningún tipo y los diagramas de punto para tres objetos puntuales no superan las $10\mu\text{m}$ de diámetro. Tanto el diagrama de puntos y las aberraciones de rayo para cada longitud de onda no presentan corrimiento lateral ni longitudinal del color para diferentes valores de la longitud de onda en B .

la expresión (180), para una banda del espectro electromagnético, de tal manera que la curva de dispersión del nuevo material, en determinado rango del espectro, tenga el mismo comportamiento que la del otro material pero desplazada en los valores del índice de refracción.

6.3. Acromatismo aproximado en superficies cartesianas

Como se ha mencionado, estos resultados puede servir de motivación para el diseño de nuevos materiales, pero también para la búsqueda de materiales existentes que de alguna manera satisfagan de forma aproximada, para cierto ancho de banda espectral, la relación (180). Aquí proponemos que el material N-SF2, como se muestra en Fig. 41, presenta una curva de dispersión aproximada al material IDEAL-MAT previamente definido, y por lo tanto, este será usado para

desarrollar los mismo ejemplos de la sección anterior en donde se reemplazará el material IDEAL-MAT por el material N-SF2, y se trabajará con las longitudes de onda dentro de la banda $B' = [0.8, 2.5]\mu m$ del espectro electromagnético, de donde se escoge como longitud de onda central el valor de $1.65\mu m$ (longitud de onda para la cual es sistema es estigmático). A partir de estos materiales se obtiene una desviación cuadrática media de la diferencia del valor de sus índices de refracción de aproximadamente 0.000164272, lo que indica que son curvas bastante parecidas dentro de ese rango espectral.

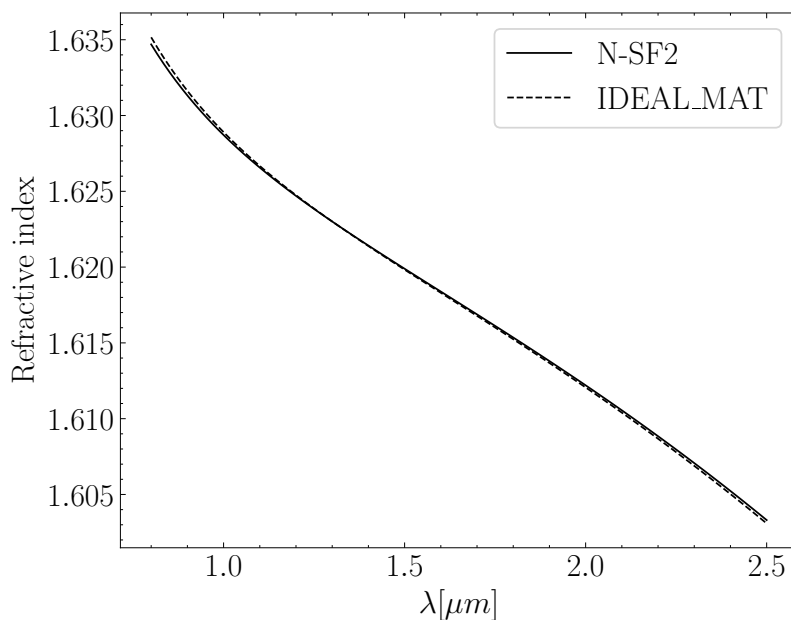


Figura 41. Curvas de dispersión para la comparación entre el material real N-SF2 y el material hipotético IDEAL-MAT dentro del espectro B' .

Es así que el método aquí desarrollado permite el diseño de sistemas ópticos reales, mediante la búsqueda de pares de materiales que permitan aplicar el principio de acromatismo. Veremos a continuación que, dado que el material N-SF2 tiene un comportamiento aproximado a la curva

de dispersión del material ideal IDEAL-MAT, los diseños basados en esta combinación presentan cierto nivel de aberración cromática, pero el desempeño mostrado confirma el modelo teórico aquí propuesto.

6.3.1. Par acromático. Como se puede observar en las figuras 42, el par de materiales N-SF2 y J-LAF7 en la banda $[0.8, 2.5]\mu m$ satisfacen de forma aproximada el principio de acromatismo, por lo tanto, permiten el diseño de sistemas ópticos de bajas aberraciones cromáticas, es por esto que los llamamos *Par Acromático*.

Para el mismo diseño de la tabla 11 vamos a estudiar el desempeño de este ovoide de Descartes para el caso donde el material IDEAL-MAT es reemplazado por un material real, N-SF2. Como se observa en Fig. 42, aparece cierta cantidad de aberración cromática y aberraciones geométricas. Los diagramas de puntos muestran que las imágenes no superan las $200\mu m$ de diámetro para puntos objeto fuera de eje, mostrando un mejor resultado para un objeto sobre el eje, donde el diagrama de puntos no supera los $40\mu m$.

Como se deja ver en estos resultados, la aplicación del principio de acromatismo, permite el diseño de un sistema aproximadamente acromático compuesto por una única superficie refractiva, lo cual es completamente inédito en la óptica, y no solamente permite concebir sistemas simples, sino que además permite, en teoría, el diseño de sistemas refractivos con acromatismo perfecto al igual que la óptica reflectiva. Todo esto permite pensar en el diseño de sistemas ópticos con un gran desempeño, mediante el diseño de materiales especialmente concebidos para aplicaciones de gran exigencia.

Es importante aquí recordar que en este caso hay una única longitud de onda que conserva

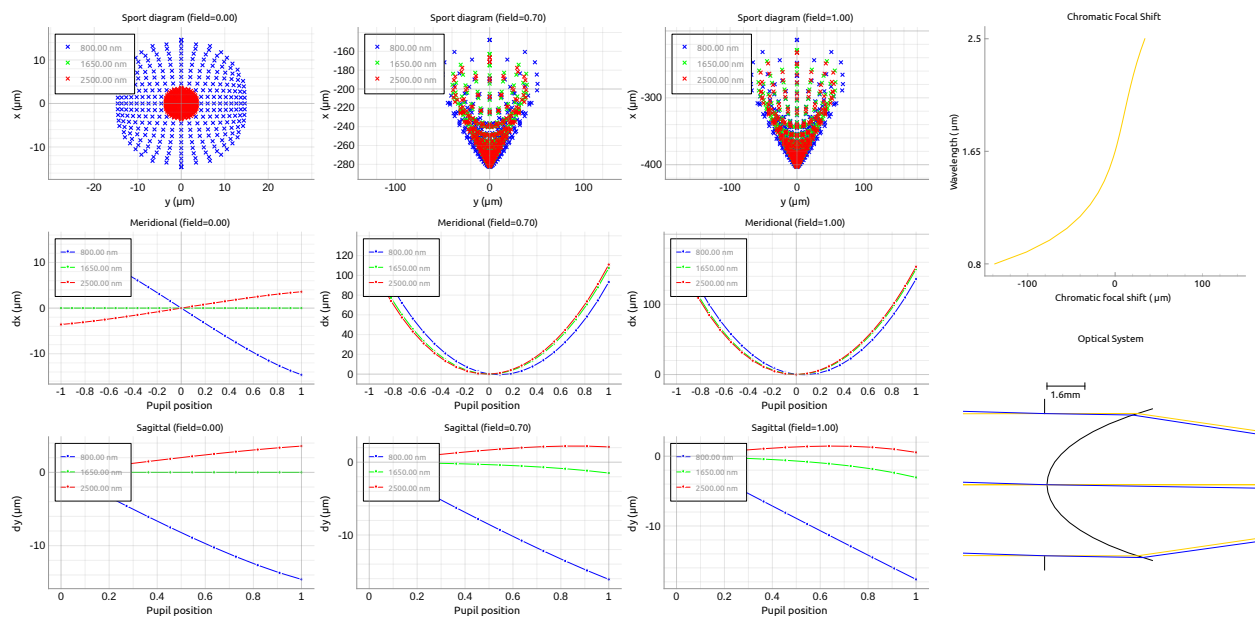


Figura 42. Superficie cartesiana con un mínimo de aberración cromática. El sistema resultante presenta cierta cantidad de aberración cromática, de tal manera que el corrimiento de la focal no supera los $200\mu\text{m}$. Los diagramas de punto para tres objetos puntuales no superan las $200\mu\text{m}$ de diámetro, presentando considerables aberraciones fuera de eje. Tanto el diagrama de puntos y las aberraciones de rayo para cada longitud de onda presentan cierto corrimiento para diferentes valores de la longitud de onda dentro B' , infrarrojo cercano.

el estigmatismo, $\lambda = 1.65\mu m$, lo que significa que para la otras longitudes de onda están presente la aberración esférica y la coma. Como se puede notar en la figura 42, la aberración esférica depende de la longitud de onda, es así que las cáusticas correspondientes tendrán un círculo de menor confusión con diferente posición y tamaño, por lo tanto, es esta aberración esférica la que da origen a la aberraciones cromática longitudinal y transversal, como se puede apreciar en presencia de coma dependiente de la longitud de onda.

6.3.2. Aplicación de un par acromático al diseño de un singlete. Aplicamos el par acromático J-LAF7 y N-SF2, que como se mostró anteriormente producen un acromatismo aproximado, a el diseño de una lente singlete de la tabla 12. La lente en cuestión está compuesta por el material J-LAF7, y se encuentra inmersa en el material N-SF2 (reemplazo del material IDEAL-MAT). Para las longitudes de onda de estudio $0.8\mu m$, $1.65\mu m$ y $2.5\mu m$, se tiene el resultado mostrado en la Fig. 43. Los diagramas de punto muestran que las manchas no superan los $40\mu m$ de diámetro, incluso para los puntos fuera de eje. Se puede observar que los diagramas de puntos casi que mantienen su forma y tamaño, de donde se puede decir que el sistema es casi que *isoplanético*.

Se observa que el sistema presenta cierta cantidad de aberración cromática como se puede ver en los diagramas de puntos y en la gráfica del corrimiento del foco paraxial con respecto a la longitud de onda (imagen superior derecha). Se destaca que el corrimiento del foco paraxial para el singlete ($\sim 60\mu m$) es mucho menor que para el caso de una superficie cartesiana ($\sim 140\mu m$), Fig. 42 y 43, lo que nos indica que el número de superficie juega un papel importante en la minimización de estas aberraciones.

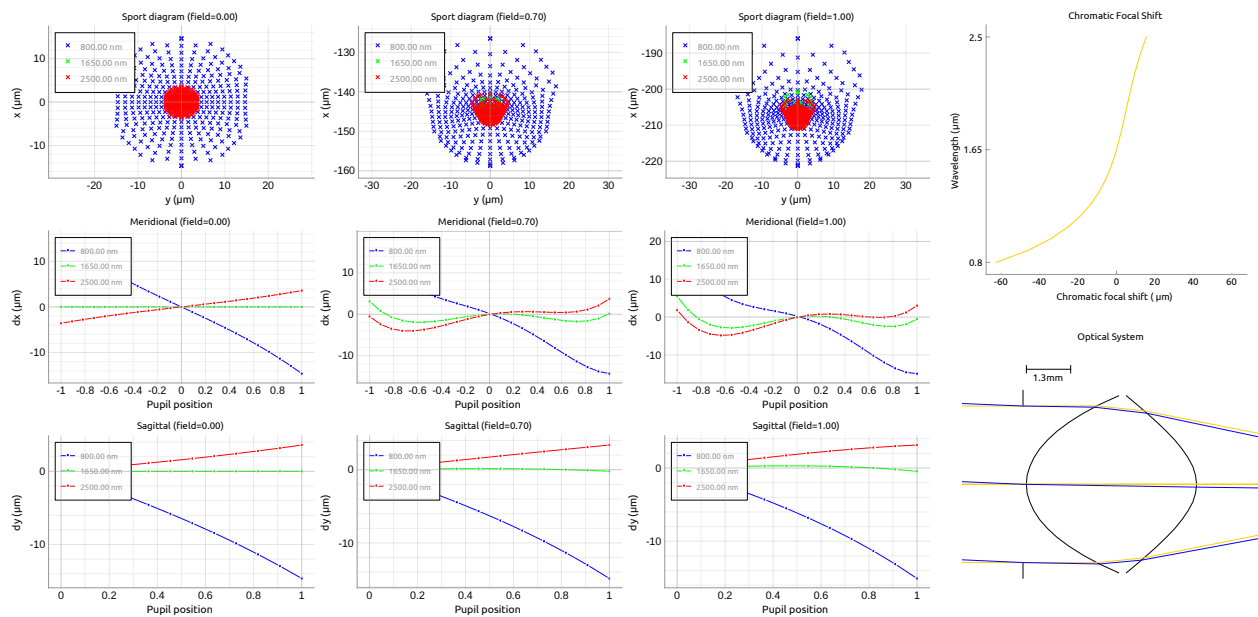


Figura 43. Singlete aplanético y con un desempeño lo mas cercano posible al del sistema ideal. El sistema resultante posee bajas aberraciones de rayo y los diagramas de punto para tres objetos puntuales no superan las $40\mu\text{m}$ de diámetro. Tanto el diagrama de puntos y las aberraciones de rayo para cada longitud de onda presentan corrimiento para diferentes valores de la longitud de onda por lo menos dentro del rango de los $0.8 - 2.5\mu\text{m}$.

7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo de investigación se obtuvieron varios resultados que son aportes dentro de las áreas de óptica geométrica, óptica computacional, y diseño óptico. El primer resultado consta de las expresiones (16) y (17), que junto con las expresiones (10)-(13) conforman una nueva formulación explícita para las superficies ovoides de Descartes o superficies cartesianas. Esta formulación permite tener el control de la geometría de dichas superficies a partir de cuatro parámetros de forma, expresiones (10)-(13), y además, fue posible adaptarla para la construcción de sistemas estigmáticos conformados por un conjunto de superficies, tanto reflectivas como refractivas. De aquí, como la única propiedad que tenían estos sistemas era la propiedad de estigmatismo, libres de aberración esférica, encontramos un segundo resultado mediante la adaptación de la condición seno de Abbe a estos sistemas conformados por superficies cartesianas. Por consiguiente, se encontraron las condiciones bajo las cuales estos sistemas son considerados aplanéticos, o libres de coma, cuya condición se resume mediante la expresión (93). Usando esta condición, junto con variaciones de los parámetros de forma de las superficies que conforman el sistema, se pueden encontrar un infinito número de sistemas con un mínimo de coma. A partir de este hallazgo, también fue posible discriminar aquellos sistemas que cumplen de manera rigurosa con dicha condición, es decir sistemas cuya característica principal es que carecen de coma. Los sistemas que se consideran libres de coma, estrictamente hablando, son etiquetados aquí como sistemas aplanéticos tipo-0, tipo-1, tipo-2, y tipo-3, y cuyas condiciones que se debe cumplir son determinadas por las expresiones (99), (107), (111), y (121), respectivamente.

La idea principal de este trabajo son las aberraciones primarias, por lo que despues de los resultados anteriores se empezó a estudiar las aberraciones primarias o aberraciones de Seidel. Se hizo uso de la formulación de las superficies cartesianas para poder expresar la función de aberraciones primarias para una de estas superficies. Como resultado, se obtuvo la expresión (157), que junto con los coeficientes de las aberraciones primarias, expresiones (158)-(162), conforman la función de aberraciones primarias para superficies cartesianas. Esta expresión nos permite medir la calidad de los sistemas ópticos que se diseñan mediante el uso de esta nueva formulación de superficies cartesianas.

Adicionalmente, dentro de este trabajo se estudiaron los sistemas que en todo rigor son considerados acromáticos. La condición bajo la cual esto es posible es ideal y se rige por medio de la expresión (180). Esta condición indica que si se tienen dos materiales con curvas de dispersión similares pero cuyos valores de índice de refracción estan corridos cierto valor constante, se obtienen sistemas con cero aberración cromática longitudinal y cero aberración cromática transversal. Aunque este estudio es teórico, creemos que en futuras investigaciones se puede aplicar para la búsqueda de nuevas estrategias para el diseño de sistemas libres de aberración cromática.

Finalmente, debido a la carencia de un software que de manera exacta llevara a cabo el trazado de rayos, se desarrolló un aplicativo en Python para el diseño y análisis de sistemas conformados por superficies cartesianas. Este software consta de un conjunto de librerías en Python para llevar a cabo las tareas de trazado de rayos, la consideración del uso de una serie de materiales ópticos con diferentes tipos de curvas de dispersión, visualización del rendimiento del sistema, visualización de las aberraciones de rayo junto con la visualización de las aberraciones de Seidel.

Como se puede ver, hemos completado una teoría nueva para el uso de las superficies cartesianas dentro del diseño de sistemas ópticos, la cual nos permite tratar problemas como la aberración esférica y la coma de manera simultánea. Hemos dejado para trabajos futuros el tratado de los otros tipos de aberraciones mediante el uso de los coeficientes de las aberraciones primarias, a partir de los cuales se pueden identificar condiciones adicionales para la obtención de sistemas de mejor calidad.

Referencias Bibliográficas

- Abbe, E. (1873). Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung. *Archiv für mikroskopische Anatomie*, 9(1):413–418.
- Airy, G. B. (1827). *On the Spherical Aberration of the Eye-pieces of Telescopes...* J. Smith, printer to the University.
- Arasa, J. and Alda, J. (2004). Real ray tracing. *Encyclopedia of Optical Engineering*, pages 1–10.
- Balland, B. (2007). *Optique géométrique: imagerie et instruments*. PPUR presses polytechniques.
- Bonnet, G. (1978). Introduction a l’optique metaxiale. In *Annales des Télécommunications*, volume 33, pages 225–243. Springer.
- Born, M. and Wolf, E. (2013). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- Bruhat, M. and Maréchal, A. (1961). *Optique géométrique*. Course de physique. Masson.
- Bruhat, M., Maréchal, A., and Cabannes, J. (1959). *Cours de physique pour les classes de mathématiques spéciales: Optique géométrique [Texte imprimé]/par M. Bruhat,... A. Maréchal,...; préface de J. Cabannes,..... I. Masson*.
- Buchdahl, H. (1962). Optical aberration coefficients. x. theory of concentric optical systems. *JOSA*, 52(12):1361–1367.

- Cabral, E. L., De Souza, J., and Hunold, M. C. (2004). Omnidirectional stereo vision with a hyperbolic double lobed mirror. In *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004.*, volume 1, pages 1–9. IEEE.
- Chen, X., Gere, D. S., and Waldon, M. C. (2016). Small form factor high-resolution camera. US Patent 9,244,253.
- Cho, S. (2016). Explicit superconic curves. *JOSA A*, 33(9):1822–1830.
- Coddington, H. (1829). *A Treatise on the Reflection and Refraction of light: being Part I. of a System of Optics.*
- Comastri, S., Simon, J., and Blendowske, R. (1999). Generalized sine condition for image-forming systems with centering errors. *JOSA A*, 16(3):602–612.
- Conrady, A. (1957). Applied optics and optical design. *New York: Dover Publication.*
- Cox, A. (1964). A system of optical design. *A System of Optical Design by Arthur Cox London.*
- Daumas, M. (1972). Scientific instruments of the seventeenth and eighteenth centuries and their makers. *Scientific instruments of the seventeenth and eighteenth centuries and their makers.*
- Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, with three appendices: La Dioptrique. Les Météores, and La Géométrie* (Leyden, The Netherlands).

- Dijksterhuis, F. J. (2004). *Lenses and waves: Christiaan Huygens and the mathematical science of optics in the seventeenth century*, volume 9. Springer Science & Business Media.
- Dreyfus, M., Bishop, R., and Moorhead, J. (1960). Aplanatic cemented doublet design. *JOSA*, 50(4):375–378.
- Elazhary, T. T., Zhou, P., Zhao, C., and Burge, J. H. (2015). Generalized sine condition. *Applied optics*, 54(16):5037–5049.
- Falaggis, K., Rolland, J., Duerr, F., and Sohn, A. (2022). Freeform optics: introduction. *Optics Express*, 30(4):6450–6455.
- Fischer, R. E., Tadic-Galeb, B., Yoder, P. R., Galeb, R., Kress, B. C., McClain, S. C., Baur, T., Plympton, R., Wiederhold, B., and J, B. G. A. (2008). *Optical system design*, volume 1. The McGraw-Hill Companies, Inc., 2 edition.
- Garrard, K., Bruegge, T., Hoffman, J., Dow, T., and Sohn, A. (2005). Design tools for freeform optics. In *Current Developments in Lens Design and Optical Engineering VI*, volume 5874, page 58740A. International Society for Optics and Photonics.
- Gauss, C. F. (1966). *Disquisitiones arithmeticae*. Yale University Press.
- González-Acuña, R. G., Chaparro-Romo, H. A., and Gutiérrez-Vega, J. C. (2019). General formula to design a freeform singlet free of spherical aberration and astigmatism. *Applied optics*, 58(4):1010–1015.

- González-Acuña, R. G., Chaparro-Romo, H. A., and Gutiérrez-Vega, J. C. (2020a). Analytic aplanatic singlet lens: setting and design for three-point objects and images in the meridional plane. *Optical Engineering*, 59(5):055104.
- González-Acuña, R. G., Chaparro-Romo, H. A., and Gutiérrez-Vega, J. C. (2020b). Exact equations for stigmatic singlet design meeting the abbe sine condition. *Optics Communications*, page 126415.
- González-Acuña, R. G. and Gutiérrez-Vega, J. C. (2019). General formula to eliminate spherical aberration produced by an arbitrary number of lenses. *Optical Engineering*, 58(8):085106.
- González-Acuña, R. G. and Gutiérrez-Vega, J. C. (2020). Analytic design of a spherochromatic singlet. *JOSA A*, 37(1):149–153.
- González-Acuña, R. G. and Gutiérrez-Vega Sr, J. C. (2020). Analytic formulation of a spherochromatic collimator lens. In *Current Developments in Lens Design and Optical Engineering XXI*, volume 11482, page 114820Y. International Society for Optics and Photonics.
- González-Acuña, R. G. and Chaparro-Romo, H. A. (2020). *Stigmatic Optics*. 2053-2563. IOP Publishing.
- Gordon, J., Feuermann, D., Horne, S., and Conley, G. (2006). Optical system using tailored imaging designs. US Patent App. 11/351,314.
- Greynolds, A. (2002). Superconic and subconic surface descriptions in optical design. In *International Optical Design Conference*, page IMA1. Optical Society of America.

Gross, H. (2005). Handbook of optical systems, volume 1, fundamentals of technical optics.

Handbook of Optical Systems, Volume 1, Fundamentals of Technical Optics, by Herbert Gross, pp. 848. ISBN 3-527-40377-9. Wiley-VCH, April 2005., page 848.

Gross, H., Zügge, H., Peschka, M., and Blechinger, F. (2007). *Handbook of optical systems, volume 3: Aberration theory and correction of optical systems.* John Wiley & Sons.

Güther, R. (2008). Descartes ovaloides for negative refractive indices and their aplanatic cases. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 119(12):577–583.

Hariharan, P. (1999). Superachromatic lens combinations. *Optics & Laser Technology*, 31(2):115–118.

Head, A. (1959). Aplanatic lenses. *Proceedings of the Physical Society*, 74(6):731.

Herzberger, M. and McClure, N. R. (1963). The design of superachromatic lenses. *Applied Optics*, 2(6):553–560.

Herzberger, M. J. and McClure, N. R. (1968). Superachromatic objective. US Patent 3,395,962.

Hopkins, H. (1952). The wave aberration associated with skew rays. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 65(12):934.

Hsueh, C.-C., Elazhary, T., Nakano, M., and Sasian, J. (2011). Closed-form sag solutions for cartesian oval surfaces. *Journal of Optics*, 40(4):168–175.

Huygens, C. (1920). *Traité de la lumière:...* chez Pierre vander Aa, marchand libraire.

- Jurek, B. (1952). An aplanatic singlet bounded by descartes surfaces. *Czechoslovakij fiziceskij zurnal*, 1(3-4):197–200.
- Jurek, B. (1959). Systèmes rigoureusement aplanétiques à deux surfaces. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 6(3):222–233.
- Kano, R., Hara, H., Shimojo, M., Tsuneta, S., Sakao, T., Matsuzaki, K., Kosugi, T., Golub, L., DeLuca, E. E., Bookbinder, J. A., et al. (2004). Solarb x-ray telescope (xrt). In *The Solar-B Mission and the Forefront of Solar Physics*, volume 325, page 15.
- Kingslake, R. and Johnson, B. (2009). *Lens design fundamentals*. academic press.
- Kino, G. S. and Mansfield, S. M. (1991). Near field and solid immersion optical microscope. US Patent 5,004,307.
- Ko, C.-C. and Lin, Y.-T. (2023). Optical lens and electronic device having optical lens. US Patent 11,550,122.
- Krautter, M. (1986). Aplanatic two-surface systems: The optics of our grandfathers. In *Optical System Design, Analysis, Production for Advanced Technology Systems*, volume 655, pages 127–137. International Society for Optics and Photonics.
- Kubota, Y., Kubota, K., Hirano, H., and Fukaya, H. (2023). Imaging lens. US Patent 11,561,373.
- Lee, S., Hutputanasin, A., Toorian, A., Lan, W., and Munakata, R. (2009). Cubesat design specification rev. 12; california polytechnic state university: San luis obispo, ca, usa, 2009.

Lerner, S. A. and Sasian, J. M. (2000). Optical design with parametrically defined aspheric surfaces. *Appl. Opt.*, 39(28):5205–5213.

Liao, C.-c. (2007). Compact lens system. US Patent 7,236,314.

Lieb, M. A. and Meixner, A. J. (2001). A high numerical aperture parabolic mirror as imaging device for confocal microscopy. *Optics express*, 8(7):458–474.

Liu, Y., Bauer, A., Viard, T., and Rolland, J. P. (2021). Freeform hyperspectral imager design in a cubesat format. *Optics Express*, 29(22):35915–35928.

Luneburg, R. and Herzberger, M. (1964). *Mathematical Theory of Optics*. University of California Press.

Lynden-Bell, D. (2002). Exact optics: a unification of optical telescope design. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 334(4):787–796.

Mahajan, V. N. (1998). *Optical imaging and aberrations: Ray geometrical optics*, volume 45. SPIE press.

Malacara-Hernandez, D. and Thompson, B. J. (2017). *Fundamentals and basic optical instruments ; Advanced optical instruments and techniques*. CRC Press.

Mansfield, S. M. and Kino, G. (1990). Solid immersion microscope. *Applied physics letters*, 57(24):2615–2616.

- Marchi, A. Z., Maresi, L., and Taccola, M. (2019). Technologies and designs for small optical missions. In *International Conference on Space Optics—ICSO 2018*, volume 11180, pages 750–759. SPIE.
- Mashaal, H., Feuermann, D., and Gordon, J. M. (2015). Basic categories of dual-contour reflective-refractive aplanats. *Optics letters*, 40(21):4907–4910.
- Mashaal, H., Feuermann, D., and Gordon, J. M. (2016). Aplanatic lenses revisited: the full landscape. *Applied Optics*, 55(10):2537–2542.
- McCloskey, D. and Donegan, J. (2013). Planar elliptical solid immersion lens based on a cartesian oval. *Applied Physics Letters*, 103(9):091101.
- Mercado, R. I. and Ryzhikov, L. (1998). Designs of apochromats and superachromatic objectives. In *International Optical Design Conference 1998*, volume 3482, pages 321–331. International Society for Optics and Photonics.
- Michaelis, D., Schreiber, P., and Bräuer, A. (2011). Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems. *Opt. Lett.*, 36(6):918–920.
- Mikš, A. and Novák, J. (2013). Method for primary design of superachromats. *Applied optics*, 52(28):6868–6876.
- Nijboer, B. R. A. (1947). The diffraction theory of optical aberrations: Part ii: Diffraction pattern in the presence of small aberrations. *Physica*, 13(10):605–620.

- Omura, Y. (2005). Projection exposure methods and apparatus, and projection optical systems. US Patent 6,864,961.
- Pellat-Finet, P. (2009). *Optique de Fourier: Théorie métaxiale et fractionnaire*. Springer Science & Business Media.
- Peng, H. (2023). Camera optical lens. US Patent App. 17/566,651.
- Reshidko, D. (2016). *Topics in Modern Lens Design*. PhD thesis, College of Optical Sciences.
- Rodrigues, M., Rosa, A., Vieira, N., and Murta, J. (2019). Modeling ophthalmic surfaces using zernike, bessel and chebyshev type functions. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1194, page 012093. IOP Publishing.
- Rolland, J. P., Davies, M. A., Suleski, T. J., Evans, C., Bauer, A., Lambropoulos, J. C., and Falaggis, K. (2021). Freeform optics for imaging. *Optica*, 8(2):161–176.
- Rudolph, P. (1903). Photographic objective. US Patent 721,240.
- Rumpel, A. and Ruppel, T. (2019). Polishing ultra-precision ground aspherical surfaces with mrf. In *Optifab 2019*, volume 11175, page 111750P. International Society for Optics and Photonics.
- Rutherford, W. (1891). The tercentenary of the compound microscope. *Proceedings of the Scottish Microscopical society*, XXV.
- Sasián, J. (2013). *Introduction to aberrations in optical imaging systems*. Cambridge University Press.

- Sasian, J., Gao, W., and Yan, Y. (2017). Method to design apochromat and superachromat objectives. *Optical Engineering*, 56(10):105106.
- Schuhmann, R. (2019). Description of aspheric surfaces. *Advanced Optical Technologies*, 8(3-4):267–278.
- Schulz, G. (1988). Iv aspheric surfaces. In *Progress in optics*, volume 25, pages 349–415. Elsevier.
- Schwarzschild, K. (1905). Untersuchungen zur geometrischen optic ii. *Astronomische Mitteilungen der Kniglichen Sternwarte zu Göttingen*, 10:4–28.
- Seidel, L. (1856). Zur dioptrik. ueber die entwicklung der glieder 3ter ordnung, welche den weg eines ausserhalb der ebene der axe gelegenen lichtstrahles durch ein system brechender medien bestimmen, von herrn dr. l. seidel. *Astronomische Nachrichten*, 43(19):289–304.
- Shannon, R. R. (2012). Aspheric surfaces. *Applied Optics and Optical Engineering*, 8:55–85.
- Sharma, K. K. (2006). *Optics: principles and applications*. Elsevier.
- Shmakov, S. L. (2011). A universal method of solving quartic equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 71(2):251–259.
- Silberstein, L. (1935). A simplified computation of cartesian lens surfaces. *JOSA*, 25(10):340–341.
- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2020a). Aplanatism in stigmatic optical systems. *Optics Letters*, 45(23):6390–6393.

- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2020b). Explicit cartesian oval as a superconic surface for stigmatic imaging optical systems with real or virtual source or image. *Proceedings of the Royal Society A*, 476(2235):20190894.
- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2020c). Superconical aplanatic ovoid singlet lenses. *JOSA A*, 37(7):1155–1165.
- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2021). Rigorously aplanatic descartes ovoids. *J. Opt. Soc. Am. A*, 38(8):1160–1169.
- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2022). Achromatic stigmatism: achromatic cartesian ovoid. *J. Opt. Soc. Am. A*, 39(9):1524–1532.
- Silva-Lora, A. and Torres, R. (2023). Stigmatic aspherical refracting surfaces from cartesian ovoids. *J. Opt. Soc. Am. A*, 40(4):C30–C36.
- Sorrenson, R. (2001). Dollond & son's pursuit of achromaticity, 1758–1789. *History of science*, 39(1):31–55.
- Southall, J. P. (1922). Aplanatic (or cartesian) optical surfaces. *Journal of the Franklin Institute*, 193(5):609–626.
- Sutter, J. P. and Alianelli, L. (2017). Aberration-free aspherical lens shape for shortening the focal distance of an already convergent beam. *Journal of synchrotron radiation*, 24(6):1120–1136.

- Sutter, J. P. and Alianelli, L. (2019). Ideal cartesian oval lens shape for refocusing an already convergent beam. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2054, page 030007. AIP Publishing.
- Taylor, H. D. (1906). *A System of Applied Optics: being a complete system of formulæ of the second order, and the foundation of a complete system of the third order, with examples of their practical application*. Macmillan Company, Limited.
- Thompson, K. P. and Rolland, J. P. (2012). Freeform optical surfaces: a revolution in imaging optical design. *Optics and Photonics News*, 23(6):30–35.
- Trevino, J. P., Gómez-Correa, J. E., Iskander, D. R., and Chávez-Cerda, S. (2013). Zernike vs. bessel circular functions in visual optics. *Ophthalmic and Physiological Optics*, 33(4):394–402.
- Turnbull, H. (1957). *Theory of Equations*. University mathematical texts. Oliver and Boyd. Method invented by Lodovico Ferrari at the request of Cardano Hieronymus and published in 1545, in his *Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis*, liber unus.
- Valencia-Estrada, J. C., Bedoya-Calle, A. H., and Malacara-Hernández, D. (2013). Explicit representations of all refractive optical interfaces without spherical aberration. *JOSA A*, 30(9):1814–1824.
- Valencia-Estrada, J. C. and Bedoya-Calle, H. (August 30, 2012). Lentes esféricas ovales. In *Mexican patent application. Instituto mexicano de la propiedad industrial (IMPI)*. MX/a/2012/010025.
- Valencia-Estrada, J. C., García-Marquez, J., Chassagne, L., and Topsu, S. (2017a). Catadioptric interfaces for designing vlc antennae. *Applied optics*, 56(27):7559–7566.

- Valencia-Estrada, J. C., Pereira-Ghirghi, M. V., Malacara-Hernández, Z., and Chaparro-Romo, H. A. (2017b). Aspheric coefficients of deformation for a cartesian oval surface. *Journal of Optics*, 46(2):100–107.
- Vaskas, E. M. (1957). Note on the wasserman-wolf method for designing aspheric surfaces. *JOSA*, 47(7):669–670.
- von F, Z. (1934). Beugungstheorie des schneidenver-fahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode. *physica*, 1(7-12):689–704.
- Walther, A. (1989). Irreducible aberrations of a lens used for a range of magnifications. *JOSA A*, 6(3):415–422.
- Wang, L., Pitter, M. C., and Somekh, M. G. (2010). Wide-field high-resolution solid immersion fluorescence microscopy applying an aplanatic solid immersion lens. *Applied Optics*, 49(31):6160–6169.
- Wassermann, G. and Wolf, E. (1949). On the theory of aplanatic aspheric systems. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 62(1):2.
- Watson, F. (2005). Stargazer: the life and times of the telescope. *Stargazer: the life and times of the telescope/Fred Watson. Cambridge*.
- Welford, W. (1976). Vi aplanatism and isoplanatism. In *Progress in Optics*, volume 13, pages 267–292. Elsevier.

Welford, W. T. (2017). *Aberrations of optical systems*. Routledge.

Willach, R. (1996). New light on the invention of the achromatic telescope objective. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 50(2):195–210.

Xuan, B. and Zhang, L. (2021). Study on fast manufacturing technology for high precision aspherical optics. In *10th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies: Advanced and Extreme Micro-Nano Manufacturing Technologies*, volume 12073, pages 168–173. SPIE.

Yamada, T. (2022). Practical numerical solutions of wassermann–wolf equations. *Optik*, 257:168725.

Young, T. (1807). Lectures on natural philosophy. *London*, 1:464.

Zhdanov, D., Zhdanov, A., Potemin, I., and Wang, Y. (2022). Use of two-level geometry representation for the ray tracing acceleration in optical systems with aspheric surfaces. In *Optical Design and Testing XII*, volume 12315, pages 32–45. SPIE.

Apéndices

Apéndice A. Constante para la condición de aplanetismo en sistemas conformados por superficies cartesianas

Para un sistema compuesto por superficies cartesianas, la expresión (78) es reducida a la expresión (79), cuando $\rho_k = 0$. Si se tiene que $R_k^{-1} = O_k$, se puede reemplazar (11) en (79) resultando

$$\mathcal{M}_0 = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \frac{\left(\frac{\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}-\zeta_k} - \frac{n_k}{d_k-\zeta_k}}{n_{k+1}-n_k} - \frac{1}{d_{k+1}-\zeta_k} \right)}{\left(\frac{\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}-\zeta_k} - \frac{n_k}{d_k-\zeta_k}}{n_{k+1}-n_k} - \frac{1}{d_k-\zeta_k} \right)}, \quad (183)$$

lo cual, también se puede escribir como

$$\mathcal{M}_0 = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{n_{k+1}}{n_k} \frac{\frac{n_k}{d_{k+1}-\zeta_k} - \frac{n_k}{d_k-\zeta_k}}{\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}-\zeta_k} - \frac{n_{k+1}}{d_k-\zeta_k}}, \quad (184)$$

por lo tanto

$$\mathcal{M}_0 = 1. \quad (185)$$

Apéndice B. Relación entre $\overline{V_k C_k}$ y los parámetros de forma de las superficies cartesianas

La ecuación (91) muestra la relación entre la cantidad $\overline{V_k C_k}$ y las coordenadas z_k y r_k sobre la superficie, y las componentes del vector normal a ese punto, $(N_z)_k$ y $(N_r)_k$. Las componentes del vector normal pueden ser expresadas como función de las derivadas de las coordenadas espaciales Silva-Lora and Torres (2020b), tal que $(N_z)_k = -dr_k/d\rho_k$ y $(N_r)_k = dz_k/d\rho_k$, por lo que la expresión (91) puede ser reescrita como

$$\frac{1}{\overline{V_k C_k}} = \frac{\left(\frac{dz_k}{d\rho_k}\right) \left(\frac{dr_k}{d\rho_k}\right)^{-1}}{r_k + (z_k - \zeta_k) \left(\frac{dz_k}{d\rho_k}\right) \left(\frac{dr_k}{d\rho_k}\right)^{-1}}. \quad (186)$$

Reescribiendo la expresión de la coordenada z_k , expresión (16), como

$$z_k = \zeta_k + \frac{1}{O_k G_k} \left(1 + S_k \rho_k^2 - \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2} \right), \quad (187)$$

las derivadas de las coordenadas de una superficie cartesiana pueden ser expresadas como

$$\frac{dz_k}{d\rho_k} = \frac{2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}}}{G_k O_k}, \quad (188)$$

y

$$\frac{dr_k}{d\rho_k} = \frac{G_k O_k \rho_k - \left(2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}} \right) (z_k - \zeta_k)}{G_k O_k \sqrt{\rho_k^2 - (z_k - \zeta_k)^2}}, \quad (189)$$

con z_k dado por la expresión (187). Si las expresiones (17), (187), (188) y (189) son reemplazadas en (186), es obtenida como resultado una expresión para la cantidad $\overline{V_k C_k}^{-1}$ como función de los parámetros de forma de las superficies cartesianas, dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{V_k C_k}} = & G_k O_k \left(2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}} \right) \\ & \times \left(G_k^2 O_k^2 \rho_k - \left(2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}} \right) \left(1 + S_k \rho_k^2 - \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2} \right) \right)^{-1} \\ & \times \left(1 + \frac{\left(2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}} \right) \left(S_k \rho_k^2 - \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2} + 1 \right)}{\left(G_k^2 O_k^2 \rho_k - \left(2S_k \rho_k - \frac{(2S_k - G_k O_k^2) \rho_k}{\sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}} \right) \left(1 + S_k \rho_k^2 - \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2} \right) \right)} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (190)$$

cuya expresión puede ser factorizada, reduciéndose a

$$\frac{1}{\overline{V_k C_k}} = \frac{-\left(\frac{2S_k}{G_k} - O_k^2\right) + \frac{2S_k}{G_k} \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}}{O_k \sqrt{1 + (2S_k - G_k O_k^2) \rho_k^2}}. \quad (191)$$

lo cual puede ser escrito como

$$\overline{AI_0}^2 = (s_0 - \zeta_0)^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_0 - \zeta_0)^2} - \frac{2\rho \cos \varphi}{(s_0 - \zeta_0)} \right]. \quad (193)$$

De la Fig. 44 tenemos $\rho \cos \varphi = z_0 - \zeta_0$, por lo que la expresión (193) puede ser escrita como

$$\overline{AI_0}^2 = (s_0 - \zeta_0)^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_0 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z_0 - \zeta_0)}{(s_0 - \zeta_0)} \right], \quad (194)$$

a partir de esto el trayecto geométrico $\overline{AI_0}$ se puede expresar de la siguiente manera

$$\overline{AI_0} = -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_0 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z_0 - \zeta_0)}{s_0 - \zeta_0} \right]^{1/2}, \quad (195)$$

donde $|s_0 - \zeta_0| = -(s_0 - \zeta_0)$. De la misma manera que para el trayecto geométrico $\overline{AI_0}$, del triángulo $\Delta A' I_0 V_0$, se puede obtener una expresión para el trayecto geométrico $\overline{I_0 A'}$, el cual se puede expresar como

$$\overline{I_0 A'} = (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_1 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z_0 - \zeta_0)}{s_1 - \zeta_0} \right]^{1/2}. \quad (196)$$

A partir de las Ecs. (195) y (196) es posible expresar la trayectoria geométrica de cualquier rayo que pasa a través de una superficie óptica refractiva, ya que únicamente se requiere la expresión del hundimiento de dicha superficie, $z_0 - \zeta_0$. De donde resulta que el trayecto que recorre el rayo es la suma de las trayectorias del rayo al recorrer el espacio objeto y el espacio imagen.

Apéndice D. Aberraciones primarias para una superficie esférica refractiva

A continuación se muestra el desarrollo de las aberraciones primarias para el caso de una superficie refractiva esférica. La formulación de los coeficientes de aberración se expone aquí utilizando los parámetros implementados en este trabajo de tesis, que será muy útil para definir las expresiones de los coeficientes de aberración en superficies cartesianas refractivas. En primer lugar, mostramos el coeficiente para la aberración esférica para un objeto en eje, y luego los coeficientes de las aberraciones fuera de eje.

Aberraciones para puntos objeto sobre el eje óptico

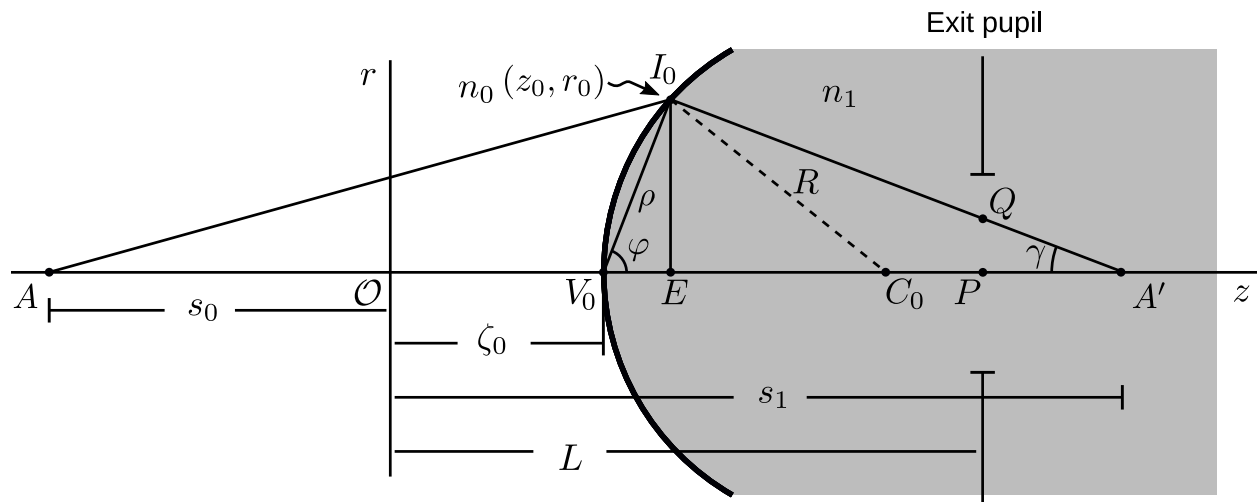


Figura 45. Formación de una imagen a través de una superficie cartesiana refractiva a partir de un objeto puntual ubicado sobre el eje óptico. El objeto puntual está ubicado en A, a una distancia de $s_0 - \zeta_0 < 0$ medida desde el vértice de la superficie V_0 , y su imagen paraxial está en A' , a una distancia de $s_1 - \zeta_0 > 0$ también medida desde V_0 .

En la Fig. 45 se muestran las trayectorias geométricas que los rayos recorren tanto en el espacio del objeto, $\overline{AI_0}$, como en el espacio de la imagen, $\overline{I_0A'}$, cuyas expresiones están dadas por

las Ecs. (195) y (196), expresadas como

$$\overline{AI_0} = -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_0 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z_0 - \zeta_0)}{s_0 - \zeta_0} \right]^{1/2}, \quad (197)$$

$$\overline{I_0A'} = (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{\rho^2}{(s_1 - \zeta_0)^2} - \frac{2(z_0 - \zeta_0)}{s_1 - \zeta_0} \right]^{1/2}. \quad (198)$$

De acuerdo con la Fig. 45, la aberración esférica es definida como la diferencia entre las *longitudes de camino óptico* (LCO) del rayo $\overline{AV_0A'}$ (rayo principal) y del rayo $\overline{AI_0A'}$ (rayo marginal), esto es

$$W_0 = [AI_0A'] - [AV_0A'] = n_0\overline{AI_0} + n_1\overline{I_0A'} - n_0\overline{AV_0} - n_0\overline{V_0A'}, \quad (199)$$

donde los corchetes cuadrados indican que se trata de la LCO y no de trayectos geométricos. Si se considera que la superficie esférica se puede expresar como

$$z_0 - \zeta_0 = \frac{O}{2}\rho^2, \quad (200)$$

donde $O = \frac{1}{R}$ es la curvatura de la esfera, ρ es la distancia vértice-superficie, y la cantidad $s_0 - \zeta_0$ es considerada negativa, tal que $\sqrt{(s_0 - \zeta_0)^2} = -(s_0 - \zeta_0)$, se pueden escribir las expresiones (197)

y (198) como

$$\overline{AI_0} = -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{s_0 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 \right]^{1/2}, \quad (201)$$

$$\overline{I_0A'} = (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{s_1 - \zeta_0} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 \right]^{1/2}. \quad (202)$$

Expandiendo estas expresiones hasta un cuarto orden de aproximación, se tiene

$$\overline{AI_0} = -(s_0 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{2(s_0 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 - \frac{1}{8(s_0 - \zeta_0)^2} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 \rho^4 \right], \quad (203)$$

$$\overline{I_0A'} = (s_1 - \zeta_0) \left[1 + \frac{1}{2(s_1 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) \rho^2 - \frac{1}{8(s_1 - \zeta_0)^2} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 \rho^4 \right]. \quad (204)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (199) se obtiene la función de aberración se puede expresar como

$$W_0 = - \left[\frac{n_1}{8(s_1 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 - \frac{n_0}{8(s_0 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 \right] \rho^4, \quad (205)$$

donde la diferencia de camino óptico con respecto a lo que predice la óptica paraxial ha sido considerada, lo cual impone que

$$n_1 \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right) - n_0 \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right) = 0. \quad (206)$$

La expresión de la función de aberración, Ec. (207), se puede escribir como

$$W_0 = a_s \rho^4, \quad (207)$$

donde W_0 es la función de la aberración esférica, y su coeficiente a_s es dado por

$$a_s = - \left[\frac{n_1}{8(s_1 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 - \frac{n_0}{8(s_0 - \zeta_0)} \left(\frac{1}{s_0 - \zeta_0} - O \right)^2 \right], \quad (208)$$

el cual, a través de la expresión (206), se puede expresar como

$$a_s = - \frac{n_1^2}{8} \left(\frac{1}{s_1 - \zeta_0} - O \right)^2 \left[\frac{1}{n_1(s_1 - \zeta_0)} - \frac{1}{n_0(s_0 - \zeta_0)} \right]. \quad (209)$$

Se puede observar que para eliminar la aberración esférica en una superficie esférica refractiva, es necesario que el objeto y su imagen se encuentren en los puntos Young-Weierstrass o ambos a una distancia igual al radio de curvatura de la esfera. Por lo tanto, si queremos que la ecuación (209) sea cero, podemos proceder de dos maneras, una de ellas es considerando que

$$s_1 - \zeta_0 = \frac{1}{O} = R, \quad (210)$$

con R siendo el radio de curvatura de la superficie, lo cual indica que la imagen debe estar ubicada en el centro de curvatura de dicha esfera. Si la imagen está en el centro de curvatura, entonces, usando la Ec. (206), obtenemos $s_0 - \zeta_0 = O^{-1} = R$, lo que indica que el objeto también se encuentra

en el centro de curvatura de la superficie. La otra forma en que el valor de la Ec. (209) es cero se obtiene utilizando la condición dada por la Ec. (99), la cual se puede expresar como

$$s_1 - \zeta_0 = \frac{n_0}{n_1}(s_0 - \zeta_0) . \quad (211)$$

Si esta expresión es sustituida en (206), se obtiene que

$$s_0 - \zeta_0 = \left(\frac{n_1 + n_0}{n_0} \right) R , \quad (212)$$

que es un punto de Young-Weierstrass. La ubicación de su imagen se obtiene reemplazando la expresión anterior en (206), resultando en

$$s_1 - \zeta_0 = \left(\frac{n_1 + n_0}{n_1} \right) R . \quad (213)$$

Se deduce de esto que para el caso de la superficie esférica refractiva, las maneras de eliminar la aberración esférica es para los casos en que el objeto y su imagen se ubican en el centro de curvatura de la imagen o en los llamados puntos de Young-Weierstrass.

Efecto de la pupila de salida en las aberraciones. Aunque es útil comprender la función de aberración para una superficie refractiva en presencia de una pupila física, es más intuitivo expresar estas aberraciones en un plano sobre la pupila de salida. Por lo tanto, necesitamos derivar una expresión para ρ en términos de \overline{PQ} . Basado en la Fig. 45, y considerando la similitud

de los triángulos $\Delta PQA'$ y $\Delta EI_0A'$, podemos escribir.

$$\tan \gamma = \frac{r_0}{s_1 - z_0} = \frac{\overline{PQ}}{s_1 - L}. \quad (214)$$

Usando la Ec. (214), junto con la Ec. (200), se obtiene que

$$r_0 = \frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} [(s_1 - \zeta_0) - (z_0 - \zeta_0)], \quad (215)$$

cuya expresión relaciona la coordenada r_0 con la distancia transversal \overline{PQ} . Reemplazando las Ecs.

(200) and (215) en la expresión $\rho^2 = (z_0 - \zeta_0)^2 + r_0^2$, se obtiene

$$\rho^2 = \frac{O^2}{4} \rho^4 + \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 \left(s_1 - \zeta_0 - \frac{O}{2} \rho^2 \right)^2, \quad (216)$$

de donde se deriva la expresión

$$\frac{O^2}{4} \left[\left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 + 1 \right] \rho^4 - \left[\left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 (s_1 - \zeta_0)O + 1 \right] \rho^2 + \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 (s_1 - \zeta_0)^2 = 0, \quad (217)$$

la cual es una expresión cuadrática de ρ^2 como función de la cantidad \overline{PQ} , cuya solución es dada por

$$\rho^2 = \frac{1 + \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 (s_1 - \zeta_0)O \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 (s_1 - \zeta_0)O [2 - (s_1 - \zeta_0)O]}}{\frac{O^2}{2} \left[\left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 + 1 \right]}. \quad (218)$$

Expandiendo la expresión anterior, y considerando la solución física aceptable dada al considerar el signo negativo de la solución cuadrática, se llega a

$$\rho^2 = \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^2 (s_1 - \zeta_0)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\overline{PQ}}{s_1 - L} \right)^4 O(s_1 - \zeta_0)^3 (4 - (s_1 - \zeta_0)O) + O(\rho^5). \quad (219)$$

Por lo tanto, asumiendo aperturas moderadas, se puede considerar que $\rho \propto \overline{PQ}$, es decir

$$\rho \approx \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right) r, \quad (220)$$

con $r = \overline{PQ}$.

Usando la Ec. (220) se puede expresar la función de aberación en el plano de la pupila de salida como

$$W_0 = a_{ss} r^4, \quad (221)$$

donde

$$a_{ss} = a_s \left(\frac{s_1 - \zeta_0}{s_1 - L} \right)^4. \quad (222)$$

Aberraciones para puntos objeto fuera del eje óptico

Consideremos la Fig. 46, donde se muestra un sistema óptico compuesto por una superficie esférica refractiva, con una pupila de salida ubicada a una distancia L medida desde el origen de

coordenadas, y con centro en C_0 . La imagen también muestra rayos que parten del punto objeto B y se forman en B' , donde $\overline{BVB'}$ es la trayectoria recorrida por el rayo que no se desvía, $\overline{BI_1B'}$ es la trayectoria recorrida por el rayo principal, y $\overline{BI_0B'}$ es la trayectoria recorrida por un rayo arbitrario. Considerando la superficie esférica refractiva de la Fig. 46, obtenemos por simetría, que la aberración para un punto fuera del eje se da por

$$\begin{aligned} W_s &= [\overline{BI_0B'}] - [\overline{BI_1B'}] = [\overline{BI_0B'}] - [\overline{BVB'}] - ([\overline{BI_1B'}] - [\overline{BVB'}]) , \\ &= a_s \left(\overline{VI_0}^4 - \overline{VI_1}^4 \right) . \end{aligned} \quad (223)$$

Esto es válido debido a que la simetría de la superficie esférica nos permite utilizar el desarrollo de la aberración en el eje para desarrollar las aberraciones fuera del eje. Existe una analogía entre los triángulos $\overline{BB'I_0}$ y $\overline{BB'I_1}$ de la Fig. 46 con el triángulo $\overline{AA'I_0}$ de la Fig. 45, que nos permite adoptar las expresiones (207) y (221). La adopción de estas expresiones se lleva a cabo considerando que $\rho = \overline{VI_0}$ y $r \approx \overline{DQ}$, para el caso del triángulo $\overline{BB'I_0}$, y $\rho = \overline{VI_1}$ y $r \approx \overline{DP}$, para el caso del triángulo $\overline{BB'I_1}$.

Por lo tanto, se puede escribir

$$W_s = a_{ss} \left(\overline{DQ}^4 - \overline{DP}^4 \right) , \quad (224)$$

donde el coeficiente a_{ss} es dado por la Ec. (222). De acuerdo a la Fig. 47, donde \overline{DP} , \overline{PQ} y \overline{DQ} son mostrados sobre la pupila de salida, se puede obtener, mediante el uso del teorema del coseno,

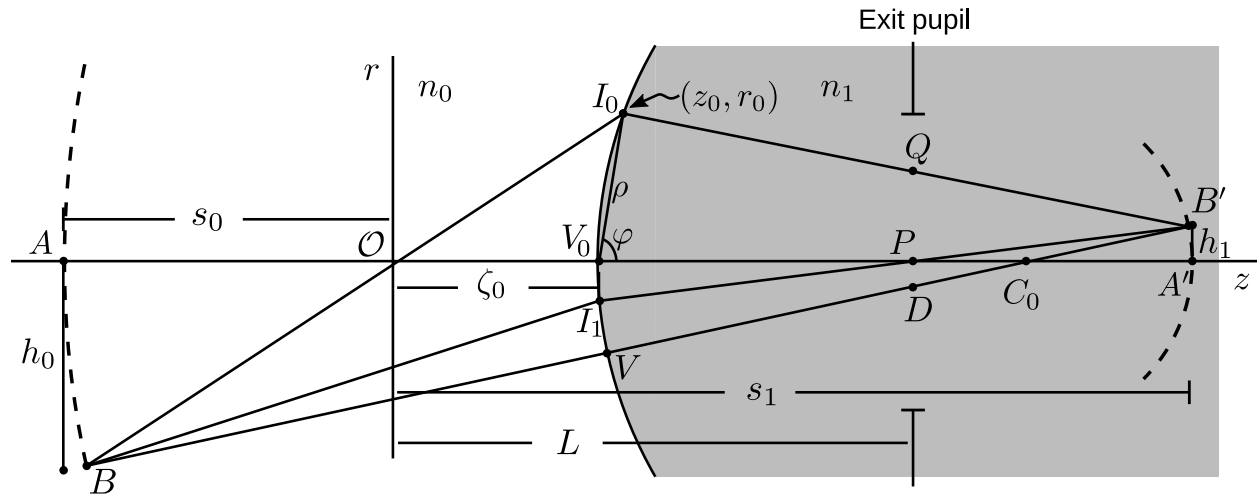


Figura 46. Formación de una imagen a través de una superficies esférica refractiva para un objeto puntual fuera de eje.

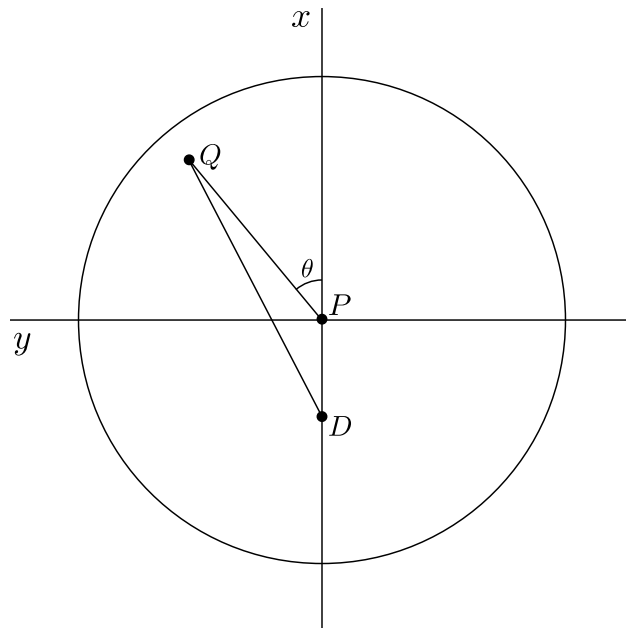


Figura 47. Plano sobre la pupila de salida.

que

$$\overline{DQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{DP}^2 + 2\overline{PQ} \overline{DP} \cos \theta, \quad (225)$$

cuyo resultado, si se reemplaza en (224), nos conduce a la expresión

$$W_s = a_{ss} \left(\overline{PQ}^4 + 2\overline{PQ}^2 \overline{DP}^2 + 4\overline{PQ}^3 \overline{OD} \cos \theta + 4\overline{PQ} \overline{DP}^3 \cos \theta + 4\overline{PQ}^2 \overline{DP}^2 \cos^2 \theta \right). \quad (226)$$

De la Fig. 46 se puede observar, a través de los triángulos ΔPDC_0 y $\Delta C_0A'B'$, que

$$\frac{\overline{DP}}{\zeta_0 + R - L} \approx \frac{h_1}{s_1 - \zeta_0 - R}, \quad (227)$$

para lo cual se puede escribir

$$\overline{DP} \approx b_0 h_1, \quad (228)$$

con

$$b_0 = \frac{\zeta_0 + R - L}{s_1 - \zeta_0 - R}, \quad (229)$$

donde $R = \overline{V_0 C_0} = 1/O$ es el radio de curvatura. De aquí, la expresión (226) se transforma en

$$W_s = a_{ss} \left(r^4 + 4b_0 h_1 r^3 \cos \theta + 4b_0^2 h_1^2 r^2 \cos^2 \theta + 2b_0^2 h_1^2 r^2 + 4b_0^3 h_1^3 r \cos \theta \right). \quad (230)$$

La expresión (230) es conocida como la función de las aberaciones primarias para una

superficie esférica refractiva, ver Tab. 13. Esta expresión puede ser escrita como

$$W_s = a_{ss}r^4 + a_{cs}h_1r^3 \cos \theta + a_{as}h_1^2r^2 \cos^2 \theta + a_{ds}h_1^2r^2 + a_{ts}h_1^3r \cos \theta, \quad (231)$$

donde

$$a_{cs} = 4a_{ss}b_0, \quad (232)$$

$$a_{as} = 4a_{ss}b_0^2, \quad (233)$$

$$a_{ds} = \frac{1}{2}a_{as}, \quad (234)$$

$$a_{ts} = 4a_{ss}b_0^3, \quad (235)$$

son los coeficientes de las aberraciones.

Tabla 13

Aberraciones primarias para una superficie esférica refractiva.

Aberración	Expresión
Aberración esférica	$a_{ss}r^4$
Coma	$a_{cs}h_1r^3 \cos \theta$
Astigmatismo	$a_{as}h_1^2r^2 \cos^2 \theta$
Curvatura de campo	$a_{ds}h_1^2r^2$
Distorsión	$a_{ts}h_1^3r \cos \theta$

Aberraciones primarias sobre el plano gaussiano. En el procedimiento anterior,

asumimos que $s_0 - \zeta_0 = \overline{V_0A}$, tanto para objetos en el eje como para objetos fuera del eje.

Esta consideración nos lleva al hecho de que las superficies donde yacen el objeto y la imagen son

superficies esféricas concéntricas, como se muestra en la Fig. 46. El radio de la superficie del objeto es $R_{\mathcal{A}} = R - s_0 + \zeta_0$ y el radio de la superficie de la imagen es $R_{\mathcal{A}'} = R - s_1 + \zeta_0$. Para expresar las aberraciones primarias, considerando que tanto el objeto como su imagen yacen en superficies planas, es necesario llevar el campo del objeto al plano Gaussiano. Por lo tanto, considerando que el campo del objeto está en una superficie plana, necesitamos encontrar el radio de curvatura de la superficie esférica en la que ahora yace la imagen, cuyo radio ya no es $R_{\mathcal{A}'} = R - s_1 + \zeta_0$. En la literatura, la expresión para calcular el radio de curvatura de la superficie de la imagen cuando el objeto está en una superficie plana (Taylor, 1906; Mahajan, 1998) se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\frac{1}{R_{\mathcal{A}'}} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 R}, \quad (236)$$

a partir de la cual se obtiene el radio de Petzval.

En la Fig. 48, se muestra la superficie de Petzval en la que se encuentra la imagen de un objeto plano, denotada por los puntos P_1 y P_2 , que pasan por el punto sobre el eje \mathcal{A}' . Si queremos formular las aberraciones en el plano gaussiano, $\overline{A'B'}$, necesitamos agregar dos contribuciones adicionales a la expresión de las aberraciones. La primera contribución se obtiene del hecho de que el campo se toma de la superficie de Petzval al plano gaussiano, lo que introduce un efecto de desenfoque. Este desenfoque depende de la altura de la imagen y del desenfoque longitudinal

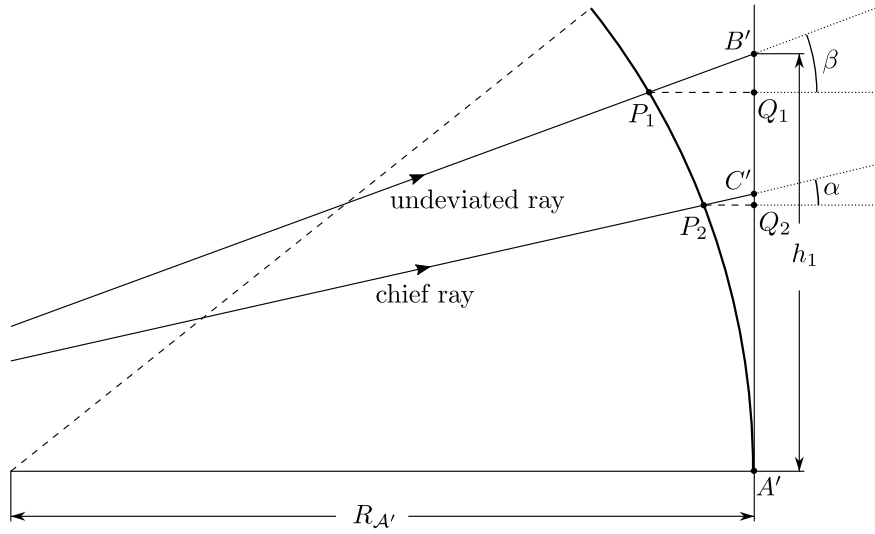


Figura 48. Superficie de Petzval sobre la cual se forma la imagen del campo proveniente de un objeto plano cuando este atraviesa una superficie esférica.

$\overline{P_1Q_1}$. Por lo tanto, la aberración producida por el desenfoque longitudinal se define como

$$\Delta W_d \approx \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{s_1 - L} - \frac{1}{s_1 - L + \overline{P_1Q_1}} \right) r^2, \quad (237)$$

donde r es la coordenada transversal sobre la pupila de salida. Dado que $\overline{P_1Q_1} \approx h_1^2/(2R_{\mathcal{A}'})$, y teniendo en cuenta la Ec. (237) junto con el hecho de que $s_1 - L \approx s_1 - L + \overline{P_1Q_1}$, se obtiene la expresión

$$\Delta W_d \approx \frac{n_1}{4R_{\mathcal{A}'}} \left(\frac{h_1}{s_1 - L} \right)^2 r^2, \quad (238)$$

$$\approx \frac{n_1(n_0 - n_1)}{4n_0R(s_1 - L)^2} h_1^2 r^2. \quad (239)$$

La otra contribución a las aberraciones se relaciona con la distorsión. Según la Fig. 48, la

distorsión de la expresión (230) viene dada por la diferencia entre la intersección del rayo principal y el rayo no desviado, distancias $\overline{P_2P_1}$. En el plano $\overline{A'B'}$ estos rayos se interceptan en los puntos C' y B' desde donde se puede escribir que

$$\overline{C'B'} = \overline{Q_2Q_1} + \overline{Q_1B'} - \overline{Q_2C'}, \quad (240)$$

$$\approx \overline{P_2P_1} + \overline{Q_1B'} - \overline{Q_2C'}, \quad (241)$$

donde

$$\overline{Q_1B'} = \overline{P_1Q_1} \tan \beta = \frac{h_1^3}{2R_{\mathcal{A}'}(s_1 - R + \zeta_0)}, \quad (242)$$

$$\overline{Q_2C'} = \overline{P_2Q_2} \tan \alpha = \frac{h_1^3}{2R_{\mathcal{A}'}(s_1 - L)}, \quad (243)$$

tal que la distorsión adicional, producida al tomar el campo desde la superficie de Petzval hasta el plano Gaussiano, es

$$\begin{aligned} \Delta W_t &= \frac{n_1}{s_1 - L} \left(\overline{Q_1B'} - \overline{Q_2C'} \right) r \cos \theta, \\ &= \frac{n_1}{2(s_1 - L)R_{\mathcal{A}'}} \left(\frac{1}{s_1 - \frac{1}{O} - \zeta_0} - \frac{1}{s_1 - L} \right) h_1^3 r \cos \theta, \end{aligned} \quad (244)$$

$$= \frac{n_1(n_0 - n_1)b_0}{2n_0R(s_1 - L)^2} h_1^3 r \cos \theta. \quad (245)$$

Usando las expresiones (239) y (245), se puede expresar las aberraciones primarias para una superficies esférica refractiva sobre el plano gausseano. Esta expresión de las aberraciones se

puede obtener mediante la adición de las contribuciones (239) y (245) a la expresión (231), lo cual se puede ver como un cambio en los coeficientes (234) y (235), dados ahora por medio de las expresiones

$$a_{ds} = \frac{1}{2}a_{as} + \frac{n_1(n_0 - n_1)}{4n_0R(s_1 - L)^2}, \quad (246)$$

$$a_{ts} = 4a_{ss}b_0^3 + \frac{n_1(n_0 - n_1)b_0}{2n_0R(s_1 - L)^2}. \quad (247)$$